L2 MASS Université Lyon 1, Probabilités-statistique 2
Année Universitaire 2020 – 2021

Correction TD 2

Exercice 1 :
On va noter E l'esemble des numéros des 40000 étudiant·e·s inscrit·e·s, et on pose $\Omega = E^{100}$. L'univers Ω correspond donc à l'ensemble des listes de 100 numéros d'étudiant·e·s inscrit·e·s. Au passage, cela signifie qu'il peut y avoir 2 fois le même numéro, donc que l'on cherche à modéliser un tirage *avec remise*.
Il reste à définir $\mathbb{P}$. Comme on veut que chaque tirage soit équiprobable, et qu'il y a 40000^{100} tirages possibles (avec remise), il suffit de définir :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{40000^{100}}.$$

On note ensuite, our un numéro d'étudiant i, b_i la variable qui vaut 1 si l'étudiant·e est fumeur·euse et 0 sinon. On peut alors définir

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = \Big(b_{\omega_1}, \cdots, b_{\omega_n}\Big).$$

On a donc $X_i = b_{\omega_i}$.
La variable aléatoire X_i prend ses valeurs dans $\{0,1\}$, il s'agit donc d'une variable aléatoire de Bernoulli, et il n'y a plus qu'à calculer son paramètre $p = \mathbb{P}(X_i = 1)$:
On a

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega, X_i(\omega) = 1\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega, b_{\omega_i} = 1\}\Big) = \frac{\text{Nombre de fumeurs}}{40000}.$$

Exercice 2 :
On va calculer les espérances pour les lois usuelles :

- Loi de Bernoulli : $X \sim \mathcal{B}(p), p \in [0,1]$

$$\mathbb{E}[X] = (1-p).0 + p.1 = p$$

- Loi Binômiale :$X \sim \mathcal{B}\rangle\backslash(N, p), N \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$
  Le plus simple est d'utiliser le fait que X a même loi qu'une somme de N variables aléatoires $\mathcal{B}(p)$ indépendantes, donc même espérance, puis d'utiliser la linérarité de l'espérance. On a donc, si $Y_1, \cdots Y_N$ désignes N variables aléatoires $\mathcal{B}(p)$ indépendantes :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N} Y_i\Big] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\Big[Y_i\Big] = \sum_{i=1}^{N} p = pN.$$

  L'autre façon consiste à essayer de faire le calcul direct en utilisant la formule du Binôme de Newton :
  On a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},$$

  Pour calculer cette somme, il suffit d'écrire

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{N-k},$$

  et de dériver partiellement par rapport à x :

$$N(x+y)^{N-1} = \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} x^{k-1} y^{N-k},$$

  On reconnaît alors la formule que l'on cherche à calculer, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= p \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} p^{k-1} (1-p)^{N-k} \\ &= pN(p + (1-p))^{N-1} \\ &= Np\end{aligned}$$

- Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$

  Pour cette question, il faut voir que l'on va traiter avec des sommes infinies, donc c'est mieux d'avoir en tête le cours de série entières. Ici on va sommer seulement des termes positifs, donc on peut donner un sens à la somme, qu'elle soit finie ou infinie.

  On peut écrire
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

  Pour calculer la valeur de cette série, on peut remarquer qu'elle ressemble à la série entière $e^x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}$ qui a un rayon de convergence infini. On peut dériver terme à terme à l'intérieur (strictement) du disque de convergence, c'est à dire partout ici, cela donne $e^x = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\frac{x^{k-1}}{k!}$, et onn reconnaît la somme cherchée. On obtient alors
$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}} k\frac{\lambda^{k-1}}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

  Il est aussi possible de simplifier le $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$, puis de faire un changement d'indices pour obtenir le même résusltat.

- Loi Uniforme discrète $X \sim \mathcal{U}\big([\![1, N]\!]\big), N \in \mathbb{N}$ Le calcul peut ici se faire directement :
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{N} k\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}.$$

  On peut vérifier que pour un dé équilibré à 6 faces par exemple, $N = 6$, et on retrouve $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{2} = 3.5$.

