

COUPLAGE DES OSCILLATEURS

On se limitera dans ce montage aux couplages entre oscillateurs à un degré de liberté. Deux systèmes sont couplés lorsqu'il y peut avoir transfert d'énergie entre eux. Cela se manifeste dans les équations par l'apparition de termes croisés : dans le cas des circuits électriques, si on prend comme variable l'intensité, on trouve dans l'équation qui régit un circuit un terme dépendant de l'intensité dans l'autre circuit et inversement. On peut alors distinguer trois types de couplage :

Résistif \rightarrow le terme de couplage est proportionnel à une intensité.

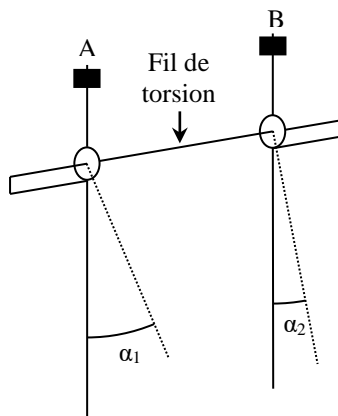
Inductif \rightarrow le terme de couplage est proportionnel à la dérivée de l'intensité.

Capacitif \rightarrow le terme de couplage est proportionnel à une primitive de l'intensité.

Quand un couplage existe entre oscillateurs, les fréquences propres du système sont toujours en nombre égal à celui des oscillateurs individuels que l'on a couplés.

I OSCILLATEURS PESANTS COUPLES PAR UN FIL DE TORSION

Le système d'étude est composé de deux pendules pesants pouvant être couplés par un fil de torsion. On peut faire varier sa longueur pour modifier le couplage.



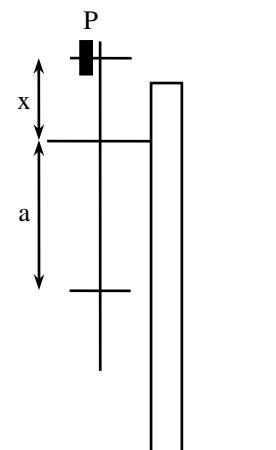
Sur chaque pendule se trouve deux axes de part et d'autre de l'axe de rotation. L'axe supérieur permet de réaliser l'équilibre indifférent du pendule considéré (centre d'inertie confondu avec l'axe de rotation). L'axe inférieur permet de placer des surcharges afin d'obtenir le pendule pesant.

I.1 Oscillateurs libres : détermination de J

On cherche à déterminer ici le moment d'inertie de chaque pendule. On réalisera au préalable l'équilibre indifférent (cela permet par la suite de simplifier l'interprétation).

Vérifiez que les deux pendules ne sont pas couplés sinon dévissez les boulons maintenant le fil de torsion. Placez une charge P de 200 gr sur l'axe supérieur, l'axe inférieur étant placé à $a = 30$ cm de l'axe de rotation sans charge. Réalisez l'équilibre indifférent en ajustant **au mieux** la valeur de x . Ceci étant réalisé, le centre de gravité du pendule déchargé est alors sur l'axe de rotation. Faire ce réglage sur les deux pendules.

Le dispositif dont on dispose à Rennes est vieux et présente beaucoup de jeux dans les roulements \rightarrow la réalisation de l'équilibre indifférent quelque soit la position du pendule est **impossible à obtenir**. Ne pas passer par conséquent trop de temps sur ce réglage et faire au mieux autour de la position d'équilibre (domaine dans lequel on va l'utiliser).



Mesure de J :

Placez une masse $m = 1\,000$ gr sur l'axe inférieur de chaque pendule. Dans ces conditions, la période d'oscillations T du pendule est donnée par la relation (cf. [1], p. 282) :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad \text{Avec} \quad J = J_0 + ma^2 + j \quad \text{et} \quad j = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$$

Sans la réalisation préalable de l'équilibre indifférent, on ne connaîtrait pas a (car il est défini à partir du centre de gravité du système) et on aurait par conséquent une inconnue en plus ce qui poserait un problème lors de l'étude des pendules couplés.

Mesurez au chronomètre la période d'oscillations de chaque pendule. Prendre 10 périodes pour plus de précision. Vérifiez la reproductibilité en refaisant chaque mesure deux ou trois fois. Vérifiez que cette période est indépendante de l'amplitude initiale tant que celle-ci est faible. On peut alors en déduire J et éventuellement déterminer la seule grandeur inconnue, J_0 .

Remarque :

Une autre solution pour mesurer la période consiste à utiliser une cuve potentiométrique. Se reporter au § I.3.3 pour le protocole expérimental.

I.2 Détermination de la constante de torsion du fil

Le plus simple consiste à utiliser l'oscillateur précédent. Mettre le fil de torsion (**soigner le serrage des vis**) et maintenir le second pendule bloqué. On obtient alors un pendule à la fois pesant et de torsion de période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C + mga}}$$

Mesurez T , déterminez C . Ramenez cette dernière grandeur à l'unité de longueur car la constante de torsion d'un fil dépend de sa longueur. On a en effet (cf. [2], p. 144 ou [1], p. 279) :

$$C = \frac{\pi}{32} \frac{d^4}{l} \mu$$

I.3 Couplage des oscillateurs

On a maintenant deux pendules pesants identiques, couplés par le fil de torsion qui assure un transfert d'énergie entre les deux systèmes. On peut avoir différentes réponses suivant les conditions initiales d'excitation des deux pendules. Il faut montrer les modes symétriques et anti-symétriques du système global ainsi que la possibilité d'avoir des battements. Pour plus de précision sur les formules employées, se reporter à [1], p. 81.

I.3.1 Mode symétrique

Ce mode consiste à donner à l'instant initial le même angle aux deux pendules. Mesurez la période des oscillations (en mesurer 10 pour plus de précision) et vérifiez qu'elle est identique à T_0 et ce quelle que soit la valeur du couplage (on le modifie en modifiant la longueur du fil de torsion). Ce résultat est logique puisque le fil de torsion n'a aucun effet dans ce mode ($\alpha = 0$). Si on se réfère à la valeur T mesurée au § I.2, on peut vérifier que :

$$\frac{1}{T_{\text{SYM}}} = \frac{1}{T} \sqrt{1 - K} \quad \text{Avec} \quad K = \frac{C}{C + mga} = \text{constante de couplage}$$

I.3.2 Mode antisymétrique

Ce mode consiste à donner à l'instant initial des

angles identiques mais opposés aux deux pendules. Pour différentes longueurs de fil de torsion (**qu'il faut mesurer**) donc pour différents couplages, mesurez la période des oscillations. Faire deux à trois mesures (sur 10 périodes) dans chaque cas de figure pour vérifier la reproductibilité. Vérifiez qu'on a, par rapport à la mesure de T effectuée au § I.2 :

$$\frac{1}{T_{\text{ANTISYM}}} = \frac{1}{T} \sqrt{1 + K}$$

Ces calculs doivent prendre en compte la longueur du fil de torsion puisque $C.l$ est une constante.

