

RESONANCE

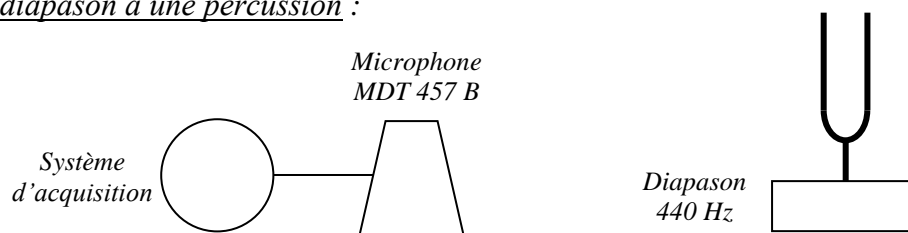
I INTRODUCTION

La résonance est un phénomène qui apparaît dans les systèmes faiblement amortis dotés de modes propres lorsqu'on les excite en régime permanent sinusoïdal. Il se manifeste par une augmentation notable de la réponse lorsque la fréquence d'excitation est proche de celle d'un des modes propres car il y a alors un transfert important d'énergie de l'excitateur vers le système. Un mode propre est une solution d'oscillation harmonique (sinusoïde non amortie) du système lorsqu'il est soumis à une perturbation et il y a autant de mode propre que de degrés de liberté dans le système. On peut commencer par étudier la résonance dans un dispositif à un degré de liberté (on propose deux expériences possibles), puis s'intéresser à un système à plusieurs degrés de liberté (oscillateurs couplés), aux phénomènes de résonance pouvant apparaître avec des ondes ou à la résonance paramétrique. Le sujet est donc vaste et il faut faire des choix.

II MISE EN EVIDENCE DU PHENOMENE

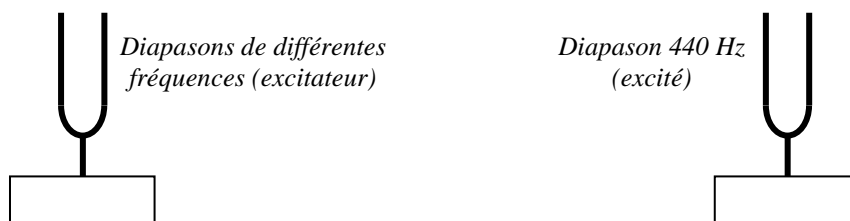
Une expérience simple avec des diapasons permet d'introduire rapidement les particularités du phénomène de résonance (notion de fréquence propre, influence de la fréquence d'excitation sur la réponse du système).

Réponse d'un diapason à une percussion :



On excite le diapason en le frappant avec un marteau et on observe le signal obtenu. Il faut une fréquence d'échantillonnage suffisamment grande pour décrire correctement une période et prendre assez de points pour en observer plusieurs ($T_{éch} = 20 \mu s$ et $N = 1\,000$ points par exemple). Le système répond à la perturbation en oscillant à une fréquence particulière, qui est quasiment sa fréquence propre puisque l'amortissement est très faible ici.

Excitation du diapason à différentes fréquences :



On place les diapasons en vis-à-vis. On frappe l'excitateur à l'aide d'un marteau, on l'arrête avec la main et on écoute la réponse du diapason à 440 Hz. On répète cette expérience avec plusieurs excitateurs (256, 320, 440 Hz) pour écouter les différences. On ne doit entendre pratiquement aucun son provenant du diapason à 440 Hz, sauf lorsqu'on l'excite à cette fréquence → La réponse du diapason est très faible sauf lorsque la fréquence excitatrice correspond à sa fréquence propre. Ce phénomène correspond à la résonance. On peut introduire qualitativement la notion d'acuité de la

résonance en désaccordant l'excitateur 440 Hz à l'aide d'une masselotte prévue à cet effet. Un désaccord léger suffit pour atténuer fortement la réponse de l'excité, signe d'une résonance aigue.

III RESONANCE DANS UN SYSTÈME A UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

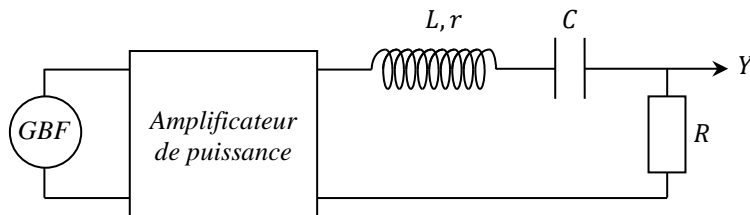
III.1 Circuit RLC série

Se reporter à l'annexe pour les équations et résultats relatifs à ce circuit.

III.1.1 Mode propre d'oscillation

Il s'observe en régime transitoire avec un amortissement faible pour avoir une pseudo fréquence proche de la fréquence propre.

Montage :



C : 220 nF

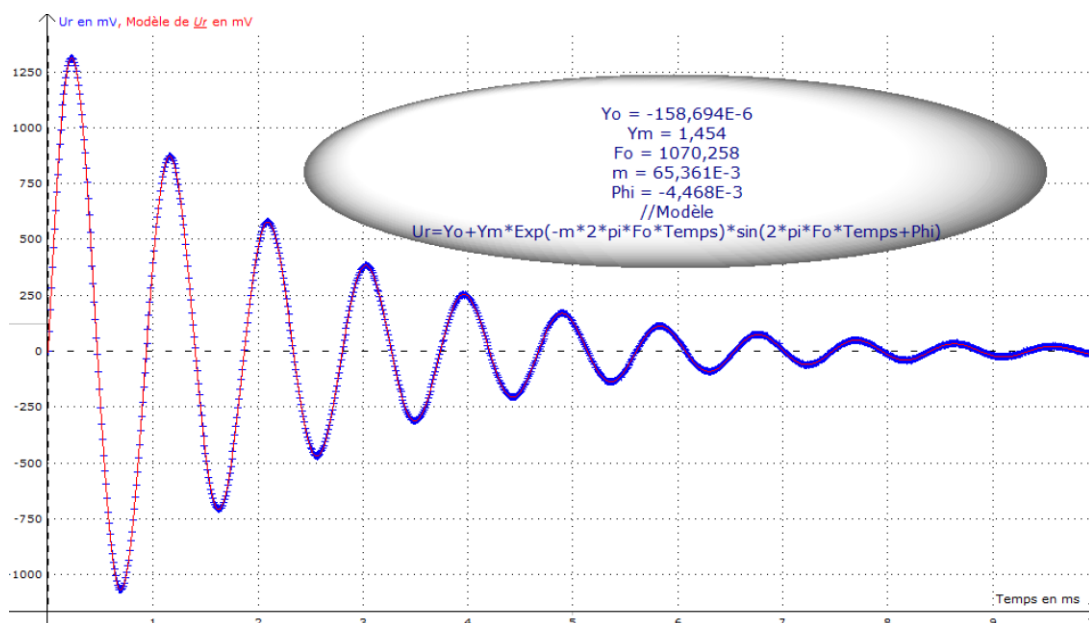
L : 0,1 H 32 Ω AOIP

R : 50 Ω

GBF : signal carré 20 Hz ; 20 V Pk-Pk

Acquisition : 1000 points ; $T_{\text{éch}} = 10 \mu\text{s}$

Les valeurs de L et C donnent une fréquence propre d'environ 1000 Hz correspondant généralement à une des fréquences de mesure des RLC mètre les plus courants mais d'autres choix sont évidemment possibles. On intercale un amplificateur de puissance entre le GBF et le circuit puisqu'il est faiblement résistif (comparer sa résistance totale aux 50 Ω de l'impédance de sortie du GBF). On obtient alors la réponse suivante lorsqu'on enregistre le régime transitoire de décroissance des oscillations (acquisition déclenchée sur le signal TTL du GBF) :



On peut la modéliser par une sinusoïde amortie à l'aide des fonctions prédéfinies du logiciel. On obtient une fréquence de 1070 Hz. Cette valeur est proche de la fréquence propre du circuit obtenue en mesurant les paramètres LC à l'aide d'un RLC mètre :

$$L = 99,3 \text{ mH} \quad C = 220,8 \text{ nF} \quad \rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1075 \text{ Hz}$$

Le logiciel donne un coefficient d'amortissement m lié au facteur d'amortissement λ , à la résistance R et au facteur de qualité Q du circuit par les relations suivantes :

$$m = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2Q}$$

D'où, avec la valeur de m donnée par la modélisation :

$$R = 87,7 \, \Omega \quad Q = 7,65$$

La résistance obtenue est légèrement supérieure à celle annoncée pour l'ensemble bobine + résistance R (50 + 32) mais la différence s'explique si on calcule les pertes réelles dans le circuit à l'aide des facteurs de qualité de L et C donnés par le RLC mètre (fréquence de mesure 1 kHz) :

$$Q_L = \frac{L\omega}{r_L} = 18,8 \quad \rightarrow \quad r_L = \frac{L\omega}{Q_L} = 33,2 \, \Omega$$

$$Q_C = \frac{1}{r_C C \omega} = 162 \quad \rightarrow \quad r_C = \frac{1}{Q_C C \omega} = 4,4 \, \Omega$$

On peut aussi calculer la fréquence attendue pour les oscillations compte tenu du facteur de qualité Q du circuit :

$$f = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = 1072,5 \text{ Hz}$$

Cette valeur est, logiquement, légèrement inférieure à la fréquence du mode propre et on a un écart de 0,2 % avec la valeur expérimentale.

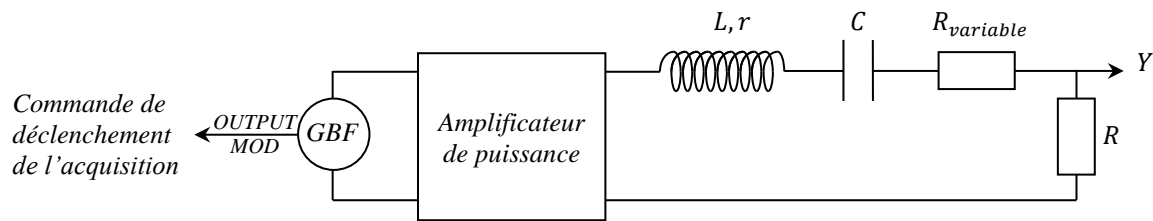
III.1.2 Régime forcé : réponse en intensité

Pour étudier le phénomène de résonance, il faut s'intéresser à l'évolution de la grandeur choisie autour de la fréquence propre du circuit. On peut le faire en utilisant la fonction wobulation¹ disponible sur la plupart des GBF. Elle permet de générer un signal d'amplitude constante mais de fréquence variable, accompagné sur une autre voie d'un signal proportionnel à la fréquence instantanée. On peut alors visualiser directement la réponse du circuit sur un oscilloscope numérique en envoyant le signal d'étude sur la voie Y, le signal proportionnel à la fréquence sur X, et en passant l'oscilloscope en mode XY avec un affichage persistant. Ce procédé demande un certain savoir-faire mais il permet d'observer très rapidement le comportement du circuit lorsqu'on change un paramètre. On propose ici une alternative avec un GBF numérique et l'enregistrement des signaux sur un système d'acquisition (Latis Pro) afin de modéliser les courbes obtenues. La procédure pour obtenir les figures suivantes est décrite en annexe. S'y reporter pour plus d'informations. La résonance en intensité s'observe aux bornes de R puisque $u_R = Ri$.

¹ De l'anglais « to wobble » qui signifie osciller.

Montage :

On reprend le circuit précédent en ajoutant une résistance supplémentaire $R_{variable}$ afin de pouvoir modifier le facteur de qualité.



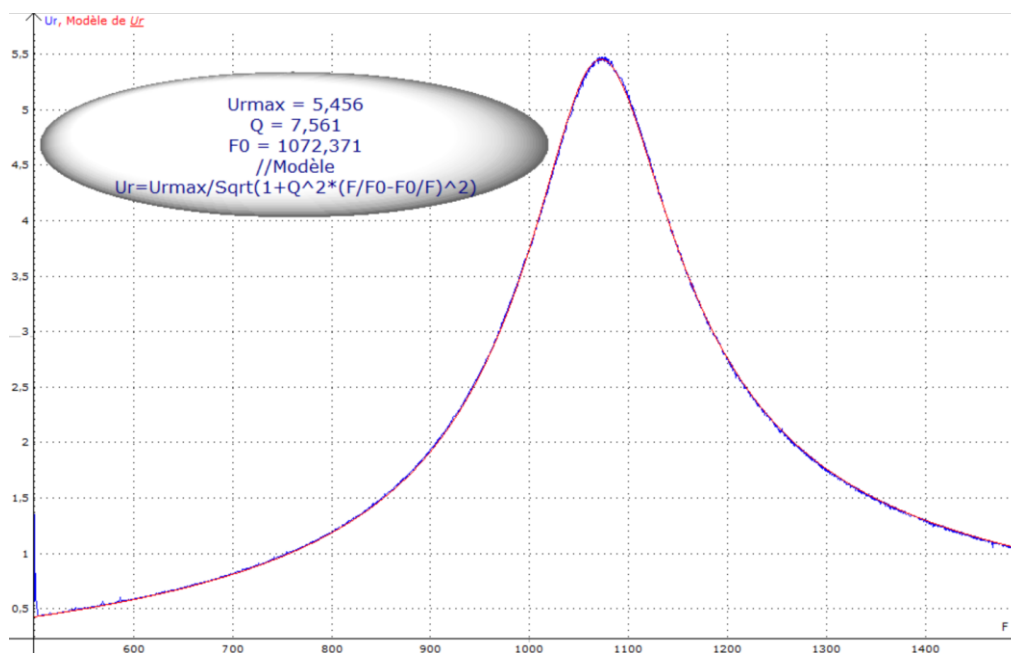
GBF : Instek AFG 2112 ; 20 V Pk-Pk

$R = 50 \Omega$ (vérifier qu'elle peut supporter le pic de courant à la résonance sinon baisser la tension)

Wobulation : $f_{start} = 500 \text{ Hz}$; $f_{stop} = 1500 \text{ Hz}$; $f_{Rate} = 0,5 \text{ Hz}$

Acquisition : 50 000 points ; $T_{ech} = 40 \mu\text{s}$; $T_{tot} = 2 \text{ s}$; déclenchement sur le signal Output Mod

On peut commencer avec la résistance variable à zéro. On obtient alors les courbes données comme exemples en annexe. On obtient le résultat suivant lorsqu'on modélise l'enveloppe par l'expression du module de \underline{I} donnée en annexe :



Le modèle recoupe bien la courbe expérimentale avec des valeurs de f_0 et Q très proches de la fréquence propre du circuit et du facteur de qualité Q obtenu lors de l'étude en régime transitoire. On peut vérifier la valeur de U_{Rmax} même si ce n'est pas indispensable. On observe l'intensité par l'intermédiaire de la résistance R donc on a, avec l'expression de $|\underline{I}|_{max}$ donné en annexe :

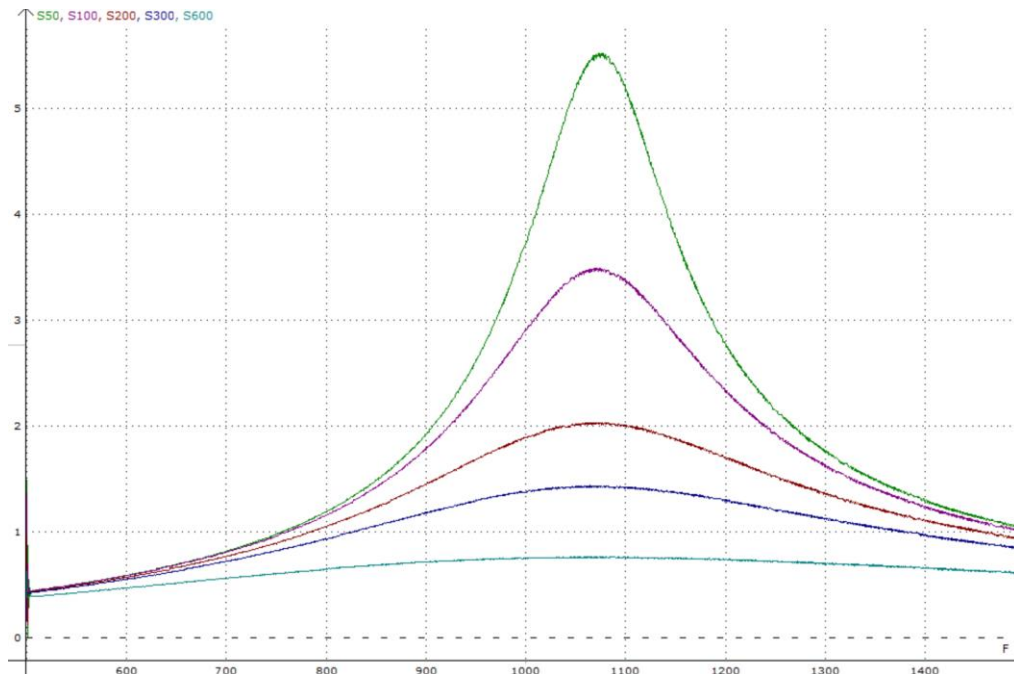
$$|\underline{U}_R|_{max} = R|\underline{I}|_{max} = R \frac{E}{R_{totale}} = 50 \frac{10}{50 + 37,7} = 5,7$$

Il y a un petit écart avec le modèle mais on n'a pas vérifié la valeur de la tension en sortie de l'amplificateur de puissance. On peut à ce propos réaliser une expérience instructive pour comprendre son intérêt pour cette étude en enregistrant la courbe d'évolution de la tension alimentant le circuit en fonction de la fréquence avec et sans l'amplificateur de puissance : la tension doit rester constante

lorsqu'on l'utilise alors qu'elle chute à la résonance si on alimente le circuit directement par le GBF car l'impédance du circuit est alors minimale et vaut $R + r$.

