



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

RELATÓRIO DA 2ª UNIDADE
CONTROLE PID DE SISTEMA DE TANQUES ACOPLADOS

TURMA: 01
GRUPO 3

THIAGO THEIRY DE OLIVEIRA: 20210094287

GUILHERME PABLO DE SANTANA MACIEL: 20210094008

MAGNUS BRÍGIDO PAULO FREIRE: 20210094198

ENRICO LUIGI OLIVIERO: 20210073287

Natal-RN
2023

THIAGO THEIRY DE OLIVEIRA: 20210094287

GUILHERME PABLO DE SANTANA MACIEL: 20210094008

MAGNUS BRÍGIDO PAULO FREIRE: 20210094198

ENRICO LUIGI OLIVIERO: 20210073287

CONTROLE PID DE SISTEMA DE TANQUES ACOPLADOS

Primeiro Relatório apresentado à disciplina de Sistemas de Controle, correspondente à avaliação da 2ª unidade do semestre 2023.1 do 8º período do curso de Engenharia de Computação e Automação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sob orientação do **Prof. Anderson Luiz de Oliveira Cavalcanti**.

Professor: Anderson Luiz de Oliveira Cavalcanti.

Natal-RN
2023

RESUMO

O objetivo deste relatório é apresentar o projeto e a implementação de um controlador PID para um sistema de dois tanques acoplados. Para isso, foi realizado o processo de modelagem do problema, a partir da linearização das equações de estado fornecidas, o projeto do controlador utilizando o método do Lugar Geométrico das Raízes e a discretização da equação obtida com base nesse projeto. Utilizando o software MatLab e sua ferramenta de modelagem, Simulink, foi possível implementar o comportamento desejado para o controlador através de um script. Com base nos resultados da implementação, foi concluído que as especificações de tempo de estabilização e overshoot máximo foram alcançadas. Dessa forma, pode-se afirmar que o controlador está funcionando conforme o esperado.

Palavras-chave: controladores PID. Sistema de dois tanques acoplados. Discretização. Linearização.

Lista de Figuras

1	Bloco de Controlador PID	11
2	Controlador PID Usado na Discretização	12
3	Script Implementado	12
4	Crítério de Ângulo	16
5	Gráfico de Resposta do Sistema em Blocos	20
6	Gráfico de Resposta do Sistema Discretizado	21
7	LGR do Sistema Sem Controlador	22
8	LGR do Sistema Com Controlador	23

Sumário

1	INTRODUÇÃO	6
2	REFERENCIAL TEÓRICO	7
2.1	Sistemas de 2ª Ordem	7
2.2	Ações de Controle	7
2.2.1	Controle Proporcional	7
2.2.2	Controle Derivativo	7
2.2.3	Controle Integrativo	8
2.3	Método LGR - Lugar Geométrico das Raízes	8
2.3.1	Critério de Ângulo	9
2.3.2	Critério de Módulo	9
2.4	Linearização de Equações	9
2.5	Discretização de Equações	9
3	METODOLOGIA	10
3.1	Ferramentas	10
3.1.1	MatLab	10
3.1.2	Simulink	10
3.2	Material de Apoio	10
3.2.1	Equações de Estado	10
3.2.2	Tabela de Parâmetros	11
3.3	Simulação	11
3.3.1	Projeto do Controlador PID	11
4	RESULTADOS	13
4.1	Linearização das Equações	13
4.2	Controlador PID	14
4.3	Discretização das Equações	18
4.4	Análise e Gráficos	19
5	CONCLUSÃO	24
6	REFERÊNCIAS	25

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de controle desempenham um papel fundamental em diversas áreas de aplicação. Eles permitem regular variáveis como temperatura, nível de líquidos e outras grandezas em sistemas diversos. Esses sistemas são capazes de ajustar continuamente os parâmetros do sistema com base nas informações obtidas por meio de sensores, garantindo assim o controle preciso das variáveis desejadas. Entre as várias técnicas de controle disponíveis, o controlador PID se destaca devido à sua capacidade de oferecer estabilidade e precisão. O PID combina três ações fundamentais: proporcional, integral e derivativa. A ação proporcional ajusta a saída do controlador com base no erro atual, a ação integral corrige os erros acumulados ao longo do tempo, e a ação derivativa leva em conta a taxa de variação do erro. A combinação dessas três ações permite ao controlador PID alcançar um desempenho robusto e adaptativo.

Este estudo utiliza ferramentas computacionais para simular, analisar e projetar um controlador do tipo proporcional-integral-derivativo (PID) que seja capaz de controlar o nível de água de um tanque de um sistema de segunda ordem composto por dois tanques. O objetivo é que o ponto de operação seja definido como a metade do tamanho do tanque, o tempo de estabilização seja inferior a 40 segundos e o overshoot máximo seja de 30%.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Sistemas de 2ª Ordem

Um sistema de segunda é um sistema dinâmico cujo comportamento pode ser descrito por uma equação diferencial de segunda ordem e também pode ser descrito pela sua função de transferência, que relaciona a entrada do sistema à saída. A função de transferência pode ser representada da seguinte forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

Considerando $K = \omega_n^2$, a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

onde as constantes ξ é o fator de amortecimento, ω_n é a frequência natural e K é o ganho do sistema. De acordo com o valor de ξ , o sistema pode ser representado de três formas distintas. O sistema é denominado sobre-amortecido para $\xi > 1$, o que produz dois pólos reais e distintos. Com um $\xi = 1$, o sistema é denominado criticamente amortecido, caracterizado pela produção de dois pólos reais e iguais. No terceiro caso de representação, o sistema é denominado subamortecido onde o fator de amortecimento está no intervalo $0 < \xi < 1$.

2.2 Ações de Controle

2.2.1 Controle Proporcional

No controle proporcional, a ação de controle é proporcional ao erro entre o valor desejado (referência) e o valor atual da variável controlada. O erro é calculado subtraindo-se o valor desejado do valor atual. O controlador P multiplica o erro por uma constante chamada de ganho proporcional (K_p) e utiliza esse valor para gerar o sinal de controle citar (mundoprojetado). Algumas características do controlador P

- Atua no regime transitório e regime permanente do sistema. Isto é, ele tem efeito quando o sistema sai do ponto de partida e vai até o valor desejado (transitório) e também quando o sistema apresenta pouca ou nenhuma variação (regime permanente).
- O controle P não garante erro 0 no regime permanente
- Aumentar o ganho, normalmente, deixa a resposta do sistema mais rápida e diminui o erro, mas aumentar demais pode deixar o sistema instável por forçar o sistema a trabalhar em saturação (atua apenas em nível máximo ou mínimo).

2.2.2 Controle Derivativo

Enquanto o controle proporcional age com base no erro atual, o controle derivativo age com base

na taxa de variação do erro ao longo do tempo. Ele utiliza a derivada do erro em relação ao tempo para gerar o sinal de controle.

