Pricing d'options et stratégie de réplication dans le modèle de Black-Scholes-Merton et par la méthode de Monte-Carlo

Tatou Dekou Thibault,

Introduction

Ce projet porte sur la détermination du prix d'une option financière, ainsi que la stratégie de réplication appropriée, dans le modèle de Black-Scholes-Merton. Il sied de relever que lorsqu'on s'intéresse à un produit dérivé, être en mesure de lui donner un prix et de construire une stratégie de duplication d'un portefeuille constitué de ce produit, sont deux choses très importantes. En réalité, ces deux axes sont très utiles dans la gestion des risques. L'objectif de ce travail sera dans un premier temps de déterminer le prix d'une option financière en utilisant soit les formules du modèle de Black-Scholes-Merton, soit les simulations de Monte Carlo, puis en second lieu à préciser les stratégies de réplication de portefeuille.

1. Rappels sur le Pricing des options financières dans le modèle de Black-Scholes-Merton

Dans cette partie, on rappelle les éléments du modèle de Black-Scholes permettant d'évaluer le prix d'une option. Le cadre d'analyse et les hypothèses du modèle de Black-Scholes standard est le suivant : on considère un marché ouvert en continu, exempt de coûts de transaction et constitué de deux actifs de base (un actif risqué, qui est le sous-jacent et un actif sans risque, c'est-à-dire un contrat de prêt ou emprunt négocié à un taux continu constant noté r. On désigne par $S(t)$ ou plus simplement S_t, la valeur en date t du sous-jacent cotée sur le marché.

Le sous-jacent ne distribue aucun dividende et sa valeur initiale est connue en date 0. L'évolution du prix du sous-jacent à partir de la condition initiale, est régie par un mouvement brownien géométrique tel que traduit par l'équation ci-après :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma\sqrt{dt}Z = \mu dt + \sigma dW_t$$

Où Z suit une loi normale $N(0,1)$, W_t est un mouvement Brownien standard, μ et σ représentent respectivement la tendance et la volatilité du sous-jacent.

Les formules de Black Scholes Merton sont utilisées pour calculer le prix des options sur la base de certaines données, dont notamment :

- S_0 : le prix de l'actif sous-jacent à l'instant initial
- K : le strike ou prix d'exercice de l'option
- r : le taux d'intérêt sans risque
- T : la maturité de l'option
- σ : la volatilité du sous-jacent

Rappelons que la valeur d'une option s'exprime comme l'espérance actualisée de son payoff ; cette espérance étant calculée sous la probabilité dite « risque neutre ». Cela nous donne la formule :

$$P(t) = \mathrm{E}^{Q}[payoff \ \times \ e^{-rT}].$$

où Q est la probabilité risque-neutre et le payoff, une fonction du sous-jacent noté $f(S_T)$.

Pour un call (option d'achat qui donne le droit et non l'obligation à son détenteur d'acheter l'actif sous-jacent à la date de maturité dans le cas d'une option européenne à un prix fixe K), le payoff s'exprime $\boldsymbol{max}\ (\boldsymbol{S_T} - \boldsymbol{K}, \boldsymbol{0})$. Où S_T est le prix à maturité du sous-jacent.

Pour un put (option de vente qui donne le droit et non l'obligation à son détenteur de vendre l'actif sous-jacent à la date de maturité dans le cas d'une option européenne à un prix fixe K), le payoff s'exprime $\boldsymbol{max}\ (\boldsymbol{K} - \boldsymbol{S_T}, \boldsymbol{0})$.

Sous la mesure de probabilité Q, on peut remplacer μ par r. Dans les deux cas précédents, le modèle de Black Scholes permet alors de donner une formule explicite pour calculer le prix de ces options. Le prix d'un call est ainsi donné par :

$$C(t, S_t) = S_0 N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2).$$

Celui d'un put avec les mêmes caractéristiques, se détermine par la parité call-put comme suit :

$$P(t, S_t) = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-r(T-t)} N(-d_2).$$

- N représente ici la fonction de répartition de la normale centrée réduite.
- $d_1 = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \times \left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$.

Lorsque le payoff est différent de celui du call standard et du put standard, il devient difficile d'avoir une formule explicite grâce au modèle de Black-Scholes-Merton. En pratique-l'on recours aux simulations de Monte Carlo pour avoir une approximation du prix de l'option.

