

Exercice statistiques Bayésiennes : Région de crédibilité et fonction de coût (Durée : 50min)¹

1. On suppose que

$$X_i \mid m \sim_{i.i.d} \mathcal{N}(m, \sigma^2),$$

avec σ^2 connu. Montrer que le prior

$$m \sim \mathcal{N}(\mu, \tau),$$

est conjugué pour la loi des X_i . On posera pour la suite $\mu = 0, \tau = 1, \sigma = 1$

2. Rappeler l'expression, en fonction des observations X et des quantiles d'une loi normale, l'intervalle de confiance fréquentiste au niveau $\alpha = 0.05$
3. Donner, en fonction des observations X et des quantiles d'une loi normale, la région *HPD* au niveau $\alpha = 0.05$.
4. On considère la fonction de perte

$$L(\theta, \delta) = (\theta - \delta)\mathbb{1}_{\theta > \delta} + 2(\delta - \theta)\mathbb{1}_{\delta > \theta}.$$

Donner la décision bayésienne qui minimise le risque a posteriori.

5. Donner la loi prédictive.
6. On considère la fonction de perte prédictive

$$Lp(x_{n+1}, \delta) = (x_{n+1} - \delta)\mathbb{1}_{x_{n+1} > \delta} + 2(x_{n+1} - \theta)\mathbb{1}_{x_{n+1} > \theta}.$$

Donner la décision bayésienne qui minimise le risque a posteriori.

¹Reprend les exos 7 et 9 des slides