Exercícios Deep Learning - List Teórica 01
Elaboração de Carolina Coimbra, Guilherme Borges e Edemir Andrade Jr.

August 14, 2019

1 Retas

1- Esboce num gráfico as seguintes retas:

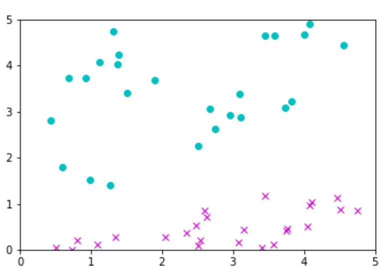
a) $2x_2 + x_1 = 0$

b) $x_2 - 2x_1 + 1 = 0$

c) $x_2 - 1 = 0$

d) $x_1 - 1 = 0$

2- Especifique uma reta que divide as duas categorias de itens no gráfico abaixo onde x_1 é o eixo abscissas e e x_2 é o eixo das ordenadas.



3- Considere a reta $x_2 = 3 + 2x_1$. Obtenha a expressão analítica do conjunto de todas as retas paralelas e o conjunto de todas as retas perpendiculares à reta acima.

2 Álgebra Linear

4- Sejam $w = w_1, ...w_n$ e $x = x_1, ..., x_n$ vetores coluna de dimensão $n \times 1$. Expresse $w'x$ em termos de um somatório.

5- Seja $x = (x_1, ..., x_n)$ um vetor-coluna $n \times 1$ e A uma matriz $n \times n$. A' indica a matriz transposta de A. Verifique que as seguintes identidades matriciais estão corretas, checando se o lado direito é igual ao lado esquerdo.

a) $x'Ax = \sum_{i,j} x_i x_j A_{ij}$

b) $x'x = \sum_i x_i^2$

c) xx' é uma matriz simétrica $n \times n$ com elemento (i, j) dado por $x_i x_j$

3 Derivadas

6- Encontre a derivada $F'(x)$ de

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

7- Encontre a derivada $F'(x)$ de

$$F(x) = e^{\sin x}$$

8- Função sigmóide:

$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

a) Esboce o gráfico de $S(x)$.

b) Mostre que $S(-x) = 1 - S(x)$

c) Calcule a derivada em termos da própria sigmóide, isto é, mostre que $S'(x) = S(x)(1 - S(x))$. Esboce o gráfico da derivada.

d) Qual o valor máximo de $S'(x)$? Para qual valor de x ela atinge esse máximo?

e) Considere $S(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$, sendo que $z = b + W_1 x$ encontre $\frac{\partial S}{\partial b}$ e $\frac{\partial S}{\partial W_1}$.

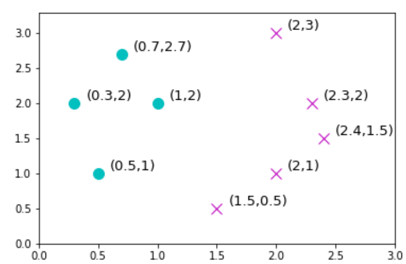
f) Considere $S(h(x)) = \frac{1}{1+e^{-h(x)}}$, calcule $\frac{\partial S}{\partial x}$ em função de $h(x)$.

9- Suponha que você tenha dados da forma $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, onde $X_i \in \mathbb{R}$ e que seu classificador seja da forma $\hat{Y}_i = \beta X_i$. Considerando o erro quadrático, ou seja, $L(\hat{Y}, Y) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - Y_i)^2$, qual o valor de β que minimiza o erro?

4 Perceptron

10- Considere um perceptron com duas features x_1, x_2, onde $w_0 = 3, w_1 = 2, w_2 = 1$, qual é a fórmula da reta que divide as duas classes? Qual é o vetor normal à reta?

11- Considere um perceptron com $w_0 = 0, w_1 = -1, w_2 = 1$, com os pontos mostrados no gráfico abaixo (círculos pertencem à classe 1 e 'x' à classe 0), esboce o gráfico da reta de separação das classes. Execute uma iteração do algoritmo do perceptron com $m = 0.1$, esboce a nova reta de separação.



12- Seja o conjunto de entrada dado por um total de 4 amostras, onde cada amostra é representada pela tupla $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{t})$, composta pelo vetor $\boldsymbol{x_i} = (x_0, x_1, x_2)$ e um rotulo $\boldsymbol{t}$ associado a amostra.

	x_0	x_1	x_2	t
Entrada 1	1	0	0	0
Entrada 2	1	0	1	0
Entrada 3	1	1	0	0
Entrada 4	1	1	1	1

a) Execute a quinta iteração do algoritmo do perceptron com pesos iniciais $w_0, w_1 e w_2$ iguais a 0, taxa de aprendizado η igual a 0.5, e utilizando a função de ativação degrau bipolar definida como:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Abaixo segue o exemplo das quatro primeiras iterações do algoritmo:

1º Iteração:
Entrada 1:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(0*1+0*0+0*0) = f(0) = 0;\ logo\ s_{out} = t \end{aligned} \tag{1}$$

