TRABALHO DA UNIDADE 1 - Análise de Algoritmos

Disciplina: IMD0032 - EDB II
Semestre: 2014/I
Professor: Carlos A. Prolo
Alunos: José Bernardo Gurgel, Thiago César

1 Questão

a) Nesta questão, as instruções mais executadas são a da linha 26, a condição da linha 25, o k++ da linha 24 e o $k < n$ da linha 24. Mesmo que o número de vezes de execução dessas linhas sejam diferentes ($k < n$ é a mais executada), assintoticamente é a mesma coisa. O número de vezes que $k < n$ é executada é:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} 1$$

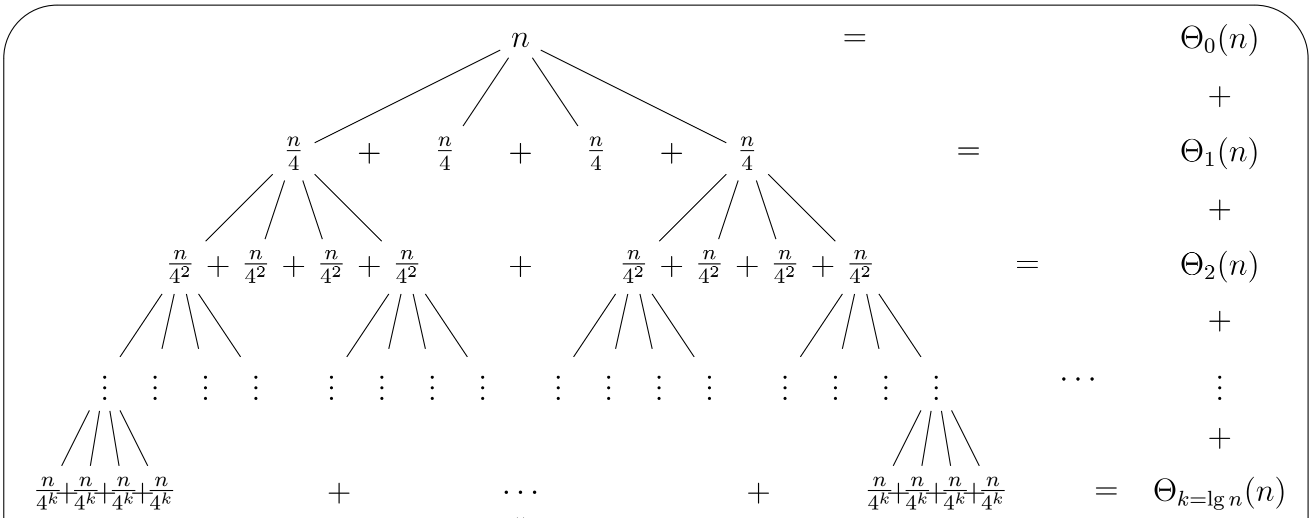
No entanto, não é necessário resolvermos exatamente estes somatórios para concluir que, tanto no melhor caso quanto no pior caso, o resultado é $\Theta(n^2)$. Nesse caso, em que há dois *for* embutidos, é uma fração quadrática $\Theta(n^2)$.

b) Complete usando notação assintótica: O número de comparações feitas pelo algoritmo no pior caso é $\underline{\Theta(n^2)}$. No entanto o número de SWAPS no pior caso é apenas $\underline{\Theta(n)}$.

c) No segundo algoritmo, é utilizada a função `menor`, no qual recebe como um dos parâmetros um vetor `v`. O que temos que observar é que este vetor **não** é passado como uma referência, como um ponteiro. E isto é muito relevante para a performance do algoritmo. O que está acontecendo é que quando passamos o vetor como parâmetro, a função irá criar um **novo** vetor e **percorrer** o que foi passado como parâmetro para poder criar uma cópia no novo. Ou seja, apesar de não ser um problema explícito, o algoritmo acaba criando novos percursos que afetam sua performance. Por isso o segundo algoritmo acaba levando mais tempo que o primeiro.