Influence du facteur de qualité :

On peut observer son influence en augmentant progressivement la valeur de la résistance variable (les indices de chaque courbe correspondent aux valeurs de la résistance totale ajouté $R + R_{variable}$) :



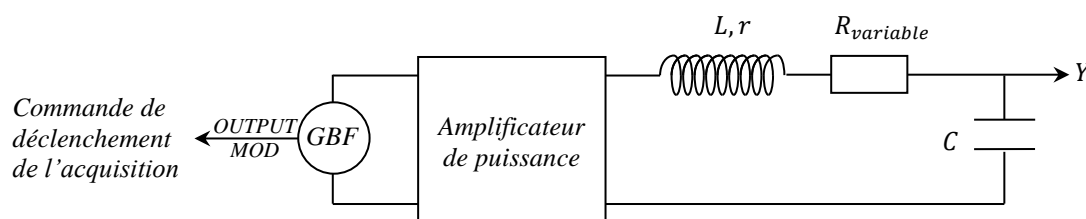
La procédure pour empiler toutes ces courbes sur un même graphique est assez longue donc on peut se contenter d'acquisitions successives. Le point important à noter est qu'il y a toujours un point d'inflexion de la courbe (même faible) quel que soit l'amortissement et qu'il a toujours lieu à la fréquence propre f_0 du circuit comme le prévoit la théorie développée en annexe.

Déphasage courant/tension :

Il est intéressant d'observer à l'oscilloscope le déphasage entre la tension aux bornes de R (qui est une image du courant) et celle envoyée sur le circuit. Les deux tensions doivent être en phase lorsque $f = f_0 \rightarrow$ le courant passe par un maximum en étant en phase avec l'excitation donc il y a un maximum de puissance transmise au circuit lorsqu'on l'excite sur sa fréquence propre. Le déphasage $\varphi_{u/i}$ doit être négatif en basse fréquence ($Z_{RLC\ BF} \approx -j/C\omega$) et positif en haute fréquence ($Z_{RLC\ HF} \approx jL\omega$).

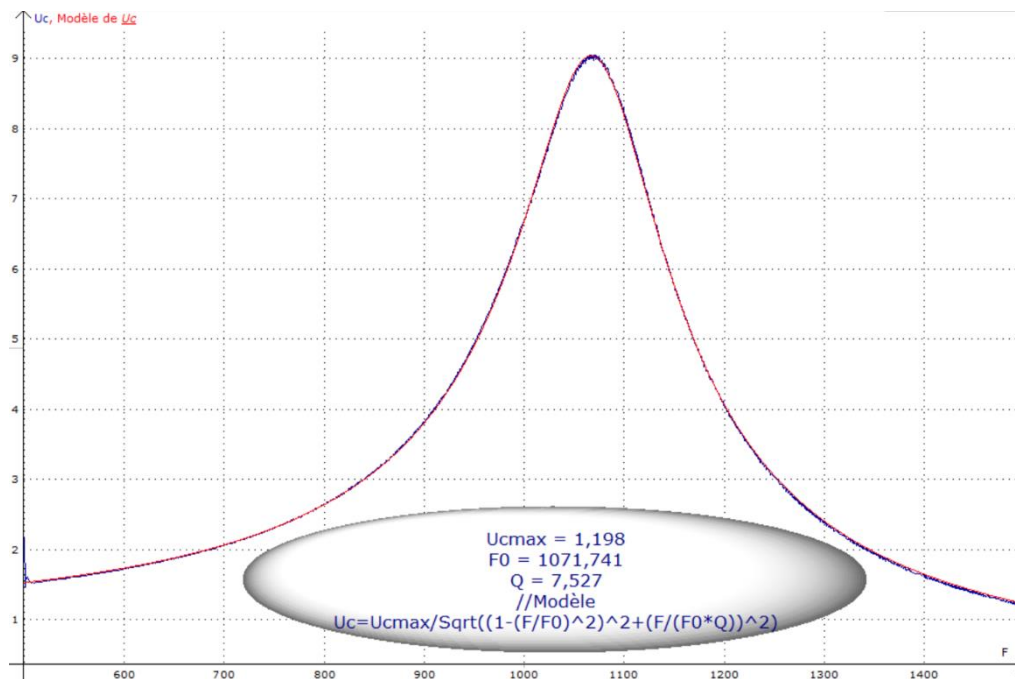
III.1.3 Réponse en tension aux bornes du condensateur

On reprend le circuit précédent en remplaçant R par C . Il faut abaisser la tension d'alimentation car une surtension apparaît aux bornes du condensateur à la résonance lorsque R est faible.



GBF : Instek AFG 2112 ; 2,5 V Pk-Pk

On se met dans les mêmes conditions que précédemment en réglant la résistance variable à $50\ \Omega$. On obtient alors la courbe suivante :

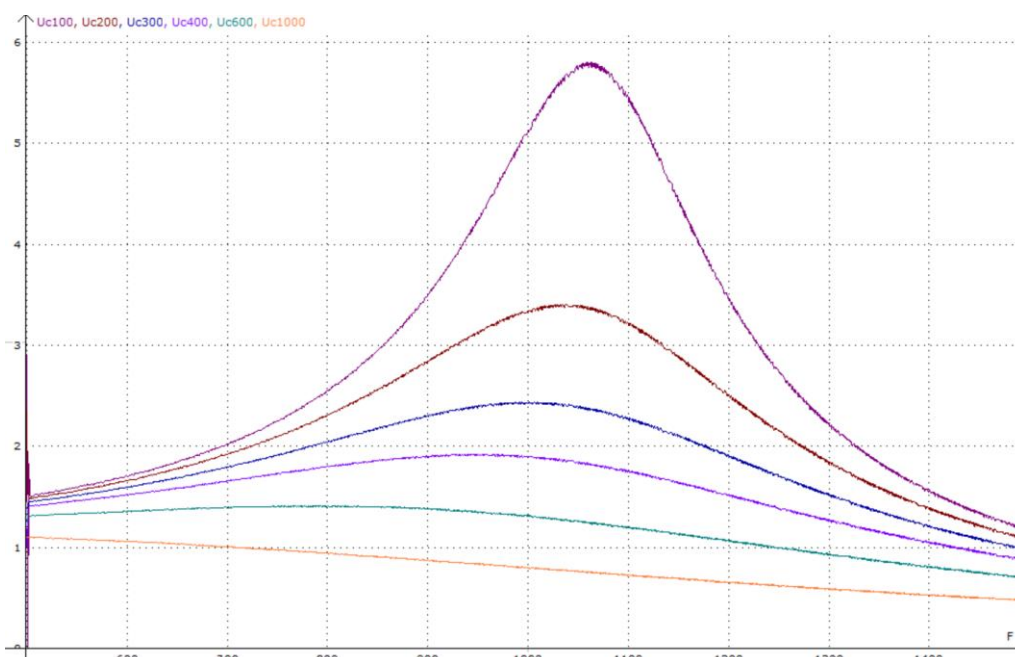


La modélisation par l'expression du module de \underline{U}_C donné en annexe donne encore de bons résultats. On retrouve à peu de choses près les mêmes valeurs pour Q et f_0 . Le maximum est pratiquement situé à cette fréquence mais il est nettement plus fort que la tension appliquée au circuit ($E = 1,25\ V$ dans cet exemple). On a $U_{C\ max} \approx 9\ V$, une valeur cohérente avec la valeur approchée donnée en annexe lorsque que le facteur de qualité est important :

$$|\underline{U}_C|_{max} \approx EQ = 1,25 \times 7,5 = 9,4\ V$$

On confirme ainsi le phénomène de surtension aux bornes du condensateur au voisinage de la résonance lorsque le circuit est faiblement dissipatif.

Influence du facteur de qualité :

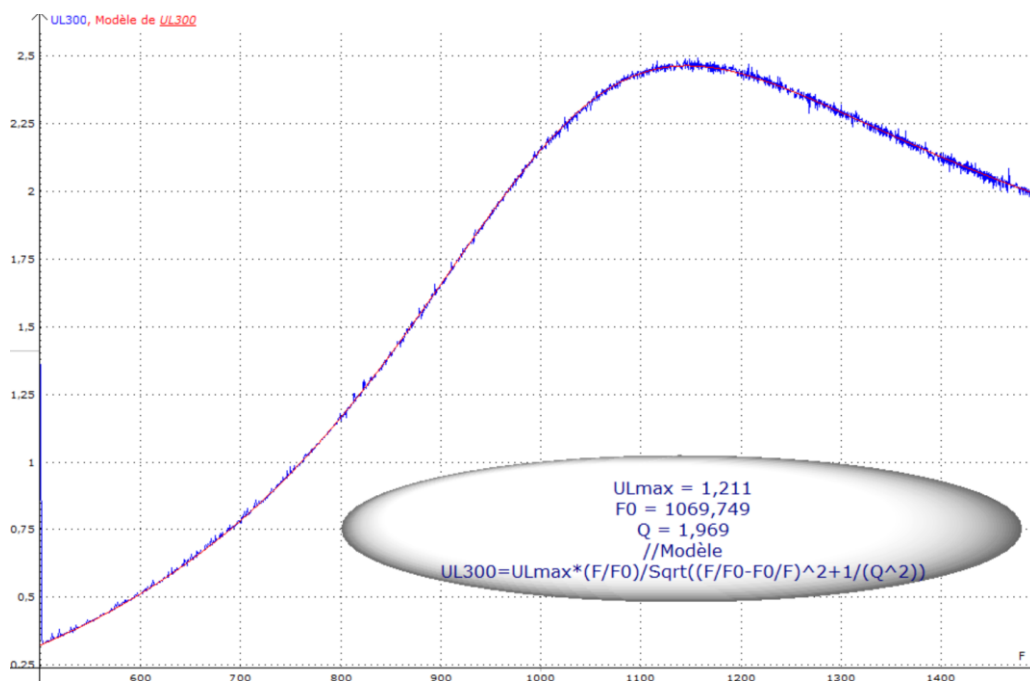


On peut là aussi observer l'influence de Q en augmentant progressivement la valeur de la résistance variable. Si on compare avec la résonance en intensité, on constate que le maximum se décale progressivement vers les basses fréquences et qu'il finit par disparaître (cf. la courbe $U_C 1000$ pour $R = 1000 \Omega$). Voici à titre indicatif le résultat des valeurs de Q obtenues par modélisation ainsi que la fréquence pour laquelle on a un maximum sur les courbes précédentes (les valeurs calculées le sont avec les formules données en annexe) :

$R (\Omega)$	50	100	200	300	400	600	700
$Q_{\text{calculé}}$	7,65	4,87	2,82	1,99	1,53	1,05	0,91
$Q_{\text{mesuré}}$	7,53	4,82	2,82	1,996	1,54	1,05	0,92
$f_{\text{max calculée}} (\text{Hz})$	1070	1063	1041	1004	954	796	676
$f_{\text{max mesurée}} (\text{Hz})$	1068	1060	1038	999	950	793	677

III.1.4 Réponse en tension aux bornes de l'inductance

Cette partie n'est pas indispensable mais comme le dispositif proposé permet d'obtenir rapidement les courbes de réponse en fréquence, on donne à titre indicatif l'évolution de la tension aux bornes de l'inductance avec une résistance de 300Ω (il faut permuter L et C dans le montage pour respecter la masse) :



Le point intéressant à noter est que le maximum a lieu cette fois au-delà de la fréquence propre du circuit (repéré à 1145 Hz dans cet exemple). On a aussi modélisé cette réponse en supposant l'inductance pure. On a alors $\underline{u}_L = jL\omega \underline{i}$, d'où, avec l'expression de \underline{i} donnée en annexe et après réarrangement :

$$\underline{U}_L = \frac{x E}{\left(x - \frac{1}{x}\right) - j \frac{1}{Q}} \rightarrow |\underline{U}_L| = \frac{x E}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}}$$

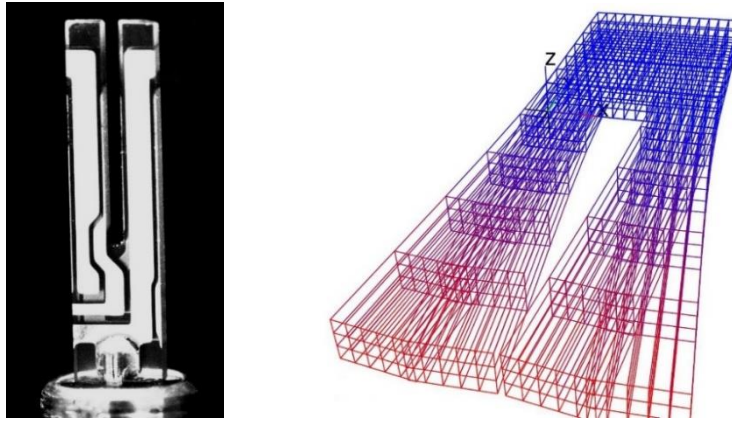
L'hypothèse d'un composant idéal est plus discutable que pour le condensateur car les pertes sont plus importantes dans la bobine. Malgré cela, le modèle recoupe bien la courbe dans la gamme de fréquence étudiée car $L\omega$ vaut au minimum 310Ω à 500 Hz à comparer aux 33Ω de la bobine.

III.2 Résonance série d'un quartz d'horlogerie

[2] ; [3], p. 389

III.2.1 Introduction

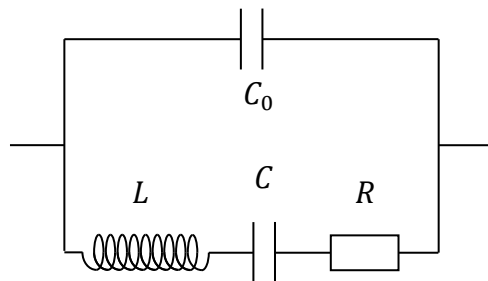
Les quartz d'horlogerie sont conçus pour réaliser des oscillateurs fonctionnant à 32 768 Hz qui permettent l'obtention d'un signal à 1 Hz après 15 divisions par un facteur 2 de la fréquence. Au niveau structurel, le composant se présente sous la forme d'un petit diapason avec des électrodes métalliques déposées sur chaque bras permettant de sélectionner un mode de vibration en flexion par effet piézoélectrique :



La rigidité du quartz permet un confinement très efficace de l'énergie acoustique dans les bras et l'encapsulage sous vide du diapason dans un cylindre métallique renforce cet effet en évitant la dissipation visqueuse dans l'air. Cela permet de construire des cellules résonnantes avec un facteur de qualité énorme, donc des oscillateurs qui battent la seconde avec une très grande stabilité.

Modélisation électrique :

Le diapason a naturellement la structure d'un condensateur puisqu'il est constitué d'électrodes métalliques séparées par un isolant. On modélise donc le quartz par une capacité C_0 (elle prend aussi en compte les effets capacitifs entre les électrodes, le boîtier métallique et les fils de liaison). Il se comporte ainsi sauf lorsqu'il entre en vibration car les déformations mécaniques du diapason en régime dynamique induisent des conséquences électriques via l'effet piézoélectrique. Pour en tenir compte, on ajoute un circuit RLC série en parallèle sur C_0 qui n'a pas de réalité physique. Les paramètres R , L et C traduisent juste les effets mécaniques dissipatifs, inertiels et élastiques en termes électriques. On parle d'éléments motionnels (ce type d'équivalence se rencontre aussi dans l'étude des haut-parleurs).