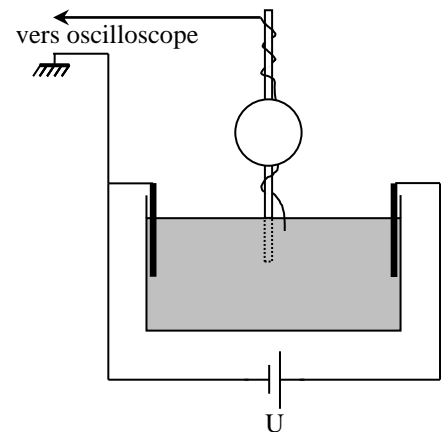
I.3.3 Battements

En déplaçant à l'instant initial l'un des pendules, l'autre étant à l'équilibre, on observe une superposition des deux modes donc un phénomène de battements.

Enregistrement :

On enregistrera l'évolution des oscillations des deux pendules à l'aide de cuves potentiométriques de CuSO_4 .

Placez aux extrémités de chaque cuve des électrodes plates en cuivre reliées à une alimentation continue d'environ 12 V. Mettre un peu de CuSO_4 solide dans les cuves remplies d'eau (ne pas en mettre de trop pour ne pas faire débiter l'alimentation). Accrochez sur chaque pendule un fil conducteur plongeant dans une cuve et reliez-le à un oscilloscope numérique disposant du mode « ROLL » (reliez la masse de l'oscilloscope à la borne moins de l'alimentation). On dispose ainsi d'un signal qui est « l'image » de la position du pendule.



Bloquez initialement un des pendules dans sa position d'équilibre et donnez un angle quelconque à l'autre oscillateur. Relâchez ensuite les deux pendules et enregistrez leur mouvement en mode « ROLL ». Vous devez obtenir une figure classique de battement (cf. § II.3.1). Vérifiez que :

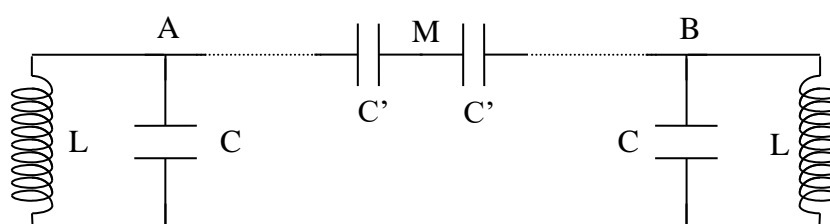
$$\Omega_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

Avec Ω_1 = pulsation des oscillations et Ω_2 = pulsation des battements (mesure entre 3 minima !)

II COUPLAGE PAR CAPACITE DE DEUX CIRCUITS OSCILLANTS

II.1 Circuit d'étude

On considère deux circuits oscillants LC identiques, couplés par un condensateur C' (constitué dans la pratique par deux capacités C' en série afin d'avoir accès au point milieu M). Ce circuit est l'analogue en électricité du montage précédent :

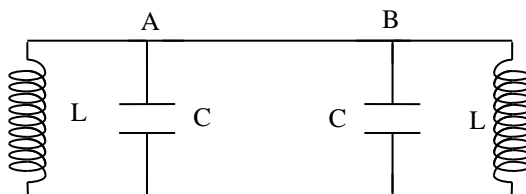


En l'absence de couplage ($C' = 0$), les deux circuits LC ont la même fréquence de résonance f_0 lorsqu'ils sont séparés. Par le couplage, on remplace f_0 par deux nouvelles fréquences propres communes aux deux circuits. Ces deux fréquences propres du circuit global correspondent aux deux modes propres suivants :

Mode symétrique :

$$V_A(t) = V_B(t)$$

Dans ce mode la capacité de couplage ne joue aucun rôle (tout comme le fil de torsion au § I.3.1). Le circuit équivalent est donc le suivant :



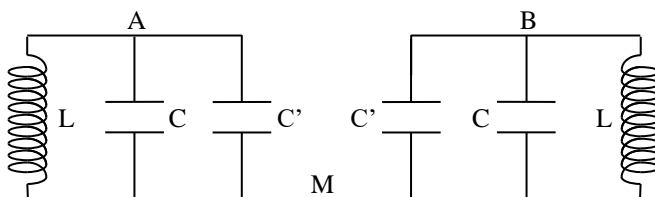
D'où

$$f_{\text{SYM}} = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Mode antisymétrique :

$$V_A(t) = -V_B(t)$$

Dans ce mode, les points A et B sont en opposition de phase et le point M est à tout instant au potentiel nul. Le schéma équivalent est dans ce cas :



$$f_{\text{ANTISYM}} = f'_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C')}}}$$

II.2 Réalisation pratique

[3], p. 109

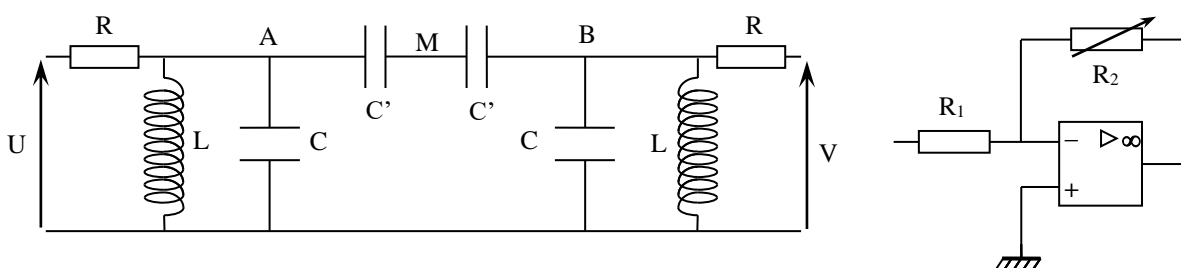
Lorsque le circuit a un facteur de qualité élevé, la fréquence de résonance correspond quasiment à la fréquence propre $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$. L'impédance du circuit passe alors par un maximum d'autant plus important que Q est élevé. En dehors de la résonance, l'impédance du circuit est d'autant plus faible que Q est fort.

