Correction TD 4 : IC et tests

Correction exercice 1. IC et test bilatéraux vs unilatéraux

1. On doit d'abord savoir quelle variable utiliser. Comme on se trouve dans le cas Gaussien, à espérance et variance inconnues, on peut utlisiser :

$$Z := \sqrt{n}\frac{\bar{X}-m}{\hat{S}} \sim St(n-1).$$

En utilisant les quantiles de la Student avec $n = 30$ (par exemple dans R : `qt(0.995,29)`), on en déduit

$$\mathbb{P}(|Z| \leq 2.76) = 0.99.$$

Donc, avec probabilité 95%, on a

$$\begin{aligned}|Z| \leq 2.76 &\Leftrightarrow \sqrt{n}\frac{|\bar{X}-m|}{\hat{S}} \leq 2.76\\ &\Leftrightarrow -2.76 \leq \sqrt{n}\frac{\bar{X}-m}{\hat{S}} \leq 2.76\\ &\Leftrightarrow -\frac{2.76\hat{S}}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}-m \leq \frac{2.76\hat{S}}{\sqrt{n}}\\ &\Leftrightarrow \bar{X} - \frac{2.76\hat{S}}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + \frac{2.76\hat{S}}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$IC_{99\%}(m) = \left[\bar{X} \pm \frac{2.76\hat{S}}{\sqrt{n}}\right]$$

On en déduit l'intervalle de confiance ponctuel :

$$ic_{99\%}(m) = \left[\bar{x} \pm \frac{2.76\hat{s}}{\sqrt{n}}\right] = \left[42.7 \pm \frac{2.76\sqrt{81.3}}{\sqrt{30}}\right] = [42.16, 51.24].$$

2. On utilise la même propriété pour effectuer le test, sauf qu'on considère maintenant la loi sous H_0, donc on utilise

$$Z_0 := \sqrt{n}\frac{\bar{X}-50}{\hat{S}} \sim St(n-1).$$

La forme de H_1 étant bilatérale (on rejetera pour un taux très inférieur ou très supérieur), on peut construire la zone de rejet bilatérale en utilisant les quantiles de la Student. Pour obtenir la p-valeur, on doit calculer

$$\mathbb{P}_{H_0}\Big(|Z_0| > |z_0|\Big) = \mathbb{P}\Big(St(n-1) > |z_0|\Big),$$

où z_0 correspond à la réalisation de Z_0 dans notre expérience, i.e.

$$z_0 = \sqrt{n}\frac{\bar{x}-50}{\hat{s}} = \sqrt{30}\frac{46.7-50}{\sqrt{81.3}} = -2.004.$$

On peut alors conclure en utilisant la fonction de répartition de la Student (par exemple en R : `pt(2.004,29)`), et on trouve

$$p\text{-valeur} = \mathbb{P}\Big(St(29) > |-2.004|\Big) = 2\mathbb{P}\Big(St(29) > 2.004\Big) = 2\left(1 - \mathbb{P}\Big(St(29) > 2.004\Big)\right) = 0.055.$$

3. Comme la p-valeur $= 0.055$ est supérieure au niveau $\alpha = 0.05$, le test précédent ne serait pas rejeté, au niveau $\alpha = 0.05$.
4. Si on effectue le test dans ce sens là, comme la seule conclusion effectuée de façon "statistiquement significative" correspond au rejet de H_0, il y a deux conclusions possibles :

   - On garantie de façon "statistiquement significative", au niveau choisi, que le taux de nitrates est inférieur au seuil de 50 $mg.L^{-1}$
   - On ne peut garantir de façon "statistiquement significative", au niveau choisi, que le taux de nitrates est inférieur au seuil de 50 $mg.L^{-1}$

   Si l'on effectuait le test en inversant les hypothèses :

   $$H_0 : m \leq 50 \; mg.L^{-1}$$
   $$H_1 : m > 50 \; mg.L^{-1}$$

   alors les deux conclusions possibles seraient :

