Universidade Federal de Goiás – Instituto de Informática

Análise e Projeto de Algoritmos
Indução

Diogo Stelle

diogostelle@inf.ufg.br / diogo.stelle@gmail.com

2019

Indução Matemática

- *“At first sight, this may seem out of place because it doesn’t seem to be about algorithms at all. Although the problems are mainly mathematical in nature and have little to do with algorithms, they are good practice in a technique that is fundamental to algorithm design, verification and analysis. If you ignored the material on mathematical induction in your discrete mathematics class, thinking that it is useless to a programmer, then think again. If you can master induction, you have mastered recursion – they are two sides of the same coin.”*

Ian Parberry e William Gasarch, Problems on Algorithms

Indução Matemática

- Definição
  - A indução matemática é um método de prova matemática usado para demonstrar a verdade de um número infinito de proposições.
- Aplicação
  - A indução matemática pode ser aplicada na prova de resultados em uma grande variedade de objetos discretos:
    - Complexidade de algoritmos;
    - Corretude de algoritmos;
    - Teoremas sobre grafos e árvores;
    - E uma grande quantidade de inequações

Indução Matemática

- Definição
  - Indução matemática é o raciocínio segundo o qual se estende uma propriedade a todos os elementos de um conjunto.

    Este raciocínio consiste em provar que um enunciado é válido para um conjunto todo.

    Basta provar que um enunciado vale para o primeiro número do conjunto, e supor que, portanto, valeria para qualquer elemento n do mesmo conjunto.

    A indução se concretiza por conseguir provar determinada propriedade para um elemento n+1 genérico, assim independente do ponto de partida, o enunciado valeria para todo o conjunto.

Indução Matemática

- Definição
  - Há duas formas, ou princípios da indução matemática:
    - “Princípio da Indução Matemática Fraca”; e
    - “Princípio da Indução Matemática Forte” (ou “Princípio da Indução Matemática Completa”).

Note que as duas formas de indução matemática são equivalentes entre si. O fato de que a validade da indução matemática segue do **axioma do bom ordenamento** garante esta equivalência.

Indução Matemática

- Axioma do Bom Ordenamento
    - “Todo subconjunto não-vazio formado por números naturais possui um menor elemento”. Em outras palavras, isto quer dizer que o conjunto dos números positivos inteiros é **bem ordenado.**

Indução Matemática

- Princípio da Indução Matemática (fraca)

Uma proposição P(X) pode ser provada por indução matemática (ou indução finita) da seguinte maneira:

  - Base: Comprovamos que P é verdadeira para o caso básico (por exemplo, $X=0$ ou $X=1$);
  - Hipótese Indutiva: Supomos que P seja verdadeira para o caso genérico $X = n$;
  - Passo Indutivo: Demonstramos que P também é verdadeira para o caso $X = n + 1$.

Ideia

Como a proposição vale para o caso inicial, o passo é correto. Então, essa proposição também será válida para todos os casos subsequentes.

Indução Matemática

- Princípio da Indução Matemática (fraca)

  Em uma sequência de peças de dominó que estejam em pé, suficientemente próximas entre si, se a primeira peça caiu, então todas caíram.

  Prova por indução

  - Base: A primeira peça caiu (por definição);
  - Hipótese Indutiva: Supomos que a n-ésima peça tenha caído;
  - Passo Indutivo: Como a n-ésima peça caiu e está suficientemente próxima da peça seguinte, então a (n + 1)-ésima peça também terá caído.

Indução Matemática

- Princípio da Indução Matemática (fraca)

Seja P(n) uma proposição definida para os inteiros n e seja n_0 um inteiro fixo. Suponha que as duas afirmações a seguir são verdadeiras:

  - $P(n_0)$ é verdadeira;
  - Para todos os inteiros $k \geq n_0$, se P(k) é verdadeira, então P(k + 1) é verdadeira.

Logo, a afirmação para todos inteiros $n \geq n_0$, P(n) é verdadeira.

Observação

  - É importante salientar que em uma prova por indução matemática não é assumido que P(k) é verdadeiro. É mostrado que, **se for assumido** que P(k) é verdadeiro, então P(k + 1) também é verdadeiro.

Indução Matemática

- **Exemplo 1:** Prove por indução matemática que $1 + 2 + ... + n = n(n+1) / 2$, para todos inteiros $n \geq 1$.
    - Base: $P(1)$, para $n = 1$ temos $1 = 1(1+1) / 2 = 1$;
    - Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : 1 + 2 + ... + k = k(k+1) / 2 \text{, para algum inteiro } k \geq 1$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k + 1) : 1 + 2 + ... + (k + 1) = (k+1)(k+2) / 2$$

Indução Matemática

- **Exemplo 1:** Prove por indução matemática que 1 + 2 + . . . + n = n (n+1) / 2, para todos inteiros n ≥ 1.

