



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

RELATÓRIO DA 3ª UNIDADE
CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

TURMA: 01
GRUPO 3

THIAGO THEIRY DE OLIVEIRA: 20210094287

GUILHERME PABLO DE SANTANA MACIEL: 20210094008

MAGNUS BRÍGIDO PAULO FREIRE: 20210094198

ENRICO LUIGI OLIVIERO: 20210073287

Natal-RN
2023

THIAGO THEIRY DE OLIVEIRA: 20210094287

GUILHERME PABLO DE SANTANA MACIEL: 20210094008

MAGNUS BRÍGIDO PAULO FREIRE: 20210094198

ENRICO LUIGI OLIVIERO: 20210073287

CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

Terceiro Relatório apresentado à disciplina de Laboratório de Sistemas de Controle, correspondente à avaliação da 3ª unidade do semestre 2023.1 do 8º período do curso de Engenharia de Computação e Automação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sob orientação do **Prof. Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo**.

Professor: Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo.

Natal-RN
2023

RESUMO

Neste relatório é detalhado o processo de estudo, análise e implementação de controle no Espaço de Estados para um sistema composto por dois tanques acoplados. O objetivo desse estudo foi alcançar uma representação no Espaço de Estados a partir de Equações Diferenciais Ordinárias e dados de variáveis do sistema. Essa representação, uma vez obtida, possibilitou o cálculo das matrizes essenciais para implementar três estratégias distintas de controle: observadores de estado, seguidor de referência e seguidor de referência com realimentação de estados estimados. Ao longo dos experimentos realizados, foram realizadas variações sistemáticas nos valores dos polos do sistema, com o objetivo de encontrar configurações ideais em que as curvas estimadas se aproximassem o máximo possível das curvas reais. Além disso, buscou-se minimizar o número de oscilações indesejadas e aprimorar a precisão do controle. Através de análises comparativas dos resultados obtidos, foi possível extrair valiosas conclusões sobre o desempenho das três abordagens de controle em diferentes cenários. Os resultados ressaltam a relevância de compreender as características específicas do sistema e os requisitos de desempenho para escolher a estratégia de controle mais adequada, seja ela orientada para a velocidade ou para a precisão, pois quando a precisão é o fator preponderante, o seguidor de referências sobressai como a escolha mais apropriada. No entanto, quando a prioridade está na velocidade de resposta ao longo do tempo, a implementação do sistema em conjunto - que engloba os observadores de estado, seguidor de referência e realimentação de estados estimados - é a opção mais indicada.

Palavras-chave: Espaço de Estados. Seguidor de Referência. Tanque. Controlador. Observador.

Lista de Figuras

1	Modelo do Sistema Com Observadores de Estado	14
2	Modelo do Sistema Seguidor de Referência	15
3	Modelo do Sistema Seguidor de Referência Com Observadores de Estado	16
4	Script utilizado para calcular as matrizes de ganho	17
5	Simulação 1 - Teste 1 - Nível do tanque 1	19
6	Simulação 1 - Teste 2 - Nível do tanques 1	20
7	Simulação 1 - Teste 3 - Nível do tanques 1	21
8	Simulação 1 - Erro - Nível do tanque 2	22
9	Simulação 2 - Teste 1 - Níveis dos tanques 1 e 2	23
10	Simulação 2 - Teste 2 - Níveis dos tanques 1 e 2	24
11	Simulação 2 - Teste 3 - Níveis dos tanques 1 e 2	25
12	Simulação 2 - Teste 4 - Níveis dos tanques 1 e 2	26
13	Simulação 3 - Teste 1 - Níveis dos tanques 1 e 2	27
14	Simulação 3 - Teste 2 - Níveis dos tanques 1 e 2	28
15	Simulação 3 - Teste 3 - Níveis dos tanques 1 e 2	29
16	Simulação 3 - Teste 4 - Níveis dos tanques 1 e 2	30
17	Simulação 3 - Teste 5 - Níveis dos tanques 1 e 2	31
18	Simulação 3 - Teste 6 - Níveis dos tanques 1 e 2	32
19	Simulação 3 - Teste 7 - Níveis dos tanques 1 e 2	33
20	Simulação 3 - Teste 8 - Níveis dos tanques 1 e 2	34
21	Simulação 3 - Teste 9 - Níveis dos tanques 1 e 2	35

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
2	REFERENCIAL TEÓRICO	8
2.1	Observabilidade	8
2.1.1	Condições Necessárias e Suficientes	8
2.2	Controlabilidade	9
2.2.1	Condições Necessárias e Suficientes	9
2.3	Seguidor de Referência	9
2.4	Fórmula de Ackermann	10
3	METODOLOGIA	13
3.1	Ferramentas	13
3.1.1	Bancada Quanser	13
3.1.2	MatLab	13
3.1.3	Simulink	13
3.2	Simulações	14
3.2.1	Observador de Estados	14
3.2.2	Seguidor de Referência	15
3.2.3	Seguidor de Referência + Observador de Estados	16
3.2.4	Script	16
4	RESULTADOS	18
4.1	Simulação 1 - Observadores de Estado	18
4.1.1	1º Teste: $P1 = 1$ $P2 = 3$	18
4.1.2	2º Teste: $P1 = 3$ $P2 = 3$	20
4.1.3	3º Teste: $P1 = 5+3i$ $P2 = 5-3i$	21
4.1.4	Erro do tanque 2	22
4.2	Simulação 2 - Seguidor de Referência	23
4.2.1	1º Teste: Polos $P1 = 1,1$ $P2 = 0,7$ $P3 = 0,2$	23
4.2.2	2º Teste: Polos $P1 = 1$ $P2 = 0,6$ $P3 = 0,1$	24
4.2.3	3º Teste: Polos $P1 = 1$ $P2 = 0,3$ $P3 = 0,1$	25
4.2.4	4º Teste: Polos $P1 = 1$ $P2 = 0,1 + 0,1i$ $P3 = 0,1 - 0,1i$	25
4.3	Simulação 3 - Seguidor de Referência com Estados Estimados	27
4.3.1	1º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1,1$, $P2 = 0,7$ e $P3 = 0,2$; Polos do Observador: $P4 = 1$ e $P5 = 3$	27
4.3.2	2º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1,1$, $P2 = 0,7$ e $P3 = 0,2$; Polos do Observador: $P4 = 3$ e $P5 = 3$	28
4.3.3	3º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1,1$, $P2 = 0,7$ e $P3 = 0,2$; Polos do Observador: $P4 = 5 + 3i$ e $P5 = 5 - 3i$	29

4.3.4	4° Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,3$ e $P3 = 0,1$; Polos do Observador: $P4 = 1$ e $P5 = 3$	30
4.3.5	5° Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,3$ e $P3 = 0,1$; Polos do Observador: $P4 = 3$ e $P5 = 3$	31
4.3.6	6° Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,3$ e $P3 = 0,1$; Polos do Observador: $P4 = 5 + 3i$ e $P5 = 5 - 3i$	32
4.3.7	7° Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,1 + 0,1i$ e $P3 = 0,1 - 0,1i$; Polos do Observador: $P4 = 1$ e $P5 = 3$	33
4.3.8	8° Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,1 + 0,1i$ e $P3 = 0,1 - 0,1i$; Polos do Observador: $P4 = 3$ e $P5 = 3$	34
4.3.9	9° Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,1 + 0,1i$ e $P3 = 0,1 - 0,1i$; Polos do Observador: $P4 = 5 + 3i$ e $P5 = 5 - 3i$	35
5	CONCLUSÃO	36
6	REFERÊNCIAS	37

1 INTRODUÇÃO

A controlabilidade e a observabilidade são conceitos fundamentais na teoria de controle de sistemas, desempenhando um papel crucial no projeto e análise de sistemas dinâmicos. Essas propriedades permitem compreender e manipular adequadamente o comportamento dos sistemas, tornando possível projetar estratégias eficientes de controle, destacando ambos os conceitos e explorando suas aplicações em projetos de controle no Espaço de Estados para o sistema de tanques acoplados.

Utilizando modelos computacionais, foram realizadas simulações utilizando o software Matlab/Simulink, na qual este estudo será detalhado a metodologia empregada nos três experimentos descritos nos roteiros. Esses experimentos abrangem o projeto do observador de estados, o projeto do seguidor de referência e o seguidor de referência com realimentação do observador. Os resultados obtidos em cada conjunto de polos alocados durante o projeto serão minuciosamente analisados. Os experimentos permitirão avaliar a eficácia e o desempenho de cada estratégia de controle, além de possibilitar a comparação entre as abordagens.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A seguir são apresentadas as ferramentas e metodologias utilizadas na construção deste relatório e na coleta de dados durante os experimentos.

2.1 Observabilidade

Observabilidade é um conceito fundamental no campo da teoria de controle e sistemas dinâmicos. Ele se refere à capacidade de determinar o estado inicial de um sistema com base na entrada aplicada e nas saídas medidas durante um intervalo de tempo, começando a partir de um instante inicial conhecido.

Essa propriedade é essencial para compreender e analisar o comportamento de sistemas complexos. Em muitos casos, o estado interno de um sistema não pode ser diretamente observado ou medido. No entanto, a observabilidade permite estimar esse estado com base em informações limitadas disponíveis através das saídas mensuráveis.

2.1.1 Condições Necessárias e Suficientes

A condição necessária de posto igual à n é um requisito importante para a observabilidade completa de um sistema dinâmico. Essa condição estabelece que a matriz de observabilidade deve ter posto igual à dimensão do vetor de estado do sistema. Dado um sistema Linear Invariante no tempo, de tempo contínuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases} \quad (1)$$

A Matriz de Observabilidade será:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

O sistema acima é observável se, e somente se:

$$\text{posto}(\mathbf{O}) = n \quad (3)$$

Em que o posto de uma matriz é o número máximo de colunas linearmente independentes que podem ser obtidas a partir dessa matriz, quando o posto da matriz de observabilidade é igual à dimensão do vetor de estado do sistema (denotado como n), significa que todas as variáveis de estado do sistema têm um impacto único e mensurável nas saídas do sistema. Em outras palavras, não existem estados "escondidos" ou variáveis de estado que não possam ser inferidas a partir das saídas mensuráveis.

2.2 Controlabilidade

Controlabilidade se refere à capacidade de se alcançar um estado final específico, a partir de qualquer estado inicial, através da aplicação de uma ação de controle adequada. Essa propriedade fundamental permite manipular o sistema de forma a direcioná-lo para um objetivo desejado. Através da controlabilidade, é possível exercer influência sobre o comportamento dinâmico do sistema, moldando seu trajeto e ajustando suas variáveis de estado de acordo com as necessidades e objetivos estabelecidos.

2.2.1 Condições Necessárias e Suficientes

A condição necessária para que um sistema seja controlável é que a matriz de controlabilidade tenha posto igual ao número de variáveis de estado do sistema, ou seja, $\text{posto} = n$. Dado um Sistema Linear Invariante no Tempo, de tempo contínuo descrito na equação 1, a Matriz de Controlabilidade será:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{BA} & \mathbf{BA}^2 & \mathbf{BA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

O sistema acima é observável se, e somente se:

$$\text{posto}(\mathbf{C}) = n \quad (5)$$

Em que posto de uma matriz é o número máximo de colunas linearmente independentes que ela contém. Se o posto dessa matriz for igual a n , isso significa que todas as colunas da matriz são linearmente independentes e, portanto, é possível controlar todas as variáveis de estado do sistema.

2.3 Seguidor de Referência

O princípio do modelo interno é empregado para alcançar uma dinâmica desejada e seguir uma entrada específica com um erro nulo. Considerando o sistema mencionado na equação 6, o erro de rastreamento na equação 7 é adotado para capturar as propriedades do sinal de referência por meio de sua derivada. Em seguida, novas variáveis de estado são definidas da seguinte maneira.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ y(t) = \mathbf{Cx}(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$e(t) = y(t) - r(t) \quad (7)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{r}(t) = \dot{y}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (8)$$

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}} \\ w = \dot{u} \end{cases} \quad (9)$$

Assim, a forma matricial final nas novas variáveis pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} w \quad (10)$$

Se os polos do sistema aumentado forem colocados na região de estabilidade, o erro de rastreamento será estável. Em outras palavras, a resposta do sistema abaixo será assintoticamente estável.

