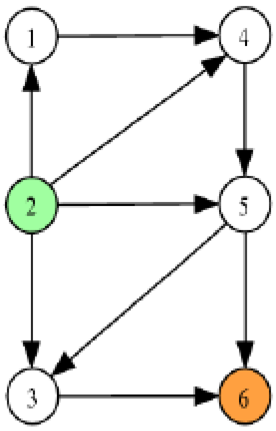
Thiago Moraes Rocha

Trabalho Final

Introdução à Teoria dos Grafos

Dígrafos

Um grafo dirigido ou dígrafo ou direcionado G é composto de dois conjuntos finitos, chamaremos arco ao invés de chamarmos arestas. O caminho para um dígrafo é constituído de uma sequência de nós e arcos, não é importante a orientação de cada arco. Abaixo temos uma figura que ilustra um dígrafo de 6 vértices.



Vértice Fonte V2, d-(V2) =0
Vértice Sumidouro V6, d+(V6) = 0

Temos que o grau de entrada de um vértice v, d-(v) é o número de arcos que são convergentes a v.

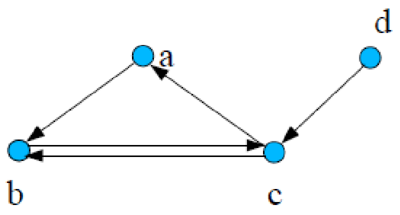
Sendo um vértice v, d+(v), um vértice de grau de saída, é o número de arcos que são divergentes.

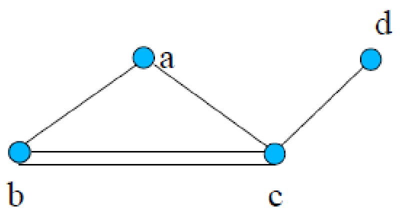
Dígrafos Simples

- ➔ Todos os arcos são distintos
- ➔ Não existem auto-laços
- ➔ Para obter o grafo correspondente de um dígrafo:
  - Temos que eliminar as direções dos arcos

- Não necessariamente o grafo corresponde a um dígrafo simples é simples

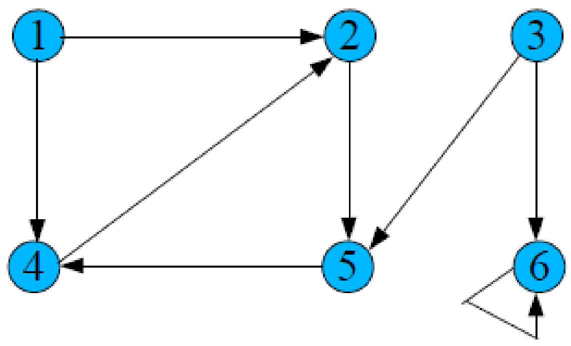
Exemplo:

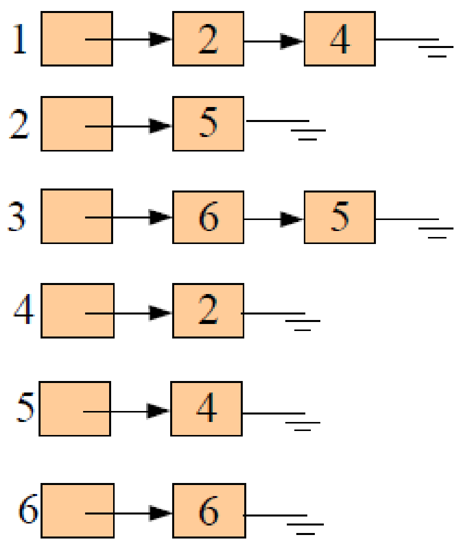




O grafo a esquerda é um grafo Dígrafo simples e o grafo da direita é um grafo correspondente, porém não é simples.