L'étude de ce modèle (cf. annexe, [3], p. 389 ou [2], p. 2042) montre que son admittance passe par un maximum à la fréquence de résonance du circuit RLC série, puis par un minimum à la fréquence d'anti résonance parallèle f_{arp} :

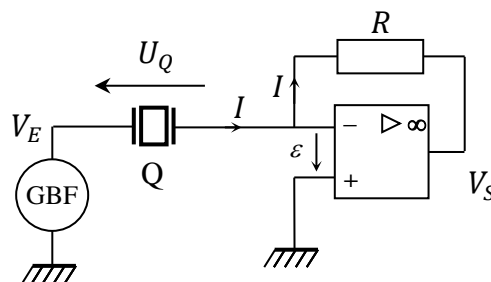
$$f_{rs} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad f_{arp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}}} \quad \text{avec} \quad C_{eq} = \frac{C_0 C}{C_0 + C}$$

Avec les valeurs typiques suivantes pour les quartz d'horlogerie (données constructeurs) :

C_0	R	L	C	Q
2-3 pF	40 k Ω maximum	7 000 H	2-3 fF	50 000 minimum

Ces chiffres montrent que les constantes motionnelles ne correspondent pas aux valeurs usuelles des composants électriques. La capacité C est extrêmement faible alors que l'inductance est énorme (cela résulte de la très grande élasticité du matériau). On peut aussi noter que C est beaucoup plus petit que C_0 . Cela entraîne une très grande proximité entre les fréquences de résonance et d'antirésonance puisque $C_{eq} \approx C$.

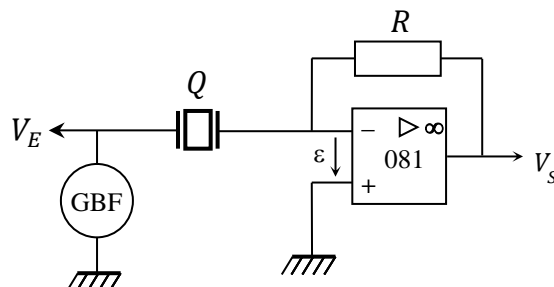
III.2.2 Principe du montage



L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire car il est rétro actionné par la résistance R . On a donc $\varepsilon = 0$ V et $V_- = 0$ V car la patte + est relié à la masse, d'où $U_Q = V_E - V_- = V_E \rightarrow$ La tension aux bornes du quartz est directement V_E . Le courant I va intégralement dans R car l'impédance d'entrée de l'amplificateur opérationnel est énorme, d'où $V_S - V_- = V_S - 0 = -RI \rightarrow$ L'amplificateur opérationnel associé à la résistance R réalise une conversion courant-tension puisque V_S est une image du courant circulant dans le quartz à R et au signe près. Le courant étant maximal à la résonance série, l'amplitude de V_S doit passer un maximum à cette fréquence.

III.2.3 Réalisation pratique

Le facteur de qualité $Q = f_{rs}/\Delta f$ du quartz valant au minimum 50 000, la largeur du pic de résonance est de l'ordre du Hz donc il faut un GBF extrêmement stable en fréquence pour tracer la courbe de réponse du composant (pilotage au dixième de Hz près au voisinage de 32 kHz). Un appareil à synthèse numérique directe de signal (qu'on considèrera comme un étalon de fréquence pour les mesures) est indispensable puisque c'est impossible à faire avec un GBF à oscillateur analogique.



Q : quartz 32768 Hz

R : 100 k Ω

V_E : **400 m V_{Peak-Peak} maximum**

L'amplitude du signal V_E ne doit pas être trop forte sinon on risque de détruire le quartz lorsqu'on passe à la résonance car il absorbe alors un maximum de puissance ! V_E , V_S et la phase peuvent être

mesurés à l'aide d'un oscilloscope numérique. Pour le déphasage, il faut tenir compte du signe – entre V_S et I (on peut inverser V_S sur l'oscilloscope pour compenser ce signe).

Mesures :

On commence par rechercher la fréquence proche de 32768 Hz donnant un signal de sortie maximal. On effectue ensuite des mesures de part et d'autre de cette fréquence par pas de 0,1 Hz en attendant à chaque fois que les signaux se stabilisent (le facteur de qualité étant énorme, les régimes transitoires sont longs).

III.2.4 Exploitation des résultats

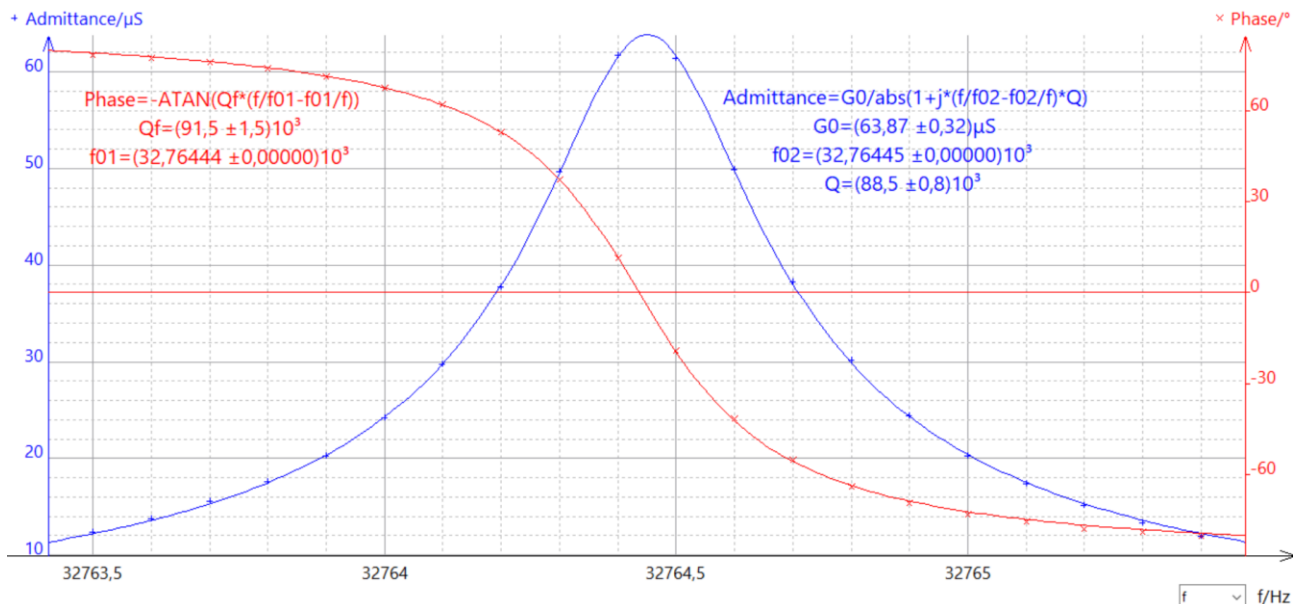
On obtient l'admittance du quartz par la relation :

$$\underline{Z}_Q = \frac{1}{\underline{Y}_Q} = \frac{U_Q}{I_Q} = \frac{V_E}{V_S/R} = -R \frac{V_E}{V_S} \rightarrow \boxed{\underline{Y}_Q = -\frac{1}{R} \frac{V_S}{V_E}}$$

On peut comparer son évolution autour de f_{rs} , qui est une image de la résonance en intensité, à une modélisation de type RLC série (cf. annexe pour la justification) :

$$|\underline{Y}_Q| = \frac{Y_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arg}(\underline{Y}_Q) = -\arctg \left[Q \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]$$

Le logiciel a souvent des problèmes pour ajuster le modèle à la courbe expérimentale à cause de l'acuité extrême de cette résonance. On peut l'aider en lui donnant des valeurs estimées pour Y_0 , f_0 , et Q . Voici à titre indicatif le résultat d'une série de mesure :



L'accord entre les modèles et les mesures est très correct. La fréquence f_0 est quasiment identique sur le module et l'argument. Il y a un léger écart pour le facteur de qualité mais le plus important est l'ordre de grandeur. On trouve ici :

$$\boxed{f_{rs} = 32764,45 \text{ Hz}}$$

$$\boxed{Q \approx 90\,000}$$

On peut aussi estimer les paramètres motionnels R , L et C . L'admittance du quartz à la résonance ($\approx 64 \mu S$) vaut $1/R$. On peut calculer L connaissant Q par la relation $Q = L\omega_0/R$ et obtenir C par la relation $\omega_0^2 = 1/LC$. On trouve avec nos mesures les valeurs suivantes :

$$R \approx 15\,700\,\Omega$$

$$L \approx 6\,700\,H$$

$$C \approx 3,5\,fF$$

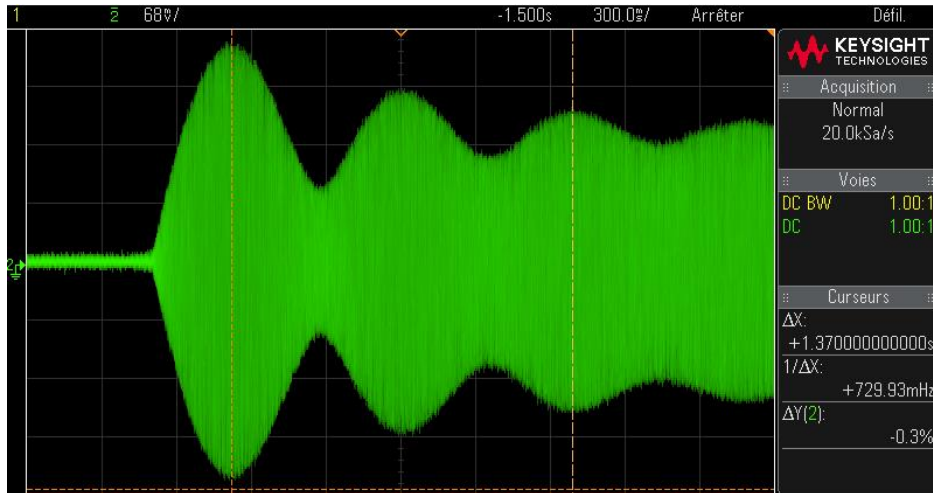
Elles concordent avec les données constructeurs. La phase de l'admittance, elle, nous renseigne sur la nature du quartz. Elle est positive lorsque $f < f_{rs}$ et négative lorsque $f > f_{rs}$ donc il a bien un comportement capacitif en basse fréquence et inductif juste après la résonance série (cf. annexe). Si on poursuit l'étude au-delà de f_{rs} , on constate que le signal V_S passe par un minimum (à $f_{arp} = 32\,789,1\,Hz$ dans notre exemple) avec un basculement de la phase qui redevient positive par la suite (retour d'un comportement capacitif en haute fréquence comme indiqué en annexe). Il faut noter que le repérage du minimum est délicat car il est très faible. On peut l'observer plus facilement en augmentant l'amplitude du GBF *lorsqu'on est proche de f_{arp}* . Cela ne présente pas de risque car l'impédance du quartz est alors très forte mais il ne faut pas oublier de rabaisser la tension d'alimentation si on retourne autour de f_{rs} sinon on détruit le composant !

III.2.5 Comparaison avec la fréquence annoncée

Les oscillateurs de montre doivent fonctionner exactement à $32\,768\,Hz$ pour obtenir une base de temps de 1 seconde. La fréquence de résonance série qu'on vient d'obtenir ne correspond pas tout à fait à cette valeur. La différence est faible (quelques Hz), mais supérieure à la tolérance en fréquence du composant annoncée par le constructeur et à la précision du GBF (20 ppm pour chacun). On peut en conclure que les quartz d'horlogerie ne travaillent pas sur leur résonance série. On utilise en fait le caractère fortement inductif du composant lorsqu'il oscille entre f_{rs} et f_{arp} pour former un filtre de type π très sélectif avec deux condensateurs qui sert de boucle de rétroaction à un oscillateur de relaxation. La fréquence est alors ajustée à $32\,768\,Hz$ par le choix de la valeur des capacités (cf. [8], p. 155)

III.2.6 Mode propre d'oscillation

On peut le mettre en évidence avec le montage précédent lorsqu'on met en route le signal du GBF avec une fréquence très proche de f_{rs} . Voici la réponse enregistrée sur un oscilloscope numérique en mode Roll en début d'application d'un signal sinusoïdal à $f = 32\,763\,Hz$:



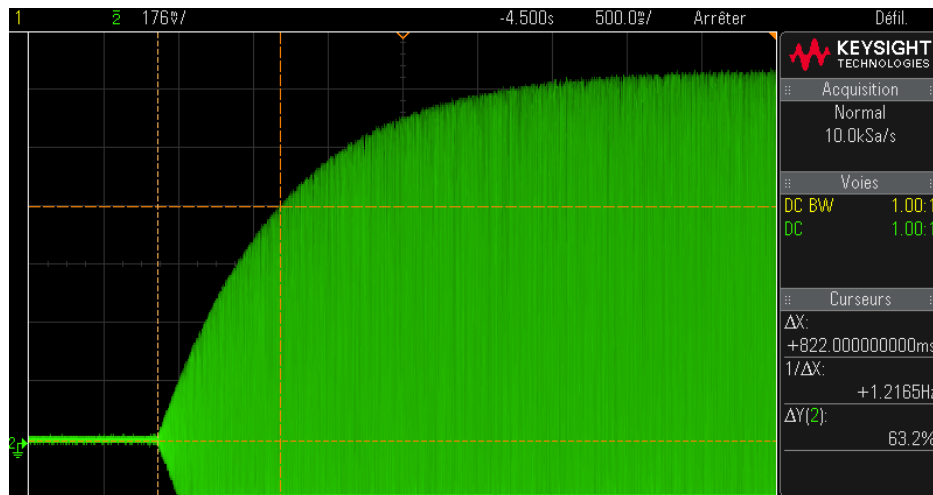
Le signal V_S présente un régime transitoire pendant lequel la solution de l'équation homogène (le régime libre à $f_0\sqrt{1 - 1/(4Q^2)} \approx f_0$ vu le facteur de qualité du quartz) s'ajoute à celle du régime permanent (le régime forcé à $f = 32\,763\,Hz$ ici). La figure de battement qui en résulte permet d'identifier la fréquence propre d'oscillation du quartz connaissant celle de l'excitation puisque la fréquence qui module l'enveloppe (à mesurer entre 3 extremums comme indiqué sur la figure) vaut :

$$f_{mod} = \frac{f_0 - f}{2} \rightarrow f_0 = f + 2f_{mod}$$

On a $f_{mod} = 730 \text{ mHz}$ dans cet exemple. La répétition des mesures a abouti à la même valeur moyenne avec un écart type de 3 mHz , d'où :

$$f_0 = 32\,764,46 \pm 0,01 \text{ Hz}$$

→ La fréquence du mode propre d'oscillation du diapason correspond bien à la fréquence à laquelle il résonne en régime sinusoïdal forcé. On peut aussi enregistrer la réponse transitoire lorsqu'on applique un signal sinusoïdal à la fréquence la plus proche de f_{rs} :



On peut montrer que l'enveloppe évolue proportionnellement à $1 - e^{-\lambda t}$ lorsque $f = f_{rs}$ donc le temps mis pour qu'elle atteigne 63,2 % de sa valeur finale permet d'estimer le facteur d'amortissement λ , et donc Q . On a ici :

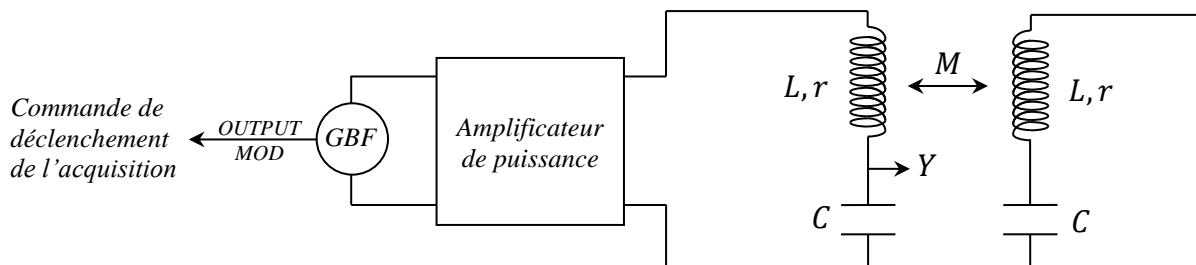
$$\Delta t_{63,2\%} = 0,822 \text{ s} = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0} \rightarrow Q = \frac{\omega_0 \Delta t_{63,2\%}}{2} \approx 85\,000$$

On retrouve bien le bon ordre de grandeur obtenu lors de l'étude en régime forcé.

