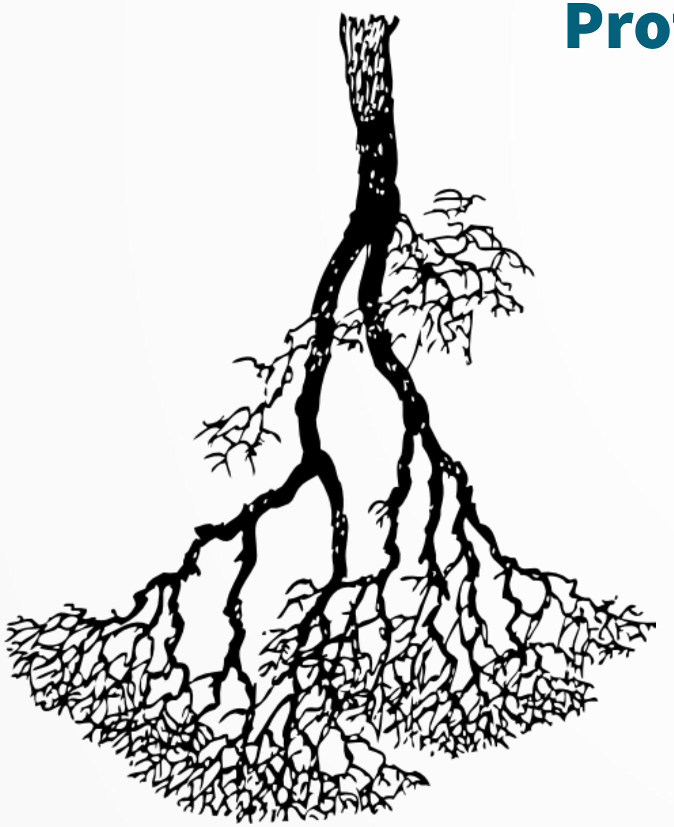
ED

Estrutura de Dados

Aula 12 – Árvores balanceadas e árvore AVL

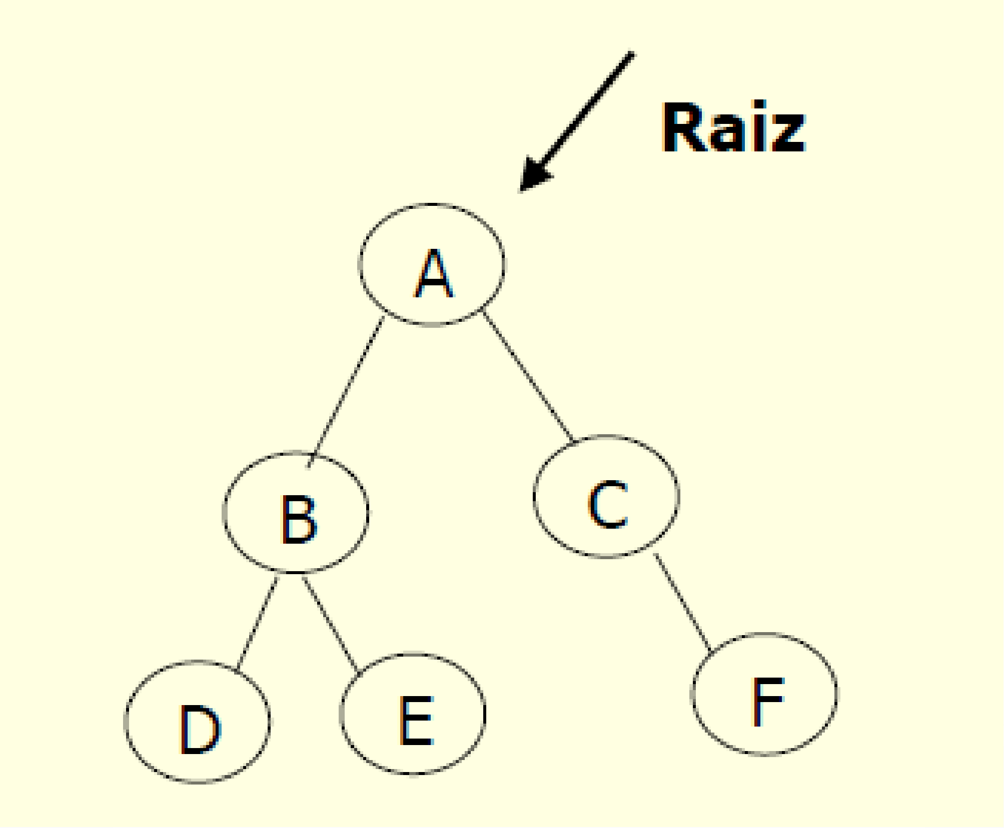
Prof. Rafael Tomaz Parreira



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Informática

Árvore binárias de busca

- Árvores de grau 2, isto é, cada nó tem dois filhos, no máximo



Árvore binárias de busca

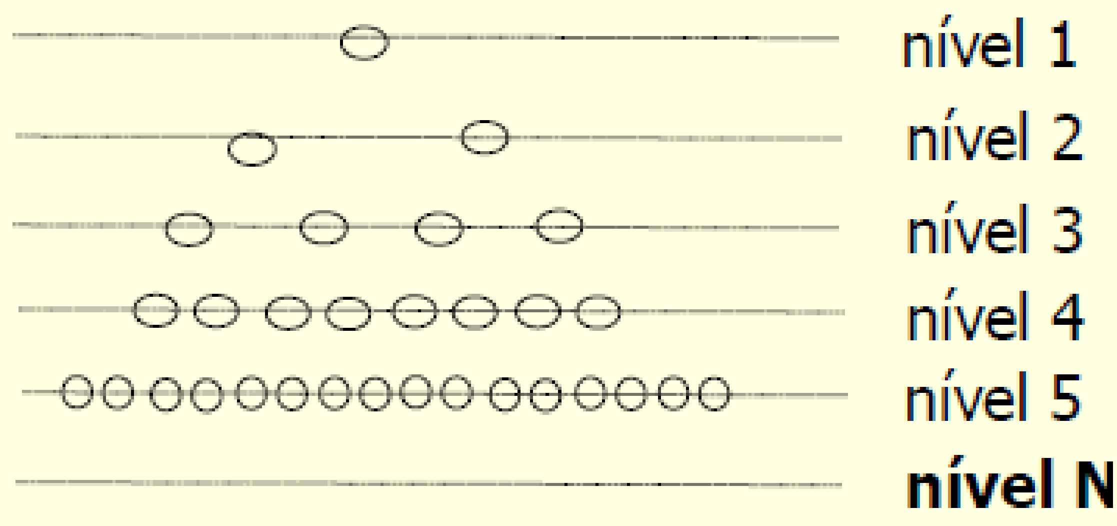
- Também chamadas “árvores de pesquisa” ou “árvores ordenadas”.
- Definição
  - Uma árvore binária com raiz R é uma ABB se:
  - a chave (informação) de cada nó da subárvore esquerda de R é menor do que a chave do nó R (em ordem alfabética, por exemplo)
  - a chave de cada nó da subárvore direita de R é maior do que a chave do nó R
  - as subárvores esquerda e direita também são ABBs

Árvore binárias de busca

- Muito boa para busca
  - Em uma árvore de altura A, visitam-se, no máximo, A nós
  - Grande quantidade de informação em relativamente poucos níveis

Árvore binárias de busca

- Quantidade de informação



Nível	Quantos cabem
1	1
2	3
3	7
4	15
...	...
N	**$2^N - 1$**
10	1.024
13	8.192
16	65.536
18	262.144
20	1 milhão
30	1 bilhão
	...