O controle derivativo é eficaz em prever as tendências futuras do sistema com base na taxa de mudança do erro. Isso permite uma resposta rápida a mudanças bruscas ou perturbações no sistema, ajudando a reduzir o tempo de resposta e a minimizar a sobrelevação (overshoot) do sistema citar (mundoprojetado). Algumas características do controlador D

- Atua apenas no regime transitório do sistema
- Não garante erro 0 no regime permanente
- Aumentar o ganho, normalmente, deixa a resposta do sistema mais rápida, mas um aumento excessivo pode deixar o sistema oscilatório

2.2.3 Controle Integrativo

Enquanto o controle proporcional age com base no erro atual e o controle derivativo age com base na taxa de variação do erro, o controle integrativo age com base na integral do erro ao longo do tempo. Ele acumula os erros passados para gerar o sinal de controle.

O controle integrativo é eficaz em corrigir o erro acumulado ao longo do tempo, garantindo que o sistema alcance a referência com precisão. Ele atua como um "ajuste fino" do controle proporcional, permitindo a eliminação do erro em regime permanente citar (mundoprojetado). Algumas características do controlador I

- Atua no regime transitório e regime permanente do sistema
- O controle I garante erro 0 no regime permanente
- Deixa o sistema mais lento e oscilatório
- Aumentar o ganho, normalmente, deixa a resposta do sistema mais rápida, mas aumentar demais pode deixar o sistema mais oscilatório por gerar um erro acumulado maior e possivelmente levar o sistema a saturação

2.3 Método LGR - Lugar Geométrico das Raízes

O LGR, ou Lugar Geométrico das Raízes, é uma técnica utilizada na engenharia de controle para analisar o comportamento dinâmico de sistemas de controle, fornecendo informações importantes sobre a estabilidade e o desempenho do sistema. Por exemplo, é possível identificar a região de estabilidade, onde todas as raízes estão localizadas no semiplano esquerdo (parte real negativa), garantindo a estabilidade do sistema. Também é possível observar a presença de polos complexos conjugados, que podem indicar oscilações ou respostas transitórias indesejáveis.

Além disso, o LGR auxilia no projeto e ajuste de controladores, permitindo a determinação de valores de ganho que otimizam o desempenho do sistema, como tempo de resposta, amortecimento e margens de estabilidade. Em resumo, o LGR é uma técnica gráfica que visualiza o comportamento

das raízes da função de transferência de um sistema em malha fechada em função de um parâmetro variável, proporcionando uma compreensão intuitiva das propriedades dinâmicas do sistema e auxiliando no projeto e ajuste de controladores.

2.3.1 Critério de Ângulo

O critério de ângulo pode ser utilizado para projetar um controlador ajustando os polos e zeros de acordo com os requisitos de desempenho desejados, como tempo de estabilização, overshoot, tempo de subida, entre outros. Ao analisar os ângulos e sua relação com a margem de fase, é possível determinar a localização adequada dos polos e zeros para atender aos requisitos específicos do sistema.

2.3.2 Critério de Módulo

O critério de módulo é uma técnica que pode ser usada para determinar o valor do ganho necessário para alcançar a estabilidade de um sistema de controle. Ele é baseado na análise da resposta em frequência do sistema.

2.4 Linearização de Equações

A linearização de equações é um método que aproxima uma função não linear por uma função linear em torno de um ponto de operação específico. Esse processo é útil para simplificar a análise de sistemas complexos. A linearização é baseada na série de Taylor, permitindo aproximar uma função por um polinômio infinito de termos calculados a partir das derivadas da função em um ponto específico. A linearização é amplamente aplicada na matemática e engenharia para analisar sistemas não lineares e possui diversas aplicações, como na engenharia de controle e modelagem de sistemas físicos.

2.5 Discretização de Equações

A discretização de equações é um processo que envolve a conversão de equações diferenciais contínuas em equações discretas, adequadas para implementação em sistemas digitais ou computacionais. Isso é necessário quando se deseja modelar ou controlar sistemas contínuos usando métodos numéricos ou sistemas digitais.

Uma das técnicas de discretização amplamente utilizadas é o Método de Tustin, também conhecido como método bilinear ou transformação bilinear. Esse método é usado para converter equações diferenciais contínuas em equações de diferença discretas.

3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada nos laboratórios de sistemas de controle envolve a utilização de equipamentos de medição e análise, visando sempre aprimorar a eficiência do controle e garantir o melhor desempenho do sistema.

3.1 Ferramentas

3.1.1 MatLab

Ele é uma linguagem de programação interativa que faz cálculos numéricos, tem seu próprio Integrated Development Environment (IDE) e um conjunto de bibliotecas (toolboxes). Estas, podem ser usadas em diversas áreas, desde equações diferenciais, até estatísticas, processamento de sinais, finanças e outros. Por causa de sua estrutura diferenciada, capacidade de expansão e flexibilidade, o software possui também as ferramentas de elementos finitos, inteligência artificial, depuração de processamento em tempo real e diversas outras soluções.

3.1.2 Simulink

Simulink, desenvolvido pela companhia MathWorks, é uma ferramenta para modelagem, simulação e análise de sistemas dinâmicos. Sua interface primária é uma ferramenta de diagramação gráfica por blocos e bibliotecas customizáveis de blocos. O software oferece alta integração com o resto do ambiente MATLAB. Simulink é amplamente usado em teoria de controle e processamento digital de sinais para projeto e simulação multi-domínios

3.2 Material de Apoio

3.2.1 Equações de Estado

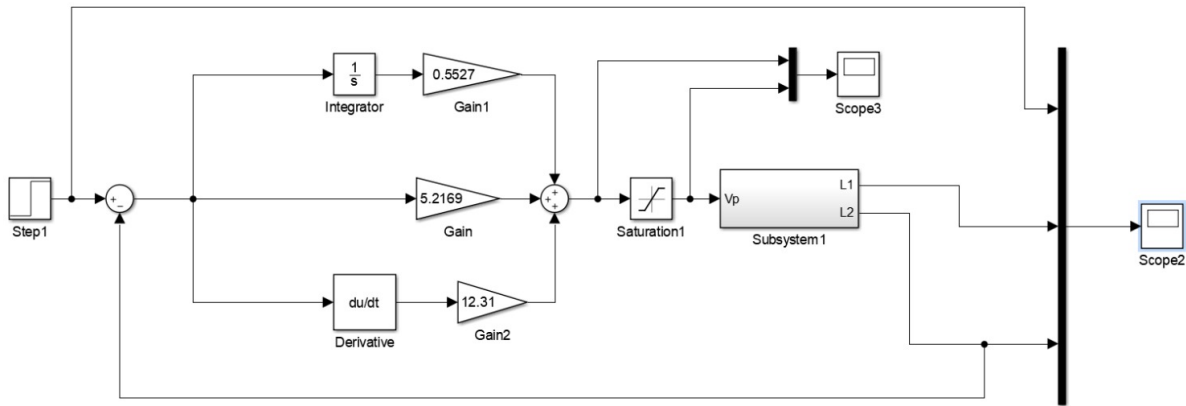
A bomba proporciona uma vazão de entrada no tanque 1. A vazão de saída do tanque 1 serve como vazão de entrada no tanque 2. O objetivo do sistema é controlar o nível do tanque 2 (variável controlada) a partir da manipulação da tensão da bomba (variável manipulada). O modelo do sistema é não-linear e é descrito pelas seguintes equações de estado:

$$\dot{L}_1 = -\frac{a_1}{A_1} \cdot \sqrt{2gL_1} + \frac{K_m}{A_1} \cdot V_p \quad (3)$$

$$\dot{L}_2 = \frac{a_1}{A_2} \cdot \sqrt{2gL_1} - \frac{a_2}{A_2} \cdot \sqrt{2gL_2} \quad (4)$$