IV CAS DES SYSTEMES COUPLES

Cette étude peut se faire en mécanique ou en électricité. On présente la deuxième solution car elle est plus rapide puisque les systèmes mécaniques comme les pendules ont des fréquences propres assez basses et des transitoires longs quand ils sont peu amortis.

IV.1 Système d'étude



GBF : Instek AFG 2112 (*amplitude faible*)

C : $0,5 \mu\text{F}$ (même type de boîte)

L : Bobine 500 spires Leybold ($L \approx 9\text{mH}$, $r \approx 2,5 \Omega$)

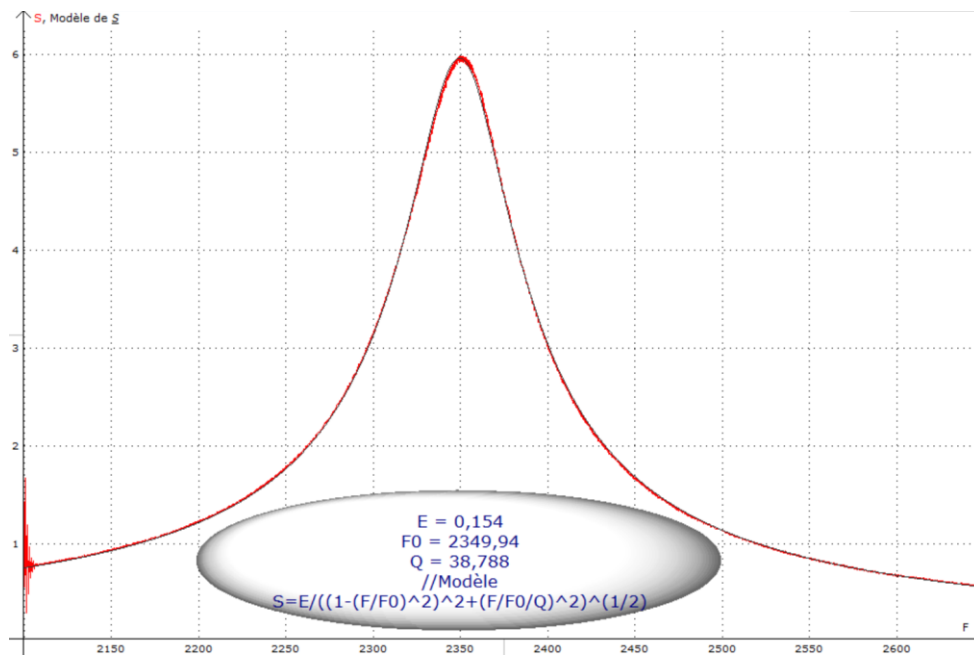
Ce système est présenté dans le montage sur le couplage des oscillateurs. S'y reporter pour plus d'informations. Le couplage est ici assuré par l'inductance mutuelle M entre les deux bobines. Les cellules de bases sont des circuits RLC identiques pour simplifier l'analyse et ils sont faiblement résistifs pour avoir les résonances en intensité et en charge pratiquement confondues (cf. annexe). Le courant passe donc par un maximum à $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$ avec de fortes surtensions aux bornes des composants d'où l'utilisation d'un amplificateur de puissance pour alimenter le circuit et l'application d'un signal de faible amplitude pour avoir des tensions raisonnables à la résonance.

IV.2 Réglage des circuits sur une fréquence commune

Il faut des circuits identiques donc on peut tester plusieurs bobines avec un RLC mètre pour en sélectionner deux avec les caractéristiques les plus proches possibles. On prend deux boîtes variables de capacité d'une même famille pour la même raison. On en règle une à $0,5 \mu F$ et on trace la courbe de réponse en Y du premier circuit en l'absence du deuxième avec la même méthode que celle employée lors de l'étude du circuit RLC série. Il faut adapter la wobbulation et l'acquisition à la fréquence de résonance attendue qui vaut $f_0 \approx 2\,370 \text{ Hz}$ ici. Les courbes qui suivent ont été obtenues avec les paramètres suivants :

Wobbulation : $E = 0,15 \text{ V}$; $f_{start} = 2\,100 \text{ Hz}$; $f_{stop} = 2\,650 \text{ Hz}$; $f_{rate} = 0,5 \text{ Hz}$

Acquisition : 100 000 points ; $T_{ech} = 20 \mu s$; $T_{tot} = 2 \text{ s}$; déclenchement sur le signal Output Mod

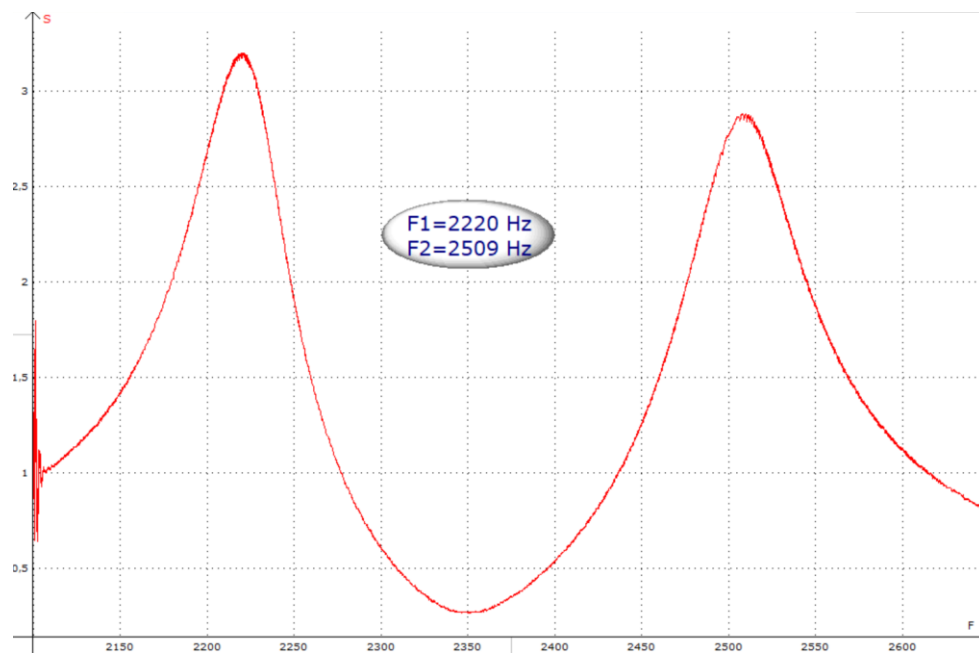


Les valeurs obtenues pour f_0 et Q en modélisant $Y = u_C$ recoupent celles déduites des paramètres des composants mesurés avec un RLCmètre ($f_0 = 2\,353 \text{ Hz}$, $Q = 41$) à condition de tenir compte des pertes dans le condensateur pour le calcul de Q car elles sont non négligeables vu la résistance très faible de la bobine. On remplace ensuite le premier circuit par le deuxième et on ajuste la valeur de sa capacité pour avoir la même fréquence de résonance \rightarrow l'accord est réalisé. A noter qu'il peut y avoir des différences dans l'acuité du pic de résonance si les capacités n'ont pas le même facteur de qualité (d'où le conseil de prendre le même type de boîte).

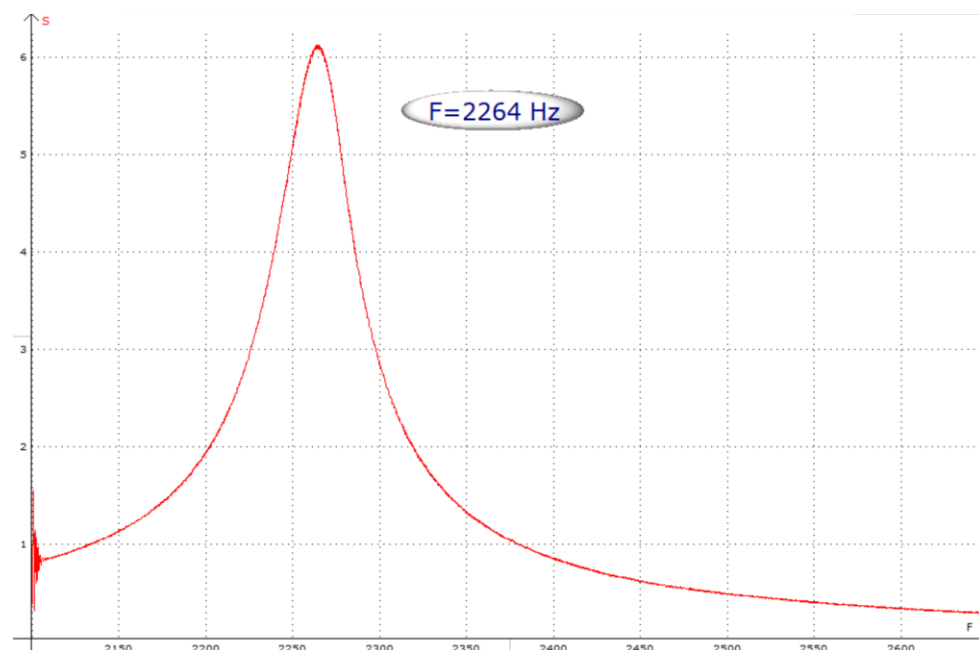
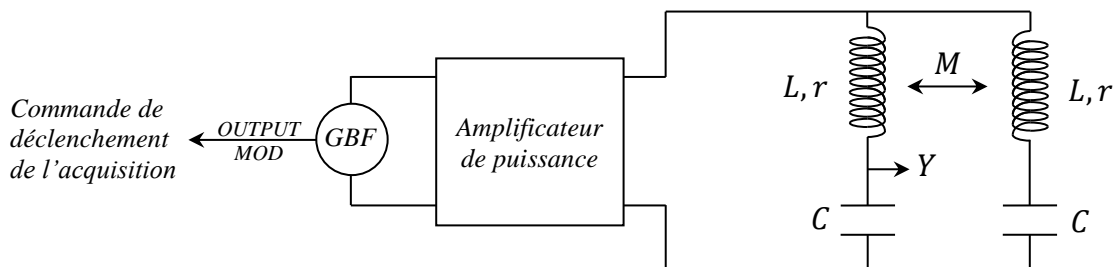
IV.3 Résonance du système couplé

On alimente le premier circuit, on referme le deuxième sur lui-même (cf. schéma du montage) et on observe la courbe de réponse en Y sur le premier condensateur lorsqu'on rapproche progressivement les deux bobines. On observe un seul pic de résonance lorsque le couplage est faible puis il se dédouble lorsqu'il devient suffisamment

important. Voici à titre indicatif le résultat d'un enregistrement effectué avec les deux bobines accolées :



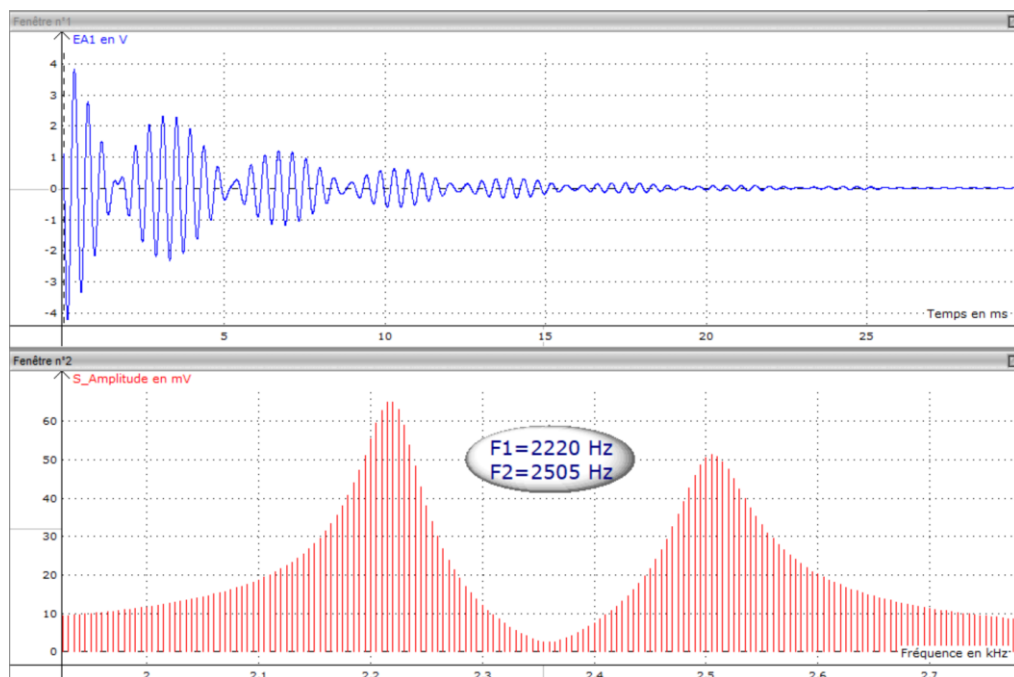
Le phénomène de résonance ne s'observe plus sur la fréquence propre des circuits mais à deux fréquences situées de part et d'autre de f_0 . On peut observer la tension aux bornes du deuxième condensateur et vérifier que sa réponse présente une évolution similaire. Les modes excités peuvent être identifiés en reprenant l'expérience avec les deux circuits alimentés de la même manière en conservant le même couplage :



On a cette fois-ci un seul pic de résonance. Si on compare la phase des signaux aux bornes des deux condensateurs, on constate qu'il s'agit du mode symétrique (ce qui est logique vu la façon dont on alimente les deux circuits). La fréquence du pic ne correspond pas tout à fait à la fréquence f_1 obtenue précédemment car il faudrait exciter les deux circuits de manière isolée pour qu'ils soient couplés uniquement par la mutuelle inductance M . Pour identifier le deuxième pic, il suffit d'exciter le deuxième circuit en inversant le sens de branchement de ses fils d'alimentation. On obtient alors un maximum proche de la fréquence f_2 (mais pas tout à fait à cause du mode d'alimentation non isolé des deux circuits) correspondant au mode antisymétrique lorsqu'on compare la phase des signaux aux bornes des condensateurs.

IV.4 Modes propres d'oscillations

On repart du montage initial, toujours avec le même couplage. On arrête la wobblation et on alimente le premier circuit avec le signal TTL du GBF réglé à une fréquence basse pour observer le régime transitoire du signal Y aux bornes du condensateur. Voici à titre indicatif le résultat d'une acquisition déclenchée sur le front descendant du signal TTL :



On reconnaît une figure typique de battements, signe que la réponse transitoire est une combinaison linéaire de deux fréquences, les modes propres du système couplé. La transformée de Fourier permet d'identifier les fréquences de ces deux modes propres et on constate qu'elles concordent avec celles auxquelles résonnent nos deux circuits faiblement résistifs lorsqu'ils sont couplés de la même manière.

Remarque :

Il faut une durée d'enregistrement assez longue pour que la TF soit suffisamment précise car le pas de calcul en fréquence d'une FFT est égal à $1/T_{totale}$. On a choisi ici un temps d'acquisition de 200 ms. Cela permet d'avoir un spectre calculé tous les 5 Hz. La fréquence maximale du signal TTL doit alors être de 2,5 Hz pour qu'il y ait une seule réponse sur l'écran (la TF n'est pas bonne sinon). La fréquence d'échantillonnage doit aussi être assez grande par rapport à celles des modes propres pour bien décrire le signal transitoire.

Calcul de la constante de couplage :

Lorsque les deux circuits ont la même fréquence f_0 , f_1 et f_2 sont liées à K par les relations suivantes.