Entrada 2:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(0*1+0*0+0*1) = f(0) = 0;\ logo\ s_{out} = t \end{aligned} \tag{2}$$

Entrada 3:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(0*1+0*1+0*0) = f(0) = 0;\ logo\ s_{out} = t \end{aligned} \tag{3}$$

Entrada 4:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(0*1+0*1+0*1) = f(0) = 0;\ logo\ s_{out} \neq t \end{aligned} \tag{4}$$

Atualiza Pesos:

$$\begin{aligned} w_0 &= w_0 + \eta(t - s_{out}) * x_0 = 0 + 0.5(1-0)*1 = 0.5 \\ w_1 &= w_1 + \eta(t - s_{out}) * x_1 = 0 + 0.5(1-0)*1 = 0.5 \\ w_2 &= w_2 + \eta(t - s_{out}) * x_2 = 0 + 0.5(1-0)*1 = 0.5 \end{aligned}$$

2º Iteração:
Entrada 1:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(0.5*1+0.5*0+0.5*0) = f(0.5) = 1;\ logo\ s_{out} \neq t \end{aligned} \tag{5}$$

Atualiza Pesos:

$$\begin{aligned} w_0 &= w_0 + \eta(t - s_{out}) * x_0 = 0.5 + 0.5(0-1)*1 = 0 \\ w_1 &= w_1 + \eta(t - s_{out}) * x_1 = 0.5 + 0.5(0-1)*0 = 0.5 \\ w_2 &= w_2 + \eta(t - s_{out}) * x_2 = 0.5 + 0.5(0-1)*0 = 0.5 \end{aligned}$$

Entrada 2:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(0*1+0.5*0+0.5*1) = f(0.5) = 1;\ logo\ s_{out} \neq t \end{aligned} \tag{6}$$

Atualiza Pesos:

$$\begin{aligned} w_0 &= w_0 + \eta(t - s_{out}) * x_0 = 0 + 0.5(0-1)*1 = -0.5 \\ w_1 &= w_1 + \eta(t - s_{out}) * x_1 = 0.5 + 0.5(0-1)*0 = 0.5 \\ w_2 &= w_2 + \eta(t - s_{out}) * x_2 = 0.5 + 0.5(0-1)*1 = 0 \end{aligned}$$

Entrada 3:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(-0.5*1 + 0.5*1 + 0*0) = f(0) = 0;\ logo\ s_{out} = t \end{aligned} \tag{7}$$

Entrada 4:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(-0.5*1 + 0.5*1 + 0*1) = f(0) = 0;\ logo\ s_{out} \neq t \end{aligned} \tag{8}$$

Atualiza Pesos:

$$\begin{aligned} w_0 &= w_0 + \eta(t - s_{out}) * x_0 = -0.5 + 0.5(1-0)*1 = 0 \\ w_1 &= w_1 + \eta(t - s_{out}) * x_1 = 0.5 + 0.5(1-0)*1 = 1 \\ w_2 &= w_2 + \eta(t - s_{out}) * x_2 = 0 + 0.5(1-0)*1 = 0.5 \end{aligned}$$

3º Iteração:
Entrada 1:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(0*1 + 1*0 + 0.5*0) = f(0) = 0;\ logo\ s_{out} = t \end{aligned} \tag{9}$$

Entrada 2:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(0*1 + 1*0 + 0.5*1) = f(0.5) = 1;\ logo\ s_{out} \neq t \end{aligned} \tag{10}$$

Atualiza Pesos:

$$\begin{aligned} w_0 &= w_0 + \eta(t - s_{out}) * x_0 = 0 + 0.5(0-1)*1 = -0.5 \\ w_1 &= w_1 + \eta(t - s_{out}) * x_1 = 1 + 0.5(0-1)*0 = 1 \\ w_2 &= w_2 + \eta(t - s_{out}) * x_2 = 0.5 + 0.5(0-1)*1 = 0 \end{aligned}$$

Entrada 3:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(-0.5*1 + 1*1 + 0*0) = f(0.5) = 1;\ logo\ s_{out} \neq= t \end{aligned} \tag{11}$$

Atualiza Pesos:

$$\begin{aligned} w_0 &= w_0 + \eta(t - s_{out}) * x_0 = -0.5 + 0.5(0-1)*1 = -1 \\ w_1 &= w_1 + \eta(t - s_{out}) * x_1 = 1 + 0.5(0-1)*0 = 1 \\ w_2 &= w_2 + \eta(t - s_{out}) * x_2 = 0.5 + 0.5(0-1)*1 = 0 \end{aligned}$$

Entrada 4:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(-1*1 + 1*1 + 0*1) = f(0) = 0;\ logo\ s_{out} \neq t \end{aligned} \tag{12}$$

Atualiza Pesos:

$$w_0 = w_0 + \eta(t - s_{out}) * x_0 = -1 + 0.5(1-0) * 1 = -0.5$$
$$w_1 = w_1 + \eta(t - s_{out}) * x_1 = 1 + 0.5(1-0) * 1 = 1.5$$
$$w_2 = w_2 + \eta(t - s_{out}) * x_2 = 0 + 0.5(1-0) * 1 = 0.5$$