Árvore binárias de busca

- Vantagens
  - Se nós espalhados uniformemente, consulta rápida para grande quantidade de dados
  - Divide-se o espaço de busca restante em dois em cada passo da busca

Árvore binárias de busca

- Contra-exemplo
  - Inserção dos elementos na ordem em que aparecem
  - A, B, C, D, E, ..., Z
  - 1000, 999, 998, ..., 1

Árvore binárias de busca

- O desbalanceamento da árvore pode tornar a busca tão ineficiente quanto a busca sequencial (no pior caso) ...,

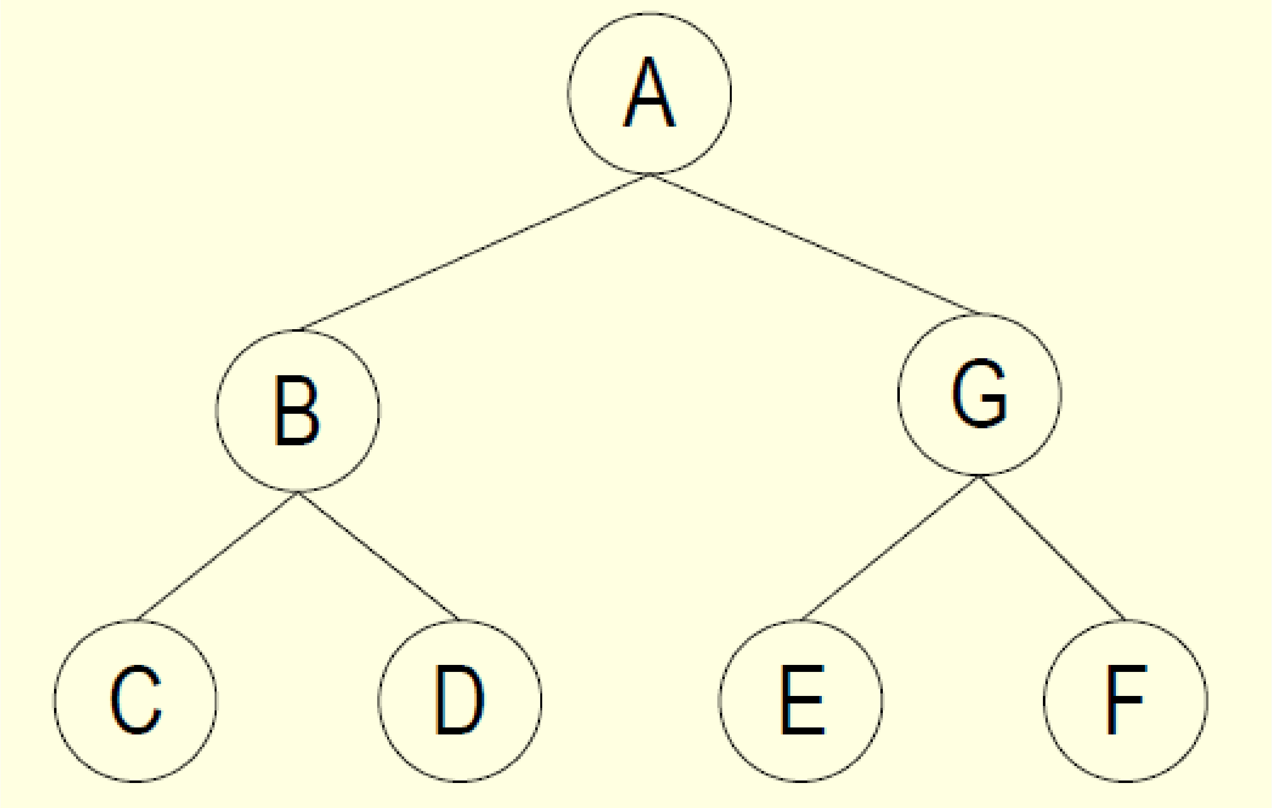
- Solução?
  - Balanceamento da árvore quando necessário!

Conceitos

- Árvore estritamente binária
  - Os nós tem 0 ou 2 filhos
  - Todo nó interno tem 2 filhos
  - Somente as folhas têm 0 filhos

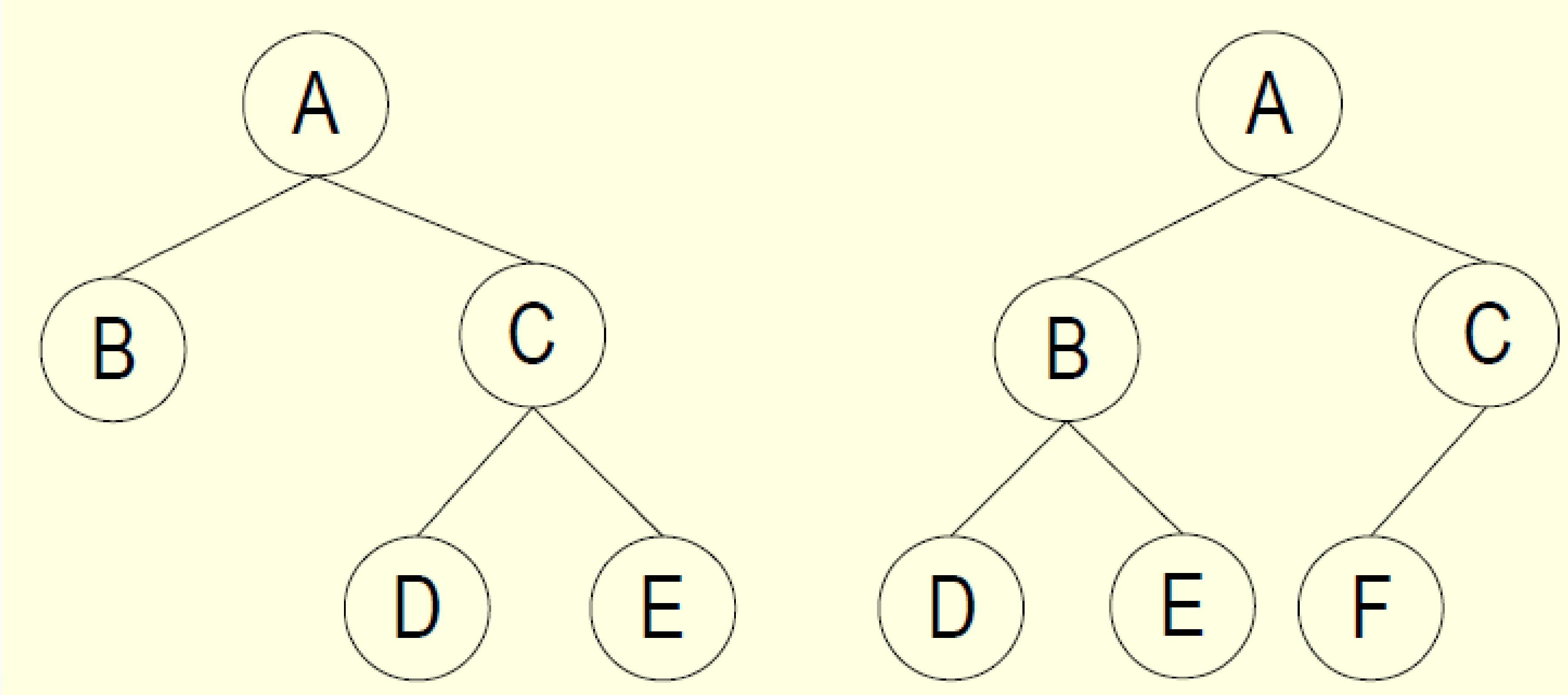
Conceitos

- Árvore binária completa(ou cheia)
  - Árvore estritamente binária
  - Todos os nós folha no mesmo nível



Conceitos

- Uma árvore binária é dita balanceada se, para cada nó, as alturas de suas duas subárvores diferem de, no máximo, 1



Conceitos

- Uma árvore binária perfeitamente balanceada é aquela cujo número de nós de suas subárvores esquerda e direita diferem em 1, no máximo.
- Toda árvore binária perfeitamente balanceada é balanceada
  - Vale o inverso?

