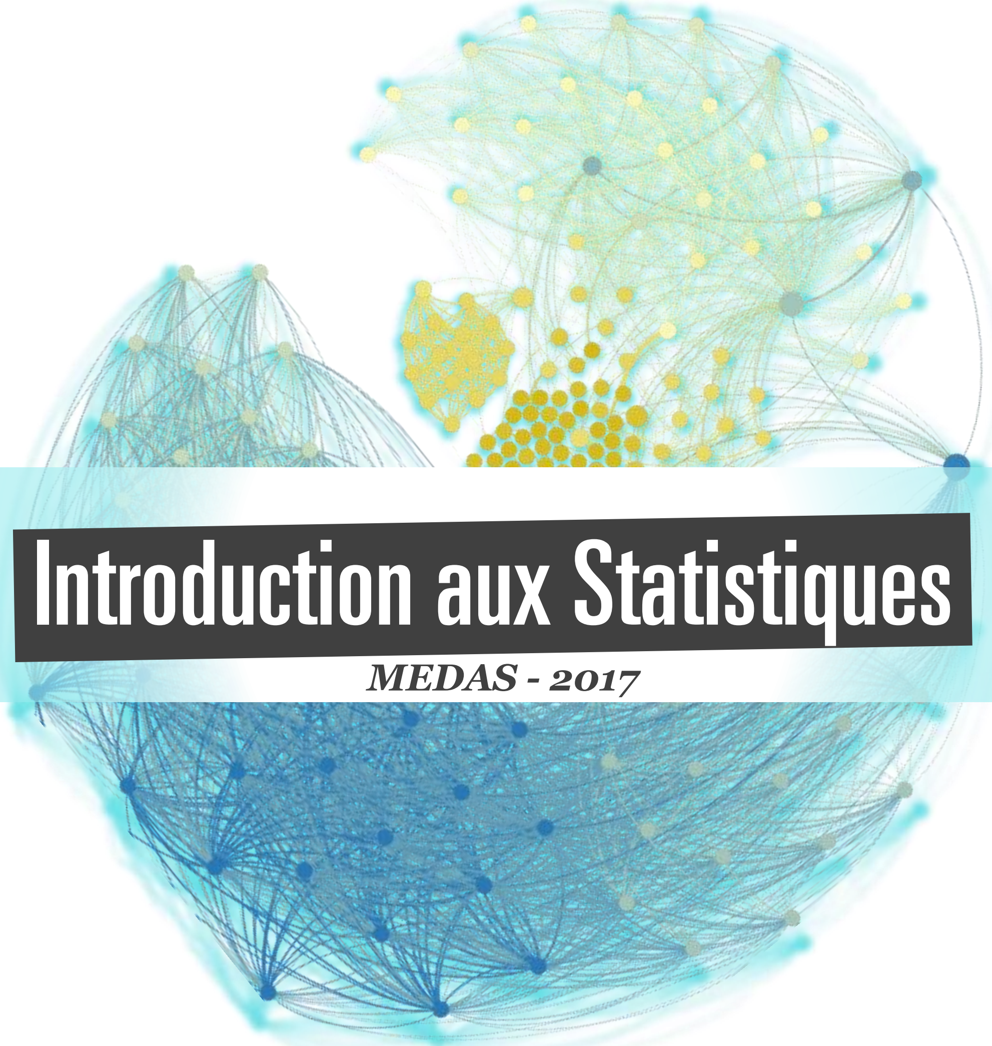


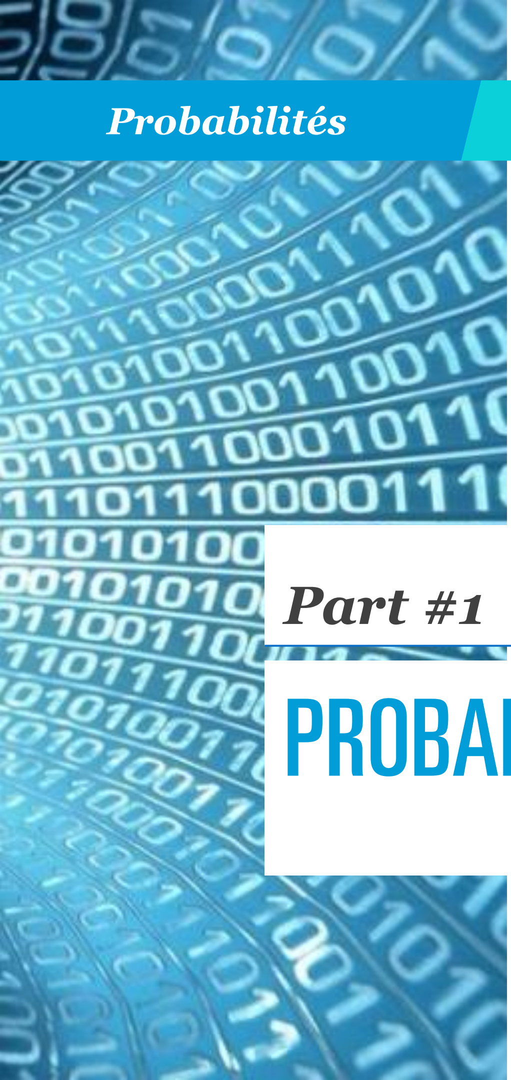
Introduction aux Statistiques

MEDAS - 2017

Thibault ALLART

0 TOUR D'HORIZON

- Rappels (ou pas) sur les probabilités
- Statistiques descriptives
- Inférence statistique : intervalles de confiance, TCL, …
