

SIGNAL ET BRUIT

Les trois parties acquisition, analyse et traitement du signal sont présentées séparément afin de d'étudier les spécificités liées à chaque thème. Il faut cependant se méfier de ce genre de cloisonnement car les trois aspects sont souvent liés (l'acquisition correcte d'un signal demande une analyse préalable de ses caractéristiques par exemple).

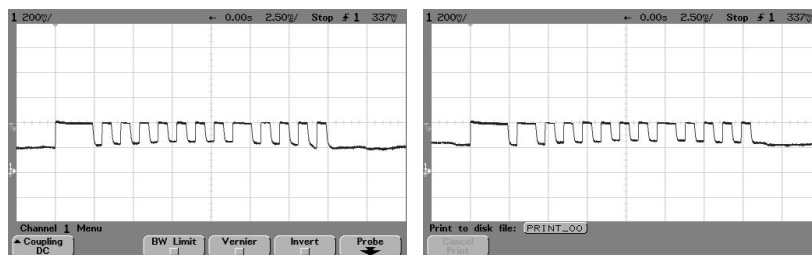
I ACQUISITION D'UN SIGNAL TEMPOREL

I.1 Intérêt

L'acquisition est indispensable pour étudier des signaux transitoires. Ceux ci sont en effet impossibles à étudier avec un oscilloscope analogique puisque, par nature, ils ne se répètent pas. On est donc obligé de mettre en mémoire des échantillons du signal pour pouvoir ensuite le retranscrire sur un écran.

Manipulation :

On peut facilement observer les signaux issus d'une télécommande à infrarouge grâce à une photodiode et un oscilloscope numérique. Il suffit de prendre le signal directement aux bornes de la photodiode (on l'utilise alors en mode photovoltaïque). Suivant le sens de branchement, les pulses sont positifs ou négatifs. On peut commencer par observer en mode automatique le signal émis par la télécommande lorsqu'on appuie sur une touche quelconque. On doit voir des trains de pulses se répéter furtivement. On peut alors ajuster les calibres de l'oscilloscope pour observer convenablement les pulses (typiquement 0,2 V/div et 20 ms/div avec la plupart des télécommandes), ajuster le niveau de déclenchement sur les pulses, puis passer en déclenchement mono coup. Voici à titre indicatif des acquisitions correspondant à 2 touches différentes :



On peut comparer ces deux signaux numériques (codage en largeur d'impulsion avec un premier front d'initialisation), indiquer sur combien de bit est codée l'information (12 ici) et montrer les différences. Les trains de pulses peuvent être plus ou moins long suivant la télécommande choisie. Il vaut mieux en tester plusieurs et en choisir une avec des trains de pulses assez courts pour faciliter l'analyse.

I.2 Cas des signaux périodiques

L'intérêt de l'acquisition ne se limite évidemment pas aux phénomènes transitoires. On peut aussi enregistrer des signaux périodiques pour étudier leur spectre grâce aux possibilités de calculs des systèmes numériques. L'idée ici est de montrer un des intérêts fondamentaux de l'analyse spectrale par rapport à l'observation temporelle du signal. Une déformation imperceptible dans le domaine temporel l'est dans le domaine fréquentiel.

Manipulation :

La mesure du taux de distorsion du signal sinusoïdal produit par GBF est une bonne illustration de l'intérêt d'une analyse spectrale : il est effectivement impossible de repérer les défauts d'un signal sinusoïdal issu d'un GBF sur son allure temporelle alors qu'ils sont facilement détectables sur son spectre.

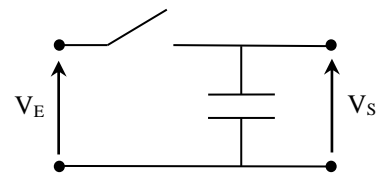
I.3 Conséquences de l'échantillonnage du signal

Pour numériser le signal, on utilise un convertisseur analogique-numérique (CAN) mais l'opération n'est pas instantanée → le signal doit être maintenu constant le temps que le CAN réalise la conversion. C'est le rôle de l'échantillonneur-bloqueur.

I.3.1 Principe de l'échantillonneur-bloqueur

Le principe de base consiste à utiliser un interrupteur commandé par un signal d'horloge, la tension à l'ouverture étant gardée constante grâce à un condensateur :

Une fois le contact fermé, la capacité se charge à la valeur du signal et conserve cette valeur le temps de la conversion. Le contact réalise l'échantillonnage. La capacité réalise le blocage.

**I.3.2 Manipulation**

[1], p. 280.

Le montage proposé en [1] peut être allégé si on dispose d'un GBF permettant de produire des signaux avec un rapport cyclique suffisamment faible (inférieur à 10 %) :

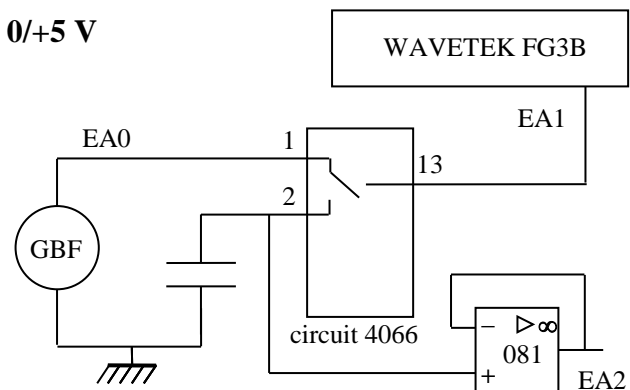
Circuit 4066 : interrupteur logique **alimenté en 0/+5 V**

GBF : sinusoïde 50 ou 100 Hz **entre 0 et 5 V**

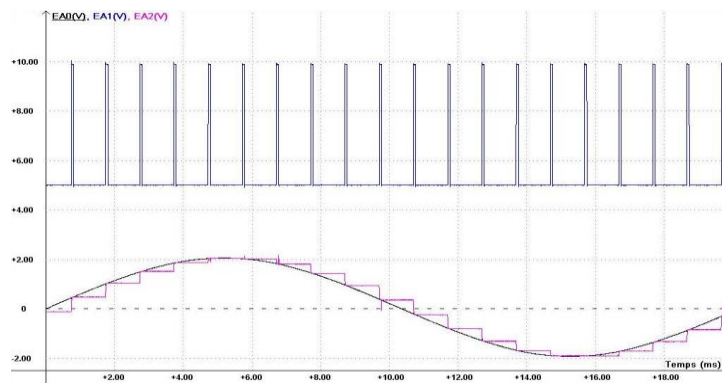
C : 10 nF (valeur non critique)

Wavetek : pulses TTL à 1 kHz
Rapport cyclique au maximum

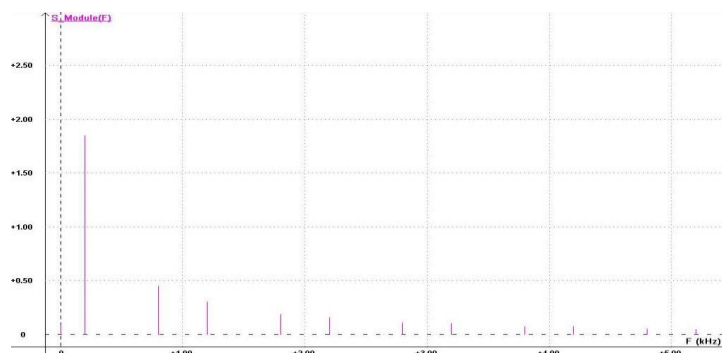
Acquisition : 10 000 points, $T_{ech} = 2 \mu s$



Pour plus de simplicité, on utilise la sortie TTL du GBF pour commander l'interrupteur logique du circuit 4066 → il doit être alimenté entre 0 et 5 V pour assurer la commande logique de l'interrupteur. Le circuit ne pouvant traiter que des signaux compris dans sa plage d'alimentation, **il faut que le signal à échantillonner** (la sinusoïde) **soit compris entre 0 et 5 V** (utiliser le réglage d'OFFSET du GBF). L'amplificateur opérationnel 081 monté en suiveur permet d'éviter une décharge du condensateur dans le système de mesure étant donné la faible valeur de C. On prend une valeur T_{ech} suffisamment faible pour décrire correctement les « pulses » de commande de l'interrupteur. On choisit alors le nombre de points pour obtenir une durée totale d'observation T_{obs} telle que $1/T_{obs}$ soit un sous multiple de la fréquence du signal sinusoïdal et de celle des pulses (cf. ci-après). On obtient alors les courbes suivantes lorsqu'on prend un signal sinusoïdal de 50 Hz (pour faciliter l'observation, les signaux EA0 et EA2 ont été « recentrés » sur zéro lors de l'acquisition et les pulses ont été décalés) :



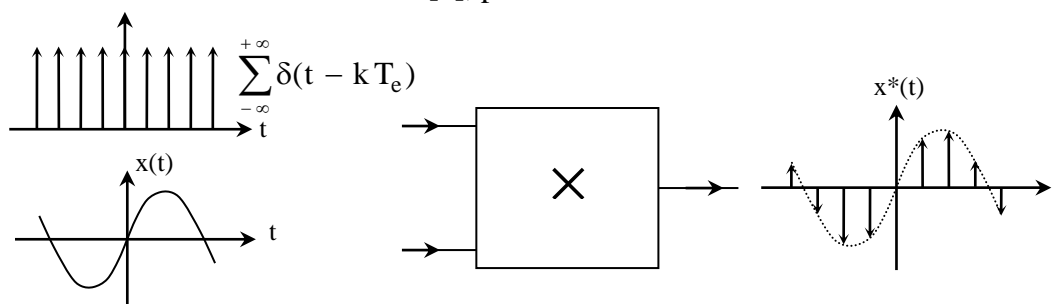
On peut faire l'analyse spectrale du signal d'entrée EA0 et du signal échantillonné EA2 pour observer les différences. Le spectre du signal échantillonné contient, en plus de la fréquence du signal, des fréquences à $F_{\text{éch}} - F_{\text{signal}}$ et $F_{\text{éch}} + F_{\text{signal}}$, à $2F_{\text{éch}} - F_{\text{signal}}$ et $2F_{\text{éch}} + F_{\text{signal}}$, ... :



Attention, la fréquence du signal sinusoïdal et celle des pulses doivent être exactement des multiples de $1/T_{\text{obs}}$ pour que le spectre obtenu ait l'allure ci-dessus, sinon il apparaît des raies parasites. Ceci est lié au fait que les algorithmes FFT calculent le spectre des signaux à des fréquences qui sont des multiples de $1/T_{\text{obs}}$. Le résultat donne alors uniquement les fréquences du signal si ces fréquences correspondent à un point de calcul (cf. § II.2.2). Le réglage de f_{signal} et f_{pulses} doit donc être soigné.

I.3.3 Explication

[5], p. 710-715



D'un point de vue mathématique, échantillonner un signal $x(t)$ revient à le multiplier par un peigne de Dirac :

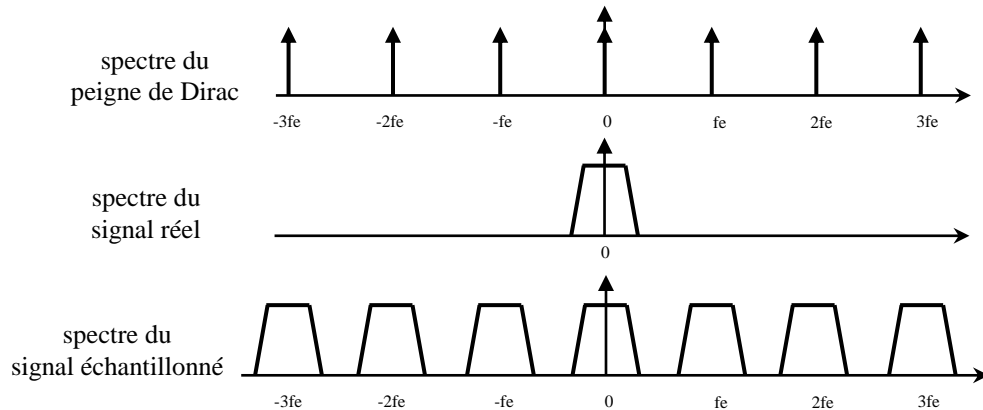
$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_{\text{éch}}) \quad \text{Où } T_{\text{éch}} \text{ est la période d'échantillonnage.}$$

Pour afficher le spectre, le logiciel calcule la transformée de Fourier (TF) du signal échantillonné $x^*(t)$. Or la TF d'un produit de fonctions correspond au produit de convolution (noté \otimes) des TF de chaque fonction (cf. § II.2 de l'annexe 1). Comme la TF d'un peigne de Dirac temporel est un

peigne de Dirac fréquentiel, le spectre calculé du signal échantillonné est :

$$X^*(f) = \text{TF}[x^*(t)] = X(f) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_{\text{éch}}) \times f_{\text{éch}}$$

Où $X(f)$ le spectre du signal analogique et $f_{\text{éch}} = 1/T_{\text{éch}}$ la fréquence d'échantillonnage. On peut résumer ce produit de convolution à l'aide des représentations suivantes :



→ **L'échantillonnage conduit à une périodisation du spectre du signal**

Remarque :

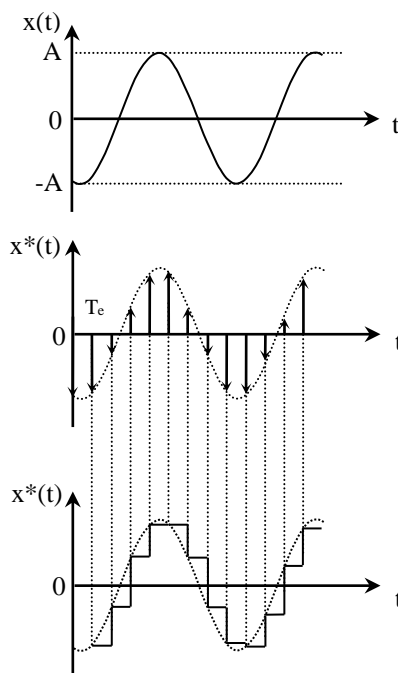
La forte atténuation des spectres d'ordre 2 et d'ordre supérieur qu'on constate expérimentalement résulte du temps de blocage non nul : le peigne de Dirac représentant l'échantillonnage temporel est convolué par une fonction rectangle de durée $T_{\text{blocage}} \approx T_{\text{éch}} \rightarrow$ On a :

$$x^*(t) = x(t) \cdot [(\text{peigne temporel}) \otimes \text{rect}(t/T_{\text{éch}})]$$

$$\begin{aligned} \rightarrow X^*(f) &= X(f) \otimes \text{TF}[(\text{peigne temporel}) \otimes \text{rect}(t/T_{\text{éch}})] = X(f) \otimes [\text{TF}(\text{peigne temporel}) \times \text{TF}(\text{rect}(t/T_{\text{éch}}))] \\ &= X(f) \otimes [(\text{peigne fréquentiel}) \times (\text{sinc}(\pi f/f_{\text{éch}}))] \end{aligned}$$

→ Le peigne de Dirac fréquentiel est modulé en amplitude par un sinus cardinal. Au final, on peut résumer le tout de la façon suivante :

REPRESENTATIONS TEMPORELLES



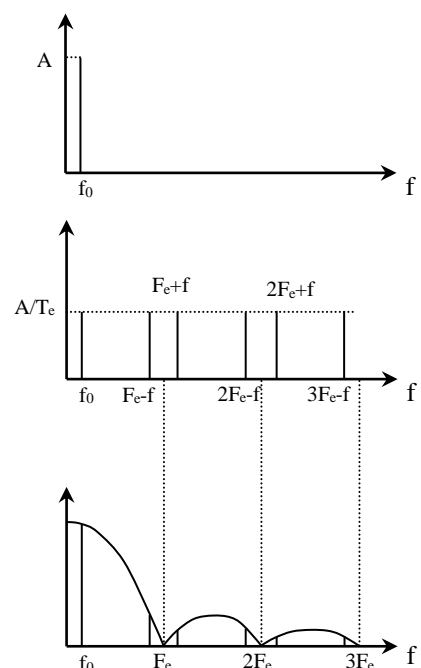
ECHANTILLONNAGE



BLOCAGE



SPECTRES



I.4 Numérisation des échantillons : quantum de conversion et rapport signal/bruit du convertisseur idéal

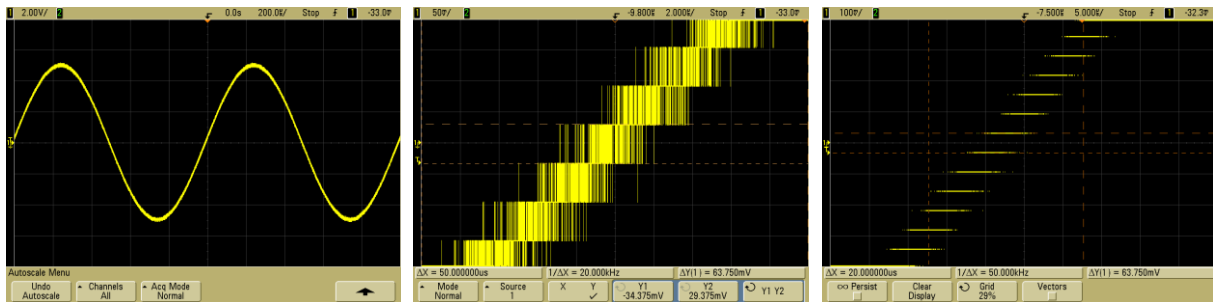
La quantification remplace une grandeur continue par une valeur discrète appartenant à un ensemble fini de valeurs possibles. Le codage sur N bits permettant de distinguer $n = 2^N$ niveaux séparés par $2^N - 1$ intervalles, le pas de description de l'échelle $\pm V_{\max}$ d'un CAN, appelé quantum, vaut :

$$q = \frac{2 \cdot V_{\max}}{2^N - 1}$$

Il correspond à la hauteur des « marches d'escalier » visibles sur l'allure des signaux échantillonnés. Sa mesure permet de connaître le nombre de bits du convertisseur.

Avec un oscilloscope :

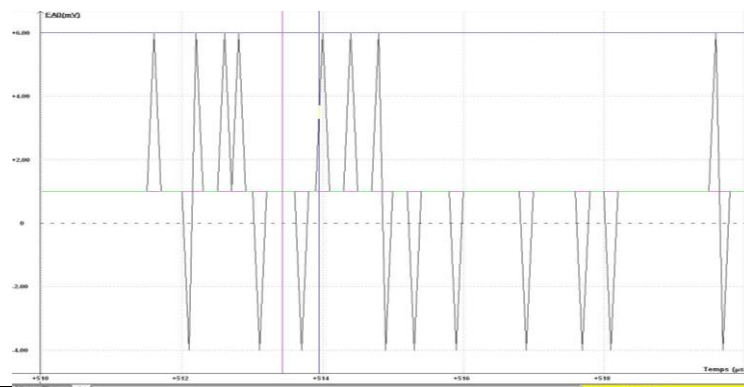
Le quantum est facile à observer avec un oscilloscope récent. Il suffit de stopper l'acquisition d'un signal effectuée en mode normal (sans moyennage ou lissage). On dilate ensuite les échelles de temps et d'amplitude jusqu'à observer l'allure en forme de marche d'escalier de l'oscillogramme :



On peut désactiver l'option de vectorisation qu'utilise par défaut l'appareil pour relier les différents échantillons¹ afin de rendre l'effet encore plus visible (cf. figure de droite). Le signal ci-dessus a été enregistré avec un calibre de 2V/division. L'écran comportant 8 divisions verticales, l'acquisition s'est faite sur une plage $2V_{\max} = 16$ V. Une mesure avec les curseurs donne $q = 63,75$ mV \rightarrow l'échelle verticale est décrite sur $n = 2^N = 16\text{V}/63,75\text{mV} + 1 = 252$ niveaux, valeur proche de 256 (la gamme complète des valeurs possibles n'est pas entièrement reportée sur l'écran) \rightarrow l'oscilloscope utilise donc un convertisseur 8 Bits pour enregistrer les signaux.