Ces constatations amènent les remarques suivantes :

- il vaut mieux prendre une bobine de transformateur plutôt qu'une self AOIP ou à décade pour avoir une résonance aiguë (comparez leur résistance en continu). Le circuit ayant alors une faible impédance en dehors de la résonance, il est préférable d'exciter les circuits via une résistance assez forte pour protéger le GBF.

- le circuit étant attaqué en courant et l'impédance passant par un maximum à la résonance, on mesurera V_A .

L'étude du mode antisymétrique nécessitant deux tensions identiques en opposition de phase, on utilisera un montage inverseur à amplificateur opérationnel d'où le montage global suivant :



L : bobines Leybold 500 tours ($L \approx 11 \text{ mH}$)

C : une AOIP $0,1 \mu\text{F}$ et une boîte de capacité à décades $\approx 0,1 \mu\text{F}$

C' : boîtes à décades

R : AOIP $\times 1 \text{ k}\Omega$ R_1 : AOIP = $1 \text{ k}\Omega$

R_2 : boîte de résistance à décades $\approx 1 \text{ k}\Omega$

Réglage de l'accord des circuits sur une fréquence commune :

Les deux circuits oscillants doivent avoir exactement la même fréquence propre. Avec les valeurs approximatives de L et de C, elle est d'environ 5000 Hz.

→ Découplez les deux circuits. Injectez en U une tension sinusoïdale, visualisez les tensions U et V_A en Lissajous et recherchez **précisément** la fréquence de résonance du premier circuit (celui avec la capacité AOIP de $0,1 \mu\text{F}$). Une fois la résonance trouvée, ajustez R pour avoir au point A une tension sensiblement inférieure à U (5000Ω convient bien).

→ Passez au circuit n°2 **sans modifier la fréquence du GBF !** Cette fois-ci, ajustez la valeur de C (boîte à décade) pour avoir un signal maximum en B. Prendre la même valeur de R que pour le premier circuit afin d'avoir des circuits identiques.

Connaissant C (prendre la valeur de la capacité AOIP étalon) et f_0 , en déduire la valeur de L à la fréquence de résonance.

II.3 Etude en régime transitoire

Couplez les deux oscillateurs. Utilisez comme source excitatrice une tension créneau ayant une fréquence d'environ une centaine d'Hertz. Visualisez $V_A(t)$ et $V_B(t)$ avec un oscilloscope numérique.

II.3.1 Mise en évidence du couplage

On excite un seul circuit.

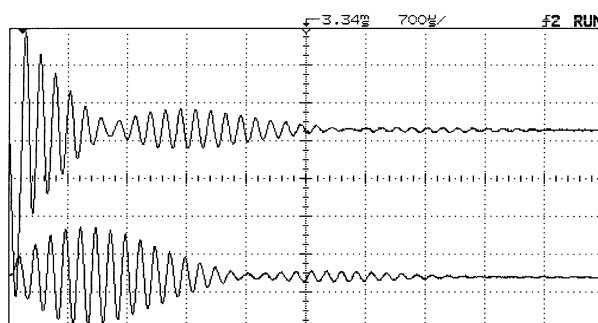
Partir d'un couplage nul ($C' = 0$) et injectez les créneaux en U et faire $V = 0$.

Sans couplage :

$V_A(t)$ évolue de façon harmonique à la fréquence f_0 . Le vérifier en mesurant cette fréquence et comparez à la valeur théorique. La sinusoïde est amortie en raison de la résistance non nulle du circuit LC. $V_B(t)$ est nulle ; il n'y a aucun transfert d'énergie entre les deux circuits. Ces observations sont à rapprocher des résultats obtenus au & I.1 pour le pendule pesant.

Avec couplage :

Augmentez progressivement le couplage → on constate un transfert progressif d'énergie du primaire au secondaire qui augmente avec la valeur de C' . $V_A(t)$ et $V_B(t)$ n'évoluent pas de façon harmonique mais on reconnaît pour certaines valeurs du couplage (couplage faible $C' = 40 \text{ nF}$ par exemple) un phénomène de battements amortis :



Dans cette configuration, on observe facilement en dilatant l'échelle des temps que l'extremum d'un signal correspond à un signal nul pour l'autre. Cela exprime la conservation de l'énergie au cours des transferts. On peut le confirmer en additionnant les deux signaux : le signal résultant correspond au signal observé en l'absence de couplage.

Conclusion :

Le phénomène de battements et le fait que la somme des deux signaux évolue de façon harmonique montre que l'évolution de ces signaux est une combinaison simple de deux signaux harmoniques. Cette propriété est générale lorsqu'on couple deux oscillateurs identiques (cf. [6], ch. 27, p. 401-402). On peut montrer que les deux signaux qui se combinent sont les modes propres (symétrique et antisymétrique) du système → pour $C = C' = 40 \text{ nF}$ par exemple, mesurez précisément la pseudo période des signaux et la période des battements (entre 3 minima). L'exploitation de ces mesures sera faite au § II.3.3.

II.3.2 Mode symétrique

On excite de façon symétrique les deux circuits

Injectez le signal crêteaux en U et en V → cette fois-ci, les deux signaux $V_A(t)$ et $V_B(t)$ sont identiques et on peut vérifier que les capacités de couplages sont sans effet (un effet résiduel peut apparaître si les deux résistances R ne sont pas parfaitement égales). Ceci est normal car chaque côté des capacités de couplage est attaqué par le même signal → aucune ddp ne leur étant appliquée, elles n'ont aucun rôle. On peut alors vérifier que la réponse harmonique des deux systèmes dans ce mode se fait à la fréquence f_0 (faire une mesure). Cette observation est à rapprocher du § I.3.1 pour le pendule.

II.3.3 Mode antisymétrique

On excite de façon antisymétrique les deux circuits.

Injectez directement le signal crêteau en U. Le faire passer dans l'amplificateur inverseur de gain 1 pour l'excitation en V. On constate évidemment que les deux signaux sont identiques mais en opposition de phase (utilisez la touche INVERT de l'oscilloscope). Si on visualise le point milieu des capacités de couplage (celles-ci ayant toutes les deux **la même valeur**), on constate que son potentiel est pratiquement nul (rigoureusement si les deux systèmes et l'amplitude de l'excitation sont parfaitement identiques). Justifiez. Mettre en évidence l'importante influence des capacités de couplage sur la fréquence des signaux. Ces observations sont à rapprocher du § I.3.2.

