ELEMENTS
DE
MATHEMATIQUES FINANCIERES

Dominique de Saint Sernin

Année universitaire 2005-2006

INTRODUCTION : Rappels sur les intérêts simples

I LES INTERETS COMPOSES

I - 1 EN SITUATION DE CAPITALISATION

I - 2 EN SITUATION D'ACTUALISATION

II LE CAS DES ANNUITES CONSTANTES

II - 1 EN SITUATION DE CAPITALISATION

II - 2 EN SITUATION D'ACTUALISATION

III TAUX PROPORTIONNELS ET TAUX EQUIVALENTS

III - 1 TAUX PROPORTIONNELS

III - 2 TAUX EQUIVALENTS

ELEMENTS
DE
MATHEMATIQUES FINANCIERES

INTRODUCTION

Il s'agit d'un chapitre préliminaire dont les principaux résultats seront utilisés dans les deux chapitres suivants.

L'intérêt simple et l'intérêt composé, mettent en oeuvre les mêmes variables à savoir :

- C : un capital

- t : un taux d'intérêt

- n : le temps

mais les hypothèses implicites sont différentes dans les deux cas.

Rappel sur l'intérêt simple :

Le calcul des intérêts simples porte sur un capital constant au cours du temps

Exemple :

A combien s'élèvent les intérêts sur un prêt de 10 000 € sur 5 ans au taux de 12 % ?

Pour 1 an les intérêts s'élèvent à :

10 000 x 0,12 = 1 200 €

Le total des intérêts sur cinq ans est alors de :

10 000 x 0,12 x 5 = 6 000 €

Dans ce cas on a donc :

$$\boxed{I = C \times t \times n}$$

avec I = Intérêts

Dans la méthode de l'intérêt composé, on suppose que le capital ne reste pas constant au cours du temps.
En effet, on suppose que le capital est augmenté des intérêts acquis à la période précédente.
Cette méthode est plus réaliste, elle est représentative de ce qui se passe en Finance. C'est ce que l'on va voir maintenant.

I LES INTERETS COMPOSES

I - 1 EN SITUATION DE CAPITALISATION

On parle de capitalisation parce que les intérêts de la période précédente sont intégrés au capital.

Interrogeons nous pour savoir ce que devient un capital "C " placé au taux "t" au bout de "n" périodes.

Périodes	Valeur en début de période	Intérêt de la période	Valeur acquise
1	C	$C \times t$	$C + C \times t = C(1 + t)$
2	$C(1 + t)$	$C(1 + t) \times t$	$C(1 + t) +$ $C(1 + t) \times t =$ $C(1 + t)^2$
3	$C(1 + t)^2$	$C(1 + t)^2 \times t$	$C(1 + t)^3$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
n	$C(1 + t)^{n-1}$	$C(1 + t)^{n-1} \times t$	$C(1 + t)^n$

La valeur acquise par le capital initial "C" au bout de "n" périodes, si on l'appelle : VA_n est égale à :

$$\boxed{VA_n = C(1 + t)^n}$$

Le montant des intérêts "I" versés est égal à :

$$\boxed{I = C(1 + t)^n - C = C\,[(1 + t)^n - 1]}$$

Exemple :

Quelle est la valeur acquise par un capital de 10 000 € placé à 12 % l'an pendant 5 ans ?

$$VA_n = 10\,000(1 + 12\,\%)^5 = 17\,623\ €$$

Le montant des intérêts versés est de :

$$17\,623\ € - 10\,000\ € = 7\,623\ €$$

I - 2 EN SITUATION D'ACTUALISATION

Il s'agit du calcul inverse de la capitalisation.
Actualiser, c'est déterminer la valeur actuelle, au jour d'aujourd'hui, d'une somme payable à une époque future.

Quelle somme "C" faut-il placer aujourd'hui à un taux d'intérêt "t" pour que sa valeur acquise au bout de "n" années soit VA_n ?

