

SYSTEMES BOUCLES (OSCILLATEURS EXCLUS)

I INTRODUCTION

Un système bouclé est un dispositif dans lequel on renvoie à l'entrée la totalité ou une partie du signal de sortie. On peut viser deux objectifs diamétralement opposés avec une telle action :

- permettre à un montage d'atteindre une consigne donnée en s'auto corrigeant en cas de perturbation interne ou externe (action tempérante par réaction négative).
- maintenir un dispositif dans un état instable par réaction positive pour obtenir un oscillateur (sinusoïdal ou de relaxation) ou un comparateur.

On s'intéresse ici aux systèmes qu'on souhaite stabiliser (systèmes à contre réaction). Un deuxième chapitre est consacré aux systèmes oscillants.

II INFLUENCE D'UNE CONTRE RÉACTION SUR LES CARACTÉRISTIQUES D'UN AMPLIFICATEUR

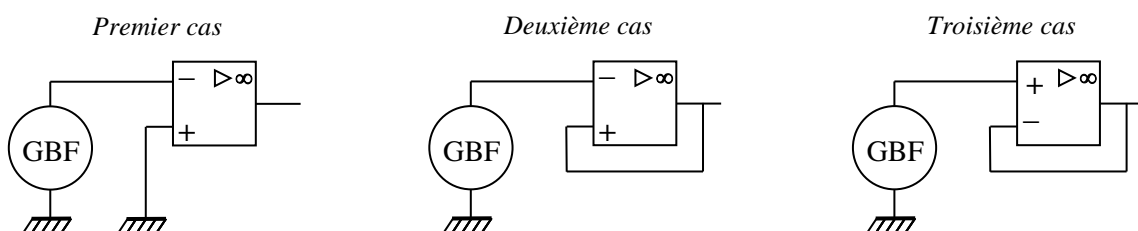
Les systèmes bouclés à réaction négative ont une grande importance pratique puisqu'ils sont à la base de tous les asservissements. La contre réaction permet entre autres la réalisation des fonctions les plus courantes demandées aux montages à amplificateurs opérationnels (amplificateur inverseur, non inverseur, suiveur, dérivateur, ...). Le bénéfice d'un tel bouclage sur un montage à amplificateur opérationnel peut facilement être mis en évidence par l'expérience suivante.

II.1 Introduction

Les amplificateurs opérationnels peuvent fonctionner dans deux régimes :

- un régime linéaire où le signal de sortie est proportionnel au signal d'entrée ε
- un régime saturé où la tension de sortie est en saturation positive ou négative.

Leur gain énorme ($A = 10^5$ typiquement) fait que le premier mode de fonctionnement est impossible sans contre réaction. On peut facilement le vérifier par l'expérience suivante :



Le premier montage (en boucle ouverte) conduit toujours à une saturation du signal de sortie quelle que soit l'amplitude du signal d'entrée. Une relation de proportionnalité entre V_E et V_S (fonctionnement linéaire) est donc impossible dans cette configuration. Le bouclage peut y remédier s'il est fait de la bonne manière. Une rétroaction sur la patte + (deuxième montage) conduit encore à une saturation en sortie. Par contre, la troisième solution (rétroaction sur la patte -) aboutit à un montage stable classique, le suiveur¹. On a donc un fonctionnement linéaire si on renvoie le signal de

¹ La valeur de ε est extrêmement faible dans ce cas compte tenu de la valeur de A , à la différence du régime saturé où ε est alors pratiquement tout le temps différent de zéro.

sortie en opposition de phase par rapport au signal d'entrée alors qu'on a un régime saturé dans le cas contraire. L'action déstabilisante de la réaction positive est simple à comprendre puisqu'elle provoque un effet d'avalanche conduisant inévitablement à la saturation. L'effet stabilisant de la réaction négative s'explique aussi facilement. Il suffit par exemple d'imaginer une perturbation dans l'amplificateur qui conduirait à une augmentation du signal de sortie et les conséquences de la rétroaction.

Remarque :

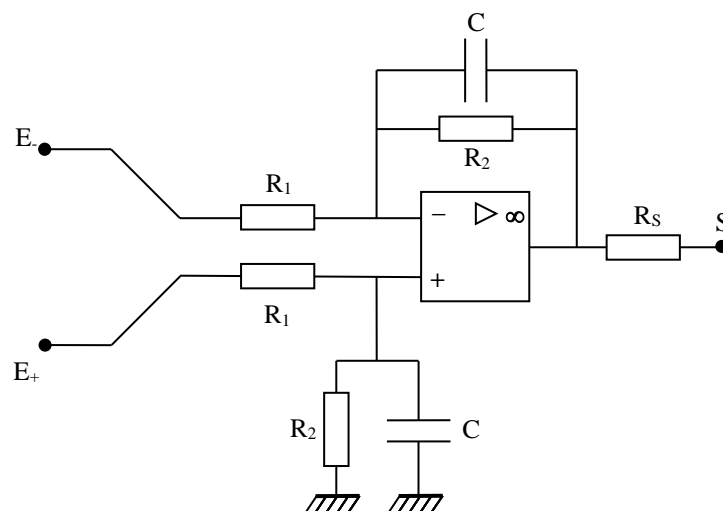
Le bouclage étudié ici est une réaction de type tension-tension mais il y a d'autres façons de boucler un système en électronique (réaction tension-tension, tension-courant², courant-tension, courant-courant). Certaines caractéristiques sont communes à tous ces bouclages mais il existe aussi des différences (cf. [10] pour plus de précisions sur ce point).

II.2 Montage d'étude ; comportement en boucle ouverte

[8], p. 2019 à 2039

On ne peut pas faire cette étude sur un véritable amplificateur opérationnel à cause de ses paramètres internes (gain énorme, fréquence de coupure très basse, composant instable). On élabore donc un montage simulant un tel composant mais avec des caractéristiques plus faciles à mesurer. L'ensemble des expériences proposées s'inspire de la référence indiquée ci-dessus mais avec une structure allégée.

II.2.1 Structure de l'amplificateur (chaîne directe)



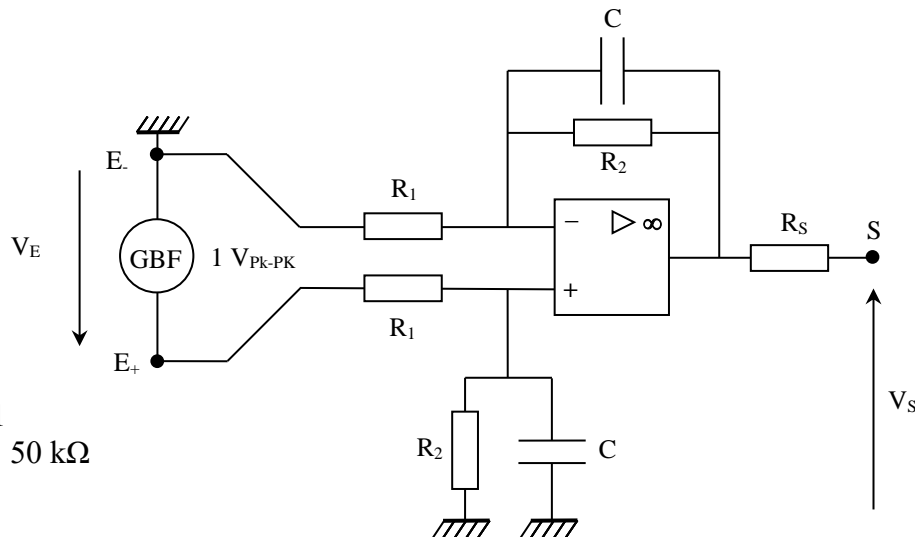
L'élément de base du montage est l'association de l'amplificateur opérationnel avec les résistances R_1 et R_2 . Elle constitue un amplificateur différentiel³ de gain $A = R_2/R_1$. Le rajout des capacités C lui confère un comportement de type passe bas⁴ de fréquence de coupure $f_c = 1/(2\pi R_2 C) \rightarrow$ Le montage proposé permet d'obtenir un amplificateur de gain statique $A_0 = R_2/R_1$ facilement mesurable et chutant assez rapidement lorsque la fréquence augmente. La résistance R_S augmente l'impédance de sortie de l'amplificateur pour faciliter l'étude de l'influence d'une charge.

² Le montage à transistor bipolaire à émetteur commun avec résistance d'émetteur est un exemple de réaction de type tension courant (cf. montage « Amplification »).

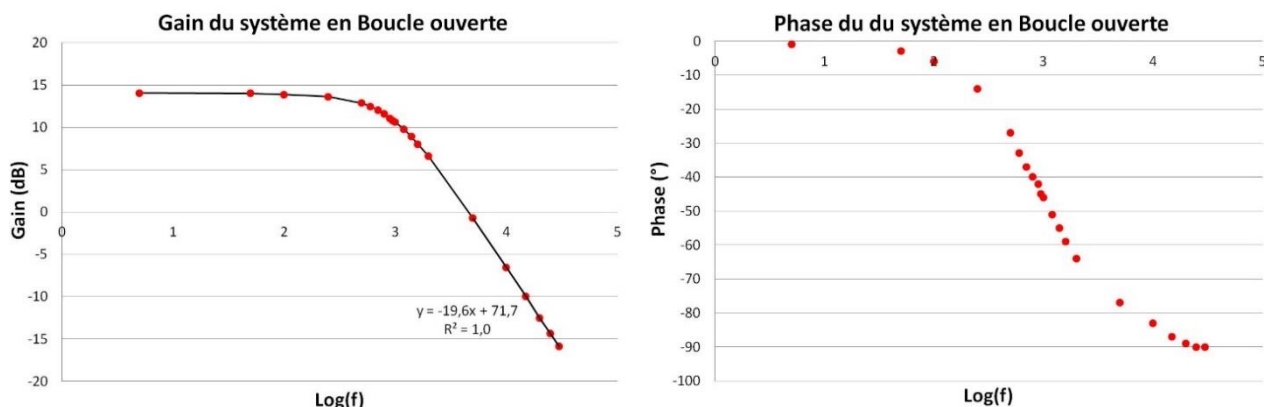
³ cf. [6], p. 90.

⁴ Le montage aurait déjà cette propriété sans les capacités à cause du produit Gain×Bande Passante de l'amplificateur opérationnel (cf. [6], p. 81 ou annexe 1), mais la fréquence de coupure serait beaucoup plus grande, donc plus difficile à mesurer avec le gain choisi dans cette manipulation, notamment lors du bouclage.

II.2.2 Diagramme de Bode



Le GBF est représenté avec sa masse vers le haut car le brochage classique des amplificateurs opérationnels fait que **la borne + de l'entrée du montage est en bas** → **s'en souvenir pour toute la suite des expériences !** On peut visualiser V_E et V_S avec un oscilloscope numérique pour mesurer leurs valeurs crête-crête ainsi que le déphasage entre les deux signaux pour différentes fréquences.



Le gain chute de -20 dB par décades en HF et le déphasage de V_S par rapport à V_E évolue entre 0 et -90° . Ces résultats sont en accord avec un passe bas d'ordre 1. On a $A_0 = R_2/R_1 = 5,01$ et $f_c = 1/(2\pi R_2 C) = 950$ Hz avec les valeurs retenues pour R_1 , R_2 et C (composants sélectionnés pour avoir des valeurs les plus proches possibles). On a mesuré un gain statique $A_0 = 5,02$ et une fréquence de coupure $f_c = 948$ Hz (recherchée à $A_0 - 3$ dB avec un multimètre) → l'accord est à moins de 1 %.