Mesures :

Mesurez la fréquence f_{ANTISYM} pour la valeur de C' utilisée au § II.3.1 et comparez cette valeur à la formule :

$$f_{\text{ANTISYM}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C')}} \quad \text{cf. § II.1}$$

Prendre **la valeur de L obtenue au § II.2** pour le calcul théorique.

Retour au § II.3.1 :

De la même manière que pour le pendule, il faut vérifier qu'on a les relations suivantes :

$$f_{\text{PSEUDO-PERIODE}} = \frac{f_{\text{SYM}} + f_{\text{ANTISYM}}}{2} \quad \text{Et} \quad f_{\text{BATEMENTS}} = \frac{f_{\text{SYM}} - f_{\text{ANTISYM}}}{2}$$

On justifie ainsi les remarques faites en conclusion au § II.3.1.

II.4 Régime forcé

On envoie maintenant un signal sinusoïdal dont on fait varier la fréquence. On peut là aussi exciter les modes symétriques et antisymétriques ; on retrouve les mêmes phénomènes que précédemment mais avec des signaux harmoniques.

Influence du couplage sur les fréquences de résonance :

On excite en U et on fait $V = 0$. On obtient alors une superposition des deux modes. Visualisez $V_A(t)$ et $V_B(t)$. Montrez que les fréquences des maxima sont les mêmes pour les deux points de mesure. Dans le cas d'un couplage fort ($C' \approx 150$ nF), comparez les phases de $V_A(t)$ et $V_B(t)$ aux deux fréquences de résonance. Interprétez. Effectuez une wobulation et observez la réponse en fréquence en B. Faire varier le couplage en jouant sur C' (autour de 20 nF). Pour un couplage faible mais non nul, on obtient un seul pic de résonance. Pour un couplage plus fort, le pic se dédouble. Un pic est à la fréquence $f_0 = f_{\text{SYM}}$, l'autre est à la fréquence f_{ANTISYM} .

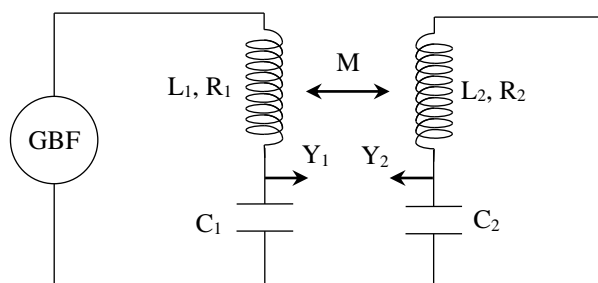
Remarque :

Le couplage que l'on vient de voir est un des plus simples qui puissent être étudié. Il a en revanche la particularité de faire apparaître un dédoublement de la fréquence où une des deux nouvelles fréquences correspond à la fréquence propre des deux circuits pris séparément ($f_{\text{SYM}} = f_0$). Ce n'est pas toujours le cas. Le couplage fait très souvent apparaître deux nouvelles fréquences situées de part et d'autre de la fréquence f_0 . C'est l'objet du chapitre suivant.

III CIRCUITS COUPLES PAR MUTUELLE INDUCTANCE

III.1 Système d'étude

Le couplage est ici assuré par l'influence mutuelle M entre deux selfs :



Les cellules de bases sont des circuits de type LC à fort coefficient de qualité. Ils permettent d'avoir des signaux pas trop faibles lorsqu'on désaccorde les circuits d'où des mesures plus faciles. Les résonances en intensité I_R et en tension U_C (cf. montage sur la résonance) sont aussi pratiquement confondues. La constante de couplage dans ce circuit est définie par la relation :

$$K = M / \sqrt{L_1 L_2}$$

III.2 Oscillateurs accordés en régime forcé

III.2.1 Introduction

On considère deux circuits identiques ($L_1 = L_2 = L$; $C_1 = C_2 = C$; $R_1 = R_2 = R$) et on s'intéresse à l'évolution des tensions U_{C1} et U_{C2} en fonction de la fréquence. Une étude complète est menée dans l'annexe en fin de topo. Les résultats sont assez lourds si l'on ne fait pas d'approximation mais, comme on va le voir, l'expérience montre que les fréquences qui apparaissent lors du couplage sont assez proches de la fréquence f_0 . Dans ces

conditions, si on pose $\omega = \omega_0(1+\varepsilon)$ avec $|\varepsilon| \ll 1$, on obtient les résultats approchés suivants :

$$\left| \frac{U_{C1}}{U} \right| \approx \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4\varepsilon^2} \cdot \left(\left[\frac{1}{Q^2} + K^2 - 4\varepsilon^2 \right]^2 + \frac{16\varepsilon^2}{Q^2} \right)^{-1/2}$$

$$\left| \frac{U_{C2}}{U} \right| \approx K \cdot \left(\left[\frac{1}{Q^2} + K^2 - 4\varepsilon^2 \right]^2 + \frac{16\varepsilon^2}{Q^2} \right)^{-1/2}$$

L'étude de la deuxième fonction (cf. [5], p. 135) montre qu'elle passe par un seul maximum pour $\varepsilon = 0$ si $K < 1/Q$. Si $K > 1/Q$, elle passe par deux maximums pour $\varepsilon = \pm (1/2)\sqrt{K^2 - 1/Q^2} \approx \pm K/2$ si $K > 1/Q$ (circuits à fort coefficient de qualité). Bien que légèrement différente au niveau du numérateur, la première fonction présente une évolution à peu près similaire, surtout lorsque l'on est au dessus du couplage critique $K = 1/Q$ (le fait que les évolutions dans les deux circuits soient assez proches est typique d'un couplage entre oscillateurs accordés). A Rennes, un petit programme sous Excel permet de simuler ces fonctions de transfert pour voir les similitudes et les différences. Il permet aussi de comparer les résultats avec et sans simplification → le demander au professeur.

