UFG - Universidade Federal de Goiás
INF - Instituto de Informática
Bacharelado em Engenharia de Software

Professor: Diogo Stelle
diogo.stelle@gmail.com
Disciplina: Análise e Projeto de Algoritmos

1ª Lista de Exercícios: Revisão Matemática

1 Encontre os valores seguintes:

(a) $\log_{10} 0,000001$
(b) $\log_2(2^2 + 2^2)$
(c) $\log_{64} \frac{1}{32}$
(d) $\log_{1/2} 16$
(e) $\ln \sqrt{e}$
(f) $\log_{5/2} \frac{8}{125}$
(g) $\ln(e^2 \cdot e^3)$
(h) $\ln(e^2)^3$
(i) $\log_4 \frac{1}{64}$
(j) $\log_7 \sqrt[3]{49}$
(k) $\log_{\sqrt{3}} 9$
(l) $\log_8 \frac{1}{4}$
(m) $\log_6 216$
(n) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$
(o) $\ln \left(\frac{e^{3/2}}{e^2 \sqrt{e}} \right)$

2 Simplifique e escreva como um logaritmo:

(a) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$
(b) $\log_{10}(x^4 - 4) - \log_{10}(x^2 + 2)$
(c) $3 \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 4 + \ln 8$
(d) $\log_2 5 + \log_2 5^2 + \log_2 5^3 - \log_2 5^6$

3 Use a indução matemática para demonstrar que os resultados dos somatórios abaixo são verdadeiros para todo natural n, conforme especificado.

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 4j - 2 = 2n^2$
(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j2^j = (n-1)2^{n+1} + 2$
(d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1} - 1$

4 Prove, por indução matemática, que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$:

(a) $n > 4 \Rightarrow n^2 < 2^n$.
(b) $n > 9 \Rightarrow n^3 < 2^n$.
(c) $n^2 - 7n + 12 \geq 0$, $n \geq 3$.

5 Seja p_n o número (aproximado) de bactérias em uma cultura após n horas ($n \in \mathbb{Z}^+$). Se $p_1 = 1000$, $p_2 = 2000$ e $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$, para todo $n > 2$, então prove, por indução matemática, que:

$$p_n = \left(\frac{1000}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right].$$

6 Consideremos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ definida recursivamente como segue:

$$\begin{cases} f(0) = 2, f(1) = 5 \\ f(n) = 5 \cdot f(n-1) - 6 \cdot f(n-2) \text{ para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

Mostre que $f(n) = 2^n + 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

7 Seja a função $f(n)$, $n \geq 0$, definida recursivamente como segue:

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(n) = 3 \cdot f(n-1) - 1, \text{ para } n \geq 1. \end{cases}$$

Demonstre que $f(n) = \frac{3^n+1}{2}$, para todo inteiro $n \geq 0$, usando a indução matemática.