Grafo Dígrafo representado por uma matriz de adjacência





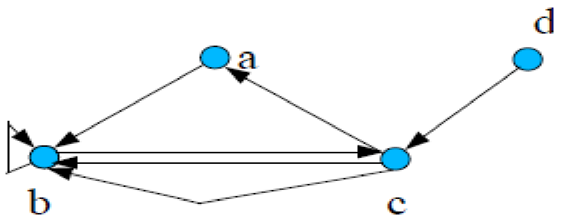
Dígrafos Conectados

Um grafo dígrafo G é conectado se possuir as seguintes propriedades:

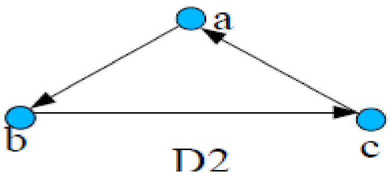
- ➔ Grafo correspondente é conectado
- ➔ G é fortemente conectado se para quaisquer dois vértices v x e y existe um caminho entre x e y.
- ➔ G é Euleriano se e somente:

- For fortemente conectado

Exemplo:



Grafo 1



Grafo 2

Grafo 1 :

➔ D1 é conectado
➔ D1 não é fortemente conectado
➔ D1 não é Euleriano

Grafo 2:

➔ D1 é conectado
➔ D1 é fortemente conectado
➔ D1 é Euleriano

Problema de Caminho mínimo

Definido em um grafo (dígrafo) em que a cada arco está associado um inteiro não negativo (peso) e consiste em dados dois vértices, determinar o caminho de menor comprimento, soma dos pesos dos arcos ou arestas do caminho entre dois vértices [Machado 1991].

Algoritmos para a resolução deste problema são de grande interesse prático, além de serem muito utilizados na resolução de outros problemas de otimização combinatória, como por exemplo em grande parte dos algoritmos de fluxo de custo mínimo. Os algoritmos para determinação do caminho mínimo entre dois vértices vi e vj, na verdade determinam o caminho mínimo de vj para todos os vértices.

O algoritmo de Dijkstra é o mais antigo e praticamente a base de todos os algoritmos atualmente utilizados [DJK59]. Usaremos o algoritmo de Dijkstra para obter o caminho mínimo.

Algoritmo de Dijkstra

```
para todo v ∈ V[G]
    d[v]← ∞
    π[v] ← -1
d[s] ← 0

enquanto Q ≠ ø
       u ← extrair-mín(Q)
       para cada v adjacente a u
           se d[v] > d[u] + w(u, v)
             então d[v] ← d[u] + w(u, v)
                  π[v] ← u
                  Q ← Q ∪ {v}
```

Teorema

Um dígrafo é fortemente conexo se seu grafo subjacente é conexo. Um dígrafo é fortemente conexo ou forte se para cada par de vértices u, v existe um caminho orientado de u para v. Um grafo G conexo não direcionado pode ser transformado em um dígrafo D fortemente conexo se e somente se G não contém nenhuma ponte [Carvalho 2000] .

Prova

Ida:

Suponha um dígrafo D fortemente conexo cujo grafo G subjacente contém no mínimo uma ponte. Logo, G deve possui no mínimo dois vértices cuja ligação exige passar por essa ponte. Necessariamente essa ponte permite caminhar em uma única direção, por exemplo de um vértice vi para outro vértice vk , mas não permite o retorno de vk para vi. Portanto, D não pode ser fortemente conexo se G possuir uma ponte.

Volta:

Como o grafo subjacente G não contém nenhuma ponte, toda aresta faz parte de um ciclo. Suponha um ciclo C1 cujas às arestas são orientadas de tal maneira que seja possível percorrer o ciclo e voltar à origem. Observe que todo vértice em C1 é acessível a partir de qualquer outro.

Considere outro ciclo C2 que tem no mínimo um vértice em comum com C1. Se orientarmos os arcos de C2 sem mudarmos a orientação dos arcos em C1, faremos com que qualquer vértice pertencente à união de C1 com C2 possa ser alcançado a partir de qualquer outro desta união, pois teremos um caminho fechado que passa por todos os vértices.

Se isso for possível o dígrafo D é fortemente conexo.

Implementei o algoritmo de Dijkstra para um instância pequena. Foi implementado na linguagem Java. Dados 5 vértices quaisquer e sua respectivas distância, partindo de um ponto inicial e dado como entrada o ponto inicial e o final retornará o menor caminho. Um vídeo foi feito para exemplificar melhor.

Referência

De Carvalho, Marcelo Dantas “Classicação dos Digrafos”, 2000.

Marchado, Arlene Fortunado “Dígrafos”, 1991.

Figueredo, Jorge ”Digrafos” Disponível em:
http:// *www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/**Grafos**A8.pdf*