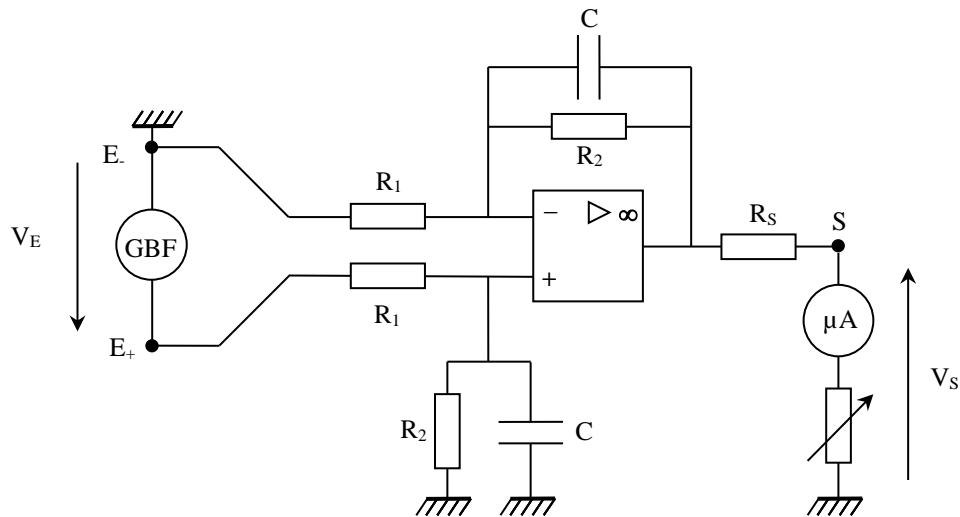
II.2.3 Limites du système en boucle ouverte

Influence d'une charge :

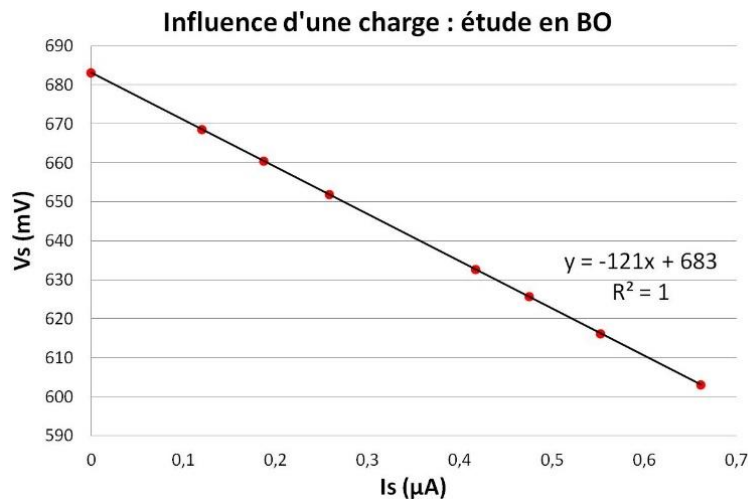
On se place dans la bande passante du système, on alimente une résistance de charge variable et on note l'influence du courant demandé par la charge sur la tension délivrée par l'amplificateur. Voici à titre indicatif le résultat d'une série de mesure effectuée à 20 Hz avec une tension d'entrée de 400 mV_{pk-pk} ⁵ pour une résistance comprise entre 5000 et 400 Ω ⁶ (tension de sortie mesurée avec un multimètre RMS).

⁵ On a diminué la tension d'entrée pour éviter des oscillations parasites lorsque la résistance de charge est trop basse.

⁶ On peut raccourcir cette étude en effectuant une mesure pour une seule valeur de la résistance de charge. On en déduit la résistance de sortie par un calcul indiqué en [6], p. 117.



La courbe $V_S = f(I_S)$ est une affine décroissante en accord avec la relation $V_S = V_{S0} - R_S I_S$ d'un générateur de résistance de sortie R_S avec un coefficient directeur de 121Ω recoupant la valeur de R_S choisie pour le montage.



Influence d'une variation d'un paramètre interne :

Bien que le résultat semble évident, on peut simuler une variation de l'amplification en modifiant la valeur des résistances R_2 pour noter l'influence sur la fonction de transfert. En remplaçant les résistances de $50 \text{ k}\Omega$ par des $60 \text{ k}\Omega$, on a mesuré un gain $A'_0 = V_S/V_E = 5,99$ à 50 Hz contre $A_0 = 5,02$ auparavant \rightarrow Une variation $\Delta R_2/R_2$ de 20% a donc engendré une variation du gain $\Delta A_0/A_0$ de $19,3 \%$, une valeur proche de 20% .

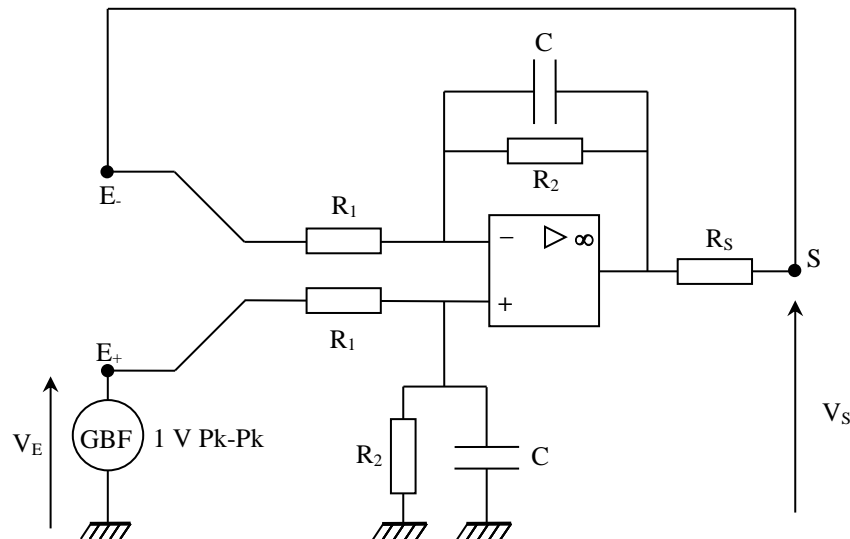
Un système en boucle ouverte est donc sensible aux perturbations internes ou externes et il est incapable de s'auto corriger. Voyons maintenant les bénéfices qu'apporte la contre réaction.

II.3 Bouclage de l'amplificateur

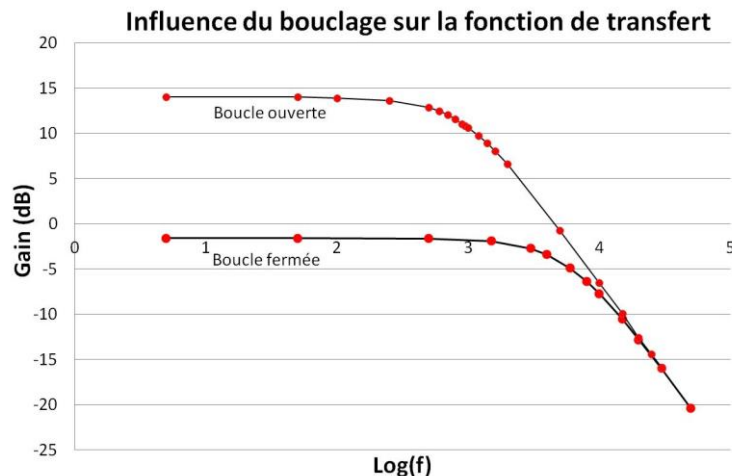
II.3.1 Bouclage par retour unitaire

Le plus simple consiste à renvoyer directement le signal de sortie sur l'entrée du système⁷. Le gain de l'amplificateur différentiel étant positif, on doit le faire sur l'entrée $-$ du montage pour avoir un système stable :

⁷ On allège là aussi le montage proposé en [8] sans dégrader ses performances car l'impédance d'entrée de l'amplificateur vaut $R_1 + R_2$ en continu et seule la partie R_2 peut être shuntée en HF par les capacités $C \rightarrow$ L'impédance d'entrée minimale du montage vaut $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, une valeur que la sortie de l'amplificateur peut facilement alimenter.



L'étude complète n'a pas été refaite. On s'est contenté de refaire le diagramme de Bode en amplitude tout en vérifiant que la phase présentait une évolution similaire au système en BO, mais avec un basculement de 0 à 90 ° plus tardif en fréquence :



Le gain H_0 du système bouclé dans la bande passante diminue et la fréquence de coupure augmente. Ces résultats sont en accord avec les calculs développés au § V.2 de l'annexe 1. Une mesure précise de H_0 et f_{BF} a donné les résultats suivants :

$$H_0 = 0,832 \quad f_{BF} = 5730 \text{ Hz (mesurée à } H_0 - 3 \text{ dB)}$$

On peut comparer ces résultats aux valeurs calculées. La chaîne directe a un gain statique $A_0 = 5,01$ et une fréquence de coupure $f_c = 950 \text{ Hz}$. Le retour étant unitaire, on obtient $H_0 = A_0 / (1 + A_0 B) = 0,834$ et $f_{BF} = f_c (1 + A_0 B) = 5710 \text{ Hz}$. Ces valeurs sont en accord avec les mesures.

Un des paramètres est divisé par $1 + A_0 B$ et l'autre est multiplié par le même facteur. Ce système bouclé présente donc la propriété suivante, typique d'une rétroaction de type tension-tension sur un amplificateur ayant une fonction de transfert d'ordre 1 : **son produit Gain×Bande Passante est une constante**. Ce résultat important s'applique aux amplificateurs opérationnels réels. Une diminution de leur gain statique s'accompagne automatiquement d'une augmentation de leur bande passante.

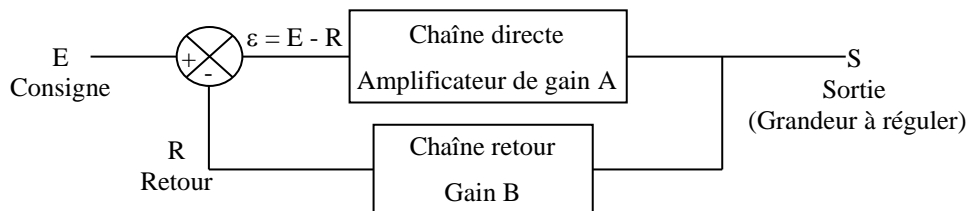
Influence d'une perturbation :

On simule de nouveau une variation d'amplification en modifiant la valeur des résistances R_2 et on observe l'influence sur la fonction de transfert H du système bouclé.

On a mesuré un gain statique $H'_0 = 0,858$ avec des résistances R_2 de 60 k Ω contre $H_0 = 0,832$ avec des 50 k Ω \rightarrow Un $\Delta R_2/R_2$ de 20 % engendre cette fois ci une variation $\Delta H_0/H_0$ de 3,1 %. **Le bouclage diminue donc la sensibilité du système à une modification d'un paramètre interne.** On montre au § I.3.1 de l'annexe 1 que **la variation relative de la fonction de transfert en BF est atténuée du facteur $F = 1 + AB$** par rapport au système en BO. On peut le vérifier sur notre exemple. On a $A_0 = 5$ au départ et on fait un retour unitaire donc on a $F = 1 + AB = 6^8 \rightarrow$ La variation $\Delta A/A = 20\%$ doit conduire à une variation $\Delta H_0/H_0 = 20/6 = 3,33\%$, une valeur proche du résultat obtenu. On voit ainsi **l'importance du coefficient F : il conditionne le taux d'atténuation de la perturbation**, d'où le nom de **facteur de régulation** donné à ce terme. On peut aussi montrer son rôle sur l'influence d'une résistance de charge mais on réserve cette étude au montage suivant.

II.3.2 Réglage de l'asservissement

Le bouclage précédent apporte des bénéfices mais fait perdre la relation d'origine entre le signal de sortie et le signal d'entrée, à savoir un gain statique de 5. On peut cependant conserver cette relation de proportionnalité en ajustant le taux de réaction.