Em que, \dot{L}_1 e \dot{L}_2 são as taxas de variação dos níveis de água dos tanques superior e inferior, respectivamente; L_1 e L_2 são os níveis de água dos tanques superior e inferior respectivamente; a_1 e a_2 são as áreas dos orifícios de saída dos tanques superior e inferior, respectivamente; $A_1 = A_2$ são as áreas das bases dos tanques superior e inferior, respectivamente; K_m é a constante da bomba; g é a aceleração da gravidade e V_p é a tensão aplicada à bomba.

Figura 1: Bloco de Controlador PID



3.2.2 Tabela de Parâmetros

Tabela 1: tabela de parâmetros

Símbolo	Parâmetro	Valor
V_p	Tensão aplicada à bomba	22V a 22V
K_m	Constante da Bomba	$4.6 \text{ cm}^3/\text{s.V}$
$A1 = A2$	Área da seção transversal dos tanques	15.518 cm^2
$a1 = a2$	Área dos orifícios de saída	0.178 cm^2
g	Aceleração da Gravidade	981 cm/s^2

3.3 Simulação

3.3.1 Projeto do Controlador PID

Uma vez que as equações foram linearizadas, a fim de verificar se os valores obtidos de k_p , k_i e k_d atendem às exigências do controlador, em sequência foi desenvolvido um bloco de controlador PID no MATLAB (figura 1) para realizar essa análise e garantir uma implementação eficiente do controle.

E também foi viável fornecer esses valores e as equações discretizadas para o MATLAB, a fim de realizar a montagem do sistema de forma discreta. O sistema montado e o script implementado estão a seguir (figura 2 e 3):

Figura 2: Controlador PID Usado na Discretização

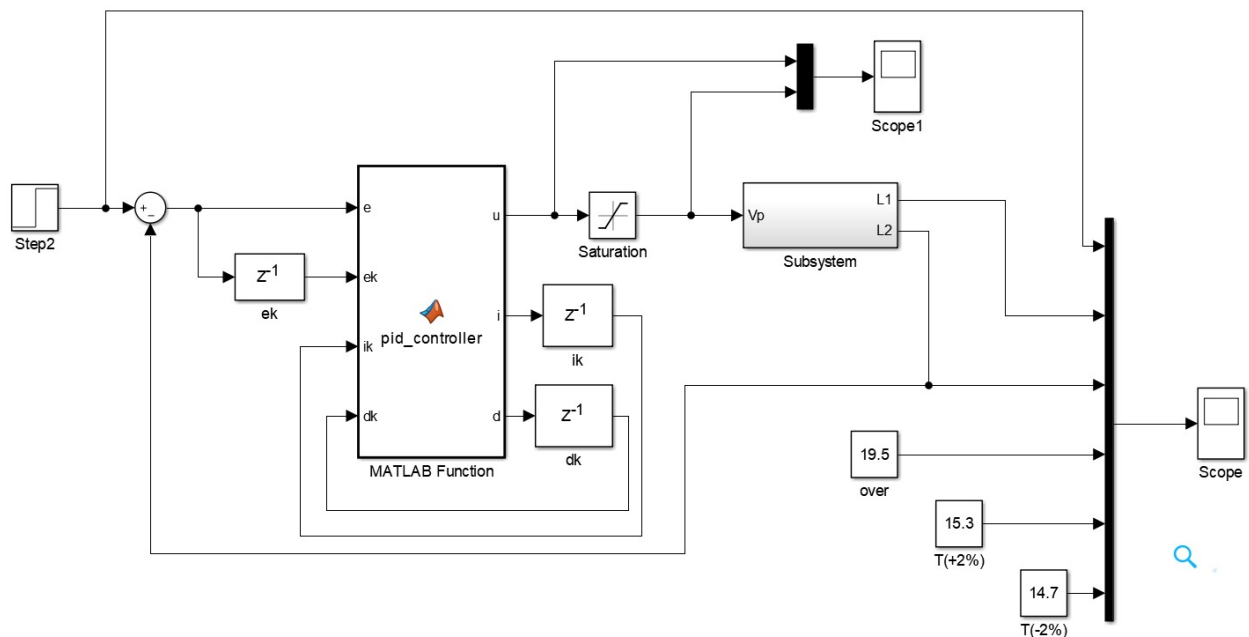


Figura 3: Script Implementado

```
function [u,i,d] = pid_controller(e,ek,ik,dk)
    %#codegen
    T = 0.2;
    kp = 5.2169;
    ki = 0.5527;
    kd = 12.31;

    % Cálculo dos termos do controlador PID
    p = kp * e;
    i = ik + ((ki * T) / 2) * (e + ek);
    d = -dk + ((2 * kd) / T) * (e - ek);

    u = p + i + d;
```

4 RESULTADOS

Os resultados estão apresentados em forma de equações e gráficos, que mostram o comportamento do sistema ao longo do tempo, bem como as medições realizadas

4.1 Linearização das Equações

Para realizar a linearização das equações dos tanques acoplados usando o método da série de Taylor, foram considerados os parâmetros apresentados na tabela 1. Além disso, definiu-se que o ponto de operação seria de 15 cm (sugestão dada no material do trabalho) correspondendo à metade do nível em ambos os tanques. Portanto, a equação referente ao tanque 1 foi linearizada da seguinte maneira:

$$\dot{L}_1(L_1, V_p) = f_1(L_1, V_p) \quad (5)$$

$$f_1(L_1, V_p) = f_1(L_{1,0}, V_{p,0}) + \frac{\partial f_1(L_1, V_p)}{\partial L_1} \cdot (L_1 - L_{1,0}) + \frac{\partial f_1(L_1, V_p)}{\partial V_p} \cdot (V_p - V_{p,0}) \quad (6)$$