Avec Synchronie :

On peut procéder de la même façon. Une méthode encore plus simple (utilisable aussi avec l'oscilloscope) consiste à lancer un enregistrement avec l'entrée court-circuitée. Il suffit de zoomer ensuite très fortement autour de la valeur nulle :

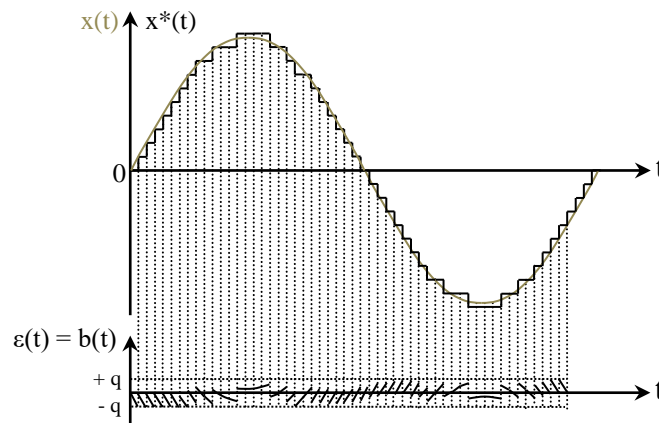


¹ On peut noter au passage les sauts incessants entre un niveau et ses plus proches voisins.

On aperçoit nettement la quantification grâce aux petites perturbations provoquant des sauts incessants entre les niveaux les plus proches de zéro. L'enregistrement ci-dessus a été fait sur le calibre ± 10 V de la carte. On a mesuré $q = 4,99$ mV donc l'échelle verticale est décrite sur $n = 20\text{V}/4,99\text{mV} + 1 = 4009$ niveaux, valeur proche de 4096 \rightarrow la carte d'acquisition SYSAM SP5 de Synchronie échantillonne les signaux sur 12 Bits.

Bruit induit par la quantification :

La quantification conduit par nature à des écarts entre le signal réel et le signal équivalent aux valeurs numériques obtenues à l'issue du processus :



On peut regrouper ces écarts dans un signal d'erreur $\varepsilon(t) = x^*(t) - x(t)$. Cela permet de considérer le signal digital comme la superposition du signal réel avec ce signal d'erreur $\varepsilon(t)$ qu'on considère équivalent à un bruit $b(t)$ lié au processus de quantification. Ce mode de description étonnant de prime abord est assez logique car le quantum limitant la résolution du CAN, il empêche l'observation de plus fins détails donc il se comporte de la même manière qu'un bruit parasitant un signal. Si la conversion est suffisamment fine, $b(t)$ évolue majoritairement en dent de scie, avec une amplitude maximale égale à q . Sa valeur efficace B_q n'a pas d'expression unique puisque $b(t)$ dépend de la règle d'arrondi, de la forme du signal et de la différence de fréquence entre le signal et le convertisseur. On l'estime généralement en considérant une erreur totalement en dent de scie obtenue par arrondi au plus proche (cf. [6], p. 133) :

$$B_q = q/(2\sqrt{3})$$

On peut comparer ce résultat avec le bruit réellement présent sur l'entrée d'un système d'acquisition en l'absence de signal². Voici à titre indicatif des résultats obtenus sur différents calibres pour 4 oscilloscopes différents, utilisant tous des convertisseurs 8 Bits et allumés depuis une heure (les valeurs efficaces ont été obtenues à l'aide des fonctions de mesures automatiques des appareils) :

Calibre (V/div)	5	2	1	0,5	0,2	0,1	0,05
B_{eff} (mV) DSO 5012 A	125	97	33	17	3,6	1,76	0,992
B_{eff} (mV) DSO 5012 A	86	42	27	20,5	3,5	2	1,7
B_{eff} (mV) DSO-X 2002A	137	64	32	17	5	2,9	1,7
B_{eff} (mV) DSO-X 2002A	240	143	58	27	8	4,9	3
moyenne	147,0	86,5	37,5	20,4	5,0	2,9	1,8
Quantum 8 Bits (mV)	156,3	62,5	31,3	15,6	6,3	3,1	1,6

² Noter qu'on ne mesure pas B_q dans ce cas : on mesure une valeur efficace qui résulte d'instabilités provoquant des sauts entre des niveaux proches alors que B_q , qui chiffre l'écart entre un signal idéal et une fonction de transfert du CAN toute aussi idéale (aucunes fluctuations des deux côtés), est fondamentalement nul dans cette expérience (pas de signal).

B_q (mV)	45,1	18,0	9,0	4,5	1,8	0,9	0,5
------------	------	------	-----	-----	-----	-----	-----

Il y a des écarts dans une même famille mais B_{eff} suit l'évolution du calibre et est de l'ordre du quantum (c'est particulièrement remarquable lorsqu'on moyenne les résultats sur les 4 appareils). Le bruit expérimental B_{eff} est systématiquement supérieur à B_q , ce qui est normal puisque les perturbations provoquent des sauts entre des niveaux voisins alors que B_q est calculé sur un signal d'erreur normalisé en l'absence de perturbations. La manipulation a aussi été testée sur Synchronie avec une carte d'acquisition SYSAM SP5 (l'entrée utilisée doit être absolument court-circuitée sinon on récupère trop de bruit d'influence sur les plus faibles calibres³). On obtient des résultats similaires :

Calibre +/- (V)	10	5	1	0,2
B_{eff} (mV)	1,80	1,40	0,27	0,098
Quantum 12 Bits (mV)	4,88	2,44	0,49	0,098
B_q (mV)	1,41	0,70	0,14	0,03

Les mesures de bruit sur un signal réel sont donc proches B_q sans toutefois l'atteindre puisque du bruit supplémentaire s'ajoute toujours au signal d'erreur $\varepsilon(t)$ → **En l'absence de tout traitement du signal ultérieur, B_q donne une estimation du seuil minimum de bruit pour un convertisseur à nombre de bits donné.**

Rapport signal sur bruit induit par la quantification :

Le RSB^4 correspond au rapport entre la puissance moyenne du signal et celle du bruit (cf. [6], p. 103). Il s'exprime en dB par la relation (cf. annexe 3) :

$$\text{RSB} = 20\log(S_{\text{eff}} / B_{\text{eff}})$$

Connaissant la valeur plancher B_q du bruit d'un convertisseur, on peut calculer le RSB pour un signal donné. On considère par convention un signal sinusoïdal parcourant la pleine échelle d'un CAN à N bits. Dans ce cas, on montre facilement (cf. [6], p. 133) que le RSB vaut ⁵ :

$$\text{RSB} = 6,02 \times N + 1,76$$

Ce résultat montre **qu'un bit supplémentaire fait gagner 6 dB de RSB** → les CAN utilisés dans les oscilloscopes numériques d'enseignement les plus courants ont un RSB d'environ 50 dB (CAN 8 Bits) et ceux des cartes d'acquisition de Synchronie ont un RSB de 74 dB (CAN 12 Bits).

II INFLUENCE DES PARAMETRES TEMPORELS D'ACQUISITION

II.1 Condition à respecter sur la fréquence d'échantillonnage

La périodisation du spectre du signal autour de $\pm k f_{\text{éch}}$ impose, par rapport au spectre à analyser, un critère sur le choix de la fréquence d'échantillonnage. Il faut respecter le critère de Shannon pour éviter que les spectres des différents ordres ne se recouvrent :

$$f_{\text{éch}} > 2 \cdot f_{\text{max du spectre}}$$

³ Problème lié à la nature flottante des alimentations de ce type de carte.

⁴ Noté SNR en anglais pour « Signal to Noise Ratio ».

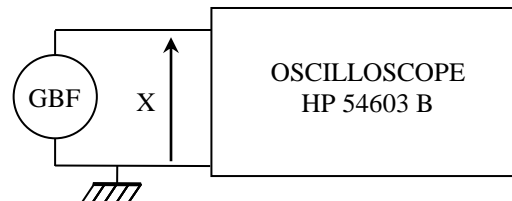
⁵ La constante du premier terme correspond à $20\log(2)$ et il donne déjà une bonne estimation du RSB si on oublie le supplément de 1,76 dB.

On peut montrer sur deux exemples simples ce qu'entraîne le non-respect de ce critère.

II.1.1 Cas d'un signal sinusoïdal

Observation à l'oscilloscope :

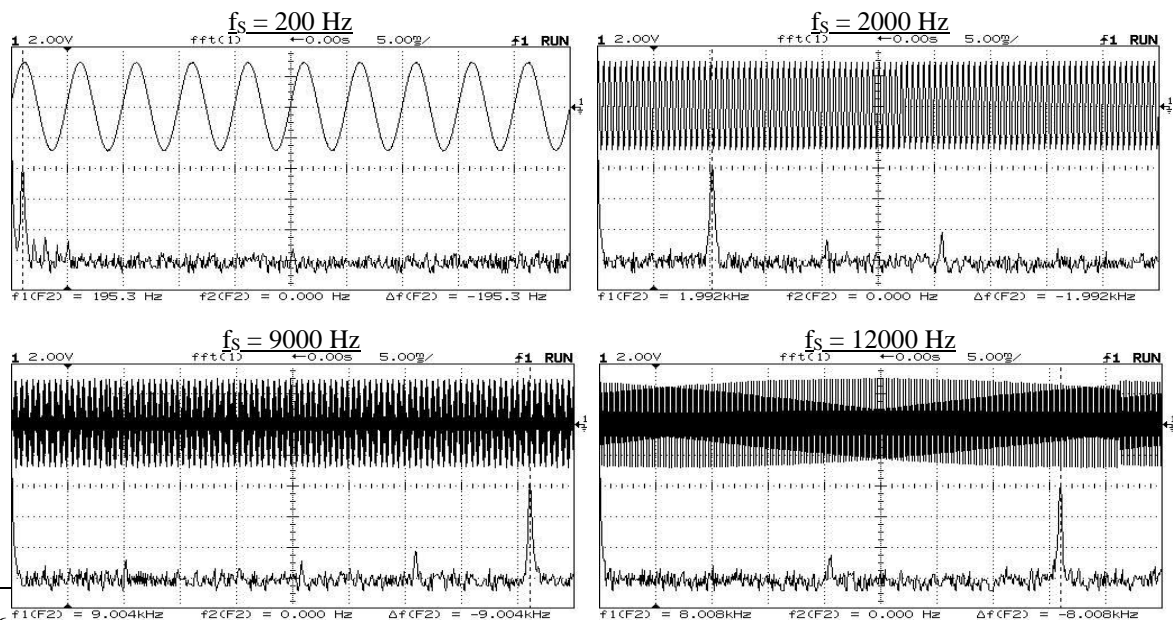
La manipulation est plus simple à réaliser avec un GBF numérique et un oscilloscope d'ancienne génération (cf. remarque ci-après). On peut démarrer par exemple avec un signal sinusoïdal d'environ 200 Hz et régler la fréquence d'échantillonnage à 20 kHz :



On obtient alors un oscillogramme correspondant à la première figure à gauche ci-dessous. On peut vérifier à l'aide des curseurs que l'appareil donne une représentation fréquentielle comprise entre 0 et 10 kHz⁶, soit entre 0 et $f_{\text{éch}}/2$. La base de temps utilisée dans ces conditions étant de 5 ms/division et l'écran s'étalant horizontalement sur 10 carreaux, on observe le signal pendant 50 ms. On peut en déduire le nombre d'échantillons utilisés pour le calcul de la FFT puisqu'on a $T_{\text{obs}} = N_{\text{éch}} \times T_{\text{éch}} = N_{\text{éch}}/f_{\text{éch}} \rightarrow$ On trouve $N_{\text{éch}} = T_{\text{obs}} \times f_{\text{éch}} = 50.10^{-3} \times 20.10^3 = 1\,000$ points, résultat conforme aux informations données en annexe 4⁷. On peut aussi remarquer qu'on a une assez bonne représentation temporelle du signal, mais que le spectre en fréquence est assez « tassé »⁸.

Modification de la fréquence f_s du signal :

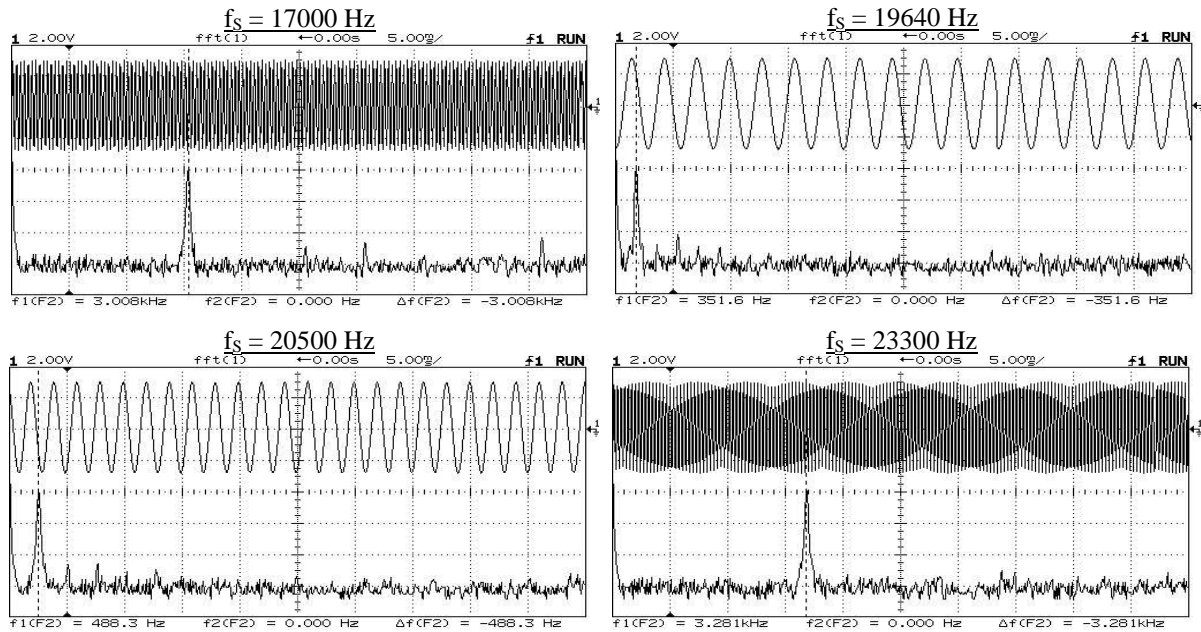
On note l'évolution du spectre calculé en conservant la même fréquence d'échantillonnage de 20 kHz pour l'oscilloscope (base de temps inchangée).:



⁶ 9766 Hz exactement car l'intervalle 0 - $f_{\text{éch}}/2$ est calculé sur 1024 points avec l'oscilloscope proposé mais l'appareil affiche seulement 1000 points.

⁷ On peut aussi noter au passage que l'appareil prend 2 fois moins d'échantillons que ne le permet sa profondeur mémoire lorsqu'il doit effectuer une FFT du signal car c'est une opération lourde en termes de calculs.

⁸ C'est inévitable vu la double contrainte sur T_{obs} : d'un côté, l'observation temporelle correcte du signal suppose qu'on l'affiche sur quelques périodes ($N_{\text{per}} = 2$ ou 3 en général). On a donc $T_{\text{obs}} = N_{\text{per}} \times T_{\text{signal}} = N_{\text{per}}/f_s$. Or, on a aussi $T_{\text{obs}} = N_{\text{éch}}/f_{\text{éch}}$ avec $N_{\text{éch}} = 1\,000$ pour l'oscilloscope considéré. On a donc $f_{\text{éch}} = (N_{\text{éch}}/N_{\text{per}}) \cdot f_s \gg f_s$. Le résultat est somme toute logique (il vaut mieux échantillonner le signal à une fréquence très élevée pour pouvoir le reproduire correctement), mais il engendre en contrepartie une mauvaise représentation fréquentielle puisque l'appareil affiche par défaut le spectre entre 0 et $f_{\text{éch}}/2$.



Lorsqu'on augmente la fréquence du signal tout en la maintenant en dessous du critère de Shannon (10 kHz ici), la représentation temporelle devient mauvaise mais n'est pas fautive (cf. figures $f_s = 2\,000\text{ Hz}$, $f_s = 9\,000\text{ Hz}$). La représentation fréquentielle quant à elle s'améliore progressivement puisque l'échelle est de mieux en mieux adaptée à la fréquence du signal.

Si on augmente encore f_s , le spectre devient faux (cf. figures $f_s = 12\,000\text{ Hz}$, $f_s = 17\,000\text{ Hz}$) : la fréquence qui se déplaçait jusqu'alors de gauche à droite réapparaît en se déplaçant maintenant de la droite vers la gauche. On est en sous échantillonnage car on ne respecte plus alors le critère de Shannon. On peut vérifier à la vue des fréquences mesurées qu'on observe le repliement de l'ordre + 1. A ce stade, la représentation temporelle est mauvaise mais n'induit pas en erreur.

Lorsque f_s s'approche de $f_{\text{éch}}$, il apparaît en plus des fausses représentations temporelles du signal⁹ (cf. figure $f_s = 19\,640\text{ Hz}$ ¹⁰ par exemple). On observe un signal apparemment correct mais évidemment faux puisqu'il résulte d'un battement entre f_s et $f_{\text{éch}}$ analogue au phénomène de stroboscopie¹¹ (cf. [1], p. 46). La fréquence apparente de cette fausse représentation diminue au fur et à mesure que f_s s'approche de $f_{\text{éch}}$, et s'annule lorsque f_s vaut $f_{\text{éch}}$, de la même manière que l'on fige un mouvement périodique avec un stroboscope lorsqu'il est calé exactement sur la fréquence du mouvement. On a les mêmes phénomènes pour une fréquence du signal supérieure à $f_{\text{éch}}$ (figure $f_s = 20\,500\text{ Hz}$) mais les fréquences observées se déplacent de nouveau de la gauche vers la droite : c'est le spectre d'ordre - 1 qui se replie cette fois-ci.

En conclusion, il faut faire attention à la fréquence à laquelle on échantillonne un signal et respecter le critère de Shannon. Et lorsqu'on utilise un oscilloscope réglé par défaut, un compromis doit être fait entre une bonne représentation temporelle ou une bonne représentation fréquentielle du signal.

Remarque :

Certains oscilloscopes récents utilisent beaucoup plus de points lorsqu'ils calculent une FFT → Comme $T_{\text{obs}} = N_{\text{éch}}/f_{\text{éch}}$, il faut alors une durée d'observation nettement plus longue

⁹ Si on coupe la FFT lorsqu'on observe une fausse représentation, celle-ci disparaît car l'oscilloscope réutilise alors 2000 points → Il faut envoyer un signal à une fréquence deux fois plus grande pour retrouver une fausse représentation.

¹⁰ Dans la pratique, la figure n'est pas forcément parfaitement stable à l'écran mais on peut réduire son défilement en jouant finement sur la fréquence du GBF.

¹¹ On peut d'ailleurs vérifier sur la figure que la fréquence apparente vaut bien $f_{\text{éch}} - f_{\text{signal}}$.

pour obtenir la même fréquence d'échantillonnage¹². La manipulation proposée reste évidemment faisable mais les fausses représentations temporelles sont plus délicates à obtenir car il faut une fréquence f_s encore plus proche de $f_{éch}$ pour observer facilement une fausse fréquence sur une durée T_{obs} plus grande. Certains oscilloscopes compliquent encore plus la tâche en utilisant un nombre de points différents pour le calcul du spectre et pour l'affichage du signal. C'est le cas par exemple de l'Agilent DSO 5012A qui emploie 1 000 points pour calculer la FFT qu'il affiche, alors qu'il représente temporellement le signal avec 500 000 points¹³ ! La fréquence d'échantillonnage temporelle réelle est donc 500 fois plus grande que le FFT Sample Rate annoncé, et si le FFT Sample Rate est calé sur 20 kHz, il faut envoyer un signal à ≈ 10 MHz pour observer des fausses représentations temporelles¹⁴ ! Les performances modestes des anciennes générations d'oscilloscopes facilitent donc grandement la manipulation proposée.

Observation avec Synchronie :

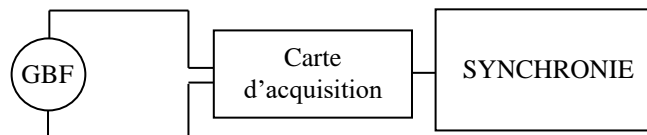
Pour faire l'expérience précédente, il suffit de prendre $T_{éch} = 50 \mu s$ pour se caler sur une fréquence d'échantillonnage de 20 kHz, et prendre $N_{éch} = 1\,000$ points pour observer le signal sur une même durée. On a aussi intérêt à utiliser une fenêtre de pondération de type Hanning¹⁵ lors du calcul de la FFT pour limiter le phénomène de fuites spectrales (cf. § II.2).

II.1.2 Cas d'un signal contenant des harmoniques

Le critère de Shannon doit s'appliquer à tout le spectre du signal. On propose cette fois ci d'utiliser plutôt le logiciel Synchronie car il permet une observation entre 0 et $F_{éch} \rightarrow$ on peut mieux montrer l'évolution vers le repliement.