2 Questão

a) Demonstração da análise do algoritmo *mergesort* com divisão feita em partes de tamanhos complementares $\lfloor n/4 \rfloor$ e $\lceil 3n/4 \rceil$, utilizando o método da árvore de recursão, percebemos que a execução no pior caso do algoritmo, ainda permanece como $\Theta(nlog(n))$:



$$\Downarrow$$

$$\Theta\left(\sum_{i=0}^{k} 4^i \cdot \frac{n}{4^i}\right) = \Theta\left(\sum_{i=0}^{k} n\right) = \Theta(k \cdot n) \Leftrightarrow \Theta(n \cdot \lg n)$$

b) De acordo com a questão anterior, generalizando a expressão $\lfloor n/k \rfloor$ e $\lceil ((k-1)/k)n \rceil$, para um inteiro $k \geq 2$ podemos demonstrar da seguinte forma:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n = 1, \\ kT(n/k) + n, & \text{se} \quad n > 1. \end{cases}$$

Aplicando o teorema master $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ podemos verificar que:

- $f(n) = \Theta(n^{\log_k k}) = \Theta(n)$, logo, $T(n) = \Theta(nlog(n))$

Concluindo, para todos os casos em que $\lfloor n/k \rfloor$ e $\lceil ((k-1)/k)n \rceil$, a complexidade do algoritmo no pior caso será de $\Theta(nlog(n))$

c) Se $k = 1$ então, $\lfloor n/1 \rfloor$ e $\lceil ((1-1)/1)n \rceil$, simplificando $T(n) + n$, logo:

- $f(n) = \Theta(n^{\log_1 1}) = \Theta(n)$, logo, $T(n) = \Theta(nlog(n))$

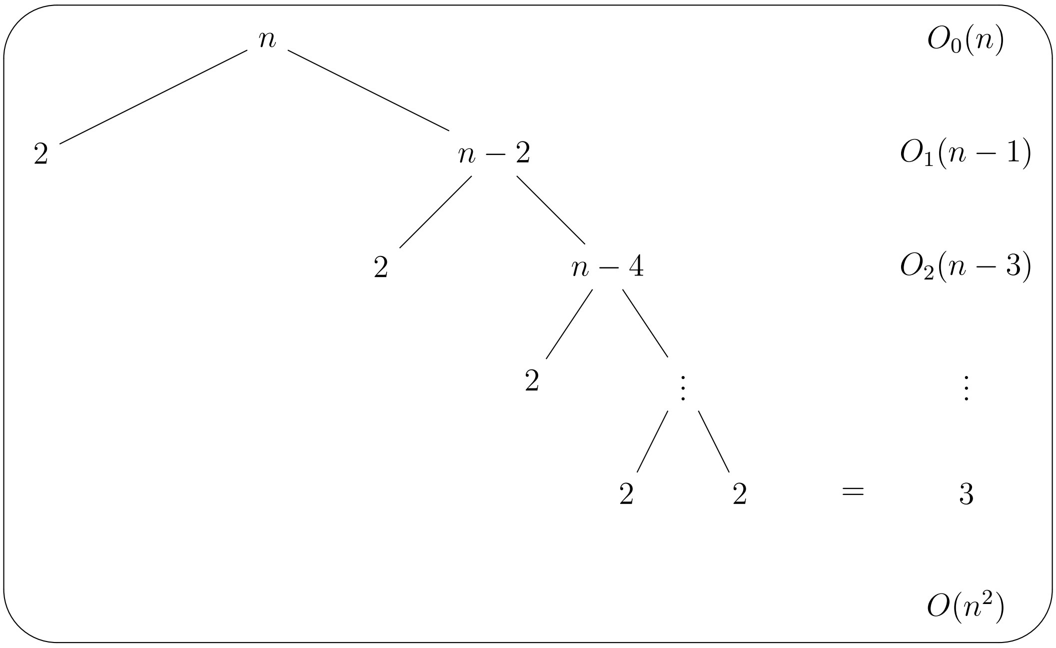
3 Questão

a) Se temos partições onde no menor lado teremos sempre no mínimo $\lfloor n/k \rfloor$ para qualquer $\geq k2$, teremos a recorrência:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