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{B}k_1 & \mathbf{A} + \mathbf{B}k_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

2.4 Fórmula de Ackermann

A fórmula de Ackermann é bem conhecida para a determinação da matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estados. Considerando o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

onde em controle por alimentação de estado é utilizado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Supondo que o sistema seja de estados completamente controláveis e que os polos desejados de malha fechada estejam em $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$, modificando a equação tal temos:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

Definindo $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$, a equação característica desejada é:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = |s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

Como o teorema de Cayley-Hamilton estabelece que $\tilde{\mathbf{A}}$ satisfaz sua própria equação característica, temos:

$$\mathbf{q}_c(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_n \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (12)$$

Utilizaremos a equação 12 na obtenção da fórmula de Ackermann. Considerando $n = 3$, para simplificação. Consideramos as seguintes identidades:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^3 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^3 = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2$$

Multiplicando as equações anteriores, na mesma ordem, por α_3 , α_2 , α_1 e α_0 (onde $\alpha_0 = 1$), respectivamente, e somando os resultados, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 \\
&= \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \alpha_1 (\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 \mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\
&= \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - \alpha_2 \mathbf{BK} - \alpha_1 \mathbf{ABK} - \alpha_1 \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2 \mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2
\end{aligned} \tag{13}$$

Relacionando com a equação 12, temos:

$$\alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 + \alpha_1^2 + \alpha_1^3 = \mathbf{q}_c(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{0} \tag{14}$$

E temos também que:

$$\alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0} \tag{15}$$

Substituindo as equações 14 e 15 na equação 13, temos:

$$\mathbf{q}_c(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) - \alpha_2 \mathbf{BK} - \alpha_1 \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 - \alpha_1 \mathbf{ABK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2 \mathbf{BK}$$

Como $\mathbf{q}_c(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{0}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_c(\mathbf{A}) &= \mathbf{B}(\alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2) + \mathbf{AB}(\alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^2 \mathbf{BK} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{16}$$

Multiplicando ambos os lados da equação 16 pela inversa da matriz de controlabilidade, temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

Agora multiplicando ambos os lados por $[0 \ 0 \ 1]$, obtemos:

$$[0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{K}$$

Que pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{q}_c(\mathbf{A})$$

Essa ultima equação fornece a matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estado requerida. Generali-

zando para um número inteiro, positivo e arbitrário de n , temos:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) \quad (17)$$

Assim, a equação 17 é conhecida como fórmula de Ackermann para determinação da matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estado.

3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada nos laboratórios de sistemas de controle envolve a utilização de equipamentos de medição e análise, visando sempre aprimorar a eficiência do controle e garantir o melhor desempenho do sistema.

3.1 Ferramentas

Os laboratórios de sistemas de controle geralmente contam com uma variedade de equipamentos de medição, essas ferramentas são utilizadas para adquirir dados de sistemas reais, permitindo analisar o seu comportamento.

3.1.1 Bancada Quanser

A bancada consiste em um sistema de tanques acoplados da Quanser que possibilita a medição e controle de diferentes níveis de líquido. A bomba transporta a água da bacia inferior, que possui volume máximo de 2 litros, até o topo do sistema e conta com sensores de pressão para medir o nível de água conforme ele é alterado.

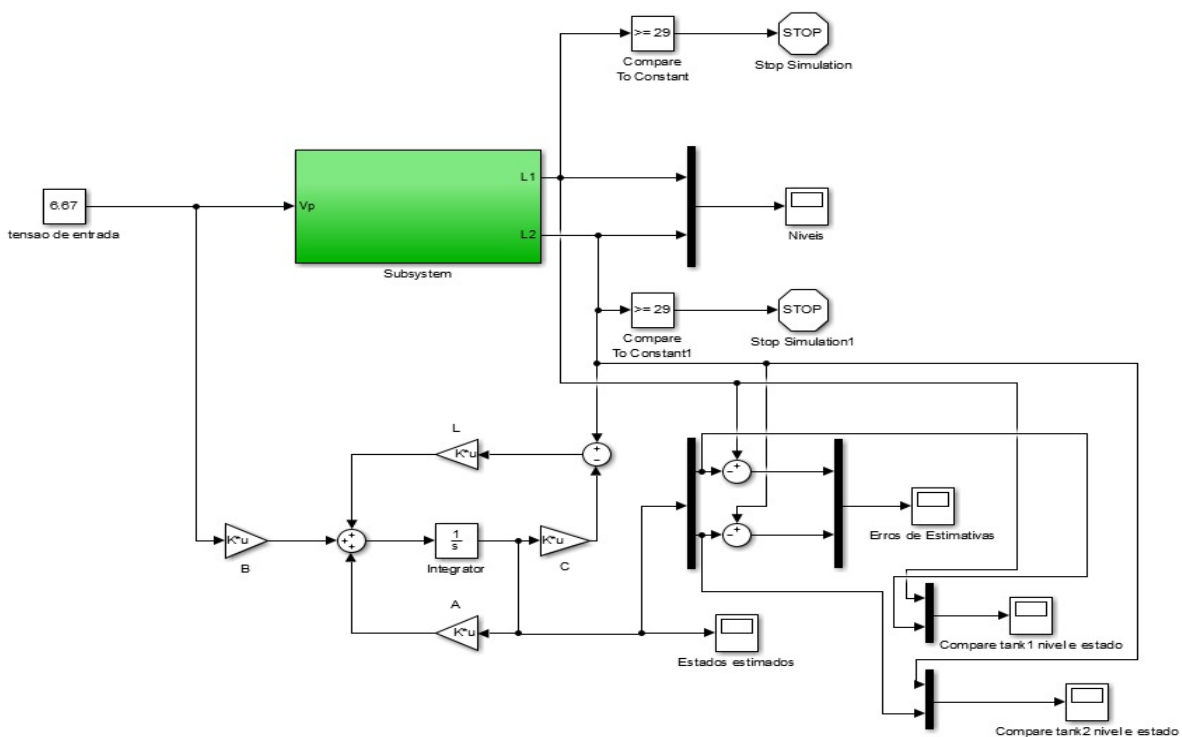
3.1.2 MatLab

Ele é uma linguagem de programação interativa que faz cálculos numéricos, tem seu próprio Integrated Development Environment (IDE) e um conjunto de bibliotecas (toolboxes). Estas, podem ser usadas em diversas áreas, desde equações diferenciais, até estatísticas, processamento de sinais, finanças e outros. Por causa de sua estrutura diferenciada, capacidade de expansão e flexibilidade, o software possui também as ferramentas de elementos finitos, inteligência artificial, depuração de processamento em tempo real e diversas outras soluções.

3.1.3 Simulink

Simulink, desenvolvido pela companhia MathWorks, é uma ferramenta para modelagem, simulação e análise de sistemas dinâmicos. Sua interface primária é uma ferramenta de diagramação gráfica por blocos e bibliotecas customizáveis de blocos. O software oferece alta integração com o resto do ambiente MATLAB. Simulink é amplamente usado em teoria de controle e processamento digital de sinais para projeto e simulação multi-domínios

Figura 1: Modelo do Sistema Com Observadores de Estado



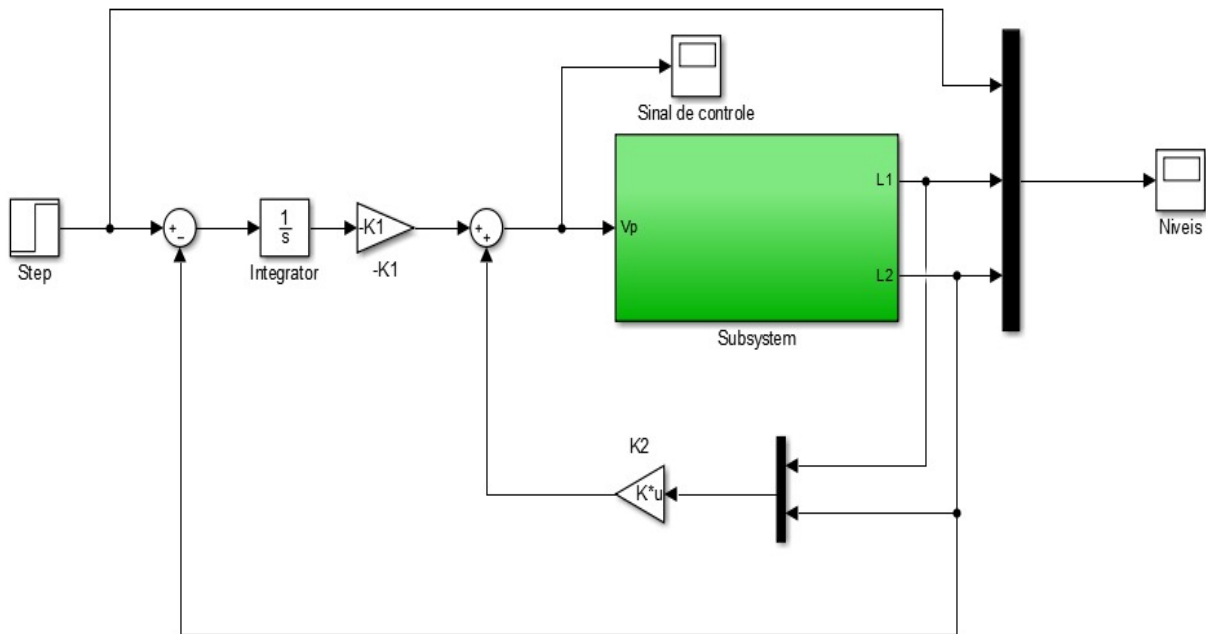
3.2 Simulações

A simulação é uma poderosa ferramenta que permite explorar cenários hipotéticos e analisar possíveis resultados antes de implementar uma ação ou decisão. Dessa forma, serão mostrados as 3 plantas usadas para realizar as simulações e o script para obter os resultados de forma computacional.

3.2.1 Observador de Estados

O observador de estados é uma representação interna do sistema que seja compatível com os dados disponíveis e com o modelo utilizado na simulação. Isso permite acompanhar o comportamento do sistema em tempo real, identificar eventuais desvios ou anomalias, e tomar decisões corretivas ou estratégicas com base nas informações obtidas. Para isso foi montado o sistema (imagem 1) que permite acompanhar o resultado estimado para o real.

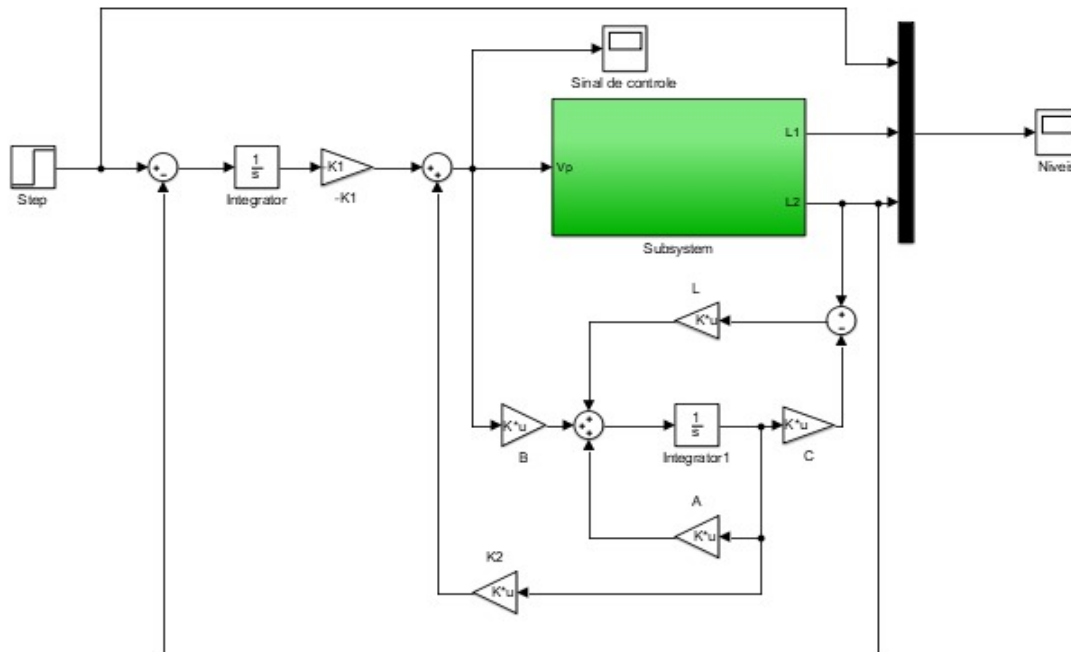
Figura 2: Modelo do Sistema Seguidor de Referência



3.2.2 Seguidor de Referência

O seguidor de referência atua como um controlador que compara o valor atual da variável controlada com o valor de referência e calcula o sinal de controle necessário para reduzir a diferença entre eles, visando manter uma variável controlada ou um sistema próximo a um valor de referência desejado de forma contínua. Assim, montamos o sistema (imagem 2) de um seguidor de referência.