Montage :

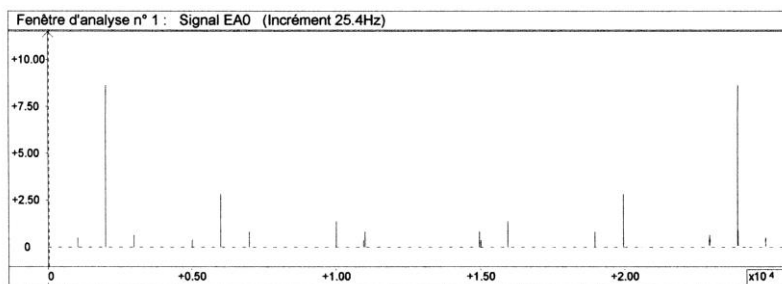
[1], p. 49.



Paramètres d'acquisition : 1000 points, $T_{éch} = 40 \mu s \rightarrow F_{éch} = 25$ kHz

Paramètres FFT : périodes \rightarrow auto ; limite d'affichage $\rightarrow 0 - F_e$

Si on procède à l'acquisition d'un signal carré de fréquence $F_{signal} < 500$ Hz, on observe deux spectres symétriques distincts (pas de repliement). Ce n'est plus le cas pour des fréquences supérieures : les deux spectres commencent à s'imbriquer l'un dans l'autre. Voici par exemple le résultat d'une acquisition obtenue pour une fréquence du signal d'environ 2 000 Hz :



¹² La différence est particulièrement spectaculaire avec l'oscilloscope DS0-X 2002A puisqu'il peut prendre jusqu'à 65000 points \rightarrow échantillonner un seul signal à 10 kHz avec cet appareil impose par exemple d'observer pendant 5 secondes, alors que 100 ms suffisent avec l'HP 54603B lorsqu'il calcule une FFT !

¹³ Si une seule voie est activée en mode Normal.

¹⁴ On peut le vérifier plus facilement en prenant un FFT Sample Rate de 200 Hz \rightarrow les premières fausses représentations apparaissent alors pour des signaux autour de 100 kHz sur cet appareil.

¹⁵ Par défaut, Synchronie utilise la fenêtre rectangle lorsqu'il calcule une FFT.

On peut mesurer avec les curseurs la fréquence fondamentale, celles des harmoniques et des autres raies (harmoniques repliées de l'ordre 2 pour la plupart) et déterminer l'ordre de ces harmoniques repliées par la relation :

$$f_{app} = f_{éch} - n.f_{fondamentale}$$

Remarques :

L'allure du repliement dépend beaucoup de la valeur de la fréquence du signal. Pour plus de clarté, il vaut mieux ajuster sa fréquence de façon à ce que les raies d'ordre supérieur se replient entre les harmoniques du spectre d'ordre 0¹⁶. On peut aussi ajuster si nécessaire le niveau de validité de la TF (dans le menu options avancées) pour éliminer des raies gênantes.

Si on effectue cette manipulation avec un oscilloscope numérique, il vaut mieux utiliser un signal triangulaire car les spectres sont calculés par défaut en dB sur ces appareils → on observe beaucoup trop d'harmoniques avec un signal carré, ce qui rend difficile une présentation claire du phénomène de repliement.

II.1.3 Conclusion

Le critère de Shannon doit s'appliquer à la fréquence maximale contenue dans le spectre si on veut en avoir une représentation correcte. Lorsqu'on ne connaît pas le spectre du signal, il vaut mieux dans un premier temps prendre une fréquence d'échantillonnage très importante, puis l'abaisser jusqu'à voir les plus grandes fréquences du spectre se rapprocher du côté droit de l'écran, sans toutefois l'atteindre.

II.2 Influence de la durée de l'acquisition

L'échantillonnage du signal sur une durée finie d'enregistrement a deux conséquences sur le spectre du signal obtenu.

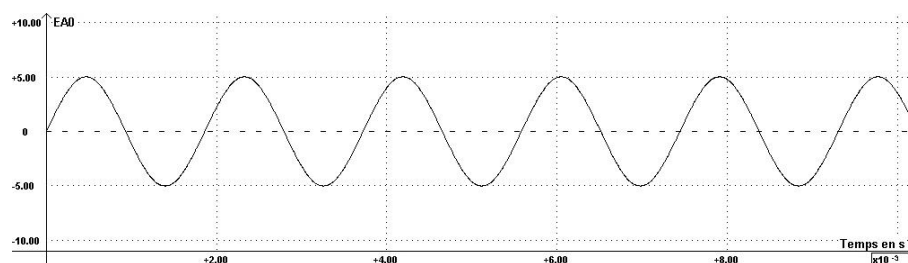
II.2.1 Sur l'allure du spectre

Manipulation 1 :

GBF : signal sinusoïdal ; $f \approx 500$ Hz ; prendre si possible un GBF numérique pour pouvoir régler finement la fréquence.

Paramètres d'acquisition¹⁷ : 2048 points, $T_{éch} = 5 \mu s \rightarrow T_{totale} = 10,24$ ms

L'important est d'avoir une fin d'enregistrement correspondant le moins possible au début de l'acquisition¹⁸ → On peut lancer une acquisition en la déclenchant sur le signal avec un niveau nul et modifier légèrement la fréquence pour obtenir un enregistrement similaire à la figure suivante (on peut commencer en mode permanent d'acquisition pour obtenir ce résultat) :

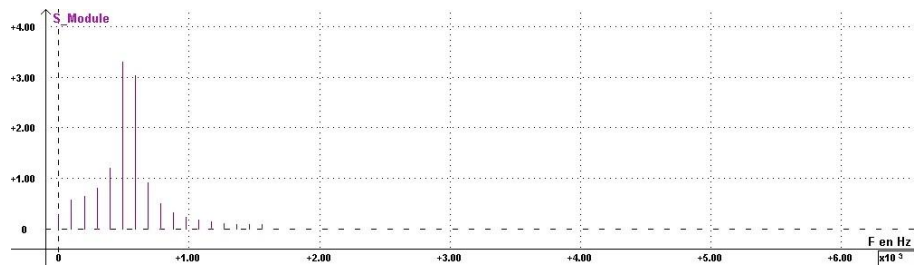


¹⁶ Si la fréquence du signal est particulièrement mal choisie, les raies d'ordre supérieur peuvent au pire se replier dans les harmoniques du spectre d'ordre 0, ce qui masque complètement le phénomène de repliement.

¹⁷ Les valeurs proposées sont indicatives ; d'autres paramètres peuvent être choisis.

¹⁸ Si on colle bout à bout cet enregistrement, on obtient une sinusoïde se répétant à l'infini mais avec des « brisures ».

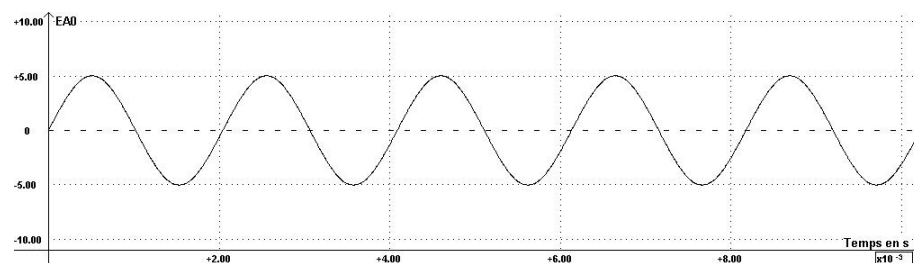
Si on effectue la FFT sur la totalité du signal, on obtient un spectre dont l'allure est la suivante :



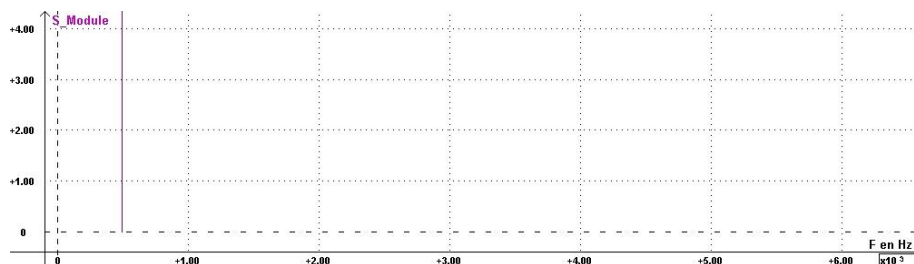
On observe un pic central entouré de raies parasites alors qu'on a une seule fréquence puisque la TF d'une sinusoïde pure est un pic de Dirac. De plus, si on mesure avec le pointeur les différentes fréquences, on s'aperçoit qu'aucune des raies affichées ne correspond à la fréquence réelle du signal (on reviendra sur ce point dans le § suivant).

Manipulation 2 :

On modifie légèrement la fréquence du GBF pour obtenir un enregistrement similaire à celui-ci :



L'important est d'avoir une fin d'enregistrement correspondant le plus possible au début de l'acquisition¹⁹.



Le spectre calculé correspond cette fois-ci au résultat attendu et la fréquence obtenue correspond à la bonne valeur car on élimine le problème de fenêtrage de l'acquisition du signal (cf. [1], p. 49 et suivantes pour des explications sur ce point). Synchronie permet aussi de sélectionner automatiquement ou manuellement la partie du signal sur lequel on veut effectuer la FFT. La sélection automatique permettant un calcul sur un nombre entier de périodes, elle élimine ainsi le problème de fenêtrage. Si on reprend la première manipulation et qu'on lance le calcul en effectuant une sélection automatique du nombre de périodes (dans le menu « Paramètres avancés »), on obtient bien le résultat attendu. Il faut noter que cette méthode de calcul de spectre ne résout pas tous les problèmes, notamment lorsque le signal contient plusieurs fréquences qui ne sont pas dans un rapport entier. Le logiciel Synchronie ou les oscilloscopes numériques disposent aussi de fenêtres de pondération (Hanning, Blackman, ...) pour atténuer ces effets de bords. On peut tester leur influence sur le calcul du spectre. Pour plus de précision sur ce point, se reporter à [1], p. 51.

¹⁹ Si on colle bout à bout cet enregistrement, on obtient cette fois-ci une sinusoïde se répétant à l'infini sans « brisures ».

II.2.2 Sur la résolution en fréquence

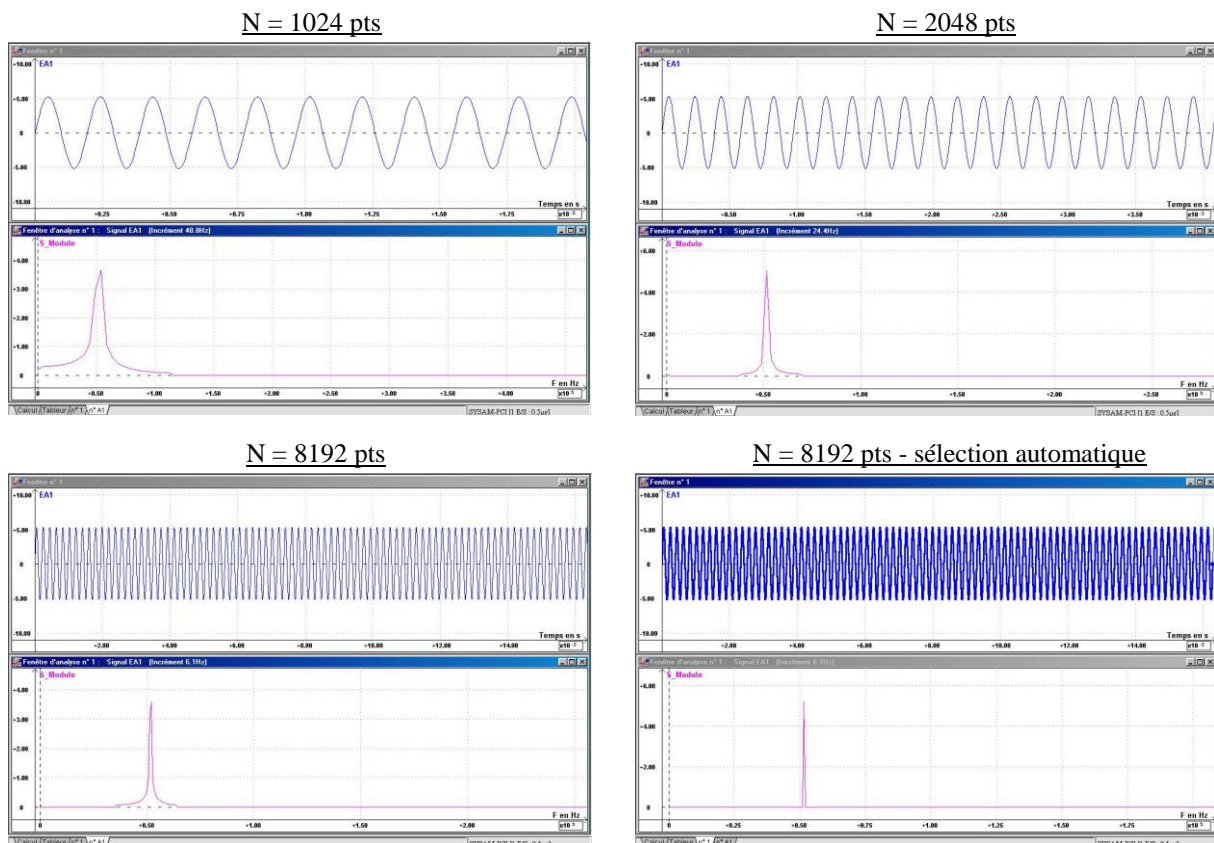
Les systèmes d'acquisitions calculent le spectre d'un signal par un algorithme FFT (Fast Fourier Transform) de type Cooley-Turkey permettant un calcul rapide du spectre. En revanche, le calcul n'est effectué que pour certaines fréquences qui sont des multiples de l'incrément fréquentiel²⁰ :

$$f_0 = \frac{1}{N.T_{éch}} = \frac{1}{T_{totaleacquisition}}$$

Cela réduit considérablement le temps de calcul si le nombre d'échantillons est une puissance de 2 mais la discrétisation du spectre qui en découle limite sa résolution et peut fausser les mesures si l'on ne prend pas certaines précautions (cf. manipulation 1 du § précédent).

Manipulation 1 :

Pour étudier l'influence de la durée d'observation sur le résultat du calcul de la FFT, on procède à l'acquisition d'un signal sinusoïdal de 500 Hz à f_{éch} constante (prendre T_{éch} = 20 μs) avec successivement 1024, 2048, 4096 et 8192 points. La FFT est faite sur la totalité du signal, en utilisant le style de spectre continu :



On peut vérifier que l'incrément fréquentiel affiché par Synchronie sur la fenêtre FFT correspond bien à $1/T_{totale}$ ²¹ → on obtient une valeur plus juste pour la fréquence du signal quand on augmente la durée de l'acquisition car le spectre est calculé avec un incrément plus fin. Le résultat est même quasi parfait si on effectue la FFT sur un nombre entier de période (cf. acquisition avec N = 8192 points, sélection automatique). On note aussi que le pic de la FFT s'affine lorsque T_{totale} augmente

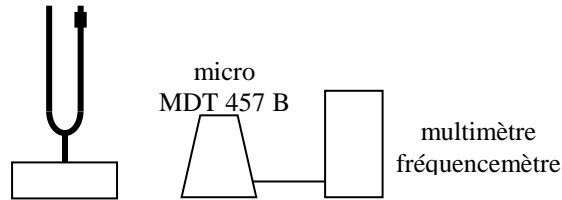
²⁰ Le logiciel Synchronie affiche cet incrément lorsqu'il calcule un spectre.

²¹ Attention, Synchronie ne modifie pas la valeur de l'incrément fréquentiel qu'il affiche lorsqu'on modifie la durée totale d'acquisition. Il faut fermer la fenêtre FFT et la rappeler dès que les paramètres ont été modifiés et qu'une nouvelle acquisition a été faite (on peut alors la conserver tant qu'on ne change pas la durée d'observation).

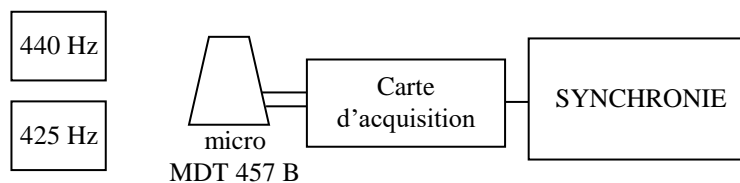
(la largeur de ce pic vaut quelques $\Delta f = 1/T_{\text{totale}}$), et qu'il en est de même pour la base du pic ²².

Manipulation 2 :

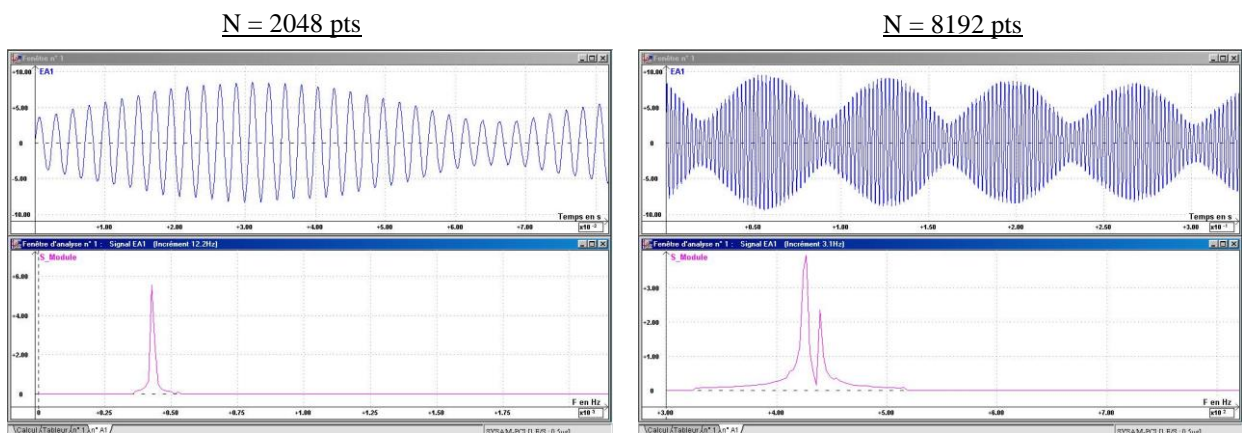
Prendre deux diapasons de 440 Hz. Désaccorder un des diapasons à l'aide d'une masselotte. Ajuster sa position pour avoir une fréquence de l'ordre de 425 Hz (on peut relier un micro sensible à un multimètre possédant la fonction fréquencemètre pour cette mesure) :



On souhaite maintenant mesurer ces deux fréquences par une analyse spectrale. On va montrer l'influence de la durée d'acquisition sur la résolution de ces deux fréquences :



Si le signal récupéré par le microphone est faible, on peut l'amplifier d'un facteur 10 ou 100 dans Synchronie. On effectue ensuite une acquisition avec une durée $T_{\text{éch}} = 40 \mu\text{s}$ sur 2048 puis sur 8192 points en effectuant à chaque fois la FFT sur la totalité du signal. Voici à titre indicatif les résultats d'une série d'acquisition (on a zoomé sur le spectre en fréquence pour la deuxième acquisition) :



L'acquisition avec 2048 points ne permet pas de résoudre les deux fréquences car l'incrément fréquentiel est alors trop grand ($1/T_{\text{tot}} = 12,2 \text{ Hz}$). La deuxième acquisition permet de les résoudre car le pas de calcul est suffisant cette fois-ci²³ ($1/T_{\text{tot}} = 3,1 \text{ Hz}$). On peut encore augmenter la précision sur la mesure des fréquences en augmentant la durée totale de l'enregistrement.

III TRAITEMENT DU SIGNAL

Un signal est, par définition, une grandeur physique dont la variation est porteuse d'information. Un signal n'est cependant jamais parfait et peut être dégradé lorsque des perturbations d'origine interne et/ou externe s'ajoutent de façon non négligeable aux variations à observer. Les notions de signal et de bruit sont donc indissociables et il est fondamental

²² On retrouve le problème du calcul de la FFT sur une durée qui n'est pas un multiple de la période du signal étudié.

²³ On peut remarquer au passage qu'on voit alors au moins un battement complet.

de connaître leur importance relative dans une chaîne de transmission ou dans un système d'acquisition. C'est le rôle du RSB déjà entrevu au § I.3.4. Il mesure la « qualité » du signal, et des interventions sont à envisager lorsqu'il est insuffisant. C'est l'objet du traitement du signal. Cette discipline a pour but²⁴ « d'améliorer » les signaux en réduisant le bruit, voire même de les extraire du bruit dans le pire des cas. On propose de commencer par une expérience où le bruit est assez simple à appréhender.