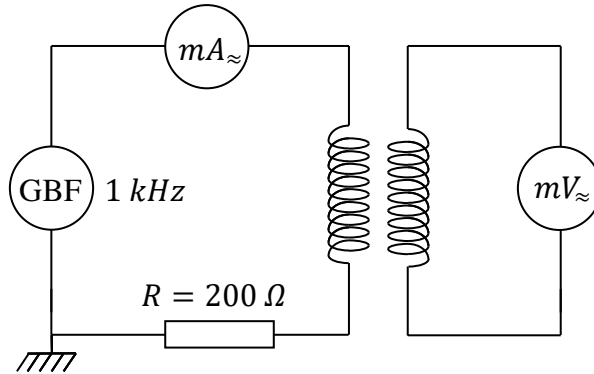
$$f_1 = \frac{f_0}{\sqrt{1+K}}$$

$$f_2 = \frac{f_0}{\sqrt{1-K}}$$

On trouve, avec les valeurs obtenues pour f_0 , f_1 et f_2 :

$$K = \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^2 - 1 = 0,120 \quad \text{et} \quad K = 1 - \left(\frac{f_2}{f_0}\right)^2 = 0,122 \quad \text{soit} \quad \boxed{K_{moy} = 0,121}$$

On peut comparer ce résultat à celui qu'on peut calculer en mesurant le coefficient de mutuelle inductance M à l'aide du montage suivant (cf. [4], p. 107) :



On envoie un signal sinusoïdal dans le premier circuit et on mesure la valeur efficace du courant circulant dedans avec un ampèremètre (on peut aussi l'observer et le mesurer à l'aide d'un oscilloscope numérique aux bornes de R). Ce courant induit une fém dans la deuxième bobine via le couplage qu'on peut mesurer avec un voltmètre. On a $e_2 = -M di_1/dt$ d'où, en régime sinusoïdal :

$$V_{2\,eff} = M\omega I_{1\,eff}$$

On a mesuré une tension $V_{2\,eff} = 187\,mV$ pour un courant $I_{1\,eff} = 28,15\,mA$, d'où :

$$M = \frac{V_{2\,eff}}{M\omega I_{1\,eff}} = 1,06\,mH$$

Et on peut en déduire la constante de couplage définie par la relation suivante avec les valeurs mesurées pour L_1 et L_2 :

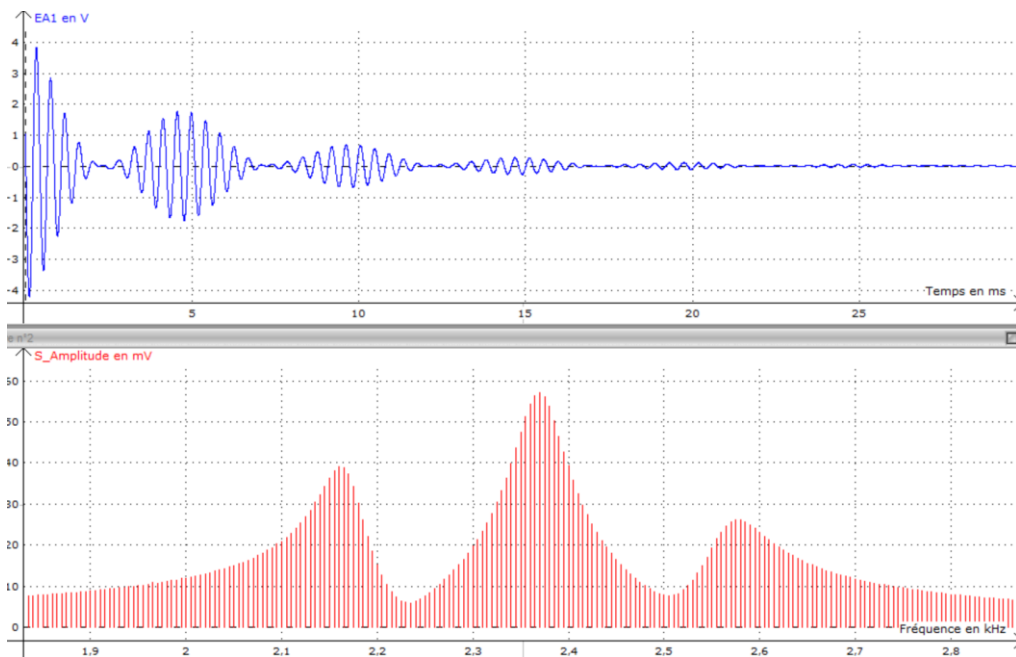
$$\boxed{K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 0,117}$$

Les deux résultats se recoupent à $\approx 3\%$ près.

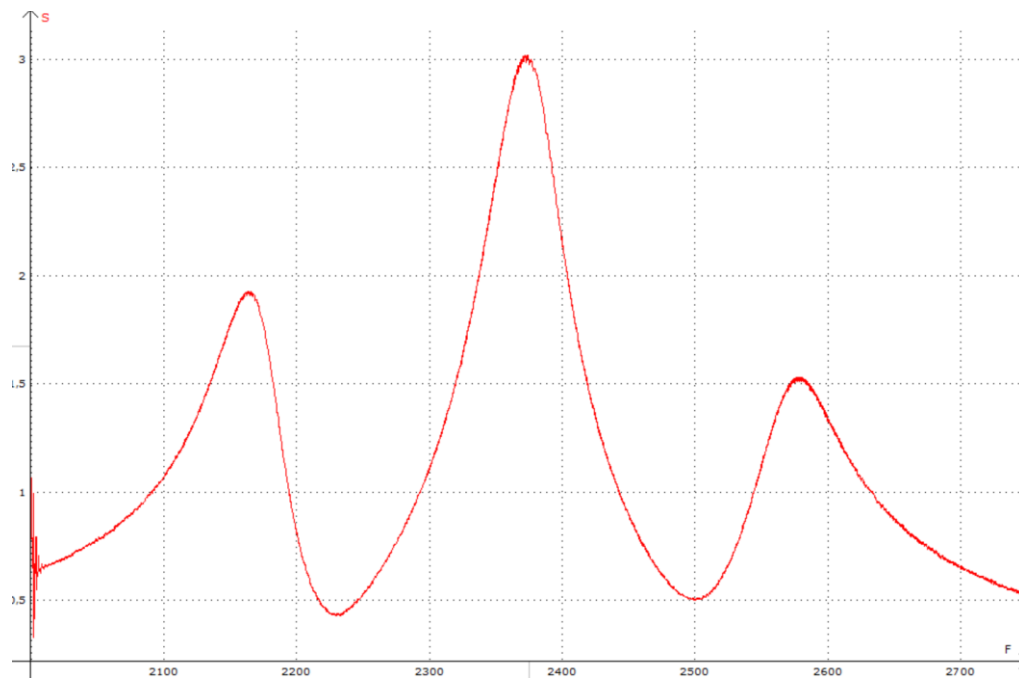
IV.5 Couplage avec un troisième circuit

On peut terminer cette partie en accolant un troisième circuit, lui aussi court circuité, à la suite du deuxième pour observer les réponses en régime transitoire et sinusoïdal forcé. Le protocole reste le même dans le premier cas. Pour la courbe de résonance, il faut augmenter un peu la gamme de fréquence balayée (wobblution entre 2 000 et 2 750 Hz par exemple). On obtient alors les figures ci-dessous. La réponse transitoire temporelle ressemble à celle obtenue avec deux circuits mais la TF permet de détecter 3 fréquences (on voit là l'intérêt de la TF). On vérifie ainsi qu'il y a autant de modes propres que d'oscillateurs couplés quand ceux-ci sont à un degré de liberté. Le deuxième graphique montre que le système résonne à trois fréquences et on peut vérifier par la mesure que ce sont celles des modes propres.

Réponse transitoire en Y pour 3 circuits identiques couplés (bobines accolées)



Réponse en régime sinusoïdal en Y pour 3 circuits identiques couplés (bobines accolées)



V RÉSONANCE AVEC DES ONDES STATIONNAIRES

Lorsque le milieu dans lequel se propage une perturbation est limité, il y a un phénomène de réflexion aux interfaces. S'il est fort, il se crée un phénomène d'ondes stationnaires et il est maximal lorsque les dimensions du milieu ont certaines valeurs particulières. Il y a alors résonance. Le système possède plusieurs fréquences de résonance, en théorie une infinité discrète.

V.1 Corde vibrante excitée sinusoïdalement

C'est le système classique de la corde de Melde dans laquelle se propagent des ondes transverses. L'excitation sinusoïdale permet d'observer les modes propres de résonance.

V.1.1 Rappels

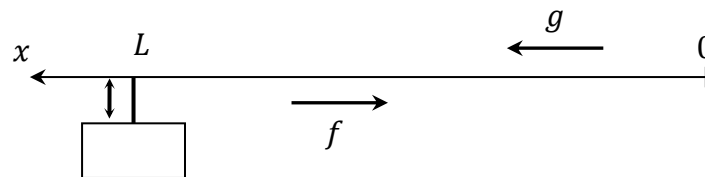
L'équation générale du mouvement transversal d'une corde est la suivante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Avec T la tension de la corde et μ la masse linéique de la corde. La solution générale du mouvement est la combinaison d'une onde progressive et d'une onde régressive :

$$y(x, t) = \underbrace{f(t - x/c)}_{\text{Propagation suivant les } x \text{ croissants}} + \underbrace{g(t + x/c)}_{\text{Propagation suivant les } x \text{ décroissants}}$$

L'expérience consiste à exciter en régime sinusoïdal forcé une corde tendue et fixe à une de ses extrémités à l'aide d'un vibreur pour observer le résultat de la superposition des ondes incidente et réfléchie :



On a :

$$y(x, t) = f(x, t) + g(x, t) = a \sin(\omega t - kx) + b \sin(\omega t + kx)$$

La corde est fixe en $x = 0$, d'où :

$$y(0, t) = a \sin(\omega t) + b \sin(\omega t) = 0 \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad b = -a$$

L'expression de $y(x, t)$ peut alors se mettre sous la forme :

$$y(x, t) = -2a \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Les coordonnées de temps et d'espace sont découplées donc on a une onde stationnaire. Son amplitude est déterminée par la condition qu'impose le vibreur en $x = L$:

$$y(L, t) = A \cos(\omega t) = -2a \sin(kL) \cos(\omega t) \quad \forall t \quad \rightarrow \quad -2a \sin(kL) = A$$

D'où :

$$y(x, t) = \frac{A}{\sin kL} \sin(kx) \cos(\omega t)$$

L'amplitude du phénomène d'ondes stationnaire tend vers une valeur minimum égale à A lorsque $L = (2p + 1)\lambda/4$ et tend théoriquement vers l'infini lorsque $L = p\lambda/2$. Le phénomène d'ondes stationnaires est alors nettement visible, la corde se séparant en p fuseaux de longueur $\lambda/2$: il y a résonance. L'amplitude à la résonance est limitée dans la pratique par les amortissements et les non

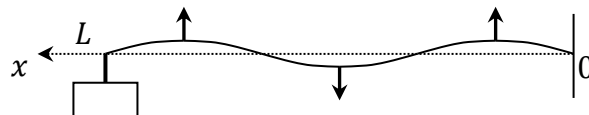
linéarités du système négligés lors de l'établissement de l'équation d'onde (elle n'est valable que pour de petits déplacements).

V.1.2 Manipulation

Cf. [1], p. 258. Il faut montrer qu'on a une amplitude maximale pour certaines valeurs de la fréquence excitatrice (phénomène de résonance). Ces valeurs forment une suite discrète et elles dépendent de la longueur et de la tension de la corde.

Observation des ondes stationnaires :

On prend une longueur L d'environ 1 m. On augmente progressivement la fréquence du GBF et on observe successivement les fréquences de résonance correspondant à $p = 1, 2$ et 3. La corde est immobile (nœuds de vibration) en des points séparés de $\lambda/2$, et vibre avec une amplitude maximum (ventres) en des points séparés de la même distance. On peut éclairer la corde avec un stroboscope lorsqu'on observe 3 ventres. La corde semble bouger très lentement si la fréquence du stroboscope est proche de celle du vibreur. On peut alors vérifier que les points entre deux nœuds consécutifs de la corde vibrent en phase, l'amplitude $A/\sin kL$ gardant le même signe. Par contre, de part et d'autre d'un nœud, l'amplitude prend des signes opposés et les points de la corde vibrent en opposition de phase. Toutes ces observations sont caractéristiques d'un phénomène d'ondes stationnaires :



Remarque :

Le phénomène de résonateur à fréquences multiples est général dans tous les dispositifs de type cavité. On le retrouve en acoustique (tuyaux sonores, tube de Kundt), en optique (interféromètre Fabry-Pérot, cavité Laser), en mécanique (figures de Chladni) et en hyperfréquences (ondemètre pour ondes centimétriques).

V.2 Réalisation à l'aide d'ondes acoustiques

V.2.1 Tube de Kundt

Cf. [1], p. 357.

V.2.2 Tuyaux sonores

Cf. [1], p. 404 et suivantes pour des idées d'expériences.

VI RESONANCE PARAMETRIQUE

[1], p.283 ; [5], p.142 ; [6], ch. 27 ; [7]

Le principe consiste à modifier périodiquement la fréquence propre d'un oscillateur passif pour entretenir, voire amplifier les oscillations dont il est le siège. L'équation régissant le système prend alors la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2(t)x = 0$$

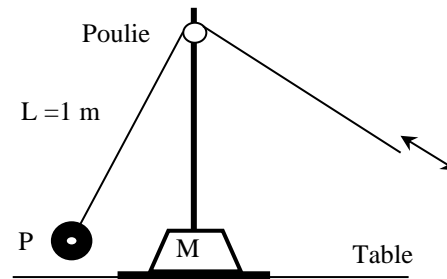
L'équation est dite de Hill lorsque l'excitation est périodique (cas général) ou de Mathieu lorsqu'elle est sinusoïdale. Dans tous les cas, la résolution mathématique n'est pas simple (cf. [6]) et ne sera pas abordée. On retiendra que la façon la plus efficace d'amplifier les oscillations du système consiste à l'exciter à une fréquence double de sa fréquence propre. Il faut aussi fournir à l'oscillateur plus d'énergie que celle qu'il dissipe d'où l'existence d'un seuil.

VI.1 Mise en évidence du phénomène

L'expérience suivante permet une approche intuitive du phénomène de résonance paramétrique. Elle consiste à entretenir et amplifier les oscillations d'un pendule pesant par variation périodique de sa longueur.

Pendule P : masse de ≈ 100 grammes

M : poids de 5 kg pour caler la potence



On commence par lancer le pendule. On tire ensuite sur le fil lorsqu'il passe par $\theta = 0$ et on lui redonne sa longueur initiale lorsqu'il oscille avec une amplitude maximum. Avec un peu d'entraînement, on arrive à accroître fortement l'amplitude du pendule. On illustre ainsi l'entretien d'une oscillation de période T_0 par une action de période $T_0/2$.

Analyse :

Considérons dans un premier temps la variation du moment cinétique par rapport à l'axe O de la poulie lorsqu'on modifie brutalement la longueur du pendule. Soient \vec{R} la réaction de l'axe et \vec{P} le poids du pendule. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

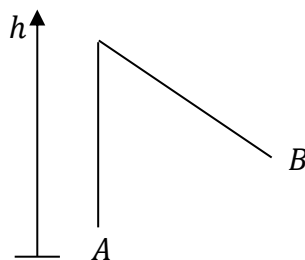
$$d\vec{\sigma}_O = [M_O(\vec{R}) + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}] dt = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}) dt \quad \text{car } \vec{R} \text{ est sur l'axe}$$

$$\text{Et } d\vec{\sigma}_O = 0 \text{ si } dt \rightarrow 0$$

Le moment cinétique se conserve *au moment de la variation de longueur si elle est brutale* \rightarrow On a donc, au moment de la variation de longueur :

$$\boxed{mLv = cte}$$

Examinons dans un deuxième temps l'évolution énergétique du pendule lorsqu'il oscille librement :



La vitesse du pendule est nulle lorsqu'il est à l'extrémum B et sa hauteur h est alors maximale donc l'énergie cinétique $E_{cin B}$ est nulle et l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pot B} = mgh$ est maximale. Le pendule a une vitesse maximale en A en étant au plus bas donc $E_{cin A}$ est maximale et $E_{pot A}$ est minimale.

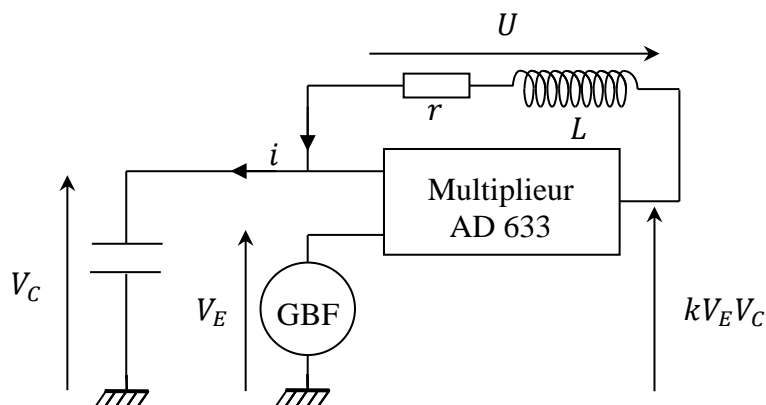
On tire brutalement sur le fil lorsque le pendule est en A donc L diminue. Comme $mLv = cte$ à cet instant, on augmente la vitesse en A, donc l'énergie cinétique. La diminution de L augmentant h d'une même quantité, l'énergie potentielle du pendule s'accroît elle aussi \rightarrow l'action en A fournit de l'énergie au pendule. Il faut noter que cette action fournie de l'énergie quel que soit l'endroit où on la réalise mais c'est en A qu'on a un maximum d'efficacité car c'est là où la vitesse est la plus grande et où une variation de ΔL donne la variation d'altitude Δh la plus forte.