4º Iteração:
Entrada 1:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(-0.5*1 + 1.5*0 + 0.5*0) = f(-0.5) = 0;\ logo\ s_{out} = t \end{aligned} \tag{13}$$

Entrada 2:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(-0.5*1 + 1.5*0 + 0.5*1) = f(0) = 0;\ logo\ s_{out} = t \end{aligned} \tag{14}$$

Entrada 3:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(-0.5*1 + 1.5*1 + 0.5*0) = f(1) = 1;\ logo\ s_{out} \neq= t \end{aligned} \tag{15}$$

Atualiza Pesos:

$$w_0 = w_0 + \eta(t - s_{out}) * x_0 = -0.5 + 0.5(0-1) * 1 = -1$$
$$w_1 = w_1 + \eta(t - s_{out}) * x_1 = 1.5 + 0.5(0-1) * 0 = 1$$
$$w_2 = w_2 + \eta(t - s_{out}) * x_2 = 0.5 + 0.5(0-1) * 1 = 0.5$$

Entrada 4:

$$\begin{aligned} s_{out} &= f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2) \\ &= f(-1*1 + 1*1 + 0.5*1) = f(0.5) = 1;\ logo\ s_{out} = t \end{aligned} \tag{16}$$

b) Esboce o gráfico da reta gerada após a quinta iteração do algoritmo. A equação da reta após a quinta iteração é dado pela equação: $x_1w_1 + x_2w_2 = -w_0$

5 Derivadas

13- Seja $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ de forma que:

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Assuma que $\mathbf{y} = f(\mathbf{u})$ e $\mathbf{u} = g(\mathbf{x})$, escreva a derivada (usando a regra da cadeia) para $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$

14- Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ e $z = \|\mathbf{X}\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2$, calcule $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{w}}$.

15- Sejam $u, \mathbf{x} \in R^n$ (vetores colunas).

a) Calcule a derivada de $u'\mathbf{x}$ em respeito a $\mathbf{x}$, ou seja: $\frac{\partial(u'\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$

b) Calcule a derivada de $\mathbf{x}'\mathbf{x}$ em respeito a $\mathbf{x}$, ou seja: $\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$

6 Regressão Linear

16- Em uma regressão linear, o valor estimado $\hat{Y}_i$ é dado por

$$\hat{Y}_i = b + w_1 x_1 + ... + w_n x_n$$

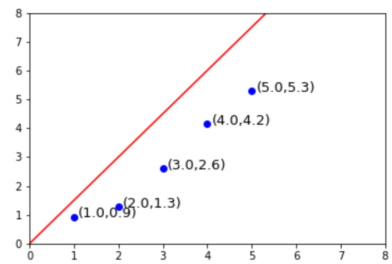
onde n é o número de features. O erro quadrático é dado por $L(\hat{Y}, Y) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - Y_i)^2$. Neste exercício, $n = 1$, portanto $\hat{Y}_i = b + w_1 x_1$.

a) Considerando os pontos mostrados no gráfico abaixo e a reta com $w_1 = 1.5$ e $b = 0$, calcule o erro quadrático dessa reta.

b) Utilize a derivada do erro quadrático para atualizar os valores de w_1 e b, encontrando uma nova reta (Dica: use uma taxa de aprendizado menor que 0.1). Qual é o erro quadrático desta nova reta?

7 Regressão Logística

17- No modelo de regressão logística com um regressor apenas: $P(Y_i = 1) = p(x_i) = \frac{1}{1+\exp(-b-w_1 x_i)}$. Deduza que a log-verossimilhança de $\theta = (b, w_1)$ no



caso do modelo logístico com um único regressor é dada por:

$$l(\theta) = b\sum_{i=1}^{n} y_i + w_1 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_i \log(1 + e^{b+w_1 x_i})$$

18- No modelo logístico com um regressor apenas, mostre que o vetor gradiente de $l(\theta)$ é dado por:

$$Dl(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial logl}{\partial b} \\ \frac{\partial logl}{\partial w_1} \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i - p_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - p_i x_i \end{bmatrix}$$

onde $p_i = p(x_i)$.

19- Ainda no modelo logístico com um regressor apenas, mostre que a matriz hessiana de $l(\theta)$ é dada por:

$$Dl(\theta) = -\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 logl}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 logl}{\partial b \partial w_1} \\ \frac{\partial^2 logl}{\partial b \partial w_1} & \frac{\partial^2 logl}{\partial w_1^2} \end{bmatrix} \quad = -\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) & \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)x_i \\ \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)x_i & \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)x_i^2 \end{bmatrix}$$

8 Newton e SGA

20- Aplique duas iterações do método de newton para encontrar o ponto máximo da função $f(x) = -(x-3)^4$ para $x_0 = 1$.

21- Utilizando a a mesma função do exercicio anterior, aplique o método do gradiente ascendente usando learning rate $\alpha = 0.01$ e $x_0 = 1$. Compare os dois resultados.