On montre en annexe 1 que la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du système bouclé vaut :

$$H = \frac{S}{E} = \frac{A}{1 + AB} = \frac{A}{F} \quad \rightarrow \quad \text{Un gain statique de 5 en boucle fermée impose } H_0 = 5$$

On a $H = \frac{A}{F} \rightarrow$ Le choix de F impose le gain statique de la chaîne directe : $A_0 = H_0 \cdot F = \frac{S}{\varepsilon}$

On a $F = 1 + AB \rightarrow$ Le choix de F impose aussi le gain de la chaîne retour : $B = \frac{F - 1}{A_0} = \frac{R}{S}$

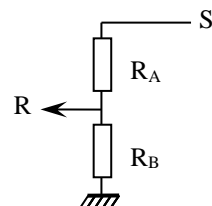
\rightarrow Le choix des paramètres H et F déterminent des valeurs pour A et B.

Paramètres pour $F = 2$:

Il faut avoir $A_0 = H_0 F = 5 \times 2 = 10 \rightarrow$ On peut par exemple remplacer les résistances R_2 de 50 k Ω par des 100 k Ω pour obtenir ce résultat.

Il faut avoir $B = (F - 1)/A_0 = (2 - 1)/10 = 0,1 \rightarrow$ On peut remplacer le retour unitaire par un pont diviseur potentiométrique :

On a alors : $B = \frac{R}{S} = \frac{R_B}{R_B + R_A} \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{B}{1 - B} R_A = 0,111 R_A$



⁸ Il faut noter que F varie au cours de cette expérience puisqu'on modifie la valeur de $A \rightarrow$ le raisonnement est valable en toute rigueur si les variations de A sont suffisamment faibles.

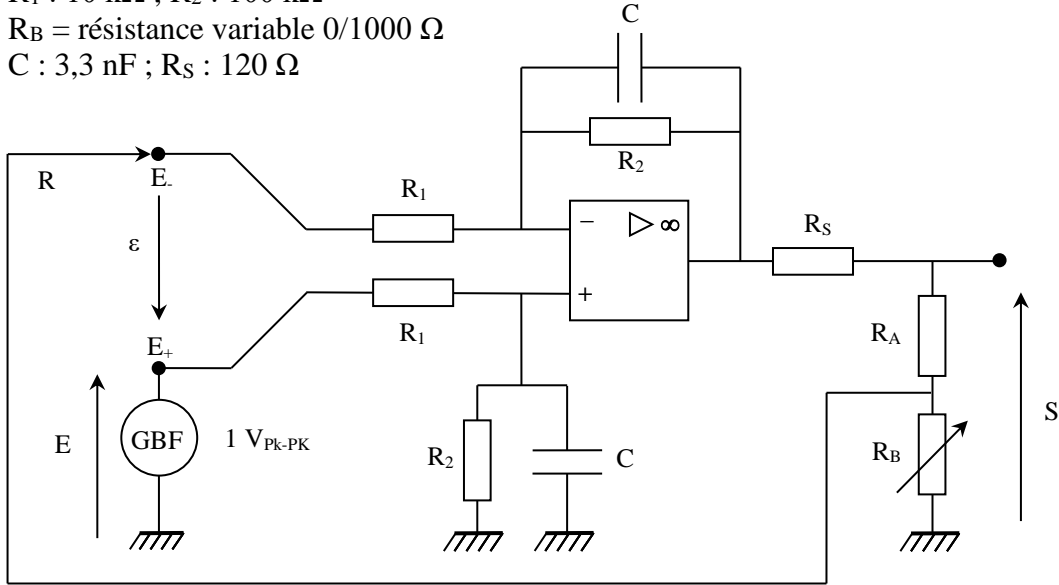
Si on part comme précédemment de $E = 1 V_{Pk-Pk}$, on doit alors avoir $S = H_0 E = 5 \times 1 = 5 V_{Pk-Pk}$, $R = BS = 0,1 \times 5 = 0,1 V_{Pk-Pk}$ et $\varepsilon = E - R = 0,5 V_{Pk-Pk}$.

Montage :

$R_1 : 10 \text{ k}\Omega$; $R_2 : 100 \text{ k}\Omega$

$R_B = \text{résistance variable } 0/1000 \text{ }\Omega$

$C : 3,3 \text{ nF}$; $R_S : 120 \text{ }\Omega$



Si la condition sur la chaîne de retour impose seulement un rapport à respecter pour R_A et R_B , l'allègement de la boucle proposée en [8], p 2024 oblige quand même à certaines précautions. Il faut que le branchement du retour R sur l'entrée E ne modifie pas le potentiel imposé par le pont diviseur, et il faut dans ce cas que la résistance $R_A + R_B$ soit assez forte pour que la sortie de l'amplificateur puisse se comporter de manière idéale (chute de potentiel négligeable sur R_S). Il n'y a pas de solution parfaite au problème mais une valeur $R_A = 5000 \text{ }\Omega$ est un bon compromis.

Réglage pratique du système :

On mesure la tension V_E en basse fréquence. On regarde ensuite V_S et on ajuste R_B pour avoir $V_S = 5V_E$. On a alors un système bouclé avec un gain de 5 dans sa bande passante et réglé à $F = 2$. Voici le résultat d'un réglage obtenu sur notre montage :

$$A_0 = R_2/R_1 = 10,0 \text{ avec les valeurs mesurées pour } R_1 \text{ et } R_2$$

$$R_A = 5020 \text{ }\Omega$$

$$R_B = 522 \text{ }\Omega \text{ pour avoir } H_0 = 5 \left. \vphantom{\begin{matrix} R_A \\ R_B \end{matrix}} \right\} \rightarrow B = R_B/(R_B + R_A) = 0,094 \text{ (à comparer à } 0,1)$$

$\rightarrow F_{exp} = 1,94 \approx 2$. On a mesuré les valeurs de R et ε pour une tension d'entrée de $1 V_{Pk-Pk}$. On a obtenu $R = 0,48 V_{Pk-Pk}$ (pour $0,5 \text{ V}$ attendu) et $\varepsilon = 0,49 V_{Pk-Pk}$ (pour $0,5 \text{ V}$ attendu)⁹. Les écarts sont assez faibles et attribuables à la simplification extrême de la boucle de retour. On obtient de meilleurs résultats en plaçant le pont diviseur entre deux montages suivieurs mais la réalisation pratique de l'ensemble est alourdie pour une amélioration assez minime¹⁰.

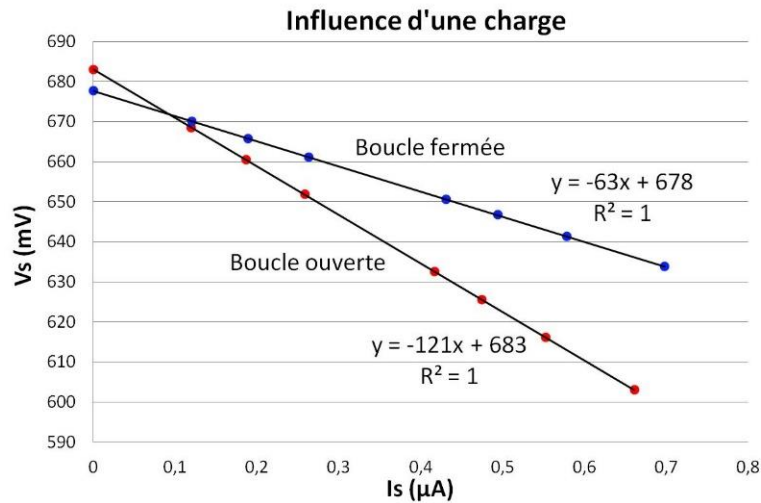
II.3.3 Influence d'une résistance de charge

On refait les mêmes mesures qu'au

§ II.2.3 avec une tension d'entrée de 400 mV_{Pk-Pk} :

⁹ Attention, on ne peut pas mesurer ε avec un oscilloscope car l'entrée du montage est différentielle ! \rightarrow Il faut utiliser un multimètre (attention à la conversion si on raisonne en V_{Pk-Pk}).

¹⁰ La manipulation a été testée et la nouvelle valeur de R_B a permis d'obtenir la valeur de $0,1$ attendue pour B .



Le système bouclé est moins affecté par la charge. La régression linéaire sur les mesures donne une résistance de sortie deux fois plus faible qu'auparavant, un résultat conforme avec le calcul développé en [10] pour une réaction de type tension-tension¹¹ :

$$R'_S = \frac{R_S}{1 + A_0 \cdot B} = \frac{R_S}{F} \rightarrow \text{L'influence d'une charge est d'autant plus faible que } F \text{ est grand}$$

II.3.4 Influence du facteur de régulation. Qualité de l'asservissement

La

contre réaction limite l'influence de certaines perturbations¹². On le comprend facilement en raisonnant sur le schéma de principe du § II.3.2 : supposons par exemple qu'une charge demande du courant au système. On a vu qu'il en résultait une chute de la tension de sortie $S \rightarrow$ le signal de retour R diminue \rightarrow le signal d'erreur $\varepsilon = E - R$ augmente, entraînant ainsi un accroissement de S qui s'oppose à l'influence de la charge. Un raisonnement similaire sur une évolution contraire aboutit au même résultat \rightarrow Le bouclage apporte à chaque fois une stabilisation \rightarrow **la contre réaction permet au système de s'auto corriger**. Le paramètre important est alors le facteur de régulation $F = 1 + A_0 B$ car les perturbations sont d'autant plus atténuées que F est grand \rightarrow **un facteur de régulation élevé est le gage d'un système précis**. Comme $F = 1 + A_0 B$, cela revient à avoir $A_0 B \gg 0$. Dans ce cas, on peut simplifier l'expression de la FTBF :

$$A_0 B \gg 0 \rightarrow H = \left(\frac{S}{E} \right)_{BF} = \frac{A_0}{1 + A_0 \cdot B} \approx \frac{A_0}{A_0 \cdot B} = \frac{1}{B} \rightarrow S \approx \frac{1}{B} \cdot E$$

La fonction de transfert H du système bouclé est imposée par B ¹³ lorsque $A_0 B \gg 0$ \rightarrow Si on souhaite une valeur donnée pour H , on ne peut pas jouer sur B pour vérifier la condition $A_0 B \gg 0$ \rightarrow **La solution pour garantir un bon asservissement est d'avoir un gain statique A_0 élevé**. Cela se vérifie sur notre exemple : la chaîne de retour est réglée à 0,1 pour avoir $V_S = H V_E = 5 V_E$ avec $F = 2$ \rightarrow la valeur $1/B = 10$ est assez différente de 5, mais le facteur de régulation est assez faible. Imaginons qu'on prenne $F = 10$ pour améliorer les performances. On a alors $A_0 = H F = 50$ et $B = (F - 1)/A_0 = 0,18 = 1/5,55$ \rightarrow L'augmentation de F fait bien tendre $1/B$ vers la relation de proportionnalité souhaitée entre S et E , et elle impose une valeur beaucoup plus forte pour A . On peut finir en notant la conséquence qu'à une augmentation de F sur ε :

¹¹ A noter que l'impédance d'entrée du montage est alors augmentée du même facteur $F = 1 + AB$.

¹² Toutes les perturbations ne sont pas concernées \rightarrow cf. § I.3 annexe 1.

¹³ C'est pourquoi on obtient un montage suiveur avec un amplificateur opérationnel si le retour est unitaire.

$$\varepsilon = E - R = E - B.S = E - \frac{A_0.B}{1 + A_0.B} E = \frac{1}{1 + A_0.B} E \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } A_0.B \gg 0$$

→ Une valeur faible de ε est le signe d'un asservissement précis.