Observando este resultado, verificamos que se encaixa com o melhor (geral) do QuickSort. Então, aplicando o segundo caso do teorema master, obtemos a solução de $T(n) = \Theta(nlgn)$.

b)



Caracterizando uma recorrência correspondente a:

$$T(n) = T(n-2) + \Theta(n)$$

Resolvendo a recorrência:

$T(n) = T(n-2) + \Theta(n)$

$T(n) = \sum_{k=2}^{n} \Theta(k)$

$T(n) = \Theta(\sum_{k=2}^{n} k)$

$T(n) = \Theta(n^2)$

c) Considerando o caso em que *em todas as invocações recursivas* a partição produz vetores de dimensões 2 e $n-2$ logo, o tempo de pior caso ficaria da seguinte forma:

$$T(n) = \Theta(2) + T(n-2) + T(n) = \sum_{i=0}^{n} \Theta(i) = \Theta(n^2)$$

Para provar que $T(n) \leq cn^2$ para $O(n^2)$

$$\begin{aligned}
T(n) &= \max_{0 \leq 2 \leq n-2} \{T(2) + T(n-2)\} + \Theta(n) \\
&\leq \max_{0 \leq 2 \leq n-2} \left\{ \ T(2) + T(n-2) \ \right\} + bn \\
&= \max_{0 \leq 2 \leq n-2} \left\{ \ c2^2 + c(n-2)^2 \ \right\} + bn \\
&= c \max_{0 \leq 2 \leq n-2} \left\{ \ 2^2 + (n-2)^2 \ \right\} + bn \\
&= c(n-2)^2 + bn \\
&= cn^2 - 4cn + 4 + bn \\
&\leq cn^2
\end{aligned}$$

Para provar que $T(n) \geq dn^2$ para $\Omega(n^2)$

$$T(n) = \max_{0 \leq 2 \leq n-2} \{T(2) + T(n-2)\} + \Theta(n)$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \max_{0\leq 2\leq n-2}\left\{\ T(2)+T(n-2)\ \right\}+bn\\
&= \max_{0\leq 2\leq n-2}\left\{\ d2^2+d(n-2)^2\ \right\}+bn\\
&= d\max_{0\leq 2\leq n-2}\left\{\ 2^2+(n-2)^2\ \right\}+bn\\
&= d(n-2)^2+bn\\
&= dn^2-4dn+4+bn\\
&\geq dn^2
\end{aligned}
$$

Portanto, chegamos a conclusão que para a região considerada em partes de tamanhos 2 e $n-2$ o tempo de execução do algoritmo Quicksort no pior caso é $\Theta(n^2)$

d) Generalizando a conclusão acima, iremos demonstrar para particionamento com tamanhos k e $n-k$, para um inteiro positivo k qualquer: Para provar que $T(n)\leq cn^2$ para $O(n^2)$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \max_{0\leq k\leq n-k}\{T(k)+T(n-k)\}+\Theta(n)\\
&\leq \max_{0\leq k\leq n-k}\left\{\ T(k)+T(n-k)\ \right\}+bn\\
&= \max_{0\leq k\leq n-k}\left\{\ ck^2+c(n-k)^2\ \right\}+bn\\
&= c\max_{0\leq k\leq n-k}\left\{\ k^2+(n-k)^2\ \right\}+bn\\
&= c(n-k)^2+bn\\
&= cn^2-2kcn+k^2+bn\\
&\leq cn^2
\end{aligned}
$$