Ao considerar que o tanque 1 está em regime permanente, o que implica em $\dot{L}_1 = 0$, a fim de definir o valor inicial da tensão aplicada à bomba, podemos substituir os valores correspondentes na equação 3, resultando em:

$$-\frac{a_1}{A_1} \cdot \sqrt{2gL_{1,0}} + \frac{k_m}{A_1} \cdot V_{p,0} = 0 \rightarrow V_{p,0} = \frac{a_1}{K_m} \cdot \sqrt{2gL_{1,0}} = 6.638V \quad (7)$$

Após encontrar o valor da tensão inicial, você pode inseri-lo nas equações das derivadas parciais e, em seguida, substituí-lo na equação 6.

$$\frac{\partial f_1(L_1, V_p)}{\partial L_1} = \frac{-a_1 2g}{2A_1 \cdot \sqrt{2gL_1}} = \frac{-0.178 \cdot 2 \cdot 9.81}{2 \cdot 15.518 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 15}} = -0.0656 \quad (8)$$

$$\frac{\partial f_1(L_1, V_p)}{\partial V_p} = \frac{k_m}{A_1} = \frac{4.6}{15.518} = 0.2964 \quad (9)$$

$$f_1(L_1, V_p) = f_1(L_{1,0}, V_{p,0}) - 0.0656 \cdot (L_1 - L_{1,0}) + 0.2964 \cdot (V_p - V_{p,0}) \quad (10)$$

$$\dot{L}_1 = \dot{L}_{1,0} - 0.0656 \cdot \Delta L_1 + 0.2964 \cdot \Delta V_p \quad (11)$$

$$\Delta \dot{L}_1 = -0.0656 \cdot \Delta L_1 + 0.2964 \cdot \Delta V_p \quad (12)$$

Por fim, para obter a função de transferência que relaciona o nível do tanque 1 com a tensão de entrada aplicada à bomba, é necessário realizar a transformada de Laplace.

$$s\Delta L_1 + 0.0656 \cdot \Delta L_1 = 0.2964 \cdot \Delta V_p \rightarrow \Delta L_1(s + 0.0656) = 0.2964 \cdot \Delta V_p \quad (13)$$

$$G_{L_1} = \frac{\Delta L_1}{\Delta V_p} = \frac{0.2964}{s + 0.0656} \quad (14)$$

Da mesma forma que foi feito para achar a função de transferência do nível do tanque 1, podemos fazer para encontrar a função de transferência da 2ª equação de estado. Assim, temos:

$$\dot{L}_2(L_1, L_2) = f_2(L_1, L_2) \quad (15)$$

$$f_2(L_1, L_2) = f_2(L_{1,0}, L_{2,0}) + \frac{\partial f_2(L_1, L_2)}{\partial L_1} \cdot (L_1 - L_{1,0}) + \frac{\partial f_2(L_1, L_2)}{\partial L_2} \cdot (L_2 - L_{2,0}) \quad (16)$$

$$\frac{\partial f_2(L_1, L_2)}{\partial L_1} = \frac{a_1 2g}{2A_2 \cdot \sqrt{2gL_1}} = \frac{0.178 \cdot 2 \cdot 9.81}{2 \cdot 15.518 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 15}} = 0.0656 \quad (17)$$

$$\frac{\partial f_2(L_1, L_2)}{\partial L_2} = \frac{-a_1 2g}{2A_2 \cdot \sqrt{2gL_2}} = \frac{-0.178 \cdot 2 \cdot 9.81}{2 \cdot 15.518 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 15}} = -0.0656 \quad (18)$$

$$f_2(L_1, L_2) = f_2(L_{1,0}, L_{2,0}) + 0.0656 \cdot \Delta L_1 - 0.0656 \cdot \Delta L_2 \quad (19)$$

$$\Delta \dot{L}_2 = 0.0656 \cdot \Delta L_1 - 0.0656 \cdot \Delta L_2 \quad (20)$$

Por Laplace:

$$s\Delta L_2 + 0.0656 \cdot \Delta L_2 = 0.0656 \cdot \Delta L_1 \quad (21)$$

Sendo o objetivo obter a função de transferência que relaciona o nível do tanque 2 com a tensão aplicada na bomba, basta substituir o valor de ΔL_1 encontrado anteriormente. Isso permitirá obter a relação entre o nível do tanque 2 e a tensão de entrada da bomba

$$\Delta L_2(s + 0.0656) = 0.0656 \cdot \left(\frac{0.2964 \cdot \Delta V_p}{s + 0.0656} \right) = \frac{0.0194 \cdot \Delta V_p}{s + 0.0656} \quad (22)$$

$$\Delta L_2(s + 0.0656) = \frac{0.0194 \cdot \Delta V_p}{(s + 0.0656)} \quad (23)$$

$$\frac{\Delta L_2}{\Delta V_p} = \frac{0.0194}{(s + 0.0656)^2} \quad (24)$$

Valor de $G(s)$:

$$G(s) = \frac{\Delta L_2}{\Delta V_p} = \frac{0.0194}{(s + 0.0656)^2} \quad (25)$$

4.2 Controlador PID

Para projetar o controlador PID fazendo com que o sistema tenha um tempo de estabilização menor do que 40 segundos e overshoot máximo de 30%. Foi utilizado o tempo de acomodação com

o critério de 2%, esse critério mede o tempo necessário para que a resposta do sistema alcance 98% e é amplamente adotado como uma métrica de estabilidade. Dessa forma, temos:

$$t_s < 40s \quad (26)$$

$$M_p = 30 \quad (27)$$

Assim, ao utilizar o critério de 2% para o tempo de estabilização, obtemos os valores do coeficiente de amortecimento e da frequência natural:

$$M_p = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} = 0.3 \rightarrow -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi = \ln(0.3) \rightarrow \xi = \sqrt{\frac{1.4495}{11.3191}} = 0.3578 \quad (28)$$

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\xi \omega_n} < 40 \rightarrow \omega_n > \frac{4}{\xi t_s} \rightarrow \omega_n > \frac{4}{14.312} \rightarrow \omega_n > 0.2794 \quad (29)$$

Com os valores de ξ e ω_n obtidos, temos um sistema de segunda ordem subamortecido, na qual o fator de amortecimento está no intervalo $0 < \xi < 1$. Sendo assim, possui duas raízes complexas conjugadas e os pontos que devem pertencer ao LGR do sistema será:

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}j = -0.0998 \pm 0.2605j \quad (30)$$

Ao considerar os pontos que devem pertencer ao LGR como identificado anteriormente e que os controladores PID adicionam um pólo em $p = 0$ e 2 zeros, que geralmente os dois zeros são reais e iguais. Podemos projetar o controlador localizando os pólos e zeros de acordo com a condição de ângulo.