   - On garantie de façon "statistiquement significative", au niveau choisi, que le taux de nitrates est supérieur au seuil de 50 $mg.L^{-1}$
   - On ne peut garantir de façon "statistiquement significative", au niveau choisi, que le taux de nitrates est supérieur au seuil de 50 $mg.L^{-1}$

   Notre objectif est de garantir que le cours d'eau n'est pas à hauts risques sanitaires, donc on ferait plus confiance à quelqu'un qui nous affirme "avoir montré que le taux été inférieur au seuil de dangerosité" qu'à quelqu'un qui nous dirait "ne pas avoir pu montrer qu'il était supérieur au seuil de dangerosité". C'est pourquoi il faut effectuer le test dans le sens donné par l'énoncé.[1]

5. On procède quasiment pareil qu'à la question 2., en notant que, comme on doit se placer dans "le pire des cas de H_0", on va continuer à regarder Z_0 sous l'hypothèse $m = 50 \; mg.L^{-1}$, mais que H_1 ayant changé, on va changer la forme de la zone de rejet. Pour savoir si on rejete pour les "petites" ou les "grandes" valeurs de z_0, il suffit de réfléchir. Si, comme c'est le cas sous H_1, la "vraie valeur" est *très* inférieure à $m = 50 \; mg.L^{-1}$, alors les mesure X_i donneront probablement des valeurs *très* inférieures à $m = 50 \; mg.L^{-1}$, et de même pour $\bar{X}$, et par conséquent, Z_0 sera probablement *très* négatif, on souhaite donc rejeter les valeurs *très* négatives de Z_0 (donc la zone de rejet à gauche) qui correspondent à une eau avec un *très* faible taux de nitrates. Il s'ensuit que la p-valeur est donnée par :

   $$p\text{-valeur} = \mathbb{P}_{m=50}\Big(Z_0 \leq z_0\Big) = \mathbb{P}\Big(St(29) \leq z_0\Big),$$

   où $z_0 = -2.004$ correspond à la valeur calculée sur l'expérience (déjà obtenue à la question 2.) On peut conclure en utilisant la fonction de répartition de la Student (par exemple en R : `qt(-2.004,29)`). On obtient

   $$p\text{-valeur} = \mathbb{P}\Big(St(29) \leq -2.004\Big) = 0.027,$$

   Évidemment, on trouve la moitié de la p-valeur calculée précédemment, ce qui est logique puisqu'on a divisé la zone de rejet en 2 parties de probabilité égales.
6. Cette fois, la p-valeur 0.027 est inférieur au niveau $\alpha = 0.05$, donc on rejete le test au niveau $\alpha = 0.05$, par contre, on ne rejeterait pas un test au niveau $\alpha = 0.01$. Cela incite quand même à être prudent sur la qualité de cette eau.
7. On reprend cette fois le raisonnement (et le Z) de la question 1., mais on voudrait une quantité aléatoire A telle que $\mathbb{P}(m \leq A) = 0.99$. Cela peut-être fait en cherchant q tel que $\mathbb{P}(Z \geq q) = 0.99$.

[1] Je reformule pour être certain que ce soit bien compris : est-ce que vous préférez boire un eau si je vous dit

- Les données excluent (modulo le risque α) que l'eau ne soit pas potable.
- Les données ne permettent pas d'exclure que l'eau soit potable.