On sait que :

$$VA_n = C(1 + t)^n$$

donc :

$$\boxed{C = VA_n / (1 + t)^n \qquad \text{ou :} \qquad C = VA_n \times (1 + t)^{-n}}$$

Exemple :

Quelle somme "C" faut - il placer aujourd'hui pour obtenir 10 000 € dans 1 an ? C'est se demander quelle est la valeur actuelle de 10 000 € perçus dans 1 an.

$$C = 10\,000 \times (1 + 12\ \%)^{-1} = 8\,929\ €$$

Quelle somme "C" faut - il placer aujourd'hui pour obtenir 10 000 € dans 2 ans ? C'est se demander quelle est la valeur actuelle de 10 000 € perçus dans 2 ans.

$$C = 10\,000 \times (1 + 12\ \%)^{-2} = 7\,972\ €$$

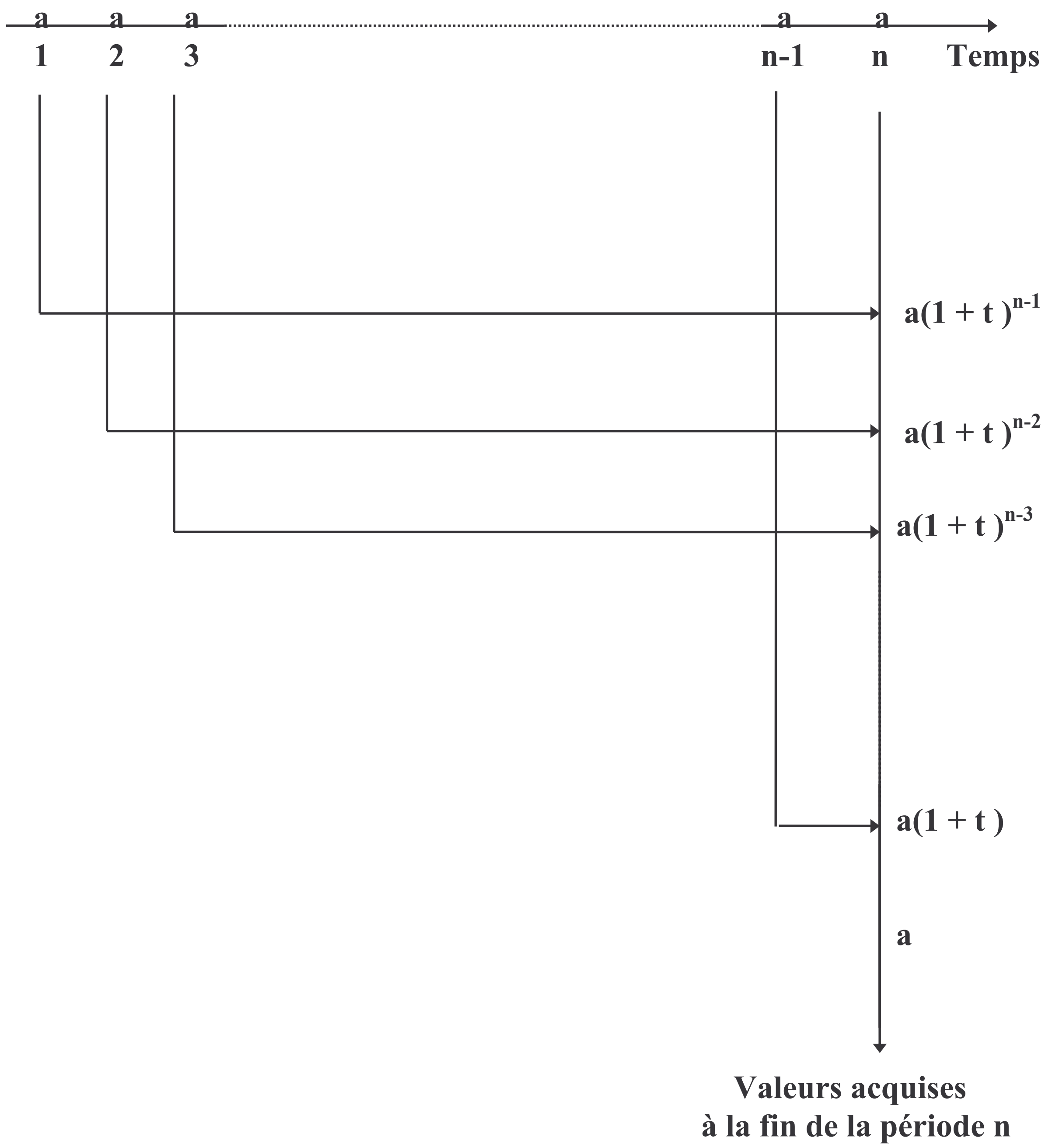
Si on place 7 972 € aujourd'hui pendant 2 ans au taux de 12 %, on obtient 10 000 € en fin de période.