2. Principe de Pricing par simulation de Monte Carlo.

2.1. Valorisation d'une option par simulation de Monte Carlo.

On se restreint ici au cas des options européennes, qui sont les seules concernées par le modèle de Black Scholes standard. On souhaite évaluer le prix $O(0)$ d'une option européenne d'échéance T dont le payoff est $V(T, S_T)$. Il peut s'agir d'une option non standard (dans le cas contraire, les formules précédentes s'appliquent) dont le payoff peut prendre une forme complexe (mais connue), dont l'espérance ne s'exprime pas de façon analytique. Les simulations de Monte Carlo permettent d'évaluer simplement cette option en actualisant au taux sans risque la moyenne empirique du payoff résultant de simulations élaborées à l'aide d'une dynamique risque neutre. On procède de la manière suivante :

i. On simule M $(M > 1000)$ valeurs $S_i]_{i=1,\ldots,M}$ de S_T, déduites d'une dynamique risque-neutre, et de M tirages gaussiens U_i, par exemple à l'aide de l'équation :

$$S_i = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}U_i}$$

Rappelons que sous la probabilité risque-neutre, l'espérance de profit du taux de croissance du cours du sous-jacent est égal au taux d'intérêt r (différent de μ).

ii. On calcule les M valeurs $V(T, S_i)]_{i=1,\ldots,M}$ correspondantes du payoff.

iii. On calcule la moyenne arithmétique de ces M payoffs et on actualise le résultat sur une durée T au taux r pour obtenir la valeur $O(0)$ de l'option en date 0 :

$$O(0) = e^{-rT}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} V(T, S_i)$$

2.2.Evaluation des paramètres grecs d'une option par les simulations de Monte carlo

Supposons que le payoff $V(T, S_T)$, soit celui d'une option à évaluer. Il est possible, une fois estimée la valeur $O_1(0)$ de celle-ci, d'en calculer les paramètres grecs. Pour ce faire, on utilise une valeur légèrement différente pour le support (par exemple 101 au lieu de 100) si on veut obtenir le delta, ou pour paramètre comme la volatilité ou le taux d'intérêt, si on désire estimer une autre sensibilité (comme le Véga ou le rho). Une seconde simulation de Monte Carlo est alors effectuée avec cette nouvelle valeur, en maintenant identiques les paramètres de simulations. On obtient alors une seconde valeur $O_2(0)$. Le paramètre grec est alors calculé par la formule :

$$\frac{O_2(0) - O_1(0)}{\Delta S}$$

Où ΔS est la variation retenue du cours du sous-jacent ou du paramètre concerné.

3. Stratégie de réplication du portefeuille

3.1.Définition

On appelle stratégie de couverture ou de duplication, la prise de position unique en date 0, qui permet au vendeur de dupliquer le payoff de l'option à maturité, et ainsi d'honorer son contrat. On suppose qu'en date initial, le vendeur de l'option pour se couvrir, peut investir dans deux actifs de base : un actif risqué (le sous-jacent) et un actif sans risque. Notons $\Pi(t)$ la valeur du portefeuille à chaque instant, $V(t)$ le prix de l'option à chaque instant, $a(t)$, *et* $b(t)B(t)$ respectivement les quantités d'actifs risqués (achetées ou vendues) et le montant placé dans l'actif sans risque, de sorte que :

$$\forall t, \Pi(t) = a(t)S(t) + b(t)B(t)$$

3.2.Absence d'opportunité d'arbitrage et calcul des paramètres de hedging

On se place sous l'hypothèse de l'absence d'opportunité d'arbitrage afin de construire notre stratégie de réplication. Sous cette hypothèse, le portefeuille de couverture doit à tout instant avoir une valeur égale à celle de 'l'option vendue, cela est valable autant à la date 0 qu'à la maturité de l'option. Pour se couvrir face au risque associé au sous-jacent il faut construire un portefeuille produisant le même pay-off que notre option à maturité, on a donc $\Pi(T) = V(T)$. En absence d'arbitrage, il s'ensuit, que : $\forall t, \Pi(t) = V(t)$.