En utilisant les quantiles de la loi de Student (par exemple en R : `qt(0.99,29)`), on trouve $q = -2.469$ On en déduit, qu'avec probabilité 99%, on a

$$\begin{aligned} Z \geq -2.469 &\Leftrightarrow \sqrt{n}\frac{\bar{X}-m}{\hat{S}} \geq -2.469 \\ &\Leftrightarrow \bar{X}-m \geq -2.469\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow m \leq \bar{X}+2.469\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

On trouve $A = \bar{X} + 2.469\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$, et

$$IC_{99\%,\text{ droite}}(m) = \Big] -\infty, \bar{X}+2.469\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\Big].$$

L'intervalle de confiance ponctuel donne alors

$$ic_{99\%,\text{ droite}}(m) = \Big] -\infty, \bar{x}+2.469\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\Big] = \Big] -\infty, 46.7+2.469\frac{\sqrt{81.3}}{\sqrt{29}}\Big] = \Big] -\infty, 50.8\Big].$$

8. En utilisant l'intervalle de confiance calculé précedemment, on a (dans le pire des cas de H_0)

$$\mathbb{P}_{m=50}\Big(50 \notin \Big] -\infty, \bar{X}+2.469\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\Big]\Big) = 0.01.$$

Construire la zone de rejet est donc équivalent à regarder si 50 se trouve dans l'intervalle de confiance précémment construit. Si oui, on est dans l'événement de grande probabilité sous H_0, donc on ne peut pas rejeter, si non, on peut rejeter.

Ici, on a $50 \in \Big] -\infty, 50.8\Big]$, donc on ne peut pas rejeter le test, comme on l'avait dit à la question précédente.

Correction exercice 2. Test sur la variance et la moyenne

On note $m_0^{(L)}, m_0^{(d)}, m_0^{(D)}$ les caractéristiques moyennes souhaitées par le fabriquant, et $s_0 = 0.5mm$ l'écart-type souhaité par le fabriquant, et $X_i^{[L)}, X_i^{[d)}, X_i^{[D)}$ les mesures. On note aussi, pour $k \in \{L, d, D\}$, $m^{(k)} = \mathbb{E}[X_i^{(k)}]$, et

$$v^{(k)} = \text{var}(X_i^{(k)})$$

1. On veut tester, pour $k \in \{L, d, D\}$, l'hypothèse

$$\begin{aligned} &H_0^{(k)} : v^{(k)} = s_0^2 \\ &H_1^{(k)} : v^{(k)} \neq s_0^2 \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $H_0^{(k)}$, on a :

$$(n-1)\frac{\hat{S}_k^2}{s_0^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Donc la p-valeur est donnée par

$$p\text{-valeur}^{(k)} = 2\min\Big(\mathbb{P}(\chi^2(n-1) < (n-1)\frac{\hat{s}_k^2}{s_0^2}), \mathbb{P}(\chi^2(n-1) > (n-1)\frac{\hat{s}_k^2}{s_0^2})\Big)$$

On peut alors écrire le script suivant dans R :

```
n = 25
s0 = 0.5
s= c(0.54,0.25,0.6)
z = (n-1)*s**2/s0**2
f = function(z){return(2*min(pchisq(z ,n-1),1-pchisq(z,n-1)))}
p_val = sapply(z,f)
print(p_val)
```

L'application numérique donne donc

$$\begin{aligned}
p\text{-valeur}^{(L)} &= 0.52\\
p\text{-valeur}^{(d)} &= 0.00014\\
p\text{-valeur}^{(D)} &= 0.15
\end{aligned}$$

Donc, au niveau de 5%, on rejete seulement le second test (pour d).

Remarque :

- Il serait peut-être plus pertinent de faire un test unilatéral en posant $H_1^{(k)} : v^{(k)} > s_0^2$, puisqu'on imagine que c'est ce qui intéresse réellement le fabriquant. Dans ce cas, aucun des test ne serait rejeté, et les données ne sont pas incompatible avec un contrôle sur l'écart type. Mais pour un vrai contrôle qualité, on préfèrerait s'assurer statistiquement que l'écart-type est bien contrôlé (et pas seulement vérifier que les données ne suffisent pas à l'exclure), donc il faudrait mieux tester $H_1^{(k)} : v^{(k)} < s_0^2$. Dans ce cas, on peut voir sans calculs que le premier et troisième tests ne pourraient pas être rejetés,
- On est en train d'effectuer simultanément plusieurs tests, il faudrait se poser la question de la correction. C'est l'objet de la question 4.

