



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

RELATÓRIO DA 3ª UNIDADE
OBSERVADOR E SEGUIDOR DE REFERÊNCIA

TURMA: 01
GRUPO 3

THIAGO THEIRY DE OLIVEIRA: 20210094287

GUILHERME PABLO DE SANTANA MACIEL: 20210094008

MAGNUS BRÍGIDO PAULO FREIRE: 20210094198

ENRICO LUIGI OLIVIERO: 20210073287

Natal-RN
2023

THIAGO THEIRY DE OLIVEIRA: 20210094287

GUILHERME PABLO DE SANTANA MACIEL: 20210094008

MAGNUS BRÍGIDO PAULO FREIRE: 20210094198

ENRICO LUIGI OLIVIERO: 20210073287

SISTEMAS COM OBSERVADOR E SEGUIDOR DE REFERÊNCIA

Segundo Relatório apresentado à disciplina de Sistemas de Controle, correspondente à avaliação da 3ª unidade do semestre 2023.1 do 8º período do curso de Engenharia de Computação e Automação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sob orientação do **Prof. Anderson Luiz de Oliveira Cavalcanti**.

Professor: Anderson Luiz de Oliveira Cavalcanti.

Natal-RN
2023

RESUMO

Este relatório tem como objetivo apresentar o projeto e a implementação de um observador, de um controlador do tipo seguidor de referência e ambos conectados considerando critérios de overshoot e tempo de estabilização. Inicialmente, o problema foi modelado por meio da linearização das equações de estado fornecidas. Em seguida, com o modelo linearizado e utilizando os conceitos de observabilidade e controlabilidade, o controlador e o observador foram projetados e analisados no software MATLAB. Com base nos resultados obtidos, concluiu-se que as especificações de tempo de estabilização e overshoot máximo foram alcançadas pelo seguidor de referência e que o observador convergiu mais rápido quando teve polos mais afastados da origem. Dessa forma, pode-se afirmar que os sistemas funcionaram conforme o esperado.

Palavras-chave: Observador. Controlador. Seguidor de Referência. polos.

Lista de Figuras

1	Modelo do Sistema Com Observadores de Estado	14
2	Modelo do Sistema Seguidor de Referência	15
3	Modelo do Sistema Seguidor de Referência Com Observadores de Estado	16
4	Comparação entre o valor real e estimado do Nível do taque 1 (imagem acima) e 2 (imagem abaixo)	22
5	Comparação entre o valor real e estimado do Nível do taque 1 (imagem acima) e 2 (imagem abaixo)	23
6	Comparação do erro dos níveis do taque 1 e 2 nos polos (-5,-5)(imagem acima) e (-10,-10)(imagem abaixo)	24
7	Resposta do sistema com o seguidor de referência do polo $S - 0.15$ (imagem de cima) e $S - 0.186$ (imagem de baixo)	25
8	Resposta do sistema com o seguidor de referência (polo em $S - 0.150$) + Observador de Estado Polós (-5)	26
9	Resposta do sistema com o seguidor de referência (polo em $S - 0.150$) + Observador de Estado (Polós em -10)	27

Sumário

1	INTRODUÇÃO	6
2	REFERENCIAL TEÓRICO	7
2.1	Observabilidade	7
2.1.1	Condições Necessárias e Suficientes	7
2.2	Controlabilidade	7
2.2.1	Condições Necessárias e Suficientes	8
2.3	Seguidor de Referência	8
2.4	Linearização de Equações	9
2.5	Fórmula de Ackermann	9
3	METODOLOGIA	12
3.1	Ferramentas	12
3.1.1	MatLab	12
3.1.2	Simulink	12
3.2	Material de Apoio	12
3.2.1	Equações de Estado	12
3.2.2	Tabela de Parâmetros	13
3.3	Simulação	13
3.3.1	Observador de Estados	13
3.3.2	Seguidor de Referência	15
3.3.3	Seguidor de Referência + Observador de Estados	16
4	RESULTADOS	17
4.1	Linearização das Equações	17
4.2	Projeto - Observador de Estados	18
4.2.1	Fórmula de Ackermann para o observador	18
4.3	Projeto - Seguidor de Referência	19
4.3.1	Fórmula de Ackermann para o controlador	20
4.4	Projeto - Seguidor de Referência + Observador de Estados	21
4.5	Análise e Graficos	21
4.5.1	Observador	21
4.5.2	Seguidor de Referência	24
4.5.3	Seguidor de Referência + Observador	26
5	CONCLUSÃO	28
6	REFERÊNCIAS	29

1 INTRODUÇÃO

A controlabilidade e observabilidade são dois conceitos fundamentais em teoria de controle de sistemas. Essas propriedades desempenham um papel crucial no projeto e análise de sistemas dinâmicos, permitindo a compreensão e manipulação adequadas do comportamento dos sistemas. A controlabilidade está relacionada à capacidade de controlar um sistema, enquanto a observabilidade diz respeito à capacidade de observar o estado interno do sistema com base em suas saídas.

Nesse contexto, utilizando modelos computacionais, foram realizadas simulações utilizando o software Matlab/Simulink, juntamente com técnicas teóricas de controle, que se baseia na teoria de controle no espaço de estados. A partir dessa abordagem, foi possível projetar um observador e um controlador do tipo seguidor de referência em malha fechada, concatenar ambas projetando um sistema que engloba tanto a observabilidade quanto o controle, sendo possível obter benefícios sinérgicos e otimizar o funcionamento como um todo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Observabilidade

Observabilidade é um conceito fundamental no campo da teoria de controle e sistemas dinâmicos. Ele se refere à capacidade de determinar o estado inicial de um sistema com base na entrada aplicada e nas saídas medidas durante um intervalo de tempo, começando a partir de um instante inicial conhecido.

Essa propriedade é essencial para compreender e analisar o comportamento de sistemas complexos. Em muitos casos, o estado interno de um sistema não pode ser diretamente observado ou medido. No entanto, a observabilidade permite estimar esse estado com base em informações limitadas disponíveis através das saídas mensuráveis.

2.1.1 Condições Necessárias e Suficientes

A condição necessária de posto igual a n é um requisito importante para a observabilidade completa de um sistema dinâmico. Essa condição estabelece que a matriz de observabilidade deve ter posto igual à dimensão do vetor de estado do sistema. Dado um sistema Linear Invariante no tempo, de tempo contínuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases} \quad (1)$$

A Matriz de Observabilidade será:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

O sistema acima é observável se, e somente se:

$$\text{posto}(\mathbf{O}) = n \quad (3)$$

Em que o posto de uma matriz é o número máximo de colunas linearmente independentes que podem ser obtidas a partir dessa matriz, Quando o posto da matriz de observabilidade é igual à dimensão do vetor de estado do sistema (denotado como n), significa que todas as variáveis de estado do sistema têm um impacto único e mensurável nas saídas do sistema. Em outras palavras, não existem estados "escondidos" ou variáveis de estado que não possam ser inferidas a partir das saídas mensuráveis.

2.2 Controlabilidade

Controlabilidade se refere à capacidade de se alcançar um estado final específico, a partir de qualquer estado inicial, através da aplicação de uma ação de controle adequada. Essa propriedade

fundamental permite manipular o sistema de forma a direcioná-lo para um objetivo desejado. Através da controlabilidade, é possível exercer influência sobre o comportamento dinâmico do sistema, moldando seu trajeto e ajustando suas variáveis de estado de acordo com as necessidades e objetivos estabelecidos.

2.2.1 Condições Necessárias e Suficientes

A condição necessária para que um sistema seja controlável é que a matriz de controlabilidade tenha posto igual ao número de variáveis de estado do sistema, ou seja, $\text{posto} = n$. Dado um sistema Linear Invariante no tempo, de tempo contínuo descrito na equação 1, a Matriz de Controlabilidade será:

$$C = \begin{bmatrix} B & BA & BA^2 & BA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

O sistema acima é observável se, e somente se:

$$\text{posto}(C) = n \quad (5)$$

Em que posto de uma matriz é o número máximo de colunas linearmente independentes que ela contém. Se o posto dessa matriz for igual a n , isso significa que todas as colunas da matriz são linearmente independentes e, portanto, é possível controlar todas as variáveis de estado do sistema.