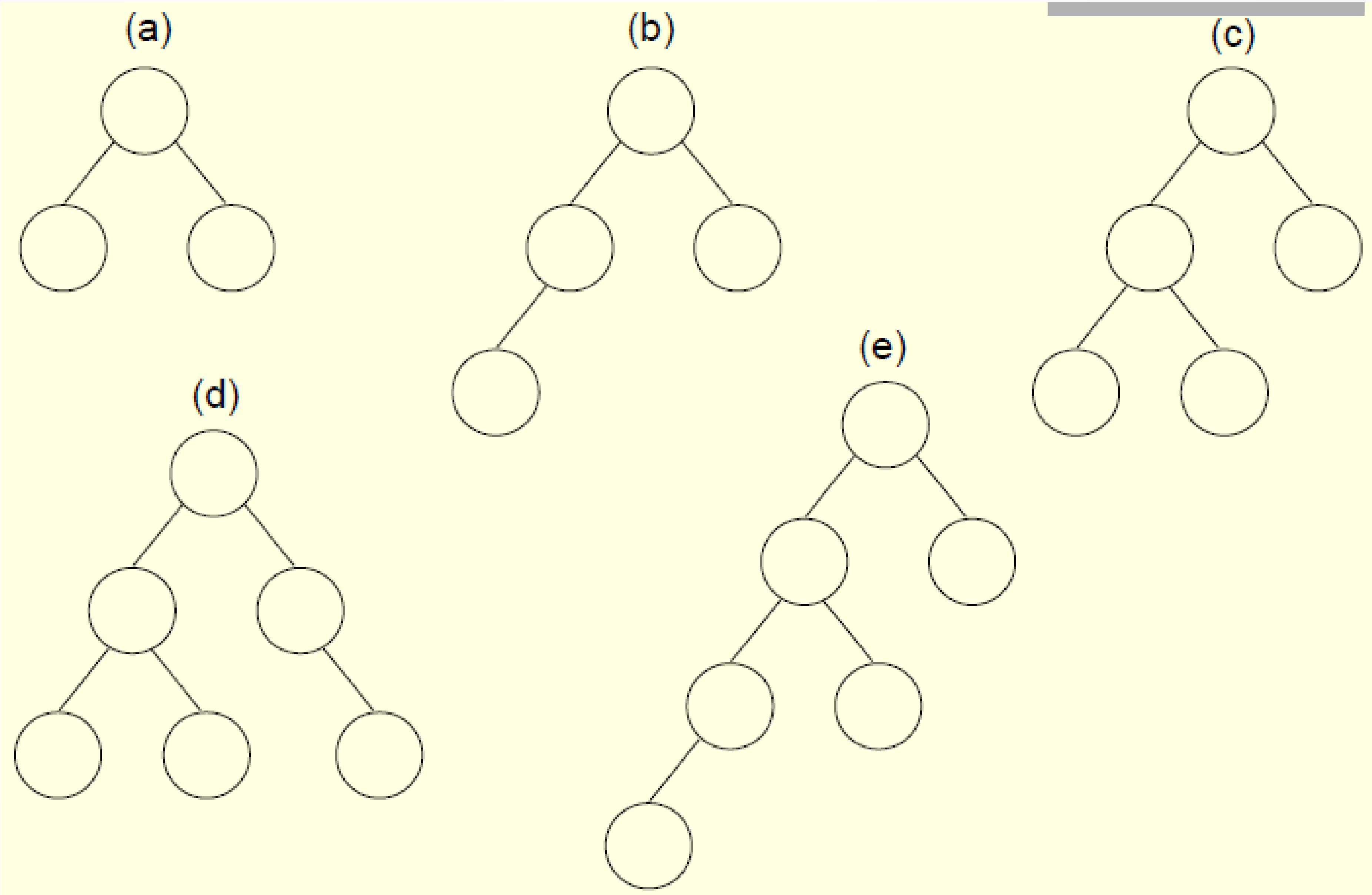
Árvore AVL

- Árvore binária de busca balanceada
  - Para cada nó, as alturas das subárvores diferem em 1, no máximo
  - Proposta em 1962 pelos matemáticos russos G.M. Adelson-Velskki e E.M. Landis
  - Métodos de inserção e remoção de elementos da árvore de forma que ela fique balanceada
  - Por que não se exige que seja perfeitamente balanceada? Custo alto...certos casos exigem movimentar a árvore inteira

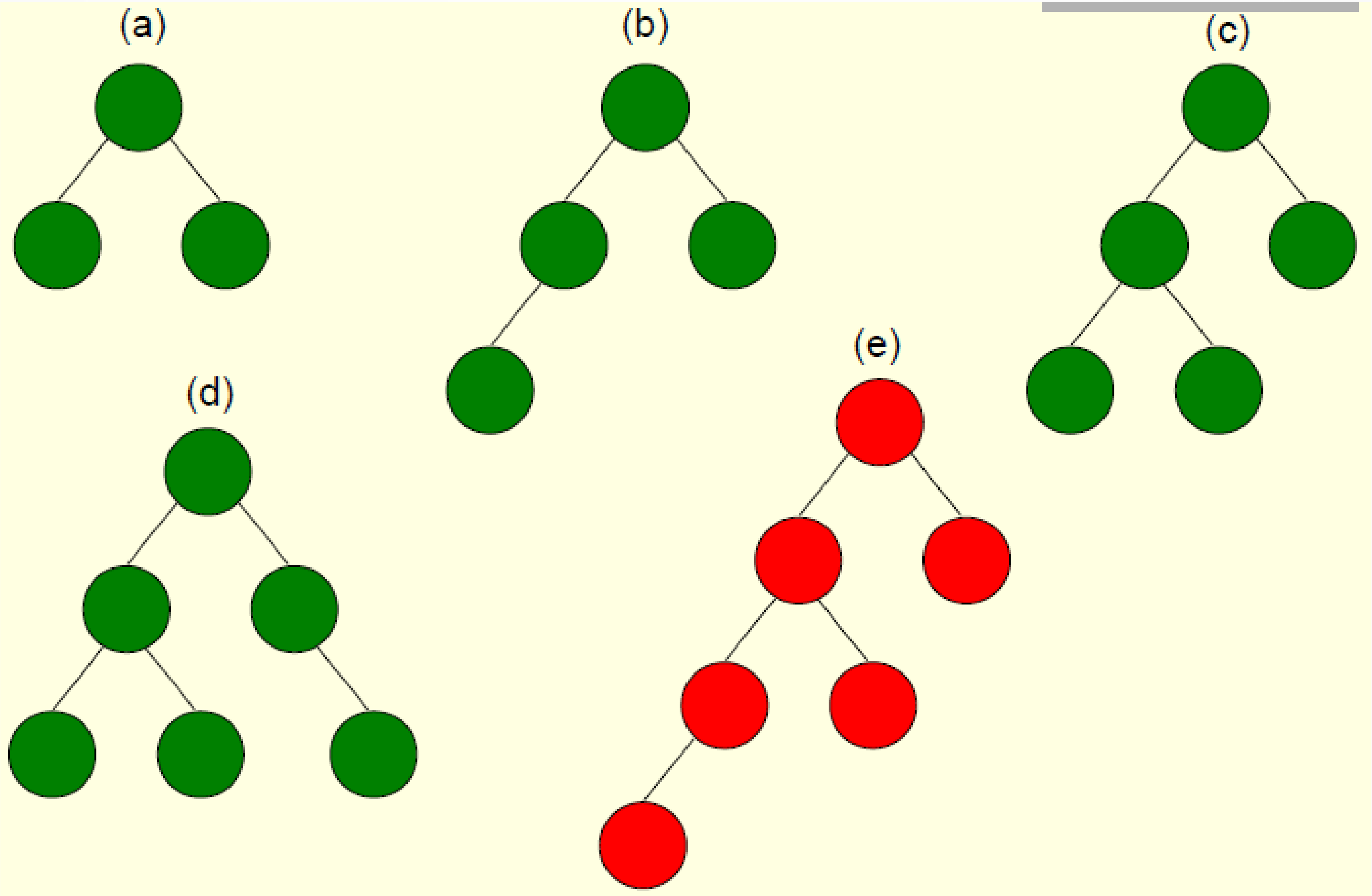
Métodos de Balanceamento

- Há duas categorias: dinâmico e global (ou estático).
- O rebalanceamento dinâmicomantém a árvore balanceada toda vez que é um nó é inserido ou removido.
  - AVL é o melhor exemplo
- O global permite a árvore crescer sem limites e somente faz o balanceamento quando tal necessidade é acionada, externamente.
  - Há vários métodos. O indicado para o 3º trabalho é o de Chang & Iyengar, de 1984.
  - Códigos destes rebalanceamentos são mostrados em: Binary Search Tree Balancing Methods: A Critical Study