III.2.2 Montage d'étude

On étudie un circuit LC série. Son impédance est minimum à la fréquence $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$ (cf. [3], p.109). Le courant passe donc par un maximum. L'impédance du montage étant faible à la résonance, il faut un ampli de puissance pour éviter que le GBF ne s'écroule pas. Pour la même raison, **injectez un signal de faible amplitude pour ne pas avoir de surtensions excessives dans les circuits à la résonance !**

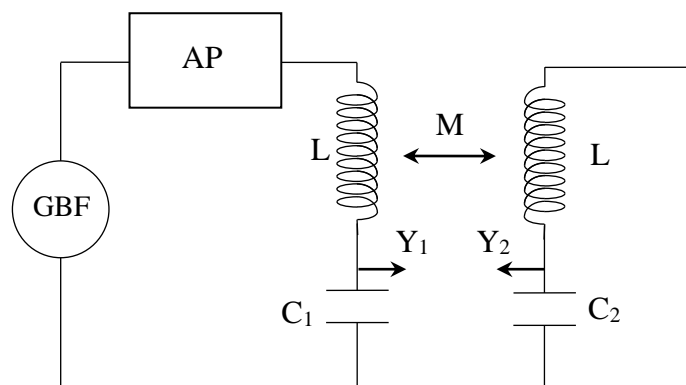
GBF : Métrix GX 245
atténuation - 40 dB !

AP : ampli de puissance

L : 500 spires Leybold

C₁, C₂ : boîtes de capa MC 1001

Utilisez un oscilloscope numérique.



Réglage des circuits sur une fréquence commune :

Prendre $C_1 = 0,5 \mu F$; faire une wobblution entre 2200 et 2500 Hz environ. Repérez en Y₁ la résonance du circuit 1 non couplé et placez là au centre de l'écran de l'oscilloscope (le placer en mode AUTO STORE). Notez la valeur $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$ en arrêtant la wobblution à la résonance. Alimentez le deuxième circuit de la même façon et ajustez la valeur de la capacité C₂ pour avoir la résonance en Y₂ au même endroit → l'accord est réalisé.

A montrer en présentation :

Affichez les courbes de résonance de chaque circuit séparé pour montrer qu'ils sont identiques. Alimentez ensuite le circuit 1 et refermez le circuit 2 sur lui-même (cf. schéma précédent). Visualisez la tension Y₁ et approchez progressivement la bobine 2 de la bobine 1 → montrez que le couplage fait apparaître deux nouvelles fréquences pratiquement symétriques par rapport à f_0 et que ces fréquences s'écartent de f_0 à mesure qu'on augmente le couplage. Se placer au couplage maximum et repérez sur l'oscilloscope les deux pics de résonance ;

visualisez alors le signal $Y_2 \rightarrow$ mêmes fréquences de résonance. En déduire dans ce cas la constante de couplage K par la relation approchée :

$$f_{\pm} \approx f_0 (1 \pm K/2)$$

Ecartez de nouveau la bobine 2 de la bobine 1 \rightarrow montrez le couplage critique (cf. [5], p. 110 et [4], p. 136). Citez l'application possible de ce couplage particulier.

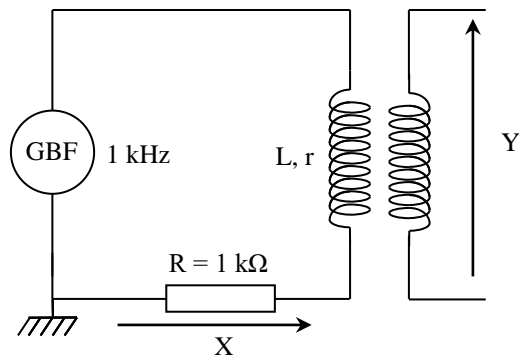
Remarque :

On constate expérimentalement une légère dissymétrie des deux fréquences par rapport à f_0 . Elle s'explique par le fait que le calcul effectué à partir duquel les conclusions ont été tirées est une approximation. La différence n'est pas trop gênante ici car l'expérience montre qu'on ne dépasse pas en pratique un coefficient de couplage de l'ordre de 0,1 \rightarrow l'écart entre les relations approchées et les calculs exacts est assez faible (cf. Annexe).

Vérification :

On peut comparer la valeur de K que l'on a obtenue à celle que l'on peut calculer en mesurant le coefficient de mutuelle inductance M (le principe de la mesure est développé dans le montage sur l'induction) :

Placez les bobines en couplage maximum (accollées). Injecter un signal triangulaire dans la première bobine. On a aux bornes de R une tension X proportionnelle au courant. Mesurez la pente de ce signal avec un oscilloscope à curseurs. En déduire celle du courant. La tension en Y correspondant à la fém induite e_{ind} doit être un signal carré ; mesurez son amplitude. Déduire de ces mesures la valeur de M par la relation $e_{\text{ind}} = -M \cdot di/dt$

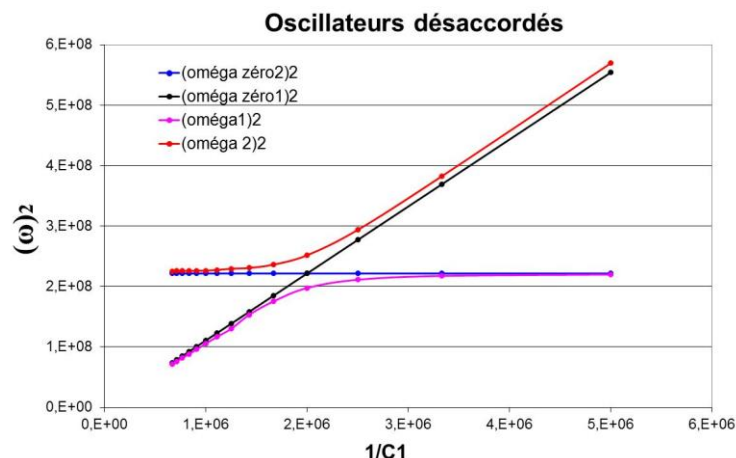


III.3 Oscillateurs désaccordés

Modification d'une des fréquences propres.

Manipulation :

Reprendre le montage du § III.2.2 avec le couplage maximum (accoler les deux bobines). Faire varier la valeur de C_1 et mesurez à chaque fois les valeurs des deux fréquences de résonance en Y_2 (cette mesure peut se faire en wobblant lentement et en arrêtant le balayage en fréquence lorsqu'on est sur les pics de résonance). Faire le graphique $\omega_{\pm}^2 = f(1/C_1)$ et tracez aussi l'évolution des pulsations de résonance des deux circuits si ils n'étaient pas couplés :



Analyse :

On peut dégager quelques idées importantes :

- les courbes du système couplé ne se croisent pas comme c'est le cas de celle du système non couplé : quand les oscillateurs sont couplés, ils forment un seul système et on ne peut plus assimiler une courbe de résonance à un seul circuit.