2.3 Seguidor de Referência

O princípio do modelo interno é empregado para alcançar uma dinâmica desejada e seguir uma entrada específica com um erro nulo. Considerando o sistema mencionado na equação 6, o erro de rastreamento na equação 7 é adotado para capturar as propriedades do sinal de referência por meio de sua derivada. Em seguida, novas variáveis de estado são definidas da seguinte maneira.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$e(t) = y(t) - r(t) \quad (7)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{r}(t) = \dot{y}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (8)$$

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}} \\ w = \dot{u} \end{cases} \quad (9)$$

Assim, a forma matricial final nas novas variáveis pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} w \quad (10)$$

Se os polos do sistema aumentado forem colocados na região de estabilidade, o erro de rastreamento será estável. Em outras palavras, a resposta do sistema abaixo será assintoticamente estável.

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{B}k_1 & \mathbf{A} + \mathbf{B}k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (11)$$

2.4 Linearização de Equações

A linearização de equações é um método que aproxima uma função não linear por uma função linear em torno de um ponto de operação específico. Esse processo é útil para simplificar a análise de sistemas complexos. A linearização é baseada na série de Taylor, permitindo aproximar uma função por um polinômio infinito de termos calculados a partir das derivadas da função em um ponto específico. A linearização é amplamente aplicada na matemática e engenharia para analisar sistemas não lineares e possui diversas aplicações, como na engenharia de controle e modelagem de sistemas físicos.

2.5 Fórmula de Ackermann

A fórmula de Ackermann é bem conhecida para a determinação da matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estados. Considerando o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

onde em controle por alimentação de estado é utilizado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Supondo que o sistema seja de estados completamente controláveis e que os pólos desejados de malha fechada estejam em $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$, modificando a equação tal temos:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

Definindo $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$, a equação característica desejada é:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = |s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

Como o teorema de Cayley-Hamilton estabelece que $\tilde{\mathbf{A}}$ satisfaz sua própria equação característica, temos:

$$\mathbf{q}_c(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_n \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (12)$$

Utilizaremos a equação 12 na obtenção da fórmula de Ackermann. Considerando $n = 3$, para simplificação. Consideramos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \mathbf{I} \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} - \mathbf{BK} \\ \tilde{\mathbf{A}}^2 &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{A}}^3 &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^3 = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2\end{aligned}$$

Multiplicando as equações anteriores, na mesma ordem, por α_3 , α_2 , α_1 e α_0 (onde $\alpha_0 = 1$), respectivamente, e somando os resultados, obtemos:

$$\begin{aligned}\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1\tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 \\ = \alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \alpha_1(\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ = \alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{A} + \alpha_1\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - \alpha_2\mathbf{BK} - \alpha_1\mathbf{ABK} - \alpha_1\mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2\end{aligned}\quad (13)$$

Relacionando com a equação 12, temos:

$$\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2 + \alpha_1^2 + ^3 = \mathbf{q}_c(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{0} \quad (14)$$

E temos também que:

$$\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{A} + \alpha_1\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0} \quad (15)$$

Substituindo as equações 14 e 15 na equação 13, temos:

$$\mathbf{q}_c(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) - \alpha_2\mathbf{BK} - \alpha_1\mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 - \alpha_1\mathbf{ABK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{BK}$$

Como $\mathbf{q}_c(\tilde{\mathbf{A}}) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_c(\mathbf{A}) &= \mathbf{B}(\alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2) + \mathbf{AB}(\alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^2\mathbf{BK} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (16)$$

Multiplicando ambos os lados da equação 16 pela inversa da matriz de controlabilidade, temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

Agora multiplicando ambos os lados por $[0 \ 0 \ 1]$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{K}$$

Que pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{q}_c(\mathbf{A})$$

Essa ultima equação fornece a matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estado requerida. Generalizando para um número inteiro, positivo e arbitrário de n , temos:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{q}_c(\mathbf{A}) \quad (17)$$

Assim, a equação 17 é conhecida como fórmula de Ackermann para determinação da matriz de ganho \mathbf{K} de realimentação de estado.

3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada nos laboratórios de sistemas de controle envolve a utilização de equipamentos de medição e análise, visando sempre aprimorar a eficiência do controle e garantir o melhor desempenho do sistema.

3.1 Ferramentas

3.1.1 MatLab

Ele é uma linguagem de programação interativa que faz cálculos numéricos, tem seu próprio Integrated Development Environment (IDE) e um conjunto de bibliotecas (toolboxes). Estas, podem ser usadas em diversas áreas, desde equações diferenciais, até estatísticas, processamento de sinais, finanças e outros. Por causa de sua estrutura diferenciada, capacidade de expansão e flexibilidade, o software possui também as ferramentas de elementos finitos, inteligência artificial, depuração de processamento em tempo real e diversas outras soluções.

3.1.2 Simulink

Simulink, desenvolvido pela companhia MathWorks, é uma ferramenta para modelagem, simulação e análise de sistemas dinâmicos. Sua interface primária é uma ferramenta de diagramação gráfica por blocos e bibliotecas customizáveis de blocos. O software oferece alta integração com o resto do ambiente MATLAB. Simulink é amplamente usado em teoria de controle e processamento digital de sinais para projeto e simulação multi-domínios

3.2 Material de Apoio

3.2.1 Equações de Estado

A bomba proporciona uma vazão de entrada no tanque 1. A vazão de saída do tanque 1 serve como vazão de entrada no tanque 2. O objetivo do sistema é controlar o nível do tanque 2 (variável controlada) a partir da manipulação da tensão da bomba (variável manipulada). O modelo do sistema é não-linear e é descrito pelas seguintes equações de estado:

$$\dot{L}_1 = -\frac{a_1}{A_1} \cdot \sqrt{2gL_1} + \frac{K_m}{A_1} \cdot V_p \quad (18)$$

$$\dot{L}_2 = \frac{a_1}{A_2} \cdot \sqrt{2gL_1} - \frac{a_2}{A_2} \cdot \sqrt{2gL_2} \quad (19)$$

Em que, \dot{L}_1 e \dot{L}_2 são as taxas de variação dos níveis de água dos tanques superior e inferior, respectivamente; L_1 e L_2 são os níveis de água dos tanques superior e inferior respectivamente; a_1 e a_2 são as áreas dos orifícios de saída dos tanques superior e inferior, respectivamente; $A_1 = A_2$ são as áreas das bases dos tanques superior e inferior, respectivamente; K_m é a constante da bomba; g é a aceleração da gravidade e V_p é a tensão aplicada à bomba.

3.2.2 Tabela de Parâmetros

Tabela 1: tabela de parâmetros

Símbolo	Parâmetro	Valor
V_p	Tensão aplicada à bomba	22V a 22V
K_m	Constante da Bomba	$4.6 \text{ cm}^3/\text{s.V}$
$A1 = A2$	Área da seção transversal dos tanques	15.518 cm^2
$a1 = a2$	Área dos orifícios de saída	0.178 cm^2
g	Aceleração da Gravidade	981 cm/s^2

3.3 Simulação

A simulação é uma poderosa ferramenta que permite explorar cenários hipotéticos e analisar possíveis resultados antes de implementar uma ação ou decisão. Dessa forma, serão mostrados as 3 plantas usadas para realizar as simulações e o script para obter os resultados de forma computacional.

