

METHODES DES DIFFERENCES FINIES POUR LES OPTIONS EUROPEENNES

thibault Tatou Dekou

December 2024

1 Introduction

Dans ce travail, on cherche une approximation numérique de la fonction de prix d'un Put européen définie par : $v = v(t, s)$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, S_{\max}]$. Cette fonction satisfait l'EDP de Black Scholes définie sur le domaine $\Omega = [S_{\min}, S_{\max}]$ comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - r s \frac{\partial v}{\partial s} + r v = 0, & t \in (0, T), s \in (S_{\min}, S_{\max}), \\ v(t, S_{\min}) = v_{\ell}(t) \equiv K e^{-rt} - S_{\min}, & t \in (0, T), \\ v(t, S_{\max}) = v_r(t) \equiv 0, & t \in (0, T), \\ v(0, s) = \phi(s) := (K - s)^+, & s \in (S_{\min}, S_{\max}). \end{cases}$$

Dans la suite suppose que : $K = 100, S_{\min} = 0, S_{\max} = 200, \sigma = 0.2, r = 0.1$

Sur le domaine considéré, on considère le maillage ci-après. On pose $h := \frac{S_{\max} - S_{\min}}{I+1}$ et $\Delta t := \frac{T}{N}$, et

$$\begin{cases} s_j := S_{\min} + jh, & j = 0, \dots, I+1 \quad (\text{maillage spatiale}) \\ t_n = n\Delta t, & n = 0, \dots, N \quad (\text{maillage en temps}) \end{cases}$$

On cherche U_j^n , une approximation de $v(t_n, s_j)$. En particulier, on souhaite évaluer $v(t, s)$ au temps terminal $t = T$ pour ce faire on aura recours à plusieurs méthodes de différences finies.

2 Schéma d'Euler explicite

Dans un premier temps, on a recours au schéma d'euler explicite qui se décline comme suit :

$$\begin{cases} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2} s_j^2 \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2} - r s_j \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} + r U_j^n = 0, & n = 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, I \\ U_0^n = v_{\ell}(t_n) \equiv K e^{-rt_n} - S_{\min}, & n = 0, \dots, N \\ U_{I+1}^n = v_r(t_n) \equiv 0, & n = 0, \dots, N \\ U_j^0 = \phi(s_j) \equiv (K - s_j)^+, & j = 1, \dots, I \end{cases}$$

On choisit de travailler avec le vecteur inconnu $(v(t_n, s_j))_{j=1, \dots, I} : U^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ \vdots \\ U_I^n \end{pmatrix}$. On réécrit le système d'équation

précédent sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{cases} \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} + AU^n + q(t_n) = 0, & n = 0, \dots, N-1 \\ U^0 = (\phi(s_i))_{1 \leq i \leq I} \end{cases}$$

On pose $\alpha_j := \frac{\sigma^2}{2} \frac{s_j^2}{h^2}$, $\beta_j := \frac{rs_j}{2h}$. On cherche alors A et $q(t)$ tels que : $\alpha_i(-U_{i-1}^n + 2U_i^n - U_{i+1}^n) - \beta_i(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + rU_i^n = (-\alpha_i + \beta_i)U_{i-1}^n + (2\alpha_i + r)U_i^n + (-\alpha_i - \beta_i)U_{i+1}^n \equiv (AU + q(t_n))_i$.

Par identification, on a : $A := \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + r & -\alpha_1 - \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 + \beta_2 & 2\alpha_2 + r & -\alpha_2 - \beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\alpha_I + \beta_I & 2\alpha_I + r & 0 \end{bmatrix}$.

Et $q(t_n)$ contient les valeurs aux bornes $U_0^n = v_\ell(t_n)$ et $U_{I+1}^n = v_r(t_n)$ et est défini comme suit :

$$q(t_n) := \begin{pmatrix} (-\alpha_1 + \beta_1)U_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-\alpha_I - \beta_I)U_{I+1}^n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (-\alpha_1 + \beta_1)v_\ell(t_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-\alpha_I - \beta_I)v_r(t_n) \end{pmatrix}.$$