On augmente L lorsqu'on relâche le fil en $B \rightarrow h$ diminue, de même que l'énergie potentielle \rightarrow le pendule redonne de l'énergie mais en moins grande quantité que celle reçue en A car ΔL donne Δh en A et $\Delta h \cos \theta$ en B . L'action en B n'a pas d'influence sur l'énergie cinétique puisque la $v_B = 0$. On reprend donc de l'énergie au pendule en B mais moins que celle qu'on lui avait donné en A , et c'est en B qu'on en reprend le moins. On conçoit ainsi que la résultante de ces deux actions répétées périodiquement permet d'amplifier les oscillations du pendule. L'apport global d'énergie doit bien entendu compenser les pertes par frottement, d'où l'existence d'un seuil minimal d'excitation en dessous duquel l'amplification n'a pas lieu.

VI.2 Système électrique

Le circuit électrique proposé permet une étude plus quantitative du phénomène de résonance paramétrique (le montage et des explications plus poussées se trouvent dans le BUP n° 747).

Montage :



GBF : signal carré

L, r : inductance à décades DL 0,7 réglée à 0,1 H ; mesurer sa résistance

C : 253 nF pour avoir $f_0 = 1000$ Hz

Equations :

$$V_C + U - kV_E V_C = 0$$

$$V_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt = \frac{q}{C} \quad U = L \frac{di}{dt} + ri = L\ddot{q} + r\dot{q}$$

La combinaison de ces trois équations donne :

$$\boxed{L\ddot{q} + r\dot{q} + \frac{1 - k \cdot V_E}{C} q = 0}$$

La charge du condensateur (analogue de l'amplitude du pendule) obéit donc à l'équation classique du circuit RLC avec $C' = C(1 - k V_E) \rightarrow$ tout se passe comme si la capacité varie dans le temps au rythme de V_E . On aurait le même effet en imposant à l'épaisseur d'un condensateur plan une variation de la forme $e = e_0(1 - k V_E)$.

Manipulation :

On règle la période des signaux carrés à $T_E \approx T_0/2$. Si l'amplitude du signal est suffisante, on observe l'oscillation quasi sinusoïdale du circuit. On peut alors ajuster finement T_E pour avoir un maximum d'amplitude (cf. remarque suivante). On observe un facteur 2 entre les périodes et on doit constater l'existence d'un seuil : il faut une valeur minimum d'amplitude pour que l'oscillation

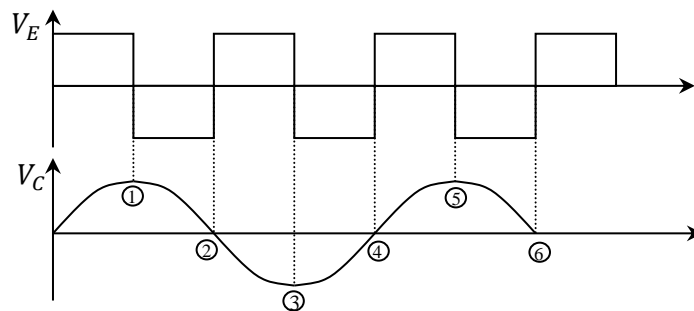
prenne naissance (la recherche de cette limite est délicate ; on peut utiliser un potentiomètre multitour de $10\text{ k}\Omega$ pour ajuster l'amplitude de V_E). On peut noter l'analogie avec le pendule : V_E croît lorsque $q = 0$, et décroît lorsque q est maximum. On peut modifier légèrement T_E et regarder la conséquence sur le niveau du seuil. Les oscillations disparaissent quand on s'écarte de $T_0/2$ et il faut un seuil d'autant plus grand qu'on est loin de cette valeur pour faire réapparaître les oscillations.

Explication :

Etudions la conséquence des basculements de V_E sur l'énergie emmagasinée par le condensateur :

$$E = \frac{1}{2} C' V_C^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C'} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} (1 - k V_E)$$

Les variations de V_E étant très rapides, on suppose que la charge q reste constante au cours du basculement.



Basculements 1/3/5 :

La charge q est maximum en ces points. V_E diminue $\rightarrow (1 - k V_E)$ augmente \rightarrow l'énergie stockée dans le condensateur augmente.

Basculements 2/4/6 :

V_E augmente $\rightarrow (1 - k V_E)$ diminue mais cela n'a aucune influence sur l'énergie stockée dans le condensateur car la charge q est nulle en ces points.

Comme pour le pendule, on fournit de l'énergie au moment optimal sans en reprendre si l'action se produit avec la périodicité $T_E = T_0/2$. L'apport global doit compenser les pertes par effet Joule pour avoir amplification, d'où l'existence d'un seuil. Si la condition $T_E = T_0/2$ n'est pas respectée, les apports et les retraits d'énergie se font de manière moins efficace. Le seuil d'amplification commence par augmenter, puis l'apparition et l'entretien des oscillations devient impossible. On peut aussi observer des résonances lorsque $T_E = nT_0/2$ mais elles ne sont plus sinusoïdales. Si l'on veut retrouver les conditions optimums d'entretien (variation de C lorsque $q = Q_{max}$ et $q = 0$), il faut pouvoir ajuster le rapport cyclique des créneaux. Dans le cas contraire, l'apparition des résonances est plus délicate à interpréter.

Remarque :

Lorsqu'on accorde la fréquence excitatrice pour obtenir la résonance, on s'aperçoit que les basculements 2/4, ... se font pour une tension V_C voisine de 0. On est à l'accord lorsque V_C est exactement égal à zéro au moment du basculement. Cette constatation permet de régler finement la fréquence excitatrice au double de la fréquence propre du circuit. C'est alors que la tension de seuil V_E est minimum.

Etude quantitative du seuil :

On considère la condition $T_E = T_0/2$ réalisée. Au moment du basculement U_E passe à $\rightarrow -U_E$ donc le condensateur emmagasine une énergie :

$$E_{fournie} = \frac{1}{2} \frac{Q_{max}^2}{C} [1 + kU_E - (1 - kU_E)] = \frac{Q_{max}^2 k U_E}{C}$$

Cela se produit toutes les demi-périodes de l'oscillation. Dans le même intervalle de temps, l'énergie dissipée par effet Joule vaut :

$$E_{dissipée} = \int_0^{T_0/2} Ri^2 dt = \int_0^{T_0/2} R \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 dt = R Q_{max}^2 \omega^2 \int_0^{T_0/2} \cos^2 \omega t dt$$

Car Q est sinusoïdal, soit :

$$E_{dissipée} = \frac{\pi}{2} R \omega Q_{max}^2$$

Le bilan énergétique est donc :

$$E_{fournie} - E_{dissipée} = \left[\frac{kU_E}{C} - \frac{\pi}{2} R \omega \right] Q_{max}^2$$

L'amplification peut donc avoir lieu si :

$$\boxed{U_E \geq \frac{\pi R C \omega}{2k}}$$

Manipulation :

On se place au mieux à $T_E = T_0/2$. On ajuste l'amplitude du signal créniaux pour être à la limite des oscillations avec le potentiomètre multi tour. On mesure l'amplitude de U_E et on compare le résultat à la valeur attendue.

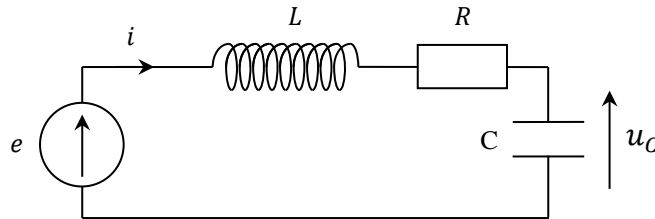
Bibliographie :

- [1] : Quaranta I, paragraphe « Oscillations Forcées, Résonance
- [2] : BUP 799, p. 2023 et suivantes
- [3] : Quaranta III
- [4] : Quaranta IV p. 395 à 402
- [5] : Pérez : Mécanique
- [6] : Landau : Mécanique
- [7] : BUP 747 p. 1267 et BUP 661
- [8] : Marguerite Vauschelles : TP d'électronique

ANNEXE : CIRCUIT RLC SERIE EN REGIME TRANSITOIRE ET FORCE

On rappelle ici les résultats principaux. Les calculs complets se trouvent dans de nombreux livres.

I EQUATION DU CIRCUIT



On a :

$$e = L \frac{di}{dt} + Ri + u_C$$

D'où, comme $i = C du_C / dt$:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e$$

Cette équation différentielle linéaire à un degré de liberté est une équation d'ordre 2 à coefficients constants. Elle peut se mettre sous la forme classique suivante :

$$\ddot{u}_C + 2\lambda \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e \quad (1)$$

Avec, pour le circuit RLC :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{R}{2L}$$

On peut aussi associer à cette équation le facteur de qualité Q défini par :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

I REGIME LIBRE

Il correspond au cas où le second membre est nul (équation homogène) :

$$\ddot{u}_C + 2\lambda \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0$$

λ correspond au facteur d'amortissement du circuit. Plus il est grand, plus l'amortissement est élevé. En l'absence d'amortissement ($\lambda = 0$), l'équation se ramène à celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 . Cette pulsation en l'absence de phénomène dissipatif correspond par définition à la pulsation propre du circuit.

La forme de l'équation conduit à rechercher des solutions exponentielles du type $u_c = A e^{rt}$ avec A une constante. On obtient alors le polynôme caractéristique suivant :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 \quad \text{son discriminant réduit}$$

Les solutions de ce polynôme dépendent de la valeur de Δ' . Celui-ci pouvant être positif, nul ou négatif, il y a trois types de solutions pour l'équation différentielle associée au polynôme.

I.1 $\Delta' > 0$: régime aperiodique

$$\Leftrightarrow \lambda > \omega_0 \quad \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow R > 2\sqrt{L/C}$$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique admet deux racines réelles négatives :

$$r_{\pm} = -\lambda \pm \sqrt{\Delta'}$$

Et la solution générale de l'équation différentielle est une somme d'exponentielle décroissante (d'où un régime aperiodique) :

$$u_c = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t}$$

I.2 $\Delta' = 0$: régime critique

$$\Leftrightarrow \lambda = \omega_0 \quad \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow R = 2\sqrt{L/C}$$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique admet une racine double négative :

$$r = -\lambda$$

Et la solution générale de l'équation différentielle est du type :

$$u_c = (A + Bt) e^{-\lambda t}$$

Le régime critique est le dernier régime aperiodique. C'est celui pour lequel le retour à l'équilibre se fait le plus rapidement.

I.3 $\Delta' < 0$: régime oscillant pseudo périodique

$$\Leftrightarrow \lambda < \omega_0 \quad \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow R < 2\sqrt{L/C}$$

Dans ce cas, le polynôme admet deux racines complexes :

$$r_{\pm} = -\lambda \pm j\sqrt{-\Delta'} = -\lambda \pm j\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{-\Delta'}$$

La solution générale de l'équation différentielle est cette fois ci une somme d'exponentielles complexes. On peut obtenir après quelques calculs la forme réelle de la solution :

$$u_c = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\lambda t} = A' e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

On a un régime oscillant avec une décroissance exponentielle des oscillations de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Elle est inférieure à la pulsation propre du système, et ce d'autant plus que l'amortissement est fort ou le facteur de qualité est faible (avec λ et Q restants dans le domaine de définition de ce type de régime).

I.4 Détermination des constantes et du courant

On obtient les constantes des différentes solutions avec les conditions initiales du système en sachant qu'il doit y avoir la continuité de la tension aux bornes du condensateur et du courant dans la bobine. Prenons par exemple le cas d'un échelon de tension passant de E à 0 en $t = 0$ avec une condition d'amortissement correspondant au régime pseudo périodique. Si on est en régime permanent avant ce basculement, le condensateur est intégralement chargé et le courant ne circule plus donc on a $u_C(0) = E$ et $i(0) = 0$ avec les relations de continuité sur u_C et i . La première condition donne :

$$u_C(0) = (A \times 1 + B \times 0)e^0 = E \quad \rightarrow \quad A = E$$

On a aussi :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C e^{-\lambda t} [-\lambda(A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \omega(-A \sin \omega t + B \cos \omega t)]$$

D'où, avec la deuxième condition :

$$i(0) = C[-\lambda A + \omega B] = 0 \quad \rightarrow \quad B = \frac{\lambda A}{\omega} = \frac{\lambda E}{\omega}$$

Et une évolution pour i donnée par :

$$i = EC e^{-\lambda t} \left[-\lambda \cos \omega t - \frac{\lambda^2}{\omega} \sin \omega t - \omega \sin \omega t + \lambda \cos \omega t \right] = -EC \left(\omega + \frac{\lambda^2}{\omega} \right) e^{-\lambda t} \sin \omega t$$

Elle est du même type que u_C (évolution sinusoïdale en ωt amortie exponentiellement en $-\lambda t$).

II REGIME FORCE

On prend en compte le second membre. Dans ce cas, la solution générale de l'équation est de la forme $u(t) = u_{transitoire}(t) + u_{permanent}(t)$. Le premier terme correspond à celle de l'équation homogène (le régime libre). Le second est une solution particulière de l'équation avec le second membre. Au bout d'un temps suffisamment long devant la constante de temps du système, la seule solution non nulle est celle qui correspond au régime permanent. On recherche cette solution dans le cas d'un régime forcé de type sinusoïdal².

II.1 Réponse en tension aux bornes du condensateur

Elle correspond à la réponse en charge puisque $u_C = q/C$. L'analogue en mécanique est la réponse en amplitude. La solution du régime permanent s'obtient en utilisant la représentation complexe. On met l'excitation e sous la forme $E e^{j\omega t}$ dans l'équation (1) et on recherche une solution du type $\underline{u}_C = \underline{U}_C e^{j\omega t}$ avec l'amplitude complexe $\underline{U}_C = |\underline{U}_C| e^{j\varphi_{u_C}}$. On obtient alors l'expression suivante :

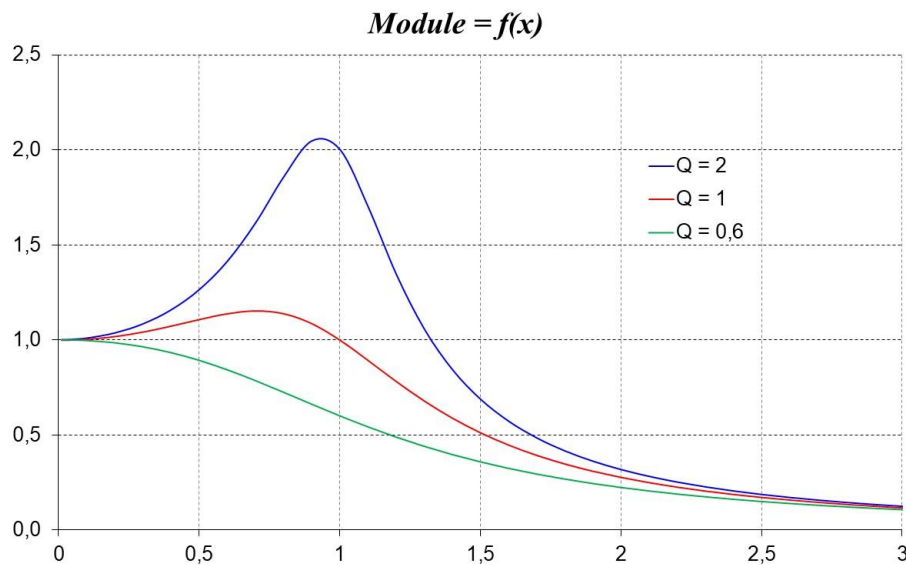
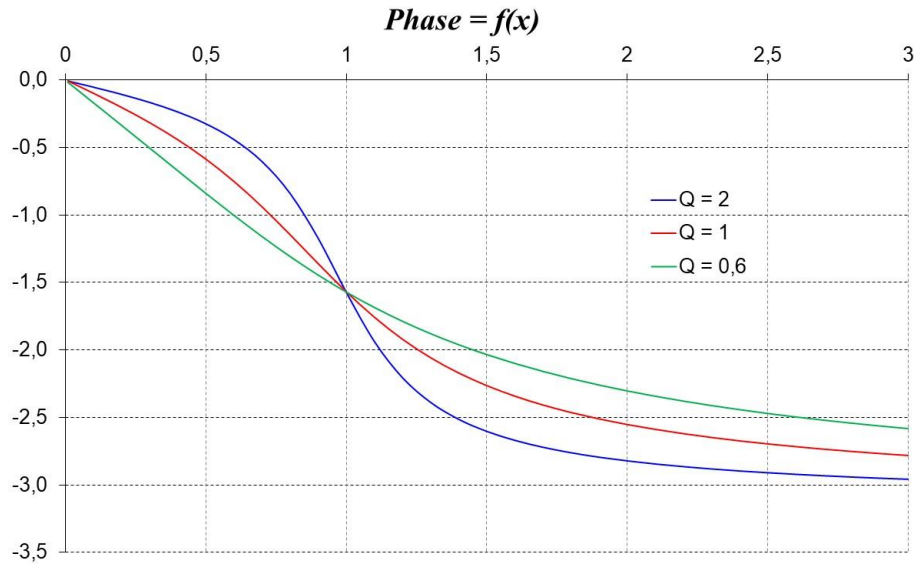
² La réponse à une excitation sinusoïdale est particulièrement importante pour les systèmes linéaires car ils obéissent au principe de superposition donc leur réponse à une excitation quelconque est la somme des réponses aux fréquences contenues dans l'excitation.