3.3.1 Observador de Estados

O observador de estados é uma representação interna do sistema que seja compatível com os dados disponíveis e com o modelo utilizado na simulação. Isso permite acompanhar o comportamento do sistema em tempo real, identificar eventuais desvios ou anomalias, e tomar decisões corretivas ou estratégicas com base nas informações obtidas. Para isso foi montado o sistema (imagem 1) que permite acompanhar o resultado estimado para o real. Os resultados podem ser acompanhados na seção 4.5

Figura 1: Modelo do Sistema Com Observadores de Estado

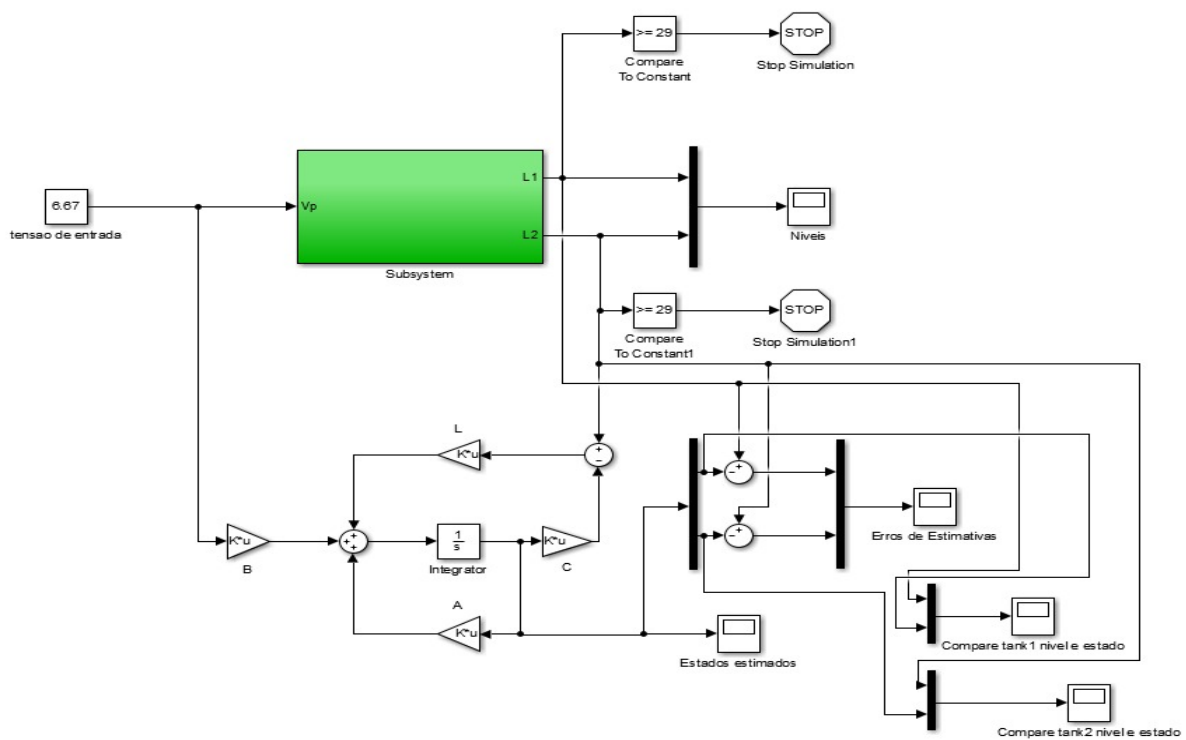
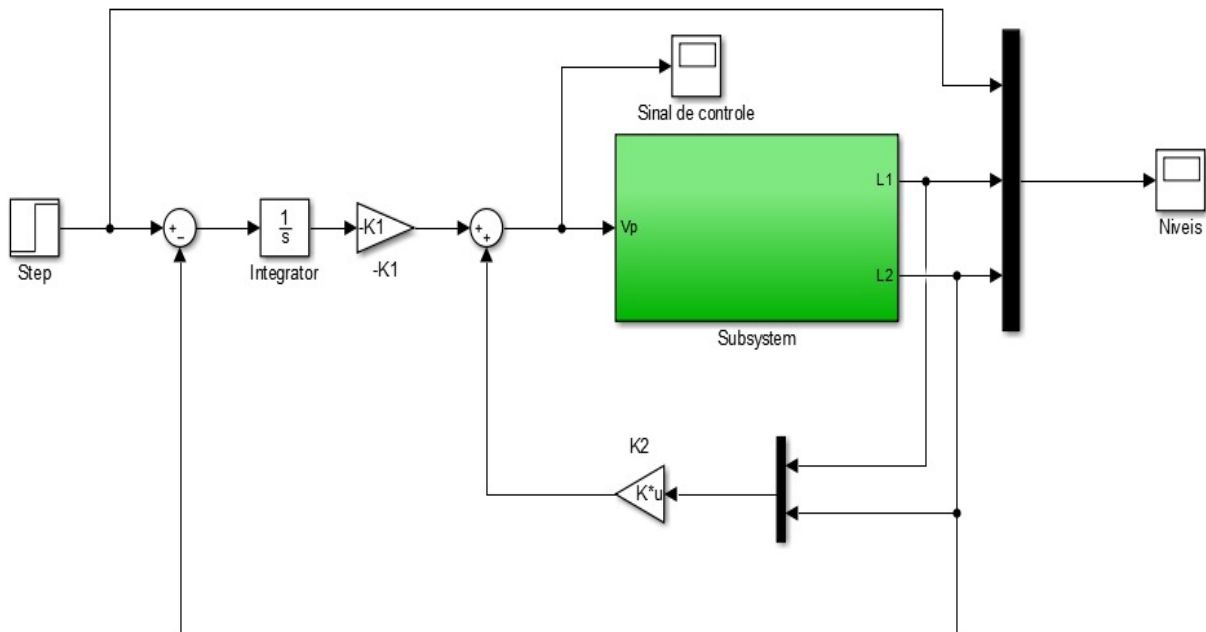


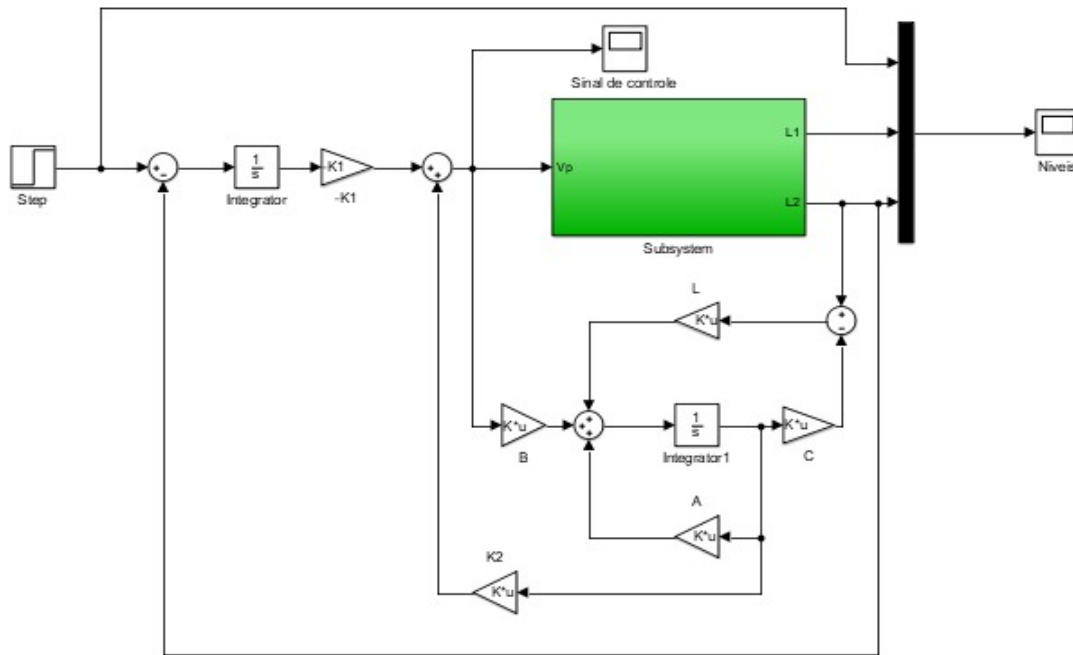
Figura 2: Modelo do Sistema Seguidor de Referência