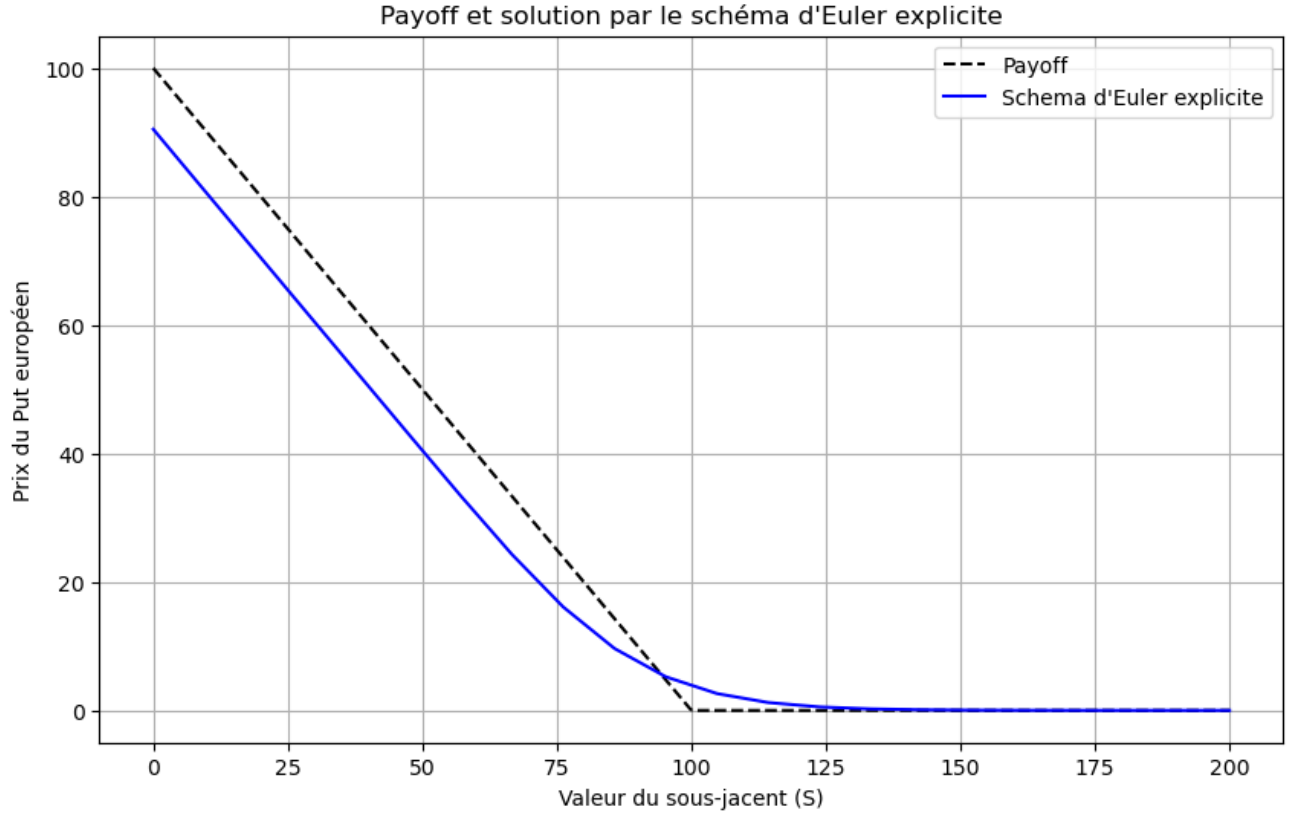
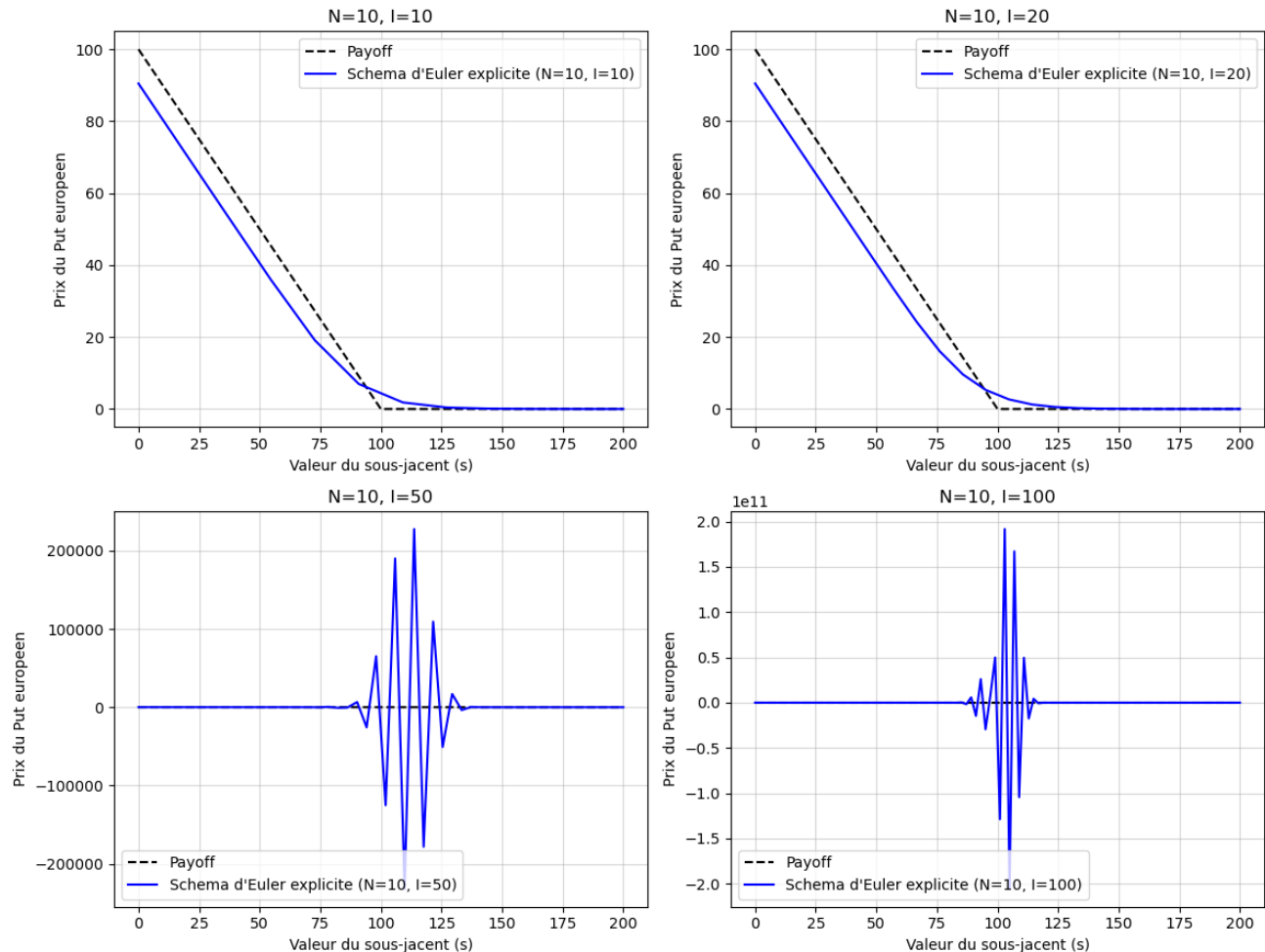