Figura 3: Modelo do Sistema Seguidor de Referência Com Observadores de Estado



3.2.3 Seguidor de Referência + Observador de Estados

A combinação do seguidor de referência com o observador de estados (imagem 3) é uma abordagem poderosa para o controle e monitoramento de sistemas dinâmicos. Essa combinação permite não apenas rastrear um valor de referência desejado, mas também estimar o estado interno do sistema com base em medidas disponíveis, ou seja, o observador de estados fornece informações precisas sobre o estado do sistema, enquanto o seguidor de referência utiliza essas informações para ajustar o sinal de controle e manter o sistema no estado desejado. Na imagem 3 pode-se observar o sistema montado usando as combinações anteriores.

3.2.4 Script

O uso de scripts no Simulink para calcular os ganhos do observador e do seguidor de referência proporcionaram uma abordagem flexível e eficiente para projetar estratégias de controle. Essa abordagem permitiu a rápida iteração e otimização dos ganhos com base em diferentes requisitos de desempenho e critérios de controle, facilitando o processo de projeto e análise do sistema.

Figura 4: Script utilizado para calcular as matrizes de ganho

```

g = 981;
Km = 3.6;
A1 = 15.5179; A2 = A1;
a1 = 0.17813919765; a20=a1;
L1= 15;
L2=L1;

% modelo

alfall = (a1/A1)*sqrt(g/(2*L1));
alfa21 = (a1/A2)*sqrt(g/(2*L1));
alfa22 = a2/A2*sqrt(g/(2*L2));
betal = 3 * Km / A1;

A = [-alfall 0; alfa21 -alfa22];
B = [betal; 0];
C = [0 1];

% projeto observador

delta_s = (conv([1 3],[1 3])); % polos em -3 e -3
V = obsv(A, C);
qlA = A^2 + delta_s(2)*A + delta_s(3)*eye(size(A));
L = qlA*inv(V)*[0;1];

% projeto controlador

Aa = [0 C; [0;0] A]; Ba=[0;B];
delta_sc = conv((conv([1 1],[1 0.5])),[1 0.1]); % polos em 1.5 0.5 e 0.1
qcAa = Aa^3 + delta_sc(2)*Aa^2 + delta_sc(3)*Aa + delta_sc(4)*eye(size(Aa));
Ua = ctrb(Aa,Ba);
Ka = -[0 0 1]*inv(Ua)*qcAa;
K1 = real(Ka(1));
K2 = real(Ka(2:length(Ka)));

```

4 RESULTADOS

Os resultados estão apresentados em forma de gráficos e equações, que mostram o comportamento do sistema ao longo do tempo, bem como as medições realizadas

4.1 Simulação 1 - Observadores de Estado

Na primeira simulação, para determinar a matriz \mathbf{L} , foram escolhidos diversos valores de pólos e, com eles, realizados o cálculo da função de Ackermann para encontrar a função característica, dada através da matriz $\mathbf{q}_c(\mathbf{A})$, a equação final da matriz \mathbf{L} está mostrada abaixo.

$$\mathbf{L} = \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{V}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Onde \mathbf{V} é a matriz de observabilidade, discutida no referencial teórico.

4.1.1 1º Teste: $\mathbf{P1} = 1$ $\mathbf{P2} = 3$

No primeiro teste do observador, na figura 5, percebe-se que a estimativa do nível do tanque 2 permaneceu próximo a 2 unidades de medida, com pouco ruído, após a estabilização do sistema. Isso indica que o observador teve um bom desempenho em rastrear o comportamento do tanque 2, tornando-o uma opção viável para o sistema de controle.

Figura 5: Simulação 1 - Teste 1 - Nível do tanque 1

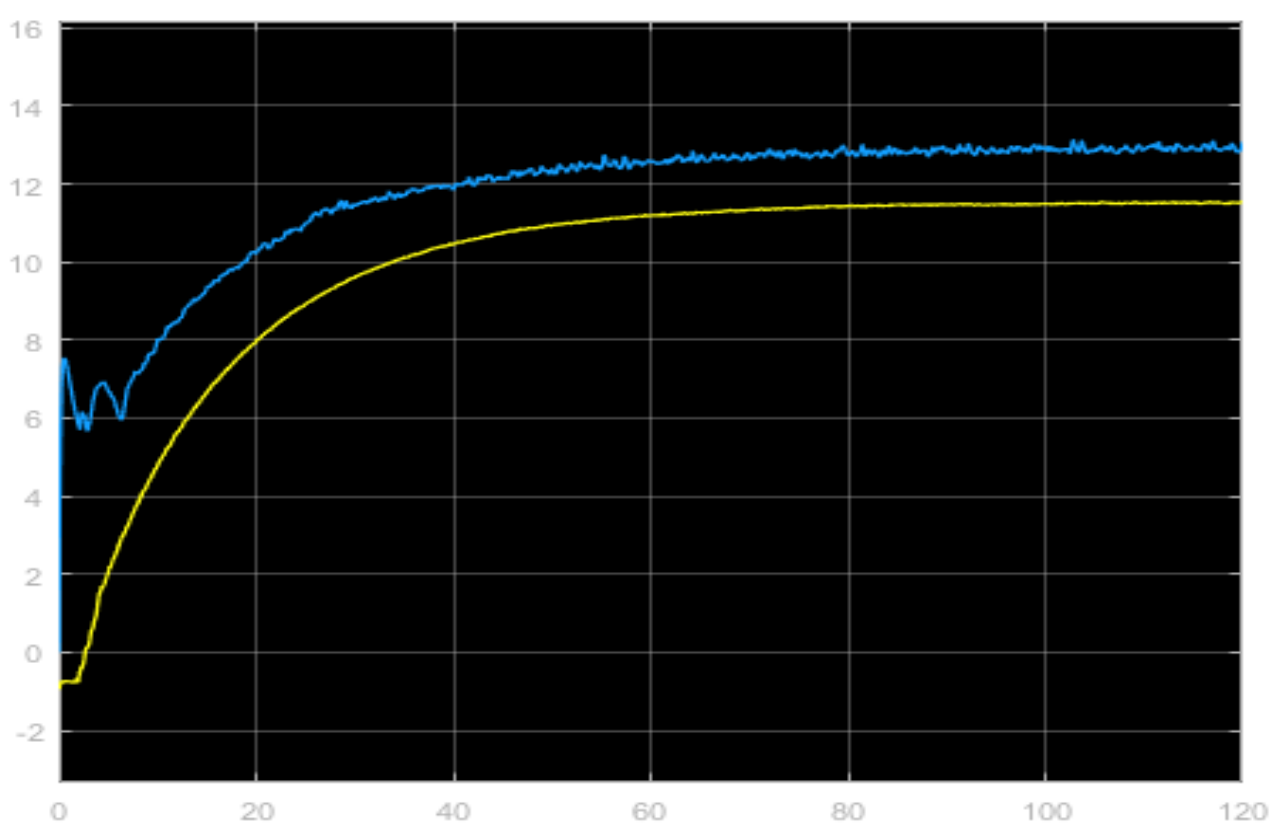
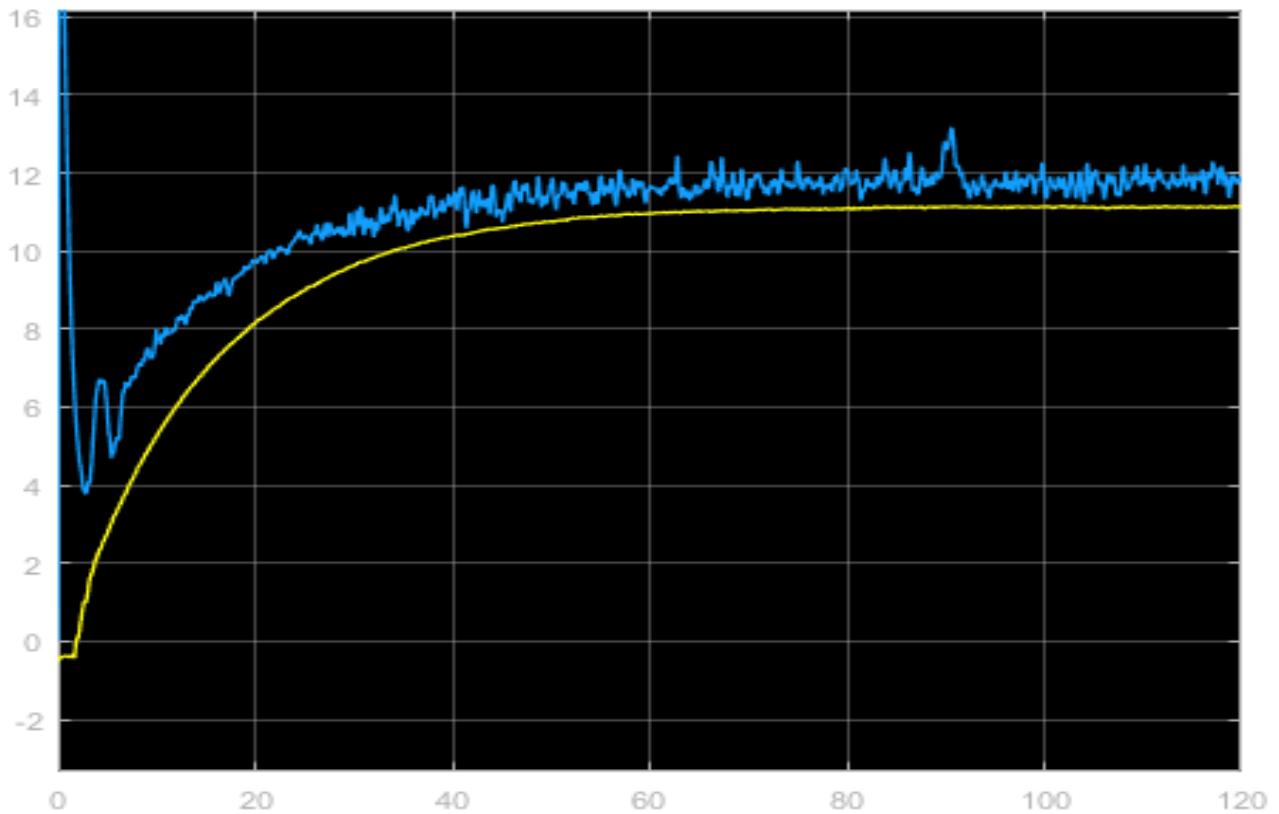


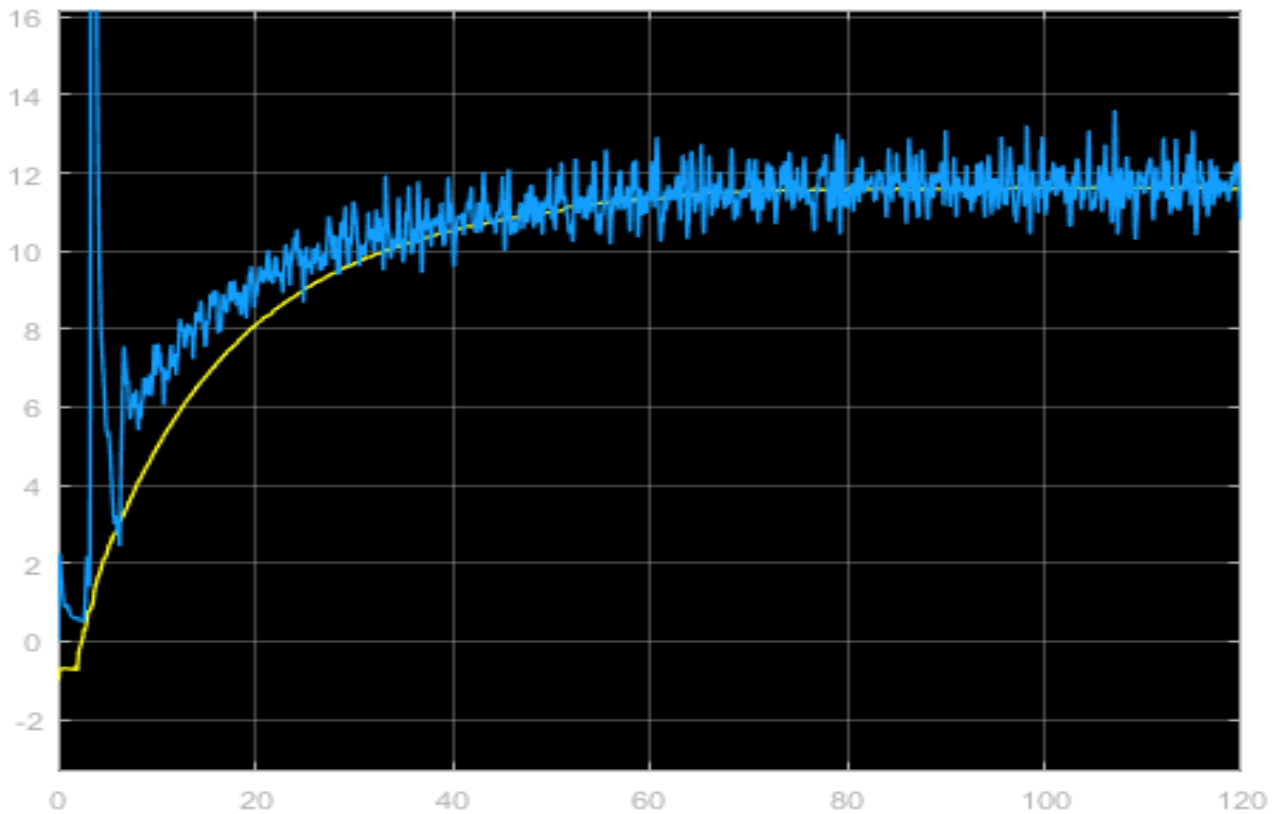
Figura 6: Simulação 1 - Teste 2 - Nível do tanques 1



