Prova de OTIMIZAÇÃO

ALUNO: Thiago Treiry de Oliveira

Questão 2-

$f(x,y) = e^{-(x+y)} \sin(2x)\cos(y)$ definido em $C = \{(x,y) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}^2 / 2x+y=0\}$

• Metodo multiplicador de Lagrange

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} e^{-(x+y)}\cos(y)(2\cos(2x) - \text{sen}(2x)) \\ -e^{(x+y)}\text{sen}(2x)(\text{sen}(y) + \cos(y)) \end{bmatrix} \begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix}$$

$$g(x,y) = 2x+y = 0 \Rightarrow \nabla g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

• Aplicando a condição de 1ª ordem:

$$\nabla f(x,y) + \lambda g(x,y) = 0$$

$$\begin{bmatrix} e^{-(x+y)}\cos(y)(2\cos(2x) - \text{sen}(2x)) \\ -e^{(x+y)}\text{sen}(2x)(\text{sen}(y) + \cos(y)) \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• Multiplicando a equação (II) por (-2) e somando à (I), temos:

$$2[\text{sen}(2x)\text{sen}(y) + \cos(2x)\cos(y)] + \text{sen}(2x)\cos(y) = 0$$

• Aplicando a restrição $2x+y=0$, temos $2x = -y$, substituindo.

$$\text{sen}(-y)\cos(y) + 2\cos(2x-y) = \underbrace{-\text{sen}(y)\cos(y)} + 2\cos(-2y) = 0$$

$$= -\frac{1}{2}\text{sen}(2y) + 2\cos(2y) = 0$$

• Multiplicando os termos por $\frac{2}{\cos(2x)}$, temos $tg(2y) = 4 \Rightarrow 2y = \text{arctg}(4)$

$$\boxed{\begin{matrix} y_1 = 0,66 & x_1 = -0,33 \\ y_2 = -0,91 & x_2 = 0,45 \end{matrix}}$$

Questão 3: $f(x,y) = 2x + y$

$$s.a \rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$, $\nabla g(x,y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 2 + 2x\lambda \\ 1 + 2y\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim:

- $2 + 2x\lambda = 0 \Rightarrow 2x\lambda = -2 \Rightarrow x\lambda = -1 \quad (I)$
- $1 + 2y\lambda = 0 \Rightarrow 2y\lambda = -1 \Rightarrow y\lambda = -\frac{1}{2} \quad (II)$

. Desta forma:

No (I), temos $\lambda = -\frac{1}{x}$, Assim $\boxed{x = 2y}$

No (II), temos $\lambda = -\frac{1}{2y}$

. Colocando na restrição

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (2y)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 4y^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 5y^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = \pm 0{,}894$$

$$\Rightarrow x = 2y \Rightarrow x = 2 \cdot \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \pm 1{,}788$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-1}{x} \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{\pm\frac{4}{\sqrt{5}}} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{1} \cdot \pm\frac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{4}$$

. Temos os Pontos:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{4} \end{bmatrix} ; \quad P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}}{4} \end{bmatrix}$$

• Condição de 2ª ordem:

• A Hessiana da função objetivo aumentada

$$\nabla^2 \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

• P/ P_1, temos:

$$\nabla^2 \mathcal{L}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & \frac{8}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{8}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} - w & 0 & \frac{8}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} - w & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{8}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow w = 1{,}118 \Rightarrow$ mínimo

$$\nabla^2 \mathcal{L}\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{4}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & -\frac{8}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ -\frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} - w & 0 & -\frac{8}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2} - w & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ -\frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow w = -1{,}118 \Rightarrow$ Máximo

Scanned with CamScanner