II LE CAS DES ANNUITES CONSTANTES

Une suite d'annuités constantes est une série de versements d'un même montant intervenant à des intervalles de temps réguliers.

II - 1 EN SITUATION DE CAPITALISATION

On suppose que "n" annuités d'un montant constant "a" sont régulièrement versées au début de chaque année et rémunérées à un taux d'intérêt "t". Quelle est la valeur acquise juste après le versement de la dernière annuité ?



Commentaires du schéma :

Combien vaut la première annuité en début de 2ème période :

$a\ (1 + t)$

Combien vaut la première annuité en début de 3ème période :

$a(1 + t)^2$

Combien vaut la première annuité en début de $n^{ème}$ période (au moment du versement de la dernière annuité) :

$$a(1 + t)^{n-1}$$

La première annuité va porter intérêts pendant n-1 périodes, la deuxième annuité pendant n-2 périodes et ainsi de suite la n-1 ^{ème} annuité va porter intérêt pendant 1 période et la dernière annuité n'aura pas le temps de porter intérêt puisqu'on s'intéresse à la valeur acquise juste au moment de son versement.

La valeur acquise au moment du versement de la dernière annuité est égale à la somme des valeurs acquises par les n annuités :

$$VA_n = a + a(1 +t) + a(1 +t)^2 + a(1 +t)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a(1 +t)^{n-1}$$

$$= a[\, 1 + (1 +t) + (1 +t)^2 + (1 +t)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (1 +t)^{n-1}]$$

On reconnaît une suite géométrique de n termes et de raison (1+ t), on sait alors que :

$$1 + (1 +t) + (1 +t)^2 + (1 +t)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (1 +t)^{n-1} = \frac{1 - (1+t)^n}{1 - (1 + t)}$$

$$= \frac{(1 + t)^n - 1}{t}$$

donc :

$$\boxed{VA_n = a \, \frac{(1 + t)^n - 1}{t}}$$

Exemple d'application :