2. Pour calculer un IC sur $v^{(k)}$, on peut de même utiliser

$$(n-1)\frac{\hat{S}_k^2}{v^{(k)}} \sim \chi^2(n-1).$$

Pour calculer un IC de degré de confiance 95%, on peut donc utiliser les quantiles d'ordre 0.025 et 0.975 du χ^2. En tappant dans R `qchisq(c(0.025,0.0975),24)`, on trouve

$$\mathbb{P}\Big(\chi^2(n-1) \in [12.4, 39.36]\Big) = 0.95$$

Donc, avec probabilité de 95%, on a

$$(n-1)\frac{\hat{S}_k^2}{v^{(k)}} \in [12.4, 39.36] \Leftrightarrow v^{(k)} \in \Big[\frac{(n-1)\hat{S}_k^2}{39.36}, \frac{(n-1)\hat{S}_k^2}{12.4}\Big]$$

L'application numérique donne alors

$$\begin{aligned}
IC_{95\%}(v^{(L)}) &= \Big[0.178, 0.564\Big]\\
IC_{95\%}(v^{(d)}) &= \Big[0.038, 0.121\Big]\\
IC_{95\%}(v^{(D)}) &= \Big[0.219, 0.697\Big]
\end{aligned}$$

Si on préfère des IC sur l'écart type, il suffit de prendre la racine carré des seuils précédents :

$$\begin{aligned}
IC_{95\%}(\sigma^{(L)}) &= \Big[0.422, 0.751\Big]\\
IC_{95\%}(\sigma^{(d)}) &= \Big[0.195, 0.348\Big]\\
IC_{95\%}(\sigma^{(D)}) &= \Big[0.468, 0.835\Big]
\end{aligned}$$

Remarque : Comme pour les tests, lorsque l'on calcule plusieurs intervalles de confiance, il peut être pertinent de corriger le niveau de confiance pour obtenir un contrôle global, plutôt que sur chaque intervalle.

3. On procède exactement de la même façon, sauf que l'on cherche seulement une borne supérieure pour $v^{(k)}$, ce qui revient à utiliser seulement le quantile d'ordre 0.05 des χ^2 (en effet, cherche A tel que $v < A$ avec grande proba revient à chercher b tel que $(n-1)\frac{\hat{S}_k^2}{v} > b$ avec grande proba). L'application numérique donne

$$\mathbb{P}\Big(\chi^2(n-1) > 13.85\Big) = 0.95$$

Donc, avec probabilité 95%, on a

$$(n-1)\frac{\hat{S}_k^2}{v^{(k)}} > 13.85 \Leftrightarrow v^{(k)} < \frac{(n-1)\hat{S}_k^2}{13.85}$$

L'application numérique donne

$$IC_{95\%,\text{droite}}(v^{(L)}) = \Big[0, 0.505\Big]$$
$$IC_{95\%,\text{droite}}(v^{(d)}) = \Big[0, 0.108\Big]$$
$$IC_{95\%,\text{droite}}(v^{(D)}) = \Big[0, 0.624\Big]$$

ou si l'on préfère

$$IC_{95\%,\text{droite}}(\sigma^{(L)}) = \Big[0, 0.711\Big]$$
$$IC_{95\%,\text{droite}}(\sigma^{(d)}) = \Big[0, 0.329\Big]$$
$$IC_{95\%,\text{droite}}(\sigma^{(D)}) = \Big[0, 0.79\Big]$$

4. Comme on se trouve dans le cas Gaussien, à variance inconnue, on va effectuer un test de Student pour tester

$$H_0^{(k)} : m^{(k)} = m_0^{(k)}$$
$$H_1^{(k)} : m^{(k)} \neq m_0^{(k)}$$

Sous l'hypothèse $H_0^{(k)}$, on a

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}^{(k)} - m_0^{(k)}}{\hat{S}_k} \sim St(n-1).$$

