

Exercice statistiques Bayésiennes : Région de crédibilité et fonction de coût (Durée : 50min)¹

1. On suppose que

$$X_i \mid m \sim_{i.i.d} \mathcal{N}(m, 1).$$

Montrer que le prior

$$m \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{\tau}\right),$$

est conjugué pour la loi des X_i .

2. Rappeler l'expression, en fonction des observations X et des quantiles d'une loi normale, l'intervalle de confiance fréquentiste au niveau $\alpha = 0.05$
3. Donner, en fonction des observations X et des quantiles d'une loi normale, la région *HPD* au niveau $\alpha = 0.05$.
4. On considère la fonction de perte

$$L(m, \delta) = (m - \delta) \mathbb{1}_{m > \delta} + 2(\delta - m) \mathbb{1}_{\delta > m}.$$

Donner la décision bayésienne qui minimise le risque a posteriori.

5. Donner la loi prédictive.
6. On considère la fonction de perte prédictive

$$Lp(x_{n+1}, \delta) = (x_{n+1} - \delta) \mathbb{1}_{x_{n+1} > \delta} + 2(\delta - x_{n+1}) \mathbb{1}_{\delta > x_{n+1}}.$$

Donner la décision bayésienne qui minimise le risque a posteriori.

7. On veut tester $m > 0$. Écrire la fonction de perte, la décision Bayésienne associée, calculer la facteur de Bayes.

¹Reprend les exos 7 et 9 des slides