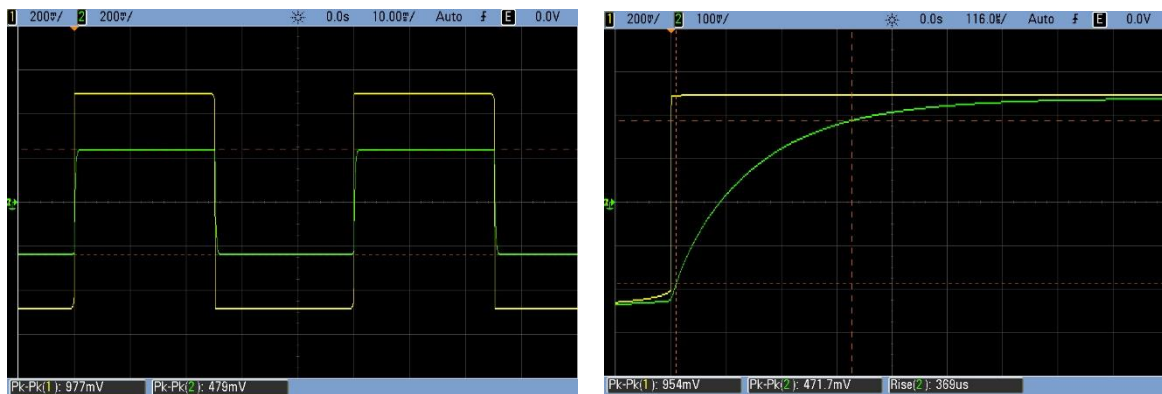
Les montages à amplificateurs opérationnel en contre réaction sont l'exemple typique de tels systèmes. La valeur énorme du gain en boucle ouverte de l'amplificateur opérationnel ($A_0 \approx 10^5$) peut paraître étonnant au premier abord, mais l'intérêt est qu'il y a alors peu chance qu' $A_0.B$ soit faible lors d'un bouclage¹⁴ ! → La condition d'asservissement est toujours vérifiée avec un amplificateur opérationnel en contre réaction. Cela justifie l'hypothèse classique $\varepsilon \approx 0$ V faite dans ces montages et explique pourquoi on ne voit pas apparaître les caractéristiques propres du composant (gain, impédances d'entrées et de sortie).

II.4 Etude dynamique

Elle permet de voir comment réagit le système à un changement de consigne. Elle permet aussi d'identifier le type d'asservissement¹⁵.

II.4.1 Réponse à un échelon

On applique un signal carré basse fréquence (20 Hz par exemple) au système bouclé réglé à $F = 2$. On ne compare plus S et E , mais on compare plutôt E à R . Cela revient au même puisque $R = BS$ avec $B = R_B/(R_B + R_A) \rightarrow R$ et S sont identiques à une constante près. De plus, observer R à la place de S permet d'apprécier directement le signal d'erreur ε à l'oscilloscope si E et R sont sur le même calibre, d'où l'intérêt de la méthode. Voici à titre indicatif des résultats obtenus sur notre montage (la courbe jaune correspond au signal d'entrée, la verte au signal de retour, et il en est de même pour les acquisitions suivantes) :



On constate sur l'oscillogramme de gauche que **l'erreur statique ε_s en régime permanent est constante et non nulle**. Ce comportement est typique d'un asservissement de type 0 pour lequel on a (cf. § II.1.1, annexe 1) :

$$\varepsilon_s = \frac{E}{1 + A_0.B} = \frac{E}{F}$$

Cette relation est vérifiée ici puisque le signal de retour est ≈ 2 fois plus faible que le signal d'entrée avec un bouclage réglé à $F = 2$. Le signal d'erreur est assez fort, signe d'un asservissement peu précis. L'oscillogramme de droite montre la réponse typique en forme d'exponentielle croissante des systèmes d'ordre 1 (attention aux différences de calibres entre les 2 figures). La mesure du temps de

¹⁴ Pour que ce ne soit pas vérifié, il faudrait un taux de réaction B extrêmement faible → le bouclage serait quasi inexistant et n'aurait donc pas d'intérêt.

¹⁵ cf. § I.4 et II.1 de l'annexe 1 pour plus de précision sur ce point.

montée¹⁶ du signal permet d'en déduire la constante de temps du circuit en boucle fermée. On a $T_M = 369 \mu s = \tau \ln 9$ pour un circuit d'ordre 1 ; soit $\tau_{BF} = 168 \mu s$. On peut faire le lien avec le comportement dynamique du système en boucle ouverte. On montre au § V.2 de l'annexe 1 qu'un système du premier ordre une fois bouclé conserve son ordre mais avec une constante de temps :

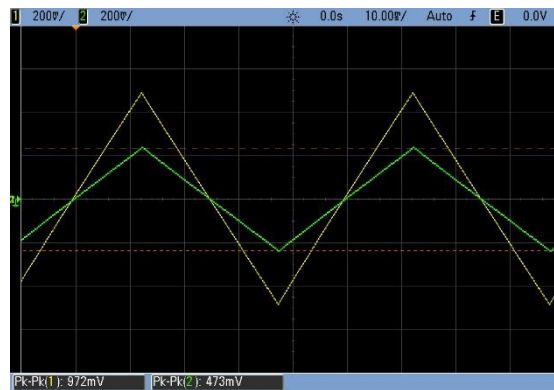
$$\tau_{BF} = \frac{\tau_0}{1 + A_0 B} = \frac{\tau_0}{F}$$

La chaîne directe étant réalisée avec $C = 3,35 \text{ nF}$ et $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, on a : $\tau_0 = R_2 C = 335 \mu s$

Le système bouclé est réglé à $F = 2$. On doit donc avoir $\tau_{BF} = \tau_0/2 = 167,5 \mu s$. Ce résultat est conforme à la mesure en régime transitoire. **Le système bouclé ($H_0 = 5$) est plus rapide que la chaîne directe ($A_0 = 10$),** ce qui est logique puisqu'un gain plus faible augmente la bande-passante.

II.4.2 Réponse à une rampe

Cette réponse permet aussi d'identifier le type d'asservissement¹⁷. On l'obtient en utilisant un signal triangulaire :



Le signal de retour à la même forme que le signal d'entrée, mais avec une amplitude plus faible (résultat logique puisque $R = AB.E/(1 + AB) = E/2$ ici). Les deux signaux ayant des pentes différentes, on conçoit qu'une consigne en forme de rampe aboutira à un signal d'erreur augmentant continuellement → **l'erreur pour une consigne en forme de rampe, appelée erreur de trainage, tend vers l'infini. Ce comportement est typique d'un asservissement de type 0.**

II.5 Amélioration des performances ; principe des correcteurs

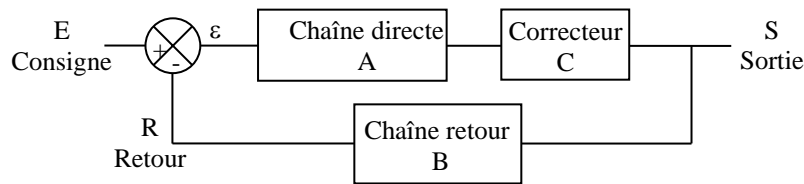
On a vu que la contre réaction permet l'auto correction, et que le processus est d'autant plus efficace que le signal d'erreur est faible → l'idéal est d'annuler ε pour obtenir un système précis, en y arrivant le plus rapidement possible pour avoir un système réactif, et sans créer d'instabilités de préférence. Ces exigences étant souvent incompatibles, on utilise des correcteurs pour aboutir au meilleur compromis possible. Pour ce faire, on insère un bloc de fonction de transfert C dans la chaîne directe dont le rôle est de construire un signal de commande pouvant être :

- proportionnel au signal d'erreur ε : correction proportionnelle (type P)
- proportionnel à l'intégrale du signal d'erreur ε : correction intégrale (type I)
- proportionnel à la dérivée du signal d'erreur ε : correction dérivée (type D)
- une combinaison des 3 effets précédents : correction PI, PD ou PID

¹⁶ Temps mis pour passer de 10 à 90 % de la valeur finale.

¹⁷ § II.1.2 de l'annexe 1

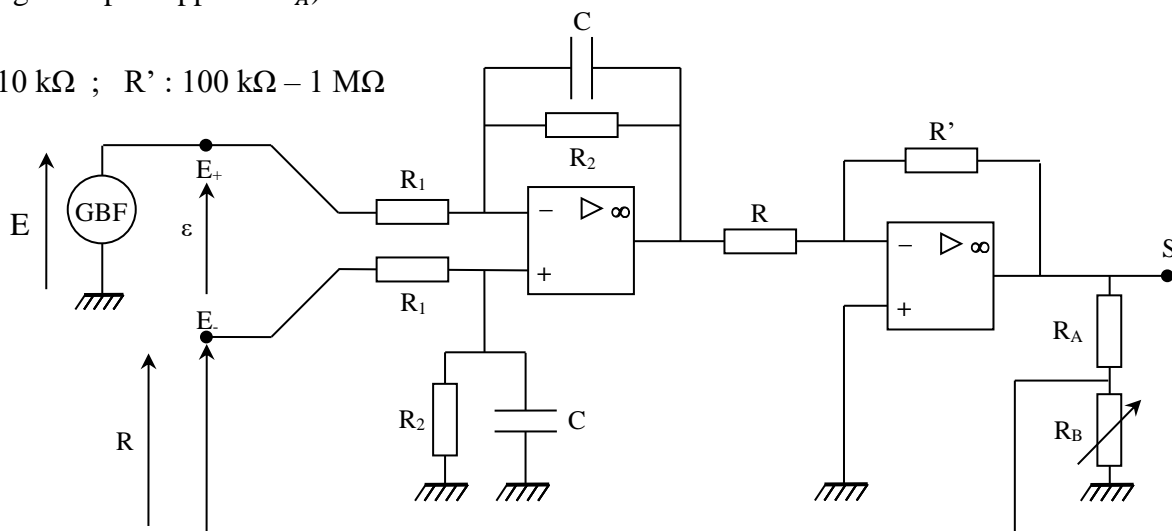
Ce bloc est généralement placé à la suite du comparateur. Ce n'est pas possible ici car la chaîne directe sert aussi de comparateur (amplificateur différentiel) donc on insère le correcteur après l'amplificateur¹⁸ :



II.5.1 Correction proportionnelle P

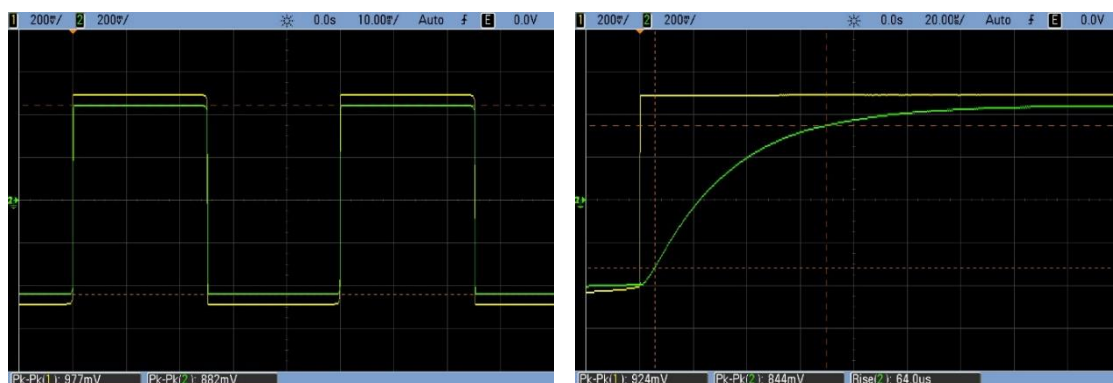
Cette action consiste à multiplier le signal d'erreur ε par une constante. On choisit l'amplificateur inverseur car il est simple à réaliser et on peut facilement modifier sa structure pour transformer la correction P en une action I ou PI. Par contre, sa fonction de transfert $C_P = -R'/R$ **oblige à inverser le sens du retour pour conserver un système en contre réaction**¹⁹. On aboutit alors au montage suivant à réaliser à partir du système bouclé réglé à $F = 2$ (la résistance R_S a été enlevée pour alléger la structure puisqu'elle est de toute façon négligeable par rapport à R_A) :

$R : 10 \text{ k}\Omega$; $R' : 100 \text{ k}\Omega - 1 \text{ M}\Omega$



Action d'une correction $P = 10$ ($R' = 100 \text{ k}\Omega$) :

L'action proportionnelle diminue bien l'erreur statique puisqu'on a maintenant $\varepsilon = 977 - 882 = 95 \text{ mV}$:



¹⁸ Cela ne change rien car on a $AC\varepsilon$ en sortie de chaîne directe, que C soit placé avant ou après A .