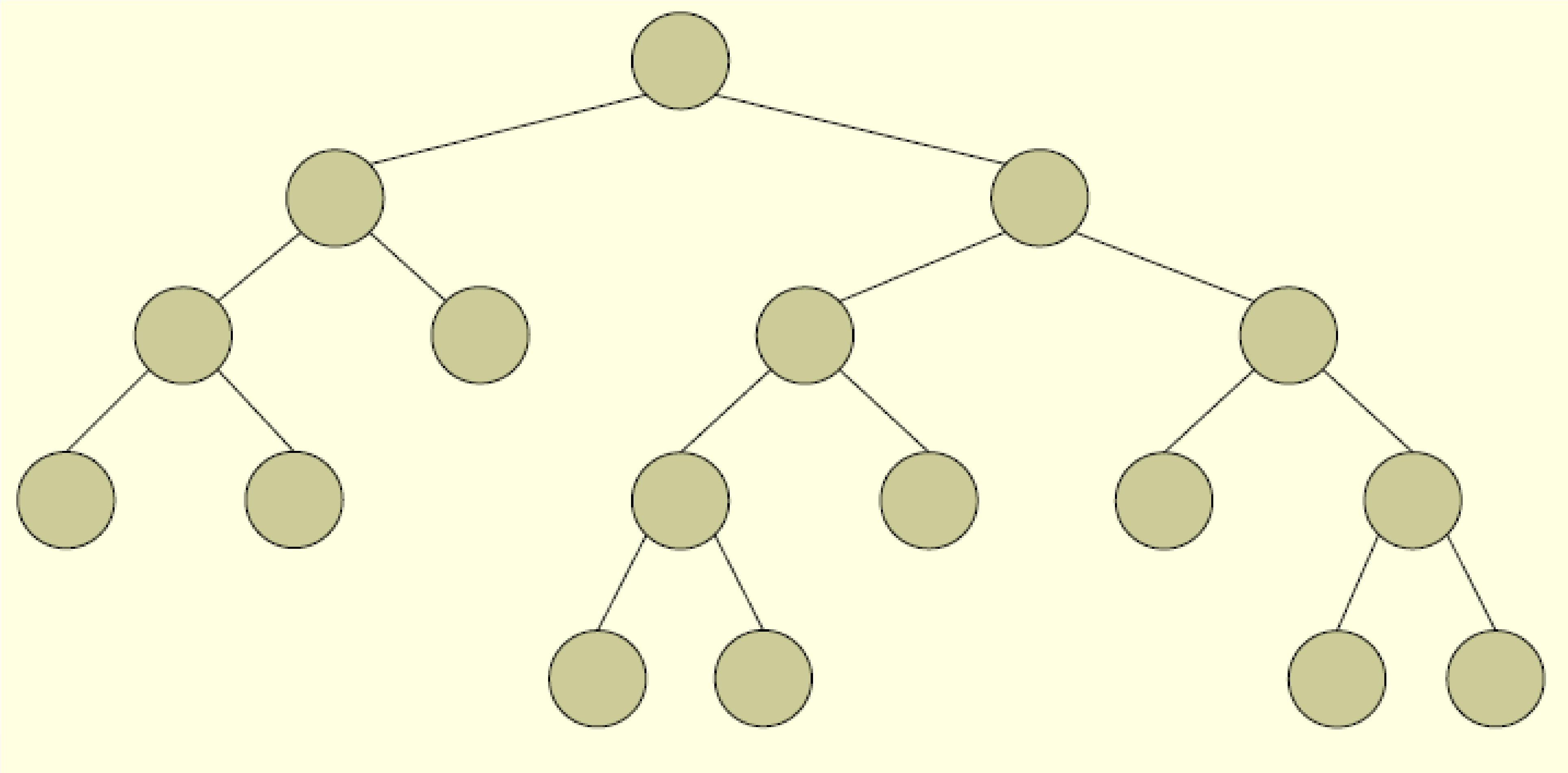
AVL: quem é e quem não é?



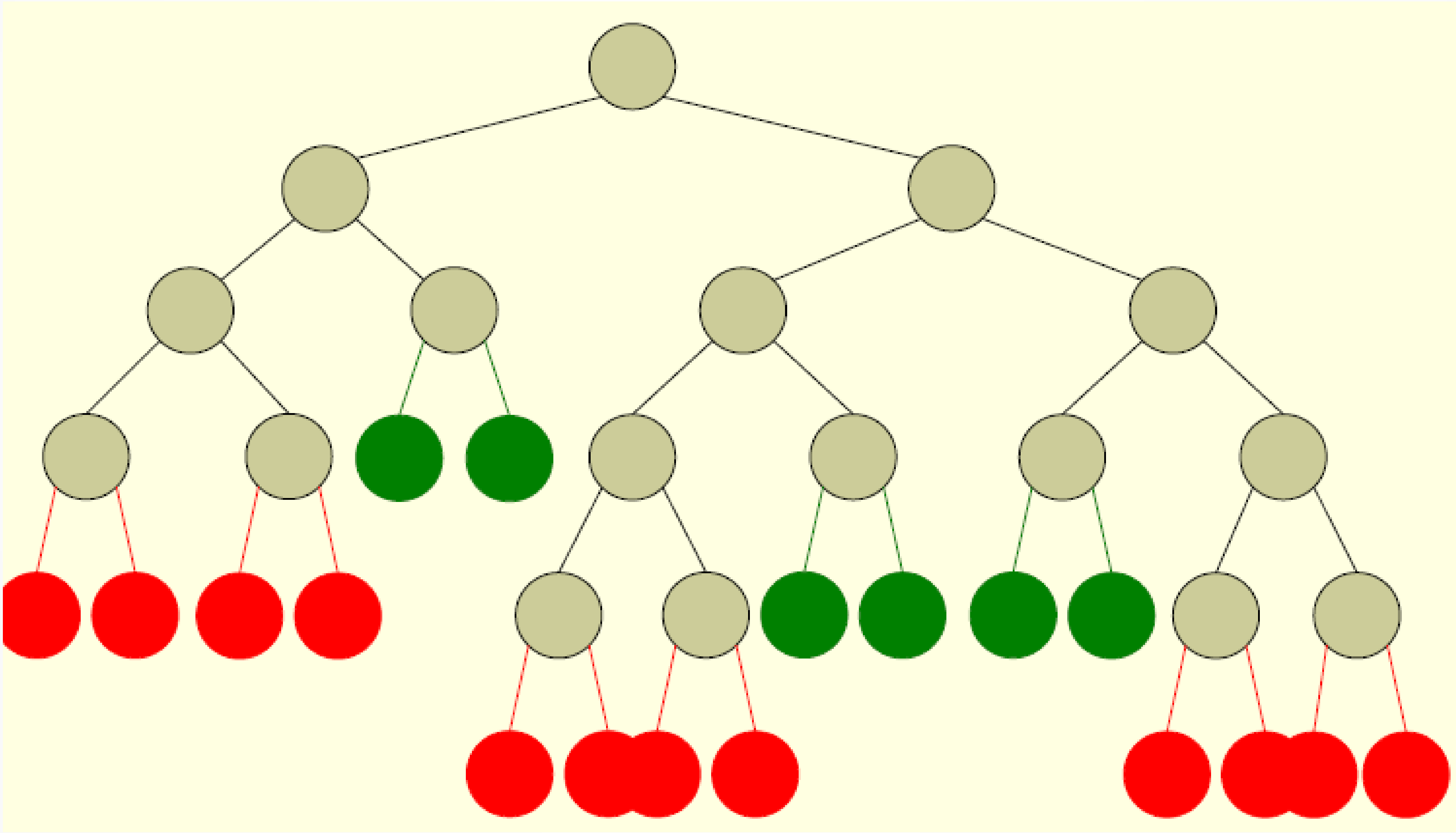
AVL: quem é e quem não é?



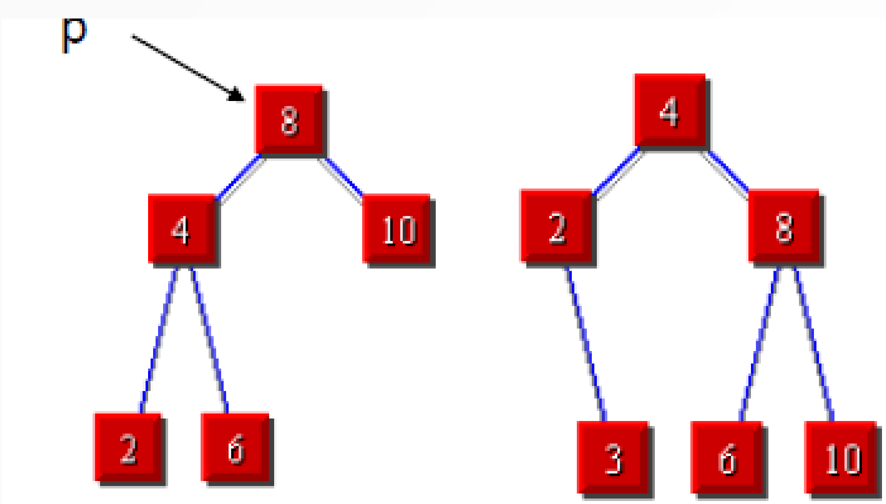
Pergunta: a árvore abaixo é AVL?