- Loi Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p), p \in]0, 1]$, *on exclue ici $p = 0$, car dans ce cas la X est infinie avec probabilité 1 : le premier succès n'arrive jamais.*

  Ici encore, il faudra être prudent, car on va manipuler des séries. Mais il s'agit encore de termes positif, donc on peut écrire
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\in\mathbb{N}} kp(1-p)^{k-1},$$

  Cette série peut se calculer en dérivant terme à terme la série $\frac{1}{1-x} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x^k$ qui a un rayon de convergence de 1, donc on peut dériver terme à terme pour $|x| < 1$, et on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1, \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} kx^k.$$

  Il ne reste plus qu'à appliquer la formule:
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= p\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(1-p)^{k-1} \\ &= p\frac{1}{\Big(1-(1-p)\Big)^2} \\ &= \frac{p}{p^2} \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

  Ce résultat est un peu intuitif, puisqu'il signifie par exemple que si l'on a 1/100 de gagner à un jeu, alors il faudra y jouer *en moyenne* 100 fois avant de gagner la première partie.

- Loi Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$, On va devoir manipuler des intégrales généralisées (entre 0 et $+\infty$). On rappelle que, si cette intégrale est définie, pour g positive, comme $\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M g(x)\mathrm{d}x$. Dans les calculs qui suivent, toutes ces limites sont sous-entendues.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&\overset{IPP}{=} \left[x\lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} \\
&= 0 - \frac{e^{-\lambda 0}}{-\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

- Loi Normale $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2), m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, attention, on va ici intégrer une fonction non nécessairement positive. Pour pouvoir donner un sens à $\mathbb{E}[X]$, il faut tout d'abord vérifier que $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$, i.e. que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$. est convergente. Cela peut se faire par exemple en utilisant $|x| e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = o_{\pm\infty}(\frac{1}{x^2})$.

  On a alors
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

  On peut remarquer ici qu'apparaît presque la dérivée $\left(e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right)' = \frac{x-m}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Donc pour pouvoir primitiver directement, on va artificiellement la faire apparaître :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m) e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} m e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \left(e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right)'\mathrm{d}x + m,
\end{aligned}$$

  où l'on a utilisé pour le terme de droite, le fait que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ est une densité, donc d'intégrale 1.

  On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + m \\
&= 0.
\end{aligned}$$

  Une façon alternative calculer le terme de gauche et de faire un changement de variable $y = x - m$ afin d'obtenir $\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$, puis d'utiliser le fait que l'intégrale d'une fonction impaire est nulle.

- Loi Uniforme continue $X \sim \mathcal{U}([a, b]), a < b$:

On peut faire le calcul directement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \\
&= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\
&= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\
&= \frac{a+b}{2},
\end{aligned}$$

ce qui est plutôt intuitif : si on tire uniformément entre deux nombre a et b, alors l'espérance du résultat correspond à la moyenne de ces nombres.

Exercice 3 :

1.
   - La variable X est à valeur dans $\mathbb{N}$, mais à cause du terme $\mathbb{1}_{1\leq k\leq 6}$, on a $X(\Omega) = \{1, 2, \cdots, 6\}$.
   - Il faut que $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$, donc $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) = 1$. On peut utiliser la formule donnée pour calculer C :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} \frac{C}{k} = 1 \Leftrightarrow C &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k}} \\
\Leftrightarrow C &= \frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{6}} \\
\Leftrightarrow C &= \frac{20}{49} \approx 0.408
\end{aligned}$$