- Tests statistiques
- Régression et classification
- Programmation R



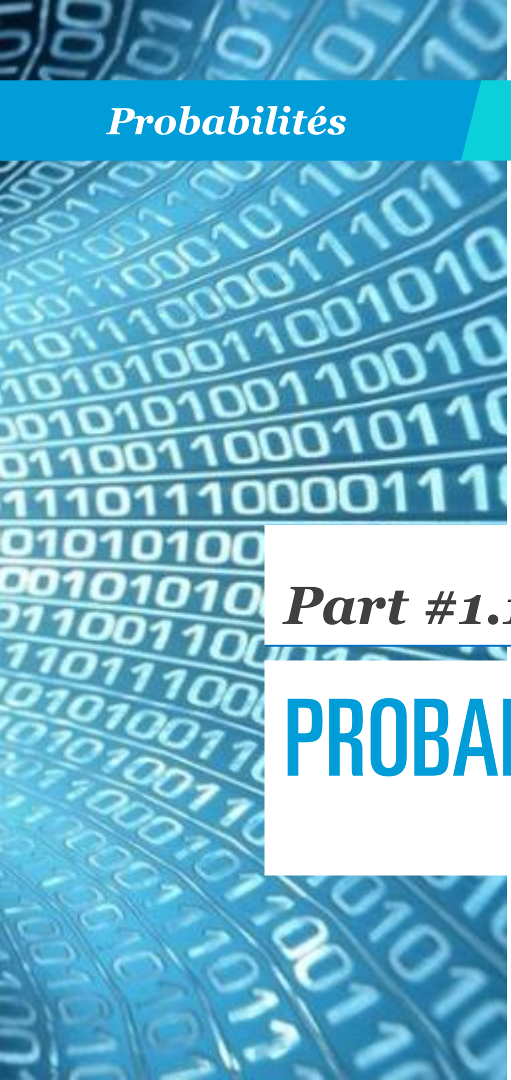
Part #1

PROBABILITES

I_1 QUESTION

- Soit un générateur de nombres aléatoires à valeur {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  Quelles sont les chances que le résultat soit 6 ?