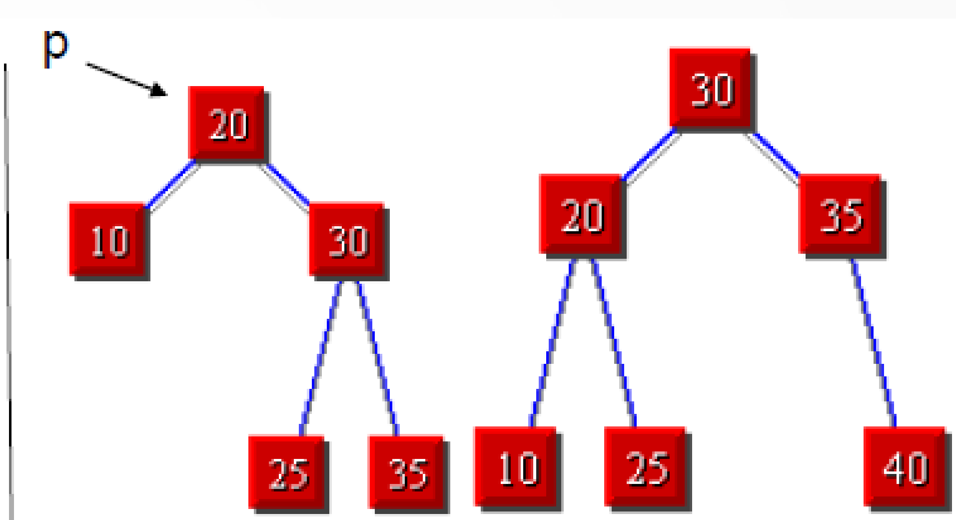
Exercício: onde se pode incluir um nó para a AVL continuar sendo AVL?



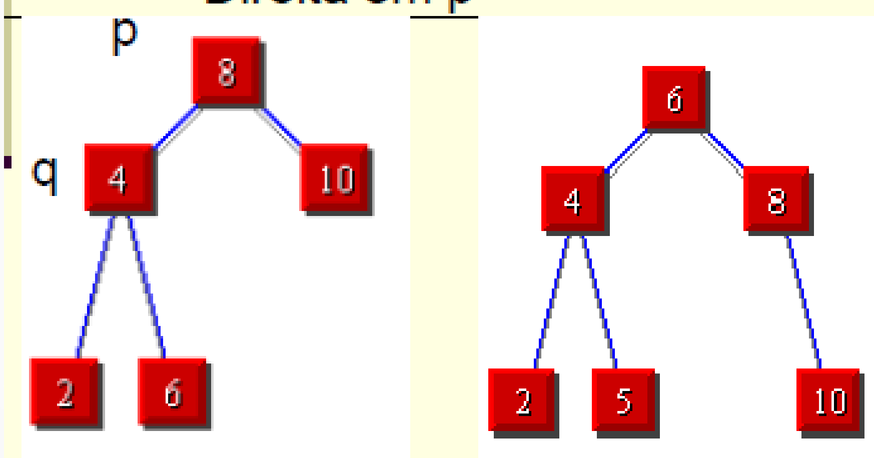
4 casos de desbalanceamento



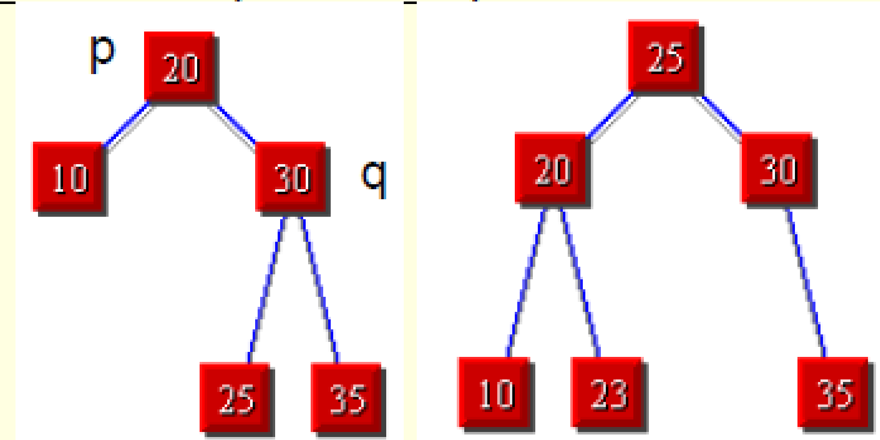
Inserção de 3 - Rotação Direita em p



Inserção de 40 - Rotação Esquerda em p



Inserção de 5 – Rotação Esq em q e Dir em p



Inserção de 23 – Rotação Dir em q e Esq em p

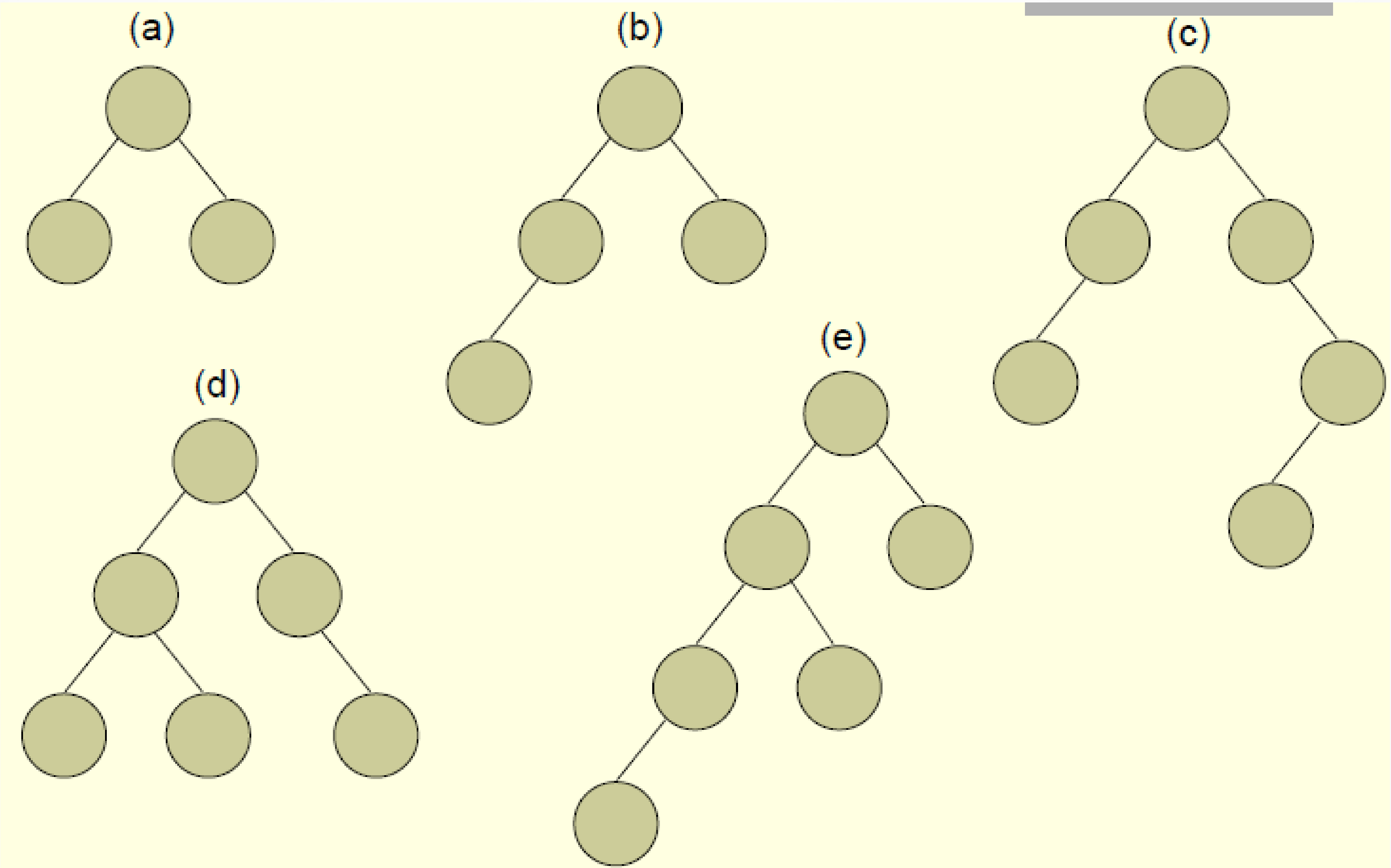
AVL

- Como é que se sabe quando é necessário balancear a árvore?
  - Se a diferença de altura das subárvores deve ser 1, no máximo, então temos que procurar diferenças de altura maior do que isso
  - Possível solução: cada nó pode manter a diferença de altura de suas subárvores
  - Convencionalmente chamada de fator de balanceamentodo nó