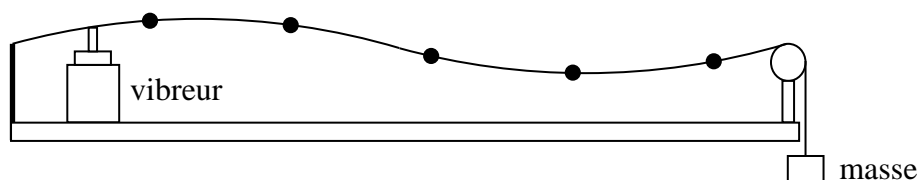
- les courbes du système couplé tendent vers celle du système non couplé quand on désaccorde les deux circuits : quand les oscillateurs ne sont pas accordés, le couplage a peu d'effet sur la valeur des fréquences de résonance ; elles sont proches des fréquences propres des deux circuits. L'effet maximum sur les fréquences de résonance a lieu lorsque les circuits sont accordés. Cet effet se fait aussi sentir sur l'énergie transférée au deuxième circuit. Observez les pics de résonance en Y_2 : ils ont une amplitude maximum à l'accord et diminuent au fur et à mesure qu'on augmente le désaccord. Visualisez ensuite Y_1 et observez l'évolution de l'amplitude des pics de résonance lorsqu'on désaccorde les circuits → la résonance est très forte sur sa pulsation propre, très faible sur celle du deuxième circuit

Remarque :

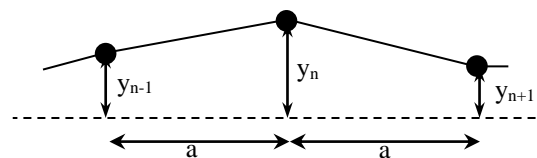
Ces courbes sont caractéristiques d'un système de deux oscillateurs couplés. Sur un piano par exemple, chaque note est constituée de deux (ou trois) cordes frappées par un même marteau. Une fois frappées, ces cordes se comportent comme des oscillateurs couplés au niveau du chevalet. Si on trace les fréquences propres du système formé de deux cordes en fonction du désaccord entre les fondamentales des cordes, on obtient le même type de courbe.

IV PULSATIONS PROPRES D'UN SYSTEME DE N OSCILLATEURS COUPLES

On peut utiliser pour ce chapitre une échelle de perroquet mais nous n'en disposons pas à Rennes.

IV.1 Présentation du système

Le système étudié est une corde de masse m portant N plombs de masse individuelle M situés aux abscisses $z = a, 2a, 3a, \dots, Na$:



La corde a pour longueur totale $L = (N+1)a$; chaque plomb a la masse M et l'on a $N.M \gg m$. Ici $M = 1,3 \text{ g}$ et $m = 0,7 \text{ g}$; on travaillera avec $N = 4$ ou 6 . La corde est fixée à ses extrémités et tendue par une masse m_t . On suppose que la corde est tendue uniformément. Soit σ la tension de la corde ; on a alors : $\sigma = m_t g$. L'équation différentielle du mouvement de chacun des plombs s'écrit :

$$M \frac{d^2 y_n}{dt^2} = \sigma \frac{y_{n+1} - y_n}{a} - \sigma \frac{y_n - y_{n-1}}{a}$$

Le système est donc constitué de N masses couplées par le terme de tension. La résolution de l'équation différentielle amène, en recherchant des solutions de type $y_n(z, t) = A_n \cos \omega t$, à la relation suivante :

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4\sigma}{Ma}} \sin\left(\frac{k.a}{2}\right)$$

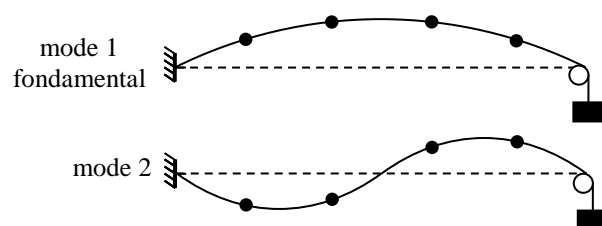
Ainsi, les fréquences propres des modes de vibration ne sont plus dans des rapports entiers comme c'est le cas avec une corde continue. Le but de l'expérience est de vérifier cette relation de dispersion qui est caractéristique d'un système de N oscillateurs couplés.

IV.2 Manipulation

IV.2.1 Vérification de la loi de dispersion pour $N = 4$

La corde est excitée par un vibreur alimenté par un GBF ayant un réglage fin et un affichage précis de la fréquence. La fréquence de travail est comprise entre 5 et une centaine d'Hertz. Recherchez les fréquences de résonances de la corde plombée en faisant varier la fréquence. On veillera à choisir une amplitude suffisamment élevée de la tension pour repérer les résonances mais pas trop. En effet, aux fortes amplitudes de vibrations, les cordes faiblement tendues comme celles-ci se mettent à tourner ; ainsi les conditions aux limites ne sont plus vraiment stables, la longueur vibrante de la corde varie et cela modifie les fréquences de résonances.

Pour chaque fréquence de résonance, visualiser le mode de vibration.

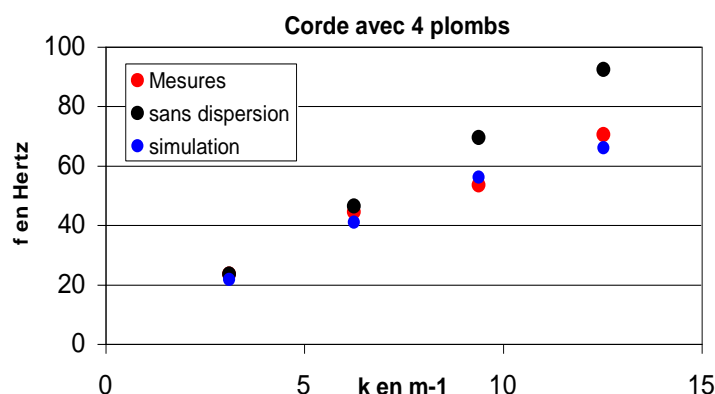


Placez sur un même graphique :

- vos mesures de $f = \omega/2\pi$ en fonction de k (calculez k à partir du nombre de fuseaux observés sur la longueur de la corde qui vaut 1 m).
- f en fonction de k pour la corde continue qui aurait la même fréquence fondamentale.
- les valeurs théoriques simulées (sur Excel) d'après la formule de dispersion de f en fonction de k .