Aléatoire ≠ Équiprobable



Part #1.1

PROBABILITES : DEFINITIONS

I_2 PROBABILITÉ

- Soit A un évènement, alors

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

Rappel : $60\% = \frac{60}{100} = 0.60$

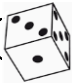
I_3 UNIVERS DES POSSIBLES

- On note souvent ω l'ensemble de tous les évènements et l'on a

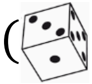
$$P(\omega) = 1$$

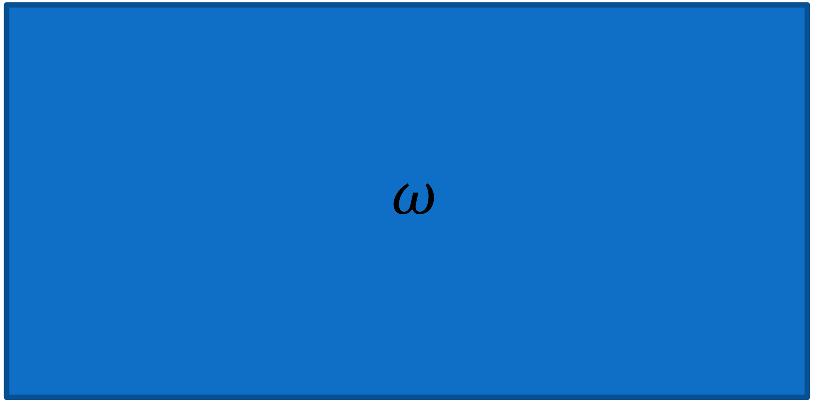
Sur un dès à 6 faces

$$\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$P(\omega) = P($  $= 1) +$

$\dots$

$P($  $= 6) \quad = 1$

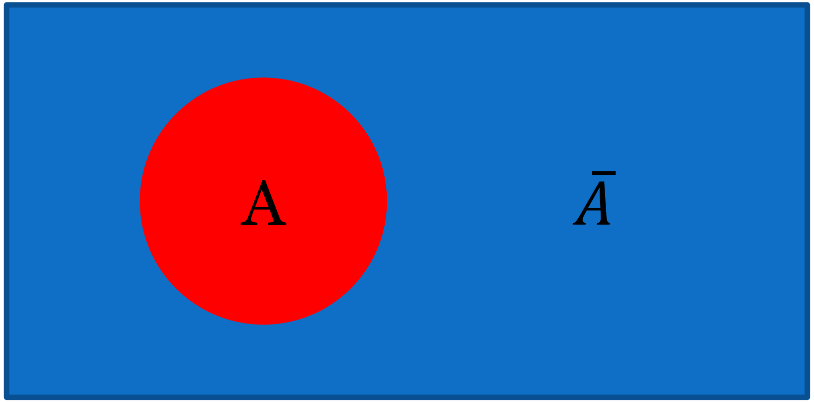


I_4 COMPLÉMENTAIRE

- Soit A un évènement, on note $\bar{A}$ son complémentaire

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

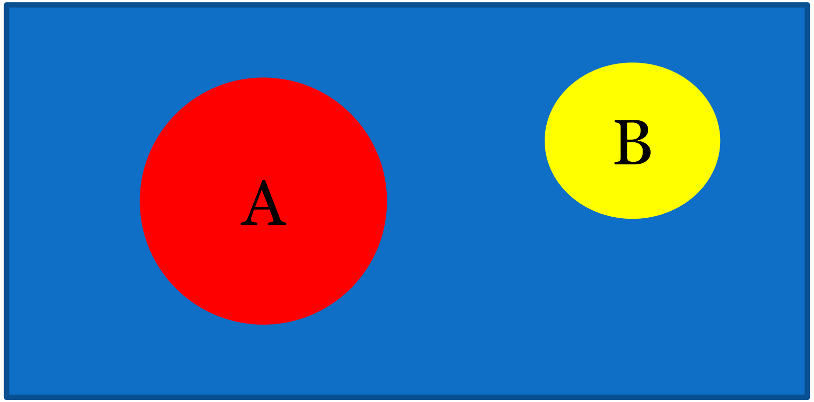
Exemple :
A : le résultat du lancer est pair.
$\bar{A}$: le résultat du lancer est impair.



I_2 SOMME D'ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

- Soit A et B deux évènements indépendant, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