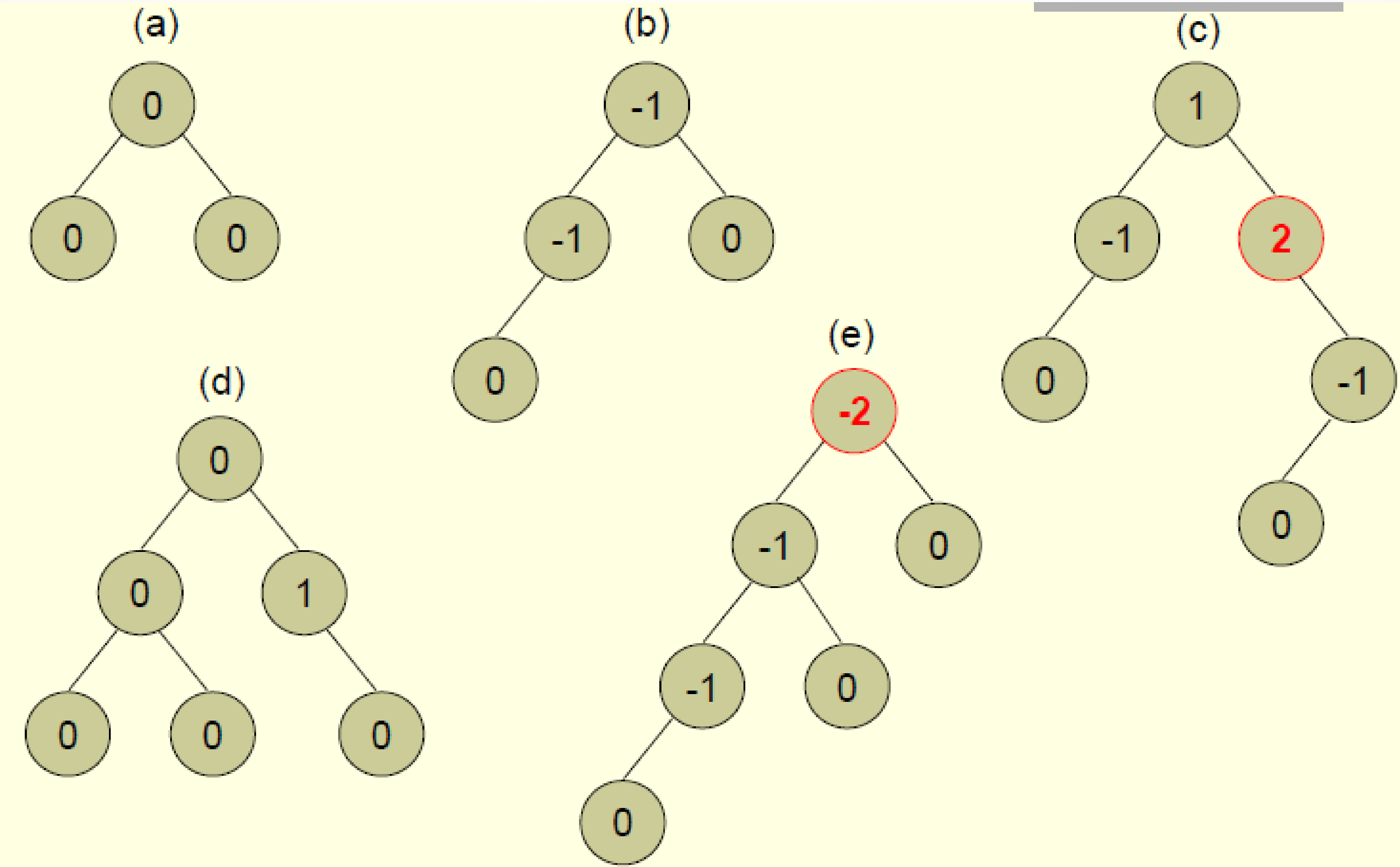
AVL

- Fatores de balanceamento dos nós
  - Altura da subárvore direita menos altura da subárvore esquerda Hd -He
  - Atualizados sempre que a árvore é alterada (elemento é inserido ou removido)
  - Quando um fator é 0, 1 ou -1, a árvore está balanceada
  - Quando um fator se torna 2 ou -2, a árvore está desbalanceada
    - Operações de balanceamento!

