
2ª Lista de Exercícios: A. Assintótica / Recorrências

- ① Responda às questões, justificando seu raciocínio:
- (a) É verdade que $2^{n+1} = O(2^n)$?
 - (b) É verdade que $2^{2n} = O(2^n)$?
- ② Determine se cada afirmação abaixo é sempre verdadeira, nunca verdadeira ou se depende da situação. Considere as funções f e g assintoticamente não-negativas. No caso de
- (a) $f(n) = O(f(n)^2)$
 - (b) $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$
 - (c) $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$
 - (d) $f(n) = \Omega(g(n))$ e $f(n) = o(g(n))$
 - (e) $f(n) \neq O(g(n))$ e $g(n) \neq O(f(n))$
- ③ Suponha que cada expressão abaixo represente o tempo $T(n)$ consumido por um algoritmo para resolver um problema de tamanho n . Escreva os termo(s) dominante(s) para valores muito grandes de n e especifique o menor limite assintótico superior $O(n)$ possível para cada algoritmo.
- (a) $5 + 0.001n^3 + 0.025n$
 - (b) $500n + 100n^{1.5} + 50n\log_{10}(n)$
 - (c) $0.3n + 5n^{1.5} + 2.5n^{1.75}$
 - (d) $n^2\log_2(n) + n(\log_2(n))^2$
 - (e) $n\log_3(n) + n\log_2(n)$
 - (f) $3\log_8(n) + \log_2(\log_2(\log_2(n)))$
 - (g) $2n + n^{0.5} + 0.5n^{1.25}$
 - (h) $100n\log_3(n) + n^3 + 100n$
- ④ Resolva as seguintes relações de recorrência:
- (a) $T(1) = 1, T(n) = 3T(n/2) + n^2, n \geq 2$
 - (b) $T(1) = 1, T(n) = 2T(n-1) + 1, n \geq 2$
 - (c) $T(1) = 1, T(n) = 2T(n/2) + n, n \geq 2$
 - (d) $T(1) \in \theta(1), T(n) = 3T(n/2) + n\ln(n)$
 - (e) $T(1) \in \theta(1), T(n) = 3T(n/3 + 5) + n/2$
 - (f) $T(1) \in \theta(1), T(n) = 2T(n/2) + n/\ln(n)$
- ⑤ Como podemos modificar quase que qualquer algoritmo para ter um bom tempo de execução para o melhor caso?

- ⑥ O algoritmo de Ordenação por Inserção pode ser expresso como um procedimento recursivo da seguinte forma: para ordenar $A[1..n]$, ordena-se recursivamente $A[1..n-1]$ e então insere-se $A[n]$ no vetor ordenado $A[1..n-1]$. Escreva uma equação de recorrência para o tempo de execução dessa versão recursiva, resolva essa equação e indique o crescimento da pilha de recursão.
- ⑦ Use o Teorema Mestre, se for possível, para apresentar limites assintóticos firmes para as seguintes recorrências:
- (a) $T(n) = 4T(n/2) + n$
 - (b) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
 - (c) $T(n) = 4T(n/2) + n^3$
- ⑧ Falso ou verdadeiro? (justifique sua resposta)
- (a) Seja L um vetor com n elementos, onde cada elemento de L vale a , b ou c . Então, é possível ordenar L com complexidade de pior caso $O(n)$.
 - (b) Seja L um vetor com n elementos, onde cada elemento de L vale $v_1; \dots; v_{n-1}$ ou v_n . Então, não possível ordenar L com complexidade de pior caso $O(n)$.
 - (c) Se a complexidade de melhor caso de um algoritmo A que resolve um problema P é $T(n) = \Omega(n \log n)$, então o limite superior assintótico $l(n)$ de P satisfaz $l(n) = O(n \log n)$.
- ⑨ Dada a recorrência $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$
- (a) Em que nível da árvore o tamanho do problema é 1?
 - (b) Quantos níveis tem a árvore?
 - (c) Quantos nós têm cada nível?
 - (d) Qual o tamanho do problema em cada nível?
 - (e) Quantos nós tem o último nível?
 - (f) Qual o custo da árvore?
 - (g) Prove por indução que $T(n) = \Theta(n^2)$