Les p-valeurs associées sont donc données par :

$$p - valeur = \mathbb{P}\Big(\Big|St(n-1)\Big| > \Big|\sqrt{n}\frac{\bar{s}^{(k)} - m_0^{(k)}}{\hat{s}_k}\Big|\Big).$$

En utilisant R pour l'application numérique :

```
s= c(0.54,0.25,0.6)
m0 = c(40,3,6.5)
xb = c(40.2,3.1,6.4)
n = 25
z = sqrt(n)*(xb-m0)/s
f = function(z){return(2*min(pt(z ,n-1),1-pt(z,n-1)))}
p_val = sapply(z,f)
print(p_val)
```

On trouve alors

$$\begin{aligned}
p\text{-valeur}^{(L)} &= 0.07\\
p\text{-valeur}^{(d)} &= 0.057\\
p\text{-valeur}^{(D)} &= 0.41
\end{aligned}$$

Au niveau de 5%, aucun des test ne serait rejeté.

Remarque : Dans ce cas, il n'est pas évident de comment formuler le test dans l'autre sens, pour avoir une garantie statistique sur les dimensions moyenne des vis. On pourrait formuler $H_0 : m > m_0 + \epsilon \cup m < m_0 - \epsilon$, et $H_1 : m \in [m_0 \pm \epsilon]$, en se fixant un seuil de tolérance ϵ, mais on n'a pas vu en cours comment traiter ce cas là. L'autre façon serait d'effectuer deux tests, un dans chaque sens ($H_0 : m > m_0 + \epsilon$ et $H_0 : m < m_0 - \epsilon$). En réalité, si l'on choisit de conserver le sens du test que l'on a effectué, pour se garantir que notre contrôle est valide, il serait nécessaire de faire un calcul de puissance sous l'hypothèse $H_1 : |m - m_0| > \epsilon$, et vérifié que la puissance est "raisonnable" (et le "raisonnable" devra être choisi par le fabriquant.

5. On peut refaire exactement le même raisonnement, mais en utilisant cette fois, que si la variance est connue et égale à s_0^2, alors sous $H_0^{(k)}$, on a

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}^{(k)} - m_0^{(k)}}{s_0} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Alors, la p-valeur est donnée par :

$$p - valeur = \mathbb{P}\Big(\Big|\mathcal{N}(0,1)\Big| > \Big|\sqrt{n}\frac{\bar{s}^{(k)} - m_0^{(k)}}{\hat{s}_k}\Big|\Big).$$

En utilisant R pour l'application numérique :

```
s= c(0.54,0.25,0.6)
m0 = c(40,3,6.5)
xb = c(40.2,3.1,6.4)
n = 25
z = sqrt(n)*(xb-m0)/s
f = function(z){return(2*min(pnorm(z ),1-pnorm(z)))}
p_val = sapply(z,f)
print(p_val)
```

On trouve alors

$$\begin{aligned}
p\text{-valeur}^{(L)} &= 0.064\\
p\text{-valeur}^{(d)} &= 0.045\\
p\text{-valeur}^{(D)} &= 0.40
\end{aligned}$$

Au niveau de 5%, aucun des tests ne serait rejeté.

6. Si l'on considère que l'on pense effectuer en tous 6 tests, la correction de Bonferroni consiste à diviser le niveau de chaque test par 6, afin de contrôler la probabilité de rejeter au moins un test à tord. Avec cette correction, le seul test rejeté reste le test sur la variance pour d. Cela dit, cela ne semble pas ici très pertinent de baisser le niveau, vu le sens de formulation des tests.