3.3.2 Seguidor de Referência

O seguidor de referência atua como um controlador que compara o valor atual da variável controlada com o valor de referência e calcula o sinal de controle necessário para reduzir a diferença entre eles, visando manter uma variável controlada ou um sistema próximo a um valor de referência desejado de forma contínua. Assim, montamos o sistema (imagem 2) de um seguidor de referência. Os resultados podem ser acompanhados na secção 4.5

Figura 3: Modelo do Sistema Seguidor de Referência Com Observadores de Estado



3.3.3 Seguidor de Referência + Observador de Estados

A combinação do seguidor de referência com o observador de estados (imagem 3) é uma abordagem poderosa para o controle e monitoramento de sistemas dinâmicos. Essa combinação permite não apenas rastrear um valor de referência desejado, mas também estimar o estado interno do sistema com base em medidas disponíveis, ou seja, o observador de estados fornece informações precisas sobre o estado do sistema, enquanto o seguidor de referência utiliza essas informações para ajustar o sinal de controle e manter o sistema no estado desejado. Na imagem 3 pode-se observar o sistema montado usando as combinações anteriores. E seus resultados podem ser acompanhados na seção 4.5

4 RESULTADOS

Os resultados estão apresentados em forma de equações e gráficos, que mostram o comportamento do sistema ao longo do tempo, bem como as medições realizadas

4.1 Linearização das Equações

Para realizar a linearização das equações dos tanques acoplados usando o método da série de Taylor, foram considerados os parâmetros apresentados na tabela 1. Além disso, definiu-se que o ponto de operação seria de 15 cm (sugestão dada no material do trabalho) correspondendo à metade do nível em ambos os tanques. Portanto, a equação referente ao tanque 1 foi linearizada da seguinte maneira:

$$\dot{L}_1(L_1, V_p) = f_1(L_1, V_p) \quad (20)$$

$$f_1(L_1, V_p) = f_1(L_{1,0}, V_{p,0}) + \frac{\partial f_1(L_1, V_p)}{\partial L_1} \cdot (L_1 - L_{1,0}) + \frac{\partial f_1(L_1, V_p)}{\partial V_p} \cdot (V_p - V_{p,0}) \quad (21)$$

Ao considerar que o tanque 1 está em regime permanente, o que implica em $\dot{L}_1 = 0$, a fim de definir o valor inicial da tensão aplicada à bomba, podemos substituir os valores correspondentes na equação 18, resultando em:

$$-\frac{a_1}{A_1} \cdot \sqrt{2gL_{1,0}} + \frac{k_m}{A_1} \cdot V_{p,0} = 0 \rightarrow V_{p,0} = \frac{a_1}{K_m} \cdot \sqrt{2gL_{1,0}} = 6.638V \quad (22)$$

Após encontrar o valor da tensão inicial, você pode inseri-lo nas equações das derivadas parciais e, em seguida, substituí-lo na equação 21.

$$\frac{\partial f_1(L_1, V_p)}{\partial L_1} = \frac{-a_1 2g}{2A_1 \cdot \sqrt{2gL_1}} = \frac{-0.178 \cdot 2 \cdot 9.81}{2 \cdot 15.518 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 15}} = -0.0656 \quad (23)$$

$$\frac{\partial f_1(L_1, V_p)}{\partial V_p} = \frac{k_m}{A_1} = \frac{4.6}{15.518} = 0.2964 \quad (24)$$

$$f_1(L_1, V_p) = f_1(L_{1,0}, V_{p,0}) - 0.0656 \cdot (L_1 - L_{1,0}) + 0.2964 \cdot (V_p - V_{p,0}) \quad (25)$$

$$\dot{L}_1 = \dot{L}_{1,0} - 0.0656 \cdot \Delta L_1 + 0.2964 \cdot \Delta V_p \quad (26)$$

$$\Delta \dot{L}_1 = -0.0656 \cdot \Delta L_1 + 0.2964 \cdot \Delta V_p \quad (27)$$

Da mesma forma, podemos linearizar a equação 19 através da série de Taylor:

$$\dot{L}_2(L_1, L_2) = f_2(L_1, L_2) \quad (28)$$

$$f_2(L_1, L_2) = f_2(L_{1,0}, L_{2,0}) + \frac{\partial f_2(L_1, L_2)}{\partial L_1} \cdot (L_1 - L_{1,0}) + \frac{\partial f_2(L_1, L_2)}{\partial L_2} \cdot (L_2 - L_{2,0}) \quad (29)$$

$$\frac{\partial f_2(L_1, L_2)}{\partial L_1} = \frac{a_1 2g}{2A_2 \cdot \sqrt{2gL_1}} = \frac{0.178 \cdot 2 \cdot 9.81}{2 \cdot 15.518 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 15}} = 0.0656 \quad (30)$$

$$\frac{\partial f_2(L_1, L_2)}{\partial L_2} = \frac{-a_1 2g}{2A_2 \cdot \sqrt{2gL_2}} = \frac{-0.178 \cdot 2 \cdot 9.81}{2 \cdot 15.518 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 15}} = -0.0656 \quad (31)$$

$$f_2(L_1, L_2) = f_2(L_{1,0}, L_{2,0}) + 0.0656 \cdot \Delta L_1 - 0.0656 \cdot \Delta L_2 \quad (32)$$

$$\Delta L_2 = 0.0656 \cdot \Delta L_1 - 0.0656 \cdot \Delta L_2 \quad (33)$$

4.2 Projeto - Observador de Estados

Para projetar um observador de estados para o sistema em questão, utiliza-se o modelo linearizado em espaço de estados já encontrado. O sistema em espaço de estados linearizado é dado pelas equações:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{L}_1 \\ \Delta \dot{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0656 & 0 \\ 0.0656 & -0.0656 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L_1 \\ \Delta L_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2964 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta V_p \quad (34)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L_1 \\ \Delta L_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

A matriz de observabilidade é dada por:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \quad (36)$$

Onde C é a matriz de saída do sistema e A é a matriz de estados, sendo assim:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.0656 & 0 \\ 0.0656 & -0.0656 \end{bmatrix} \quad (38)$$

podemos calcular a matriz de observabilidade O:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.0656 & -0.0656 \end{bmatrix} \quad (39)$$

4.2.1 Fórmula de Ackermann para o observador

A fórmula de Ackermann é uma ferramenta poderosa no projeto de controladores e observadores

de estados, Através dela pode-se obter Matriz de Ganhos do Observador. Primeiro passo é formar o $\Delta(s)$ com os polos desejados, com autovalores escolhidos em -5, -5. Temos:

$$\Delta(s) = (s + 5)(s + 5) = s^2 + 10s + 25 \quad (40)$$

Escolhendo os polos do sistema e aplicando a fórmula de Ackermann, temos:

$$L = q(A) \cdot O^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Em que $q(A)$ é obtido através do $\Delta(s)$ e O^{-1} é a matriz inversa do observador.

$$q(A) = A^2 + 10A + 25I \quad (42)$$

$$q = \begin{bmatrix} 24.3483 & 0 \\ 0.6474 & 24.3483 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$O^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{0.0656} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Assim podemos obter a matriz de ganho do observador:

$$L = q \cdot O^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$L = \begin{bmatrix} 24.3483 & 0 \\ 0.6474 & 24.3483 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{0.0656} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{24.3483}{0.0656} \\ \frac{0.6474}{0.0656} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 371.16 \\ 9.869 \end{bmatrix} \quad (47)$$

4.3 Projeto - Seguidor de Referência

É possível montar a matriz $\dot{\mathbf{x}}$ usando as equações dos níveis do tanque e, uma vez que o controle do nível do tanque 2 é o objetivo, a matriz de saída também pode ser obtida.