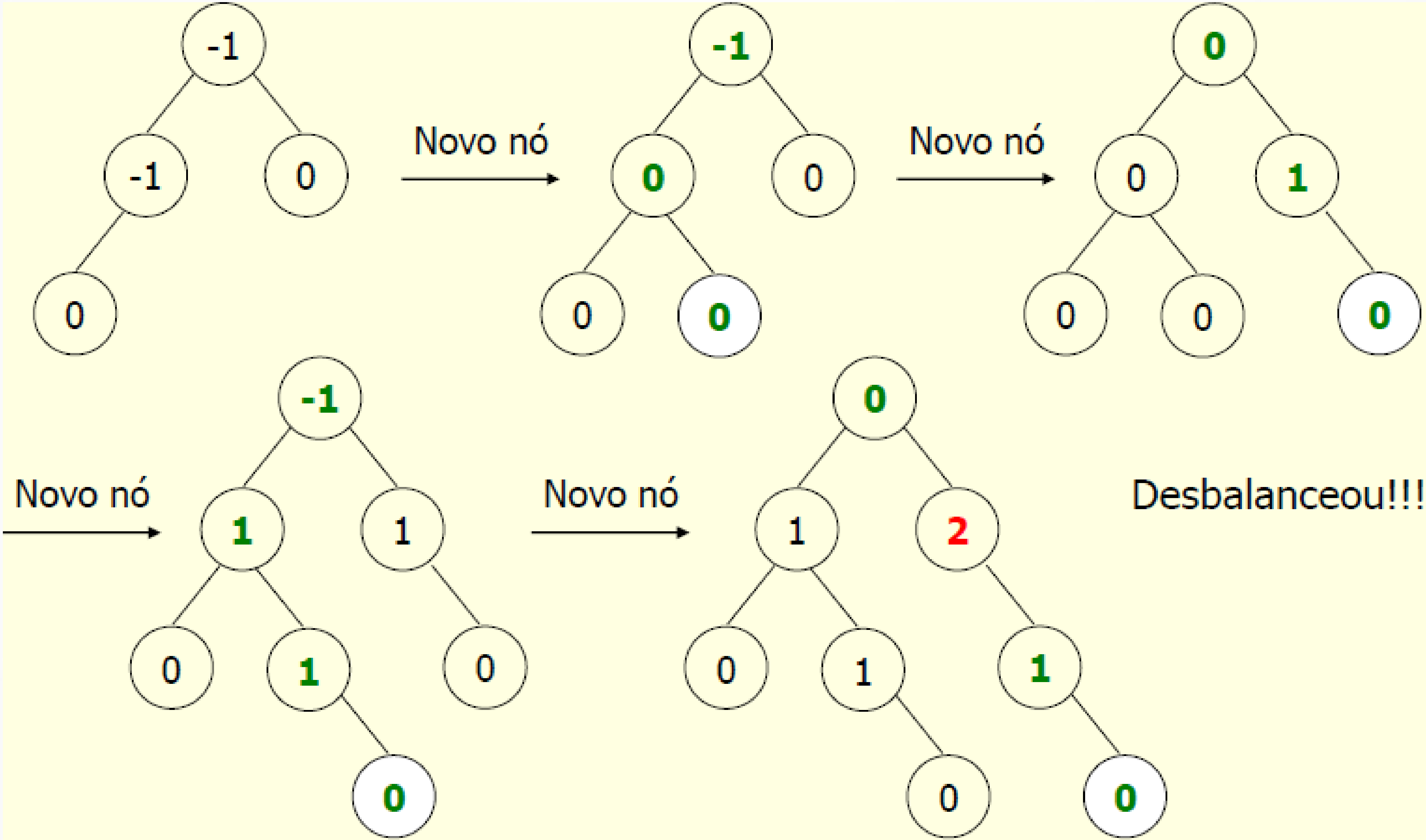
AVL: quem é e quem não é



AVL: quem é e quem não é



AVL: exemplo de desbalanceamento

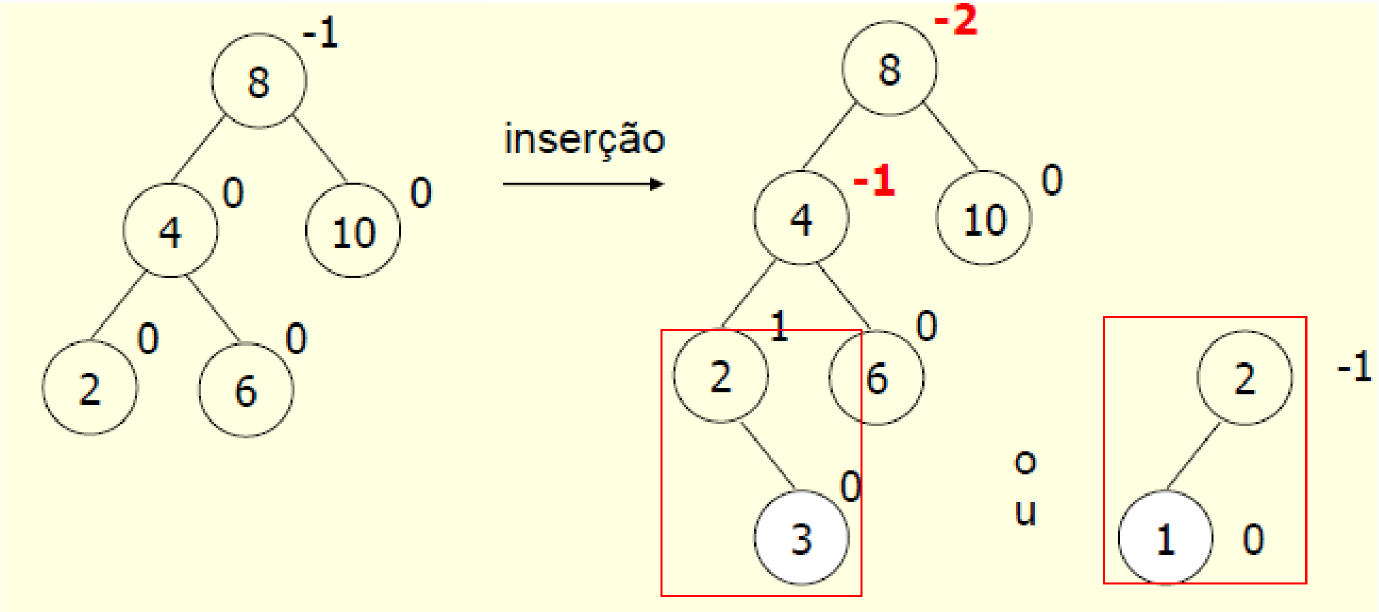


AVL

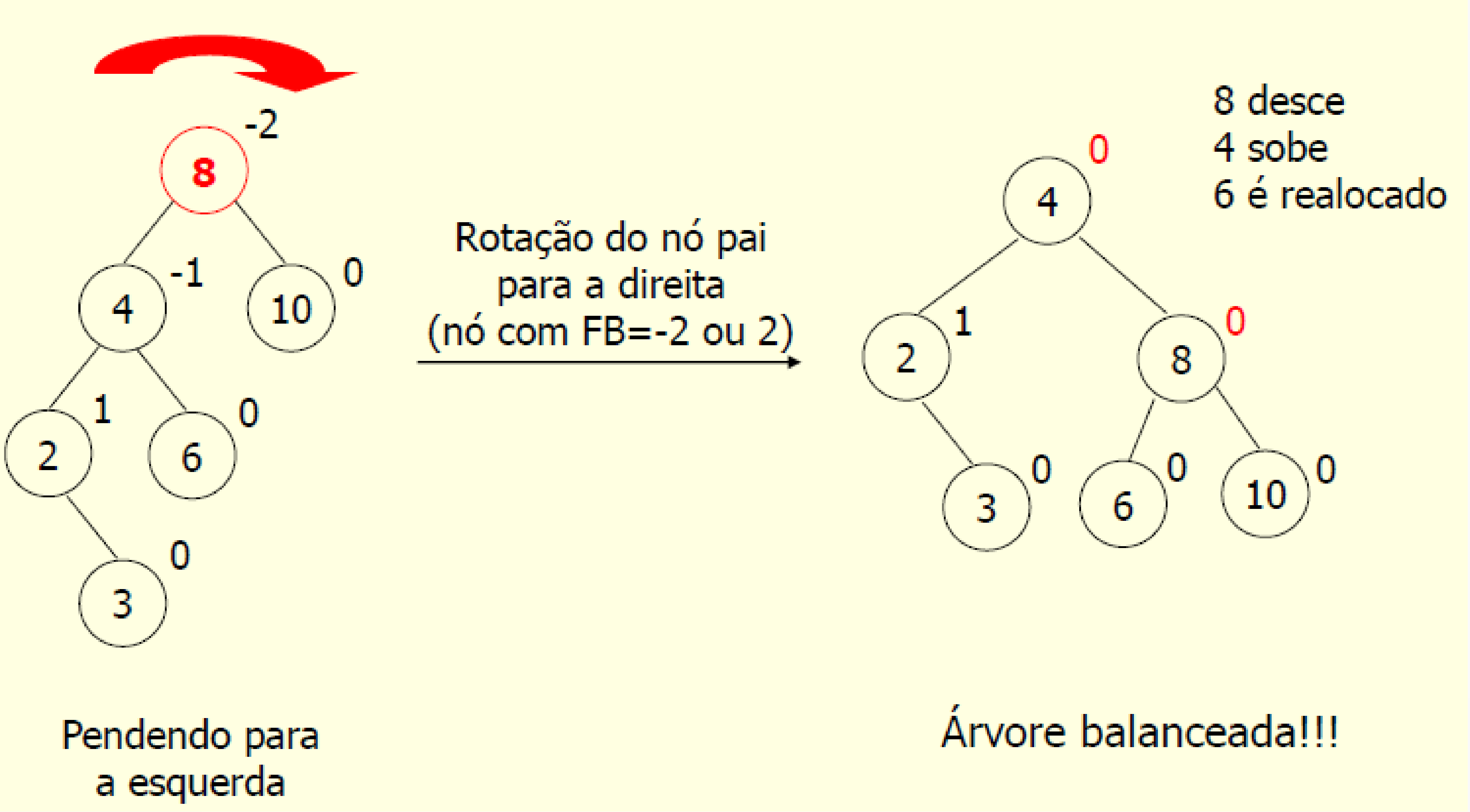
- Controle do balanceamento
  - Altera-se o algoritmo de inserção para balancear a árvore quando ela se tornar desbalanceada após uma inserção (nó com FB 2 ou -2)
  - Rotações
    - Se árvore pende para esquerda (FB negativo), rotaciona-se para a direita
    - Se árvore pende para direita (FB positivo), rotaciona-se para a esquerda
  - 2 casos podem acontecer

AVL: primeiro caso

- Raiz de uma subárvore com FB -2(ou 2) e um nó filho com FB -1(ou 1)
  - Os fatores de balanceamento têm sinais iguais: subárvores de nó raiz e filho pendem para o mesmo lado



