# TD : Bases de probabilités (suite)

**Exercice 1** ***Inégalité de Markov***
*Soit $X$ une variable aléatoire positive, telle que $\mathbb{E}[X] < +\infty$ et $a > 0$. On note $Y_1 = X\mathbb{1}_{X>a}$ et $Y_2 = X\mathbb{1}_{X\leq a}$.*

1. *Exprimer $X$ en fonction de $Y_1$ et $Y_2$.*
2. *Montrer que $\mathbb{E}[X] \geq a\mathbb{P}(X > a)$.*

**Exercice 2** ***Inégalité Bienaymé-Tchébychev***
*Soit $X$ une variable aléatoire de variance finie, et $a > 0$. Montrer, en utilisant l'inégalité précédente, que*

$$\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}[X]| > a\Big) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

**Exercice 3** ***Loi faible des grands nombres***
*Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoire i.i.d, d'espérance $m$ et de variance $\sigma^2$. Montrer, en utilisant l'inégalité précédente, la loi faible des grands nombres :*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m.$$

**Exercice 4** ***Décomposition biais/variance***
*Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de densité $f_\theta$, et $\hat{T}_n$ un estimateur de $\theta$. Montrer que*

$$\mathbb{E}[(\hat{T}_n - \theta)^2] = \mathrm{Var}(\hat{T}_n) + b_n^2,$$

*où $b_n$ désigne le biais de l'estimateur $\hat{T}_n$.*
*En déduire qu'un estimateur asymptotiquement sans biais qui vérifie $\mathrm{Var}(\hat{T}_n) \to 0$ est consistant.*

**Exercice 5** ***Fonction de répartition***
*Soient $U_1, U_2$ deux variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0, 1]$.*
*Donner les fonctions de répartition des variables aléatoires suivantes :*

1. $\min(U_1, U_2)$
2. $U_1^2$

**Exercice 6** ***Lois normales***
*Soit $X_1 \sim \mathcal{N}(7, 4)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(1, 4)$ indépendantes.*

1. *Quelle est la loi de $X_1 + X_2$ ?*
2. *Quelle est la loi de $\frac{X_1 - 2X_2}{5}$ ?*
3. *Centrer et réduire $X_2$.*

**Exercice 7** ***Indépendance et corrélation***
*On rappelle que la covariance entre deux variables aléatoires peut être calculée*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

*On définit sur l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.*

- *Une probabilité $\mathbb{P}$ définie par*

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{4}.$$

- *Une variable aléatoire* $X_1$ *définie par*

$$X_1(1) = X_1(2) = -1; X_1(3) = X_1(4) = 1.$$

- *Une variable aléatoire* $X_2$ *définie par*

$$X_2(1) = -2; X_2(2) = 2; X_2(3) = -1; X_2(4) = 1.$$

**1.** *Calculer* $\mathbb{P}(\{1,2,3\})$.
**2.** *Quelle est la loi de* $Z = \frac{X_1+1}{2}$ *?*
**3.** *Calculer* $\mathbb{P}(X_1 = -1)$, $\mathbb{P}(X_2 = 2)$,$\mathbb{P}(|X_2| = 2)$, $\mathbb{P}(X_1 = -1 \text{ et } |X_2| = 2)$ .
**4.** $X_1$ *et* $X_2$ *sont-elles indépendantes ? Pourquoi ?*
**5.** *Calculer* $\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2]$, *et* $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

**Exercice 8** ***Estimateur de la variance***
*Soit* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. i.i.d. d'espérance* $m$ *et de variance* $\sigma^2$.
*On définit la variance empirique par*

$$\hat{T}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2.$$

1. *Montrer que* $\hat{T}_n^2$ *est un estimateur biaisé de la variance* $\sigma^2$. *Est-il asymptotiquement sans biais ?*

2. *Trouver* $a$ *tel que* $\hat{S}_n^2 = a\hat{T}_n^2$ *soit un estimateur sans biais de la variance.*