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{L}_1 \\ \Delta \dot{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0656 & 0 \\ 0.0656 & -0.0656 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L_1 \\ \Delta L_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2964 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta V_p \quad (48)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L_1 \\ \Delta L_2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

A montagem do sistema aumentado foi realizada utilizando as matrizes iniciais encontradas, e em seguida foi calculada a matriz de controlabilidade desse sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0656 & 0 \\ 0 & 0.0656 & -0.0656 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2964 \\ 0 \end{bmatrix} \omega \quad (50)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a & \mathbf{A}_a \mathbf{B}_a & \mathbf{A}_a^2 \mathbf{B}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0194 \\ 0.2964 & -0.0194 & 0.0013 \\ 0 & 0.0194 & -0.0026 \end{bmatrix} \quad (51)$$

4.3.1 Fórmula de Ackermann para o controlador

Antes de aplicar a fórmula de Ackermann, os polos foram selecionados com base no relatório do trabalho da 2ª unidade.

$$\begin{cases} p_1, p_2 = -0.0998 \pm 0.2605j \\ p_3 = -0.150 \end{cases} \quad (52)$$

Aplicando a fórmula de Ackermann com base nos polos conhecidos do sistema, obtemos:

$$\Delta(s) = (s + 0.0998 + 0.2605j) \cdot (s + 0.0998 - 0.2605j) \cdot (s + 0.150) \quad (53)$$

$$\Delta(s) = s^3 + 0.3496s^2 + 0.1078s + 0.0117 \quad (54)$$

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{A}_a) = \mathbf{A}_a^3 + 0.3496s\mathbf{A}_a^2 + 0.1078\mathbf{A}_a + 0.0117\mathbf{I} \quad (55)$$

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{A}_a) = \begin{bmatrix} 0.0117 & 0.0143 & 0.0891 \\ 0 & 0.0058 & 0 \\ 0 & 0.0049 & 0.0058 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2213 & 3.3738 & 3.3738 \\ 6.7476 & 0 & 51.4302 \\ 51.4302 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Dessa forma, a matriz de ganhos \mathbf{K} pode ser calculada com seguinte equação:

$$\mathbf{K} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{q}_c = \begin{bmatrix} -0.6003 & -0.7368 & -4.5840 \end{bmatrix} \quad (58)$$

No cálculo da matriz \mathbf{K} , o primeiro elemento representa o ganho \mathbf{k}_1 e os outros dois elementos formam a matriz \mathbf{k}_2 . No entanto, como o cálculo em um sistema de controle por realimentação convencional é realizado como $e(t) = r(t) - y(t)$, enquanto neste sistema específico foi adotado $e(t) = y(t) - r(t)$, o sinal de \mathbf{k}_1 precisou ser modificado.

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0.6003 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} -0.7368 & -4.5840 \end{bmatrix} \quad (60)$$

4.4 Projeto - Seguidor de Referência + Observador de Estados

Essa combinação de observador de estados e seguidor de referência permite que o sistema controle e monitore seu comportamento de maneira eficiente, mesmo em presença de incertezas e perturbações. O observador de estados fornece informações precisas sobre o estado do sistema, enquanto o seguidor de referência utiliza essas informações para ajustar o sinal de controle e manter o sistema no estado desejado. Para montar o sistema de Seguidor de Referência + Observador de Estado (imagem 3) foi usado os valores das matrizes de ganho do observador e do seguidor de referência mostrado nas secções 4.2 e 4.3.

4.5 Análise e Graficos

A análise gráfica de um sistema de controle desempenha um papel fundamental na compreensão do seu comportamento e desempenho. Através de gráficos e análises, podemos visualizar e interpretar as respostas do sistema em diferentes situações e condições.

4.5.1 Observador

Em um observador de estados, a velocidade de convergência do erro de estimação é determinada pelos autovalores da matriz de ganho do observador. Quanto mais distantes os autovalores estiverem da origem, mais rápida será a convergência, ou seja, se os autovalores forem muito próximos da origem, o erro de estimação diminuirá lentamente, levando mais tempo para atingir a estabilidade. Por outro lado, se os autovalores forem afastados da origem, o erro de estimação diminuirá mais rapidamente, permitindo uma convergência mais rápida para um estado estimado próximo ao estado real do sistema.

Para estimar essa diferença além de escolher os polos em $(-5, -5)$ como mostra o desenvolvimento da secção 4.2.1. E também seguindo o mesmo passo a passo, foi utilizado os valores dos polos em $(-10, -10)$ em que obtemos os valores da matriz de ganho em:

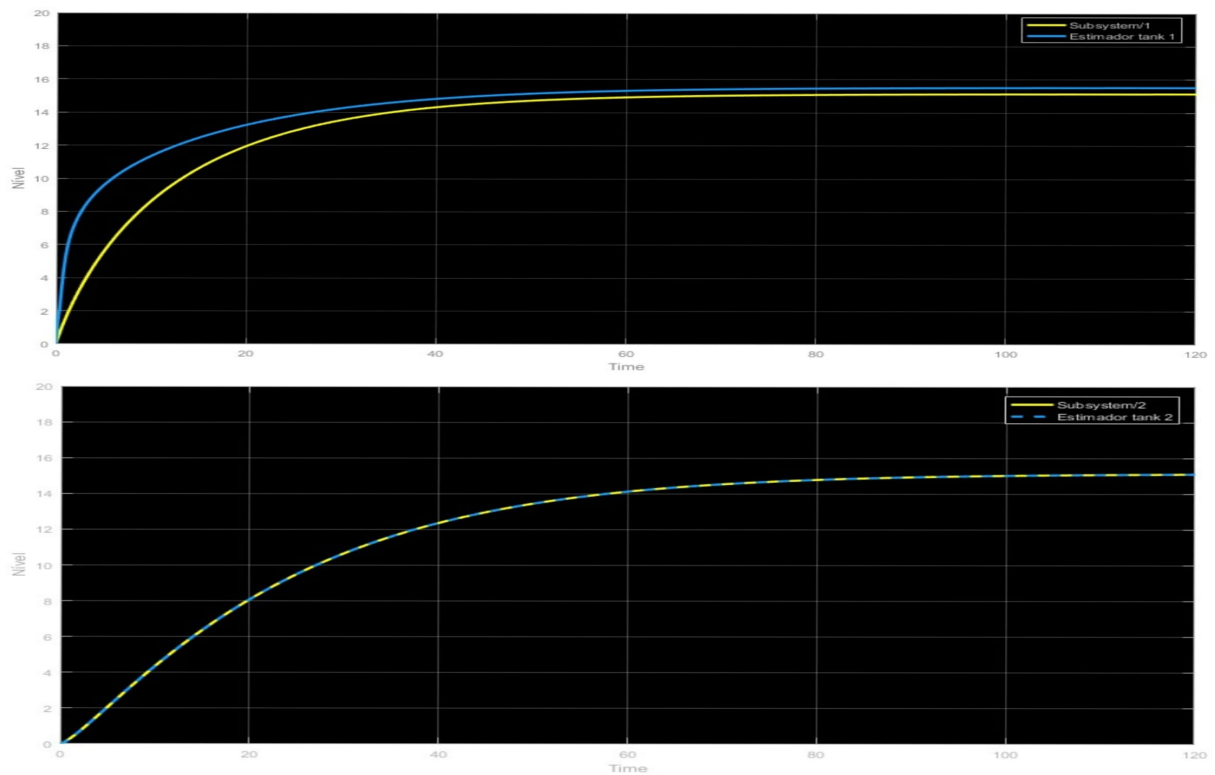
$$L = \begin{bmatrix} 1.5045 \cdot 10^3 \\ 19.8688 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Dessa forma, temos os seguintes testes:

Teste 1

- Polós escolhidos em $(-5, -5)$
- Nível Real (Linha amarela)
- Nível Estimado (Linha Azul)

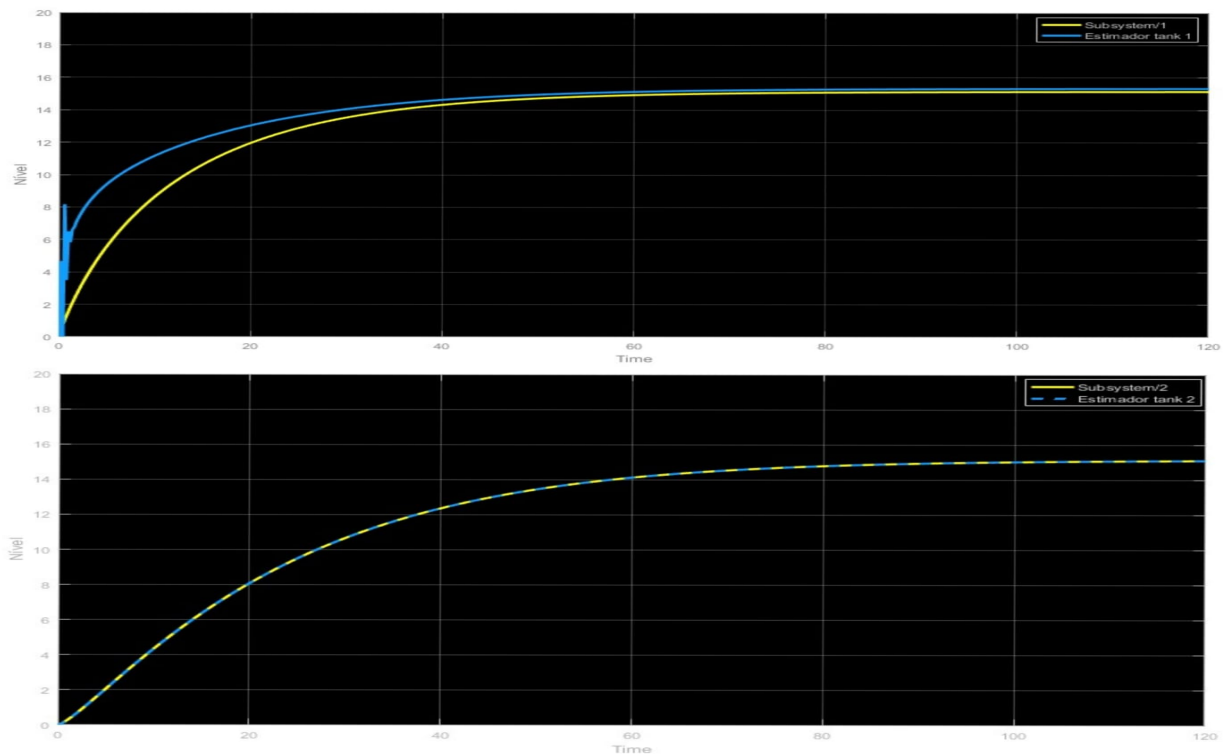
Figura 4: Comparação entre o valor real e estimado do Nível do tanque 1 (imagem acima) e 2 (imagem abaixo)



Teste 2

- Polós escolhidos em $(-10, -10)$
- Nível Real (Linha amarela)
- Nível Estimado tanque 2 (Linha Azul)

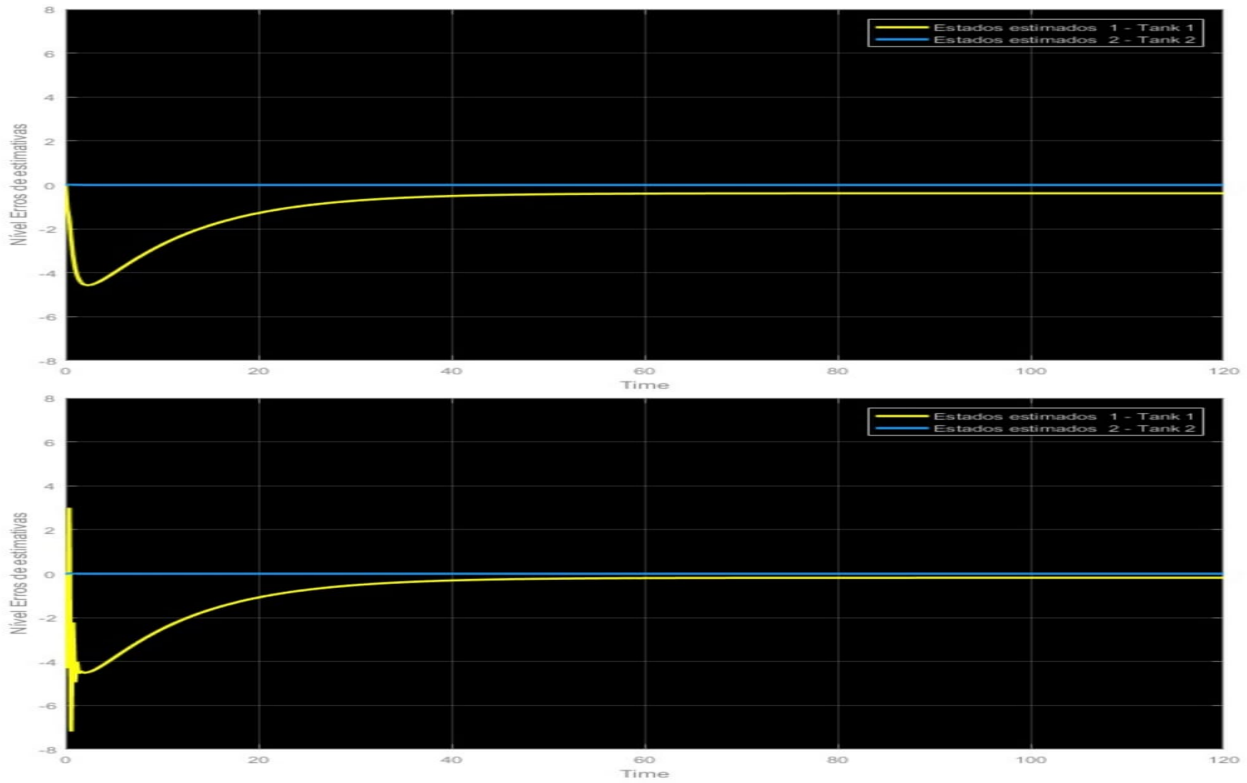
Figura 5: Comparação entre o valor real e estimado do Nível do tanque 1 (imagem acima) e 2 (imagem abaixo)



Com base nas imagens, mostra que a convergência será maior com polos mais distantes da origem (Polos em -10), no entanto, é importante equilibrar essa velocidade de convergência com outros requisitos do sistema, como a presença de ruído de medição ou a capacidade do observador de lidar com não linearidades. Em alguns casos, autovalores muito afastados podem levar a instabilidades ou comportamentos indesejados, como observa-se no início da imagem 5. Por fim, podemos verificar a diferença do erro do nível do tanque 1 e 2, em ambas situações (imagem 6).

Em ambas imagens da figura 6 nota-se que o erro do tanque 2 é 0 (linha azul). Porém como foi debatido e mostrado em imagens anteriores, o erro no nível do tanque 1 na primeira imagem (polos em -5) é maior que o erro no nível do tanque 2 na segunda imagem (polos em -10) devido a estar mais próximo da origem (linha amarela), como foi explicado.

Figura 6: Comparação do erro dos níveis do tanque 1 e 2 nos polos (-5,-5)(imagem acima) e (-10,-10)(imagem abaixo)



4.5.2 Seguidor de Referência

O seguidor de referência desempenha um papel fundamental ao garantir que o sistema siga um comportamento desejado ou uma trajetória pré-determinada, com base nos critérios estabelecidos de um overshoot máximo de 30% e o tempo de estabilização de 40 segundos, obteve-se polos complexos conjugados ($0.0998 \pm 0.2605j$) e para garantir um rápido decaimento do erro, foi escolhido um polo adicional que esteja mais afastado da origem em comparação aos polos complexos conjugados. Com base em alguns experimentos de valores, foi adicionado um real em (S-0.150).