4.1.2 2º Teste: $P1 = 3$ $P2 = 3$

Agora com valores reais iguais a 3 para os dois polos, o sinal estimado para o nível do tanque 1 apresentou mais ruído (figura 6). Mas analisando a média do valor do sinal, a diferença do sinal estimado e o valor real do nível do tanque 2 diminuiu, ou seja, indicando que o observador foi capaz de reduzir o erro médio nas estimativas com um polo sendo adicionado mais distante da origem, porém apresentando um maior ruído.

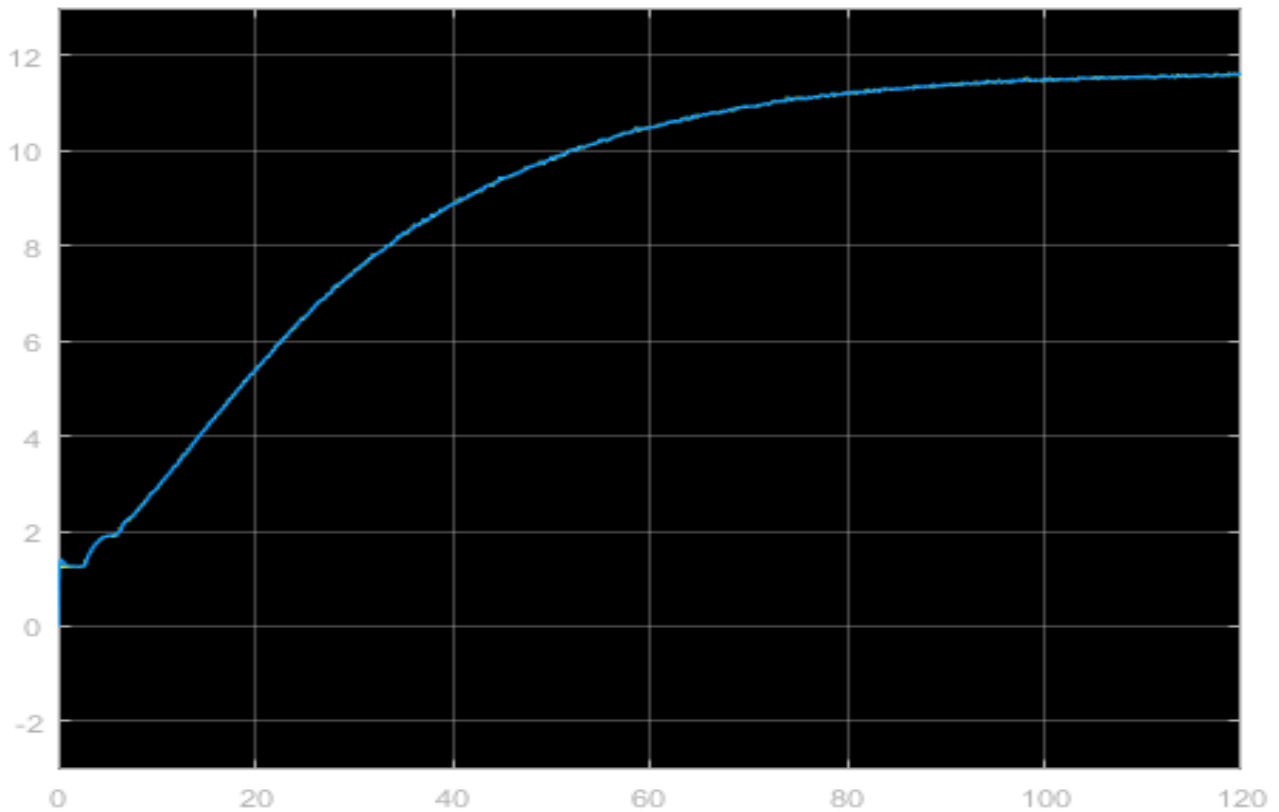
Figura 7: Simulação 1 - Teste 3 - Nível do tanques 1



4.1.3 3º Teste: $P1 = 5+3i$ $P2 = 5-3i$

Para o último teste (figura 7), adicionamos pólos complexos para o projeto do observador. O sinal gerado apresentou mais ruído na estimativa do nível do tanque 1, mas ainda obteve um valor médio mais próximo ao sinal real do tanque 1 em comparação com o teste anterior. Apesar dessa precisão ter aumentado de acordo com o polo ficando mais distante da origem, é importante para uma estimativa confiável do estado do sistema que o observador com pólos imaginários seja uma opção promissora para controlar o sistema de tanques acoplados, pois é possível obter uma estimativa mais precisa do estado do sistema, mantendo a sensibilidade ao ruído sob controle.

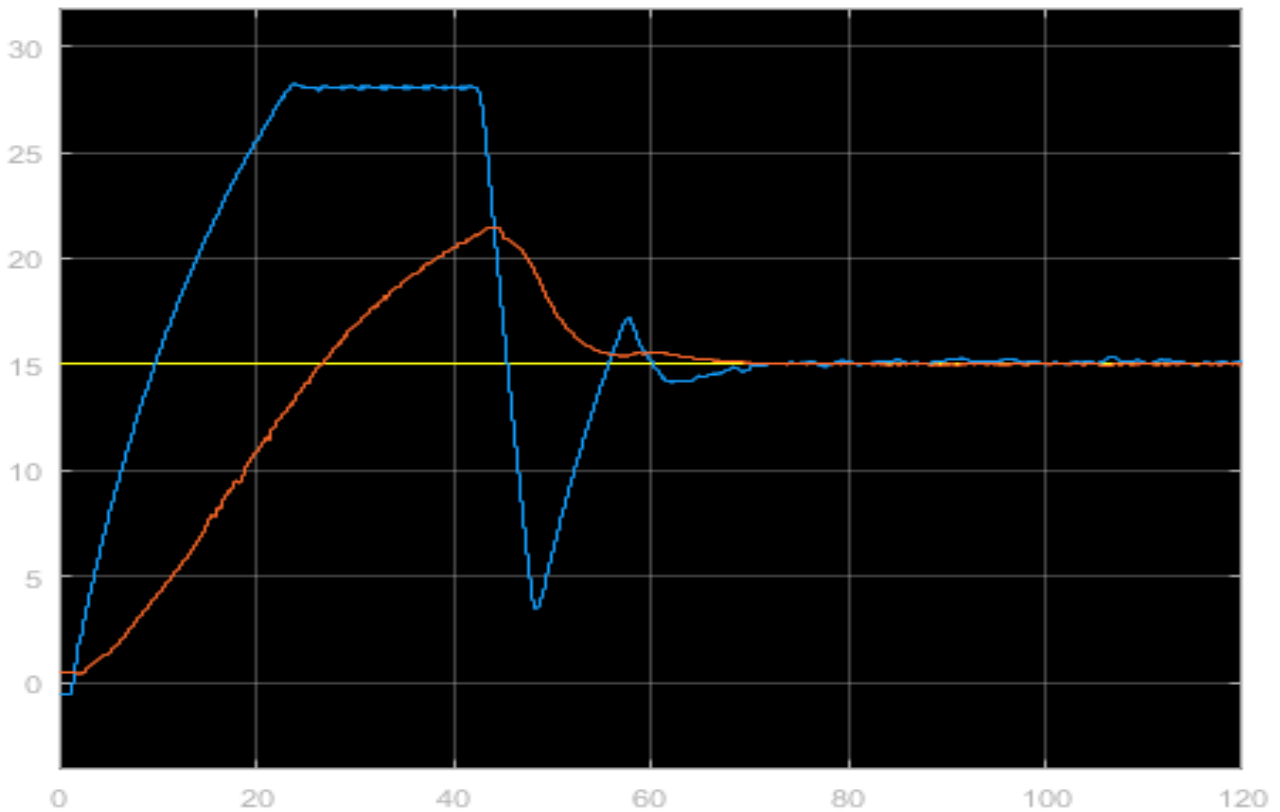
Figura 8: Simulação 1 - Erro - Nível do tanque 2



4.1.4 Erro do tanque 2

Nos testes realizados da 1ª simulação, só foi usado o nível do tanque 1 como parametro para ajustar os polos, porque o erro entre a saída estimada e a real do tanque 2 é 0. ou seja, não tem erro no nível do tanque 2 para os valores testados. Basicamente todos os testes tiveram essa aparência do nível do tanque 2 (figura 8)

Figura 9: Simulação 2 - Teste 1 - Níveis dos tanques 1 e 2



4.2 Simulação 2 - Seguidor de Referência

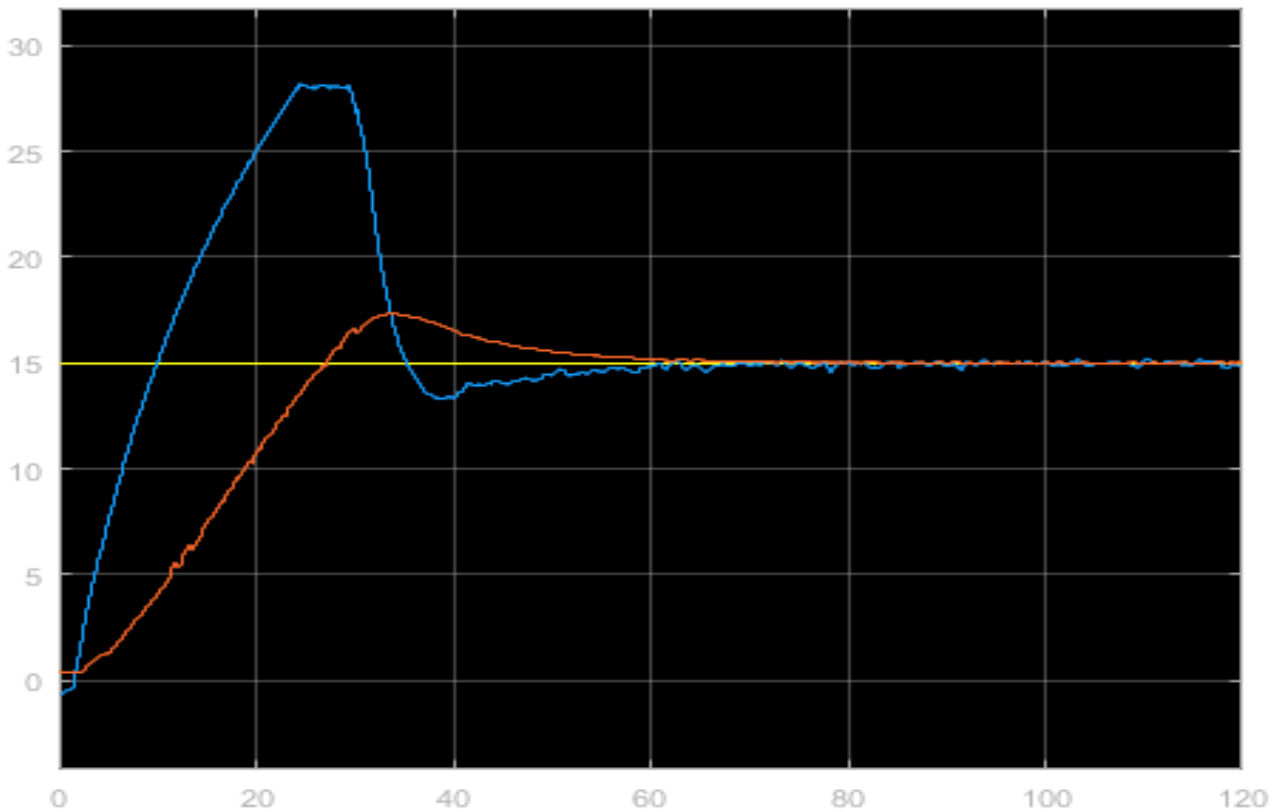
Na segunda simulação, para determinar a matriz de controlabilidade \mathbf{U} , assim como na simulação 1, foi atribuído polos aleatórios para a função de Ackermann, com a diferença de que nessa simulação, são utilizados três polos. Com a equação de Ackermann representada na matriz $\mathbf{q_c}(\mathbf{A})$ e a matriz de controlabilidade \mathbf{U} , foi calculado a matriz de ganhos \mathbf{K} , a qual foram retirados os valores de k_1 e k_2 . A matriz \mathbf{K} foi calculada da seguinte maneira:

$$\mathbf{K} = -[0 \ 0 \ 1] \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{q_c}(\mathbf{A}) \quad (19)$$