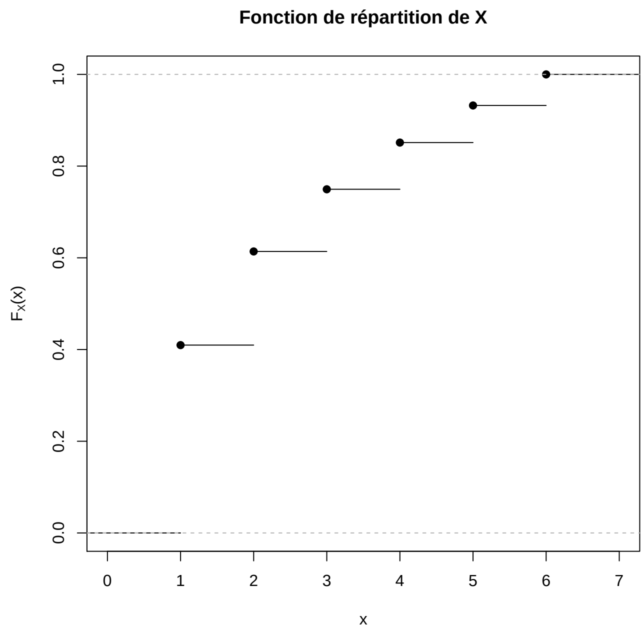
   - On peut alors calculer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{6} k\frac{C}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{6} C \\
&= 6C \\
&= \frac{120}{49} \\
&\approx 2.449
\end{aligned}$$

   - On peut calculer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^{6} k^2\frac{C}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{6} Ck \\
&= 21C \\
&= \frac{420}{49} \\
&\approx 8.571
\end{aligned}$$

   - Pour représenter F_X, il faut remarquer que, comme X est une variable discrète, F_X est constante par morceaux avec des "sauts" en $k \in [\![1, 6]\!]$ de hauteur $\mathbb{P}(X = k)$. Par exemple, le premier "saut" en $k = 1$ a pour hauteur $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{C}{1} \approx 0.408$. On obtient alors



- La variable aléatoire X est une variable aléatoire continue, d'ensemble image $X(\Omega) = [1, 6]$ (là où la densité est strictement positive).
- Pour calculer C, il faut utiliser le fait que $\int_{x \in \mathbb{R}} f_X(x) \mathrm{d}x = 1$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{\int_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x} \mathbb{1}_{x \in [1,6]} \mathrm{d}x} \\
&= \frac{1}{\int_{x=1}^{6} \frac{\mathrm{d}x}{x}} \\
&= \frac{1}{\left[\log(x) \right]_1^6} \\
&= \frac{1}{\ln(6) - \ln(1)} \\
&= \frac{1}{\ln(6)} \approx 0.558
\end{aligned}$$

- On peut directement calculer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= C \int_1^6 x \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\
&= C \int_1^6 \mathrm{d}x \\
&= 5C \\
&= \frac{5}{\ln(6)} \approx 2.79
\end{aligned}$$

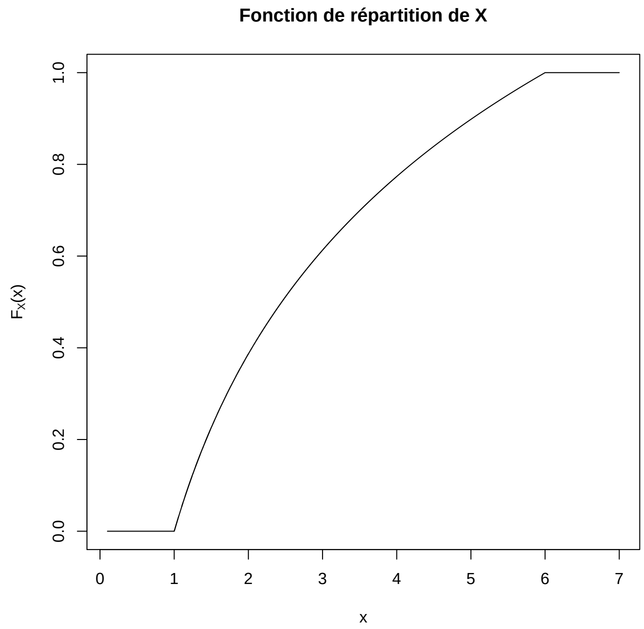
- On peut directement calculer

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= C\int_1^6 x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= C\int_1^6 x\mathrm{d}x \\
&= C\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^6 \\
&= C\Big(\frac{6^2}{2}-\frac{1}{2}\Big) \\
&= \frac{35}{2\ln(6)} = 9.77
\end{aligned}
$$

- La fonction de répartition de X est donnée par

$$
F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 1 \\ C\int_1^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x = C\log(t) = \frac{\log(t)}{\log(6)} \text{ si } 1 \leq t \leq 6 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}
$$

On peut alors la représenter :



Exercice 4 : À partir de maintenant, on donnera un peu moins d'explications, et on ira un peu plus vite dans les calculs.