En clair, il s'agit de trouver une stratégie de réplication $(a(t), b(t))$ afin de construire le portefeuille de couverture $\Pi(t) = V(t) = a(t)S(t) + b(t)B(t)$. Dans le modèle de Black-Scholes, l'évolution du sous-jacent est régie par l'équation suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma\sqrt{dt}Z = \mu dt + \sigma dW_t$$

Ainsi, le sous-jacent, évolue selon un processus d'Îto. On peut appliquer le lemme d'Îto : en notant $V(t, S_t)$. la valeur de l'option, on a

$$dV = (\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt + (\sigma S\frac{\partial V}{\partial S})dW.(*)$$

Or, par construction de notre stratégie de réplication, on a *dV* = *adS* + *bdB* (en écrivant de façon implicite les dépendances en t). Comme B évolue au taux sans risque r, on a par ailleurs *dB* = *rBdt*. Ainsi,

$$dV = (\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt + (\sigma S\frac{\partial V}{\partial S})dW = (a\mu S + brB)dt + a\sigma SdW$$

On obtient alors, en égalisant les termes en *dW* : : $a = \frac{\partial V}{\partial S} = \Delta\ (delta)$.

Dans le cas où on a explicitement une valorisation de V par la formule de Black-Scholes, il est facile de calculer *le delta* qui pour un call européen vaut : $N(d_1)$. Dans tous les cas, on peut en déduire que le montant investi dans l'actif sans risque vaut : *bB* = *V* – *aS*.

4. Architecture générale du programme

Pour mener à bien ce projet, les principes de la Programmation orientée objet en C++ ont été utilisés, notamment l'encapsulation, l'héritage et le polymorphisme. A présent décrivons la logique des classes que nous avons conçu :

- La première classe est la classe Black_Scholes : c'est dans cette classe qu'est conçu l'objet qui permet de recueillir les paramètres utilisés par les formules de Black-Scholes. Il permet notamment de recueillir et manipuler les caractéristiques du sous-jacent (son prix initial, sa volatilité, sa tendance ici égale au taux sans risque).
- La deuxième classe qui a été créée est la classe Option : elle permet de contenir les différentes options caractérisées par leur maturité, leur prix d'exercice et leur payoff. Pour pouvoir évaluer les options européennes, deux classes ont été dérivée de celle-ci :
    - La classe des calls européens : qui permet d'évaluer aussi bien le prix du call par les formules standard de Black Scholes que par les simulations de Monte Carlo. Les rations de couverture (delta) sont aussi calculées par ces deux approches pour ce type d'option.
    - La classe des Puts européens : qui permet d'évaluer aussi bien le prix du Put par les formules standard de Black Scholes que par les simulations de Monte Carlo. Les fonctions pour le prix et la stratégie de réplication sont analogues à celle de la classe des calls européens
- La dernière classe est la classe Montecarlo : c'est elle qui permet le pricing par la méthode de Monte Carlo. Elle va donc utiliser des objets des classes Options (ou de ses classes dérivées) et Black_Scholes. Elle permet également le calcul du ratio de couverture pour une option exercée à maturité par les simulations de Monte Carlo.

En clair, notre code demande à l'utilisateur les caractéristiques de son option, puis l'interroge pour savoir s'il souhaite évaluer l'option ou la répliquer. En fonction de sa réponse et quel que soit le type de l'option renseigné par l'utilisateur, ce dernier se voit proposé deux alternatives : soit un résultat avec des formules standard, soit un résultat après simulations.

Conclusion

Le but de ce travail était de concevoir une mini librairie C++ permettant de calculer le prix d'une option financière par la méthode de Black-Scholes et Monte Carlo et de construire une stratégie de réplication. Nous avons réalisé ce programme avec des exemples d'options européennes essentiellement. L'architecture que nous avons proposée permet de faire le pricing aussi bien par les formules explicites de Black Scholes Merton que par les simulations de Monte Carlo. Elle est assez évolutive et très facilement adaptable à la détermination des prix de diverses options.

Bibliographie

[1]. Cours de C++ Ensae, Mme Roxana Dumitrescu, 2021

[2]. Finance de Marché, Roland Portait-Patrice Poncet ,2014.

[3]. Cours de Financial Instruments Ensae, Fanny Vidal, 2023.