FIGURE 1 – Illustration du schéma pour $N = 20$ et $I = 20$

2.1 Tests numériques sur le schéma d'Euler explicite

2.1.1 On fixe $N = 10$ et on fait varier $I = 10, 20, 50, 100$

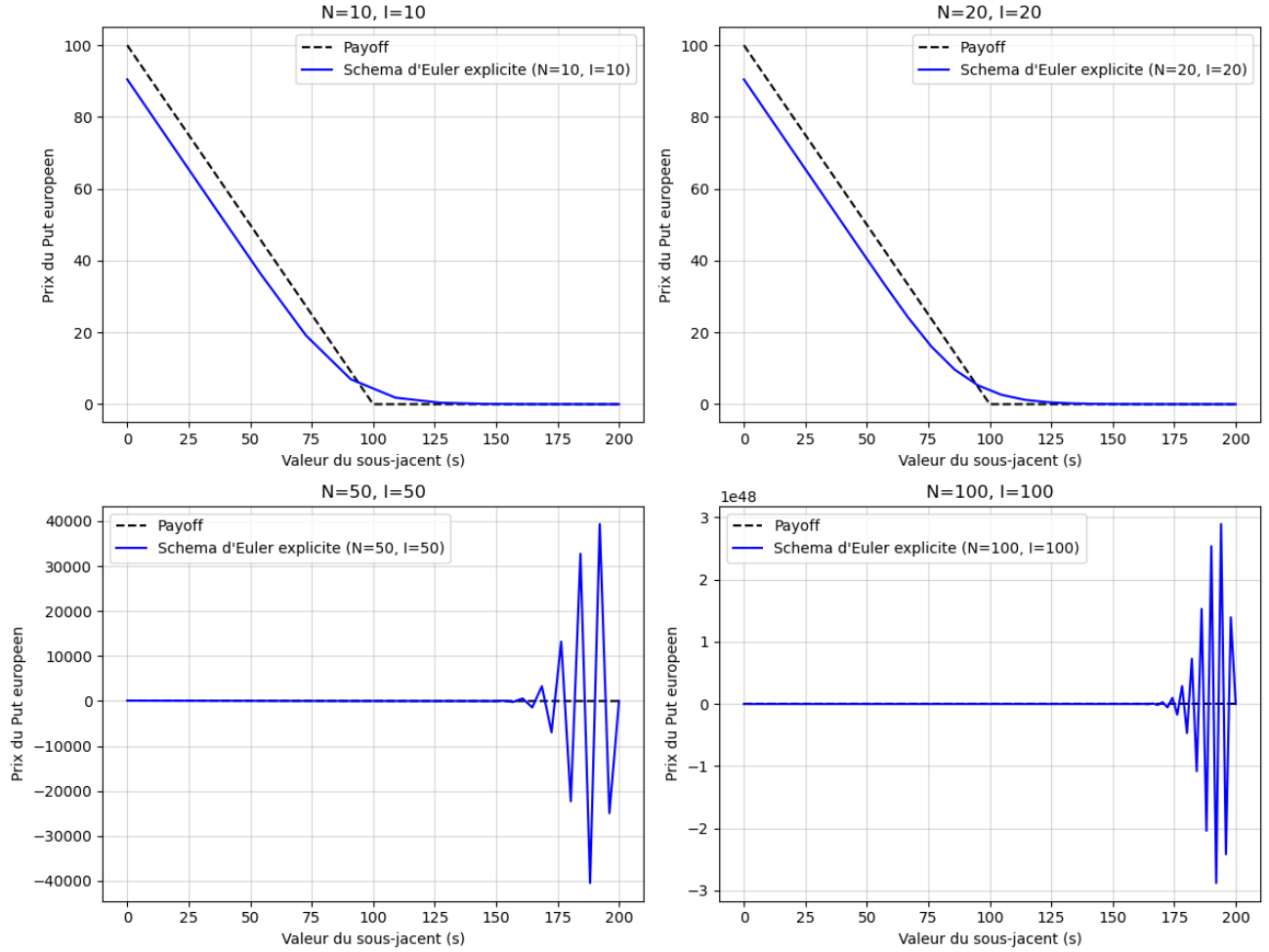
Graphique 1



Commentaire : On observe grâce aux graphiques 1 et 2 que le schéma d'Euler explicite n'est pas numériquement stable. En effet, après un nombre fini d'itérations on remarque que la norme du vecteur des approximations U^n explose. Aussi U_j^n (l'approximation de $v(t_n, s_j)$) n'a pas toujours des valeurs positives, ce que l'on souhaiterait éviter. Aussi, en regardant le graphique 1, on conclut que lorsque le nombre de pas de temps est faible (petite valeur de N), à mesure que le maillage en espace comporte plus de points (I grand) le schéma d'Euler explicite devient instable. Le graphique 2 montre que l'instabilité persiste quand N et I évoluent en étant égaux. Il semble nécessaire lorsque I augmente de considérer des valeurs de N beaucoup plus importantes. Le schéma d'euler explicite semble nécessiter un maillage plus fin en temps pour être stable numériquement.

2.1.2 On fixe $N = I$ et on fait varier $I = 10, 20, 50, 100$

Graphique 2



2.1.3 Compréhension de l'origine des oscillations et des explosions observées

Pour ce faire, on va s'intéresser à la matrice d'amplification définie comme suit : $B := I_d - \Delta t A$. On sait que le schéma d'Euler peut être programmé en utilisant l'équation réursive ci-après : $U^{n+1} = U^n - \Delta t(AU^n + q(t_n))$. Cette équation peut être réécrite sous la forme suivante : $U^{n+1} = (I_d - \Delta t A)U^n + \Delta t q(t_n) = BU^n + \Delta t q(t_n)$. On comprend que toute oscillation ou explosion dans les approximations est due à la matrice B .

En se restreignant à la diagonale de la matrice d'amplification pour $N=10$ et $I=50$, on observe que les coefficients de celle-ci ne sont pas tous positifs et que plusieurs des éléments diagonaux sont en valeur absolue supérieure à 1. Ces coefficients négatifs et la norme élevée de la matrice explique les oscillations observées aux graphiques 1 et 2. Pour $N=I=10$, la matrice d'amplification a ses coefficients qui sont presque tous positifs et de valeur absolue inférieure à 1. On remarque aussi que dans ce cas le schéma d'Euler se comporte bien.