Correction exercice 3. Statistiques de tests

1. On a déjà vu ce point en cours : il suffit d'écrire

$$T := \sqrt{n}\frac{\bar{X} - m}{\hat{S}} = \frac{\sqrt{n}\frac{\bar{X}-m}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)\frac{\hat{S}^2}{\sigma^2}}{n-1}}}.$$

En posant $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, et $U = (n-1)\frac{\hat{S}^2}{\sigma^2}$, on a bien, d'après 2 $Z \coprod U$, et

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n-1}}}.$$

Donc, d'après le point 3, $T \sim St(n-1)$.

2. Si on a $U_1 \sim \chi^2(n_1)$ et $U_2 \sim \chi^2(n_2)$, alors U_1 a même loi que $\sum_{k=1}^{n_1} X_k^2$ où $X_k \sim_{i.i.d} \mathcal{N}(0,1)$, et U_2 a même loi que $\sum_{k=1}^{n_2} Y_k^2$ avec $Y_k \sim_{i.i.d} \mathcal{N}(0,1)$. Si on prend $U_1 \coprod U_2$, alors $U_1 + U_2$ a même loi que $\sum_{k=1}^{n_1} X_k^2 + \sum_{k=1}^{n_2} Y_k^2 \sim \sum_{k=1}^{n_1+n_2} Z_k^2$, avec $Z_k \sim_{i.i.d} \mathcal{N}(0,1)$. Donc

$$\sum_{k=1}^{n_1} X_k^2 + \sum_{k=1}^{n_2} Y_k^2 \sim \chi^2(n_1+n_2).$$

Donc la somme de χ^2 indépendantes à respectivements n_1 et n_2 degrés de liberté suit une loi de χ^2 à n_1+n_2 degrés de liberté.

3. D'après l'énoncé, X_i et Y_j ont même variance σ^2, donc on a

$$\frac{(n_1-1)\hat{S}^2_{X,n_1}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1)$$
$$\frac{(n_2-1)\hat{S}^2_{Y,n_2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1).$$

De plus, comme $X \coprod Y$, on a aussi $\hat{S}_{X,n_1} \coprod \hat{S}_{Y,n_2}$, donc, d'après le point précédent,

$$W := \frac{(n_1-1)\hat{S}^2_{X,n_1} + (n_2-1)\hat{S}^2_{Y,n_2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2).$$

4. Par la propriété de stabilité des lois normales, $Z := \sqrt{n'}\frac{\bar{X}-m_1-(\bar{Y}-m_2)}{\sigma}$ est de loi normale (s'écrit comme une combinaison affine de v.a. de lois normales indépendantes.) Il ne reste plus qu'à calculer son espérance et sa variance, et on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sqrt{n'}\frac{\mathbb{E}\left[\bar{X}\right] - m_1 - (\mathbb{E}\left[\bar{Y}\right] - m_2)}{\sigma} \\
&= 0 \\
\mathrm{var}(Z) &= \frac{n'}{\sigma^2}\Big(\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) + \mathrm{var}\left(\bar{Y}\right)\Big) \text{ en utilisant l'indépendance entre } \bar{X} \text{ et } \bar{Y} \\
&= \frac{1}{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}\Big(\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\Big) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

5. On peut écrire (en utilisant les notations pour Z et W introduites aux questions précédentes.

$$U = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n_1+n_2-2}}},$$

Avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $W \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$ d'après les questions précédentes. De plus, W et Z sont indépendantes, car

$$\begin{aligned}
&\bar{X} \coprod \hat{S}^2_X \text{ (préambule)} \\
&\bar{Y} \coprod \hat{S}^2_X \text{ car } X \coprod Y \\
&\bar{Y} \coprod \hat{S}^2_Y \text{ (préambule)} \\
&\bar{X} \coprod \hat{S}^2_Y \text{ car } X \coprod Y \\
&\bar{X} \coprod \bar{Y} \text{ car } X \coprod Y \\
&\hat{S}^2_X \coprod \hat{S}^2_Y \text{ car } X \coprod Y
\end{aligned}$$

On en déduit alors, en utilisant la définition d'une Student, que

$$U \sim \mathrm{St}(n_1 + n_2 - 2).$$

Remarque : En pratique, lorsqu'on veut tester l'égalité des espérance, on peut

- Tester tout d'abord l'égalité des variances
- Si le test n'est pas rejeté, alors on considère parfois que l'hypothèse n'est pas trop exagérée, et on teste ensuite l'égalité des espérance sous l'hypothèse que les variances sont égales (il existe sinon des façons de corriger).