Para provar que $T(n)\geq dn^2$ para $\Omega(n^2)$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \max_{0\leq k\leq n-k}\{T(k)+T(n-k)\}+\Theta(n)\\
&\geq \max_{0\leq k\leq n-k}\left\{\ T(k)+T(n-k)\ \right\}+bn\\
&= \max_{0\leq k\leq n-k}\left\{\ dk^2+d(n-k)^2\ \right\}+bn\\
&= d\max_{0\leq k\leq n-k}\left\{\ k^2+(n-k)^2\ \right\}+bn\\
&= d(n-k)^2+bn\\
&= dn^2-2kdn+k^2+bn\\
&\geq dn^2
\end{aligned}
$$

No entanto, a complexidade de tempo para particionamento com tamanhos k e $n-k$, é no pior caso $\Theta(n^2)$

4 Questão

Entre as muitas aplicações do *hash*, referimos a implementação eficiente dos métodos de tabelação. Estes métodos são usados em pesquisas heurísticas, e em jogos, por exemplo, para guardar o valor de configurações de um tabuleiro de xadrez. Quando inserimos um valor x e posteriormente um valor y com $h(y) = h(x)$, temos uma *colisão*. A posição da tabela para onde y deveria ir já está ocupada e terá que existir um método para resolver as colisões.

A probabilidade p de se inserir N itens consecutivos sem colisão em uma tabela de tamanho M é:

$$p = \frac{M-1}{M} \times \frac{M-2}{M} \times ... \times \frac{M-N+1}{M} = \prod_{i=1}^{N} \frac{M-i+1}{M} = \frac{M!}{(M-N)!M^N}$$

Assim, uma das formas de resolver as *colisões* é simplesmente construir uma lista linear encadeada para cada endereço da tabela, desse modo, todas as chaves com o mesmo endereço são encadeadas em uma lista linear.

A função de inserção, nesse caso, *CHAINED-HASH-INSERT(T, x)* insere o elemento x na cabeça da lista $T[h(x.key)]$. Portanto, o tempo de execução no pior caso, para a operação de inserção, é $\Theta(1)$.

5 Questão

```cpp
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <limits.h>

using namespace std;


int partition ( int a[], int n ){
    int sum = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++)
        sum += a[i];

    int *s = new int[sum+1];

    s[0] = 1;
    for(int i = 1; i < sum+1; i++)
        s[i] = 0;

    int diff = INT_MAX , ans;

    for(int i = 0; i < n; i++){
        for(int j = sum; j >= a[i]; j--){
            s[j] = s[j] | s[j-a[i]];
            if(s[j] == 1){
                if(diff > abs(sum/2 - j)){
                    diff = abs(sum/2 - j);
                    ans = j;
                }
            }
        }
    }
    return sum-ans-ans;
}

```

```
int main(){
    int n,result, arr[300];
    cin >> n;

    for(int i = 0; i < n; i++){
        cin >> arr[i];
    }

    result = partition(arr,n);

    /* Se a diferenca entre a soma dos subconjuntos for igual a 0
     * entao o conjunto pode ser dividido.
     */
    if(abs(result) == 0)
        cout << "O conjunto informado pode ser dividido em dois subconjuntos com somas iguais." << endl;
    else
        cout << "O conjunto informado NAO PODE ser dividido em dois subconjuntos com somas iguais." << endl;

    return 0;
}
```

Listing 1: Programa que exibe uma mensagem se a soma dos valores de um conjunto A é igual à soma dos valores em S-A.

Suponhamos que temos $n = 500$ números, no entanto, sabemos que a soma de todos os números é no máximo $N = 10000$. Esse pequeno detalhe faz com que o problema possa ser resolvido com tempo de execução igual a $\Theta(n \times N)$.

O link abaixo é uma resolução do problema de partição no qual um conjunto de números é dado, e é desejável quebrar o conjunto em dois subconjuntos com a soma de seus elementos iguais.
http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/cpp_src/partition_problem/partition_problem.html