III.1 Filtrage d'un signal issu d'une photodiode

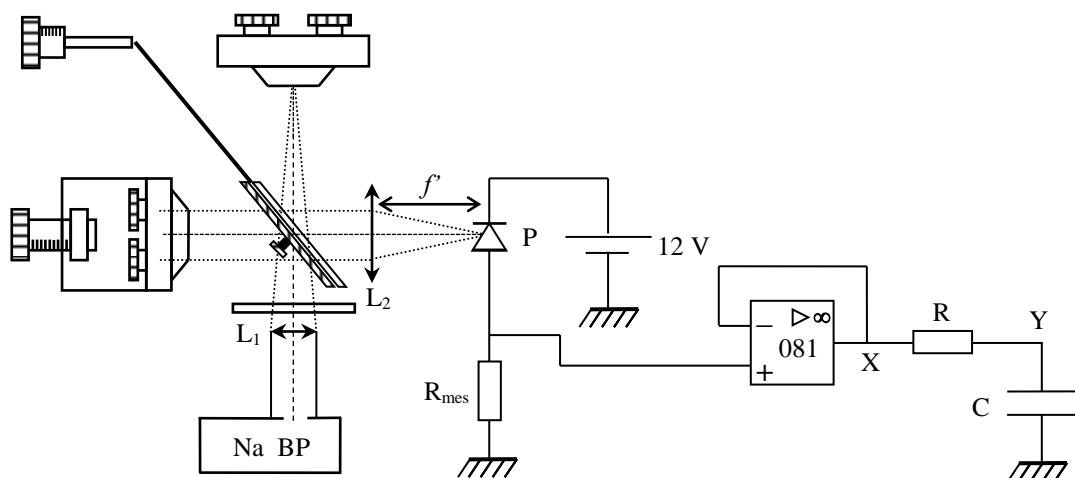
Il est possible d'étudier le spectre lumineux d'une source en enregistrant son interférogramme à l'aide d'un Michelson. On peut en déduire la longueur d'onde d'une radiation ou de faibles écarts entre deux longueurs d'onde (cf. [8], p. 238 et 241–242). Mais comme l'expérience est en général peu lumineuse, on a souvent un mauvais rapport signal/bruit et on est aussi gêné par une modulation en intensité à 100 Hz du flux lumineux provoquée par l'alimentation de la lampe. Un traitement du signal est donc nécessaire pour récupérer un interférogramme « propre » sur un système d'acquisition.

III.1.1 Observation du signal à traiter

On s'intéresse surtout ici à l'aspect traitement du signal. On se contentera donc d'étudier la longueur d'onde moyenne d'une lampe à vapeur de sodium pour voir comment éliminer la modulation à 100 Hz de la lampe spectrale.

Montage :

On règle le Michelson en anneaux puis on s'écarte du contact optique jusqu'à obtenir un système d'anneaux convenable (rayons pas trop grands mais bien contrastés). On réalise ensuite le montage suivant :



L_1 : condensateur de 6 cm

L_2 : lentille $f' \approx 25$ cm accolée contre la sortie de l'interféromètre

P : photodiode OSD 5T dans le plan focal image de L_2

R_{mes} : quelques $M\Omega$ (valeur non critique du moment qu'elle soit forte)

R, C : 10 $k\Omega$ / 1,7 μF par exemple

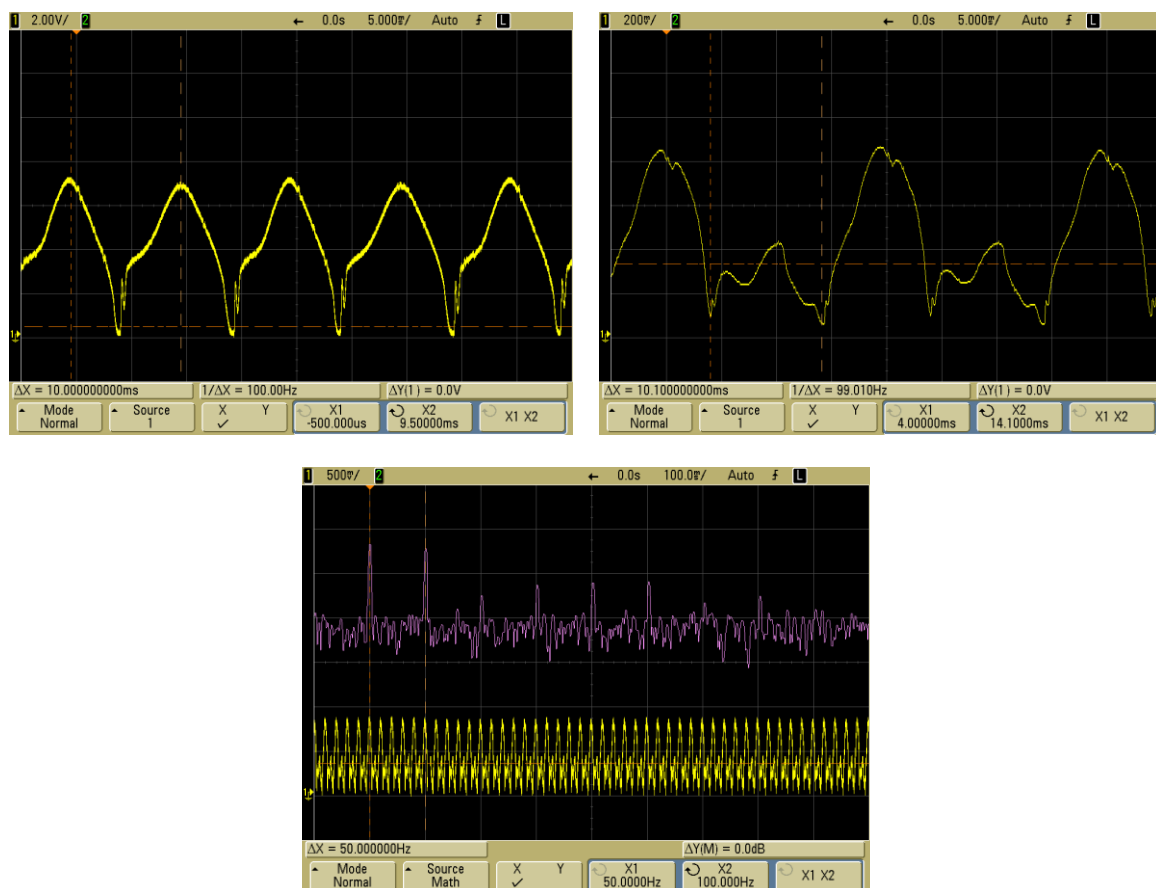
L'expérience étant peu lumineuse, la lentille L_2 formant l'image des anneaux a une focale plus courte que celle conseillée habituellement en projection (50 cm - 1 m). Cela permet de concentrer

²⁴ Elle englobe en fait d'autres domaines comme le codage de l'information, la compression/décompression de données, ..., mais ces points ne sont pas abordés ici.

un peu plus de lumière sur le photorécepteur. Le courant photo induit par l'éclairement reste malgré tout assez faible (de l'ordre du μA) \rightarrow on utilise une résistance R_{mes} très forte pour le convertir en une tension de valeur conséquente. On va traiter le signal par un simple filtre RC. Le suiveur intercalé entre la résistance R_{mes} et le filtre sert à découpler les deux montages.

Observation du signal en X :

Si on le souhaite, on peut observer la modulation du flux lumineux de la lampe spectrale à l'aide d'un oscilloscope en prenant une base de temps adapté à la fréquence du secteur. On obtient alors les enregistrements ci-après. L'oscillogramme de gauche correspond au flux sortant directement de la lampe²⁵, celui de droite correspond au flux détecté à la sortie de l'interféromètre lorsqu'on est sur un maximum de lumière²⁶. On observe bien une modulation temporelle à 100 Hz de l'intensité lumineuse de la source. Elle se retrouve aussi sur le signal en sortie du Michelson, mais on note alors qu'un maximum d'intensité sur deux est plus faible. La FFT de ce signal met en évidence la modulation à 100 Hz ainsi qu'une raie à 50 Hz liée à la périodicité de l'intensité :



Si on enclenche la motorisation du Michelson, les anneaux se mettent à défiler et on constate que l'amplitude du signal sur l'oscilloscope suit le défilement. On peut calculer la fréquence de cette modulation due au chariotage du miroir : la longueur d'onde moyenne du doublet jaune du Sodium vaut $\lambda_{\text{Na}} = 589 \text{ nm}$ \rightarrow lorsque le miroir mobile se déplace, l'intensité lumineuse à la sortie du Michelson passe par un maximum à chaque fois que la différence de marche δ correspond à $k\lambda_{\text{Na}}$ \rightarrow si on note Δe le chariotage effectué entre deux maximums successifs, on a $\delta = 2\Delta e = \lambda_{\text{Na}}$. La motorisation de l'interféromètre déplaçant le miroir mobile a une vitesse V , la périodicité de modulation de l'intensité correspondant au déplacement vaut alors $T = \Delta e/V = \lambda_{\text{Na}}/(2V)$. La vitesse

²⁵ On a diminué la valeur de R_{mes} pour ne pas saturer le signal.

²⁶ Le signal est nettement plus faible malgré l'emploi d'une résistance de mesure nettement plus forte.

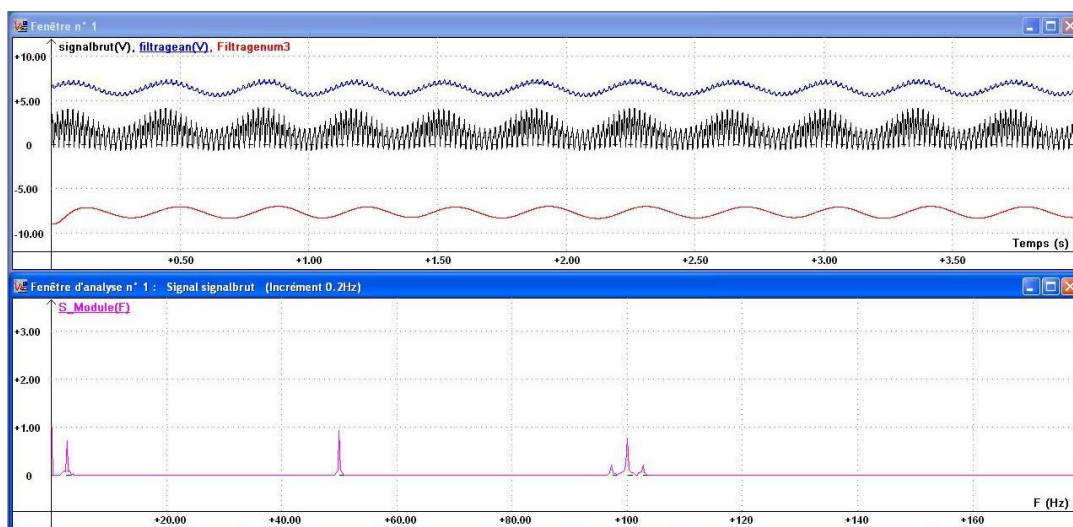
de défilement des miroirs des dispositifs d'enseignement valant généralement 0,05 mm/mn, l'interférogramme du doublet du sodium doit donc être un signal à la fréquence :

$$f = \frac{2V}{\lambda_{Na}} = \frac{2 \times 0,05 \cdot 10^{-3}}{589 \cdot 10^{-9} \times 60} = 2,8 \text{ Hz}$$

C'est cette fréquence qu'on souhaite récupérer.

Acquisition sur Synchronie :

Il faut des paramètres d'acquisition permettant d'observer à la fois la modulation à 2,8 Hz et celle à 100 Hz. De nombreux choix sont possibles : on peut prendre par exemple $N = 10\,000$ points et $T_{\text{éch}} = 400 \mu\text{s}$. On observera ainsi convenablement la modulation basse fréquence puisque $T_{\text{obs}} = N \cdot T_{\text{éch}} = 4 \text{ s} \approx 10 T_{\text{BF}}$, et la fréquence d'échantillonnage sera suffisamment élevée ($f_{\text{éch}} = 2\,500 \text{ Hz}$) pour enregistrer convenablement la modulation parasite à 100 H. Voici à titre indicatif ci-dessous le résultat d'une acquisition (le signal récupéré est celui noté « signalbrut » ; on verra par la suite à quoi correspondent les autres signaux) :



On récupère bien un signal basse fréquence fortement parasité. La FFT du signal confirme la présence d'une modulation du signal vers 2,8 Hz ainsi que les fréquences parasites à 50 et 100 Hz.

III.1.2 Traitement analogique du signal

Il faut éliminer le 50 Hz et le 100 Hz tout en conservant le signal à 2,8 Hz → On peut prendre par exemple un filtre passe bas dont la fréquence de coupure $f_c = 1/(2\pi RC) \approx 10 \text{ Hz}$, d'où le choix possible des valeurs proposées pour R et C au § III.1.1. Le résultat d'un tel filtrage, récupéré en Y sur le schéma du montage, est noté « filtragean » ci-dessus²⁷. On constate qu'on récupère un signal nettement plus propre. On peut quantifier la qualité du filtrage en effectuant la FFT du signal filtré pour mesurer l'atténuation des raies à 50 Hz et 100 Hz par rapport au signal d'origine, et comparer le résultat obtenu à l'atténuation théorique donnée par le filtre RC aux deux fréquences :

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} = 0,196 \text{ à } 50 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad 0,1 \text{ à } 100 \text{ Hz}$$

Le résultat du filtrage est loin d'être parfait. Si on souhaite un traitement plus performant, on peut remplacer le filtre RC par un filtre actif comme celui proposé en [4] p. 47, en prenant par exemple $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 5,6 \mu\text{F}$ pour avoir une fréquence centrale $f_0 \approx 2,8 \text{ Hz}$. On peut ensuite jouer sur R_1 pour modifier le facteur de qualité du filtre. On récupère alors un signal plus

²⁷ Ce signal a été décalé pour plus de visibilité.

propre mais la mesure des atténuations sur Synchronie devient délicate. Des informations et des idées de manipulations sur ce filtre sont données dans le montage « Filtrage ».

III.1.3 Filtrage numérique du signal

[2], p. 126

Un filtre analogique est un quadripôle réactif caractérisé par sa réponse en fréquence. Dans le domaine numérique, un système peut également fournir une réponse fonction de la fréquence du signal. Cette propriété est exploitée dans les filtres numériques : une unité de calcul utilise un algorithme qui permet, à chaque instant d'échantillonnage $nT_{\text{éch}}$, de calculer le nombre N_s en sortie connaissant le nombre N_e à l'entrée. Le filtrage étant une opération linéaire, seule une combinaison linéaire des échantillons d'entrée et de sortie peut conduire à cette propriété essentielle pour un filtre numérique. On distingue alors :

- les filtres non récursifs pour lesquels la sortie s_n à l'instant $n T_{\text{éch}}$ est calculée uniquement à partir des échantillons d'entrée e_{n-k} pris aux instants antérieurs $(n-k) T_{\text{éch}}$. Par exemple : $s_n = A_0 e_n + A_1 e_{n-1} + A_2 e_{n-2}$.

- les filtres récursifs pour lesquels la sortie s_n est calculée à partir des échantillons d'entrée e_{n-k} et de sortie s_{n-k} pris respectivement aux instants $(n-k)T_{\text{éch}}$ et $(n-p)T_{\text{éch}}$. Par exemple : $s_n = A_0 e_n + A_1 e_{n-1} + A_2 e_{n-2} + B_1 s_{n-1} + B_2 s_{n-2}$.

Algorithme d'un filtre passe bas du premier ordre :

La transformée en z se prête bien à la détermination des algorithmes modélisant les filtres mais on peut s'en dispenser ici : il suffit en effet de partir de l'équation différentielle du filtre :



On suppose que les variations de $s(t)$ sont suffisamment lentes par rapport à la période d'échantillonnage $T_{\text{éch}} \rightarrow$ **le résultat obtenu n'est valable que si $f \ll f_{\text{éch}}$** . Avec cette condition, on peut remplacer $s'(t)$ par :

$$s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} \approx \frac{s_n(t) - s_{n-1}(t)}{T_{\text{éch}}}$$

L'équation différentielle devient alors : $\frac{\tau}{T_{\text{éch}}}(s_n - s_{n-1}) + s_n = e_n$

$$\rightarrow \left(\frac{\tau}{T_{\text{éch}}} + 1 \right) s_n = e_n + \frac{\tau}{T_{\text{éch}}} s_{n-1} \rightarrow s_n = \frac{T_{\text{éch}}}{T_{\text{éch}} + \tau} e_n + \frac{\tau}{T_{\text{éch}} + \tau} s_{n-1}$$

Soit, en posant $a = \frac{T_{\text{éch}}}{T_{\text{éch}} + \tau}$:

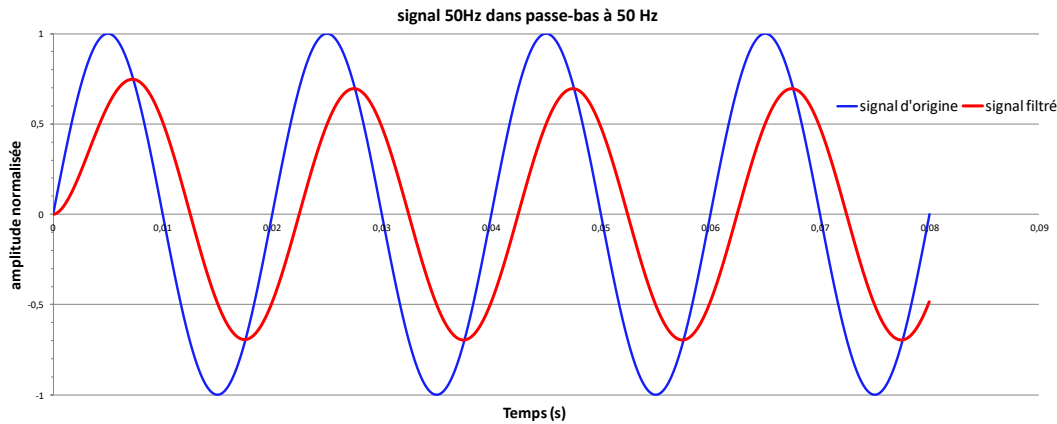
$$s_n = a.e_n + (1 - a)s_{n-1}$$

Cet algorithme récursif permet donc de modéliser un filtre passe bas du premier ordre tant qu'on l'utilise avec des signaux de fréquence très inférieure à la fréquence d'échantillonnage. Il faut noter que le paramètre a de l'algorithme dépend de cette fréquence $f_{\text{éch}}$.

Test de l'algorithme :

On peut facilement vérifier à l'aide d'un tableur que la fonction obtenue simule bien un filtre passe bas du premier ordre. Il suffit par exemple de « produire » un signal

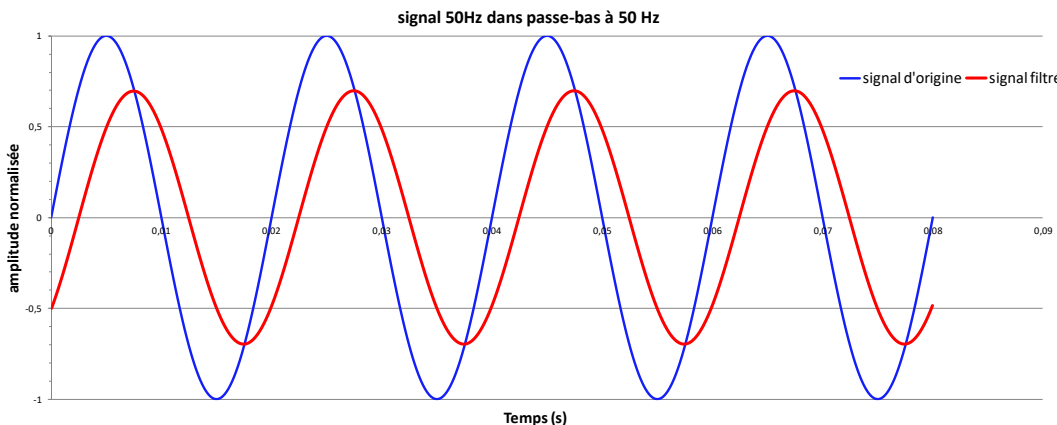
sinusoïdal de 50 Hz échantillonné à une fréquence $f_{\text{éch}} \gg 50$ Hz, et lui appliquer l'algorithme précédent en prenant par exemple une fréquence de coupure de 50 Hz pour calculer le coefficient a . Le résultat doit alors donner un signal atténué de 3 dB et déphasé de $-\pi/4$ puisque $f_{\text{signal}} = f_{\text{coupure}}$. On a fait cette simulation en choisissant une fréquence d'échantillonnage de 5 000 Hz \rightarrow on a créé dans le tableur une colonne de temps $t_{\text{éch}}$ incrémentée par pas de $2 \cdot 10^{-4}$ s sur 400 lignes pour pouvoir observer 4 périodes²⁸. On a ensuite calculé le signal sinusoïdal normalisé échantillonné à 50 Hz $\sin(2\pi \cdot 50 \cdot t_{\text{éch}})$. Le signal filtré par l'algorithme a été écrit dans une dernière colonne avec un coefficient $a = 0,0591174$ ²⁹ et en définissant une valeur initiale nulle en première ligne³⁰ pour permettre à l'algorithme de démarrer sa récursivité. On a obtenu ainsi les courbes suivantes :



L'amplitude du signal filtré correspond bien celle du signal d'origine divisée par $\sqrt{2}$, et le déphasage entre les deux signaux vaut bien -45° mais l'allure initiale s'écarte du résultat attendu. Cela provient de la nature récursive du calcul effectué. Le résultat s_n dépendant de l'état antérieur s_{n-1} , il y a forcément un souci au démarrage : quel état antérieur va être utilisé par l'algorithme pour démarrer le processus ? On a choisi ici d'imposer $s_0 = 0$ mais ce n'est pas pertinent si on réfléchit au cas étudié. Le signal filtré doit avoir une amplitude divisée par $\sqrt{2}$ et être déphasé de $-\pi/4$. Il doit donc être régi par une expression du type :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\pi f \cdot t - \pi/4) \quad \text{d'ou} \quad s(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(-\pi/4) = -0,5$$

Le choix d'une valeur initiale nulle n'est donc pas bon. Si on met - 0,5 à la place, on obtient :



²⁸ $t_{\text{éch}} = n \times T_{\text{éch}} = n \times 0,0002$ avec $n = 0, 1, 2, \dots, 400$.