- Soit $X \sim \mathcal{B}(p), p \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= (1-p).0^2 + p.1^2 = p \\
\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)
\end{aligned}
$$

- Soit $X \sim \mathcal{B}in(N,p), N \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$, alors $X \sim \sum_{i=1}^n Y_i$, où $Y_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{B}(p)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\text{var}(X) &= \text{var}\,\Big(\sum_{i=1}^n Y_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n \text{var}(Y_i) \text{ (indépendance)} \\
&= \sum_{i=1}^n p(1-p) \\
&= Np(1-p)
\end{aligned}$$

- Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1+k) \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} k \frac{\lambda^k}{k!},
\end{aligned}$$

cette astuce $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X]$ sera souvent utile lorsque l'on peut dériver les séries entières qui font apparaître des termes en $k(k-1)$. Ainsi, $e^x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}$ ce qui donne en dérivant terme à terme (possible sur l'intérieur du disque de convergence, ici infini) $e^x = \sum_{k\in\mathbb{N}} k \frac{x^{k-1}}{k!}$ et en redérivant $e^x = \sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1) \frac{x^{k-2}}{k!}$. Il suffit donc d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1) \frac{\lambda^{k-2}}{k!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} k \frac{\lambda^{k-1}}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda^2 + \lambda \\
\text{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

- Soit $X \sim \mathcal{G}(p), p \in]0,1]$, on peut procéder au même calcul :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2 p(1-p)^{k-1} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} kp(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

on rappelle que pour $|x| < 1$, on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x^k$, et que l'on peut dériver terme à terme, ce qui donne

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} kx^{k-1}$ et $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1)x^{k-2}$, ce qui nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= p(1-p)\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(1-p)^{k-1} \\
&= \frac{2p(1-p)}{\Big(1-(1-p)\Big)^3} + \frac{p}{\Big(1-(1-p)\Big)^2} \\
&= \frac{2p(1-p)}{p^3} + \frac{p}{p^2} = \frac{2-2p+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2} \\
\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

- Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$. On peut calculer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&\overset{IPP}{=} \lambda\Big[x^2\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big]_0^{+\infty} - \lambda\int_0^{+\infty} 2x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\mathrm{d}x \\
&= 0 + 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&\overset{IPP}{=} 2\Big[x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big]_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}\Big[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2} \\
\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

- Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2), m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Attention, pour cette question, on continue à admettre que la densité d'une loi normale est bien une densité de probabilité (i.e. d'intégrale 1). Il y a plusieurs façon de faire. Ici, on va utiliser la formule alternative pour la variance, faire un changement de variable pour recentrer l'intégrale, puis une IPP un peu maline pour retomber sur l'intégrale de la densité.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])^2\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x=-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{t=-\infty}^{+\infty} t.te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t \text{ (chgt de var } t = x-m) \\
&\overset{IPP}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\Big[-t\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{t=-\infty}^{+\infty} -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

l'intégration par partie se fait donc en posant

$$\begin{aligned}
u(t) = t &\to u'(t) = 1 \\
v(t) = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} &\leftarrow v'(t) = te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{t=-\infty}^{+\infty}\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t \\
&= \sigma^2\int_{t=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

- Soit $X \sim \mathcal{U}[a,b], a < b$. On peut calculer

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_a^b \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3} \\
\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{2^2} \\
&= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12} \\
&= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

Exercice 5 :
Soit X une variable aléatoire de densité $f_X(x) = Cx^2 1\!\!1_{x\in]0,1[}$