¹⁹ Si on ne permute pas les entrées + et - du montage, l'inversion apportée par le correcteur renverrait le signal de retour en phase sur l'entrée, conduisant ainsi le système bouclé à la saturation.

C'est logique puisque la correction revient à multiplier la FTBO A_0B du système par un coefficient C_P constant. On doit donc avoir, par analogie avec la formule du § II.4.1 :

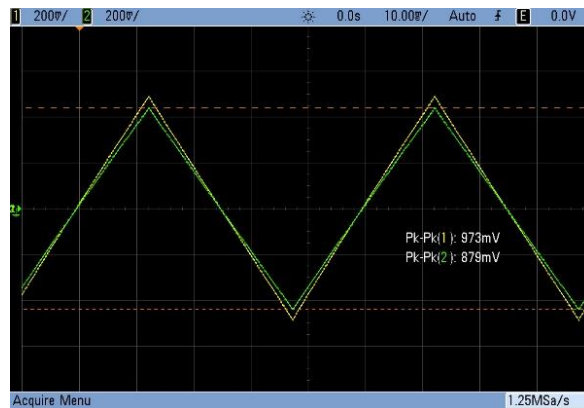
$$\varepsilon_{SP} = \frac{E}{1 + A_0BC_P}$$

On a ici $A_0 = 10$, $B = 0,1$ et $C_P = 10$ avec un signal d'entrée $E = 1 V_{pk-pk} \rightarrow$ On s'attend à $\varepsilon_{SP} = 1/(1 + 10 \times 0,1 \times 10) = 1/11 = 91 mV$. Ce résultat est proche de la valeur expérimentale.

La précision est améliorée et la réactivité l'est aussi puisque le régime permanent est atteint beaucoup plus rapidement ($T_M = 64 \mu s$ contre $369 \mu s$ auparavant). Cette vélocité accrue est logique puisque l'action proportionnelle « amplifie » $\varepsilon \rightarrow$ on simule une erreur plus importante qu'elle n'est en réalité, donc la chaîne directe répond de manière beaucoup plus forte qu'elle ne l'aurait fait sans la correction. Le dénominateur de τ dans l'expression du § II.4.1 étant le même que celui de ε_S , les deux grandeurs subissent la même évolution :

$$\tau_{BFP} = \frac{\tau_{BO}}{1 + A_0BC_P}$$

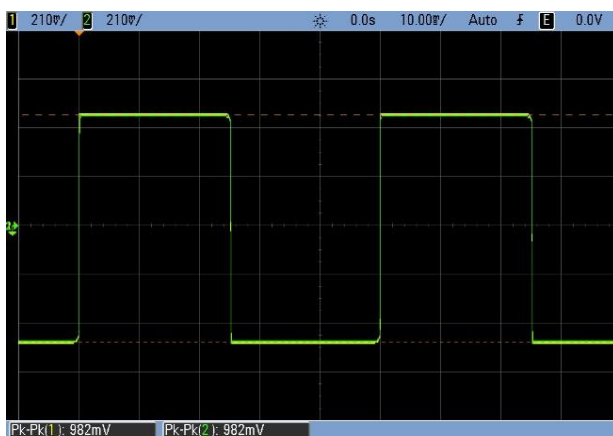
On doit donc avoir $\tau_{BFP} = 335/(1 + 10 \times 0,1 \times 10) = 335/11 = 30,5 \mu s$. L'expérience donne $T_M = 64 \mu s = \tau_{BFP} \ln 9$, soit $\tau_{BFP} = 29,1 \mu s$. Ce résultat est assez proche de la valeur attendue. On peut observer l'effet sur l'erreur de trainage en passant en signal triangulaire. On constate là aussi une diminution de l'erreur de trainage (pentes plus proches) :



La correction proposée améliore nettement la précision et la rapidité mais n'est pas parfaite (ε_S n'est pas totalement nulle). Il est donc tentant d'augmenter encore plus la correction.

Action d'une correction $P = 100$ ($R' = 1 M\Omega$) :

L'erreur statique devient très faible. Les basculements sont plus rapides mais deviennent instables, avec un dépassement assez important :



On a gagné en précision et en rapidité au détriment de la stabilité, ce qui n'est pas souhaitable. Il faut donc envisager une autre méthode pour annuler complètement ε .

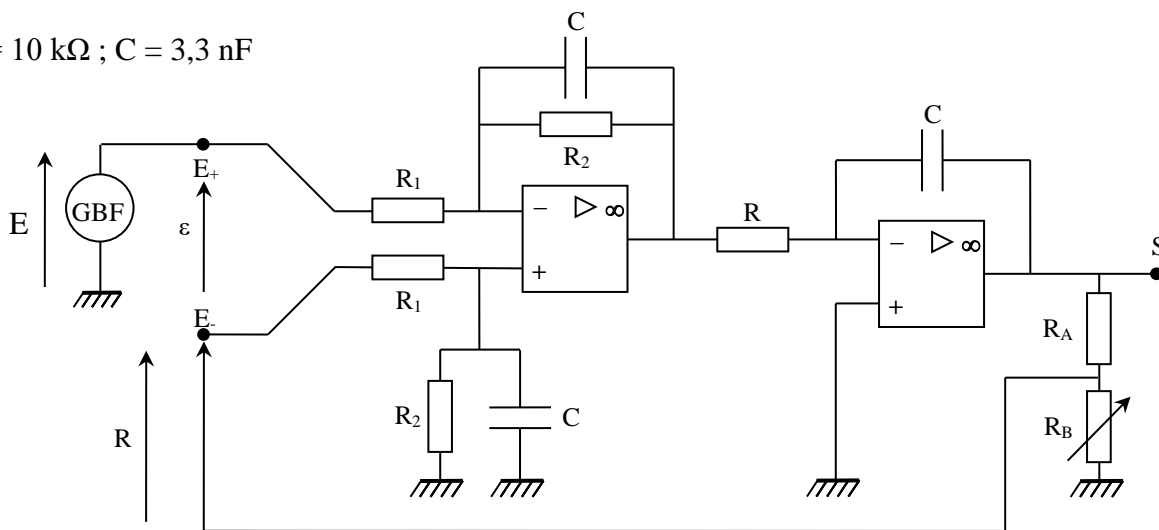
Remarque :

Ces oscillations sont incompatibles avec la modélisation envisagée jusque-là car un système d'ordre 1 bouclé et corrigé par une fonction de transfert réelle conserve son ordre (cf. § V.2 et V.4 de l'annexe 1) donc il ne peut pas osciller. Il faut revoir le modèle pour expliquer ce phénomène. Le problème vient du correcteur P. Son gain élevé ne permet plus de négliger le caractère passe bas naturel de l'amplificateur opérationnel utilisé dans sa conception (cf. § V.3.3 de l'annexe 1). Si on tient compte du caractère complexe de la fonction de transfert du correcteur, le système global devient d'ordre 2. Il peut alors être le siège d'oscillations (cf. § II.6).

II.5.2 Correction intégrale I

Son but est d'annuler l'erreur statique. Pour la réaliser sur notre montage, il suffit de remplacer la résistance R' par un condensateur C :

$R = 10 \text{ k}\Omega$; $C = 3,3 \text{ nF}$

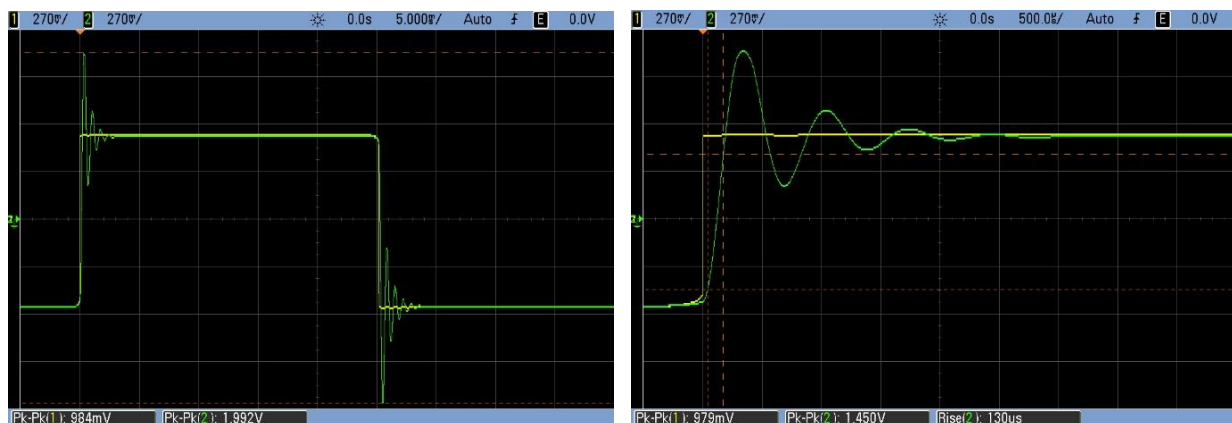


Le montage correcteur devient un intégrateur à amplificateur opérationnel²⁰. Sa fonction de transfert est, si on omet son inversion :

$$C_I = \frac{1}{jRC\omega} = \frac{1}{j2\pi RCf} = -\frac{j \cdot f_I}{f}$$

Observation :

Les figures suivantes résument l'avantage et l'inconvénient de la correction intégrale : elle annule l'erreur statique mais peut conduire à des instabilités :



²⁰ Cf. [6], p. 90.