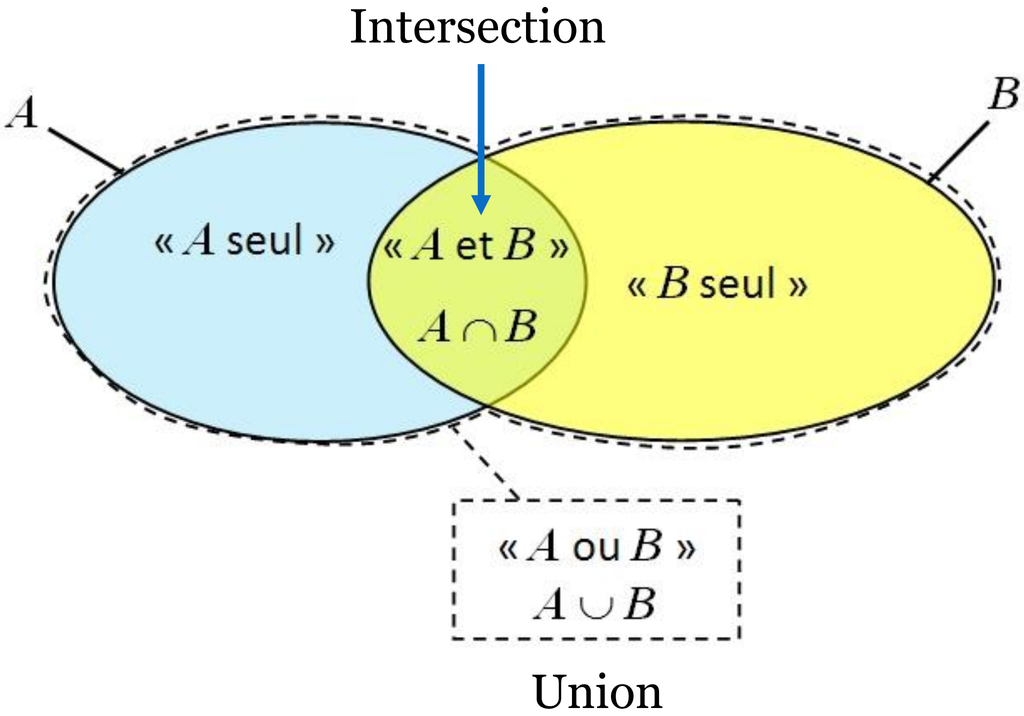
I_5 UNION ET INTERSECTION

Exemple :

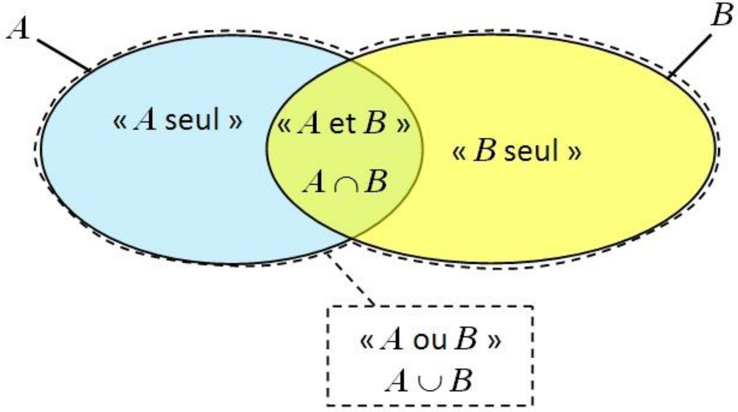
$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{2,4,6\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$



I_5 PROBABILITÉS TOTALES



Formule des probabilités totales :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

I_5 PROBABILITÉS TOTALES

Dans un jeu de 32 carte, quelle est la probabilité de tirer un roi ou un cœur ?

+ La probabilité de tirer un roi : 4/32
+ La probabilité de tirer un cœur : ¼=8/32
- La probabilité de tirer le roi de cœur : 1/32

Résultat : 11/32

I_5 PROBABILITÉS TOTALES

1) Calculez $P(\overline{A \cup B})$

2) Calculez $P(\overline{A \cap B})$

Faire un dessin

Réponses :
1) $\bar{A} \cap \bar{B}$
2) $\bar{A} \cup \bar{B}$

To do : Exercice 1

I_{13} PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

La probabilité conditionnelle de A sachant B est notée :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

To do : exercice 2

I_5 INDÉPENDANCE

Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A|B) = P(A)$$

Ce qui est équivalent à

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

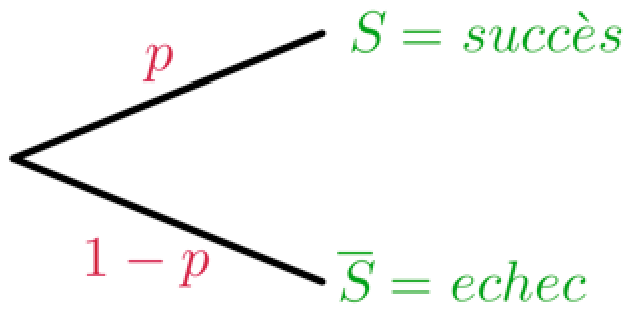
Part #1.2

PROBABILITES : LOIS ET CALCUL

I_6 BERNOULLI

Si je lance une pièce, quelles sont mes chances qu'elle tombe sur pile?

