

TD DE PROBABILITÉS - STATISTIQUES

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire de loi Normale centrée réduite et ε une variable aléatoire de loi donnée par $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$, indépendante de X .

1. Montrer que εX suit une loi Normale centrée réduite.
2. La variable aléatoire $X - \varepsilon X$ suit-elle une loi Normale?

Exercice 2 Autour des fonctions de répartition

1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
 - (a) Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.
Exprimer la probabilité $\mathbb{P}(c \leq X \leq d)$ en fonction de λ, c et d .
 - (b) Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $\mathbb{P}(X > 20)$ soit égale à 0,05.
 - (c) Donner l'espérance de la variable aléatoire X .
Dans la suite de l'exercice, on prend $\lambda = 0,15$.
 - (d) Calculer $\mathbb{P}(10 \leq X \leq 20)$.
 - (e) Calculer la probabilité de l'événement $\{X > 18\}$.
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi Normale d'espérance 16 et d'écart-type 1,95.
 - (a) Calculer la probabilité de l'événement $\{20 \leq Y \leq 21\}$.
 - (b) Calculer la probabilité de l'événement $\{Y < 11\} \cup \{Y > 21\}$.

Exercice 3 On suppose que le poids d'un nouveau né est une variable normale d'écart-type égal à 0,5 kg. Le poids moyen des 49 enfants nés au mois de janvier 2004 dans l'hôpital de Charleville-Mézières a été de 3,6 kg. Déterminer un intervalle de confiance à 95 % pour le poids moyen d'un nouveau né dans cet hôpital.

Exercice 4 Le staff médical d'une grande entreprise fait ses petites statistiques sur le taux de cholestérol de ses employés; les observations sur 100 employés tirés au sort sont les suivantes.
taux de cholestérol en cg: effectif d'employés:

120	9
160	22
200	25
240	21
280	16
320	7

1. Estimer la moyenne et l'écart-type pour le taux de cholestérol dans toute l'entreprise.
2. Déterminer un intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne.

Exercice 5 On mesure une certaine grandeur physique G avec un appareil dont la précision est caractérisée par l'écart-type σ . On fait l'hypothèse que les mesures suivent une loi normale.

1. On effectue une seule mesure, on trouve $g_1 = 1,364$. On suppose connue la précision de l'appareil de mesure : $\sigma = 4,3 \cdot 10^{-3}$ (unité arbitraire). Déterminer un intervalle de confiance contenant, avec une probabilité de 90%, la valeur G .
2. On ignore la précision de l'appareil de mesure. On effectue 5 mesures. On trouve :

1,365	1,371	1,368	1,359	1,362
-------	-------	-------	-------	-------

Donner des estimations de G et de σ . Déterminer un intervalle de confiance contenant, avec une probabilité de 90%, la valeur G .

Exercice 6 On prélève un échantillon de 100 pièces à partir de la production d'une machine. On trouve 12 pièces défectueuses. Peut-on admettre que la proportion de pièces défectueuses sorties de cette machine est de 1 sur 6 au risque 5 %?

Exercice 7 Pour expérimenter ses lois, Mendel croise 2 races de haricots, l'une colorée, l'autre incolore. Selon son modèle, chaque parent a deux gènes portant sur la couleur "coloré" = C ou "incolore" = I . Un enfant possède un gène de chaque parent. "coloré" est dominant; de sorte que si un haricot a deux gènes différents, il est coloré. Pour les deux parents les gènes sont (C,C) et (I,I) , la première génération aura donc les gènes (C,I) et la deuxième (C,C) , (C,I) , (I,C) et (I,I) . Ainsi suivant son modèle, la probabilité p pour qu'un haricot de la deuxième génération soit coloré est $\frac{3}{4}$.

1. Décrire une méthode pour tester l'hypothèse $H_0 : p = \frac{3}{4}$ contre $H_1 : p \neq \frac{3}{4}$ au niveau de confiance 0,05.
2. Parmi 100 haricots analysés, on a trouvé 65 haricots colorés. Qu'en déduit-on?

Exercice 8 On mesure une certaine longueur $l=4,5\text{cm}$. On réalise 100 mesures selon une certaine méthode et on en fait la moyenne. Quelle règle de décision doit-on adopter, au seuil de 5% pour décider si ces mesures sont réalisées convenablement, sachant que l'écart type de la moyenne est 0,0052?