Exemple de résultats pour $m_t = 1240$ g :

Vecteur d'onde	Fréquences mesurées en Hz	fréquence sans dispersion en Hz	Simulation en Hz
3,14	23	23	21,3
6,28	44	46	40,5
9,42	53	69	55,7
12,56	70	92	65,5
12,56	70	92	65,5



IV.2.2 Influence du nombre d'oscillateurs sur la dispersion

Prévoir l'effet d'une

augmentation du nombre d'oscillateur et recommencez l'opération pour $N = 6$. A priori, on doit observer 6 modes puisqu'il y a 6 oscillateurs. En pratique, il est difficile d'observer les modes élevés (5 et 6) qui ne présentent pas suffisamment d'amplitude.

Exemple de résultats pour $m_t = 1240$ g :

Vecteur d'onde	Fréquence Mesurées en Hz	Fréquence Sans dispersion en Hz	Simulation en Hz
3,14	20	20	18,1
6,28	40	40	35,3
9,42	57	60	50,7
12,56	73	80	63,6

V CONCLUSION

On a mis en évidence les différentes caractéristiques des oscillateurs couplés :

- le couplage écarte les fréquences propres du système d'oscillateurs
- dans un système d'oscillateurs couplés, les fréquences propres ne peuvent plus être attribuées à un oscillateur particulier, ce sont les fréquences propres du système entier.

Dans ce montage, on s'est limité aux oscillateurs couplés de même nature. Un haut-parleur par exemple met en jeu un oscillateur mécanique couplé avec un oscillateur électrique. De même, quand on place un haut-parleur dans une enceinte et que l'on observe une modification de la fréquence de résonance de l'ensemble, on forme un système d'oscillateurs couplés (haut-parleur et résonateur d'Helmholtz).

Il y a peu d'applications technologiques directes de ces caractéristiques. On peut noter toutefois le sismographe constitué de deux oscillateurs couplés. Par contre les oscillateurs couplés interviennent dans l'interprétation de la propagation des ondes mécaniques dans les cristaux (cf. leçon sur N oscillateurs couplés). De plus, on peut établir des analogies entre deux oscillateurs couplés en mécanique ou en électricité avec une particule oscillant dans un puits de potentiel à deux états. L'étude dans le domaine classique permet de mieux comprendre ce qui se passe en mécanique quantique. Les applications de cette étude en mécanique quantique sont nombreuses (cf. leçon sur les systèmes à deux états). Enfin on retrouve un cas analogique au cas de N oscillateurs couplés en mécanique quantique. Ceci permet de comprendre comment des atomes aux niveaux discrets d'énergie associés dans un solide forment un système avec des bandes d'énergies (cf. leçon sur la conduction).

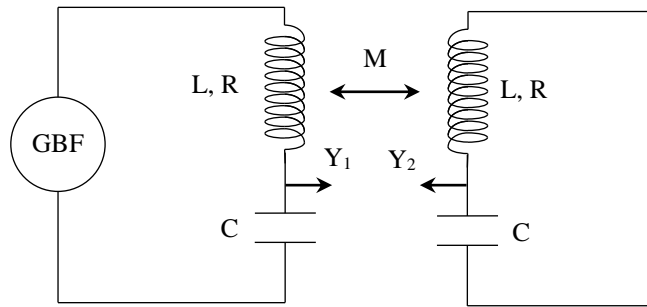
Bibliographie :

- [1] : Quaranta I p. 83, 235, 244, 254, 265, 279
- [2] : Berty Escaut : Physique Pratique, Tome 2 (Vuibert)
- [3] : Berty Fagot Martin : Electricité pratique, Tome 2 (Vuibert)
- [4] : Quaranta IV p. 107
- [5] : J. P. Mathieu : Oscillateurs
- [6] : Pérez : Mécanique ch. 27 p. 406
- [7] : Fleury Mathieu : Electricité (pour le & II)

ANNEXE : CALCULS SUR LES CIRCUITS COUPLES PAR MUTUELLE INDUCTANCE

On présente ici les calculs dans le cas où les circuits que l'on couple sont identiques.

I CIRCUIT D'ETUDE



Les équations des deux circuits sont alors les suivantes :

$$\text{Circuit 1 : } \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] I_1 + jM\omega I_2 = U = ZI_1 + jM\omega I_2$$

$$\text{Circuit 2 : } \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] I_2 + jM\omega I_1 = 0 = ZI_2 + jM\omega I_1$$

On en déduit les expressions de I_1 et I_2 :

$$I_1 = \frac{ZU}{Z^2 + M^2\omega^2} \quad I_2 = \frac{-jM\omega U}{Z^2 + M^2\omega^2}$$

On pose $\omega = \omega_0(1 + \varepsilon)$; l'expression de Z devient alors : $Z = R + jL\omega_0 \frac{\varepsilon(2 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon}$

II CALCUL DU RAPPORT $|U_{C1}/U|$

On a $U_{C1} = I_1/(jC\omega)$. En réinjectant dans cette expression celles de I_1 , Z et ω et en mettant à profit les relations $M = K.L$, $Q = L\omega_0/R$ et $\omega_0 = 1/LC$, on trouve après arrangement la relation suivante :

$$\left| \frac{U_{C1}}{U} \right| = \sqrt{\frac{1}{Q^2(1+\varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon^2(2+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^4}} \cdot \left(\left[\frac{1}{Q^2} + K^2(1+\varepsilon)^2 - \frac{\varepsilon^2(2+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2} \right]^2 + \frac{4\varepsilon^2(\varepsilon+2)^2}{Q^2(\varepsilon+1)^2} \right)^{-1/2}$$

Simplification :

Si l'on s'intéresse à des pulsations proches de la pulsation ω_0 , on a alors $\varepsilon \ll 1$.