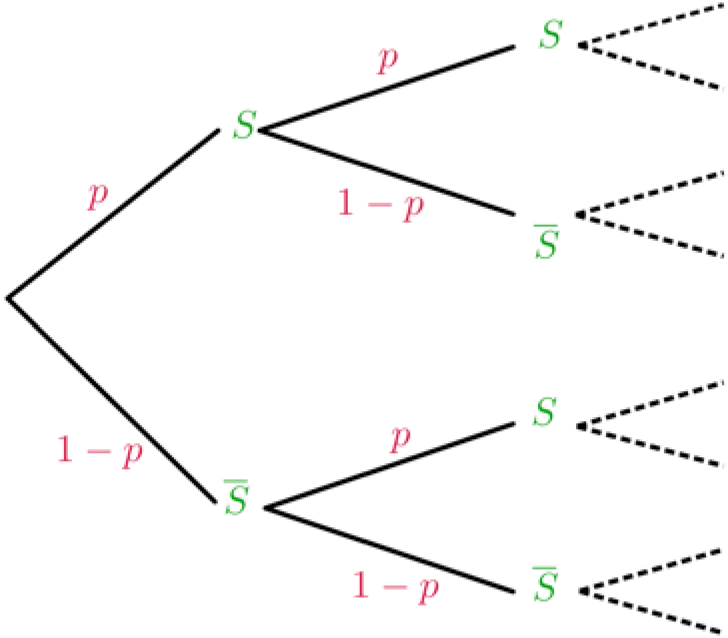
$$\mathbb{P}(X=1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = p.$$



I_7 ARBRE DE BERNOULLI

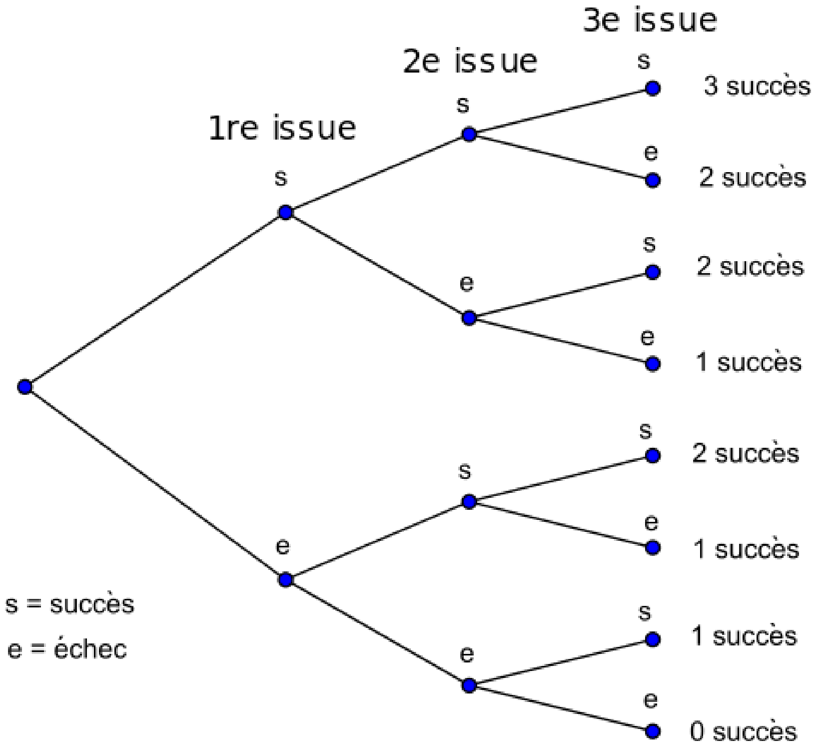
Quelles sont les chances qu'elle tombe 2 fois sur pile?