O critério de ângulo é aplicado utilizando a equação que relaciona o controlador com a função de transferência encontrada na equação 25. Essa equação é utilizada para determinar os pólos e zeros do controlador, de acordo com os requisitos de desempenho do sistema. A equação é apresentada abaixo:

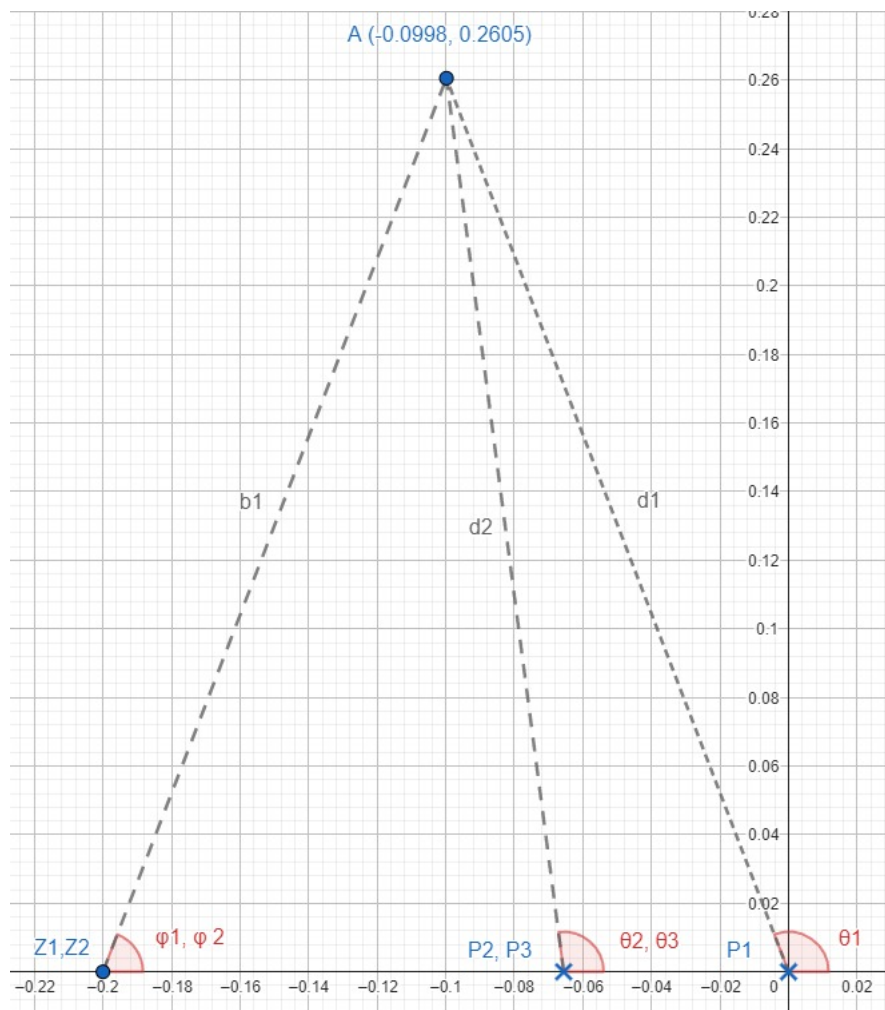
$$G(s)C(s) = \frac{0.0194}{(s+0.0656)^2} \cdot \frac{k_c \cdot (s+z_1) \cdot (s+z_2)}{s} \quad (31)$$

Para determinar cada um dos zeros da equação, será utilizado o ponto encontrado na equação 30 como referência. Aplicando o critério de ângulo, serão determinados os ângulos dos pólos (θ_1 , θ_2 e θ_3) e os ângulos correspondentes aos zeros (ϕ_1 e ϕ_2). E também será utilizado o critério de módulo para encontrar K_c . Pode ser visto na figura 4 o uso do critério de ângulo.

Para determinar os valores de z_1 e z_2 , primeiro calculamos os ângulos correspondentes aos pontos conhecidos utilizando trigonometria. Através desses ângulos, podemos determinar as coordenadas dos pontos z_1 e z_2 .

$$\theta_1 = 180^\circ - \text{tg}\left(\frac{0.2605}{0.0998}\right)^{-1} = 110.96^\circ \quad (32)$$

Figura 4: Critério de Ângulo



$$\theta_2 = \theta_3 = 180^\circ - \operatorname{tg}\left(\frac{0.2605}{0.0998 - 0.0656}\right)^{-1} = 99.4038^\circ \quad (33)$$

A soma dos ângulos deve ser igual à -180° .

$$-\theta_1 - 2\theta_2 + 2\phi = -180^\circ \quad (34)$$

$$\phi = \frac{-180^\circ + \theta_1 + 2 \cdot \theta_2}{2} = \frac{-180^\circ + 110.96^\circ + 2 \cdot 99.4038^\circ}{2} = 64.88^\circ \quad (35)$$

Por trigonometria temos:

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{0.2605}{x} \rightarrow x = \frac{0.2605}{\operatorname{tg}(64.88^\circ)} = 0.1221 \quad (36)$$

Sendo assim, o ponto onde os zeros estão localizados é:

$$z_1 = z_2 = -0.0998 - x = -0.0998 - 0.1221 = -0.2219 \quad (37)$$

Assim, a função do controlador encontrado foi:

$$C(s) = \frac{k_c \cdot (s + z_1) \cdot (s + z_2)}{s} = \frac{k_c \cdot (s + 0.2219)^2}{s} \quad (38)$$

Portanto, para definir o valor do ganho do controlador k_c , a última incógnita do controlador, pode ser obtido seguindo o critério de módulo:

$$\left| \frac{0.0194}{(s + 0.0656)^2} \cdot \frac{k_c \cdot (s + 0.2119)^2}{s} \right|_{s=-0.0998+0.2605j} = 1 \quad (39)$$

Para calcular o ganho, foram determinadas as distâncias entre o ponto encontrado na equação 30 e os pólos e zeros do sistema.

$$d_1 = \sqrt{0.0998^2 + 0.2605^2} = 0.2789 \quad (40)$$

$$d_2 = d_3 = \sqrt{(0.0998 - 0.0656)^2 + 0.2605^2} = 0.2626 \quad (41)$$

$$b_1 = b_2 = \sqrt{(0.2119 - 0.0998)^2 + 0.2605^2} = 0.2835 \quad (42)$$

$$k_c = \frac{0.2789 \cdot 0.2626^2}{0.0194 \cdot 0.2835^2} = 12.31 \quad (43)$$

Assim, a equação completa do controlador PID será :

$$C(s) = \frac{12.31 \cdot (s + 0.2119)^2}{s} = \frac{12.31s^2 + 5.2169s + 0.5527}{s} \quad (44)$$

4.3 Discretização das Equações

A discretização das equações é um processo que permite a implementação das equações em um ambiente computacional, como o MATLAB. Assim, foram separadas as equações correspondentes às partes proporcionais, derivativas e integrais, determinando um intervalo de tempo de amostragem (T) desejado.