²⁹ $a = T_{\text{éch}} / (T_{\text{éch}} + \tau) = T_{\text{éch}} / (T_{\text{éch}} + 1/(2\pi f_c)) = 0,0002 / (0,0002 + 1/(2\pi \times 50))$ avec les paramètres choisis.

³⁰ On peut même laisser cette case vide, car c'est la valeur que prennent par défaut les tableurs si on ne donne rien.

On récupère alors parfaitement le résultat escompté, mais la correction est à revoir dès que le signal d'origine change d'amplitude, de phase, ou contient une composante continue. Il n'y a donc pas de valeur unique de s_0 qui puisse résoudre dans tous les cas ce problème de démarrage inhérent à la nature même de l'algorithme. Une phase transitoire sera donc toujours présente, tout comme il existe des régimes transitoires pour les filtres analogiques.

Application au signal à traiter :

La première solution peut consister à enregistrer sous Synchronie les données du signal à traiter au format TXT pour qu'elles soient reconnues par les tableurs les plus courants³¹. Il suffit ensuite d'appliquer l'algorithme précédent de la même manière. Une alternative plus simple consiste à utiliser les fonctions prédéfinies de filtrage numérique disponibles dans Synchronie. C'est l'option retenue ici : on a appliqué trois filtrages successifs d'ordre 1 au signal brut obtenu au § III.1.1, avec à chaque fois une fréquence de coupure f_c de 10 Hz. Le résultat obtenu correspond à la courbe notée « Filtragenum3 » sur le graphique. On récupère un signal très propre à 2,8 Hz typique du doublet du Sodium sur cet interféromètre, précédé d'un régime transitoire. Le signal obtenu peut être ensuite très facilement amplifié sans ajout de bruit (une simple multiplication suffit) et débarrassé de sa composante continue résiduelle.

Conclusion :

On voit sur cet exemple très simple que ce type d'opération logicielle peut donner d'excellents résultats. Le filtrage numérique peut avoir des inconvénients (circuits devant travailler à fréquence élevée dans certains cas, charges de calculs importantes avec certains algorithmes pouvant poser des problèmes pour un emploi en temps réel, problème de stabilité des algorithmes récursifs lié à la rétroaction du processus, ...) mais il a aussi de nombreux avantages comparés aux filtres analogiques :

- la stabilité des caractéristiques. Il n'y a pas de composants qui peuvent affecter les performances du filtre par leur vieillissement ou leur dérive en température.
- la reproductibilité de la fonction de transfert. Les filtres basés sur le même algorithme auront des performances rigoureusement identiques.
- l'absence d'interactions lors d'associations. La mise en série de filtres numériques ne pose aucun problème car elle n'affecte pas leur comportement fréquentiel individuel, ce qui n'est pas forcément le cas avec des filtres analogiques passifs pour lesquels il peut se poser des problèmes d'adaptation d'impédances (cf. montage Filtrage).
- la souplesse dans les ajustements. La réponse en fréquence d'un filtre numérique s'ajuste facilement en changeant les coefficients de l'algorithme. On peut aussi ajuster le domaine de fréquence étudiable en changeant la fréquence d'échantillonnage.
- la possibilité de concevoir des filtres à phase linéaire en fréquence³² ce qui, en toute rigueur, est impossible à faire en analogique³³.

Remarque :

On signale pour finir l'influence que peut avoir $f_{éch}$ sur l'allure du signal qu'on récupère. On peut s'en apercevoir en effectuant des acquisitions avec les paramètres suivants (les combinaisons $N, T_{éch}$ proposées permettent d'avoir la même durée d'observation) :

³¹ Manipulation testée avec LibreOffice et Excel. Pour LibreOffice, il faut juste indiquer que le séparateur qu'utilise Synchronie par défaut est une tabulation. Pour Excel, il suffit de valider les choix qu'il propose automatiquement.

³² Cette caractéristique est très intéressante car elle assure un temps de transit identique pour toutes les fréquences comprises dans la bande passante du filtre, donc la non déformation du signal transmis.

³³ Car cette contrainte impose d'avoir des réponses impulsionnelles paires ou impaires, donc incompatibles avec le principe de causalité des filtres analogiques.

N	600	300	200	150
T _{éch} (ms)	5	10	15	20

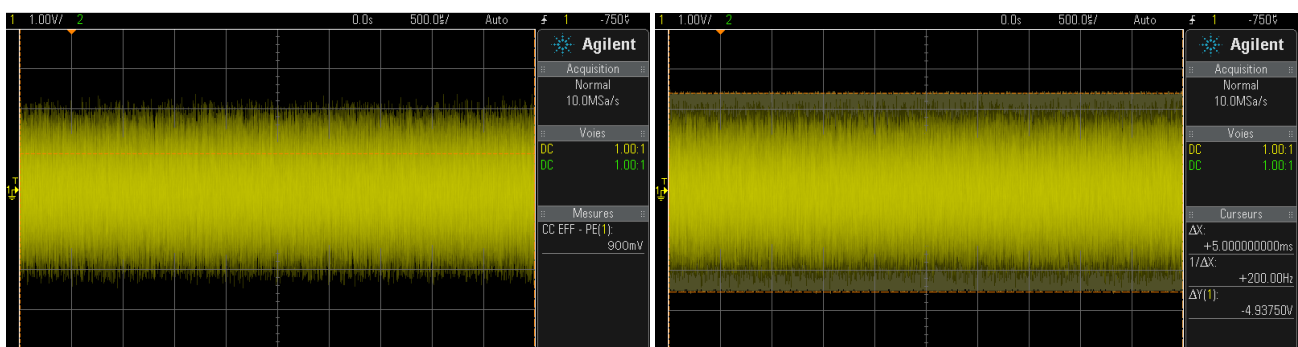
On constate alors que le signal est nettement moins parasité lorsqu'on échantillonne à 10 ou 20 ms. La raison est toute simple : ces valeurs correspondent respectivement à $f_{\text{éch}} = 100$ Hz et 50 Hz, soit des multiples de la fréquence du secteur \rightarrow si l'accord est parfait, les différents points de mesure sont repris à un même niveau de modulation d'intensité de la lampe par le secteur, ce qui conduit à la disparition de cette modulation dans le spectre du signal au profit d'une composante continue. On conçoit donc qu'on puisse éliminer ainsi une fréquence indésirable en échantillonnant exactement à la même fréquence. C'est ce que font certains logiciels, comme Caliens par exemple, pour limiter l'instabilité des courbes obtenues lorsqu'on étudie des lampes spectrales. La méthode n'est cependant efficace que si l'accord entre les fréquences est parfait. Dans le cas contraire, elle fait apparaître une fausse fréquence correspondant au battement entre $f_{\text{éch}}$ et f_{parasite} qui peut être gênante ici car elle est dans l'ordre de grandeur (le Hz) de la fréquence que l'on veut récupérer.

III.2 Filtrage d'un bruit blanc

Le bruit étudié précédemment est un cas assez particulier car son spectre est majoritairement composé de deux fréquences. Or, le bruit apparaît le plus souvent sous forme de fluctuations aléatoires et a, par conséquent, une richesse spectrale beaucoup plus grande. Une première approche pour le décrire consiste alors à recourir à la notion de bruit blanc. L'objet de ce chapitre est d'étudier l'influence que peut avoir un filtrage sur un tel bruit. On conseille de lire au préalable l'annexe 3 de ce document.

III.2.1 Quelques considérations sur le bruit

On peut observer du bruit en regardant la tension aux bornes d'une résistance R avec un oscilloscope réglé sur une grande sensibilité (cf. annexe 3). Le signal récupéré est alors très faible et il dépend beaucoup des conditions expérimentales. Il vaut donc mieux utiliser un générateur de bruit pour avoir plus de contrôle sur l'expérience. Les oscillogrammes suivants présentent un bruit $b(t)$ d'amplitude $5 \text{ V}_{\text{Pk-Pk}}$ généré par le module WaveGen disponible en option sur les oscilloscopes Agilent DSO-X 2002A. $b(t)$ se présente comme un signal d'apparence totalement aléatoire centré sur zéro :



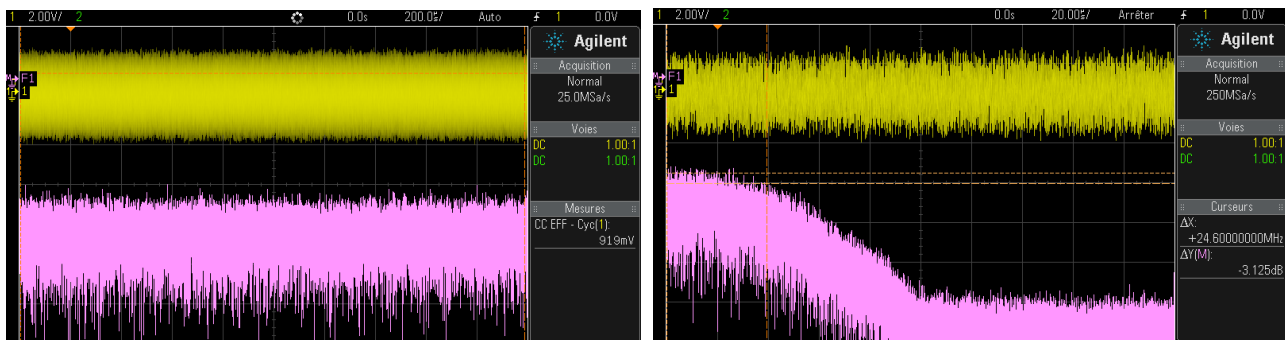
Si on peut le considérer comme gaussien, la valeur efficace du bruit B_{eff} correspond à l'écart type σ de la distribution de $b(t)$ et vaut $\approx V_{\text{Pk-Pk}}/6$. La mesure de $V_{\text{Pk-Pk}}$ est cependant délicate car l'estimation à l'œil de la « hauteur » de la bande lumineuse est assez subjective (la visibilité des crêtes de bruit dépend de la brillance de la trace, de sa durée d'observation, ...). Une astuce consiste à utiliser la fonction de persistance d'affichage de l'oscilloscope : la juxtaposition d'acquisitions successives finit par dessiner une bande de hauteur mieux définie et plus grande (cf. figure de droite) : on a ainsi obtenu $V_{\text{Pk-Pk}} = 4,94 \text{ V}$, un résultat en accord avec l'amplitude délivrée par le générateur. On en déduit $B_{\text{eff}} \approx V_{\text{Pk-Pk}}/6 = 823\text{mV}$. Cette valeur corrobore à $\approx 10 \%$ près celle

mesurée à l'oscilloscope (900 mV sur l'oscillogramme de gauche). On peut aussi utiliser un multimètre pour mesurer B_{eff} mais le résultat dépend alors beaucoup de l'appareil utilisé :

Appareil	Oscilloscope DSO 2002 A	Keithley 2000	Keithley 199	Française FI919X	Metrix MTX 3250	Velleman DVM 890	Française FI 125
B_{eff} (mV)	900	340	153	96	46	26	5
F_{max} mesurable (kHz)		300	100	100	100	0,4	0,5

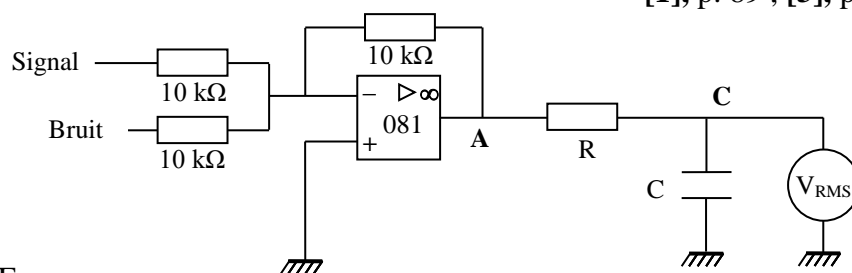
On constate que la valeur obtenue est sensiblement liée au niveau de performance de l'appareil. Elle est théoriquement liée à la bande passante du système de mesure (cf. § I.5 de l'annexe 3), mais ce n'est pas simple à vérifier en pratique car cette donnée n'est généralement pas fournie dans les notices des multimètres³⁴. Il faut surtout retenir que **le résultat sur la mesure d'un bruit est indissociable de la bande passante du système limitant le spectre dans l'expérience.**

Un bruit parfaitement aléatoire a un spectre composé d'une infinité de raies de même amplitude. On parle de bruit blanc³⁵. Le générateur utilisé réalise un signal conforme au modèle sur une bande de fréquence assez large (oscillogramme de gauche), mais on constate une chute du spectre si on pousse un peu plus loin le domaine d'analyse en fréquence³⁶ (oscillogramme de droite). On a estimé grossièrement à 24 MHz la bande passante à -3 dB du bruit généré. Cette valeur concorde avec la donnée constructeur (20 MHz typique) et elle est largement suffisante pour l'expérience proposée.



III.2.2 Montage d'étude

[1], p. 89 ; [3], p. 61



$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$10 \text{ nF} < C < 1 \text{ }\mu\text{F}$$

Signal S : sinusoïde 1 kHz ; $V_{\text{pk-pk}} = 4 \text{ V}$ (valeurs non critiques)

Bruit B : via l'oscilloscope DSO 2002 ; $V_{\text{pk-pk}} = 5 \text{ V}$ (valeur maximale)

Voltmètre : appareil sensible et à large bande passante (Keithley 2000 par exemple)

Le montage à amplificateur opérationnel est un simple additionneur. Il permet d'obtenir le signal à traiter. Dans la suite des expériences, **relier à la masse toute entrée non alimentée par un signal.**

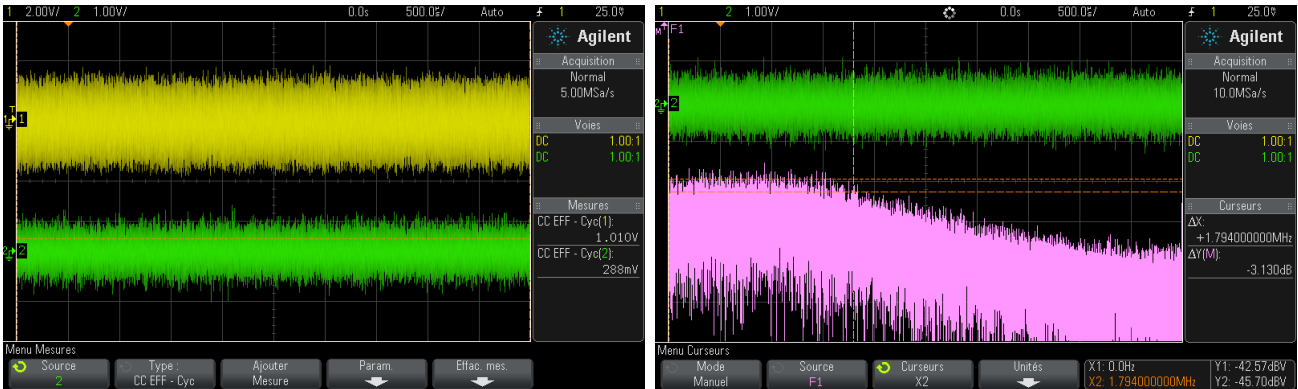
³⁴ Faute de mieux, on indique en troisième ligne du tableau la fréquence maximale pour laquelle le constructeur garanti encore une incertitude sur les mesures.

³⁵ C'est un concept théorique impossible à réaliser en pratique puisqu'il serait de puissance infinie.

³⁶ On échantillonne tout de même à 25 MHz, et on passe ensuite à 250 MHz.

III.2.3 Influence de l'additionneur sur le bruit

Si on observe en A sans que S soit connecté au montage, on constate une atténuation notable du bruit par rapport à l'entrée :



La valeur efficace du bruit passe en effet de 1,01 V à 288 mV sur notre exemple. Cette baisse provient d'une réduction de la bande passante due à l'amplificateur opérationnel (on peut s'en convaincre en remplaçant l'AO 081 par un 741 moins performant → l'amplitude du bruit diminue encore). La FFT du signal en A le confirme : la bande passante à -3 dB du bruit est maintenant de l'ordre de 2 MHz, une valeur en accord avec le produit Gain×Bande Passante de l'AO 081³⁷. On montre en annexe 3 que la valeur efficace d'un bruit blanc tronqué idéalement est liée à la bande passante par la relation $B_{\text{eff}} = \sqrt{(DSP_{\text{bruit}} \times \Delta f)}$. Si cette relation est vérifiée, on doit avoir ici :

$$B_{\text{eff en A}} = B_{\text{eff à l'entrée}} \sqrt{\frac{BP_{\text{en A}}}{BP_{\text{en entrée}}}}$$

Soit, avec nos mesures : $B_{\text{eff en A}} = 1,01 \sqrt{2/24,6} = 290 \text{ mV}$

Le résultat est assez proche de la valeur expérimentale, ce qui est assez remarquable vu les hypothèses simplificatrices et l'estimation très grossière des bandes passantes. On peut alors donner une estimation de la DSP. Lorsqu'il est réglé sur 5 V Pk-Pk, le générateur délivre un bruit dont la densité spectrale de puissance vaut :

$$DSP_{\text{bruit}} = \frac{B_{\text{eff}}^2}{\Delta f} \approx \frac{(1,01)^2}{24,6 \cdot 10^6} \approx 40 \text{ nV}^2 / \text{Hz}$$

Elle est très largement supérieure à celle du bruit généré par l'agitation thermique dans les résistances du montage ($DSP_{\text{agitation}} = 4 \cdot k_B \cdot T \cdot R = 4 \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 300 \times 10^4 = 0,1 \text{ fV}^2/\text{Hz}$), et à celle de l'amplificateur opérationnel qui vaut typiquement $4 \text{ fV}^2/\text{Hz}$ ³⁸.

III.2.4 Observation du signal bruité

Il suffit de connecter les signaux S et B aux entrées de l'additionneur pour observer le signal bruité en A (cf. ci-après). On peut calculer le RSB du signal ainsi obtenu : on mesure avec un voltmètre RMS³⁹ la tension efficace S_{eff} du signal en déconnectant le bruit à l'entrée de l'additionneur et en mesurant la tension efficace du signal en

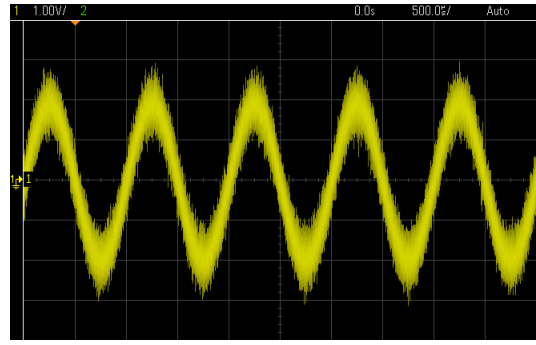
³⁷ Il vaut typiquement 3 MHz et on a ici un gain de 1 puisque les résistances de l'additionneur sont toutes égales.

³⁸ On ne prend en compte ici que l'« equivalent input noise voltage » donné dans la datasheet du composant, que l'on élève au carré puisqu'on raisonne ici en puissance.