$$\underline{U}_c = \frac{E}{(1 - x^2) + j\frac{x}{Q}} \quad \text{avec la pulsation réduite} \quad \boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

D'où un module et un déphasage par rapport à l'excitation :

$$\boxed{|\underline{U}_c| = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}}$$

$$\boxed{\varphi_{u_c} = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{Q(1 - x^2)}{x}\right)}$$



La phase évolue de 0 à $-\pi$ quand la pulsation augmente. Elle passe par $-\pi/2$ lorsque $\omega = \omega_0$ et ce quel que soit Q mais le saut de phase est d'autant plus brutal que Q est élevé. Le module quant à lui passe par un maximum lorsque $Q > 1/\sqrt{2}$ et a lieu pour $x = \sqrt{1 - 1/2Q^2}$, soit à la pulsation :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

Il est intéressant de noter que les expressions de ω et de la valeur limite de Q pour obtenir un module maximum en régime forcé ne correspondent pas exactement à celles du régime transitoire pseudo périodique.

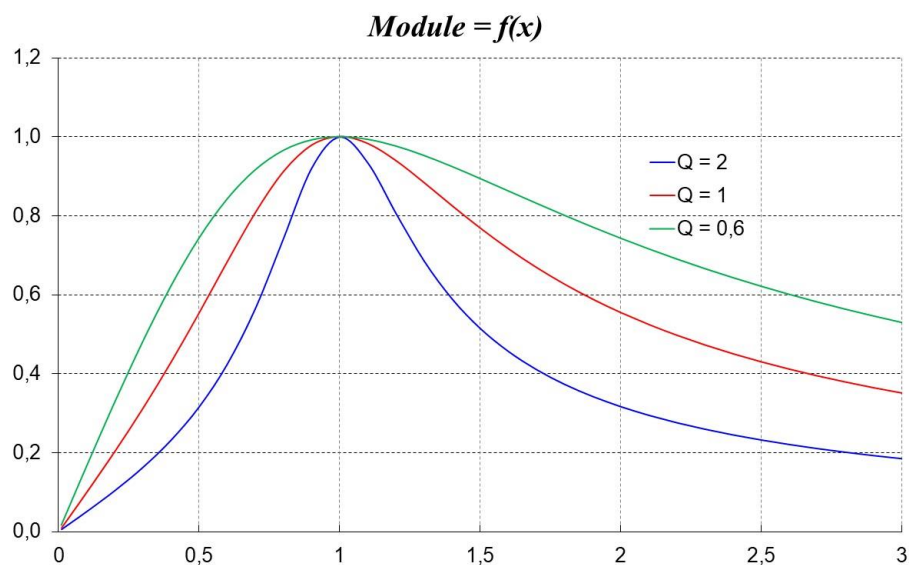
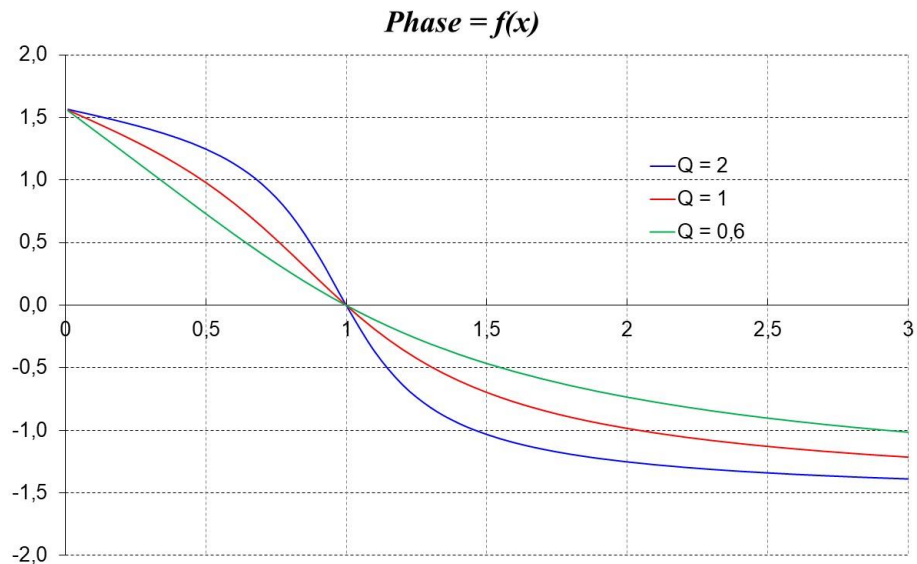
Lorsque le facteur de qualité est élevé (oscillateur faiblement amorti), on a $x \approx 1$, soit $\omega \approx \omega_0$. Le maximum vaut alors $|\underline{U}_C|_{\max} \approx EQ$, soit $\approx Q$ avec la grandeur $|\underline{U}_C|/E$ représentée sur le graphique. Les pulsations correspondant à une amplitude $|\underline{U}_C| = |\underline{U}_C|_{\max}/\sqrt{2}$ vérifient la relation approchée $\omega_0/(\omega_2 - \omega_1) \approx Q$.

II.2 Réponse en intensité

Elle s'observe aux bornes de la résistance puisque $u_R = Ri$.

L'analogie en mécanique est la réponse en vitesse. On a $\underline{i} = C\dot{\underline{u}}_C = jC\omega \underline{u}_C$, d'où $\varphi_i = \varphi_{u_C} + \pi/2$ et, après quelques calculs :

$$\underline{i} = \frac{E/R}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \rightarrow \quad \boxed{|\underline{i}| = \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

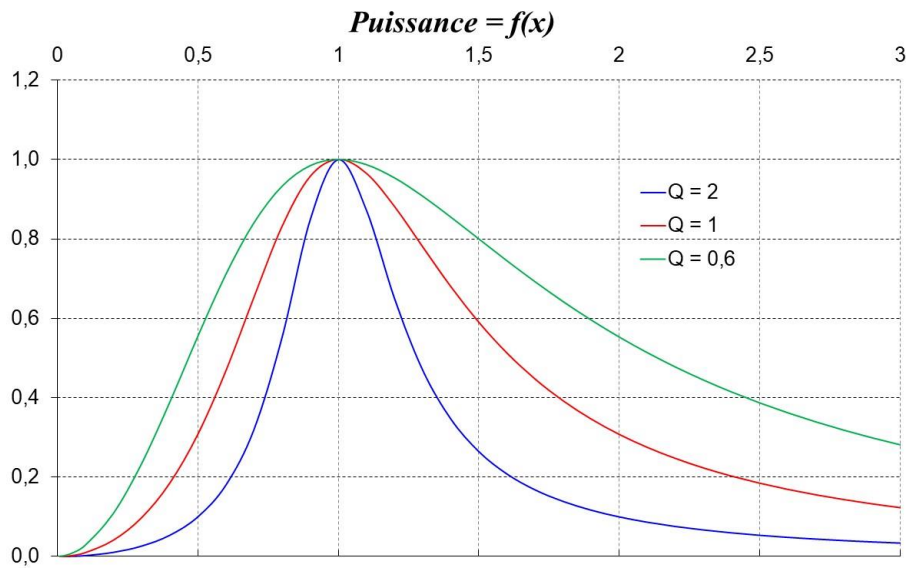


Le déphasage étant décalé de $+\pi/2$ par rapport à φ_{u_c} , le saut de phase se fait de $+\pi/2$ à $-\pi/2$ en passant par 0 lorsque $\omega = \omega_0$ et ce quel que soit Q . Le module quant à lui passe par un maximum pour $\omega = \omega_0$ et ce aussi quel que soit Q . Le maximum vaut E/R , soit 1 avec la grandeur $|I|/(E/R)$ tracée sur le graphique. Les pulsations correspondant à une amplitude $|I| = |I|_{\max}/\sqrt{2}$ vérifient la relation exacte $\omega_0/(\omega_2 - \omega_1) = Q$.

II.2.1 Puissance moyenne transférée

La puissance transférée par l'excitateur à l'oscillateur correspond au produit de l'excitation $E e^{j\omega t}$ par la réponse en intensité. La puissance moyenne vaut par conséquent :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} E |I| \cos \varphi_i = \frac{E_{\text{eff}}^2 / R}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \cos \varphi_i$$



Elle est nulle pour les pulsations extrêmes et passe par un maximum pour $\omega = \omega_0$. Le maximum vaut $\langle P \rangle_{\max} = E_{\text{eff}}^2 / R$, soit 1 avec la grandeur réduite $\langle P \rangle / (E_{\text{eff}}^2 / R)$ représentée sur le graphique.

ANNEXE : TRACE DES COURBES DE REPONSE DU CIRCUIT RLC SERIE SUR LATIS PRO

I REGLAGE DE LA WOBBULATION

On utilise un GBF Instek AFG 2112. Cet appareil à synthèse numérique de signal permet un balayage en fréquence avec un pas suffisamment fin pour qu'il puisse être négligé dans les expériences décrites ici. Le contrôle de la wobbulation s'effectue à l'aide des boutons situés dans les rangées basses de la face de commande.

Démarrage de la wobbulation :

Appuyer sur le bouton « Sweep » (balayage en anglais).

Réglage de la fréquence initiale f_{min} :

Lorsque la fonction Sweep est engagée, un logo « Start » apparait dans la fenêtre d'affichage de la fréquence → régler la fréquence voulue pour f_{start} à l'aide du pavé numérique et valider en appuyant sur le bouton d'unité souhaitée (Hz, ...).

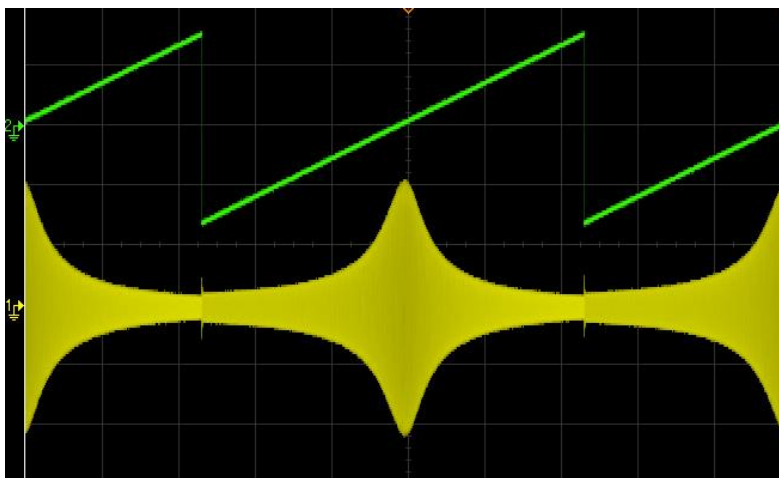
Réglage de la fréquence finale f_{max} :

Appuyer sur « Shift » puis « Sweep » pour engager la fonction « Stop » (ce logo apparait alors dans la fenêtre d'affichage de la fréquence) → régler la fréquence voulue pour f_{stop} de la même façon que précédemment. Si on veut revenir à la fréquence initiale, appuyer de nouveau sur « Shift » puis « Sweep ».

Réglage de la durée de balayage T_{rate} :

Appuyer sur « Shift » puis « FSK » pour engager la fonction « Rate » → régler la fréquence $f_{Rate} = 1/T_{rate}$ pour fixer la durée T_{rate} du balayage de fréquence de f_{start} à f_{stop} .

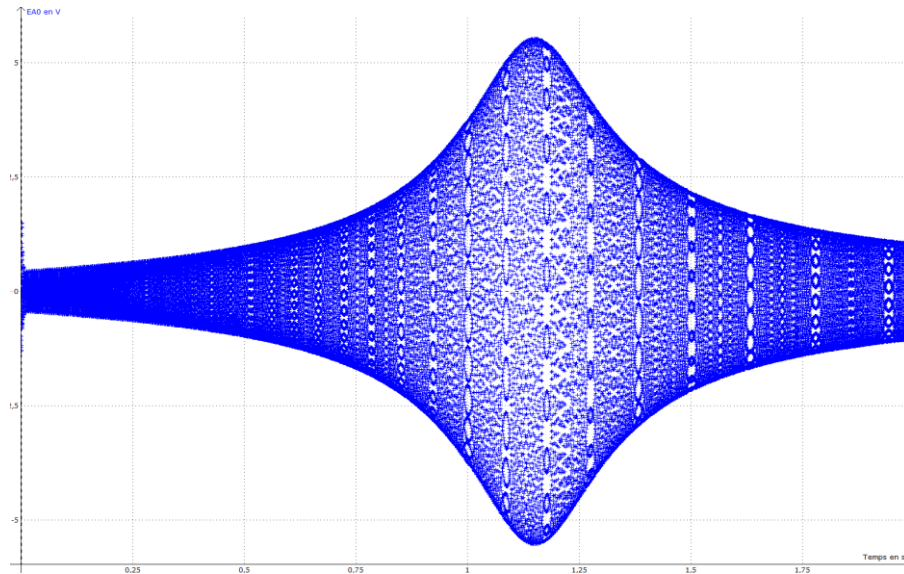
Une fois tous ces réglages effectués, le GBF délivre un signal dont la fréquence varie de f_{start} à f_{stop} en un temps T_{rate} . Ce balayage s'effectue de manière répétée et l'appareil fournit le signal de modulation de la fréquence sur la sortie « OUTPUT MOD » située sur la face arrière de l'appareil (rampe d'amplitude $\pm 4 V$) :



Courbe de réponse d'un circuit RLC à une wobbulation (jaune) et signal de modulation de la fréquence (vert)

II ACQUISITION SUR LATIS PRO

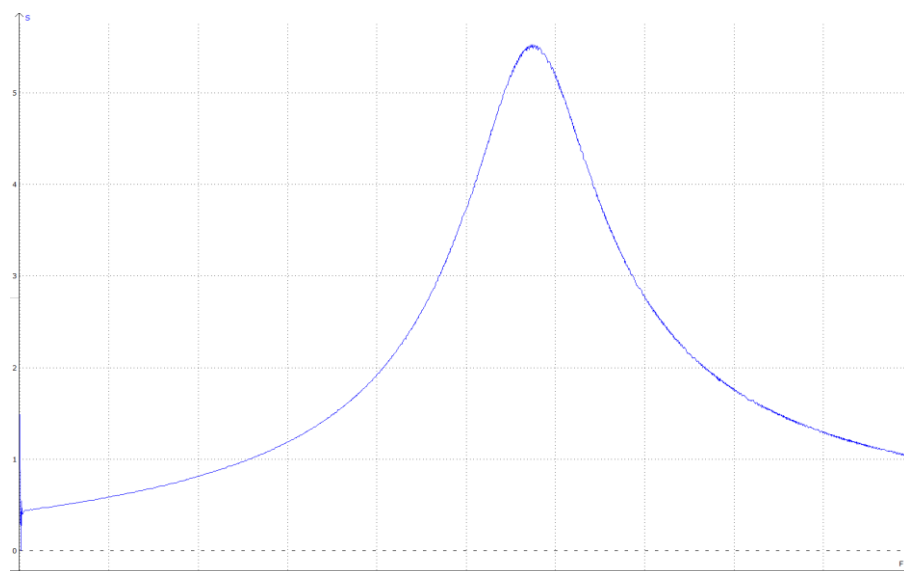
Le GBF numérique permet de fixer précisément la durée T_{rate} du balayage en fréquence et le signal de modulation présente un basculement très franc au démarrage. On peut se servir de ces atouts pour obtenir la courbe de réponse en fréquence d'un circuit. Il suffit de fixer la durée d'acquisition à T_{rate} et de la déclencher sur le front descendant du signal de modulation à un niveau proche du début de la rampe (-3 V par exemple). On obtient alors une figure de ce type :



Il faut récupérer l'enveloppe supérieure de la courbe et convertir l'abscisse des temps en fréquence pour obtenir une image de la fonction de transfert du circuit. La première opération peut s'effectuer avec la fonction « cretemaxi » disponible dans la feuille de calcul du logiciel (une option permet de fixer le niveau de détection ; une valeur de 0,2 a donné de bons résultats dans notre exemple). Comme le balayage en fréquence est linéaire dans le mode par défaut, on peut calculer f à partir de l'instant t de l'acquisition par la relation :

$$f = f_{start} + \frac{f_{stop} - f_{start}}{T_{rate}} \times t = f_{start} + f_{rate} \times (f_{stop} - f_{start}) \times t$$

On obtient alors le résultat suivant :



Remarque importante :

Lorsque Latis pro récupère l'enveloppe avec la fonction « *cretemaxi* » il obtient une courbe avec évidemment moins de points que l'enregistrement d'origine. Il faut savoir qu'il assigne dans sa mémoire une série de temps relatifs aux points conservés pour cette courbe. La fréquence doit donc être calculée dans la feuille de calcul de Latis Pro en utilisant le temps correspondant à l'enveloppe (il faut écrire « Temps » suivi d'un point et du nom de la courbe obtenue avec cette fonction comme indiqué ci-après). Si on ne le fait pas et qu'on utilise le temps par défaut, il n'y a pas le même nombre de points pour les deux grandeurs et cela cause des bugs dans l'affichage de la courbe. Si ce genre de problème apparaît, il vaut mieux tout recommencer après avoir supprimé les lignes de calcul, les grandeurs dans la liste des courbes ainsi que la fenêtre dans laquelle a été représenté le graphique.