1. On peut calculer l'espérance et la variance de X, pour cela, il faut d'abord trouver C.

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{\int_{x\in\mathbb{R}} x^2 1\!\!1_{x\in]0,1[}\mathrm{d}x} = \frac{1}{\int_0^1 x^2\mathrm{d}x} = \frac{1}{\int_0^1 x^2\mathrm{d}x} = \frac{1}{\big[\frac{x^3}{3}\big]_0^1} = 3 \\
\mathbb{E}[X] &= C\int_0^1 x.x^2\mathrm{d}x = C\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{C}{4} = \frac{3}{4} \\
\mathbb{E}[X^2] &= C\int_0^1 x^2.x^2\mathrm{d}x = C\Big[\frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{C}{5} = \frac{3}{5} \\
\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{3}{5} - \frac{3^2}{4^2} = \frac{3}{80} = 0.0375.
\end{aligned}
$$

2. On peut caluler le k-ième moment de X, pour $k > 0$:

$$
\mathbb{E}[X^k] = C\int_0^1 x^k.x^2\mathrm{d}x = C\Big[\frac{x^{k+3}}{k+3}\Big] = \frac{3}{k+3}
$$

3. Soit $t \in R$, on veut calculer la fonction de répartion de X.

$$
\begin{aligned}
F_X(t) &= 0 \text{ si } t < 0 \\
&= \int_0^t f_X(x)\mathrm{d}x = C\int_0^t x^2\mathrm{d}x = \frac{Ct^3}{3} = t^3. \\
&= 1 \text{ si } t > 1
\end{aligned}
$$

4. On calcule

$$
\mathbb{E}\Big[\frac{1}{X^2}\Big] = C\int_0^1 \frac{1}{x^2}.x^2\mathrm{d}x = C = 3.
$$

Exercice 6 :

1. On peut calculer la fonction de répartition de X_1 :

$$
\begin{aligned}
F_{X_1}(t) &= 0 \text{ si } t < 0 \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \Big[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-1) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ sinon}
\end{aligned}
$$

2. Soit $t \geq 0$, on peut remarquer que $\min(X_1, X_2) > t$ si et seulement si $X_1 > t$ et $X_2 > t$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\min(X_1, X_2) > t\Big) &= \mathbb{P}\Big(X_1 > t \text{ et } X_2 > t\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(X_1 > t\Big)\mathbb{P}\Big(X_2 > t\Big) \text{ (indépendance)} \\
&= \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t)\big)^2 \\
&= \big(1 - (1 - e^{-\lambda t})\big)^2 \\
&= e^{-2\lambda t}
\end{aligned}$$

Pour $t < 0$, on a $\mathbb{P}\Big(\min(X_1, X_2) > t\Big) = 1$. On en déduit la densité de $Y = \min(X_1, X_2)$ en dérivant la fonction de répartition $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = 1 - \mathbb{P}(Y > t) = 1 - e^{-2\lambda t}$. On trouve

$$f_Y(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t}\mathbb{1}_{t \geq 0},$$

ce qui signifie que $Y \sim \mathcal{E}(2\lambda)$.

3. Soit $t \geq 0$, on peut remarquer que $e^{-\lambda X_1} < t \Leftrightarrow X_1 > -\frac{1}{\lambda}\log(t)$. On peut alors calculer,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(e^{-\lambda X_1} < t\Big) &= \mathbb{P}\Big(X_1 > -\frac{1}{\lambda}\log(t)\Big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big(X_1 > -\frac{1}{\lambda}\log(t)\Big) \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\log(t)\right)}) = e^{\log(t)} = t \text{ si } t \in [0, 1] \\
&= 1 \text{ si } t > 1.
\end{aligned}$$

On peut en déduire la densité de $Z = e^{-\lambda t}$ en dérivant sa fonction de répartition $F_Z(t) = t, \forall t \in [0, 1]$, on trouve

$$f_Z(t) = \mathbb{1}_{t \in [0,1]},$$

ce qui signifie que $Z \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

Exercice 7 :

1. Comme $\Omega = \{1, 2, \cdots, 36\}$, et que $X_1(\omega) = \omega$, on a $X_1(\Omega) = \{1, 2, \cdots, 36\}$. X_1 est donc une variable discrète, et on peut calculer la probabilité

$$\forall k \in \{1, \cdots, 36\}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{36}.$$

Donc X_1 est uniforme sur $\{1, 2, \cdots, 36\}$. (ok c'était évident.)