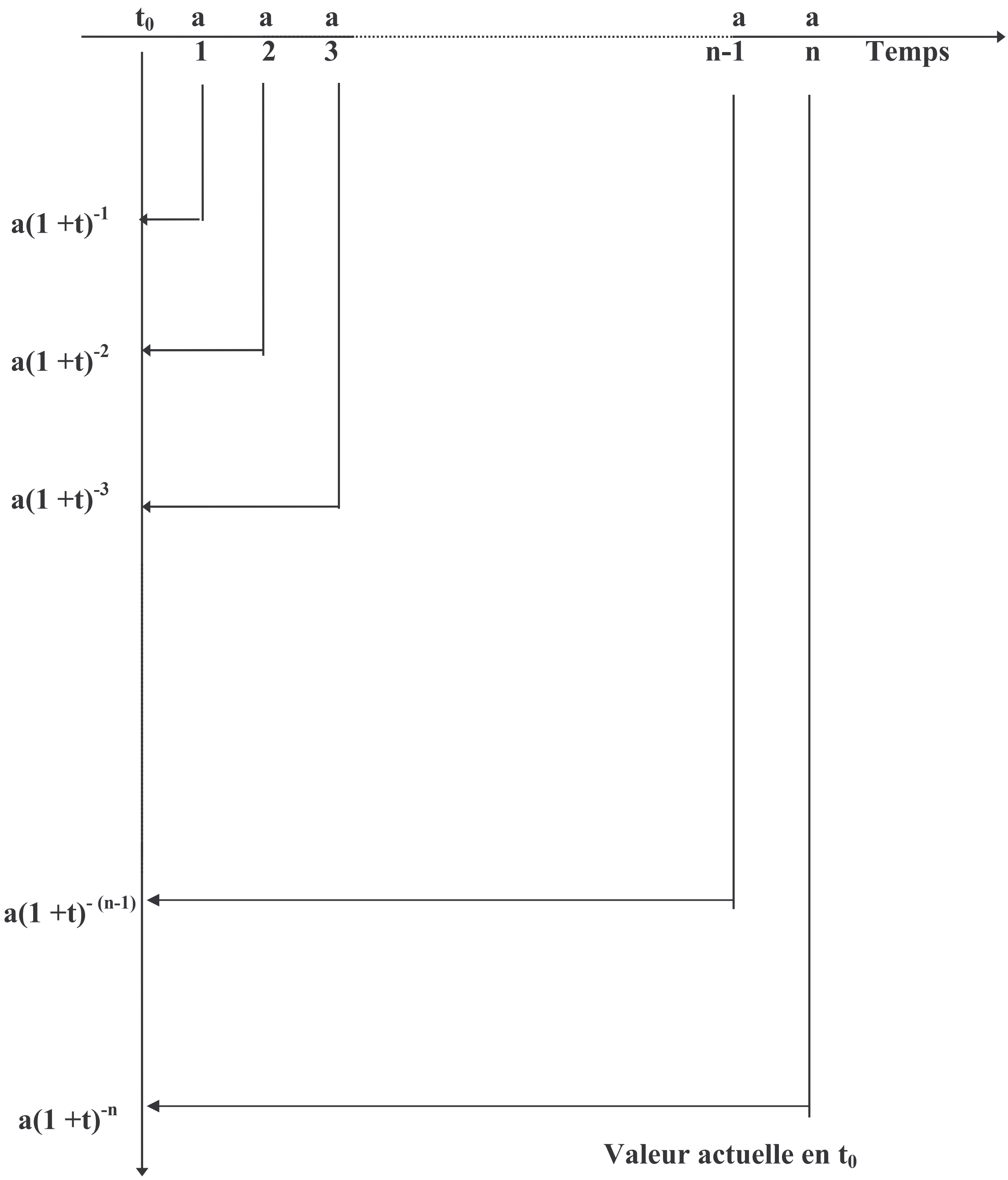
Quelle est la valeur acquise par une suite de 6 annuités de 10 000 € au taux de 16 % au moment du dernier versement ?

$$VA_6 = 10\,000 \; \frac{(1 + 16\,\%)^6 - 1}{16\,\%} = 89\,775 \text{ €}$$

II - 2 EN SITUATION D'ACTUALISATION

En général, quand on raisonne en situation d'actualisation on raisonne avec des annuités de fin de période. C'est à dire que la première annuité est versée en fin de période 1, la seconde annuité en fin de période 2 et ainsi de suite.
Le problème est de savoir quelle est la valeur actuelle d'une suite de n annuités de fin de période.

Le schéma est un peu différent que précédemment du fait que l'on considère des annuités de fin de période.