As equações são inicialmente obtidas no domínio de Laplace, onde as transformadas de Laplace são aplicadas para descrever o comportamento do sistema de controle. No entanto, para realizar a implementação prática do controlador, é necessário converter as equações para o domínio discreto. Para isso, é utilizada a transformada Z.

$$C(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} = K_d s + K_p + \frac{K_i}{s} = 12.31s + 5.2169 + \frac{0.5527}{s} \quad (45)$$

Considerando o fato de que:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{(z-1)}{(z+1)} \quad (46)$$

Para a equação relativa ao Controlador Proporcional, temos:

$$\frac{P(s)}{E(s)} = k_p \rightarrow P(s) = k_p \cdot E(s) \quad (47)$$

$$P(z) = k_p \cdot E(z) \rightarrow p(k) = k_p \cdot e(k) \quad (48)$$

Para a equação relativa ao Controlador Derivativo, temos:

$$\frac{D(s)}{E(s)} = k_d s \rightarrow D(z) = k_d \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right) E(z) \quad (49)$$

$$D(z) = \left(\frac{2k_d z - k_d}{Tz + T} \right) \cdot E(z) \quad (50)$$

$$D(z)(Tz + T) = (2k_d z - k_d) \cdot E(z) \rightarrow T[zD(z) + D(z)] = 2k_d [zE(z) - E(z)] \quad (51)$$

$$d(k) = -d(k+1) + \frac{2k_d}{T} [e(k+1) - e(k)] \quad (52)$$

Para a equação relativa ao Controlador Integrativo, temos:

$$\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{k_i}{s} \rightarrow I(z) = \frac{k_i}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \cdot E(z) \quad (53)$$

$$I(z)(2z - z) = (k_i T z + 0.5527 T) E(z) \rightarrow 2[zT I(z) - I(z)] = k_i T [zE(z) + E(z)] \quad (54)$$

$$2[i(k+1) - i(k)] = k_i T [e(k+1) + e(k)] \quad (55)$$

$$i(k) = i(k+1) - \frac{k_i}{2}T[e(k+1) + e(k)] \quad (56)$$

Considerando que não é possível prever o erro futuro $e(k+1)$, assumimos que $k+1 = k'$, portanto, as equações 48, 52 e 56 são modificadas da seguinte maneira:

$$p(k) = k_p e(k) = 5.2169 \cdot e(k) \quad (57)$$

$$d(k') = -d(k'-1) + \frac{2k_d}{T} \cdot [e(k') - e(k'-1)] = -d(k'-1) + \frac{24.62}{T} \cdot [e(k') - e(k'-1)] \quad (58)$$

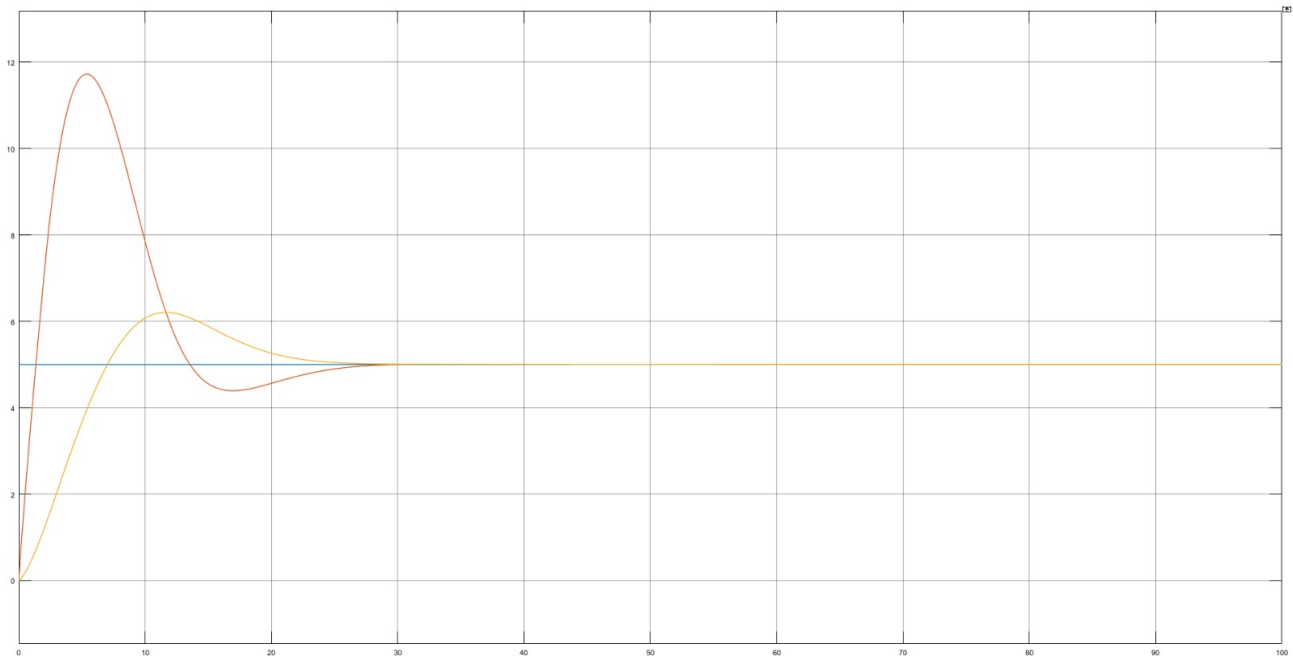
$$i(k') = i(k'-1) + \frac{k_i T}{2} \cdot [e(k') - e(k'-1)] = -i(k'-1) + \frac{0.5527T}{2} \cdot [e(k') - e(k'-1)] \quad (59)$$

4.4 Análise e Graficos

A análise gráfica de um sistema de controle desempenha um papel fundamental na compreensão do seu comportamento e desempenho. Através de gráficos e análises, podemos visualizar e interpretar as respostas do sistema em diferentes situações e condições.

Como foi mencionado anteriormente, para verificar se os valores obtidos de k_p , k_i e k_d atendem aos requisitos do controlador, foi montado um sistema com um bloco de controlador PID, conforme a figura 1.