D'avoir une fois pile et une fois face?



I_8 LOI BINOMIALE

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$



To do : exercice 3

I_9 LOTO

Quelle est la probabilité de gagner à l'Euro Millions?

- 5 numéros entre [1,50]
- 2 numéros entre [1,11]

To do : exercice 2

$$\binom{50}{5} * \binom{11}{2} = \frac{50 * 49 * 48 * 47 * 46}{5 * 4 * 3 * 2 * 1} * \frac{11 * 10}{2 * 1}$$
$$= 116\,531\,800$$

Sachant que j'ai joué 100 fois au loto par le passé, quelles sont mes chances aujourd'hui?

To do : Ex 4

I_{14} EXERCICE TYPE BAC

To do : Ex 5

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- Gn l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie »
- pn la probabilité de l'évènement Gn

On a donc p1 = 0, 1.

1. Montrer que p2 = 0, 62. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

Correction : Exercices\Correction proba conditionnelles.docx

I_{17}

ESPÉRANCE D'UNE LOI DISCRÈTE

Soit une variable aléatoire X prenant pour valeur $x_1, \ldots, x_n$ avec probabilité $p_1, \ldots, p_n$, alors l'espérance de X est définie comme

$$\mathbb{E}[x] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

$$\mathbb{E}[x] = \sum_i x_i p_i$$

Calculer l'espérance d'un lancer de dé.

Calculer l'espérance de la somme de 2 lancers de dés.

To do ex 6

I_{18} ESPERANCE D'UNE LOI DISCRETE

$$\mathbb{E}[x] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

Calculer l'espérance d'un lancer de dé.

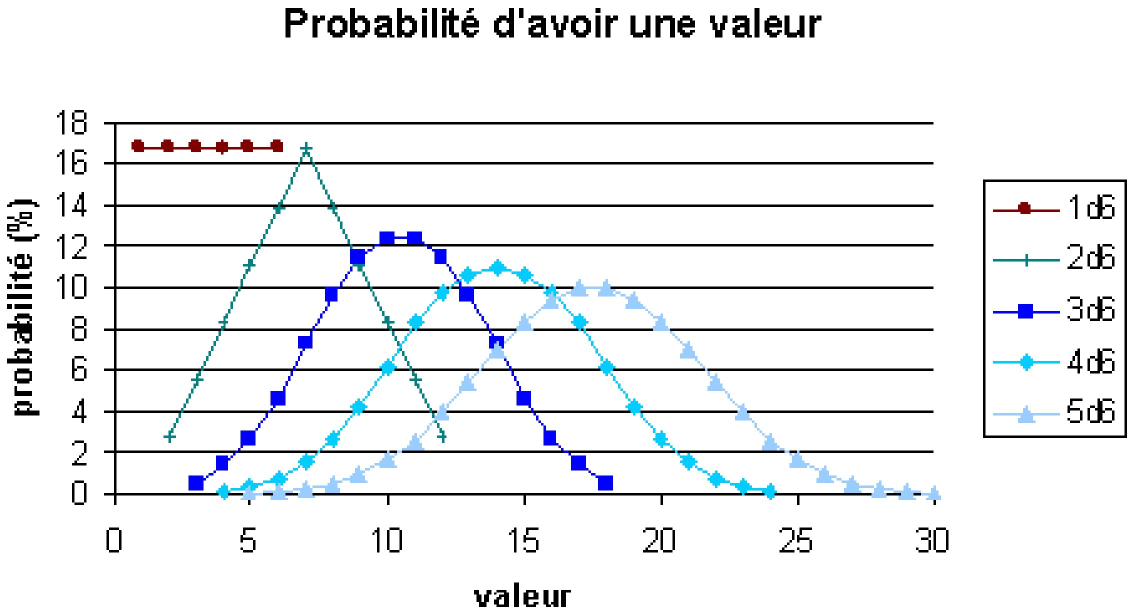
$$m = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

