TD 2 : Bases de probabilités

Exercice 1 ***Modélisation***
On tire 100 numéros au hasard uniformément parmi les 40000 numéros d'étudiants inscrits à Lyon 1 en septembre 2016. On demande à cet étudiant s'il est fumeur ou non. Explicitez l'expérience aléatoire, les variables aléatoires considérées, et donner la loi de la variable observée $X_1, \cdots, X_{100}$ (fumeur ou non).

Exercice 2 ***Espérance des lois classiques***
Calculer les espérances des variables aléatoires de loi suivante :

- *Bernoulli de paramètre p*
- *Binomiale de paramètre N, p*
- *Poisson de paramètre λ*
- *Uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$*
- *Géométrique de paramètre p*
- *Exponentielle de paramètre λ*
- *Normale de paramètre m, σ^2*
- *Uniforme continue sur $[a, b]$*

Exercice 3 ***Calculs d'espérance, transfert***

1. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi donnée par*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{C}{k} \mathbb{1}_{1 \leq k \leq 6}.$$

   - *Quel est l'ensemble image de X ?*
   - *Comment calculer C ?*
   - *Calculer $\mathbb{E}[X]$*
   - *Calculer $\mathbb{E}[X^2]$.*
   - *Représenter $F_X(t)$*

2. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ de loi densité donnée par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{C}{x} \mathbb{1}_{1 \leq x \leq 6}.$$

   - *Quel est l'ensemble image de X ?*
   - *Comment calculer C ?*
   - *Calculer $\mathbb{E}[X]$*
   - *Calculer $\mathbb{E}[X^2]$.*
   - *Calculer $F_X(t)$.*

Exercice 4 ***Variance des lois classiques***
Calculer les variances des variables aléatoires de loi suivante :

- *Bernoulli de paramètre p*
- *Binomiale de paramètre N, p*

- *Poisson de paramètre* λ
- *Géométrique de paramètre* p
- *Exponentielle de paramètre* λ
- *Normale de paramètre* m, σ^2
- *Uniforme continue sur* $[a, b]$

Exercice 5 ***Calcul des moments***
Soit X *une variable aléatoire réelle, de densité définie par*

$$f(x) = Cx^2 \mathbb{1}_{x\in]0,1[}.$$

1. *Calculer l'espérance et la variance de* X.
2. *Calculer le* k^{ieme} *moment de* X.
3. *Calculer la fonction de répartition de* X.
4. *Calculer* $\mathbb{E}[\frac{1}{X^2}]$.

Exercice 6 ***Autour de la fonction de répartition***
Soit X_1, X_2 *deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre* λ.

1. *Calculer la fonction de répartition de* X_1.
2. *Calculer* $\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > t)$. *En déduire la loi de* $Y = \min(X_1, X_2)$.
3. *Calculer* $\mathbb{P}(\exp(-\lambda X_1) < t)$. *En déduire la loi de* $Z = \exp(-\lambda X_1)$.

Exercice 7 ***Espace de probabilité et variables aléatoires***
On définit l'espace de probabilité suivant :

- $\Omega = \{1, \cdots, 36\}$
- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) = \frac{\sharp A}{\sharp \Omega}$

1. *On définit la variable aléatoire* X_1 *par* $\forall \omega \in \Omega, X_1(\omega) = \omega$. *Décrire la variable aléatoire* X_1.
2. *Définir sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *une variable aléatoire* X_2 *de loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{9}$.

Exercice 8 ***Conditionnement discret***
Soit A *et* B *deux évenements. Calculer* $\mathbb{P}(A|B)$ *en fonction de* $\mathbb{P}(B^C|A), \mathbb{P}(B|A^C)$ *et de* $\mathbb{P}(A)$. *Une maladie rare touche une personne sur* 100000. *Il existe un examen pour la détecter, ayant une fiabilité de* 99.9% *(i.e. un patient sur* 1000 *non malade sera déclaré malade, et de même, pour* 1000 *patients malades, l'examen détectera la maladie chez* 999 *de ces patients).*
Quelle est la probabilité d'être malade si l'examen est positif ?

Exercice 9 ***Espérance et indépendance de variables aléatoires***
Soient X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives* $\mathcal{P}(\lambda)$ *et* $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. *Que vaut* $\mathbb{E}[XY(X-1)]$ *?*
2. *Calculer* $\mathbb{E}[2^X \exp(-2Y)]$.
3. *Calculer* $\mathrm{Var}(2X - Y)$.

Exercice 10 ***Fonctions génératrices*** *Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes :*

1. *Bernoulli de paramètre p.*
2. *Binomiale de paramètres N, p.*
3. *Géométrique de paramètre p.*
4. *Poisson de paramètre λ.*

Exercice 11 ***Convergence de variables aléatoires***
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\log(X_i)$ soit de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On définit $Y_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i}$.

1. *Calculer la variance de $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(X_i)$.*
2. *En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $\mathbb{P}(|Z_n - m| > t)$.*
3. *En déduire la limite en probabilité de Z_n.*
4. *Majorer $\mathbb{P}\Big(Y_n > \exp(t+m) \cup Y_n < \exp(m-t)\Big)$.*
5. *En déduire la limite en probabilité de Y_n.*
6. *Trouver la limite presque sûre de Y_n ?*
7. *Quelle est la loi de $\sqrt{n}(Z_n - m)$?*
8. *En utilisant la table des variables Gaussiennes, calculer $\mathbb{P}(|Z_{100} - m| > 0.196)$ (on prendra ici $\sigma^2 = 1$).*
9. *Si maintenant les $\log(X_i)$ sont de lois exponentielles de paramètre $\frac{1}{m}$, vers quoi converge en loi $\sqrt{n}(Z_n - m)$?*