L2 Maths-Éco - Probabilités-Statistique 2 **-** 2020 – 2021

TD -Statistique - 3 : Maximum de vraisemblance, Efficacité, Méthode des Moments

Exercice 1 ***Calculs de maximum de vraisemblance***
Calculer le maximum de vraisemblance d'un échantillon i.i.d. $X_1, \cdots, X_n$ *de même loi que* X *pour estimer :*

1. p *quand* $X \sim \mathcal{B}er(p)$
2. p *quand* $X \sim \mathcal{G}(p)$
3. p *quand* $X \sim \mathcal{B}in(N, p)$*,* N *connu ! (attention ici à ne pas confondre* N *et* n*)*
4. λ *quand* $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Exercice 2 ***Un exemple***
Une entreprise veut estimer le nombre de pièces défectueuses par lots produits. Un lot est constitué de 1000 *pièces. On modélise le nombre de pièces défectueuses par lot par une loi de Poisson de paramètre* λ *inconnu (indépendantes entre les lots). On cherche à estimer* λ*, et pour cela, on compte de nombre de pièces défectueuses dans* 10 *lots.*

1. *Expliquer pourquoi il est naturel d'utiliser une loi de Poisson pour modéliser ce nombre.*
2. *Donner l'estimateur par maximum de vraisemblance de* λ*.*
3. *En déduire une formule pour l'estimation plug-in de* $\mathbb{P}(X \geq k)$*, où* X *modélise le nombre de pièces défectueuses dans un lot.*
4. *Cet estimateur est-il sans biais ?*
5. *Calculer la borne de Cramér-Rao.*
6. *L'EMV est-il un estimateur efficace de* λ *?*
7. *Les prélèvements ont données* $15, 20, 18, 12, 11, 7, 13, 4, 9, 6$ *pièces défectueuses. Donner l'estimation ponctuelle de* λ*.*
8. *On décide qu'on doit jeter un lot à partir de* 20 *pièces défectueuses. Donner une valeur approchée de l'estimation ponctuelle de la proportion de lots à jeter.*

Exercice 3 ***Bornes de Cramér-Rao***
Pour chacun des modèles suivants, rappeler l'estimateur par maximum de vraisemblance, et dire s'il est efficace.

1. $\mathcal{B}in(N, p)$*,* N *connu*
2. $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$*,* σ *connu*
3. $\mathcal{N}(m, v)$*,* m *connu*

Exercice 4 ***Maximum de vraisemblance vs méthode des moments***
Soient $X_1, \cdots, X_n$*, une suite de v.a. i.i.d. de densité* $f_v(x) = C_v x^{v-1} \mathbb{1}_{0 \leq x \leq 1}$*, avec* $v \geq 1$*.*

1. *Donner* C_v *en fonction de* v*.*
2. *Calculer l'EMV du paramètre* v
3. *Calculer* $\mathbb{E}[X]$*.*
4. *Estimer* v *par la méthode des moments (en utilisant* $\bar{X}$*)*

Exercice 5 Calcul de l'information de Fisher
Soient $X_1, \cdots, X_n$ *une suite de variables i.i.d. de loi issue d'une famille paramétrique de lois* $(f_\theta)_{\theta \in \Theta}$*.*
On définit l'information de Fisher du modèle par

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[\Big(\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta, X_1, \cdots, X_n) \Big)^2 \right],$$

où l *désigne la* log-*vraisemblance du modèle.*

1. *En permutant intégrale et dérivée partielle (on admet que l'on peut sous des conditions de régularité qu'on ne mentionnera pas ici), montrer que* $\mathbb{E}[\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta, X_1, \cdots, X_n)] \; = \; 0$.
2. *Montrer que* $I_n(\theta) = nI_1(\theta)$ *dans le cas i.i.d.*
3. *En déduire que* $I_n(\theta) = -n\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(f_\theta(X))\right]$.

Exercice 6 Calcul de la Borne de Cramér-Rao
On veut montrer que
La variance de n'importe quel estimateur sans biais T ***de*** θ ***vérifie toujours l'inégalité***

$$\mathrm{Var}\Big(T(X_1, \cdots, X_n)\Big) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}.$$

Dans tout l'exercice, on admet que l'on peut inverser $\mathbb{E}$ *et* $\frac{\partial}{\partial\theta}$ *- ce qui est vrai sous des hypothèses de régularités non mentionnées ici.*
Soient $X_1, \cdots, X_n$ *une suite de variables i.i.d. de loi issue d'une famille paramétrique de lois* $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$. *Soit* T *un estimateur sans biais de* θ.

1. *Montrer que* $\int (T-\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta = 1$, *en utilisant le fait que* T *soit sans biais.*
2. *En déduire que* $\mathbb{E}[(T-\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta, X)] = 1$.
3. *On admet l'inégalité de Cauchy-Schwartz :*

   $$\mathbb{E}[XY]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2].$$

   En appliquant cette inégalité, montrer que

   $$\mathrm{Var}(T)I_n(\theta) \geq 1,$$

   puis conclure.

Exercice 7 ***Maximum de vraisemblance et efficacité***
Soient $X_1, \cdots, X_n$, *une suite de v.a. i.i.d. de densité* $f_\theta(x) = C_\theta e^{-\frac{1}{\theta}x}\mathbb{1}_{x\in\mathbb{R}^+}$, *avec* $\theta \geq 0$.

1. *Donner* C_θ *en fonction de* θ.
2. *Calculer l'EMV* $\hat{T}$ *du paramètre* θ
3. *Cet estimateur est-il sans biais ?*
4. *Donner l'information de Fisher du modèle* $I_n(\theta)$, *et la borne de Cramèr-Rao*
5. $\hat{T}$ *est-il un estimateur efficace de* θ *?*

Exercice 8 ***Methode des moments pour la loi Gamma***
On définit la densité d'une loi Gamma de paramètres (k, β) *(on note* $X \sim$ *Gamma*(k, β)*) par*

$$f_{k,\beta}(x) = \frac{\beta^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\beta x}\mathbb{1}_{x\in\mathbb{R}^+},$$

où la fonction Γ *désigne la fonction Gamma d'Euler définie pour* $z > 0$, *par :*

$$\Gamma(z) = \int_{t\geq 0} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que* $\forall z > 0$, *on a*

   $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

2. *Soit* $X \sim$ *Gamma*(k, β), *calculer pour* $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X^p]$
3. *Calculer* $\mathrm{var}(X)$.
4. *Estimer* k, β *par la méthode des moments, en utilisant* $\mathbb{E}[X]$, *et* $\mathrm{var}(X)$.