³⁹ On pourrait continuer à utiliser l'oscilloscope pour ces mesures mais le filtrage qu'on va réaliser ultérieurement conduit à un bruit très faible → les mesures avec un multimètre sensible sont plus précises.

A. On mesure de même B_{eff} en déconnectant le signal à l'entrée de l'additionneur et en mesurant la tension efficace du signal en A avec le voltmètre. On a ainsi obtenu $S_{\text{eff}} = 1,366 \text{ V}$ et $B_{\text{eff}} = 0,252 \text{ V}$ pour notre exemple⁴⁰, soit :

$$RSB = 20 \cdot \text{Log} \left(\frac{S_{\text{eff}}}{B_{\text{eff}}} \right) = 20 \cdot \text{Log} \left(\frac{1,366}{0,252} \right) = 14,7 \text{ dB}$$



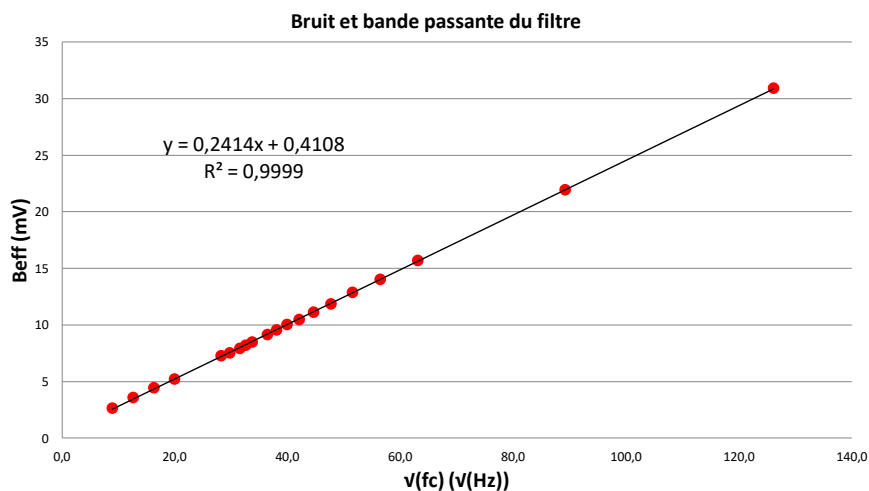
A titre d'exemple, les bons lecteurs CD, baladeurs mp3, ou amplificateurs atteignent facilement 90 dB, soit un RSB plus de 5000 fois plus faible ! On part donc ici avec un signal fortement bruité.

III.2.5 Influence du filtrage sur le bruit

On montre en annexe 3 que si la bande passante du bruit Δf est très grande devant la fréquence de coupure f_c du filtre, la puissance du bruit vaut :

$$P'_{\text{bruit}} = (B_{\text{eff}})^2 = \frac{\pi \cdot f_c \cdot \text{DSP}_{\text{bruit}}}{2} \rightarrow \text{la valeur efficace du bruit est proportionnelle à } \sqrt{f_c}$$

Le bruit en A ayant une bande passante d'environ 2 MHz, les valeurs R, C proposées au § III.2.2 pour le filtre passe bas conduisent à des fréquences f_c comprises entre 160 Hz et 16 kHz qui remplissent la condition $\Delta f \gg f_c$. On a donc mesuré au point C la valeur de B_{eff} en déconnectant le signal S pour différentes valeurs de la capacité et on a tracé la courbe $B_{\text{eff}} = f(\sqrt{f_c})$:



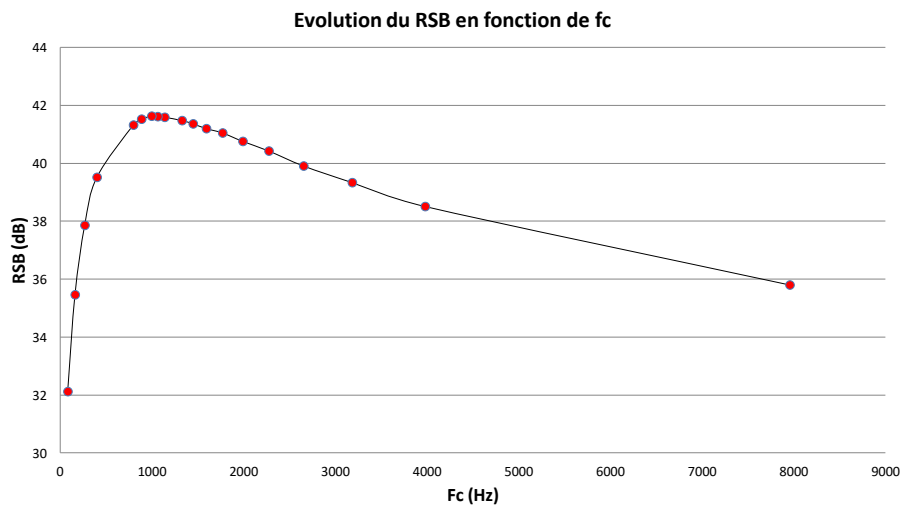
La relation de proportionnalité entre B_{eff} et $\sqrt{f_c}$ est très bien vérifiée si on excepte un petit décalage de 0,4 mV dû à l'Offset du montage à amplificateur opérationnel → Le bruit résiduel à l'issue du filtrage sera d'autant plus faible que la fréquence de coupure du filtre sera basse. C'est somme toute logique puisqu'on réduit alors son spectre, donc sa puissance globale.

III.2.6 Influence du filtrage sur le RSB

On vient de voir qu'il vaut mieux prendre la fréquence de coupure la plus basse possible pour atténuer le bruit. Mais il faut aussi penser à récupérer l'information ! Or, si on diminue trop la fréquence de coupure, le filtre va commencer à atténuer le signal. Un compromis est donc souhaitable, et on peut le trouver en

⁴⁰ On devrait en toute rigueur avoir $S_{\text{eff}} = 1,414 \text{ V}$ si $V_{\text{pk-pk}} = 4 \text{ V}$ mais l'additionneur avait un gain légèrement inférieur à 1 (résistances de 10 kΩ légèrement différentes). On note aussi une petite différence sur la mesure de bruit comparée à celle faite précédemment à l'oscilloscope, probablement due à une réduction de la bande passante par le multimètre.

regardant l'évolution du RSB en fonction de f_c . On a donc, pour les mêmes valeurs de capacité que précédemment, mesuré la valeur de S_{eff} au point C en déconnectant cette fois ci le signal de bruit. On en a déduit le RSB par la relation $\text{RSB} = 20 \cdot \text{Log}(S_{\text{eff}}/B_{\text{eff}})$ et tracé la courbe $\text{RSB} = f(f_c)$:

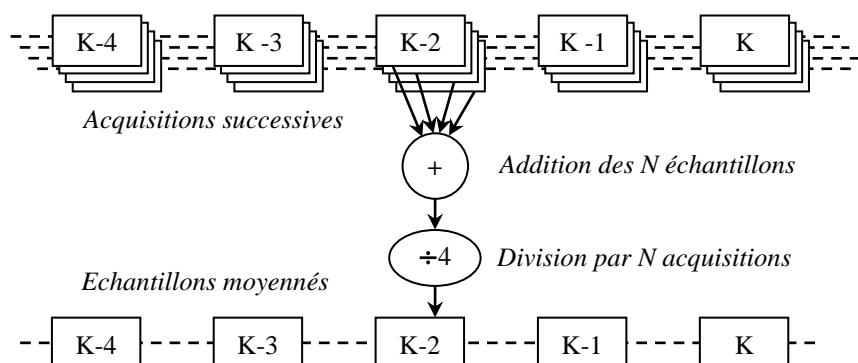


On s'aperçoit alors que le RSB passe par un maximum lorsque la fréquence de coupure du filtre passe bas est égale à la fréquence f_0 du signal qu'on souhaite récupérer (résultat en accord avec le calcul développé au § III.3 de l'annexe 3). Le filtrage est alors optimal et on atteint ici un RSB proche de 42 dB lorsque $f_c = f_0$, soit un gain d'environ 27 dB par rapport au signal d'entrée → le RSB est environ 500 fois plus fort dans ces conditions. On peut terminer en remarquant qu'un filtrage de type passe bande à fort facteur de qualité centré sur f_0 serait encore plus performant puisqu'on réduirait encore plus la bande passante. On ne le présente pas ici car les mesures sur le bruit sont alors trop délicates.

III.3 Quelques informations sur des outils de traitement du signal présents dans les oscilloscopes numériques

III.3.1 Le moyennage

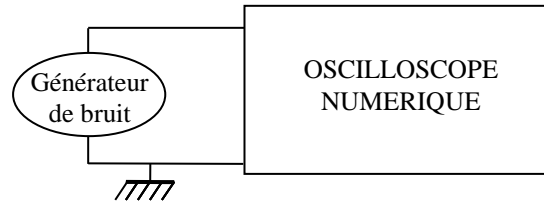
C'est probablement l'opération de traitement du signal la plus utilisée sur les oscilloscopes numériques. On s'en sert pour débarrasser un signal répétitif du bruit qui l'accompagne. Le principe de base consiste à réaliser plusieurs acquisitions ($N = 4$ dans l'exemple ci-dessous) sur K points du même phénomène (acquisitions synchronisées). On effectue ensuite une moyenne point par point des différents enregistrements :



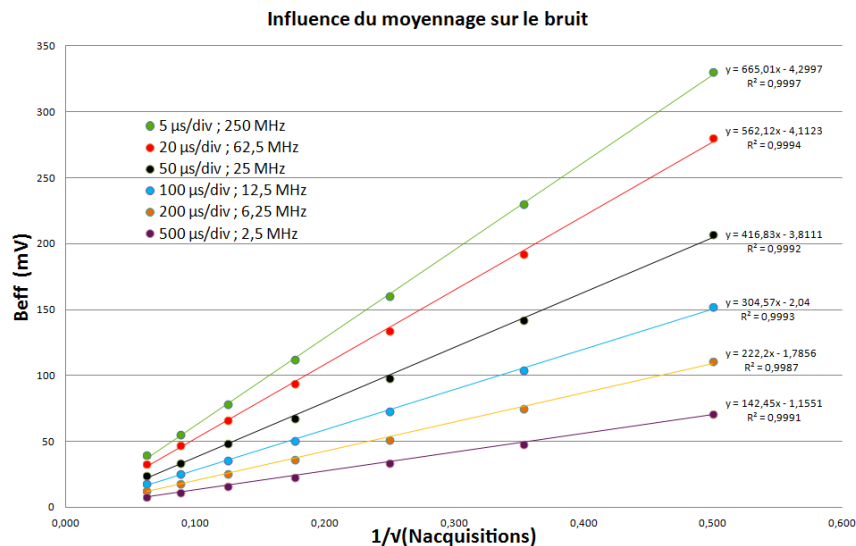
On conçoit facilement que l'opération appliquée à un signal bruité tende à renforcer ses caractéristiques systématiques au détriment des fluctuations aléatoires : si le déclenchement des différentes acquisitions est synchronisé sur un signal $s(t)$ supposé parfaitement reproductible, les valeurs S_i du signal à un instant t_i de l'acquisition sont toujours les mêmes quel que soit l'enregistrement. $s(t)$ sort donc indemne de l'opération de moyennage, et sa valeur efficace S_{eff} reste

inchangée. Il n'en est pas de même pour le bruit $b(t)$ s'il est parfaitement aléatoire car il n'y a aucune corrélation entre les échantillons des différentes acquisitions : les valeurs B_i à un instant t_i des N acquisitions sont toutes différentes, tantôt positives ou négatives pour un bruit centré autour de zéro \rightarrow leur accumulation lisse progressivement le signal $\langle b(t) \rangle$. On alors peut montrer (cf. [8], p. 107) que la valeur efficace du bruit B_{eff} diminue en racine carré du nombre d'acquisition.

Vérification :



La manipulation a été testée avec un oscilloscope Agilent DSO-X 2002A et son module intégré WaveGen comme générateur de bruit. On a mesuré la valeur efficace du bruit à l'aide des mesures automatique de l'appareil, pour un signal moyenné sur un nombre d'acquisition N compris entre 4 et 256. Voici à titre indicatif le résultat des mesures effectuées sur différentes bases de temps BT , l'amplitude du bruit n'ayant pas été modifiée au cours de l'expérience :



Attention, **il y a une précaution importante à respecter lorsqu'on fait ces mesures** : on peut être tenté de changer le calibre de l'oscilloscope en cours de manipulation pour améliorer la précision des mesures car l'amplitude du bruit devient de plus en plus faible au fur et à mesure que l'on augmente le moyennage. C'est une erreur à ne pas commettre car le bruit a toujours la même amplitude ! \rightarrow Si on augmente la sensibilité verticale de l'appareil lorsque le signal moyenné apparaît trop faible, on tronque chaque acquisition individuelle, ce qui fausse la mesure de $\langle B_{\text{eff}} \rangle$.

Analyse des résultats :

Les mesures confirment l'atténuation en $1/\sqrt{N}$, mais on note aussi que le bruit dépend de la base de temps : on obtient toujours à peu près la même droite lorsque la BT est suffisamment faible (cela a été vérifié sur notre exemple pour des BT inférieures à 5 µs/div). En revanche, la pente de la droite diminue lorsque la BT devient trop importante \rightarrow le bruit subit une atténuation pour les durées d'acquisition les plus longues. Cet effet est dû à un processus de décimation qu'enclenche alors l'appareil⁴¹ car il n'a plus assez de mémoire pour conserver tous les échantillons issus de son convertisseur.

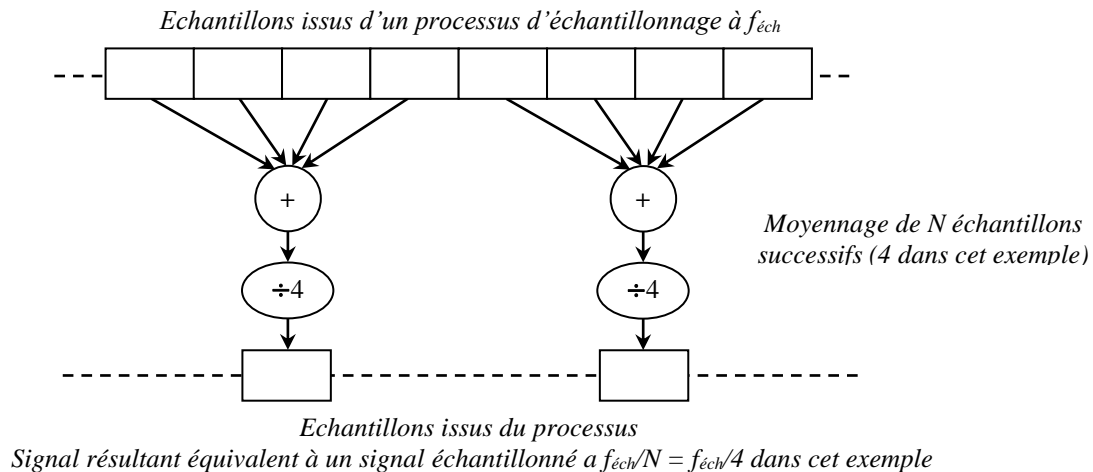
⁴¹ Cf. chapitre « Modes d'acquisition » dans les notices des oscilloscopes Agilent DSO 5012A ou DSO 2002A par exemple, et annexe 3 de ce document.

Remarque :

L'atténuation en \sqrt{N} explique pourquoi le moyennage est surtout efficace au début → Dans la plupart des cas, une moyenne sur un faible nombre d'acquisition (4 ou 8) suffit généralement pour « nettoyer » un signal de manière notable.

III.3.2 Le mode Haute Résolution

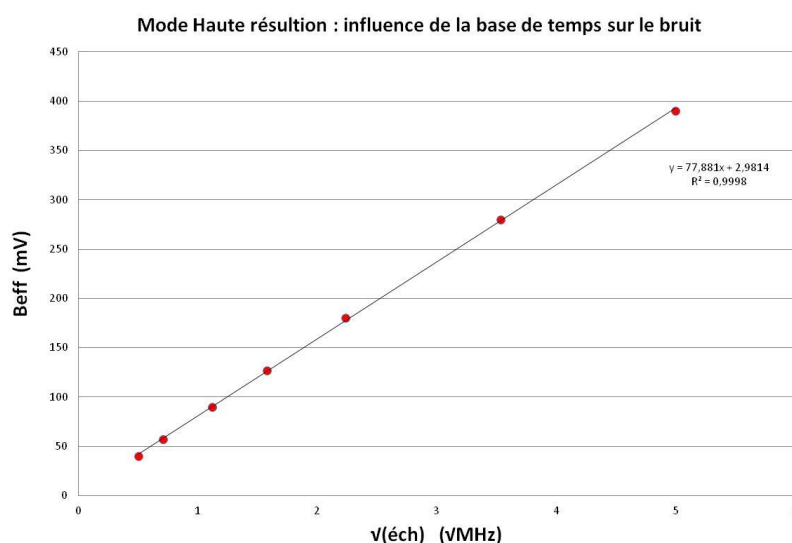
Ce mode d'acquisition utilise encore une méthode basée sur le moyennage mais le calcul se fait cette fois ci sur les échantillons adjacents d'une seule acquisition :



Contrairement au mode précédent qui préservait la fréquence d'échantillonnage, le mode haute résolution réduit $f_{\text{éch}}$ et limite ainsi la bande passante des fréquences que peut observer l'oscilloscope⁴². On doit donc s'attendre, de manière similaire au § III.2.2, à une baisse du bruit proportionnelle à $\sqrt{f_{\text{éch}}}$.

Vérification :

Même montage que précédemment. On a mesuré cette fois ci la valeur efficace d'un bruit observé en mode Haute Résolution en augmentant progressivement la base de temps de l'oscilloscope pour diminuer sa fréquence d'échantillonnage effective⁴³ :



⁴² Il est en contrepartie plus réactif puisqu'il n'est pas nécessaire d'attendre la compilation de N acquisitions pour obtenir un résultat.

⁴³ L'oscilloscope Agilent DSO-X 2002A affiche cette fréquence en haut et à droite de l'écran.

Le générateur de bruit ayant une bande passante d'environ 20 MHz, on a commencé les mesures avec une base de temps de 100 $\mu\text{s}/\text{div}$ (car cela correspond à une fréquence d'échantillonnage effectif de 25 MHz sur l'oscilloscope utilisé) pour que les changements ultérieurs de base de temps affectent directement la bande passante du bruit.

Analyse des résultats :

Les mesures confirment une atténuation du bruit en $\sqrt{f_{\text{éch}}}$.

Remarque importante :

L'opération de moyennage sur des échantillons successifs permet de réduire le bruit aléatoire en produisant une trace plus lisse mais elle présente aussi l'avantage d'augmenter le rapport signal sur bruit de l'acquisition et ce, paradoxalement, grâce au bruit aléatoire présent sur les entrées du dispositif d'acquisition⁴⁴ ! Pour le comprendre, il suffit d'imaginer un convertisseur analogique - numérique 1 bit travaillant sur des tensions comprise entre 0 et 1 V. Si on applique une tension de 0,25 V à l'entrée de ce CAN et qu'on fait plusieurs mesures, il se contentera de donner une succession de 0 en sortie et l'information sur la tension sera perdue à cause du quantum trop fort⁴⁵ du convertisseur. Imaginons maintenant qu'on ajoute à la tension de 0,25 V un bruit aléatoire centré, d'amplitude légèrement supérieure à + 0,5 V. Dans ce cas, le CAN donnera sur plusieurs mesures une succession de 0 et de 1⁴⁶, mais avec une plus forte probabilité d'obtenir des 0. On comprend alors facilement qu'une moyenne sur un nombre suffisant de résultats permette d'aboutir à la valeur de 0,25 V pour la tension étudiée. **On peut donc ainsi récupérer grâce au bruit une information inférieure au quantum.** C'est de cette manière que les oscilloscopes modernes, équipés le plus souvent de convertisseurs 8 Bits et donc normalement plafonnés à un RSB de 50 dB (cf. § I.3.4), peuvent dépasser largement ce seuil dans l'analyse des signaux.

Bibliographie :

- [1] : Duffait ; Expériences d'électronique, Agrégation de physique (Bréal)
- [2] : Mérat Moreau ; Physique appliquée - Electronique, Electronique de puissance - Term F2 – Nathan
- [3] : Quaranta, Tome III : Electronique
- [4] : Michel Krob : Electronique expérimentale
- [5] : BUP 754, p. 707-730 et 775-799
- [6] : Francis Cottet ; Traitement du signal ; aide-mémoire ; 2^{ème} édition, p. 50 et suivantes (version abrégée de la référence suivante).
- [7] : Francis Cottet ; Traitement des signaux et acquisition de données ; 3^{ème} édition, p. 54 et suivantes.
- [8] : Skoog : Principes d'analyse instrumentale ; cinquième édition
- [9] : Effects of Averaging to Reject Unwanted Signals in Digital Sampling Oscilloscopes - Teradyne Application Note (disponible sur Internet)

⁴⁴ C'est le principe du dithering.