De façon générale, il serait aussi important de tester l'hypothèse de normalité de l'échantillon avant de faire tout cela, en considérant que si l'hypothèse n'est pas rejeté, alors l'hypothèse n'est pas trop exagérée. Les tests permettant de faire ça dépassent le programme de cette année (quoiqu'on puisse si l'on souhaite effectuer un test de χ^2 d'adéquation), mais c'est bien de comprendre le raisonnement parfois utilisé.

Correction exercice 4. Test de comparaison de variances et de moyenne

1. On peut remarquer que si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, alors on peut écrire

$$W := \frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2} = \frac{(n_1 - 1)\frac{\hat{S}_X^2}{\sigma_1^2}/(n_1 - 1)}{(n_2 - 1)\frac{\hat{S}_Y^2}{\sigma_2^2}/(n_2 - 1)}$$

Donc on a bien

$$W = \frac{U_X/(n_1 - 1)}{U_Y/(n_2 - 1)},$$

avec $U_X = (n_1 - 1)\frac{\hat{S}_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$, et $U_Y = (n_2 - 1)\frac{\hat{S}_Y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$. De plus, U_X et U_Y sont indépendantes, car X et Y sont indépendantes

En utilisant la définition donnée dans le préambule d'une loi de Fisher, on trouve que

$$W \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

2. On peut alors utiliser la propriété précédente pour effectuer le test de Fisher d'égalité des variances. On a, sous H_0,

$$\frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

On peut utiliser R (`qf(c(0.025,0.975),19,17)` pour les quantiles de la Fisher) pour obtenir

$$\mathbb{P}\Big(F(n_1 - 1, n_2 - 1) \in [0.38, 2.57]\Big) = 0.88$$

puis, on peut calculer $w = \frac{\hat{s}_X^2}{\hat{s}_Y^2} = \in [0.38, 2.57]$, donc le test n'est pas rejeté au niveau de 5%. Comme on veut la p-valeur, on aurait pu éviter de chercher les quantiles de la Fisher, et directement chercher

$$p\text{-valeur} = 2\min\left(\mathbb{P}\Big(F(n_1 - 1, n_2 - 1) < w\Big), \mathbb{P}(\Big(F(n_1 - 1, n_2 - 1) > w\Big)\right),$$

L'application numérique donne p-valeur $= 0.78$, donc le test n'est pas du tout rejeté, et l'hypothèse d'égalité des variances semble plus que raisonnable.

3. Dans cette question et la suivante, on suppose que les variances sont égales. On peut alors utiliser, comme montré dans l'exercice précédent (avec $n' = \frac{1}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$) sous H_0 :

$$U = \sqrt{n'} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\hat{S}^2_{X,n_1}+(n_2-1)\hat{S}^2_{Y,n_2}}{n_1+n_2-2}}} \sim \mathrm{St}(n_1 + n_2 - 2)$$

On pourrait, comme dans l'exercice précédent, chercher les quantiles de la Student, puis regarder si l'expérience donne u dans la zone de rejet ou non, mais comme la p-valeur est demandée, on peut directement calculer

$$p\text{-valeur} = \mathbb{P} \left(\left| St(n_1 + n_2 - 2) \right| > \left| u \right| \right).$$

L'application numérique donne $u = 6.34$, et on en déduit p-valeur $= 2.4.10^{-7}$, donc on peut rejeter le test au niveau de 5%, et on peut conclure à un effet significatif de traitement pour modifier la taille de la tumeur.