Figura 5: Gráfico de Resposta do Sistema em Blocos

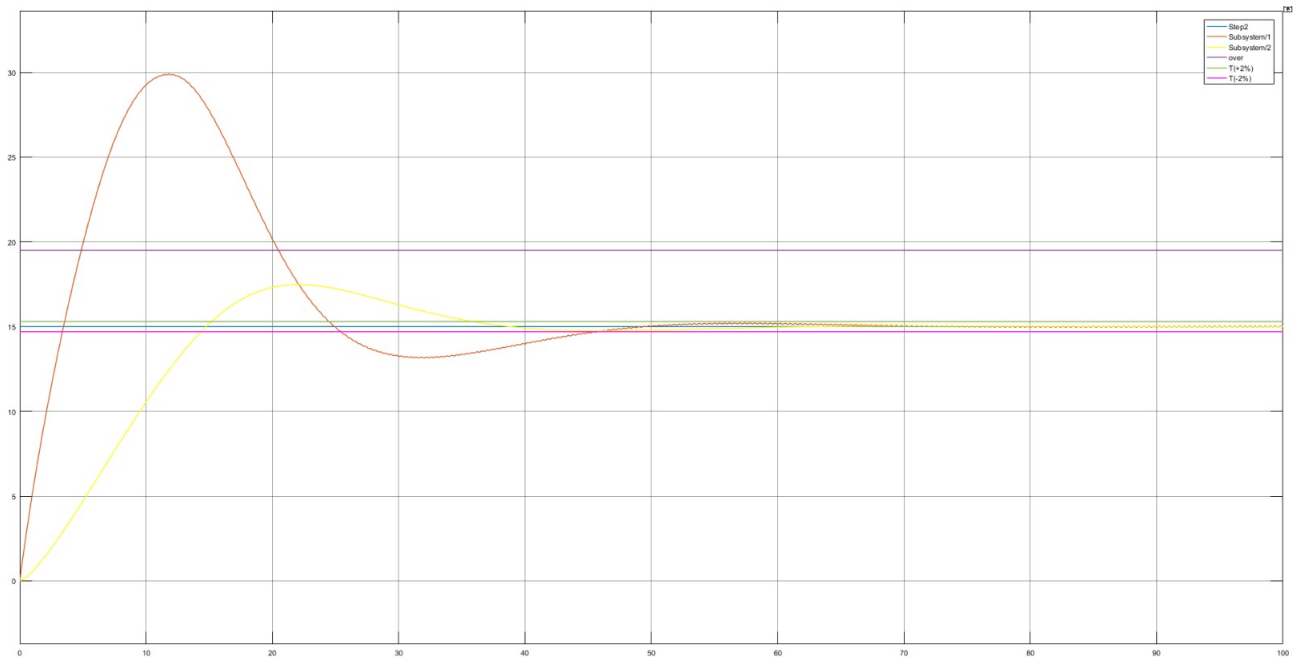


A partir da análise da Figura 5, podemos observar que os valores obtidos de k_p , k_i e k_d são adequados para o controlador.

Desse modo, com a verificação que os valores estavam de acordo com o projeto proposto, conforme a figura 2, foi feita a montagem do sistema com o script (figura 3) verificando o comportamento do gráfico do sistema discretizado, o resultado pode ser conferido na figura 6

Ao analisar atentamente a resposta obtida, fica evidente que ela está em conformidade com os critérios estabelecidos durante o projeto. O overshoot, que representa a porcentagem de ultrapassagem do valor de referência, foi mantido em 30%, garantindo que a resposta não apresente oscilações excessivas. Além disso, o tempo de estabilização, ou seja, o tempo necessário para que o sistema atinja um estado de equilíbrio após uma mudança na entrada, foi mantido abaixo de 40 segundos. Esses resultados demonstram que o controlador PID projetado foi capaz de atender aos requisitos de desempenho estabelecidos, proporcionando uma resposta estável e precisa para o sistema em questão. Essa análise reforça a eficácia das técnicas empregadas e a validade do projeto realizado.

Figura 6: Gráfico de Resposta do Sistema Discretizado



Com o intuito de realizar uma comparação significativa, foi gerado o gráfico do lugar geométrico das raízes do sistema tanto sem o controlador PID quanto com o controlador PID acoplado. Essa análise visual permite observar claramente as alterações ocorridas ao incorporar o controlador PID ao sistema de tanques.

Ao comparar os dois gráficos, é possível visualizar as modificações nas raízes do sistema com a presença do controlador PID. Essas mudanças refletem diretamente no comportamento dinâmico do sistema, como o tempo de resposta, o overshoot e a estabilidade. Portanto, a análise do lugar geométrico das raízes é uma ferramenta valiosa para entender e comparar o desempenho do sistema antes e depois da aplicação do controlador PID.