2.1.4 Calcul des valeurs CFL

En comparant les valeurs CFL pour les cas $N=10$ et $I=50$ et $N=I=10$, on constate que dans le premier cas, la valeur CFL est faible. Il s'agit aussi du cas où le schéma d'Euler explicite se comporte bien. On en déduit que plus le CFL est petit plus le schéma est stable.

2.1.5 Ordre du schéma d'Euler explicite

Le tableau ci-dessous permet de voir que le schéma d'Euler explicite présente une certaine stabilité à mesure que I et N évolue (avec N proportionnel au carré de I). Les valeurs de α montrent aussi que ce schéma est d'ordre 2 en la variable s .

I	N	U(s)	errex	tcpu	alpha	error
10	10	14.255092	0.981429	0.000232	N/A	N/A
20	40	13.547634	0.273971	0.000599	1.973300	0.707459
40	160	13.345106	0.071443	0.001667	2.009007	0.202528
80	640	13.291930	0.018267	0.006861	2.002965	0.053175
160	2560	13.278284	0.004621	0.054296	2.000790	0.013646
320	10240	13.274825	0.001162	0.819943	2.000216	0.003459

FIGURE 2 – Tableau de convergence du schéma d'Euler explicite à $s_{val} = 80$

3 Schéma d'Euler Implicite

De ce qui précède on a vu que le schéma d'Euler explicite présente une instabilité numérique en fonction maillage considéré. On observe en effet, une explosion et des oscillations dans les résultats de ce schéma dû à la matrice d'amplification. On a constaté que l'instabilité pouvait être corrigée en considérant N et I tels que N soit proportionnel au carré de I . Toutefois, une telle approche est très coûteuse en termes d'itérations. Pour y remédier on va donc implémenter le schéma d'Euler implicite qui est défini de façon récursive par les équations ci-après :

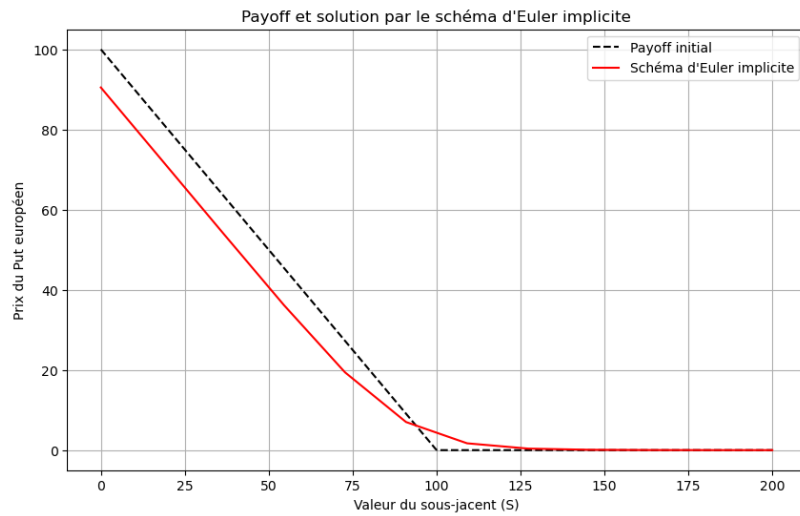
$$\begin{cases} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2} s_j^2 \frac{-U_{j-1}^{n+1} + 2U_j^{n+1} - U_{j+1}^{n+1}}{h^2} - r s_j \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} + r U_j^{n+1} = 0, & n = 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, I \\ U_0^{n+1} = v_\ell(t_{n+1}) \equiv K e^{-r t_{n+1}} - S_{\min}, & n = 0, \dots, N-1 \\ U_{I+1}^n = v_r(t_{n+1}) \equiv 0, & n = 0, \dots, N-1 \\ U_j^0 = \phi(s_j) \equiv (K - s_j)^+, & j = 1, \dots, I \end{cases}$$