Remarque : Dans ce cas, il semble plus pertinent d'utiliser une alternative de la forme $m_2 < m_1$ puisqu'on souhaiterait montrer de façon statistiquement significative que le traitement permet de réduire la taille de la tumeur. C'est l'objet de la seconde question.

4. On peut procéder comme à la question précédente, avec la différence que cette fois, on veut tester une alternative unilatérale, donc on va utiliser la même statistique de test, mais changer la forme de la zone de rejet. Le calcul de la p-valeur devient alors :

$$p\text{-valeur} = \mathbb{P} \left(St(n_1 + n_2 - 2) > u \right).$$

L'application numérique donne $p -$ valeur $= 1.2.10^{-7}$, ce qui permet encore de rejeter le test. On peut donc conclure que le traitement a un effet statistiquement significatif sur la réduction de la taille de la tumeur (et avec une p-valeur de ce niveau, on est assez confiant).

Correction exercice 5. Test de comparaison de variances et de moyenne 2

On note, $m_A, m_B, \sigma_A, \sigma_B$ les espérance et écart-types de chaque distribution. On veut comme à l'exercice précédent effectuer un test de Student de comparaison des espérances, mais pour pouvoir faire l'hypothèse nécéssaire de l'égalité des variances, on va tout d'abord tester cette égalité.

On va donc tester

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$
$$H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

Pour cela, on utilise le fait que, sous H_0, on a

$$\frac{\hat{S}_A^2}{\hat{S}_B^2} \sim F(n_A - 1, n_B - 1)$$

Donc la p-valeur est donnée par

$$p\text{-valuer} = 2 \min \left(\mathbb{P}\left(F(n_1 - 1, n_2 - 1) < \frac{\hat{s}_A^2}{\hat{s}_B^2} \right), \mathbb{P}(\left(F(n_1 - 1, n_2 - 1) > \frac{\hat{s}_A^2}{\hat{s}_B^2} \right) \right)$$

Et l'application numérique donne une p-valeur de 0.54, donc on ne rejete pas ce test, et on va supposer l'égalité des variances pour effectuer le test de Student

$$H_0 : m_A = m_B$$
$$H_1 : m_A \neq m_B$$

Sous H_0, en posant $n' = \frac{1}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$, on a

$$U = \sqrt{n'}\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\hat{S}^2_{X,n_1}+(n_2-1)\hat{S}^2_{Y,n_2}}{n_1+n_2-2}}} \sim \mathrm{St}(n_1+n_2-2)$$

La p-valeur est alors donnée par :

$$p\text{-valeur} = \mathbb{P}\left(\left|St(n_1+n_2-2)\right| > \left|u\right|\right).$$

L'application numérique donne $u = 1.77$, et une $p - valeur$ à 0.11, ce qui ne permet pas de rejeter le test au niveau de 5%. On ne peut donc pas exclure que les pHs sont les mêmes.

Correction exercice 6. Test sur la variance

1. Comme $n\frac{\hat{V}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$, sous $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (pire des cas de H_0), on a

$$\frac{\hat{V}_1^2}{\hat{V}_2^2} \sim F(n_1, n_2).$$

Donc, en regardant la forme de H_1, on voit que la p-valeur est donnée par

$$p\text{-valeur} = \mathbb{P}\Big(F(n_1,n_2) < \frac{\hat{v}_1^2}{\hat{v}_2^2}\Big),$$

L'expérience donne $\frac{\hat{v}_1^2}{\hat{v}_2^2} = \frac{0.0009}{0.0019} = 0.47$, et $p - valeur = 0.0513$.

2. On procède de même en changeant seulement la zone de rejet vu la forme de la nouvelle alternative. On a alors

$$p\text{-valeur} = \mathbb{P}\Big(F(n_1,n_2) < \frac{\hat{v}_1^2}{\hat{v}_2^2}\Big),$$

ce qui donne p-valeur $= 0.948$.