III CHOIX DES PARAMETRES D'ACQUISITION

Il est dicté par les contraintes liées au circuit (fréquence propre, facteur de qualité) et à la gamme de fréquence explorée. Le balayage en fréquence doit être suffisamment lent pour pouvoir considérer que le circuit est toujours en régime \approx permanent et il faut assez de points par période pour décrire correctement chaque maximum d'amplitude afin que la détection d'enveloppe soit correcte. Il n'y a pas de choix unique et il faut tâtonner pour trouver un bon compromis. Les paramètres suivants donnent des résultats convenables avec le circuit RLC présenté dans ce fascicule pour un balayage allant de 500 (voir 200) à 1500 Hz :

$$N_{points} = 50\,000$$

$$T_{éch} = 40\,\mu s \quad \rightarrow \quad T_{acquisition} = T_{rate} = 2\,s$$

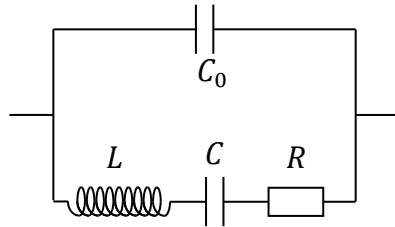
Avec ces paramètres et la dénomination des courbes dans l'exemple proposé, la récupération de l'enveloppe de la wobulation et la création de l'échelle de fréquence s'écrivent :

$$S = \text{cretemaxi}(EA0 ; 0,2)$$

$$F = 500 + \frac{1500 - 500}{2} \times \text{Temps}.S$$

ANNEXE : MODELISATION ELECTRIQUE DU QUARTZ

I SCHEMA ELECTRIQUE EQUIVALENT



On a deux branches en parallèles donc on raisonne en admittance :

$$\underline{Y}_Q(\omega) = \underline{Y}_{C_0}(\omega) + \underline{Y}_{RLC}(\omega) = jC_0\omega + \frac{1}{\underline{Z}_{RLC}} = jC_0\omega + \frac{1}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

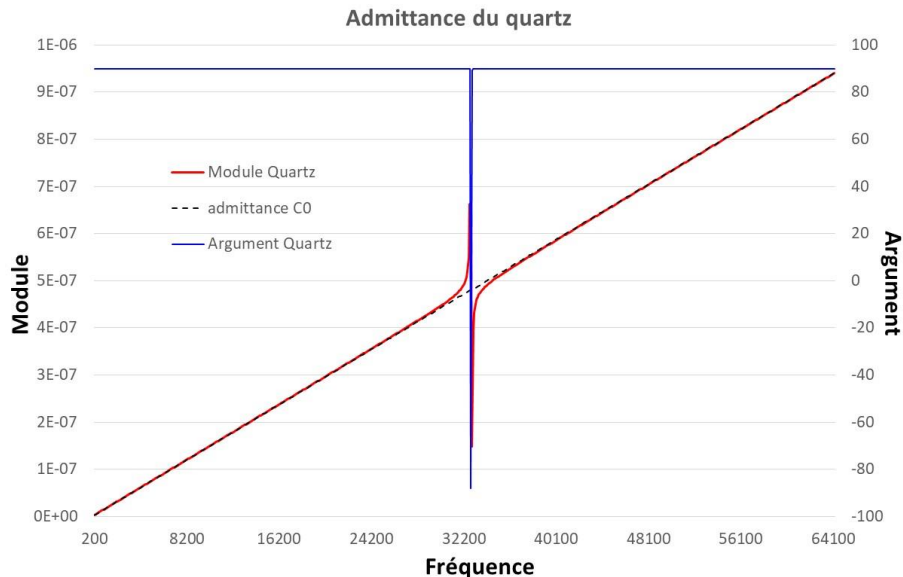
On obtient après réarrangement la forme cartésienne suivante :

$$\underline{Y}_Q(\omega) = \frac{R}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} + j \left[C_0\omega - \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \right]$$

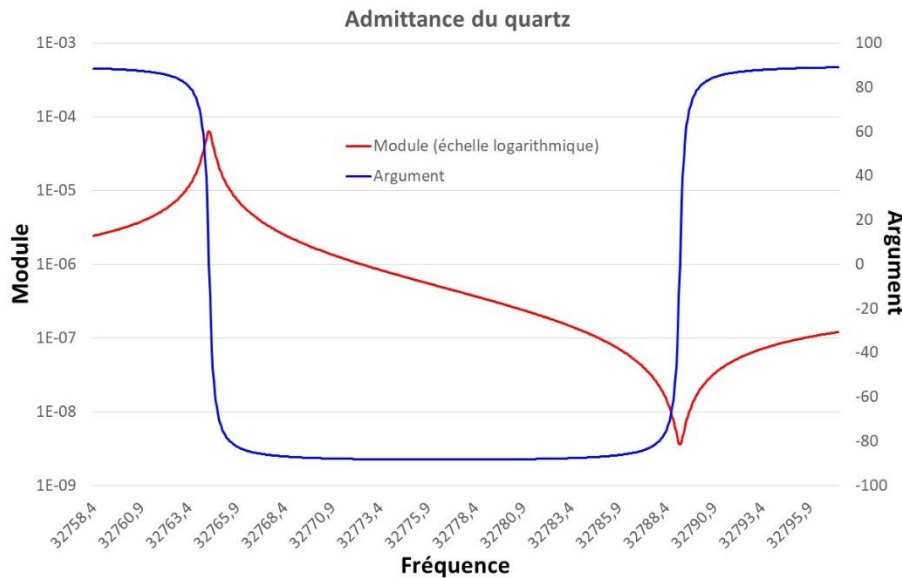
La fonction étant compliquée à étudier, on peut la simuler avec les paramètres R, L, C et C_0 déduits de l'expérience pour voir comment évolue l'admittance. On a $f_s = 32764,45 \text{ Hz}$, $Y_{max} = 6,38 \cdot 10^{-5}$, $Q = 88\,500$ et $f_{arp} = 32789,10 \text{ Hz}$, d'où, avec les expressions indiquées en fin d'annexe :

$$\begin{aligned} R &= 15\,666 \, \Omega & L &= 6\,720 \text{ Hz} \\ C &= 3,51 \cdot 10^{-15} \text{ F} & C_0 &= 2,33 \cdot 10^{-12} \text{ F} \end{aligned}$$

Il ne faut pas arrondir les valeurs obtenues (principalement celles de L et C) dans la simulation car cela modifie rapidement la fréquence des extrêmes (ne pas oublier qu'on travaille au dixième de Hz autour de 32 kHz). On balaye dans un premier temps une large gamme de fréquence :



Si on excepte la zone centrale du graphique, on constate que l'admittance se comporte comme une capacité puisque son module évolue proportionnellement à la fréquence avec un argument de $+90^\circ$. Cette tendance est logique en basse fréquence car les capacités imposent leur impédance quand $\omega \rightarrow 0$ donc $\underline{Y}_{QBF} = \underline{Y}_{C_0} + \underline{Y}_{RLC} \approx \underline{Y}_{C_0} + \underline{Y}_C \approx j(C_0 + C)\omega \approx jC_0\omega$ vu les valeurs de C_0 et C . Il en est de même en haute fréquence car $\underline{Z}_C \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow \infty$, d'où $\underline{Y}_{QHF} = \underline{Y}_{C_0} + \underline{Y}_{RLC} \approx jC_0\omega$ puisque la capacité C_0 court circuite la branche RLC . La comparaison avec le tracé du module de l'admittance de C_0 confirme que c'est bien cette capacité qui dicte principalement le comportement électrique du quartz. Le point remarquable à noter est que l'écart à cette tendance n'intervient que dans une bande très étroite de fréquence (cela est dû à l'énormité du facteur de qualité Q) :



Dans cette zone, l'admittance passe par un maximum à phase nulle (impédance minimale ; résonance), puis par un minimum à même phase (impédance maximale ; antirésonance) et l'argument bascule pratiquement à -90° entre les deux (\rightarrow comportement inductif puisque $\underline{Y}_L = -j/L\omega$). On peut trouver des expressions pour les fréquences des extrêmes en simplifiant celle de l'admittance du quartz. Si on suppose la résistance R nulle, on peut montrer que \underline{Y}_Q tend vers l'infini à la fréquence de résonance $f_s = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ de la branche RLC série et qu'elle tend vers zéro à la fréquence :

$$f_{arp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}}} \quad \text{avec} \quad C_{eq} = \frac{C_0 C}{C_0 + C}$$

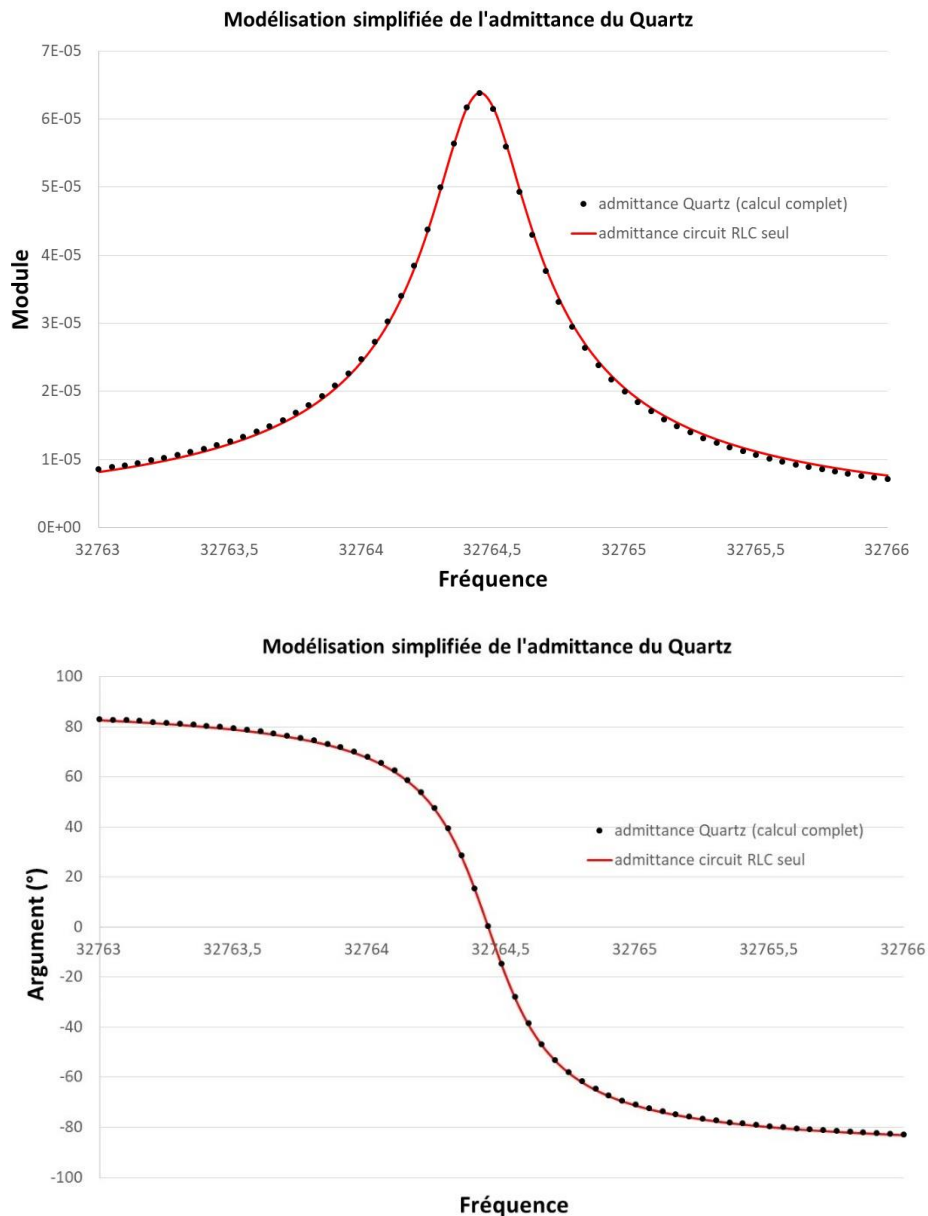
Les valeurs f_s et f_{arp} obtenues avec les paramètres R, L, C et C_0 du quartz sont très proches des fréquences trouvées avec la simulation. La fréquence du maximum de l'admittance est très légèrement différente de celle qui correspond au passage par le zéro de l'argument et aucune n'est tout à fait égale à f_s . Il y a le même type de différence avec f_{arp} mais dans chaque cas, les écarts ne sont pas accessibles avec le GBF utilisé dans l'expérience puisqu'ils sont de l'ordre du millièmes de Hertz³ (c'est encore une fois lié à l'énorme facteur de qualité du composant). On peut donc utiliser ces expressions pour le quartz sans tenir compte de ces différences.

II MODELISATION SIMPLIFIEE DE LA RESONANCE

Ecrire les expressions du module et de l'argument de \underline{Y}_Q dans un logiciel de traitement de données pour modéliser des mesures est assez pénible à faire, surtout si on s'intéresse uniquement à la résonance. Comme celle-ci a lieu à la

³ On peut confirmer ces écarts dans la simulation en augmentant R pour les rendre plus importants.

fréquence propre de la branche RLC série du circuit équivalent, on peut comparer la simulation de l'expression complète de \underline{Y}_Q à celle de l'admittance \underline{Y}_{RLC} du circuit RLC seul dans cette zone :



On constate que la modélisation par le seul circuit RLC série permet de décrire correctement le comportement du quartz si on se limite à des fréquences très proches de la résonance. On peut donc s'en servir pour calculer les paramètres du circuit :

- l'admittance à la résonance permet de calculer R puisque $Y_{RLC \max} = 1/Z_{RLC \min} = 1/R$
- le facteur de qualité et la fréquence de résonance permettent d'obtenir L et C via les relations $Q = L\omega_0/R$ et $f_s = 1/(2\pi\sqrt{LC})$.

Si on souhaite déterminer C_0 , on peut étudier le comportement du quartz en basse fréquence ($\underline{Y}_Q \approx jC_0\omega$) ou rechercher la fréquence d'antirésonance et utiliser l'expression de f_{arp} .