L2 Maths-Éco - Probabilités-Statistique 2 **-** 2019 – 2020

CC Final - Durée : $2h$

Calculatrices non programmables sont autorisées, le barème est donné à titre indicatif, et peut évoluer

Exercice 1 *(3.5 points)* ***Vrai ou Faux*** *(Argumenter en une phrase)*

1. *Un intervalle de confiance ponctuel changera à chaque nouvelle expérience* Vrai □ Faux □
2. *La zone de rejet d'un test d'hypothèse changera à chaque nouvelle expérience* Vrai □ Faux □
3. *Une variable aléatoire X à densité vérifiera nécessairement $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = x) = 0$* Vrai □ Faux □
4. *Un estimateur biaisé de variance nulle est préférable à un estimateur sans biais de variance non nulle* Vrai □ Faux □
5. *Si $\hat{T}$ est un estimateur efficace de θ, et BCR désigne la borne de Cramèr-Rao, alors $\mathrm{Var}(\hat{T}) = BCR$* Vrai □ Faux □
6. *Si $\hat{T}$ est un estimateur efficace de θ, et BCR désigne la borne de Cramèr-Rao, alors $\mathrm{Var}(\hat{T}) > BCR$* Vrai □ Faux □
7. *Lorsque l'on effectue un test d'hypothèse, plus la p-valeur est petite, plus on aura tendance à rejeter le test* Vrai □ Faux □

Exercice 2 *(4 points)* ***Manipulation de loi***
Soient $X, X_1, \cdots, X_n$ un échantillon i.i.d. de densité donnée par

$$f_X(x) = 4x^3 \mathbb{1}_{x\in[0,1]}.$$

1. *Calculer $\mathbb{E}[X]$.*
2. *Calculer la fonction de répartition F_X de X.*
3. *Calculer la fonction de répartition F_Y de $Y = X^3$, et en déduire sa densité f_Y.*
4. *Calculer la fonction de répartition F_Z de $Z = \min(X_1, \cdots, X_n)$, et en déduire sa densité f_Z.*

Exercice 3 *(5 points)* ***Estimation***
Soient $X_1, \cdots, X_n$ un échantillon i.i.d. de densité donnée par

$$f_\theta(x) = \frac{4x^3}{\theta} e^{-\frac{x^4}{\theta}} \mathbb{1}_{x\geq 0}, \text{ avec } \theta > 0$$

1. *Calculer $\mathbb{E}[X_1^4]$*
2. *Calculer l'estimateur $\hat{T}_{EMV}$ par maximum de vraisemblance de θ.*
3. *Cet estimateur est-il sans biais ?*
4. *Calculer l'information de Fisher du modèle.*
5. *L'estimateur $\hat{T}_{EMV}$ est-il efficace ?*

Exercice 4 *(2.5 points)* ***Test de chi-deux*** *Dans une entreprise, on a dénombré 5300 cas d'absence (dans l'année) se répartissant comme suit :*

	Homme	*Femme*
Maladie	2034	1466
Autres	1966	1534

1. *Donner la p-valeur du test de χ^2 d'indépendance. (on rappelle qu'on fera toujours un test unilatéral avec une zone de rejet à droite pour le χ^2-deux, et on pourra utiliser la table de χ^2 fournie en annexe)*
2. *Le test est-il rejeté au niveau $\alpha = 1\%$?*

Exercice 5 *(5 points)* ***Test sur la variance***

On veut évaluer la performance de deux appareils de mesures de pression, à haute-pression. Pour cela, on travaille a pression contante et contrôlée de $m_0 = 100$ bars, et on prend 10 mesures $X_{1,k}, \cdots, X_{10,k}$ avec chaque appareil k, et on calcule leur estimateur de la variance à espérance connue, $\hat{V}_1^2$ et $\hat{V}_2^2$ (définies par $\hat{V}_k^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_{i,k} - m_0)^2, pour k = 1, 2.$)

On modélise les mesures faites avec l'appareil i comme des réalisations indépendantes de lois normales d'espérance m_0 connue, et de variance σ_i^2 inconnue. Les observations ont donné $\hat{v}_1^2 = 0.07$ et $\hat{v}_2^2 = 0.012$.