I_{19} ESPERANCE D'UNE LOI DISCRETE

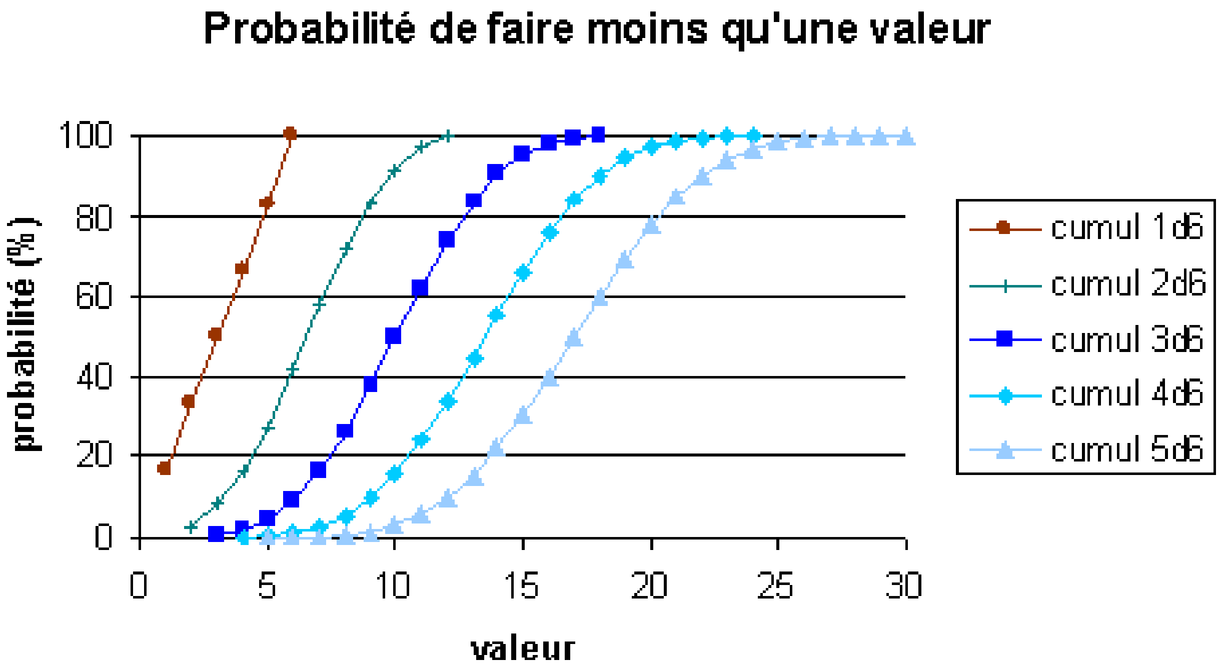
Calculer l'espérance de la somme de 2 lancers de dés.

Somme des dés	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

I_{20} ESPERANCE D'UNE LOI DISCRETE



I_{21} ESPERANCE D'UNE LOI DISCRETE



I_{22} ESPERANCE D'UNE LOI DISCRETE

Distribution de 7 dés de jeux de rôle

- Calculez l'espérance d'un lancer de dés
- Calculez les probabilités associées au produit de 2 lancers de dés.

To do ex 7

I_{23}

VARIANCE D'UNE LOI DISCRETE

Soit une variable aléatoire X prenant pour valeur $x_1, \ldots, x_n$ avec probabilité $p_1, \ldots, p_n$, alors la variance de X est définie comme

$$Var[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathbb{E}[x])^2$$

I_{24} EXPECTED VALUE

- Quelle est l'attaque offrant les meilleurs dégâts au long terme?
- Si l'ennemi a 15HP, cette attaque est elle toujours la meilleure?

Attack Name	Chance of hitting	Damage
Wind	100%	4
Fireball	80%	5
Lighting bolt	20%	40

Code : Exercices\Expected value.xlsx

To do : Ex 8

I_{12} LEARNING R

Pour les lois plus complexes, nous allons procéder par simulations.

R est un langage largement utilisé par la communauté statistique, voici un tutoriel pour en apprendre les bases.

To do : http://tryr.codeschool.com/

or

https://www.datacamp.com

I 16 COLLECTIONNITE

- Soit un jeu de carte dans lequel il est possible de collectionner N cartes différentes. Sachant que l'on possède déjà K cartes différentes, quelle est la probabilité d'en obtenir une nouvelle que l'on ne possède pas déjà?

Code R :
[Exercices\collectionneur.R]()

To do : Ex 9