4.2.1 1º Teste: Polos $P1 = 1,1$ $P2 = 0,7$ $P3 = 0,2$

Os resultados obtidos, durante o primeiro teste, mostram que o seguidor de referência implementado possui um tempo de estabilização relativamente alto. Na figura 9, percebe-se que o nível do tanque 2 estabilizou perto dos 70 segundos. Além disso, o sistema apresenta um overshoot considerável, passando dos 20 durante o regime transiente. Esses resultados indicam que os polos escolhidos podem não ser ideais para o sistema, resultando em uma resposta lenta e instável.

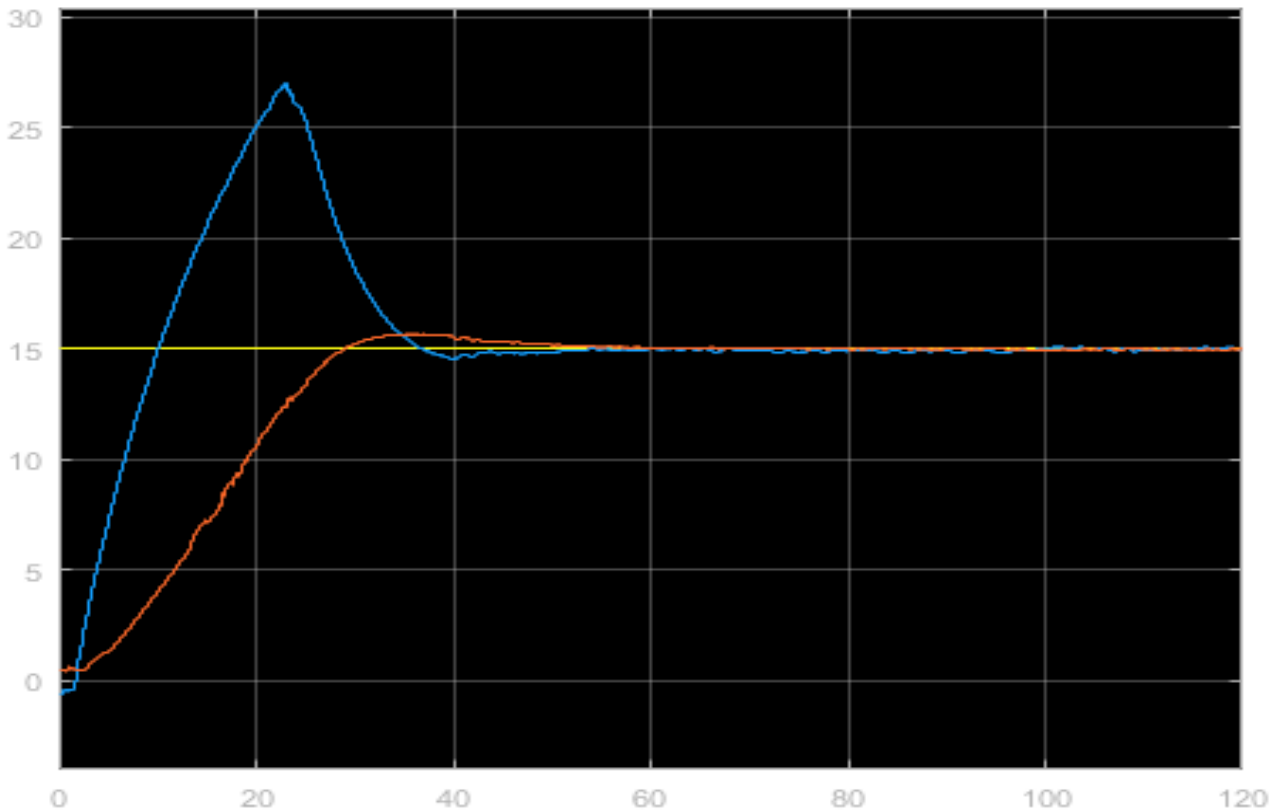
Figura 10: Simulação 2 - Teste 2 - Níveis dos tanques 1 e 2



4.2.2 2º Teste: Polos $P1 = 1$ $P2 = 0,6$ $P3 = 0,1$

No segundo teste, fazendo com que os polos estejam mais próximos da origem houve uma melhoria significativa no desempenho do sistema (figura 10). O tempo de estabilização foi reduzido para cerca de 60 segundos, mostrando uma resposta mais rápida e eficiente. Além disso, o overshoot foi menor durante o transiente, ficando abaixo do valor de 20, aproximando-se do setpoint de referência de 15. Embora não seja o cenário ideal, essa abordagem demonstrou uma melhora considerável em relação ao primeiro teste devido ao fato dos polos estarem mais próximos da origem.

Figura 11: Simulação 2 - Teste 3 - Níveis dos tanques 1 e 2

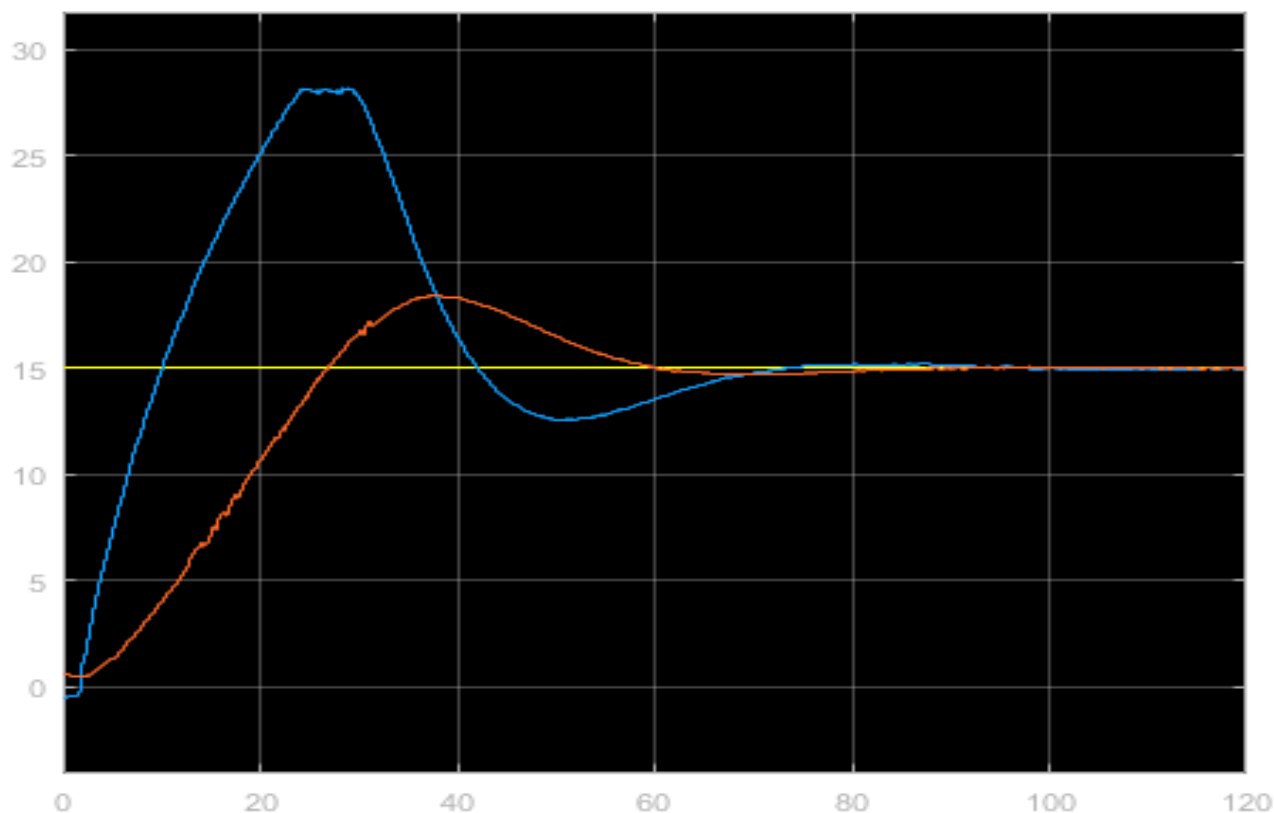


4.2.3 3º Teste: Polos $P1 = 1$ $P2 = 0,3$ $P3 = 0,1$

Nesse teste (figura 11), foi observada uma melhoria ainda mais significativa no desempenho do seguidor de referência, como polos ainda mais próximos da origem, o overshoot foi limitado a menos de 18 durante o regime transitório, demonstrando uma resposta mais suave e controlada. Além disso, o tempo de estabilização foi ainda mais reduzido, levando cerca de 50 segundos para atingir a proximidade do setpoint de referência de 15.

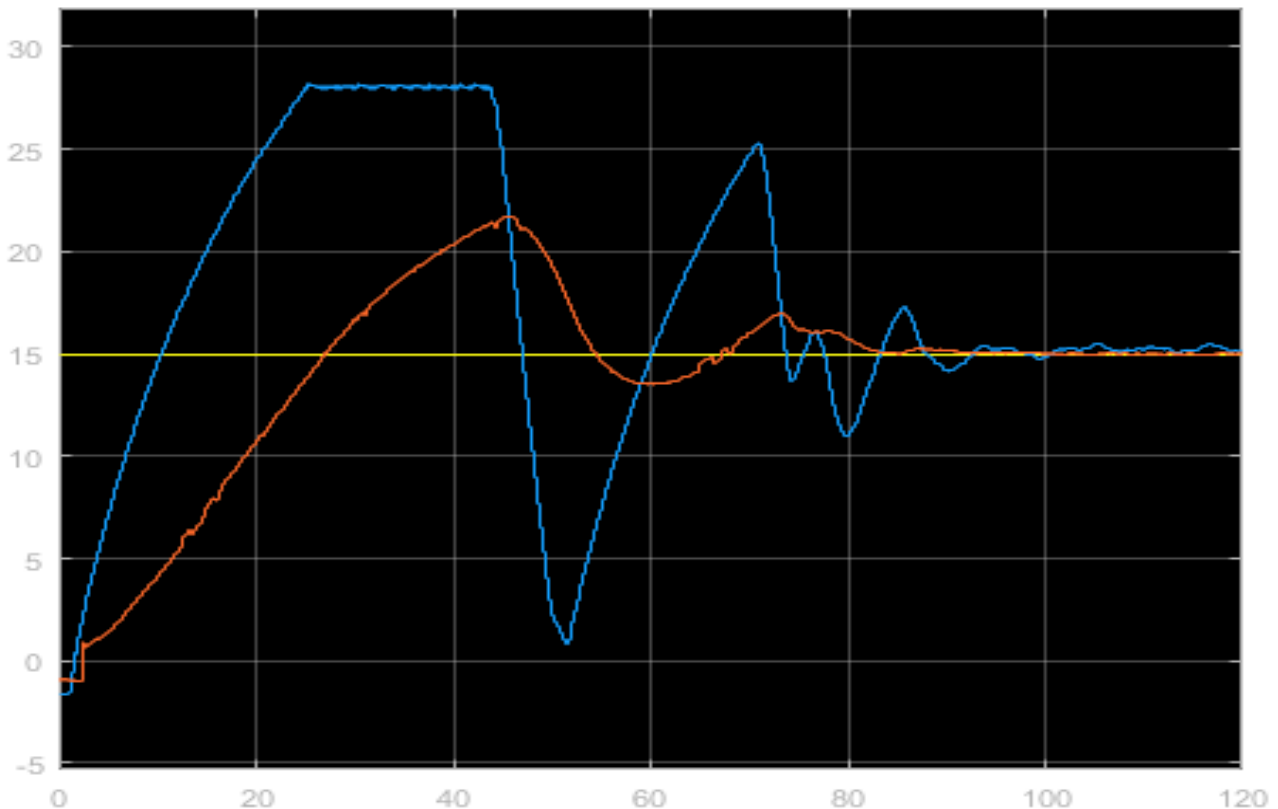
4.2.4 4º Teste: Polos $P1 = 1$ $P2 = 0,1 + 0,1i$ $P3 = 0,1 - 0,1i$

Figura 12: Simulação 2 - Teste 4 - Níveis dos tanques 1 e 2



No último teste, Foram analisados os efeitos de valores complexos para os polos na melhoria da resposta do sistema (figura 12), percebeu-se um aumento significativo no tempo de estabilização, aproximando-se de 80 segundos. Embora o overshoot tenha sido relativamente baixo, permaneceu acima do nível de referência por mais tempo do que os analisados anteriormente, havendo assim um dos maiores erros entre os testes observados.