On travaille avec le même vecteur inconnu $(v(t_n, s_j))_{j=1, \dots, I} : U^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ \vdots \\ U_I^n \end{pmatrix}$. On peut réécrire le système d'équation

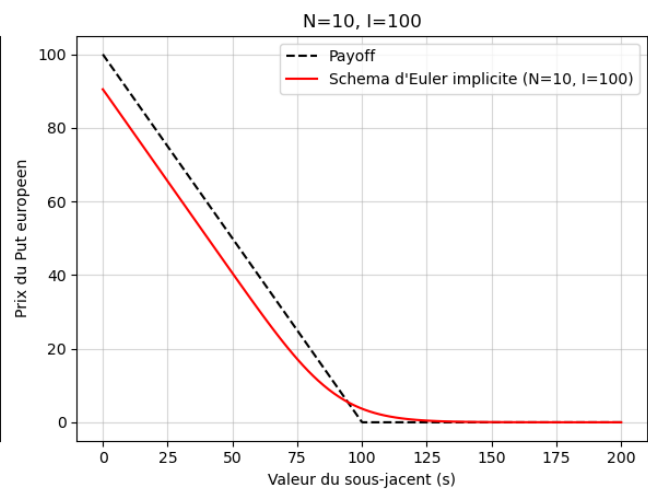
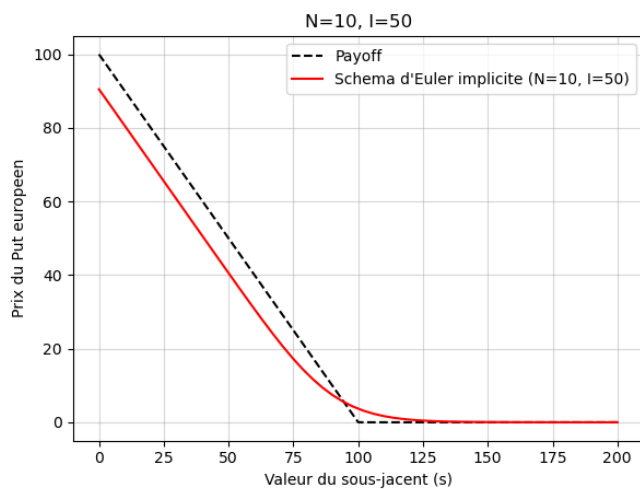
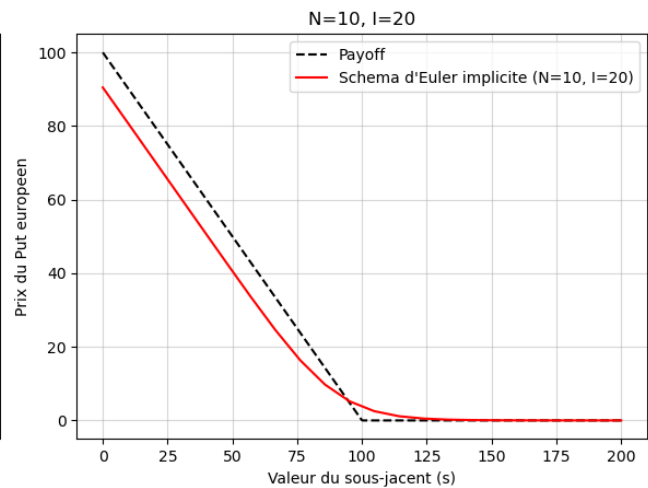
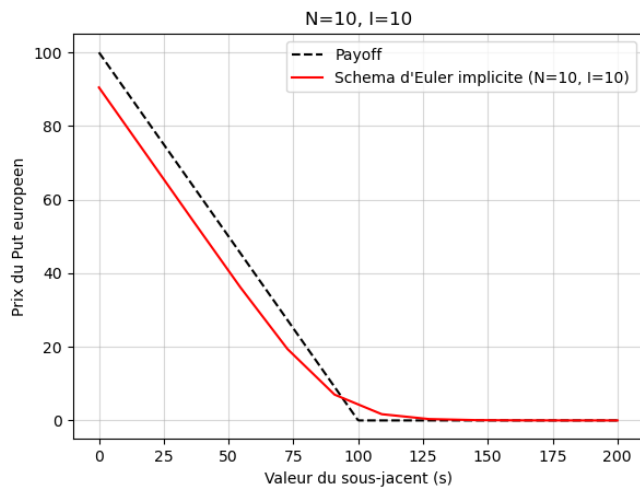
sous forme matricielle comme suit : $\begin{cases} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + A U^{n+1} + q(t_{n+1}) = 0, & n = 0, \dots, N-1 \\ U^0 = (\phi(s_i))_{1 \leq i \leq I} \end{cases}$. La matrice A est la

même que dans le schéma d'Euler explicite, pareillement pour le vecteur q .

