TP4 AI52 : Algorithme génétique quantique

Introduction

Les algorithmes génétiques quantiques ont été introduits en 1996 par A. Narayanan and M. Moore. Il s'agit plutôt d'une métaheuristique sur ordinateurs classiques d'inspiration quantique. Dans cette métaheuristique, les individus de la population sont codés sous la forme de Qubits. Ils évoluent à l'aide de rotation. La description réalisée par la suite simplifie le concept afin de permettre la réalisation du TP sans notions particulières dans le domaine du calcul quantique.

Concepts de base simplifiés

Dans la science de l'information quantique, l'unité d'information de base est le Qubit, qui est une quantification du système à deux états. Les deux états sont l'état "0" et l'état "1". En utilisant les symboles du vecteur d'état de Dirac les deux états peuvent être exprimés comme suit :

$$|0> = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ et } |1> = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad (1)$$

Un Qubit peut être dans l'état "1", dans l'état "0" ou dans une superposition des deux :

$$|\psi> = \alpha|0> + \beta|1> \quad (2)$$

Outre les états de base "0" et "1", la probabilité des états de base donne lieu à la formation d'états quantiques mixtes. α et β sont des nombres complexes qui attribuent les amplitudes de probabilité de l'atome quantique pour trouver un Qubit dans les états "0" et "1", respectivement. $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ sont les probabilités que le Qubit soit trouvé dans l'état "0" et que le Qubit soit trouvé dans l'état "1". La normalisation de l'état à l'unité est garantie grâce à l'équation suivante :

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3)$$

En informatique quantique, les amplitudes de probabilité sont utilisées pour établir une relation entre les Qubits et les résultats des observations du système quantique. Un état quantique ψ peut être représenté géométriquement comme un point sur la surface d'une sphère unitaire dans ce qui est connu sous le nom de sphère de Bloch. De nombreuses opérations couramment utilisées dans le traitement de l'information quantique sur les Qubits peuvent être clairement décrites à l'aide de la sphère de Bloch. Dans la suite nous simplifions cette représentation de la manière suivante :

$$|\psi> = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times |0> + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times |1> \quad (4)$$

Lorsqu'on mesure le Qubit $|\psi>$, il sera soit égal à "0" soit égal à "1". La probabilité pour qu'il soit égal à "0" est égale à $\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2$, et pour qu'il soit égale à "1", la probabilité est égale à $\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2$.

Algorithme génétique quantique

Le QGA, comme d'autres algorithmes évolutifs, recherche la solution optimale en mettant à jour le chromosome quantique de la génération actuelle. Le QGA, cependant, maintient une population Q de chromosomes quantiques, $Q(t) = \{q_t^1, \dots, q_t^n\}$ à la génération t, où n est la taille de la population et q_t^j est le $j^{\text{ème}}$ chromosome quantique à la $t^{\text{ème}}$ génération, défini comme suit :

$$q_t^j = \begin{bmatrix}\alpha_{j,1} & \alpha_{j,2} & \dots & \alpha_{j,m}\\ \beta_{j,1} & \beta_{j,2} & \dots & \beta_{j,m}\end{bmatrix} \quad (5)$$

où m est le nombre de Qbits, c'est-à-dire la longueur de la chaîne du chromosome quantique et $j = \{1, \dots, n\}$. La procédure QGA est décrite comme suit :