Figura 13: Simulação 3 - Teste 1 - Níveis dos tanques 1 e 2



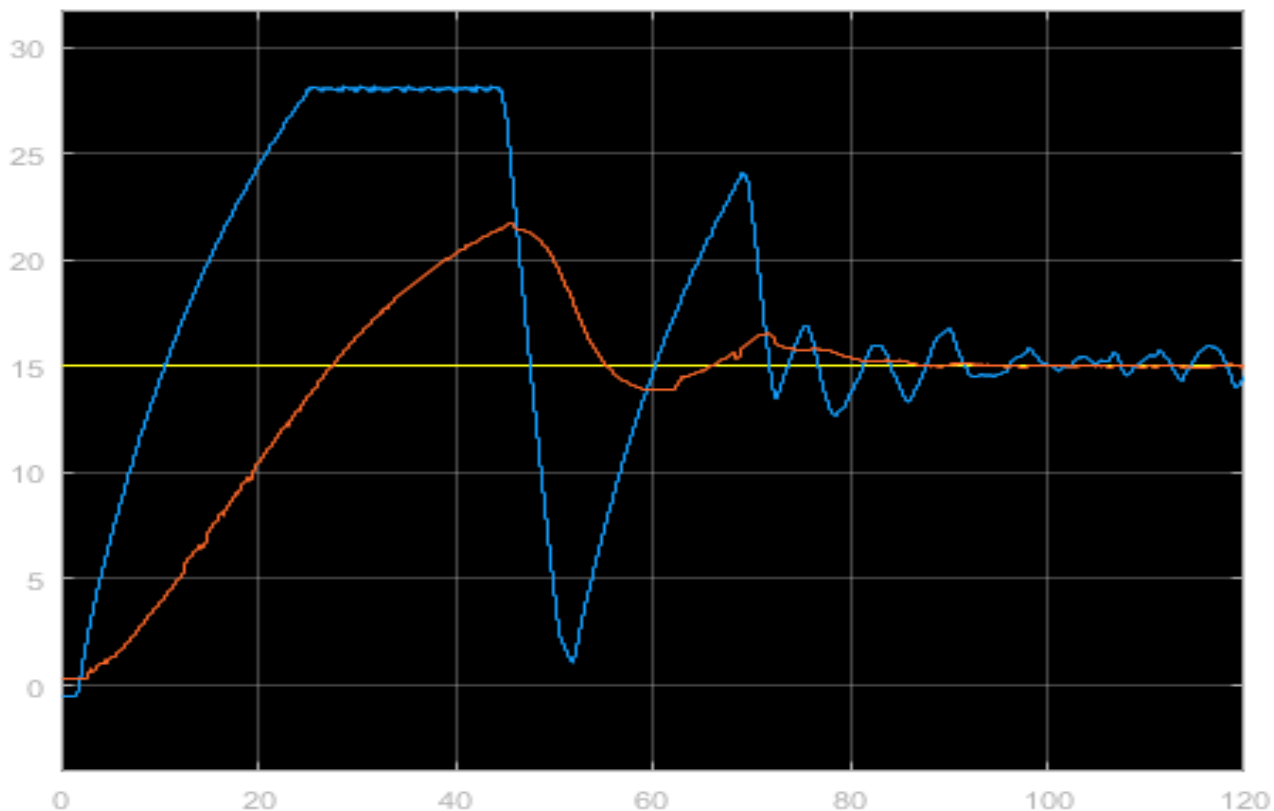
4.3 Simulação 3 - Seguidor de Referência com Estados Estimados

Por fim, na terceira simulação, utilizando a combinação de seus valores testados, foram unificados os scripts das duas simulações anteriores, resultando em um total de cinco polos no sistema: dois associados ao observador de estados e três relacionados ao seguidor de referência.

4.3.1 1º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1,1$, $P2 = 0,7$ e $P3 = 0,2$; Polos do Observador: $P4 = 1$ e $P5 = 3$

O primeiro teste realizado nessa simulação foi usando os valores de polos dos primeiros testes das simulações anteriores, o resultado obtido não foi bom (figura 13). Lembrando que os valores escolhidos do observador fez com que tivesse o maior erro entre os observadores testados e o do seguidor de referência não foi um dos melhores.

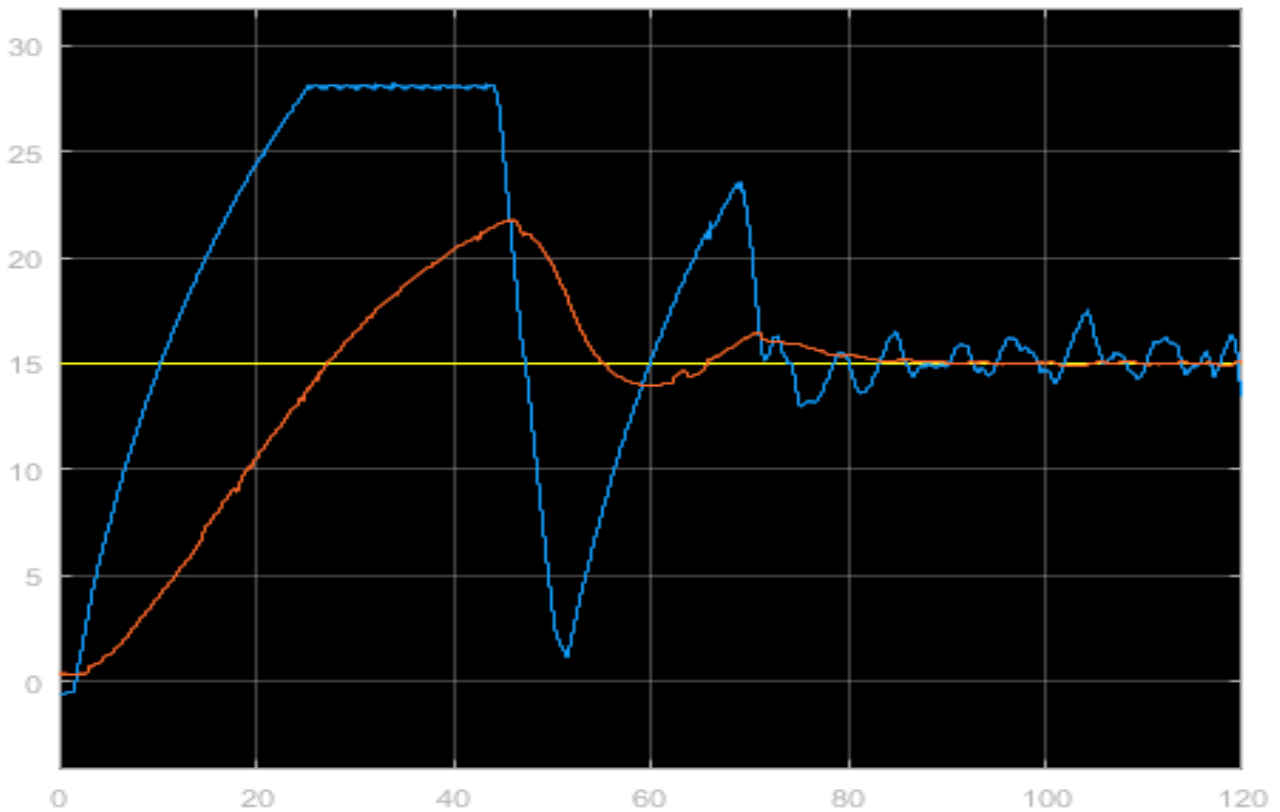
Figura 14: Simulação 3 - Teste 2 - Níveis dos tanques 1 e 2



4.3.2 2º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1,1$, $P2 = 0,7$ e $P3 = 0,2$; Polos do Observador: $P4 = 3$ e $P5 = 3$

O segundo teste, alterando os valores do observador, colocando apenas um polo mais distante da origem, não causou tanto impacto. E resultou em um resultado parecido (figura 14).

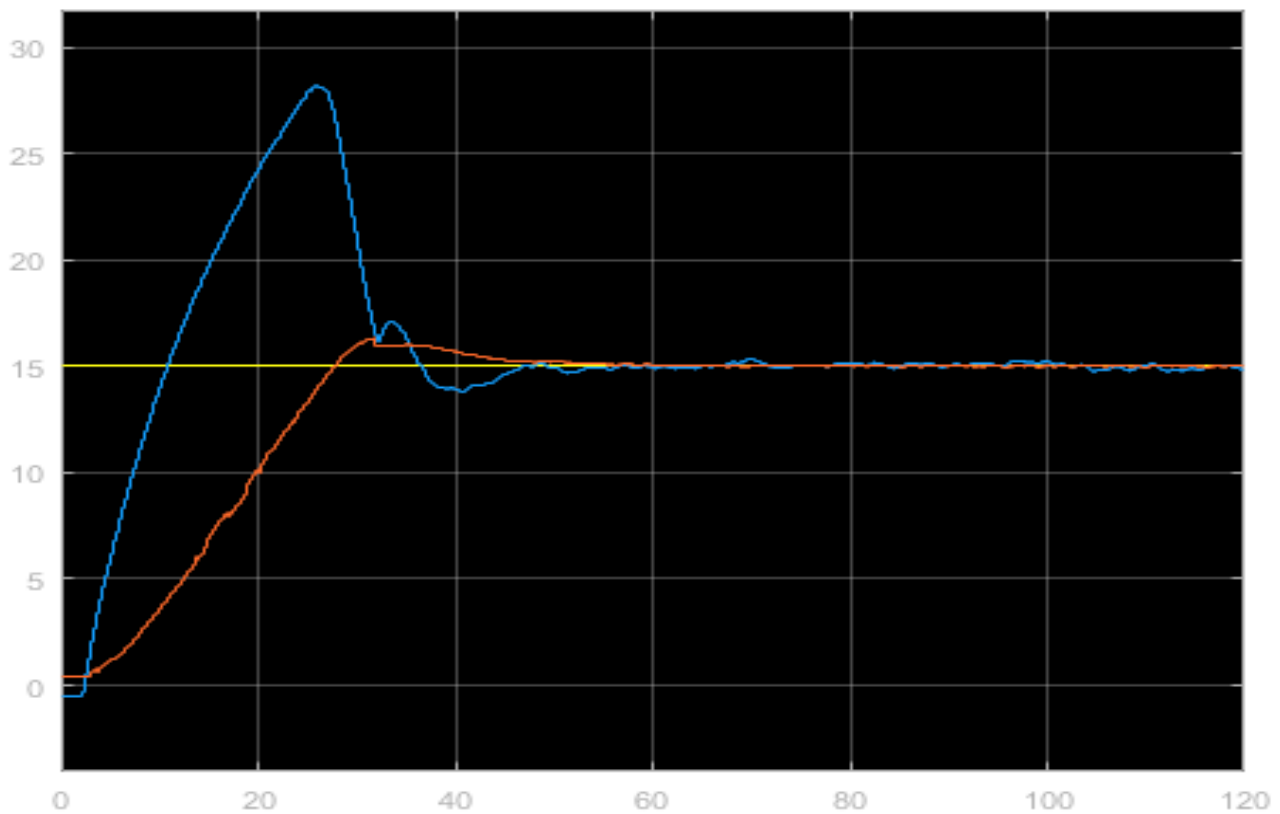
Figura 15: Simulação 3 - Teste 3 - Níveis dos tanques 1 e 2



4.3.3 3º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1,1$, $P2 = 0,7$ e $P3 = 0,2$; Polos do Observador: $P4 = 5 + 3i$ e $P5 = 5 - 3i$

O terceiro teste, já com polos no observador que mostraram um bom resultado na simulação 1, também não conseguiu impactar em muita diferença dos resultados anteriores (figura 15). Mostrando que os polos do seguidor de referência não são bons.