3.1 Stabilité du schéma d'Euler Implicite



Graphique 3



Le graphique 3 ci-dessus permet de constater que le schéma d'Euler implicite ne pose aucun problème de stabilité. En effet, on observe aucune oscillation ou explosion. Le schéma semble bien approcher le payoff du Put européen.

3.2 Ordre du schéma d'Euler implicite

Les deux tableaux ci-dessous montrent que le schéma d'Euler implicite est stable numériquement. Aussi les résultats du premier suggère qu'il n'est pas nécessaire des valeurs de N proportionnelles au carré de I pour assurer la stabilité du schéma. Toutefois en comparant les colonnes alpha des deux tableaux on peut voir que l'ordre théorique du schéma d'Euler implicite qui est de 2, se précise à mesure que le maillage en temps s'affine. .

I	N	U(s)	errex	tcpu	alpha	error
10	1	15.115616	1.841953	0.000740	N/A	N/A
20	2	14.135687	0.862024	0.000415	1.174245	0.979929
40	4	13.667824	0.394161	0.000437	1.169606	0.467863
80	8	13.456693	0.183030	0.001181	1.126652	0.211131
160	16	13.360985	0.087322	0.007708	1.077291	0.095708
320	32	13.316197	0.042534	0.057984	1.042412	0.044788

FIGURE 3 – Tableau de convergence du schéma d'Euler implicite $N = I/10$

I	N	U(s)	errex	tcpu	alpha	error
10	10	14.448406	1.174743	0.001316	N/A	N/A
20	20	13.642159	0.368496	0.000942	1.792956	0.806247
40	40	13.386145	0.112482	0.002360	1.773621	0.256015
80	80	13.310502	0.036839	0.009246	1.639391	0.075642
160	160	13.287066	0.013403	0.068292	1.471804	0.023436
320	320	13.279089	0.005426	0.551671	1.310471	0.007977

FIGURE 4 – Tableau de convergence du schéma d'Euler implicite $N = I$

4 Schéma de CRANK NICOLSON

On a pu constater que le schéma d'Euler Implicite se comporte plutôt bien. Il est stable numériquement mais l'ordre du schéma se vérifie numériquement pour de grande valeur de N . A présent on s'intéresse au schéma de CRANK NICOLSON

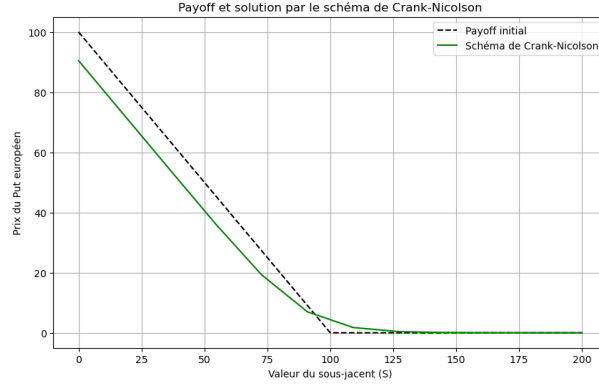
qui est défini de façon récursive par les équations ci-après :

$$\begin{cases} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sigma^2}{2} s_j^2 \frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{h^2} - r s_j \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} + r U_j^{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sigma^2}{2} s_j^2 \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2} - r s_j \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} + r U_j^n \right) = 0, & n = 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, I \\ U_0^{n+1} = v_\ell(t_{n+1}) \equiv K e^{-rt_{n+1}} - S_{\min}, & n = 0, \dots, N-1 \\ U_{I+1}^n = v_r(t_{n+1}) \equiv 0, & n = 0, \dots, N-1 \\ U_j^0 = \phi(s_j) \equiv (K - s_j)^+, & j = 1, \dots, I \end{cases}$$