⁴⁵ On retrouve ici un point soulevé au § I.3.4 : le quantum limite la résolution du CAN en empêchant l'observation des détails qui sont plus fins que lui.

⁴⁶ On suppose que ce CAN génère un 0 pour une tension comprise entre - 0,5 V et + 0,5 V et un 1 pour une tension comprise entre + 0,5 V et + 1,5V.

ANNEXE 1 : LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

I RAPPELS MATHÉMATIQUES

Soit un signal $s(t)$ dépendant de la variable t et satisfaisant les conditions de Dirichlet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty \quad \text{Absolument intégrable et } s(t) \text{ continu par morceau}$$

Dans ces conditions, s admet une transformée de Fourier définie par :

$$\text{TF}[s(t)] = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \text{Pour les signaux temporels.}$$

$$\text{TF}[s(r)] = S(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(r) e^{-jkr} dr \quad \text{Pour des signaux spatiaux (} k = \text{vecteur d'onde} = 2\pi/\lambda \text{).}$$

II PROPRIÉTÉS UTILES DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

II.1 Propriété 1 : Translation dans l'espace

Nous allons calculer l'influence d'une translation r_0 de r sur la TF d'un signal spatial. Soit $S(k)$ la TF de $s(r)$; on a alors dans ce cas :

$$\text{TF}[s(r - r_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(r - r_0) \cdot e^{-jkr} dr$$

$$\text{Il vient, avec le changement de variable } R = r - r_0 : \text{TF}[s(r - r_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(R) \cdot e^{-jkR} e^{-jkr_0} dR$$

Ce qui conduit à :

$$\boxed{\text{TF}[s(r - r_0)] = e^{-jkr_0} \text{TF}[s(t)]}$$

Conclusion :

Toute translation dans l'espace (ou dans le temps pour les signaux temporels) ne produit qu'un déphasage de la TF.

II.2 Propriété 2 : TF du produit de deux fonctions

$$\begin{aligned} \text{TF}[r(t) \cdot s(t)] &= \int r(t) \cdot s(t) \cdot e^{-2\pi j f t} \cdot dt = \iint R(f') \cdot e^{-2\pi j f' t} \cdot df' \cdot s(t) \cdot e^{-2\pi j f t} \cdot dt = \int R(f') \int s(t) \cdot e^{-2\pi j (f - f') t} \cdot dt \cdot df' \\ &= \int R(f') S(f - f') df' \end{aligned}$$

D'où :

$$\text{TF}[r(t) \cdot s(t)] = \text{TF}[r(t)] \otimes \text{TF}[s(t)] \quad (\text{voir la définition du produit de convolution})$$

Conclusion :

La TF du produit de deux fonctions est le produit de convolution des TF.

ANNEXE 2 : LE PRODUIT DE CONVOLUTION

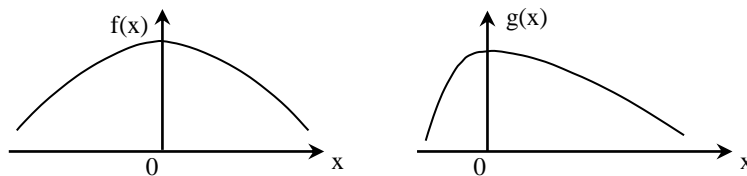
I RAPPELS MATHÉMATIQUES

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions sommables. Leur produit de convolution, qu'on note $h(x) = f(x) \otimes g(x)$, est la fonction :

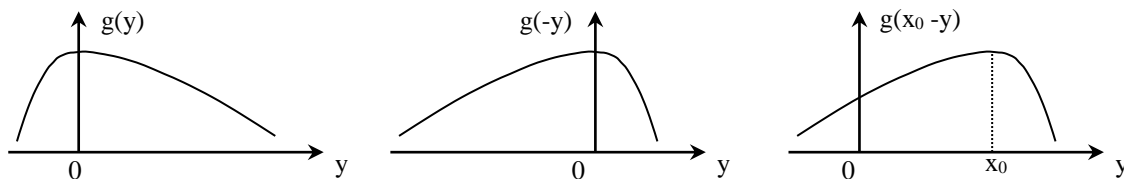
$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y).g(x-y)dy$$

Signification géométrique :

Le produit de convolution peut se décomposer de la manière suivante. Supposons que $f(x)$ et $g(x)$ aient pour graphes :



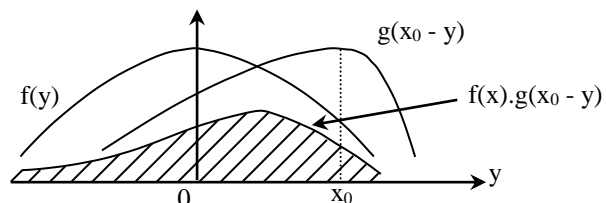
$g(y)$, $g(-y)$ et $g(x_0-y)$ sont représentées par :



Sur un même graphe portons $f(y)$; $g(x_0-y)$ et leur produit de $f(y).g(x_0-y)$:

La surface hachurée représente

$$h(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y).g(x_0 - y)dy$$



Quand x_0 prend toutes les valeurs possibles, c'est à dire varie de $-\infty$ à $+\infty$, nous obtenons la fonction $h(x)$, convolution de $f(x)$ et $g(x)$. En pratique les fonctions sont non nulles sur un support fini, donc l'intégrale a des bornes finies.

L'exemple qui suit permet de comprendre comment s'effectue le produit de convolution dans le cas de signaux numériques où les signaux h et g sont numériques et définis par les suites $\{f(n)\}$ et $\{g(n)\}$, le produit de convolution s'écrit alors :

$$s(n) = h(n) \otimes g(n) = \sum_k f(k).g(n-k)$$

On considère les signaux suivants :

$h(0) = 1$	$g(0) = 1$	dimension de h : $N = 3$
$h(1) = 2$	$g(1) = 1$	dimension de g : $M = 4$
$h(2) = 3$	$g(2) = 2$	
	$g(3) = 2$	

→ $s(0) = 1$, $s(1) = 3$, $s(2) = 7$, $s(3) = 9$, $s(4) = 10$ et $s(5) = 6$. La dimension du signal convolué est $N+M-1$

II PROPRIETES UTILES DU PRODUIT DE CONVOLUTION

II.1 Propriété 1 : Elément neutre du produit de convolution

L'élément neutre du

produit de convolution est la distribution de Dirac :

$$h(t) \otimes \delta(t) = \int h(u) \cdot \delta(t - u) \cdot du = h(t)$$

La convolution par un pic de Dirac renvoie donc le signal dans son entier. Il en résulte que convoluer un signal par une distribution de Dirac décalée permet de translater le signal. En effet : $h(t) \otimes \delta(t - a) = h(t - a)$ qui est une fonction de t

II.2 Propriété 2 : Convolution par un peigne de Dirac

$$s(t) \otimes \text{peigne}(t) = s(t) \otimes \sum_n \delta(t - n) = \sum_n \int s(u) \delta(t - n - u) du = \sum_n s(t - n)$$

Il en résulte que la convolution d'un signal par un peigne de Dirac permet de périodiser le signal. Cette application est extrêmement utile pour décrire mathématiquement le phénomène de périodicité.

II.3 Propriété 3 : Transformée de Fourier du produit de convolution

Soient deux

signaux $s(t)$ et $r(t)$ dont les transformées de Fourier sont respectivement $S(f)$ et $R(f)$. Nous allons calculer la transformée du produit de convolution de s par r :

$$\begin{aligned} \text{TF}[s(t) \otimes r(t)] &= \int [s(t) \otimes r(t)] e^{-2\pi j f t} \cdot dt = \iint s(u) \cdot r(t - u) e^{-2\pi j f t} \cdot dt \cdot du = \int s(u) \int r(t - u) e^{-2\pi j f t} \cdot dt \cdot du \\ &= \int s(u) \int r(t - u) e^{-2\pi j f (t - u)} \cdot dt \cdot e^{-2\pi j f u} du = \int s(u) \cdot e^{-2\pi j f u} du \int r(p) e^{-2\pi j f p} \cdot dp \quad \text{où } p = t - u \\ &= S(f) \cdot R(f) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{TF}[s(t) \otimes r(t)] = \text{TF}[s(t)] \cdot \text{TF}[r(t)]$$

II.4 Propriété 4 : Transformée de Fourier d'un produit de fonction

On sait (voir

l'annexe sur la transformée de Fourier) que : $\text{TF}[r(t) \cdot s(t)] = \text{TF}[r(t)] \otimes \text{TF}[s(t)]$

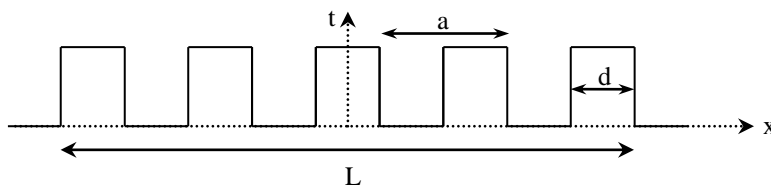
III UTILISATION DU PRODUIT DE CONVOLUTION

III.1 Application en diffraction

Réseau d'amplitude :

On appelle ainsi une

succession périodique de traits noirs et de traits transparents, présentant donc une transparence t représentée par la figure ci-après, où a est le pas du réseau, d la largeur d'un trait transparent et L la longueur du réseau.



D'après le principe de Huyghens-Fresnel, si ce réseau est éclairé par une onde plane

monochromatique de longueur d'onde λ , l'amplitude complexe diffractée à une distance D (très grande par rapport aux dimensions du réseau) est T , transformée de Fourier de t .

Construction mathématique de t :

Une fente est représentée mathématiquement par la fonction $\text{rect}(x/d)$. On veut périodiser cette fonction dans l'espace. D'après la propriété 2, on fait un produit de convolution par un peigne de Dirac. Le réseau est de largeur finie L , il faut donc limiter l'extension de la fonction entre $-L/2$ et $L/2$: on multiplie donc par $\text{rect}(x/L)$.

$$t = [\text{rect}(x/d) \otimes \text{peigne}(x/a)] \cdot \text{rect}(x/L)$$

$$\text{peigne}\left(\frac{x}{a}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - na)$$

$$\text{rect}(x/d) = 1 \text{ si } x \in [-d/2 ; +d/2] \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

$$\text{rect}(x/L) = 1 \text{ si } x \in [-L/2 ; +L/2] \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

$$\text{D'après les propriétés 3 et 4 : } T = \{\text{TF}[\text{rect}(x/d)] \cdot \text{TF}[\text{peigne}(x/a)]\} \otimes \text{TF}[\text{rect}(x/L)]$$

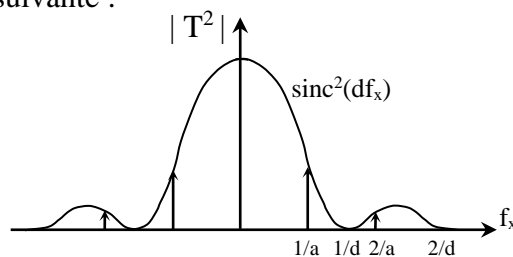
$$= [d \cdot \text{sinc}(df_x) \cdot \text{peigne}(af_x)] \otimes L \cdot \text{sinc}(Lf_x)$$

$$\text{Avec } \text{peigne}(af_x) = \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_x - \frac{n}{a}\right) \quad \text{et} \quad f_x = \frac{p x}{\lambda D}$$

Interprétation physique de ce calcul :

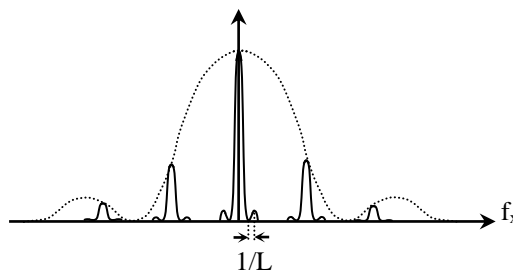
Signification de $[\text{sinc}(df_x) \cdot \text{peigne}(af_x)]$:

On a un peigne de Dirac modulé en amplitude par un sinus cardinal. Le peigne signifie que la lumière est concentrée en des points de fréquence $f_x = k/a$ où k est un entier relatif représentant les différents ordres du réseau. Le sinus cardinal correspond à une modulation de l'amplitude de ces pics : plus les fentes d seront petites, plus on pourra observer d'ordre. L'observateur étant sensible à $|T|^2$, on peut résumer le tout par la figure suivante :



Signification de $\text{sinc}(Lf_x)$:

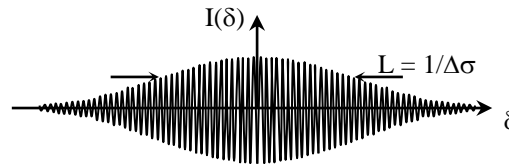
Chaque point est remplacé par une tache de diffraction, dont le premier zéro est à une distance $1/L$ du maximum.



On peut s'entraîner à retrouver les figures de diffraction de deux fentes. On suivra la méthode suivante : construire mathématiquement, établir l'expression de T en utilisant les différentes propriétés de la convolution et de la transformée de Fourier puis interprétation physique du résultat. On trouvera la solution page 116 du Sextant, Optique expérimentale de chez Hermann.

III.2 Application en spectroscopie

On peut recueillir l'interférogramme ci-dessous à l'aide d'un Michelson dont le chariot est motorisé. On souhaite en déduire le spectre de la lampe utilisée.



Afin de pouvoir résoudre ce problème à la main, on suppose que l'enveloppe de l'interférogramme est une Gaussienne et que sous l'enveloppe on a un sinus. On peut donc exprimer mathématiquement l'interférogramme comme le produit d'une Gaussienne par un sinus :

$$\text{Interférogramme} = \text{Gaussienne} \cdot \text{Sinus}$$

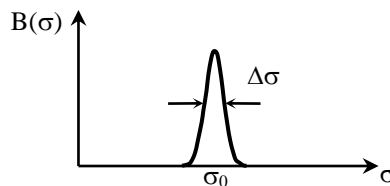
On sait que le spectre en nombre d'onde est la transformée de Fourier de l'interférogramme.

$$\text{D'après la propriété 4 : Spectre} = \text{TF}[\text{Gaussienne}(\delta)] \otimes \text{TF}[\text{Sinus}(\delta_0)]$$

On sait que la transformée de Fourier d'une Gaussienne dans le domaine temporel est une Gaussienne dans le domaine spectral $\rightarrow \text{Spectre} = \text{Gaussienne}(\sigma) \otimes \delta(\sigma - \sigma_0)$.

$$\text{D'après la propriété 1 : Spectre} = \text{Gaussienne}(\sigma - \sigma_0)$$

On retrouve le résultat connu :



III.3 Application en traitement du signal : effet du fenêtrage temporel

On veut étudier le spectre d'un signal $s(t)$ à l'aide d'un analyseur de spectre. L'opération mathématique effectuée par l'appareil (une transformée de Fourier discrète) est obligatoirement limitée à N échantillons, c'est à dire à une durée $\alpha = N/f_e$ où f_e est la fréquence d'échantillonnage de l'analyseur de spectre). On peut exprimer mathématiquement cet effet :

$$s_N(t) = s(t) \cdot \Pi_\alpha(t)$$

$s_N(t)$ est le signal fenêtré

$\Pi_\alpha(t)$ est la fenêtre et vaut 1 pour $t \in [0 ; \alpha]$ et 0 ailleurs

D'après la propriété 4, le spectre en fréquence $S_N(f)$ de $s_N(t)$ est donc donné par :

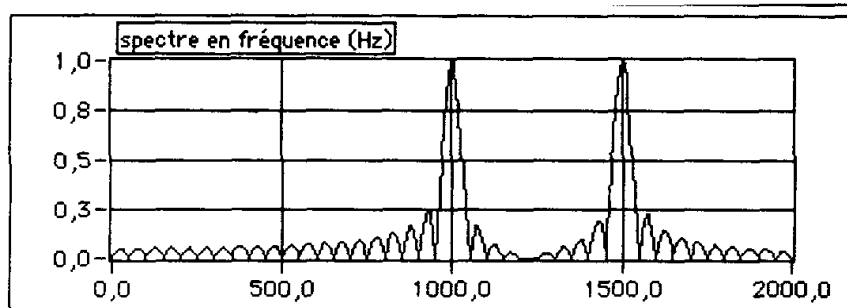
$$S_N(f) = S(f) \otimes \text{sinc}(\pi \alpha f) \quad \text{Où } S(f) \text{ est le spectre du signal } s(t)$$

Dans le cas d'un signal périodique, $S(f)$ est un spectre discret que l'on peut exprimer mathématiquement comme une somme de Dirac. D'après la propriété 1, le spectre du signal fenêtré

est donc un ensemble de fonctions $\text{sinc}(\pi\alpha f)$ centrées sur les fréquences qui composent le signal.

Exemple :

La figure ci-dessous représente le spectre d'un signal périodique composé de deux signaux sinusoïdaux purs de fréquence 1 kHz et 1,5 kHz et d'amplitude égale. La fenêtre temporelle de mesure ou de calcul est de 20 ms soit respectivement 20 périodes pour le signal à 1kHz et 30 périodes pour le signal à 1,5 kHz.



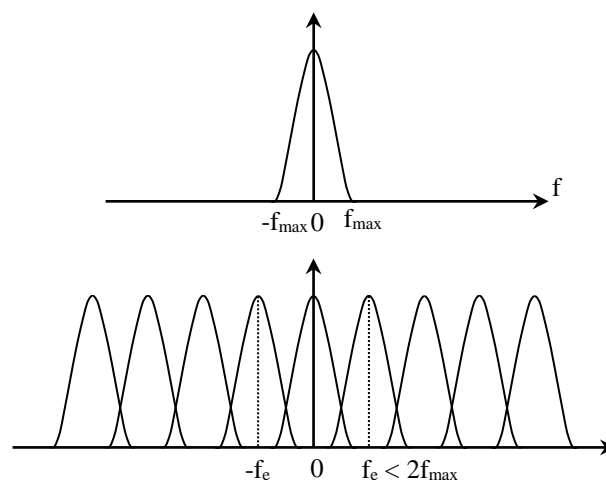
A la place de deux raies spectrales théoriques aux deux fréquences considérées, nous obtenons donc deux fonctions sinc qui donnent un spectre continu présentant un maximum pour les deux fréquences 1 kHz et 1,5 kHz.

III.4 Application en traitement de signal : échantillonnage et FFT

Les analyseurs de spectres que l'on utilise sont numériques. Ils échantillonnent le signal et c'est à partir du signal échantillonné qu'ils calculent le spectre du signal. Cela a une influence importante sur le résultat obtenu : l'échantillonnage temporel provoque la périodisation du spectre autour de la fréquence d'échantillonnage.

Remarque importante :

Selon le support fréquentiel de $x(f)$ et f_e , les motifs spectraux périodisés de $X(f)$ sont à supports disjoints ou se recouvrent. Dans le second cas, la présence d'un recouvrement spectral partiel entraîne la non - réversibilité de la transformation : on parle d'effet de repliement. Le théorème de Shannon précise les conditions de validité de l'opération d'échantillonnage : si la fréquence maximum contenu dans le signal est f_{\max} la condition de non repliement est assurée si $f_e = 1/T_e \geq 2f_{\max}$.



ANNEXE 3 : FILTRAGE ET RAPPORT SIGNAL/BRUIT

I GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES D'UN SIGNAL

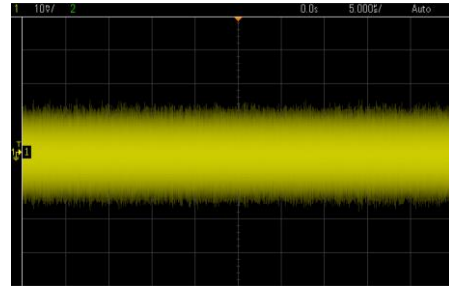
I.1 Valeur moyenne

La moyenne d'un signal $s(t)$ est définie dans le cas le plus général par la relation :

$$S_{moy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(t).dt$$

Cette grandeur n'est pas utile ici car elle est nulle pour les signaux envisagés : le résultat est trivial pour un signal sinusoïdal, et on peut facilement le concevoir pour un bruit. Il suffit d'observer à l'oscilloscope la tension aux bornes d'une résistance R^{47} de valeur quelconque :

On remarque que la tension de bruit $b(t)$ semble être totalement aléatoire (bruit blanc⁴⁸), et aussi souvent positive que négative (donc centrée autour de 0). Dans ces conditions (bruit blanc centré), la valeur moyenne $\langle b(t) \rangle$ est aussi nulle. Il faut donc bien trouver une grandeur plus pertinente pour caractériser ces 2 signaux.