1. *Rappeler la définition d'un χ^2 à n degrés de liberté (on ne demande pas la densité ici)*
2. *On rappelle que $\hat{V}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m_0)^2$. Quelle est la loi de $n\frac{\hat{V}^2}{\sigma^2}$? On argumentera sa réponse.*
3. *On vous donne la propriété suivante : La loi de Fisher $F(n_1, n_2)$ désigne un rapport de deux χ^2 indépendantes à respectivement n_1, n_2 degrés de libertés, renormalisés par le nombre de degrés de liberté : Si $U_1 \sim \chi^2(n_1)$ et $U_2 \sim \chi^2(n_2)$, et $U_1 \coprod U_2$, alors $\frac{\frac{U_1}{n_1}}{\frac{U_2}{n_2}} \sim F(n_1, n_2)$.*

   Expliquer pourquoi, si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, on a $\frac{n_1 \hat{V}_1^2}{n_2 \hat{V}_2^2} \sim F(n_1, n_2)$
4. *Calculer la p-valeur du test :*

   $$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
   $$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

   On pourra chercher une statistique mentionnée dans les question précédentes, et utiliser la fonction de répartition de la loi de Fisher donnée en certains points par les sorties de R suivantes ou le tableau de la loi de χ^2 en Annexe.

```
pf(0.07,10,10) = 0.00012
pf(0.17,10,10) = 0.00489
pf(1.489,10,10) = 0.72973
pf(2.915,10,10) = 0.94672
pf(5.83,10,10) = 0.99495
pf(11.66,10,10) = 0.9997
pf(0.269,10,10) = 0.025
pf(0.3358,10,10) = 0.05
pf(0.4306,10,10) = 0.1
pf(2.3226,10,10) = 0.9
pf(2.9782,10,10) = 0.95
pf(3.7168,10,10) = 0.975
```

5. *Le test au niveau $\alpha = 5\%$ est-il rejeté ? Donner la zone de rejet pour $\frac{n_1 \hat{V}_1^2}{n_2 \hat{V}_2^2}$.*
6. *On considère maintenant le test*

   $$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$$
   $$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

   Donner la nouvelle zone de rejet du test au niveau $\alpha = 5\%$.
7. *On considère maintenant l'alternative $H_1 : \sigma_1^2 > 2\sigma_2^2$. Calculer la puissance minimale du test sous cette hypothèse.*

Table de quantiles de la loi de $\chi^2(d)$ La table contient les nombres q tels que $\mathbb{P}\Big(\chi^2(d) < q\Big) = p$.