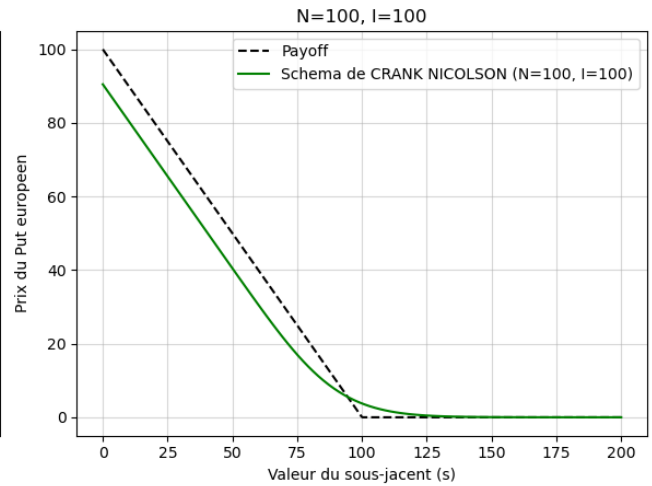
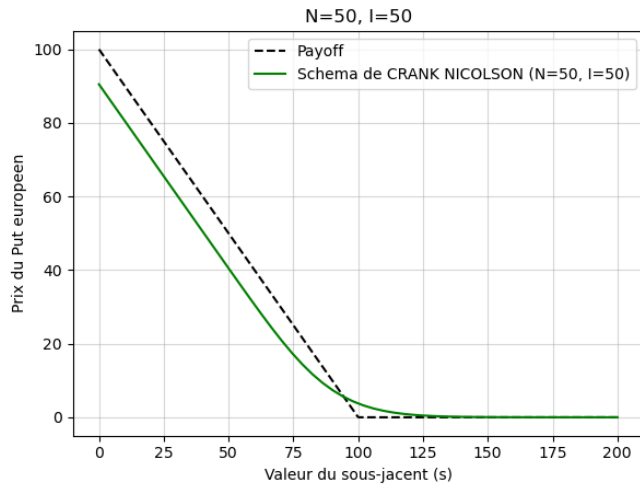
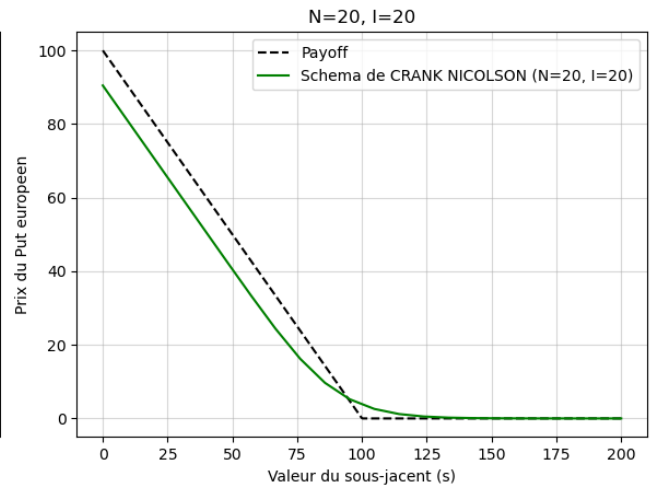
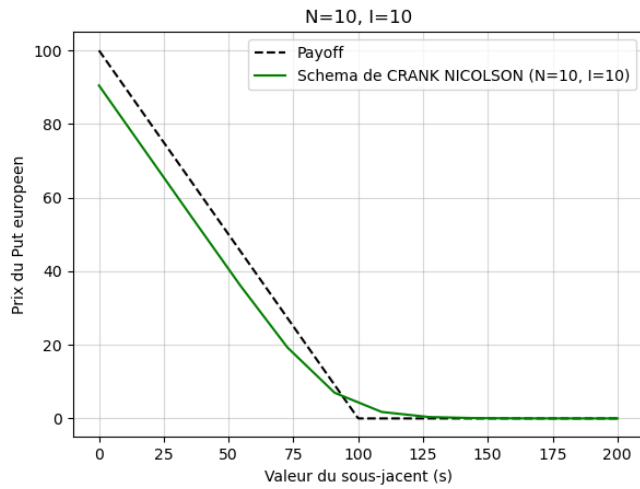
On travaille avec le même vecteur inconnu $(v(t_n, s_j))_{j=1, \dots, I} : U^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ \vdots \\ U_I^n \end{pmatrix}$. On peut réécrire le système d'équation

sous forme matricielle comme suit :
$$\begin{cases} \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} + A\left(\frac{U^{n+1}+U^n}{2}\right) + q(t_{n+1}) + q(t_n) = 0, & n = 0, \dots, N-1 \\ U^0 = (\phi(s_i))_{1 \leq i \leq I} \end{cases}$$

4.1 Stabilité du schéma de Crank Nicolson



Graphique 4



Les graphiques ci-dessus relatifs au schéma de CRANK NICOLSON suggèrent que ce dernier est stable numériquement. Comme pour Euler implicite, il ne présente en effet pas d'explosion ou d'oscillation.

4.2 Ordre du schéma de Crank Nicolson

Les graphiques précédents et les deux tableaux ci-après relatifs au schéma de CRANK NICOLSON suggèrent que ce dernier est stable numériquement. Comme pour Euler implicite, il ne présente en effet pas d'explosion ou d'oscillation. Plus le maillage en temps est épais (N petit), plus ce schéma semble vite converger (au regard du temps d'exécution).

I	N	U(s)	errex	tcpu	alpha	error
10	10	14.353451	1.079788	0.001469	N/A	N/A
20	20	13.578892	0.305229	0.001086	1.953920	0.774559
40	40	13.353140	0.079477	0.002742	2.011209	0.225752
80	80	13.293944	0.020281	0.009764	2.005878	0.059195
160	160	13.278788	0.005125	0.092298	2.002416	0.015156
320	320	13.274951	0.001288	2.004515	2.001060	0.003837

FIGURE 5 – Tableau de convergence du schéma de Crank Nicolson N = I

I	N	U(s)	errex	tcpu	alpha	error
10	1	14.230461	0.956798	0.000913	N/A	N/A
20	2	13.506181	0.232518	0.000353	2.187701	0.724281
40	4	13.334783	0.061120	0.000913	1.997041	0.171397
80	8	13.288798	0.015135	0.001393	2.050009	0.045985
160	16	13.277492	0.003829	0.009290	2.000797	0.011307
320	32	13.274627	0.000964	0.092256	1.999440	0.002865

FIGURE 6 – Tableau de convergence du schéma de Crank Nicolson N = I/10

4.3 Prise en compte du caractère creux de la matrice A

Dans cette section on essaye d'optimiser le temps d'exécution des schémas en ne calculant que les termes non nuls de la matrice A qui apparaît à chaque fois dans les équations récursives des différents schémas. On le fait en particulier pour le schéma de Crank Nicolson qui est le meilleur des trois que nous avons programmés, car il est d'ordre 2 aussi bien en temps qu'en espace.