I.2 Valeur efficace

Elle correspond à la racine carrée de la valeur moyenne de $s^2(t)$:

$$S_{eff} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s^2(t).dt}$$

Cette grandeur est plus intéressante car l'élévation au carré permet d'obtenir un résultat non nul.

I.2.1 Cas d'un signal sinusoïdal

On considère un signal $s(t) = A \cos \omega_0 t$. On a alors :

$$S_{eff}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A^2 \cos^2 \omega_0 t . dt$$

Le signal étant périodique de période T_0 , le calcul se ramène à celui sur une période⁴⁹ :

⁴⁷ Le signal obtenu ici ne correspond pas uniquement au bruit lié à l'agitation thermique dans la résistance car il vaut $\sqrt{4k_B T R \Delta f}$ en valeur efficace, soit $\approx 100 \mu V$ dans l'expérience (résistance de $10 k\Omega$; oscilloscope à $70 MHz$ de bande passante) → Ce niveau est tellement faible qu'il est facilement pollué par des bruits externes d'influences et donc difficilement observable seul.

⁴⁸ Cette notion sera précisée au § I.5.2.

⁴⁹ C'est le cas dès que $T \gg T_0$ car on a alors $T = NT_0 +$ un rajout, avec N grand → on intègre le signal N fois sur T_0 et 1 fois sur le rajout → même si la deuxième intégrale donne une valeur différente, sa contribution à la moyenne est négligeable comparée aux N autres calculs. Il n'y a même plus d'approximations à faire avec un signal parfaitement sinusoïdal car il est de durée infinie.

$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} A^2 \cos^2 \omega_0 t . dt = \frac{A^2}{T_0} \int_t^{t+T_0} \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} . dt = \frac{A^2}{2T_0} \left[\int_t^{t+T_0} dt + \int_t^{t+T_0} \cos 2\omega_0 t . dt \right]$$

Le deuxième terme est nul car il correspond au calcul de l'intégrale d'un cosinus sur 2 de ses périodes. On obtient donc le résultat classique $S_{eff} = A/\sqrt{2}$.

I.2.2 Cas du bruit

Le bruit étant une grandeur aléatoire, $b(t)$ ne peut pas avoir d'expression analytique et seule une description statistique est adaptée. Si on considère que la loi de distribution des valeurs possibles pour $b(t)$ est une Gaussienne, B_{eff} correspond alors à l'écart-type σ de la distribution, et 99 % des valeurs prises par le bruit sont comprises dans un intervalle de largeur 6σ . On peut donc, sous cette hypothèse, estimer la valeur B_{eff} d'un bruit en divisant par 6 la valeur crête-crête du signal.

I.3 Puissance

On peut s'appuyer sur deux exemples piochés en Physique pour voir comment appliquer ce concept à un signal : la puissance électrique instantanée aux bornes d'une résistance R vaut $P_{el} = u(t) \times i(t) = v^2(t)/R$; la puissance acoustique d'une onde plane progressive s'écrit $P_a = S.p(t).v(t) = p^2(t)/(pc/S)$. Dans les deux cas, cette grandeur correspond au signal au carré, pondéré par un coefficient caractéristique de la nature physique du signal et du milieu où il s'applique (l'impédance) → la notion de puissance peut être généralisée en la définissant simplement par⁵⁰ :

$$\boxed{P_{inst} = s^2(t)} \quad \text{D'ou} \quad \boxed{P_{moy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s^2(t) . dt = S_{eff}^2}$$

On peut l'appliquer ainsi directement à un signal⁵¹. La puissance moyenne correspond alors simplement à la valeur efficace au carré du signal, soit $S_{eff}^2 = A^2/2$ pour le signal sinusoïdal, et B_{eff}^2 pour le bruit, soit sa variance si on le suppose Gaussien.

I.4 Energie

$$\text{Comme } P = W/t, \text{ on a : } \boxed{W = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) . dt} \quad \text{Et} \quad \boxed{W_{totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) . dt}$$

L'énergie est embarrassante à manipuler pour le cas étudié⁵² car sa valeur dépend de la durée d'observation et tend vers l'infini lorsque $t \rightarrow \infty$. La puissance ne pose pas ce genre de problème donc c'est la grandeur privilégiée pour cette étude.

I.5 Description dans l'espace fréquentiel

On a l'habitude de caractériser les filtres par leur action dans cet espace. Ce mode de description appliqué au bruit est aussi très instructif.

Un signal s peut être décrit en termes de fréquences : il suffit de faire la transformée de Fourier de $s(t)$ pour obtenir $S(f)$ ⁵³. L'énergie totale d'un signal ne dépendant pas du mode de représentation choisi pour le décrire, on a (égalité de Parseval) :

⁵⁰ En électricité on peut voir cette grandeur comme la puissance débitée sur une résistance de charge de 1Ω .

⁵¹ Tout en gardant à l'esprit qu'il faut pondérer le résultat pour obtenir une valeur réelle de la puissance.

⁵² C'est l'inverse pour les signaux transitoires.

⁵³ Il faut en toute rigueur que le signal soit de carré sommable pour avoir une énergie finie.

$$W_{totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S^2(f).df$$

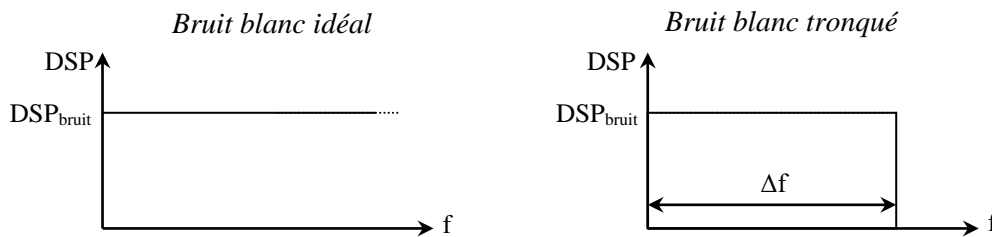
Ou $S^2(f)$ représente la densité spectrale d'énergie (l'énergie par unité de fréquence, notée DSE) du signal considéré⁵⁴. Ce mode de description peut aussi s'appliquer à la puissance. On a alors :

$$P_{moyenne} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_p^2(f).df$$

Ou $S_p^2(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S^2(f)}{T}$ représente la densité spectrale de puissance (puissance par unité de fréquence, notée DSP) du signal.

DSP d'un bruit blanc :

Un phénomène parfaitement aléatoire ne présente aucune corrélation avec lui-même, même sur des échelles de temps très longues → il n'a aucune périodicité et sa fonction d'autocorrélation est tout le temps nulle, sauf lorsque le temps de corrélation vaut 0. C'est donc un pic de Dirac centré sur 0. La densité spectrale correspondant à la TF de cette fonction, on aura un spectre continu et plat → $b(t)$ va contenir toutes les fréquences possibles⁵⁵, avec des amplitudes identiques (DSP constante) :



Le bruit blanc n'a cependant pas d'existence physique puisqu'il serait de puissance infinie. Il est limité en pratique par le système qui possède la bande passante la plus faible. Pour les observations à l'oscilloscope dans l'expérience proposée, le dispositif limitant est le générateur de bruit puisque le constructeur annonce une bande passante de 20 MHz pour le module contre 70 MHz pour l'oscilloscope. Par contre, si on utilise un multimètre pour les mesures, c'est lui qui sera le facteur limitant. Dans tous les cas de figure, **on considèrera pour simplifier une fonction de transfert idéalisée conduisant à une DSP constante jusqu'à une certaine fréquence, suivie d'une coupure franche au-delà**. On a alors :

$$P_{moyenne\ bruit} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_p^2(f).df = DSP_{bruit} \times \Delta f$$

La puissance moyenne correspondant au carré de la valeur efficace (cf. I.3), on a, pour le bruit :

$$B_{eff} = \sqrt{DSP_{bruit} \times \Delta f}$$

Conclusion importante :

La valeur efficace d'un bruit dépend de la bande passante Δf . C'est logique car si Δf augmente, on prend plus de bruit puisqu'on limite moins son spectre (plus de bruit HF) → la DSP étant supposée constante, la puissance et la valeur efficace du bruit augmentent. Cela

⁵⁴ On peut montrer que cette densité spectrale correspond à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal $s(t)$.

⁵⁵ Dans tout ce qui suit, il faudrait en toute rigueur représenter la partie négative des spectres. On ne le fait pas ici pour plus de simplicité.

entraîne plusieurs conséquences pratiques :

- quand on mesure un bruit, la bande passante de l'appareil de mesure peut le filtrer, et donc modifier sa valeur → **Il n'y a donc pas de résultat absolu à cette mesure.** On peut en revanche en déduire la DSP du bruit si on connaît la bande passante puisqu'on a $DSP_{\text{bruit}} = (B_{\text{eff}})^2 / \Delta f$.

- **on peut diminuer une tension de bruit en filtrant le signal** → si on veut minimiser le bruit, on a intérêt à limiter si possible la bande passante à la largeur utile du spectre du signal à transmettre (filtrage optimisé ; cf. III.4).

II RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT (RSB)

C'est, pour les raisons invoquées précédemment, un rapport exprimé en puissance :

$$RSB = \frac{\text{Puissance moyenne du Signal}}{\text{Puissance moyenne du Bruit}} = \left(\frac{S_{\text{eff}}}{B_{\text{eff}}} \right)^2$$

$$\text{Soit en dB}^{56} : RSB = 10 \log \left(\frac{P_s}{P_B} \right) = 10 \log \left(\frac{S_{\text{eff}}}{B_{\text{eff}}} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{S_{\text{eff}}}{B_{\text{eff}}} \right)$$

Pour un signal sinusoïdal noyé dans un bruit blanc tronqué idéalement, on a :

$$\left. \begin{array}{l} S_{\text{eff}} = A / \sqrt{2} \\ B_{\text{eff}} = \sqrt{DSP_{\text{bruit}} \times \Delta f} \end{array} \right\} \rightarrow RSB = \left(\frac{S_{\text{eff}}}{B_{\text{eff}}} \right)^2 = \frac{A^2}{2 \cdot DSP_{\text{bruit}} \times \Delta f}$$

Le résultat dépend lui aussi de la bande passante Δf dans l'expérience : le RSB se dégrade lorsque Δf augmente puisqu'on prend alors plus de bruit, avec toujours le même signal.

III ACTION D'UN FILTRE SUR LE RSB

On suppose dans cette partie qu'on traite le signal bruité par un filtre passe bas⁵⁷ du premier ordre de fréquence de coupure f_C .

III.1 Puissance du signal en sortie

Le calcul est assez simple car on connaît la valeur efficace d'un signal sinusoïdal ($S_{\text{eff}} = A/\sqrt{2}$), et on sait qu'elle est « concentrée spectralement » sur la fréquence f_0 de ce signal. Un filtre agissant par nature de façon linéaire sur le spectre, il suffit de multiplier S_{eff} par la valeur de la fonction de transfert du filtre à la fréquence f_0 pour connaître la tension efficace S'_{eff} en sortie de filtre :

$$S'_{\text{eff}} = S_{\text{eff}} \times |H(\omega_0)| = \frac{A}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (f_0/f_C)^2}}$$

⁵⁶ On peut remarquer qu'on obtient une expression similaire aux fonctions de transferts des filtres → ces fonctions expriment donc un rapport de puissance sortie/entrée si les impédances d'entrée et de sortie de filtre sont identiques.

⁵⁷ Ce n'est pas le filtre le plus efficace pour le problème posé. Un passe bande centré sur f_0 permettrait une réduction plus forte du bruit, mais l'efficacité est alors si grande que les mesures pratiques de RSB sont trop délicates.

La puissance s'en déduit aisément puisque $P = S^2$.

III.2 Puissance du bruit en sortie

Le principe du calcul est le même sauf que le bruit contient toutes les fréquences comprises entre 0 et Δf avec une amplitude constante :

$$P'_{\text{bruit}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_P^2(f) |H(\omega)|^2 df = \int_0^{\Delta f} \text{DSP}_{\text{bruit}} \frac{1}{1 + (f/f_C)^2} df = \text{DSP}_{\text{bruit}} \int_0^{\Delta f} \frac{df}{1 + (f/f_C)^2}$$

Soit, en posant $x = f/f_C$:

$$P'_{\text{bruit}} = \text{DSP}_{\text{bruit}} \times f_C \int_0^{\Delta f/f_C} \frac{dx}{1 + x^2} = \text{DSP}_{\text{bruit}} \times f_C [\arctg(x)]_0^{\Delta f/f_C} = \text{DSP}_{\text{bruit}} \times f_C \times \arctg(\Delta f/f_C)$$

On peut simplifier le résultat si **on suppose la bande passante Δf très grande devant la fréquence de coupure f_C du filtre**. L'arc tangente tend alors vers $\pi/2$, d'où :

$$\boxed{P'_{\text{bruit}} = \frac{\pi \cdot f_C \cdot \text{DSP}_{\text{bruit}}}{2}} \Leftrightarrow \boxed{\Delta f \gg f_C}$$

Contrairement à l'entrée, la puissance du bruit en sortie ne dépend plus de la bande passante ce qui est normal puisqu'on suppose $\Delta f \gg f_C \rightarrow$ on peut rajouter en entrée autant de bruit HF que l'on veut, ça ne changera rien s'il est suffisamment haut en fréquence par rapport à f_C puisqu'il sera alors totalement éliminé par le filtre passe bas. La puissance est en revanche d'autant plus faible que la fréquence de coupure sera basse, ce qui est tout aussi logique puisqu'on réduit alors le spectre du bruit, donc sa puissance globale.

III.3 RSB en sortie ; filtrage optimisé

On obtient, par combinaison des expressions précédentes :

$$\boxed{\text{RSB}' = \frac{(S'_{\text{eff}})^2}{P'_{\text{bruit}}} = \frac{A^2 |H(\omega_0)|^2 2}{2 \cdot \pi f_C \cdot \text{DSP}_{\text{bruit}}} = \frac{A^2 |H(\omega_0)|^2}{\pi \cdot f_C \cdot \text{DSP}_{\text{bruit}}}}$$

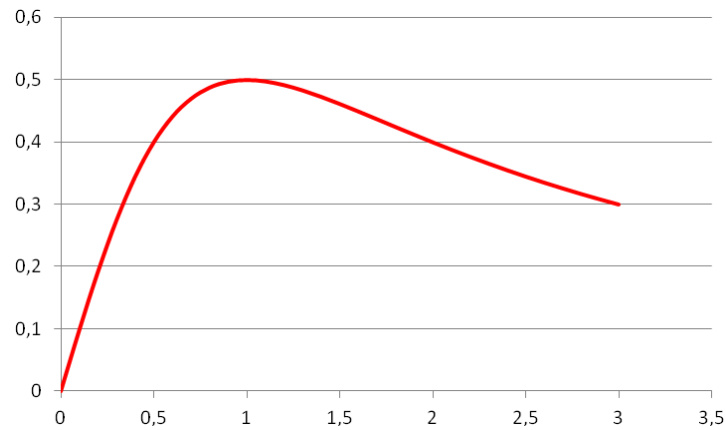
On peut se poser la question de savoir si on peut optimiser ce RSB par un choix judicieux de la bande passante du filtre, donnée ici par f_C puisqu'on a un filtre passe bas. Pour le savoir, on peut développer le RSB avec l'expression de $H(\omega_0)$:

$$|H(\omega_0)|^2 = \frac{1}{1 + (f_0/f_C)^2} = \frac{f_C^2}{f_C^2 + f_0^2} \rightarrow \text{RSB}' = \frac{A^2}{\pi \cdot \text{DSP}_{\text{bruit}}} \frac{f_C}{f_C^2 + f_0^2}$$

Il suffit alors de chercher l'extrémum de RSB' en regardant la condition :

$$\frac{\partial}{\partial f_C} \left(\frac{f_C}{f_C^2 + f_0^2} \right) = 0 = \frac{(f_C^2 + f_0^2) - f_C(2f_C)}{(f_C^2 + f_0^2)^2} = \frac{f_0^2 - f_C^2}{(f_C^2 + f_0^2)^2} \Leftrightarrow \boxed{f_C = f_0}$$

On a tracé le graphique de la fonction $f_C/(f_C^2 + f_0^2)$ avec une fréquence f_0 normalisée à 1 pour vérifier que cet extrémum correspond bien à un maximum :



→ L'amélioration du RSB vis-à-vis d'un bruit blanc est bien maximale lorsque la fréquence de coupure du filtre est égale à la fréquence du signal. On dit alors que le filtre est optimisé.

Bibliographie :

Jacques Max, Jean Louis Lacoume ; Méthodes et techniques de traitement du signal : p. 55 et suivantes.

Francis Cottet ; Traitement du signal ; aide-mémoire ; 2^{ème} édition, p. 50 et suivantes.

Francis Cottet ; Traitement des signaux et acquisition de données ; 3^{ème} édition, p. 54 et suivantes.

ANNEXE 4 : QUELQUES SPECIFICATIONS DE CERTAINS OSCILLOSCOPES

OSCILLOSCOPE	HP 54603B	TDS 2002	Agilent DSO5012A	Agilent DSO-X 2002A
Profondeur mémoire maximum ^{58 59}	2000 points par voie (avec vecteurs actifs en mode Normal ou Single)	2500 points pour chaque voie (mode Normal ou mode Single)	Mode Single : 1 000 000 points pour les 2 voies Mode Normal : 500 000 points pour les 2 voies	Mode Single : 100 000 points par voie Mode Normal : 50 000 points par voie
Max Sample Rate ⁶⁰	20 MSa/s	1 Géch/s	2 Géch/s	2 Géch/s
Base de calcul par défaut de la FFT	1000 points	Calcul avec 2048 échantillons Affichage sur 1024 points	1000 points	65 536 points
Système d'affichage Vertical × Horizontal	255 V × 500 H	240 V × 320 H	640 V × 1000 H ⁶¹	480 V × 800 H
Résolution verticale acquisition	8 bits	8 bits	8 bits	8 bits
Precision gain vertical	2,4 % Full Scale	3 % Full Scale	2 % Full Scale	3 % Full Scale
Précision mesure verticale à 2 curseurs	2,8 % Full Scale	3 % Full Scale + 0,1 division	2,4 % Full Scale	3,5 % Full Scale
Precision mesure Δt	0,01 % valeur mesurée + 0,2 % Full Scale	1 intervalle d'échantillonnage ⁶² + 100 ppm×lecture + 0,4 ns	0,0025 % valeur mesurée + 0,1 % Full Scale	0,0025 % valeur mesurée + 0,16 % Full Scale

⁵⁸ La profondeur annoncée pour l'Agilent DSO5012A est à répartir entre les 2 voies : il y a par exemple 500 000 points de disponibles pour une seule voie active DSO5012A en mode Normal. Si les 2 voies sont activées dans ce mode, il y a alors 250 000 points de disponibles pour chaque voie.

⁵⁹ La profondeur annoncée pour l'Agilent DSO-X 2002A n'est valable que depuis la version 02.31 du microprogramme de l'appareil. Pour toute version antérieure, il y a 100 kpts pour les 2 voies en mode Single et 50 kpts pour les 2 voies en mode Normal.

⁶⁰ Les fréquences annoncées sont les fréquences réelles auxquelles travaillent les convertisseurs mais elles ne sont effectives que pour des durées d'observation suffisamment courtes. En effet, un oscilloscope travaillant à la fréquence d'échantillonnage $f_{\text{éch}}$ rempli une profondeur mémoire donnée N en un temps $T_R = N \times T_{\text{éch}} = N/f_{\text{éch}} \rightarrow$ Si la durée d'observation T_{obs} est inférieure à T_R , l'oscilloscope échantillonne effectivement à $f_{\text{éch}}$ sans remplir totalement sa mémoire (et il doit interpoler le signal acquis si il veut la remplir). Par contre, si $T_{\text{obs}} > T_R$, il y a trop d'échantillons pour la profondeur mémoire disponible \rightarrow dans ce cas, en mode Normal, des échantillons supplémentaires sont décimés (rejetés) et la fréquence d'échantillonnage effective de l'oscillogramme vaut $f_{\text{éch eff}} = N/T_{\text{obs}}$.

⁶¹ Zone d'affichage des signaux.

⁶² Intervalle d'échantillonnage = (s/div)/250.