Figura 7: LGR do Sistema Sem Controlador

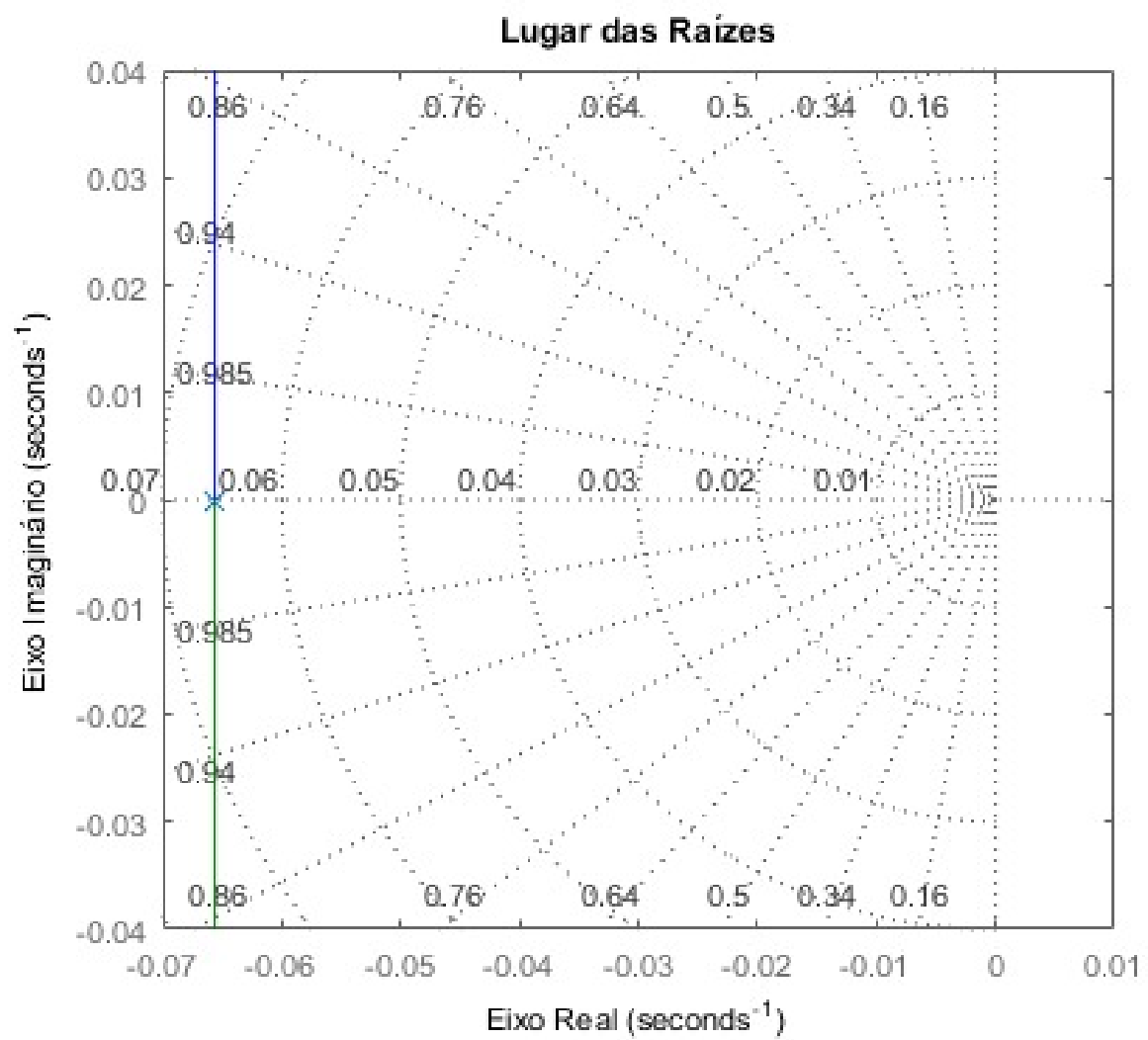
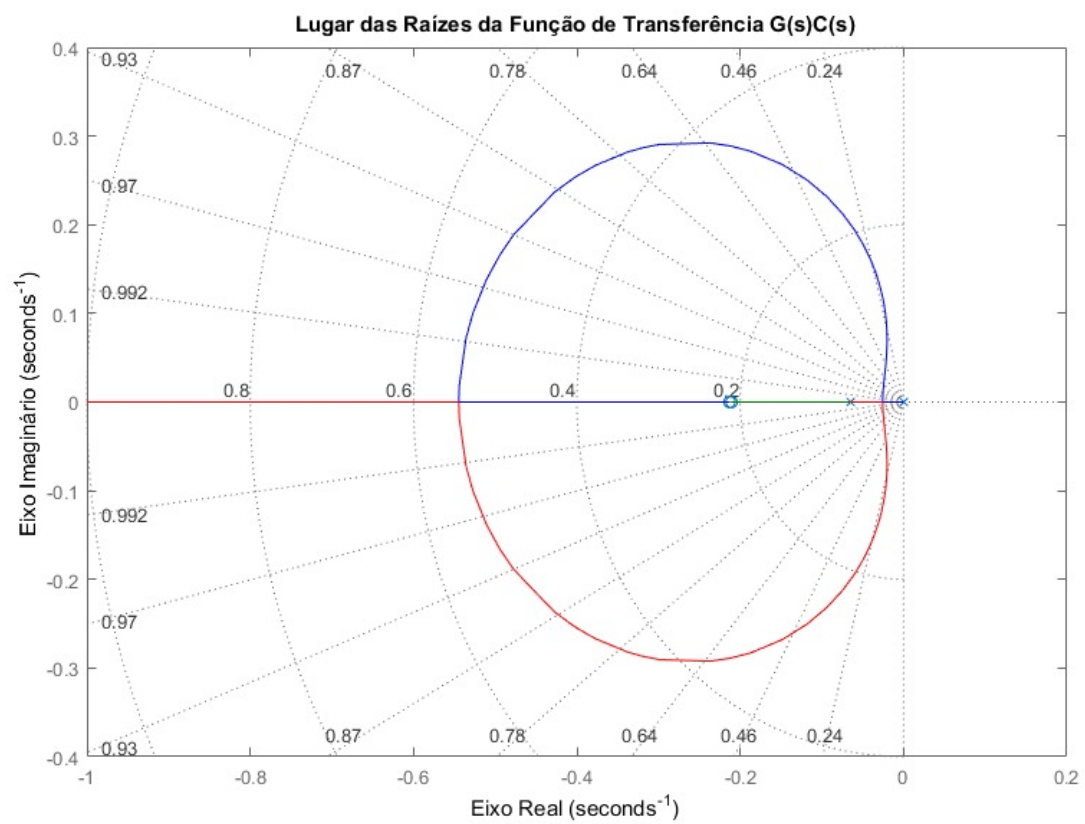


Figura 8: LGR do Sistema Com Controlador



5 CONCLUSÃO

O projeto de controladores é um tema fundamental tanto no ambiente acadêmico quanto profissional. Neste estudo realizado, tivemos a oportunidade de aplicar e praticar os conceitos relacionados a esse tema, utilizando a ferramenta MATLAB e o Simulink. Uma etapa crucial do projeto foi a determinação das constantes das ações de controle, visando ajustar a planta de acordo com as especificações do projeto. Esse processo foi realizado de forma satisfatória, movendo o LGR do sistema conforme necessário. A linearização e discretização também foram de suma importância para que todas as etapas fossem concluídas, já que as constantes só puderam ser encontradas através da linearização e a simulação no MATLAB através da discretização. Quanto aos resultados obtidos, o gráfico final demonstrou que o controle foi realizado com ganhos adequados, atendendo aos critérios de overshoot e tempo de estabilização. Isso comprova que os cálculos realizados seguiram um caminho válido na prática.

Conclui-se, portanto, que todos os princípios teóricos abordados desempenham um papel crucial na aplicação prática do controle PID em sistemas de tanques acoplados. Essa experiência proporcionou uma compreensão mais aprofundada dos processos de controle e sua aplicação em sistemas reais.

6 REFERÊNCIAS

O método do lugar das raízes - Exemplos. **Universidade de São Paulo**, 2007. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1997331/mod_resource/content/1/ApostilaCap5V2007.pdf. Acesso em: 30 de maio de 2023.

MADEIRA, Daniel. Controlador proporcional em sistemas de segunda ordem. **EMBARCADOS**, 2016. Disponível em: <https://embarcados.com.br/controlador-proporcional-em-sistemas-de-segunda-ordem/>. Acesso em: 30 de maio de 2023.

ARAÚJO, Fábio Meneghetti Ugulino de. SISTEMAS DE CONTROLE. **DCA: Departamento de Engenharia de Computação e Automação - UFRN**, 2007. Disponível em: <https://www.dca.ufrn.br/meneghet/FTP/Controle/scv20071.pdf>. Acesso em: 31 de maio de 2023.

O controlador PID. **TECNOLOG - O Shopping da Automação**, c2023.

Disponível em: <https://www.tecnolog.ind.br/content/28-o-controlador-pid>. Acesso em: 31 de maio de 2023.

QUEIROZ, Fernando Cordeiro de. LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE. **REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ (RI-UEM)**, 2016.

Disponível em: <http://repositorio.uem.br:8080/jspui/bitstream/1/5498/1/000226879.pdf>. Acesso em: 31 de maio de 2023.

ANTONY, Eric. Discretização de Sistemas Lineares e Não Lineares. **All Electronics Group**, 2020.

Disponível em: <https://allelectronicsgr.com.br/discretizacao-de-sistemas-lineares-e-nao-lineares/>. Acesso em: 31 de maio de 2023.

BECKER, A. J.; SILVA, D. M. I. da; DIAS, F. H. S.; PINHEIRO, L. K. Noções Básicas de Programação em MATLAB. **UFSM - Universidade Federal de Santa Maria**, 2010.

Disponível em: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/783/2020/02/Apostila_Matlab.pdf/. Acesso em: 01 de jun. de 2023.