É importante ressaltar que adicionar um polo adicional pode afetar outras propriedades do sistema, como a estabilidade. Portanto, foi necessário realizar análises cuidadosas e testes para garantir que o sistema atenda a todos os requisitos desejados. Para estimar essa diferença além de escolher o polo em (S-0.150) como mostra o desenvolvimento da seção 4.3.1 e também seguindo o mesmo passo a passo, foi utilizado um polo em (S-0.186) em que obtemos os valores da matriz de ganho em:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0.744 \end{bmatrix} \quad (62)$$

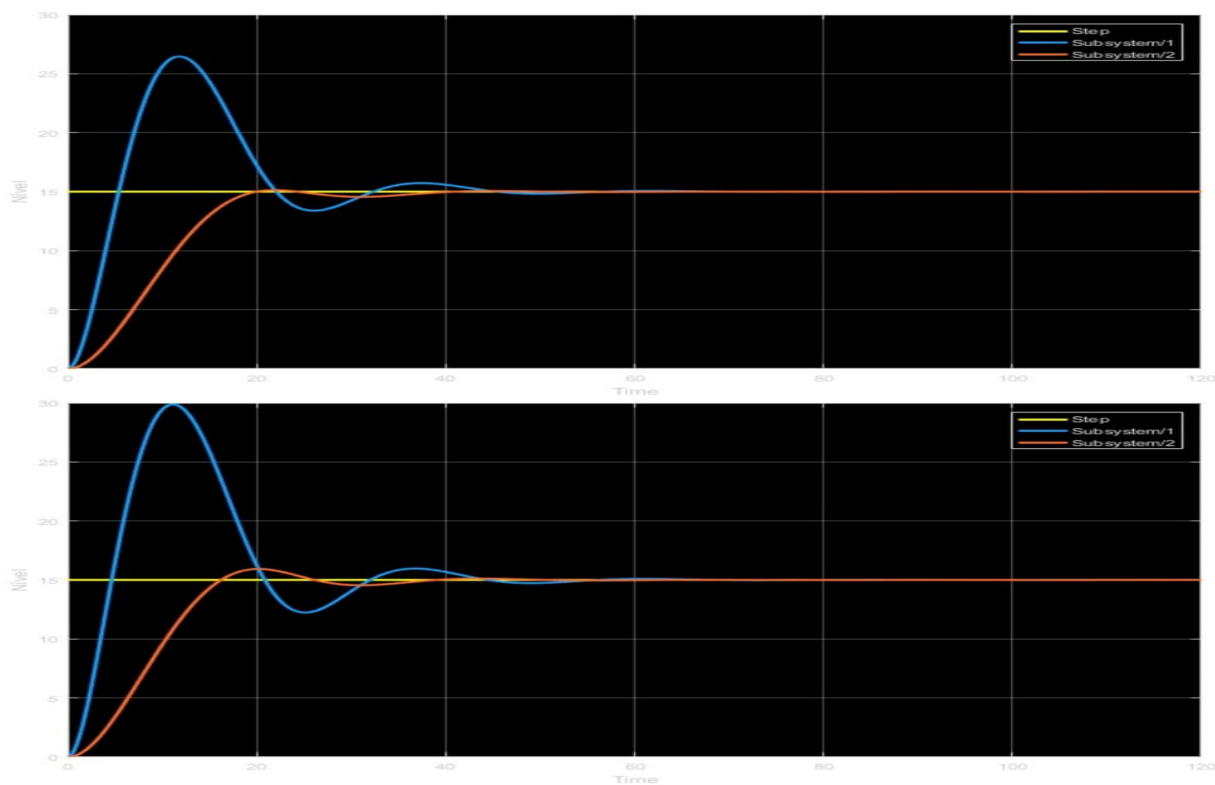
$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} -0.8583 & -4.8321 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Dessa forma, temos o seguinte teste:

Teste 1

- Polo escolhido em (0.150)
- Polo escolhido em (0.186)

Figura 7: Resposta do sistema com o seguidor de referência do polo $S - 0.15$ (imagem de cima) e $S - 0.186$ (imagem de baixo)



O teste (imagem 9) mostra com clareza o cuidado da análise, pois apesar de ter o discernimento em escolher um polo mais rápido que os complexos conjugados, se for selecionando um mais distante, o sistema começa a apresentar instabilidade. Apresentando um overshoot maior em ambos níveis de tanques, apenas com uma escolha de polo um pouco mais afastada da origem. Então como foi mencionado é muito importante verificar a escolha do polo adicional, já que ao mesmo tempo tem que ser mais distante da origem em relação aos outros, mas que continue seguindo um comportamento desejado

4.5.3 Seguidor de Referência + Observador

A combinação do seguidor de referência com o observador de estados em simulações de sistemas de controle pode resultar em um desempenho aprimorado, para efeito de comparação da diferença que pode-se obter de acordo com os valores escolhidos. Foram selecionadas a matriz de ganho do seguidor de referência em conjunto com as 2 matrizes de ganho calculadas no observador.

Figura 8: Resposta do sistema com o seguidor de referência (polo em $S - 0.150$) + Observador de Estado Polós (-5)