2. On peut par exemple définit $X_2(\omega) = \mathbb{1}_{\omega \leq 4}$. La variable X_2 est bien de loi de Bernoulli (car elle ne peut prendre que les valeurs 0 et 1), et son paramètre est donné par :

$$p = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(\{1, 2, 3, 4\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Exercice 8 :
On utilise la définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^C)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^C)\mathbb{P}(A^C)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^C)\big(1 - \mathbb{P}(A)\big)}
\end{aligned}$$

On pioche une personne uniformément dans la population, et on lui fait passer le test. On note M l'évenement "cette personne est malade" et P l'évenement "le test est positif". On veut calculer $\mathbb{P}(M|T)$, et l'énoncé donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M) &= \frac{1}{10000} \\
\mathbb{P}(T|M) &= \frac{999}{1000} \\
\mathbb{P}(T|M^C) &= \frac{1}{1000}
\end{aligned}$$

On peut appliquer la formule précédente, avec $A = M, B = T$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M|T) &= \frac{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T|M^C)\big(1 - \mathbb{P}(M)\big)} \\
&= \frac{\frac{999}{1000}\frac{1}{10000}}{\frac{999}{1000}\frac{1}{10000} + \frac{1}{1000}\big(1 - \frac{1}{10000}\big)} \\
&= \frac{999}{999 + 9999} = \frac{999}{10998} \\
&\approx 0.09.
\end{aligned}$$

Donc, si le test est positif, il n'y a que 9% de chances que cette personne soit réellement malade, malgré la fiabilité du test.[1]

Exercice 9 :

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. On peut calculer directement (en utilisant l'indépendance, et en regrouppant les termes en X et en Y,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY(X-1)] &= \mathbb{E}[X(X-1)]\mathbb{E}[Y] \text{ (indépendance)} \\
&= \lambda^2 \frac{1}{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

2. On peut aussi calculer directement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[2^X e^{-2Y}\big] &= \mathbb{E}\big[2^X\big]\mathbb{E}\big[e^{-2Y}\big] \text{ (indépendance)} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \int_{y=0}^{+\infty} e^{-2y} \lambda e^{-\lambda y} \mathrm{d}y \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\big(2\lambda\big)^k}{k!} \int_{y=0}^{+\infty} e^{-(\lambda+2)y} \mathrm{d}y \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{2\lambda} \frac{1}{\lambda + 2} \\
&= e^{\lambda} \frac{\lambda}{2 + \lambda}
\end{aligned}$$

3. On peut encore utiliser l'indépendance :

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(2X - Y) &= \operatorname{var}(2X) + \operatorname{var}(-Y) \text{ (indépendance)} \\
&= 2^2 \operatorname{var}(X) + (-1)^2 \operatorname{var}(Y) \\
&= 4\lambda + \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Exercice 10 : On rappelle la définition de la fonction génératrice de X, $\phi_X : z \mapsto \mathbb{E}[z^X]$. On peut alors faire les calculs;

[1] En réalité, on suppose ici que le médecin prescrit ce test au hasard. En réalité, pour vraiment faire le raisonnement, il faudrait au minimum prendre en compte la probabilité de se voir prescrire le test selon si l'on est malade ou non.

1. Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors

$$\begin{aligned}\phi_X(z) &= \mathbb{E}[z^X] \\ &= (1-p)z^0 + pz^1 \\ &= 1-p+pz\end{aligned}$$

2. Soit $X \sim \mathcal{B}in(N,p)$, alors $X \sim \sum_{k=1}^N Y_k$, où $Y_k \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{B}(p)$, et

$$\begin{aligned}\phi_X(z) &= \mathbb{E}\Big[z^{\sum_{k=1}^N Y_k}\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^N z^{Y_k}\Big] \\ &= \prod_{k=1}^N \mathbb{E}\Big[z^{Y_k}\Big] \text{ (indépendance)} \\ &= \Big(1-p+pz\Big)^N\end{aligned}$$

3. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Soit $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\phi_X(z) &= \mathbb{E}\Big[z^X\Big] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} z^k p(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

cette série est convegente dès que $|z| < \frac{1}{p}$, et on peut calculer sa somme

$$\begin{aligned}\phi_X(z) &= pz \sum_{k\in\mathbb{N}^*} z^{k-1}(1-p)^{k-1} = pz \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \big(z(1-p)\big)^{k-1} \\ &= pz \sum_{j\in\mathbb{N}} \big(z(1-p)\big)^j \\ &= \frac{pz}{1-(1-p)z}\end{aligned}$$

4. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on peut calculer

$$\begin{aligned}\phi_X(z) &= \mathbb{E}\Big[z^X\Big] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} z^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\big(z\lambda\big)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{z\lambda} \\ &= e^{\lambda(z-1)}\end{aligned}$$

Exercice 11 :

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. telles que $\log(X_i) \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, et $Y_n = \Big(\prod_{i=1}^n X_i\Big)^{\frac{1}{n}}$. On pose $V_i = \log(X_i)$

1. On définit $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i$. Par stabilité des lois normales, Z_n est de loi normale, et on peut calculer sa variance en utilisant l'indépendance :

$$\mathrm{var}(Z_n) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{var}(\sum_{i=1}^n U_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{var}(U_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2. On a
$$\mathbb{P}\Big(|Z_n - m| > t\Big) \leq \frac{\mathrm{var}(Z_n)}{t^2} = \frac{\sigma^2}{nt^2}.$$

3. Pour tout $\epsilon > 0$, on a alors $\mathbb{P}\Big(|Z_n - m| > \epsilon\Big) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$, donc Z_n converge en probabilité vers la variable aléatoire constante m.

4. On peut remarquer que $Y_n = e^{Z_n}$. Donc
$$\mathbb{P}\left(Y_n > e^{t+m} \cup Y_n < e^{m-t}\right) = \mathbb{P}\left(Z_n > t + m \cup Z_n < m - t\right) = \mathbb{P}\Big(|Z_n - m| > t\Big) \leq \frac{\sigma^2}{nt^2}.$$

5. On peut essayer de majorer, pour $\epsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(|Y_n - e^m| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(Y_n > e^m + \epsilon \cup Y_n < e^m - \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(Y_n > e^{t+m} \cup Y_n < e^{m-t}\right),$$
si $e^{t+m} \leq e^m + \epsilon$, et $e^{m-t} \geq e^m - \epsilon$, i.e. si $t \leq \log(e^m + \epsilon) - m$ et $t \leq m - \log(e^m - \epsilon)$. En posant $t^\star = \min\Big(\log(e^m + \epsilon) - m, m - \log(e^m - \epsilon\Big) > 0$, on a donc
$$\mathbb{P}\left(|Y_n - e^m| > \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n(t^\star)^2} \xrightarrow{n \to +\infty} 0,$$
donc $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} e^m$. Au passage, on redémontre (pour cet exemple) que si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, et si h est continue, alors $h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(X)$.

6. Pour obtenir une limite p.s., on peut remarquer que Z_n est une moyenne empirique de v.a. i.i.d. d'espérance m, donc par la loi forte des grands nombres, $Z_n \xrightarrow{p.s.} m$, et donc $Y_n \xrightarrow{p.s.} e^m$.

7. Par stabilité des lois normales, $T = \sqrt{n}(Z_n - m)$ est de loi normale, on peut calculer
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= 0 \\ \mathrm{var}(T) &= n\,\mathrm{var}(Z_n) = \sigma^2 \end{aligned}$$
donc $\sqrt{n}(Z_n - m) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

8. On peut alors calculer
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(|Z_{100} - m| > 0.196\Big) &= \mathbb{P}\Big(\sqrt{100}|Z_{100} - m| > \sqrt{100}0.196\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\big|\mathcal{N}(0,1)\big| > 1.96\Big) \\ &= 0.05. \end{aligned}$$

9. Si $U_i \sim \mathcal{E}(\frac{1}{m})$ alors, le TCL peut s'appliquer ($\mathrm{var}(U) = m^2 < +\infty$), on a $\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[U] = m$, et $\sqrt{n}\Big(Z_n - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, m^2)$.