I	N	U(s)	errex	tcpu	alpha	error
10	10	14.353451	1.079788	0.003580	N/A	N/A
20	20	13.578892	0.305229	0.003644	1.953920	0.774559
40	40	13.353140	0.079477	0.007727	2.011209	0.225752
80	80	13.293944	0.020281	0.018718	2.005878	0.059195
160	160	13.278788	0.005125	0.066744	2.002416	0.015156
320	320	13.274951	0.001288	0.847080	2.001060	0.003837

FIGURE 7 – Tableau de convergence du schéma de Crank Nicolson sparse N = I

On comparant ce tableau à celui obtenu plus haut pour le schéma de Crank Nicolson dans le cas N=I, on voit qu'en utilisant le fait que la matrice A est creuse, on a un véritable gain dans le temps d'exécution pour de grandes valeurs de N et de I.

5 Conclusion des expérimentations

Au terme des différentes expérimentations réalisées, il ressort que les schémas d'Euler explicite, d'Euler implicite et de Crank Nicolson permettent d'approcher assez bien le prix du put européen. Il convient de relever un certain nombre de constat. Concernant le schéma d'Euler explicite, ce dernier n'est pas toujours stable numériquement, ceci du fait notamment de la matrice d'amplification. Les expériences ont permis de montrer que plus maillage en temps est fin (c'est-à-dire N grand, et proportionnel au carré de I), plus Euler explicite est stable et ne présente ni oscillations ni explosions. L'ordre du schéma d'Euler explicite observé numériquement est de 2 ce qui correspond à ce qui est démontré en théorie. Les schémas d'Euler implicite et de Crank Nicolson, ne présente pas problème de stabilité numérique. Les expérimentations réalisées ont permis de constater que pour ces deux derniers schéma il était possible de se passer de N . En effet, même en considérant de petites valeurs de N ($N=I/10$) ces schémas convergent toujours et restent stables numériquement. Toutefois l'ordre du schéma d'Euler implicite se précise à mesure que le maillage en temps s'affine. S'agissant du schéma de Crank nicolson peut importe le maillage considéré, on vérifie aisément que l'ordre observé numériquement est bien celui qui est démontré en théorie. Précisons enfin qu'en ne programmant que les termes non nuls de la matrice A utilisée dans les relations de récurrence, on observe un réel gain de temps d'exécution pour le schéma de Crank Nicolson.

6 Cas du Call européen

Le prix du call européen est solution de l'EDP ci-après :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - r s \frac{\partial v}{\partial s} + r v = 0, & t \in (0, T), s \in (S_{\min}, S_{\max}), \\ v(t, S_{\min}) = v_{\ell}(t) \equiv 0, & t \in (0, T), \\ v(t, S_{\max}) = v_r(t) \equiv S_{\max} - K e^{-r(T-t)}, & t \in (0, T), \\ v(0, s) = \phi(s) := \max(s - K, 0), & s \in (S_{\min}, S_{\max}). \end{cases}$$

On va implémenter et tester le schéma d'Euler implicite dans le cas du call européen. On peut voir que comme dans le cas du Put le schéma d'euler implicite est encore stable numériquement comme l'illustre les graphiques ci-dessous.

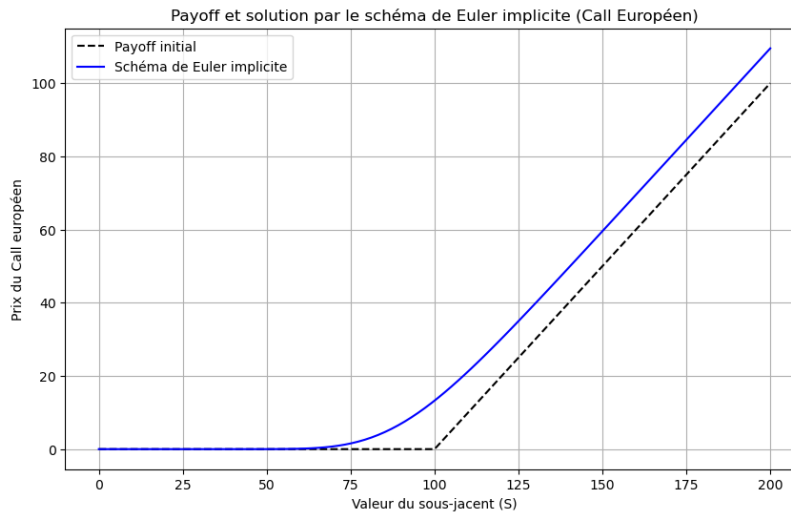


FIGURE 8 – Illustration du schéma pour $N = I = 100$

EULER IMPLICITE : CAS DU CALL EUROPEEN, fontsize=16