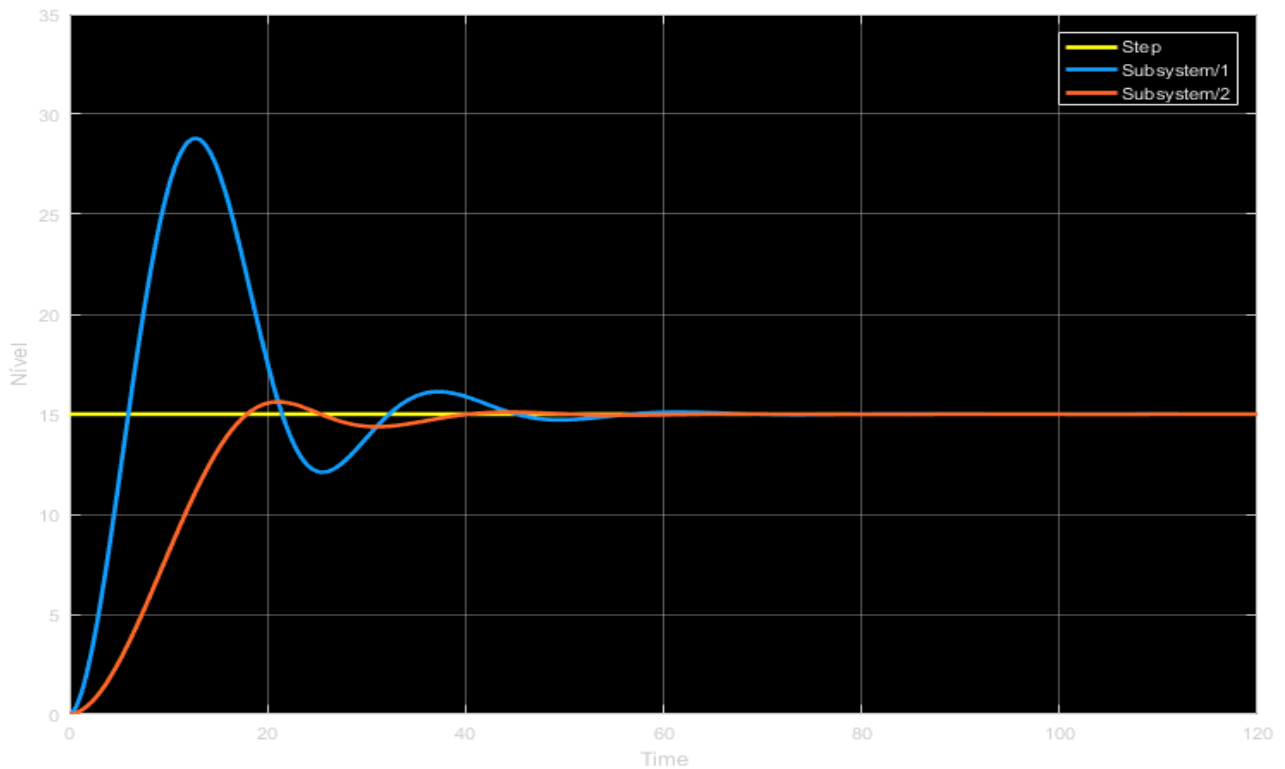
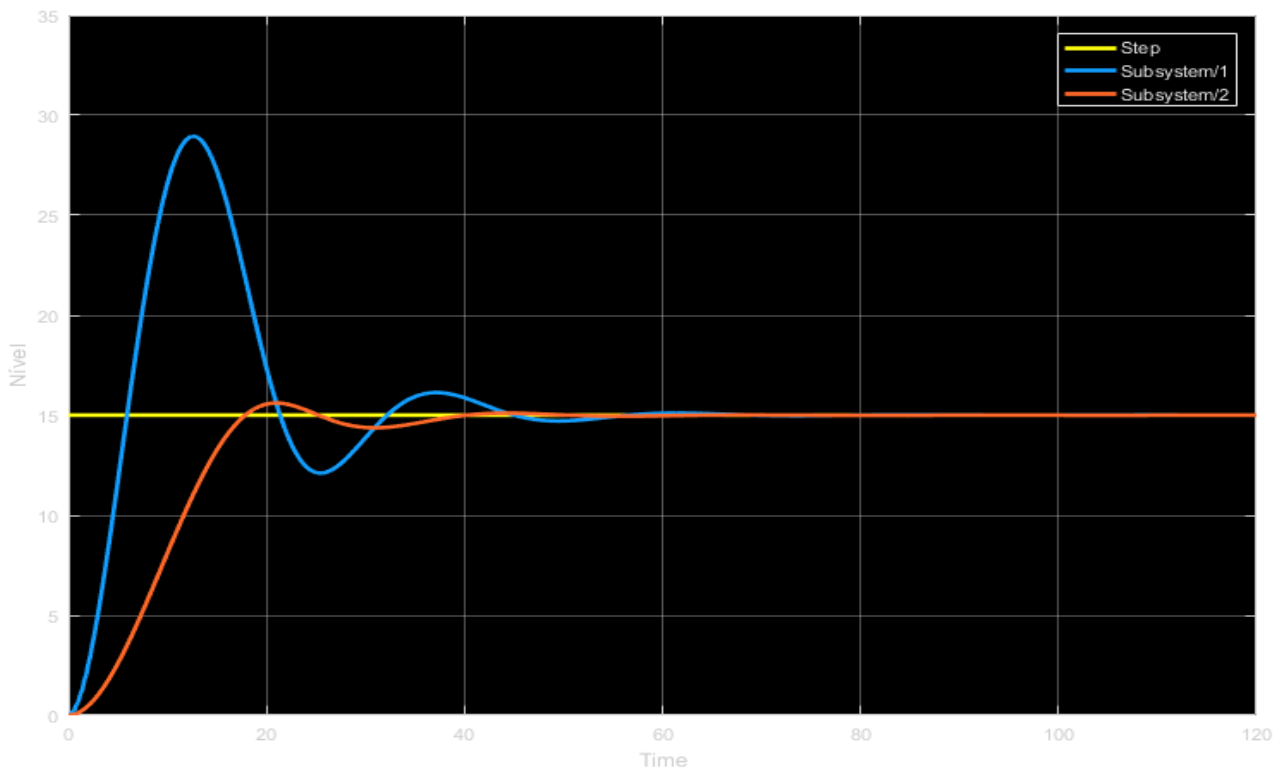


Figura 9: Resposta do sistema com o seguidor de referência (polo em $S - 0.150$) + Observador de Estado (Polós em -10)



A combinação do seguidor de referência com o observador de estados com valores dos polos mais afastados da origem, apresentaram tempo de estabilização mais rápido, ou seja, teve uma maior convergência apesar de ter apresentado um overshoot no Nível do tanque 1 um pouco maior também. De qualquer forma, apesar de quase não ser perceptível na imagem, o gráfico gerado com distintos valores dos polos apresentaram resultados esperados, já que eles possuem uma taxa de convergência mais rápida. Isso resulta em um tempo de estabilização menor e o sistema alcança o equilíbrio mais rapidamente. No entanto, um efeito colateral é que quando os polos do observador estão mais distantes da origem, o observador tende a ser mais sensível a ruídos e perturbações, o que pode resultar em um overshoot maior.

5 CONCLUSÃO

O projeto de observadores de estados e seguidor de referência é um tópico de grande importância tanto no âmbito acadêmico quanto profissional. Essa área de estudo busca compreender e desenvolver técnicas que permitam a monitoração e controle precisos de sistemas dinâmicos.

No presente estudo, tivemos a oportunidade de explorar os conceitos fundamentais relacionados a esse tema, ampliando nossa compreensão sobre o funcionamento dos observadores de estados e seguidores de referência. Utilizamos a ferramenta MATLAB e sua extensão Simulink para implementar e testar essas técnicas.

Inicialmente foram utilizados polos de -5 e -5 no observador de estados, resultando em uma taxa de convergência que atendia aos requisitos do sistema. Posteriormente, os polos foram ajustados para -10 e -10 , resultando em uma taxa de convergência ainda mais rápida. Esse ajuste permitiu que o observador acompanhasse a dinâmica do sistema com maior precisão, em um menor intervalo de tempo. Sendo assim, estando de acordo com a teoria de que quanto maior distante os polos da origem forem, implicam em uma taxa de convergência mais rápida. Em seguida, o seguidor de referência foi também simulado individualmente, utilizando polos complexos e um real. Isso permitiu que o sistema seguisse uma trajetória desejada e mantivesse uma variável controlada próxima a um valor de referência específico, seguindo corretamente os critérios, assim como feito no trabalho da 2ª unidade. Por fim, a combinação do observador de estados com o seguidor de referência, utilizando os polos adequados, proporcionou uma solução completa para o controle e monitoramento eficiente do sistema. A taxa de convergência mais rápida do observador, juntamente com a capacidade de seguir uma referência desejada, resultou em um desempenho aprimorado e uma resposta precisa do sistema.

Conclui-se, portanto, que todos os princípios teóricos abordados desempenham um papel crucial na aplicação prática de um observador e de um seguidor de referência em sistemas de tanques acoplados. Essa experiência proporcionou uma compreensão mais aprofundada dos processos de controle e sua aplicação em sistemas reais.

6 REFERÊNCIAS

CABRAL, E. L. L. Controlabilidade e Observabilidade. **ESCOLA POLITÉCNICA - Formando Engenheiros e Líderes**, 2016.

Disponível em: <http://sites.poli.usp.br/d/pmr2400/10-%20Controlabilidade%20e%20Observabilidade.pdf>. Acesso em: 06 de jul. de 2023.

OGATA, Katsuhiko. Engenharia de controle moderno. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

ARAUJO, F. M. U. de. ROTEIRO DE LABORATÓRIO. [S.l.]: DCA - UFRN, 2007.

DÓREA, C. E. T. Controlabilidade e Observabilidade de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo.

ARAÚJO, F. M. U. de. SISTEMAS DE CONTROLE. **DCA: Departamento de Engenharia de Computação e Automação - UFRN**, 2007. Disponível em: <https://www.dca.ufrn.br/meneghet/FTP/Controle/scv20071.pdf>. Acesso em: 08 de jul. de 2023.