L'annulation de ε_S est fondamentalement liée au caractère persévérant de cette action : l'effet intégral étant cumulatif dans le temps ($\int \varepsilon dt$), il est incompatible avec une erreur statique non nulle car il irait alors en divergeant²¹. L'association de cette correction à l'effet dérivateur de l'amplificateur dû à son caractère passe bas explique quant à elle l'apparition des oscillations (on reviendra sur ce point au § II.6). On montre au § V.4 de l'annexe 1 que la fonction de transfert du système corrigé devient d'ordre 2 avec les coefficients caractéristiques :

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_I}{A_0 B \tau_0}} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{A_0 B}{\tau_0 \tau_I}}$$

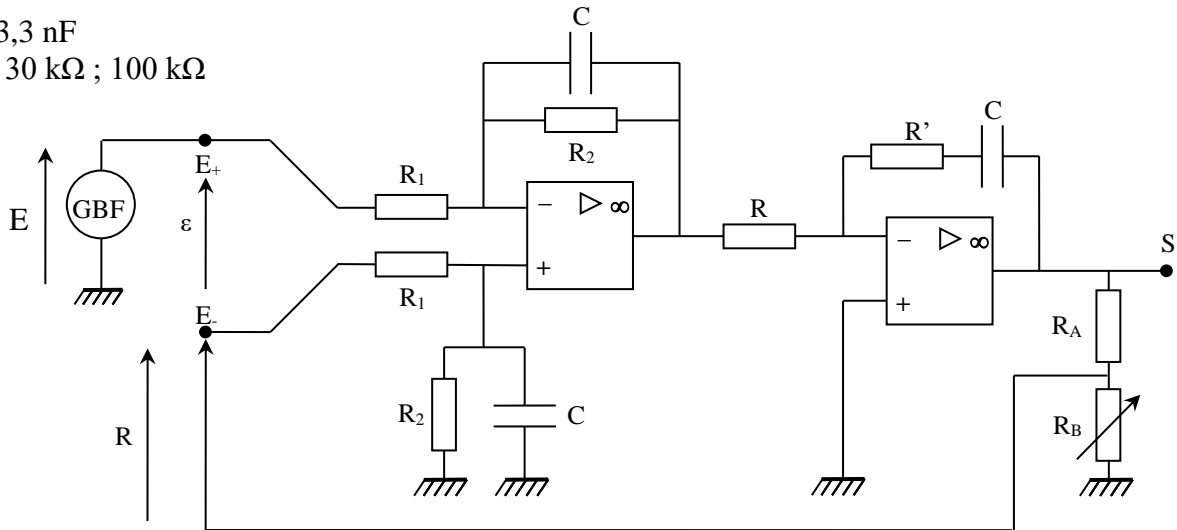
$$\text{Et } D(\%) = 100 \times \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{\tau_I}{4A_0 B \tau_0 - \tau_I}}\right) \quad \text{en cas de régime pseudoperiodique.}$$

Le montage est réalisé ici avec $A_0 B = 1$, $\tau_0 = R_2 C = 330 \mu s$ et $\tau_I = RC = 33 \mu s$. On a donc $m = 0,158$ (une valeur inférieure à 1 justifiant le régime oscillatoire amorti observé), $f_0 = 1520 \text{ Hz}$ ($\approx f_{pseudo}$ vu la valeur de m), et un dépassement $D = 60 \%$. Ces résultats recourent les valeurs expérimentales à 10 % près ($f_{pseudo} \approx 1430 \text{ Hz}$; $D \approx 50 \%$).

II.5.3 Correction PI

C : 3,3 nF

R' : 30 k Ω ; 100 k Ω



On peut combiner les deux précédentes actions en associant R' et C en série dans la boucle de rétroaction du correcteur. Sa fonction de transfert est alors, si on omet l'inversion :

$$C_{PI} = \frac{1}{R} \left(R' + \frac{1}{jC\omega} \right)$$

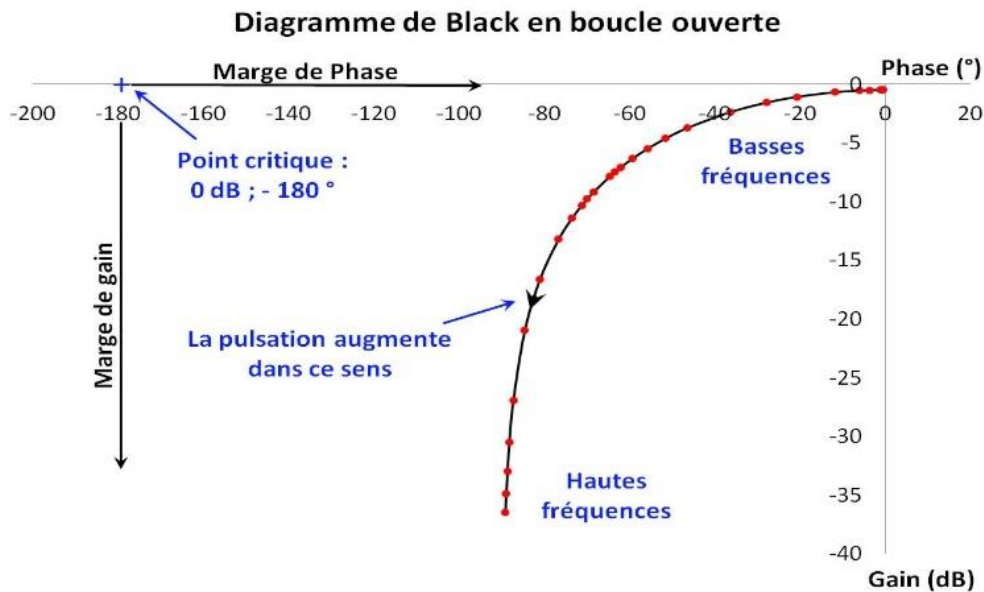
On peut ajuster l'action en modifiant R' . L'effet combiné des deux actions conduit à un bon compromis précision/rapidité/stabilité. Un léger dépassement subsiste avec $R' = 30 \text{ k}\Omega$, mais disparaît totalement avec $R' = 100 \text{ k}\Omega$. Le système est alors rapide ($T_M = 74 \mu s$), précis ($\varepsilon_S = 0 \text{ V}$) et stable \rightarrow une action de type dérivée n'est pas nécessaire avec ce système.

²¹ A la différence des corrections P et D qui agissent via une grandeur instantanée (ε ou sa dérivée temporelle), et qui peuvent par conséquent rester stationnaires avec une erreur statique différente de 0.

Action PI : $R' = 30\text{ k}\Omega$ Action PI : $R' = 100\text{ k}\Omega$ 

II.6 Lien avec la FTBO du système

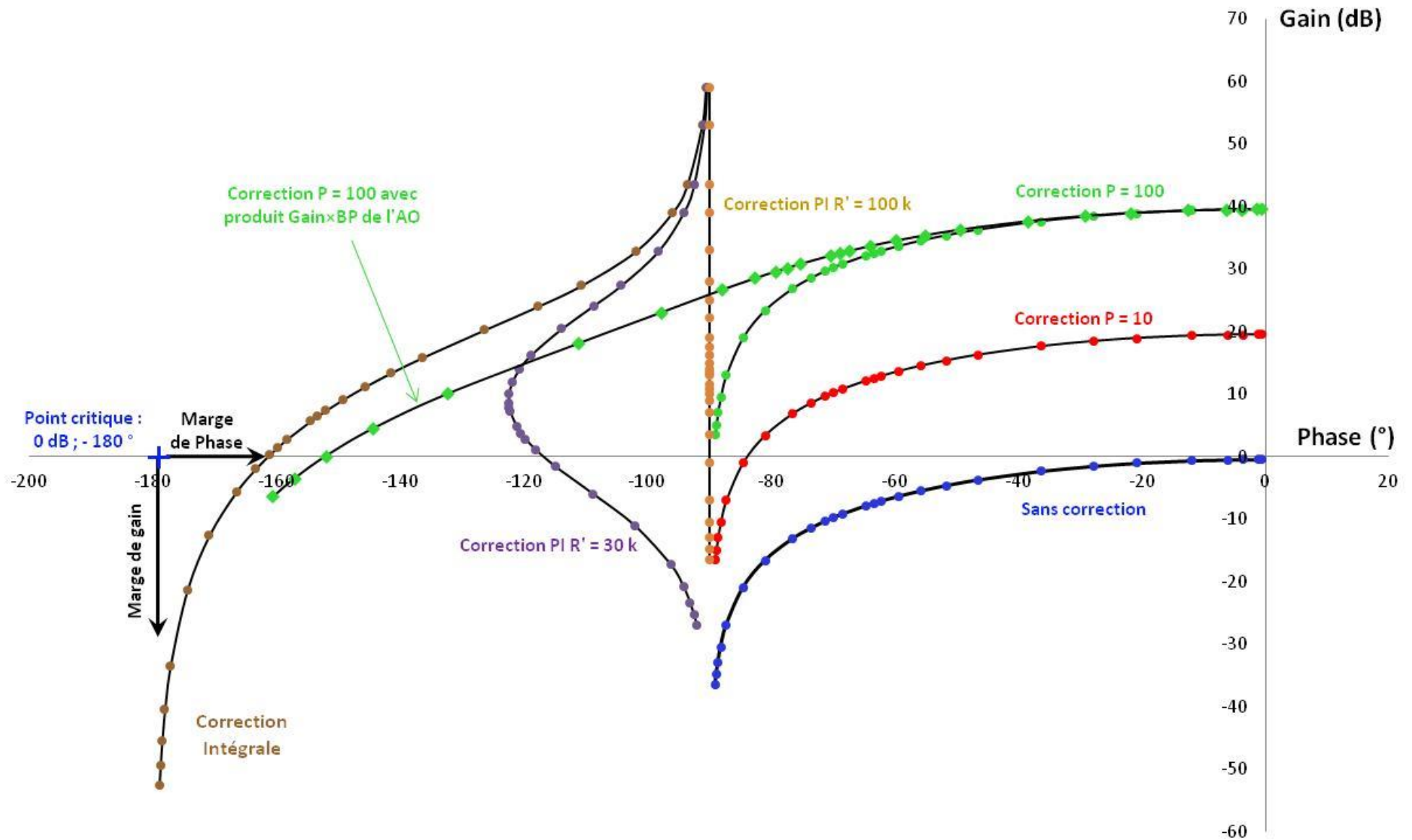
On montre au § III de l'annexe 1 que la stabilité d'un système en boucle fermée peut s'appréhender à partir de l'étude de sa fonction de transfert en boucle ouverte. Il est donc intéressant de mettre les observations précédentes en rapport avec la FTBO du montage dans chaque cas de figure. Une méthode d'analyse visuelle particulièrement instructive consiste à représenter la FTBO dans un diagramme de Black²². C'est un plan $(x, y) = (\varphi, G_{dB})$ où la pulsation n'apparaît pas (mais où chaque point de la courbe correspond à une valeur de ω), et dans lequel le point de coordonnées $(-180^\circ, 0)$ représente le point critique à ne pas approcher pour avoir un système stable → on peut commencer par tracer la FTBO du système non corrigé réglé à $F = 2$ (les courbes suivantes ne résultent pas de mesures mais de calculs effectués avec les formules du § V.3 de l'annexe 1) :



On constate que la courbe passe loin du point critique. La phase maximale étant de -90° (système passe bas d'ordre 1), la marge de gain est infinie. On n'a pas non plus de problème avec la marge de phase → il n'y a donc pas de risque d'instabilité lors du bouclage. On peut ensuite tracer les courbes pour le système avec les différentes corrections envisagées. On obtient alors les graphiques suivants :

²² Il existe aussi un abaque de Black Nichols ou une deuxième série de courbes permet d'obtenir les paramètres en boucle fermée à partir de ceux en boucle ouverte (graphique à double système de coordonnées liées).

Diagrammes de Black Nichols pour l'amplificateur corrigé en boucle ouverte



Effet de l'action proportionnelle :

La conséquence sur le diagramme de Black est une translation de la courbe vers le haut d'autant plus forte que la correction est importante. Ce décalage en bloc augmente le gain statique du système, ce qui le rend plus précis. L'évolution de la rapidité peut s'apprécier pour les gains élevés par la valeur de la pulsation correspondant au passage de la FTBO par $G = 0 \text{ dB}$ ²³. La translation de la courbe augmente par conséquent la rapidité du système. On voit aussi que la correction diminue la marge de phase mais sans que cela soit vraiment un problème puisqu'elle ne descend pas en dessous de 90° ²⁴. L'apparition d'oscillations en boucle fermée lors des régimes transitoires est donc impossible si la correction est idéale, même avec un gain élevé. La prise en compte du caractère passe bas naturel de l'amplificateur opérationnel utilisé dans le correcteur modifie en revanche fortement la courbe à haute fréquence. Elle s'approche dangereusement du point critique avec une marge de phase réduite à 30° trop faible pour éviter les oscillations.