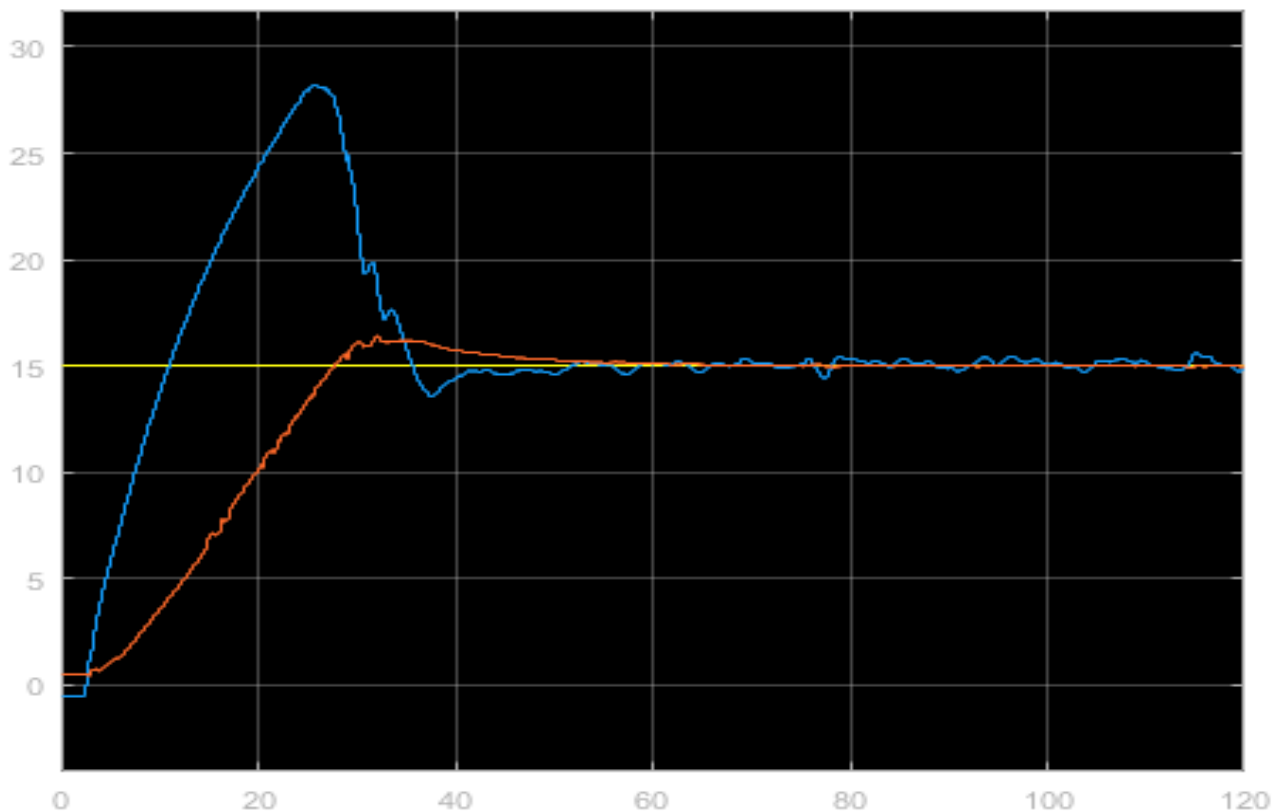
Figura 16: Simulação 3 - Teste 4 - Níveis dos tanques 1 e 2



4.3.4 4º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,3$ e $P3 = 0,1$; Polos do Observador: $P4 = 1$ e $P5 = 3$

Nesse teste, mudando os polos do controlador pela 1ª vez, já obtemos resultados melhores (figura 16), mesmo que os polos no observador sejam os que não tiveram o melhor desempenho.

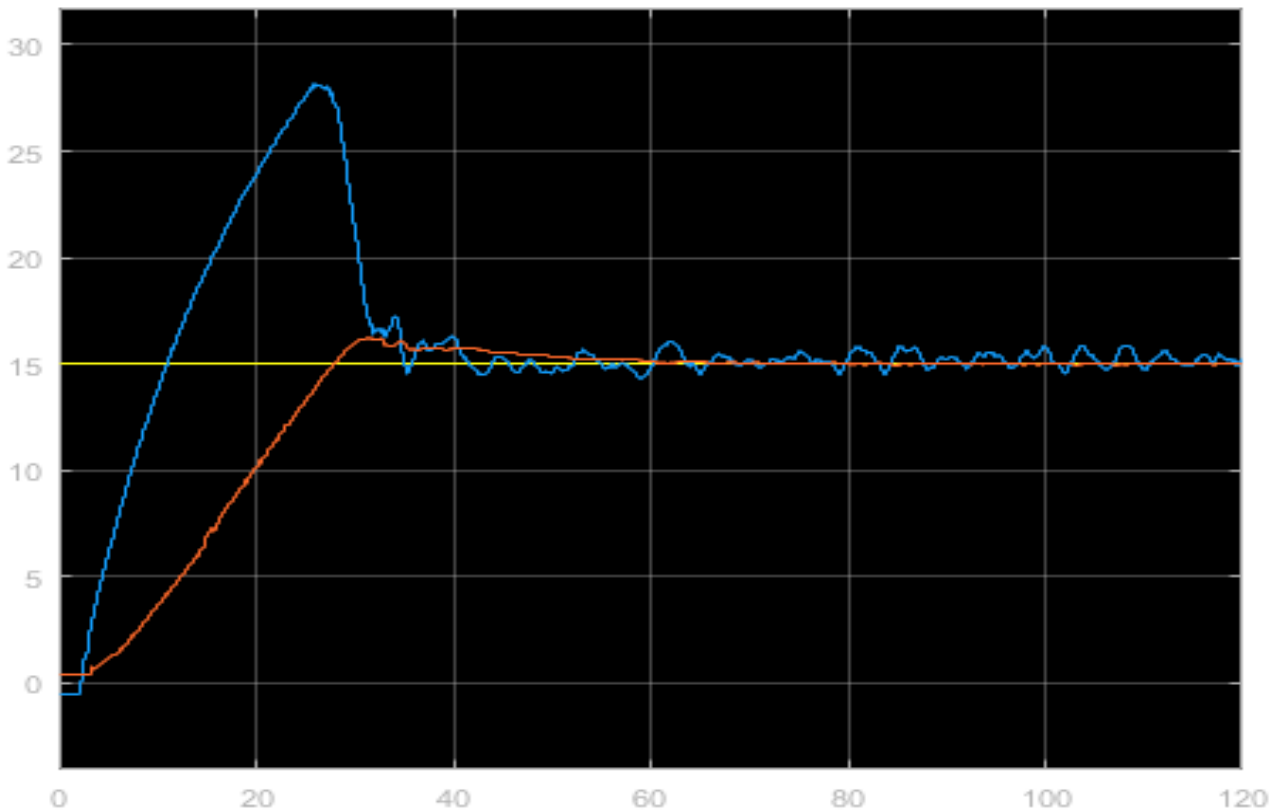
Figura 17: Simulação 3 - Teste 5 - Níveis dos tanques 1 e 2



4.3.5 5º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,3$ e $P3 = 0,1$; Polos do Observador: $P4 = 3$ e $P5 = 3$

Alterando os valores do observador para mais longe da origem, o resultado aparentemente foi o mesmo, apresentando um pouco de tempo a mais para estabilização (figura 17).

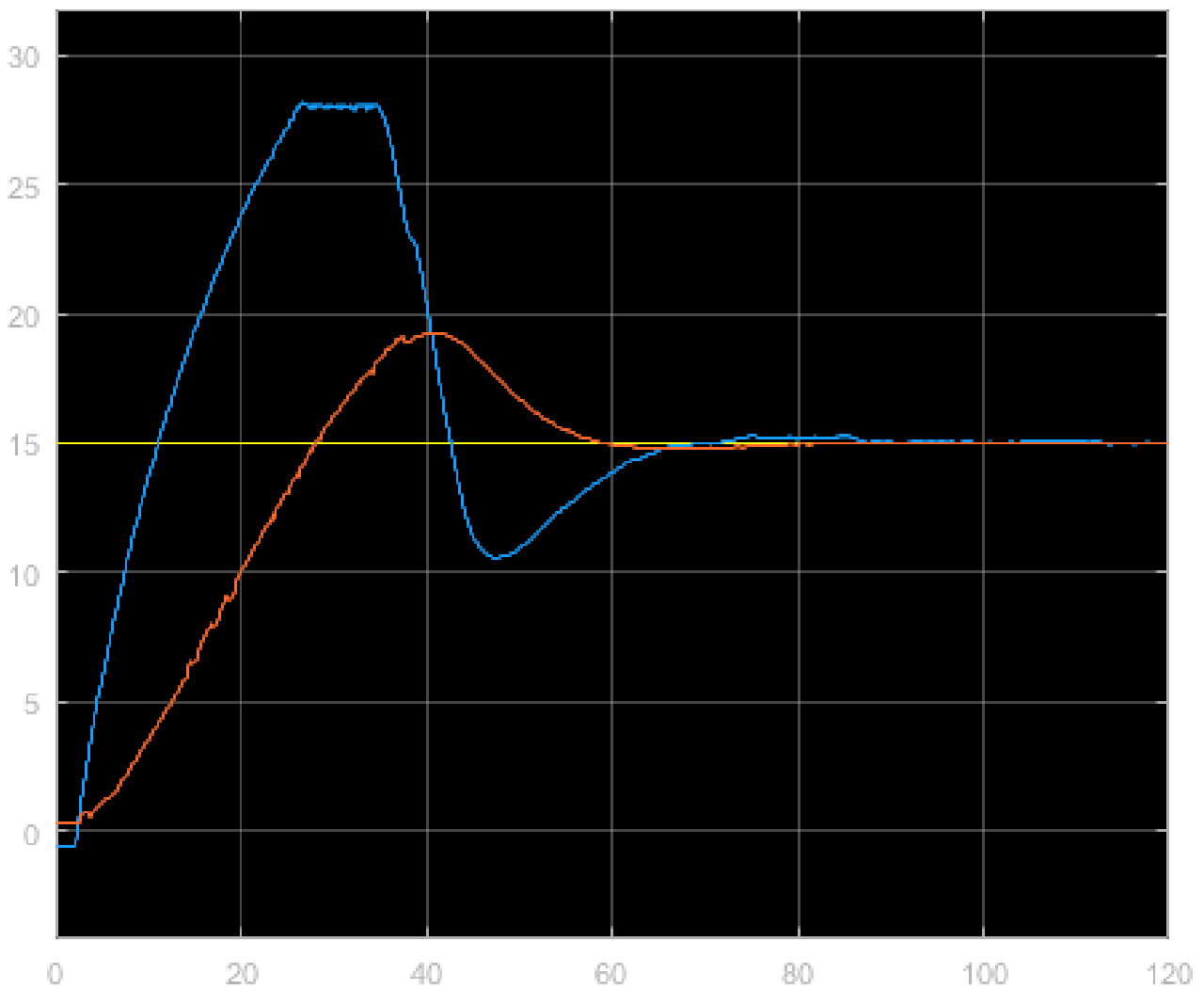
Figura 18: Simulação 3 - Teste 6 - Níveis dos tanques 1 e 2



4.3.6 6º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,3$ e $P3 = 0,1$; Polos do Observador: $P4 = 5 + 3i$ e $P5 = 5 - 3i$

Agora com valores do observador em polos complexos, aumentou ainda mais o tempo de estabilização. ou seja, os valores de polos mais distante da origem estão acarretando em mais oscilações e maior tempo de estabilização.