<u>Commentaire du schéma :</u>

je me situe en t_0 (c'est à dire début période 1)

On voit donc que la valeur actualisée (V_a) de cette suite de n annuités est égale à la somme des valeurs actuelles de chaque annuité :

$$V_a = a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-3} + \dots\dots\dots\dots + a(1+t)^{-(n-1)} + a(1+t)^{-n}$$

La mise en facteur de $a(1+t)^{-1}$ fait apparaître une suite géométrique de n termes et de raison $(1+t)^{-1}$:

$$V_a = a(1+t)^{-1}[\, 1 + a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \dots\dots\dots\dots + a(1+t)^{-(n-2)} + a(1+t)^{-(n-1)}\,]$$

On sait que :

$$1 + a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \dots\dots\dots\dots + a(1+t)^{-(n-2)} + a(1+t)^{-(n-1)} = \frac{1-(1+t)^{-n}}{1-(1+t)^{-1}}$$

donc :

$$V_a = a(1+t)^{-1}\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{1-(1+t)^{-1}}$$

Après simplification il vient :

$$\boxed{V_a = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}$$

Exemple :

Quelle est la valeur actuelle de 6 annuités de 10 000 € au taux de 16 %, la première étant payable dans un an ?

$$V_a = 10\,000\ \frac{1-(1+16\,\%)^{-6}}{16\,\%} = 36\,847\ €$$

III TAUX PROPORTIONNELS ET TAUX EQUIVALENTS

III - 1 TAUX PROPORTIONNELS

Les taux sont dits taux proportionnels lorsqu'ils sont proportionnels à la durée des périodes auxquelles ils s'appliquent.

Exemple :

un taux de 6 % l'an donne un taux de 6 % /12 = 0,5 % mensuel ou 6 % /4 = 1,5 % trimestriel.

III - 2 TAUX EQUIVALENTS

Des taux se rapportant à des périodes différentes sont équivalents si la valeur acquise par un capital donné pour une durée déterminée est la même avec chacun des taux.

Exemple :

Quel est le taux mensuel t_m équivalent au taux annuel de 12 % ?

$$C\,(1 + 12\,\%) = C(1 + t_m\,)^{12}$$

$$1 + 12\,\% = (1 + t_m\,)^{12}$$

$$t_m = (1 + 12\,\%)^{1/12} - 1 = 0{,}949\,\%$$

En proportionnel, on aurait eu 1 %, on constate donc, que le taux équivalent à une période plus petite que l'année est inférieur au taux proportionnel.
Pour un trimestre, on aurait eu :

$$C\,(1 + 12\,\%) = C(1 + t_t\,)^{4}$$

$$1 + 12\,\% = (1 + t_t\,)^{4}$$

$$t_t = (1 + 12\,\%)^{1/4} - 1 = 2{,}874\,\%$$

(contre 3% en proportionnel)

Soit t_k le taux équivalent s'appliquant à 1/k année, et t le taux annuel alors on a :

$$\boxed{t_k = (1 + t)^{1/k} - 1}$$

EXERCICES D'AMPHI

Exercice 1
Plusieurs annuités de 70 000 € chacune, ont une valeur acquise de 804 392 €. Taux 6 % l'an. Combien y a t il d'annuités ?

Exercice 2
Six annuités de 10 000 € chacune ont une valeur acquise de 72 440 €. Quel est le taux d'intérêt ?

Exercice 3
Le directeur financier de la Française des Jeux utilise pour le « Tac o Tac » un taux d'actualisation de 6% l'an.
Un des gagnants de ce jeu doit toucher 800 € par mois pensant 6 ans.

Travail à faire :
1° Calculer le taux mensuel proportionnel et équivalent du taux d'actualisation de 6% l'an.
2° A combien correspond en valeur actuelle un versement de 800 € par mois pensant 6 ans.
Vous effectuerez ce calcul soit avec le taux d'actualisation mensuel proportionnel, soit avec le taux d'actualisation mensuel équivalent.

FORMULES

Formule de capitalisation des annuités (pour une annuité de 1€)

$$1 + (1 + t) + (1 + t)^2 + ... + (1 + t)^{n - 1} = \frac{(1 + t)^n - 1}{t}$$

Formule d'actualisation des annuités (pour une annuité de 1€)

$$\frac{1}{(1 + t)} + \frac{1}{(1 + t)^2} + ... + \frac{1}{(1 + t)^n} = \frac{1 - (1 + t)^{- n}}{t}$$