AVL: primeiro caso

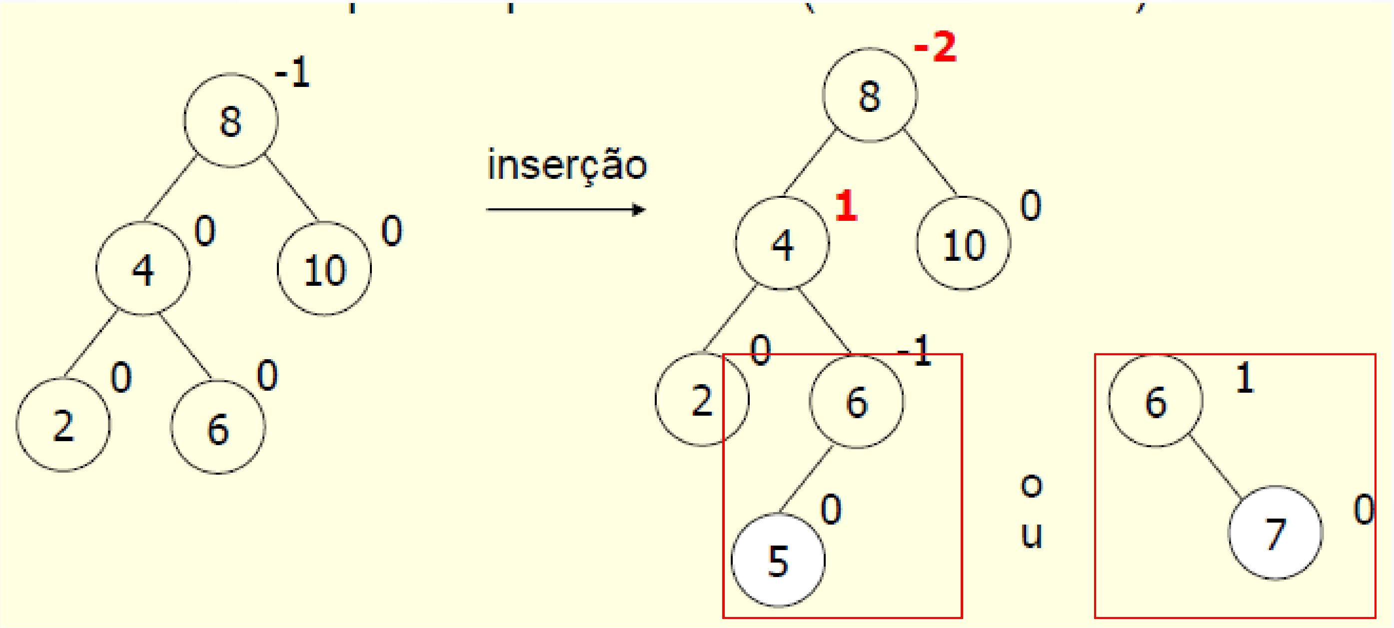


AVL: primeiro caso

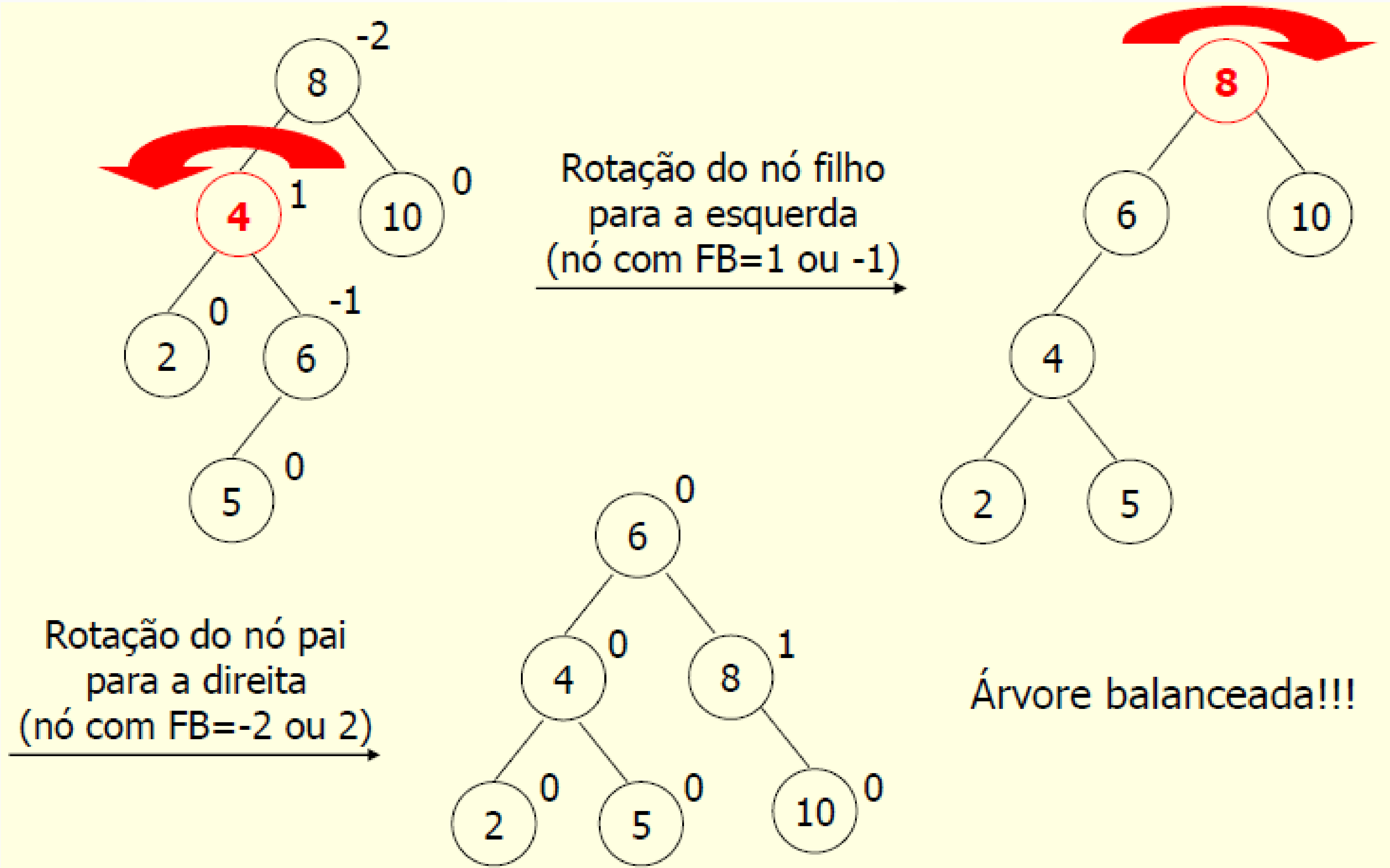
- Quando subárvores do pai e filho pendem para um mesmo lado
  - Rotação simples para o lado oposto
  - Às vezes, é necessário realocar algum elemento, pois ele perde seu lugar na árvore

AVL: segundo caso

- Raiz de uma subárvore com FB -2 (ou 2) e um nó filho com FB 1 (ou -1)
  - Os fatores de balanceamento têm sinais opostos: subárvore de nó raiz pende para um lado e subárvore de nó filho pende para o outro (ou o contrário)



AVL: segundo caso



AVL: segundo caso

- Quando subárvores do pai e filho pendem para lados opostos
  - Rotação dupla
    - Primeiro, rotaciona-se o filho para o lado do desbalanceamento do pai
    - Em seguida, rotaciona-se o pai para o lado oposto do desbalanceamento
  - Às vezes, é necessário realocar algum elemento, pois ele perde seu lugar na árvore

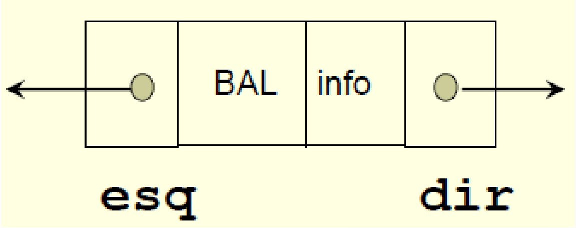
AVL

- As transformações dos casos anteriores diminuem em 1 a altura da subárvore com raiz desbalanceada p
- Assegura-se o rebalanceamento de todos os ancestrais de p e, portanto, o rebalanceamento da árvore toda

AVL

- Novo algoritmo de inserção
  - A cada inserção, verifica-se o balanceamento da árvore
  - Se necessário, fazem-se as rotações de acordo com o caso (sinais iguais ou não)
  - Em geral, armazena-se uma variável de balanceamento em cada nó para indicar o FB

AVL –Estrutura de Dados




```
typedef int tipo_elem;

typedef struct no {
      tipo_elem info;
      struct no *esq;
      struct no *dir;
      int BAL;
}No;
```