Effet de l'action intégrale :

Les conséquences de cette action sur la FTBO sont spectaculaires. Les deux principaux faits à retenir sont :

- un décalage de la courbe vers la gauche dû au rajout de phase de -90° ($C_I = K_I/j\omega\tau_I = -jK_I/\omega\tau_I$) qui la rapproche du point critique (la marge de phase n'est plus que de 20° dans notre exemple). On perçoit ici tout l'intérêt de la représentation de black puisqu'on y voit très simplement l'effet potentiellement déstabilisant de l'action intégrale²⁵.

- une divergence de la courbe vers les basses fréquences (correction en $1/\omega$) donnant un gain statique infini, donc une erreur ε_s nulle (précision parfaite²⁶).

Effet de l'action PI :

La correction P ne dépend pas de la fréquence, l'action I est en $1/\omega \rightarrow$ L'action intégrale impose le gain en basse fréquence, l'effet proportionnel l'impose plutôt en haute fréquence. La transition a lieu pour $f_{PI} = 1/(2\pi R'C)$ d'après l'expression de C_{PI} du § II.5.3. Cette répartition des rôles est clairement visible sur le graphique tracé pour $R' = 30 \text{ k}\Omega$: la courbe s'apparente à celle de l'action intégrale en basse fréquence puis elle se dirige vers celle de l'action proportionnelle aux pulsations les plus élevées. La FTBO passe entre temps par un maximum de phase aux alentours de 900 Hz (qui ne correspond pas à $f_{PI} = 1600 \text{ Hz}$ car il faut tenir compte du comportement fréquentiel de $A(\omega)$ dans l'évolution de la FTBO). Cette transition disparaît totalement avec $R' = 100 \text{ k}\Omega$. La fréquence de transition est alors égale à celle de l'amplificateur et les évolutions de phase du correcteur compensent celles de $A(\omega)$.

II.7 Conclusion

Le montage proposé permet d'appréhender les notions de base des systèmes bouclés à réaction négative (précision, stabilité et temps de réponse) avec des manipulations relativement simples. Il offre aussi la possibilité de découvrir le principe des correcteurs. Il permet enfin d'observer une propriété spécifique à la rétroaction sur un amplificateur modélisable par une fonction de transfert du premier ordre, à savoir la constance du produit Gain×Bande Passante dans ces systèmes.

²³ Cf. § IV.1, annexe 1.

²⁴ La correction P étant réelle, elle n'affecte pas la phase de la FTBO \rightarrow Le système restant passe bas d'ordre 1, il ne peut dépasser -90° .

²⁵ On y verrait tout aussi simplement l'effet stabilisant que peut avoir l'action dérivée puisqu'elle aurait tendance à éloigner la courbe représentative de la FTBO du point critique en rajoutant $+90^\circ$ de phase.

²⁶ Dans la limite des modèles.

Bibliographie :

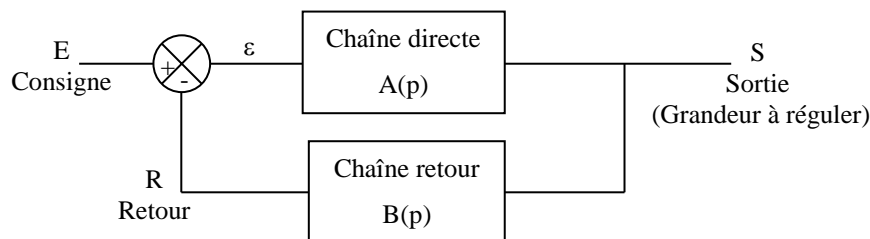
- [1] : Yves Granjon : Automatique (Dunod)
- [2] : Manneville Esquieu : Systèmes bouclés linéaires, de communication et de filtrage (Dunod)
- [3] : Destombes, Boutoille : Manipulations et simulations, tome 2
- [4] : Quaranta, tome IV
- [5] : P. Codron, S. Le Ballois : Automatique (Dunod)
- [6] : Duffait : Expériences d'électronique
- [7] : J.C. Chauveau : Systèmes Asservis Linéaires (Educalivre)
- [8] : BUP n° 779, p. 2019 à 2039
- [9] : Quaranta III
- [10] : Cours en ligne de Freddy Mudry à l'adresse : http://www.iai.heig-vd.ch/fr-ch/Enseignement/Supports/O_Electronique%20analogique%20%28EAN%29/Chap.07%20Etude%20de%20la%20contre-r%C3%A9action.pdf

ANNEXE : QUELQUES NOTIONS SUR LES SYSTEMES BOUCLES EN CONTRE REACTION

On rappelle les propriétés importantes de ces systèmes (structures asservies). L'exposé est assez développé mais pas exhaustif (il existe des livres entiers sur le sujet). On se contente de donner les résultats nécessaires à la compréhension des manipulations présentées.

I STRUCTURE GENERALE

Le schéma fonctionnel d'un système bouclé en contre réaction est le suivant :



A, B : fonctions de transfert des chaînes directe et retour.

I.1 Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

La FTBO est définie par la relation $G = R/E$ lorsque le retour est coupé ($\varepsilon = E$). On voit immédiatement qu'on a :

$$G = \left(\frac{R}{E} \right)_{BO} = AB$$

I.2 Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)

On a alors $S = A\varepsilon =$

$A(E - R) = A(E - BS)$, d'où :

$$H = \left(\frac{S}{E} \right)_{BF} = \frac{A}{1 + A \cdot B} = \frac{A}{1 + G}$$

On précise dans ce qui suit les avantages d'une telle structure.

I.3 Influence sur la sensibilité aux perturbations

La contre réaction a une action fondamentale sur le système : elle permet d'insensibiliser sa fonction de transfert.

I.3.1 Vis à vis d'une fluctuation de A

Supposons que la fonction de transfert directe A change légèrement, les paramètres E et B restant constants :

$$\frac{dH}{dA} = \frac{d}{dA} \left(\frac{A}{1 + AB} \right) = \frac{1(1 + AB) - BA}{(1 + AB)^2} = \frac{1}{(1 + AB)^2} = \frac{H}{A} \frac{1}{1 + AB} \rightarrow \frac{dH}{H} = \frac{1}{1 + AB} \frac{dA}{A}$$

$$S = HE \text{ avec } E \text{ constant} \rightarrow \boxed{\frac{dS}{S} = \frac{1}{1 + AB} \frac{dA}{A}}$$

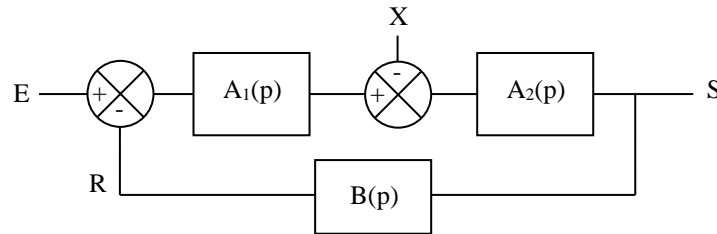
L'expression peut être comparée au résultat obtenu sans le bouclage :

$$S = AE \rightarrow \boxed{\frac{dS}{S} = \frac{dA}{A}}$$

On s'aperçoit que la variation relative de S est nettement plus faible en boucle fermée **si on a $AB \gg 1$** . Cette condition entraîne un effet de stabilisation, d'où le nom de facteur de régulation donné au coefficient $F = 1 + AB$.

I.3.2 Vis à vis d'une perturbation

On peut quantifier l'influence du bouclage sur une perturbation X s'ajoutant en cours d'amplification dans la chaîne directe :



$$S = A_2[A_1(E - R) - X] = A_2[A_1(E - BS) - X] \rightarrow S = \frac{A_1 A_2}{1 + A_1 A_2 B} E - \frac{A_2}{1 + A_1 A_2 B} X$$

Si on suppose les systèmes linéaires, on peut appliquer le théorème de superposition, et donc étudier l'influence de la perturbation X sur la sortie S en annulant E :

$$S = -\frac{A_2}{1 + A_1 A_2 B} X \rightarrow \boxed{\frac{dS}{S} = -\frac{A_2}{1 + A_1 A_2 B} \frac{dX}{X}}$$

L'expression obtenue peut être comparée au résultat sans bouclage en annulant E pour les mêmes raisons :

$$S = -A_2 X \rightarrow \boxed{\frac{dS}{S} = -A_2 \frac{dX}{X}}$$

La structure en boucle fermée réduit une nouvelle fois l'influence de la perturbation lorsque $1 + A_1 A_2 B$ est grand²⁷. On retrouve l'influence du facteur de régulation F mais il faut noter que ça n'est valable que si la perturbation apparaît en cours de chaîne directe. Il n'y a en effet aucun bénéfice lorsque la perturbation apparaît en début de chaîne puisque E et X sont alors amplifiés de la même manière (on peut le vérifier par le calcul).

I.3.3 Vis à vis d'une fluctuation de B

De manière analogue au § I.3.1, on montre facilement qu'on a :

$$\boxed{\frac{dH}{H} = \frac{dS}{S} = -\frac{A \cdot B}{1 + AB} \frac{dB}{B} \approx -\frac{dB}{B}} \quad \text{si } AB \gg 1$$

²⁷ Car l'amplification du signal E est tout simplement A_1 fois plus grande que celle de la perturbation X .

Cette fois ci, le bouclage n'a pas d'effet stabilisant vis-à-vis d'une fluctuation de la chaîne de retour. La conception de cette chaîne doit être par conséquent être soignée.

I.3.4 Conclusion

On a un effet régulateur vis à vis des perturbations si $AB \gg$

1. C'est la condition pour qu'un système bouclé permette l'asservissement d'une grandeur physique. Il en découle des conséquences importantes. $AB \gg 1$ impose :

$$- \boxed{H = \frac{A}{1 + AB} \approx \frac{1}{B}} \rightarrow \boxed{S \approx \frac{1}{B} \cdot E}$$

→ **Le gain statique du système bouclé est imposé par la chaîne de retour.**

$$- \boxed{\varepsilon = E - R = E - BS = E - B \frac{A}{1 + AB} E = E \left(\frac{AB}{1 + AB} - 1 \right) \approx 0}$$

→ **Le signal d'erreur est faible lorsqu'on a un bon asservissement.**

I.4 Classe d'un asservissement

Dans le cas le plus général, la FTBO d'un système bouclé peut se mettre sous la forme suivante :

$$G(p) = \frac{G_0}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha \text{ la classe ou type d'asservissement}}$$

On utilise ici le formalisme de Laplace avec la variable $p = j\omega$. Le terme $1/p$ correspond alors à une intégration → La classe (ou le type) d'un asservissement est lié au nombre d'intégrateur purs présents dans la FTBO²⁸ :

$$- \text{asservissement type 0} \Leftrightarrow G(p) = G_0 \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots}$$

$$- \text{asservissement type 1} \Leftrightarrow G(p) = \frac{G_0}{p} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots}$$

Attention à ne pas confondre le type et l'ordre d'un asservissement. On peut par exemple avoir un asservissement de type 0 et d'ordre 1 ou 2.

II PERFORMANCES DES SYSTEMES BOUCLES

Les qualités demandées à un système bouclé dépendent de la phase de fonctionnement. En régime permanent, on demande au système d'être précis donc la notion d'erreur quantifie cette qualité. En régime transitoire, on demande au système de passer d'un régime permanent à un autre le plus rapidement possible, et sans avoir de dépassements excessifs s'il y en a. La rapidité est donc caractérisée par un temps de réponse.