Dans ce cas :

$$\left| \frac{U_{C1}}{U} \right| = \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{16\varepsilon^2}{Q^2} + \left[\frac{1}{Q^2} + K^2 - 4\varepsilon^2 \right]^2 \right)^{-1/2}$$

II CALCUL DU RAPPORT $|U_{C2}/U|$

On a $U_{C2} = I_2/(jC\omega)$. En réinjectant dans cette expression celles de I_2 , Z et ω et en mettant à profit les relations $M = K.L$, $Q = L\omega_0/R$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, on trouve après arrangement la relation suivante :

$$\left| \frac{U_{C2}}{U} \right| = K \cdot \left(\left[\frac{1}{Q^2} + K^2(1+\varepsilon)^2 - \frac{\varepsilon^2(2+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2} \right]^2 + \frac{4\varepsilon^2(2+\varepsilon)^2}{Q^2(1+\varepsilon)^2} \right)^{-1/2}$$

Simplification :

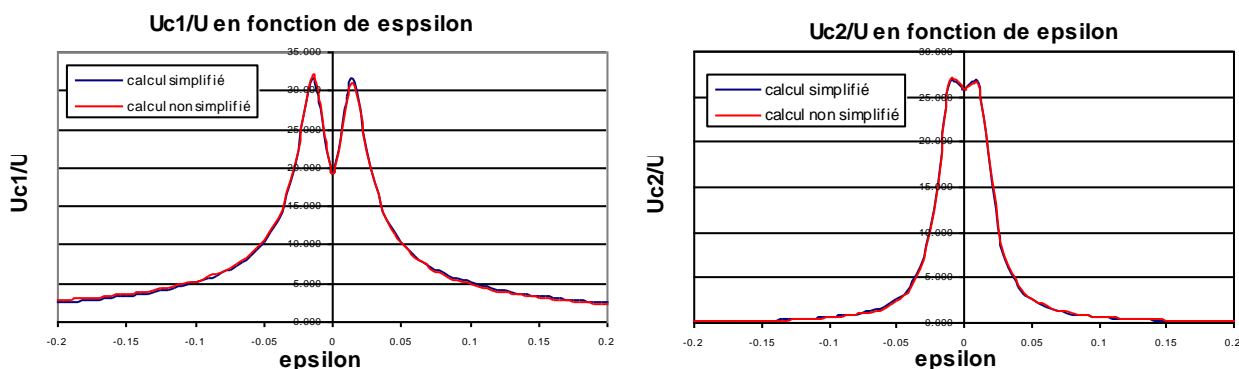
Si l'on s'intéresse à des pulsations proches de la pulsation ω_0 , on a alors $\varepsilon \ll 1$. La relation précédente devient:

$$\left| \frac{U_{C2}}{U} \right| = K \cdot \left(\left[\frac{1}{Q^2} + K^2 - 4\varepsilon^2 \right]^2 + \frac{16\varepsilon^2}{Q^2} \right)^{-1/2}$$

III COMPARAISON DES DIFFERENTES EXPRESSIONS

Un petit programme sous Excel permettant de simuler l'évolution des fonctions de transfert simplifiées et non simplifiées existe à Rennes → vous pouvez le demander au professeur. On présente ici quelques courbes pour différentes valeurs de la constante de couplage. Le facteur de qualité que l'on a pris correspond à celui des circuits utilisés dans les manipulations.

III.1 Évolution pour $K = 0,025$

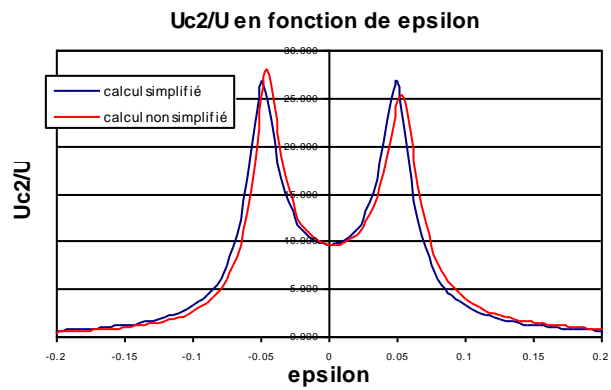
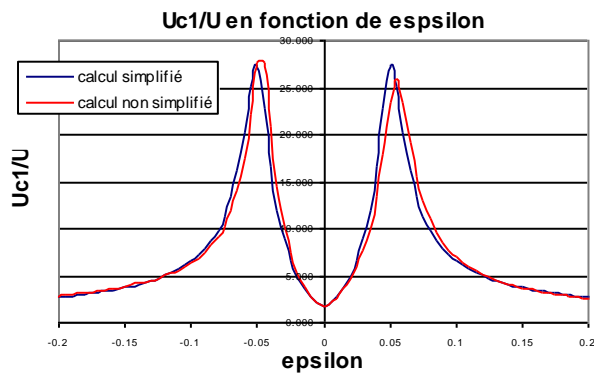


On voit ici que les formules approchées recoupent bien l'évolution réelle des fonctions de transfert. Ce n'est pas vraiment étonnant puisque la condition $\varepsilon \ll 1$ est assez bien respectée.

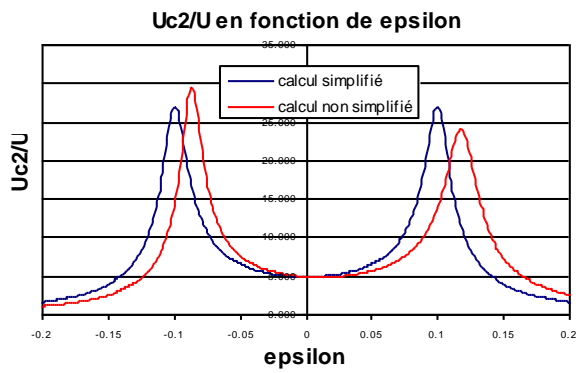
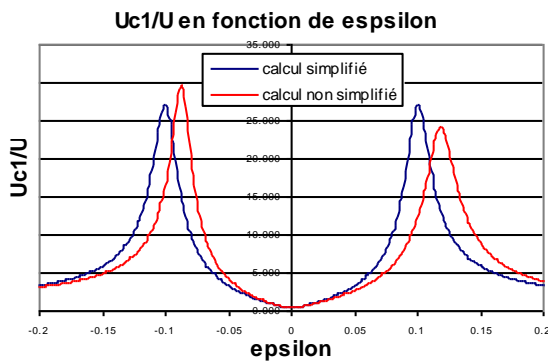
III.2 Évolution pour $K = 0,1$

Ce cas est particulièrement intéressant car c'est celui qui correspond à peu près au couplage maximum que l'on peut avoir dans notre montage. Les courbes sont légèrement différentes cette fois-ci. Les expressions simplifiées font apparaître des pics symétriques ce qui n'est pas tout à fait le cas avec le calcul complet : les pics de résonance n'ont pas

tout à fait la même amplitude et ils ne sont pas tout à fait symétriques par rapport à f_0 ($\varepsilon = 0$). L'écart reste faible cependant.



III.3 Évolution pour $K = 0,2$



Les différences entre le modèle simplifié et le calcul exact commencent à s'accroître.