- Initialiser $Q(0)$: Dans cette étape, tous les $\alpha_{j,i}$ et $\beta_{j,1}$ où $i = \{1, \dots, m\}$ de tous les q_0^j sont initialisés avec $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Cela signifie qu'un chromosome quantique, q_0^j, représente la superposition linéaire de tous les états possibles avec la même probabilité.
- Créer $P(0)$: en observant $Q(0)$: La population quantique $Q(0)$ produit une population de solutions binaires $P(0)$, où $P(0) = \{p_0^1, \dots, p_0^n\}$ à la génération $t = 0$. Une solution binaire p_0^j , $j = \{1, \dots, n\}$ est une chaîne binaire de longueur m, qui vaut 0 ou 1, selon la probabilité $|\alpha_{j,i}|^2$ou $|\beta_{j,i}|^2$, respectivement.
- Évaluer $P(0)$: Chaque solution binaire p_0^j subit une évaluation pour déterminer son niveau d'aptitude.
- Stocker la meilleure solution et l'aptitude correspondante de $P(0)$ dans $B(0)$
- Commencer les itérations suivantes jusqu'à la satisfaction d'un critère d'arrêt :
    - Mettre à jour de $Q(t)$ par des portes de rotation : Dans l'AGQ, les chromosomes quantiques doivent être mis à jour de génération en génération afin d'évoluer vers l'individu optimal. Cette mise à jour est réalisée en appliquant une porte quantique. Contrairement à la plupart des portes logiques classiques, la porte quantique est réversible et peut être exprimée sous la forme d'une matrice unitaire 2x2 ou 4x4. En mécanique quantique, les portes quantiques courantes comprennent la porte de Hadamard pour créer des états de superposition, la porte de rotation, la porte NOT pour échapper aux optima locaux et la porte NOT contrôlée pour les problèmes avec des dépendances de Qubits, tels que le problème du sac à dos. La porte de rotation, exprimée sous la forme d'une matrice 2x2 $U(\gamma)$, est la porte quantique la plus couramment utilisée dans l'AGQ :

$$U(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}, \tag{6}$$

      où γ est l'angle de rotation

    - Créer $P(t)$ en observant $Q(t)$ et évaluer $P(t)$: Sur la base de l'observation de $Q(t)$, les solutions binaires $P(t)$ sont formées et chaque solution binaire est évaluée en fonction de sa valeur d'aptitude.
    - Stocker la meilleure solution et l'aptitude correspondante de $P(t)$ dans $B(t)$
- Restituer la meilleure solution trouvée.

Travail à réaliser

Dans ce TP, nous allons considérer le problème du sac à dos (objets, poids, valeurs), comme traité dans le cadre du TP sur l'algorithme génétique. L'objectif est de comparer les deux types d'algorithmes, à savoir classique et quantique, sur cinq instances du problème du sac à dos. Le choix des cinq instances doit couvrir les propriétés suivantes :

- La solution optimale garde les objets avec les valeurs les plus importantes
- La solution optimale garde les objets avec les poids les moins importants
- Le poids total des objets dépasse au moins 3 fois la capacité du sac.

Les comparaisons s'effectuerons selon les critères suivants :

- Qualité de la solution
- Temps de calcul

Pour ce faire il faut faire varier le nombre de génération.

Dans la description de l'algorithme génétique quantique, il manquait la détermination de l'angle de rotation. Nous choisissons la stratégie donnée par Kuk-Hyun Han et Jong-Hwan Kim en 2000. Elle est définie par le tableau suivant :

Tableau 1. Politique de rotation

$x_{j,i}$	b_i	$f(p_t^j) \geq f(b_t)$	$\Delta\gamma$	$s(\alpha_{j,i} \cdot \beta_{j,i})$			
				$\alpha_{j,i} \cdot \beta_{j,i} < 0$	$\alpha_{j,i} \cdot \beta_{j,i} > 0$	$\alpha_{j,i} = 0$	$\beta_{j,i} = 0$
0	0	Faux	0	0	0	0	0
0	0	Vrai	0	0	0	0	0
0	1	Faux	0	0	0	0	0
0	1	Vrai	0.05π	-1	+1	∓ 1	0
1	0	Faux	0.01π	-1	+1	∓ 1	0
1	0	Vrai	0.025π	+1	-1	0	∓ 1
1	1	Faux	0.05π	+1	-1	0	∓ 1
1	1	Vrai	0.025π	+1	-1	0	∓ 1

Dans cette Table de calcul de $\Delta\gamma$, nous avons $f(.)$ qui représente la fitness, $s(.)$ ele signe, et b_i , $x_{j,i}$ sont les i -èmes bits de la meilleure solution b_t et de la solution binaire p_t^j, respectivement.