$d\backslash p$	0.001	0.002	0.005	0.01	0.015	0.025	0.05	0.1	0.2	0.8	0.9	0.95	0.975	0.985	0.99	0.995	0.998	0.999
1	$< 1e-04$	$< 1e-04$	$< 1e-04$	$2e-04$	$4e-04$	0.001	0.0039	0.0158	0.0642	1.6424	2.7055	3.8415	5.0239	5.9165	6.6349	7.8794	9.5495	10.8276
2	0.002	0.004	0.01	0.0201	0.0302	0.0506	0.1026	0.2107	0.4463	3.2189	4.6052	5.9915	7.3778	8.3994	9.2103	10.5966	12.4292	13.8155
3	0.0243	0.0387	0.0717	0.1148	0.1516	0.2158	0.3518	0.5844	1.0052	4.6416	6.2514	7.8147	9.3484	10.465	11.3449	12.8382	14.7955	16.2662
4	0.0908	0.1292	0.207	0.2971	0.3682	0.4844	0.7107	1.0636	1.6488	5.9886	7.7794	9.4877	11.1433	12.3391	13.2767	14.8603	16.9238	18.4668
5	0.2102	0.2801	0.4117	0.5543	0.6618	0.8312	1.1455	1.6103	2.3425	7.2893	9.2364	11.0705	12.8325	14.0978	15.0863	16.7496	18.9074	20.515
6	0.3811	0.4864	0.6757	0.8721	1.016	1.2373	1.6354	2.2041	3.0701	8.5581	10.6446	12.5916	14.4494	15.7774	16.8119	18.5476	20.7912	22.4577
7	0.5985	0.7411	0.9893	1.239	1.4184	1.6899	2.1673	2.8331	3.8223	9.8032	12.017	14.0671	16.0128	17.3984	18.4753	20.2777	22.6007	24.3219
8	0.8571	1.0375	1.3444	1.6465	1.8603	2.1797	2.7326	3.4895	4.5936	11.0301	13.3616	15.5073	17.5345	18.9739	20.0902	21.955	24.3521	26.1245
9	1.1519	1.3702	1.7349	2.0879	2.3349	2.7004	3.3251	4.1682	5.3801	12.2421	14.6837	16.919	19.0228	20.5125	21.666	23.5894	26.0564	27.8772
10	1.4787	1.7345	2.1559	2.5582	2.8372	3.247	3.9403	4.8652	6.1791	13.442	15.9872	18.307	20.4832	22.0206	23.2093	25.1882	27.7216	29.5883
11	1.8339	2.1265	2.6032	3.0535	3.3634	3.8157	4.5748	5.5778	6.9887	14.6314	17.275	19.6751	21.92	23.5028	24.725	26.7568	29.3536	31.2641
12	2.2142	2.543	3.0738	3.5706	3.9104	4.4038	5.226	6.3038	7.8073	15.812	18.5493	21.0261	23.3367	24.9628	26.217	28.2995	30.957	32.9095
13	2.6172	2.9816	3.565	4.1069	4.4757	5.0088	5.8919	7.0415	8.6339	16.9848	19.8119	22.362	24.7356	26.4034	27.6882	29.8195	32.5352	34.5282
14	3.0407	3.4398	4.0747	4.6604	5.0572	5.6287	6.5706	7.7895	9.4673	18.1508	21.0641	23.6848	26.1189	27.8268	29.1412	31.3193	34.0913	36.1233
15	3.4827	3.9159	4.6009	5.2293	5.6534	6.2621	7.2609	8.5468	10.307	19.3107	22.3071	24.9958	27.4884	29.2349	30.5779	32.8013	35.6276	37.6973
16	3.9416	4.4081	5.1422	5.8122	6.2628	6.9077	7.9616	9.3122	11.1521	20.4651	23.5418	26.2962	28.8454	30.6292	31.9999	34.2672	37.1461	39.2524
17	4.4161	4.9153	5.6972	6.4078	6.8842	7.5642	8.6718	10.0852	12.0023	21.6146	24.769	27.5871	30.191	32.0112	33.4087	35.7185	38.6485	40.7902
18	4.9048	5.4361	6.2648	7.0149	7.5165	8.2307	9.3905	10.8649	12.857	22.7595	25.9894	28.8693	31.5264	33.3817	34.8053	37.1565	40.1361	42.3124
19	5.4068	5.9694	6.844	7.6327	8.1588	8.9065	10.117	11.6509	13.7158	23.9004	27.2036	30.1435	32.8523	34.742	36.1909	38.5823	41.6103	43.8202
20	5.921	6.5144	7.4338	8.2604	8.8105	9.5908	10.8508	12.4426	14.5784	25.0375	28.412	31.4104	34.1696	36.0926	37.5662	39.9968	43.072	45.3147
21	6.4467	7.0703	8.0337	8.8972	9.4708	10.2829	11.5913	13.2396	15.4446	26.1711	29.6151	32.6706	35.4789	37.4345	38.9322	41.4011	44.5222	46.797
22	6.983	7.6362	8.6427	9.5425	10.139	10.9823	12.338	14.0415	16.314	27.3015	30.8133	33.9244	36.7807	38.7681	40.2894	42.7957	45.9618	48.2679
23	7.5292	8.2116	9.2604	10.1957	10.8147	11.6886	13.0905	14.848	17.1865	28.4288	32.0069	35.1725	38.0756	40.0941	41.6384	44.1813	47.3915	49.7282
24	8.0849	8.7959	9.8862	10.8564	11.4974	12.4012	13.8484	15.6587	18.0618	29.5533	33.1962	36.415	39.3641	41.413	42.9798	45.5585	48.8118	51.1786
25	8.6493	9.3885	10.5197	11.524	12.1867	13.1197	14.6114	16.4734	18.9398	30.6752	34.3816	37.6525	40.6465	42.7252	44.3141	46.9279	50.2234	52.6197
26	9.2221	9.989	11.1602	12.1981	12.8821	13.8439	15.3792	17.2919	19.8202	31.7946	35.5632	38.8851	41.9232	44.0311	45.6417	48.2899	51.6269	54.052
27	9.8028	10.5969	11.8076	12.8785	13.5833	14.5734	16.1514	18.1139	20.703	32.9117	36.7412	40.1133	43.1945	45.3311	46.9629	49.6449	53.0226	55.476
28	10.3909	11.2118	12.4613	13.5647	14.29	15.3079	16.9279	18.9392	21.588	34.0266	37.9159	41.3371	44.4608	46.6256	48.2782	50.9934	54.411	56.8923
29	10.9861	11.8334	13.1211	14.2565	15.0019	16.0471	17.7084	19.7677	22.4751	35.1394	39.0875	42.557	45.7223	47.9147	49.5879	52.3356	55.7925	58.3012
30	11.588	12.4614	13.7867	14.9535	15.7188	16.7908	18.4927	20.5992	23.3641	36.2502	40.256	43.773	46.9792	49.1989	50.8922	53.672	57.1674	59.7031