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Indução Matemática

- **Exemplo 2:** Prove que para todos os inteiros $n \geq 0$

$$0 + 1 + 2 + ... + n = n\,(n+2) / 2$$

  - Base: P(0), para n = 0, temos $0 = 0(0 + 2) / 2 = 0$;
  - Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para n = k, então deve ser verdadeira para n = k + 1, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para n = k,

$$P(k) : 0 + 1 + 2 + ... + k = k\,(k+2) / 2 = (k^2 + 2k) / 2$$

Deve-se mostrar que: P(k + 1) :

$$0 + 1 + 2 + ... + (k + 1) = (k+1)(k+3) / 2 = (k^2 + 4k + 3) / 2$$

Indução Matemática

- **Exemplo 2:** Prove que para todos os inteiros $n \geq 0$

$$0 + 1 + 2 + . . . + n = n (n+2) / 2$$

$$\begin{aligned} 0+1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k^2+2k}{2}+(k+1) \\ &= \frac{k^2+2k+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2+4k+2}{2} \end{aligned}$$

Observação

- Não foi possível derivar a conclusão a partir da hipótese. Isto significa que a proposição original é **falsa**.

Indução Matemática

- **Exemplo 3:**

Prove que $P(n) : \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ para todos os números inteiros $n \geq 0$ e para todos os números reais $r, r \neq 1$.

Base: $P(0)$, para $n = 0$, temos $r^0 = 1 = \frac{(r^{0+1}-1)}{r-1} = \frac{r-1}{r-1} = 1$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : \sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$$

para $k \geq 0$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : \sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{k+2}-1}{r-1}$$

Indução Matemática

- **Exemplo 3:**

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \sum_{i=0}^{k} r^i + r^{k+1} \\
&= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} + r^{k+1} \\
&= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} + \frac{r^{k+1}(r - 1)}{r - 1} \\
&= \frac{r^{k+1} - 1 + r^{k+2} - r^{k+1}}{r - 1} \\
&= \frac{r^{k+2} - 1}{r - 1}
\end{aligned}
$$

Indução Matemática

- **Exemplo 4:** Prove que P(n) : $2^{2n} - 1$ é divisível por 3, para $n \geq 1$
  - Base: P(1), para n = 1, temos $2^{2\times1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, que é divisível por 3;
  - Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para n = k, então deve ser verdadeira para n = k + 1, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para n = k,

$$P(k) : 2^{2k} - 1 \text{ é divisível por } 3$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k + 1) : 2^{2(k+1)} - 1 \text{ é divisível por } 3$$

Indução Matemática

- **Exemplo 4:** Prove que P(n) : $2^{2n} - 1$ é divisível por 3, para n ≥ 1

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\ &= 2^{2k} \times 2^2 - 1 \\ &= 2^{2k} \times 4 - 1 \\ &= 2^{2k} \times (3+1) - 1 \\ &= 2^{2k} \times 3 + (2^{2k} - 1) \end{aligned}$$

Observação

O primeiro termo da soma é divisível por 3, pela multiplicação realizada, e o segundo também, pela hipótese indutiva.

Temos que a soma de dois números divisíveis por 3 é um número também divisível por 3, portanto, a prova é válida.

Indução Matemática

- **Exemplo 5:** Prove que $P(n) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para $n \geq 0$
    - Base: $P(0)$, temos que $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$;
    - Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k + 1) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

Indução Matemática

- **Exemplo 5:** Prove que P(n) : $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para $n \geq 0$

$$\begin{aligned}2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= 2 \times 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1\end{aligned}$$

Indução Matemática

- Aplicação

A indução matemática é útil para provar asserções sobre a corretude e a eficiência de algoritmos, pois podemos inferir uma lei geral a partir de instâncias particulares.

Seja T um teorema que possua como parâmetro um número natural n. Para provarmos que T é verdadeiro para todos os possíveis valores de n, provamos que:

- Base: T é válido para $n = 1$;
- Passo Indutivo: Para todo $n > 1$, se T é válido para n, então T é válido para $n + 1$.

Provar a segunda condição é geralmente mais fácil do que provar o teorema diretamente, uma vez que podemos usar a asserção de que T é válido para n.

As duas condições implicam em T válido para $n = 2$, $n = 3$ e assim por diante.

Exercícios

Exercícios

- Demonstre por Indução Matemática
    - $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para $n \geq 0$;
    - $2^0 + 2^1 + 2^2 + . . . + 2^n = 2^n + 1 - 1$ para $n \geq 0$;
    - $1^2 + 2^2 + . . . + n^2 = (n(n+1)(2n+1)) / 6$, para $n \geq 1$.