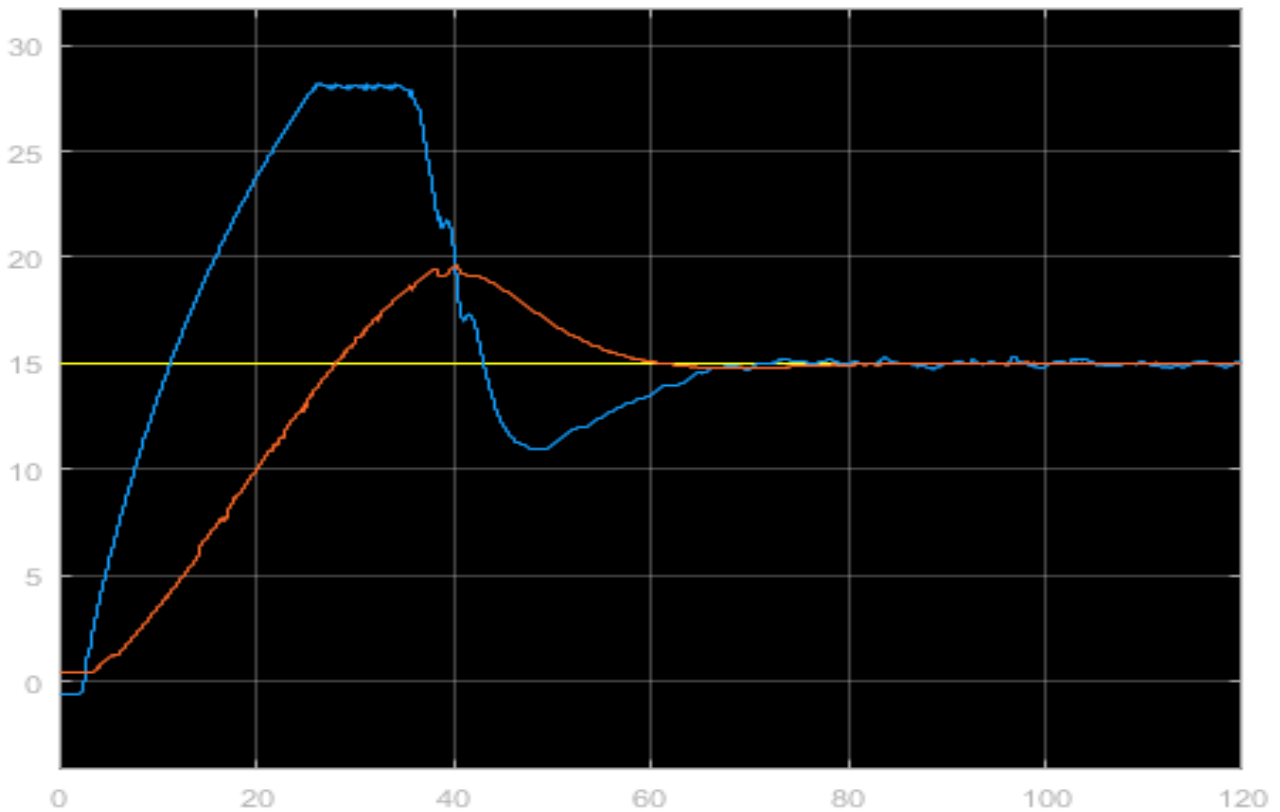
Figura 19: Simulação 3 - Teste 7 - Níveis dos tanques 1 e 2



4.3.7 7º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,1 + 0,1i$ e $P3 = 0,1 - 0,1i$; Polos do Observador: $P4 = 1$ e $P5 = 3$

Neste teste usando uma terceira combinação de valores do seguidor de referência, observa-se que os níveis comportaram-se de forma muito similar ao representado na figura 12, do comportamento produzido pelo controlador. Pode-se perceber a diferença analisando a figura 19, onde possui um overshoot um pouco mais elevado, mas com um tempo de estabilização melhor. Essa similaridade pode ser resultado do comportamento produzido pelo observador na figura 5, onde notamos que o rastreamento não está sobre o nível do tanque como esperado idealmente.

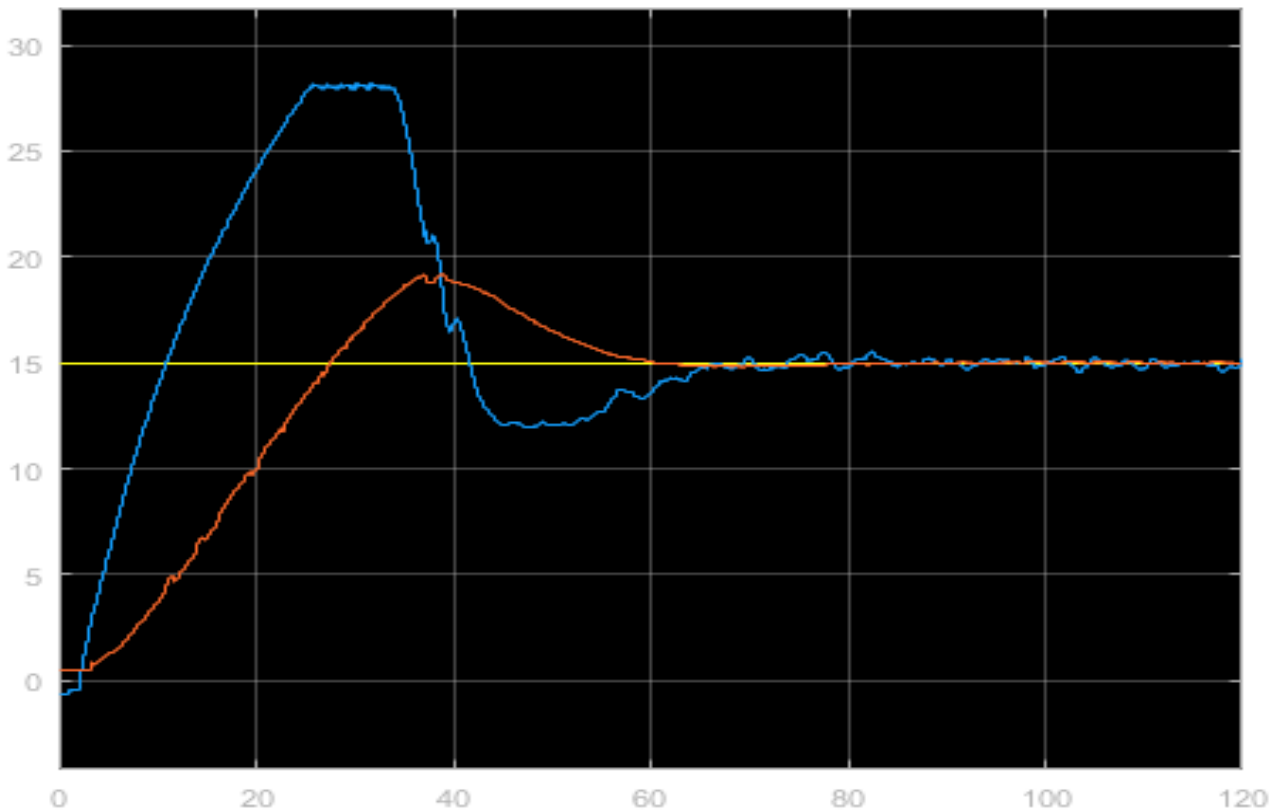
Figura 20: Simulação 3 - Teste 8 - Níveis dos tanques 1 e 2



4.3.8 8º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,1 + 0,1i$ e $P3 = 0,1 - 0,1i$; Polos do Observador: $P4 = 3$ e $P5 = 3$

Com este observador temos um rastreo um pouco melhor considerando a proximidade do valor de referência e considerando o uso de um filtro de média para lidar com a maior oscilação que podemos observar na figura 6. Comparando com o teste anterior vemos que o overshoot se manteve muito parecido, possuindo um leve deslocamento do tempo de estabilização para direita, porém aparenta estabilizar por volta do mesmo valor de tempo (figura 20).

Figura 21: Simulação 3 - Teste 9 - Níveis dos tanques 1 e 2



4.3.9 9º Teste: Polos do Controlador: $P1 = 1$, $P2 = 0,1 + 0,1i$ e $P3 = 0,1 - 0,1i$; Polos do Observador: $P4 = 5 + 3i$ e $P5 = 5 - 3i$

Para a última combinação, onde tem-se polos complexos em ambas configurações, nota-se o comportamento do teste representado na figura 21 um pouco mais fiel ao da figura 12, possuindo tanto o overshoot quanto o tempo de estabilização menor comparados aos testes anteriores referentes à simulação 3. Produzindo a melhor saída possível para o controlador, utilizando o observador que produziu a menor faixa de erro e a que mais se aproximou do valor referenciado, o que pode ser confirmado com o uso de um filtro de média para analisar o quanto o rastreo está fiel à referência.

5 CONCLUSÃO

Diante dos resultados e análises obtidos neste estudo, foram identificadas diferenças significativas no desempenho do sistema do observador de estados quando operando de forma isolada e em conjunto com o seguidor de referência. Enquanto a primeira montagem necessita de polos mais distantes da origem, resultando em uma taxa de convergência ainda mais rápida e permitindo que o observador acompanhasse a dinâmica do sistema com maior precisão, em um menor intervalo de tempo, enquanto a montagem conjunta requer polos do observador mais próximos à origem para obter maior precisão.

Na montagem em que o sistema possui apenas o observador, além de concluir que polos mais distantes da origem são responsáveis por um erro menor, a escolha de polos complexos é feita para reduzir o efeito de ruídos na estimação do estado do sistema. Quando os polos do observador são selecionados como números complexos conjugados, a parte imaginária dos polos adiciona uma oscilação específica à resposta do observador. Isso ajuda a "separar" as informações de estado do sistema real das perturbações e do ruído, resultando em estimativas mais precisas.

Na montagem em que o sistema possui apenas o seguidor de referência, sem o observador, foi o sistema que apresentou o menor erro entre os níveis dos tanques e uma curva mais suave de ajuste.

Já na montagem em que o sistema possui tanto o observador como seguidor de referência, notou-se uma pequena quantidade de ruído presente na resposta. No entanto, a curva de nível do tanque 2 atingiu o valor de referência desejado ainda mais rápido dos que foram obtidos na simulação 2. Isso se deve ao fato de que a montagem conjunta possibilita uma resposta mais rápida e ágil do sistema, favorecendo a velocidade de atuação. Apesar de apresentar um pouco mais de ruído.

A escolha da configuração mais adequada dependerá, portanto, das necessidades e objetivos específicos do sistema controlado. Em situações em que se busca um controle mais refinado e estável, com maior ênfase na precisão, a montagem do seguidor de referência isoladamente pode ser preferível. Por outro lado, em cenários onde uma resposta rápida e ágil é prioritária, mesmo que isso acarrete em um nível ligeiramente maior de ruído, a montagem conjunta pode ser a opção mais vantajosa.

6 REFERÊNCIAS

CABRAL, E. L. L. Controlabilidade e Observabilidade. **ESCOLA POLITÉCNICA - Formando Engenheiros e Líderes**, 2016.

Disponível em: <http://sites.poli.usp.br/d/pmr2400/10-%20Controlabilidade%20e%20Observabilidade.pdf>. Acesso em: 16 de jul. de 2023.

OGATA, Katsuhiko. Engenharia de controle moderno. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

ARAÚJO, F. M. U. de. ROTEIRO DE LABORATÓRIO. [S.l.]: DCA - UFRN, 2007.

DÓREA, C. E. T. Controlabilidade e Observabilidade de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo.

ARAÚJO, F. M. U. de. SISTEMAS DE CONTROLE. **DCA: Departamento de Engenharia de Computação e Automação - UFRN**, 2007. Disponível em: <https://www.dca.ufrn.br/meneghet/FTP/Controle/scv20071.pdf>. Acesso em: 16 de jul. de 2023.

FLEURY, A. de T.; DONHA, D.C. Espaço de Estados. **ESCOLA POLITÉCNICA - Formando Engenheiros e Líderes**, 2017. Disponível em: <http://sites.poli.usp.br/d/PME2472/aulatres.pdf>. Acesso em: 16 de jul. de 2023

CABRAL, E. L. L. CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DOS ESTADOS REGULADOR DE ESTADOS. **ESCOLA POLITÉCNICA - Formando Engenheiros e Líderes**, 2016. Disponível em: <http://sites.poli.usp.br/d/pmr2400/12-%20Regulador-Controle%20por%20realimenta%C3%A7%C3%A3o%20dos%20estados.pdf>. Acesso em: 16 de jul. de 2023