II.1 Erreur

Un asservissement a pour but d'obtenir une valeur S qui soit une image fidèle de la consigne E donc on recherche une relation du type $S = kE$ avec k une constante

²⁸ On fait cette distinction car la présence d'intégrateurs purs a des conséquences importantes sur le comportement des systèmes.

indépendante de toute perturbation. Si ce n'est pas le cas, la grandeur de sortie aura une valeur S' différente de celle souhaitée. On peut donc chiffrer l'erreur par la relation :

$$\boxed{\text{erreur} = S - S'}$$

Or, on a vu au § I.3.4 qu'un asservissement parfait conduit à avoir la relation $S = E/B$. Par ailleurs, la sortie réellement obtenue S' conduit à un signal de retour $R = BS'$. L'erreur peut donc s'exprimer par la relation :

$$\boxed{\text{erreur} = \frac{1}{B}(E - R) = \frac{1}{B}\varepsilon}$$

→ Le signal d'erreur ε est équivalent à l'erreur en sortie à une constante $1/B$ près → la précision sera dorénavant définie par ε et on s'intéresse à sa valeur en régime permanent :

$$\boxed{\text{erreur} = \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [E(t) - R(t)]}$$

Or, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{p \rightarrow 0} X(p)$ d'après le théorème de la valeur finale → $\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$. On a par ailleurs $\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = E(p) - G(p)\varepsilon(p)$ d'où :

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)} \quad \text{et} \quad \boxed{\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p \cdot E(p)}{1 + G(p)} \right)}$$

→ L'erreur dépend donc de la forme de la consigne d'entrée et de la limite du gain en boucle ouverte quand p tend vers zéro.

II.1.1 Erreur statique

Cette erreur, notée ε_s , correspond à une consigne d'entrée en forme d'échelon. Si son amplitude est E_0 , sa transformée de Laplace est E_0/p . On a alors :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p}{1 + G(p)} \cdot E(p) \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p}{1 + G(p)} \frac{E_0}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{E_0}{1 + G(p)} \right)$$

Asservissement de type 0 :

$$G(p) = G_0 \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} \quad \rightarrow \quad \lim_{p \rightarrow 0} G(p) = G_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_s = \frac{E_0}{1 + G_0}}$$

L'erreur statique est constante et non nulle pour un asservissement de type 0. Elle est d'autant plus faible que le gain statique en chaîne ouverte G_0 est fort.

Asservissement de classe supérieure :

$$G(p) = \frac{G_0}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} \quad \text{avec } \alpha \geq 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{p \rightarrow 0} G(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{G_0}{p^\alpha} \right) \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_s \rightarrow 0}$$

L'erreur statique est nulle pour un asservissement de type 1 ou supérieur.

II.1.2 Erreur de traînage

Cette erreur ε_T correspond à une consigne en forme de rampe. Elle chiffre l'aptitude du système à suivre une consigne variable (asservissement) alors que l'erreur statique évalue la capacité à respecter une consigne constante (régulation). Si la rampe à un coefficient directeur E_0 , sa transformée de Laplace est E_0/p^2 et on a :

$$\varepsilon_T = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{E_0}{p[1 + G(p)]} \right)$$

Asservissement de type 0 :

Le développement du dénominateur de ε_T donne :

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p[1 + G(p)]) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p + G_0 \frac{p + a_1 p^2 + a_2 p^3 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_T \rightarrow \infty}$$

L'erreur de traînage tend progressivement vers l'infini pour un asservissement de type 0.

Asservissement de type 1 :

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p[1 + G(p)]) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p + G_0 \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} \right] = G_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_T \rightarrow \frac{E_0}{G_0}}$$

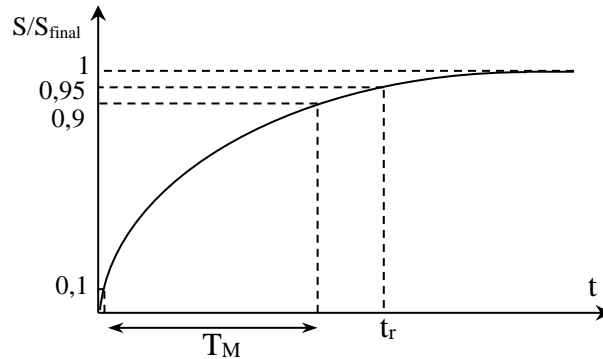
L'erreur de traînage est constante et non nulle pour un asservissement de type 1. Elle est cependant d'autant plus faible que le gain statique est important.

II.2 Rapidité

On se limite à l'étude d'une réponse à un échelon appliqué à un système d'ordre 1 ou 2.

II.2.1 Système du premier ordre

La réponse indicielle d'une fonction de transfert du type $A/(1 + \tau p)$ a l'allure suivante :



La constante de temps τ quantifie la rapidité du système. On peut l'obtenir avec un oscilloscope numérique en mesurant le temps de montée T_M du signal (durée nécessaire pour passer de 10 à 90 % de la valeur finale). Un calcul simple montre qu'on a :

$$\boxed{T_M = \tau \ln 9 \approx 2,2\tau}$$

II.2.2 Système du deuxième ordre

La fonction de transfert à la forme suivante avec A_0, m, ω_0 le gain statique, le facteur d'amortissement et la pulsation propre du système :

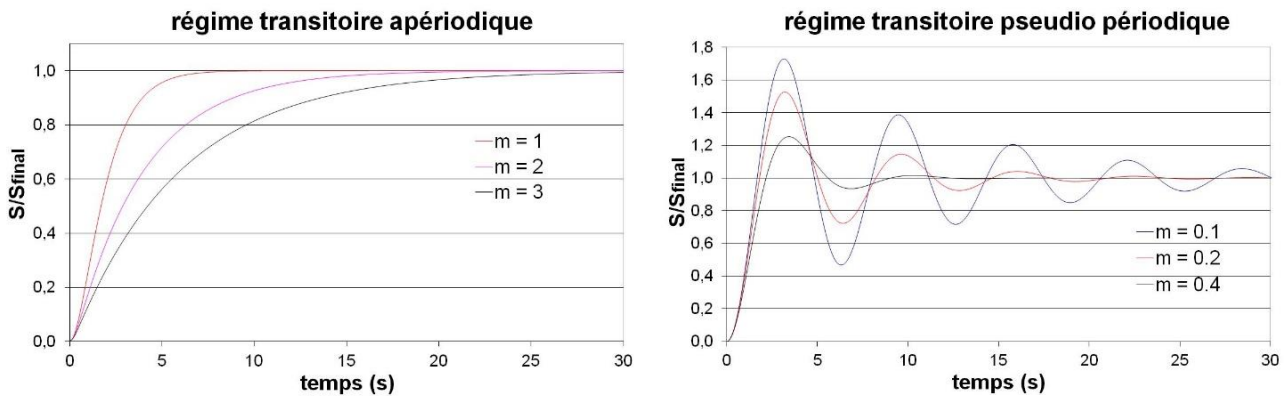
$$\frac{A_0}{1 + \frac{2m \cdot p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Le calcul des temps caractéristiques est assez lourd et dépend de la valeur de m (cf. [5], p. 46 à 55).

Une observation temporelle permet cependant d'esquisser l'influence de l'amortissement.

$m \geq 1$; réponse apériodique :

Dans ce cas, le signal de sortie évolue comme sur le graphique de gauche²⁹ → le système est d'autant plus lent que le coefficient d'amortissement m est fort.



$m < 1$; réponse pseudopériodique :

Dans ce cas, le signal de sortie évolue comme représenté sur le graphique de droite. On note la présence d'oscillations d'autant plus persistantes que m est faible. Le temps de réponse par rapport à la valeur finale n'a pas d'expression simple. Une grandeur plus facile à calculer est le temps correspondant au premier maximum (avec ω la pseudo pulsation) :

$$t_{max 1} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}} = \frac{\pi}{\omega}$$

Une grandeur intéressante à mesurer est le dépassement $D = (S_{max} - S_{final})/S_{final}$. Ce n'est pas un paramètre caractéristique de la rapidité du système mais c'est en revanche un indicateur important de sa stabilité (un dépassement supérieur à 50 % est rarement souhaitable). Son expression est assez simple et on peut le mesurer facilement avec un oscilloscope numérique :

$$D(\%) = 100 \times \exp \left[- \left(\frac{m \cdot \pi}{\sqrt{1 - m^2}} \right) \right]$$

III STABILITE DES SYSTEMES BOUCLES

Un système est stable si la grandeur de sortie tend vers une valeur finie lorsque l'on injecte un signal fini en entrée (pas de divergence). Pour satisfaire cette condition d'un point de vue mathématique, il faut que la FTBF du système n'ait aucun pôle³⁰ à partie réelle positive ou nulle (tous les pôles doivent donc être à partie réelle strictement négative) → cela revient à étudier les solutions de l'équation :

$$1 + A(p)B(p) = 0$$

AB correspondant à la FTBO, on peut appréhender la stabilité du système en boucle fermée à partir de l'étude de sa fonction de transfert en boucle ouverte. On voit par exemple facilement

²⁹ Toutes les courbes ont été tracées pour une pulsation $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$.

³⁰ Les pôles d'une fonction de transfert sont les valeurs pour lesquelles le dénominateur de la fonction de transfert (mise sous forme irréductible) s'annule.

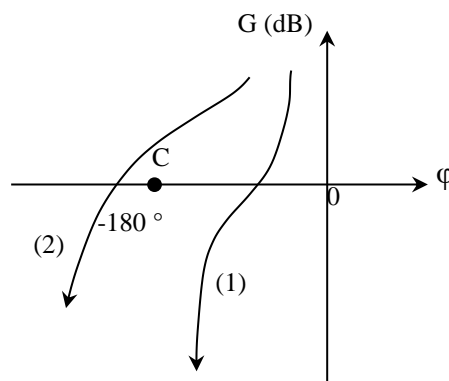
qu'il apparait un point particulier, le point critique, de coordonnées complexes $(-1 ; 0)$, pouvant amener à une divergence de la FTBF en régime harmonique.

III.1 Critère de stabilité

Il existe des tests algébriques permettant d'étudier la stabilité d'un système (critères de Routh – Hurwitz) mais leur emploi est assez lourd. On se contentera d'un critère graphique moins rigoureux mais suffisant pour les fonctions de transfert rencontrées ici.

Un système linéaire est stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de la réponse harmonique de la FTBO dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique C sur la droite.

Son emploi en représentation de Black³¹ $G_{dB} = f(\varphi)$ est particulièrement intuitif pour voir les marges de stabilité et l'effet des correcteurs :



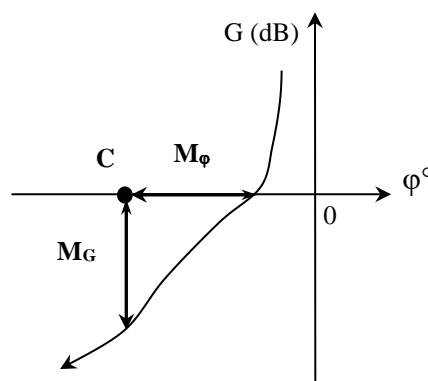
Sur cet exemple, le premier cas de figure correspond à un système stable alors que le deuxième cas correspond à un système instable (les flèches indiquent le sens de parcours en ω croissant).

III.2 Marges de stabilité

Le critère précédent est binaire mais son respect au sens strict est insuffisant car un système respectant cette condition en passant trop près du point critique est stable mais présente des oscillations en régime transitoire. Il vaut donc mieux se donner des marges de sécurité en gain et en phase pour chiffrer l'éloignement de la FTBO par rapport à C :

- Marge de gain $M_G = 0 - |G_{dB}|$ pour G_{dB} correspondant à $\varphi = -180^\circ$.
- Marge de phase $M_\varphi = 180^\circ - |\varphi|$ pour φ correspondant à $G = 0$ dB.

Elles apparaissent simplement en représentation de Black :

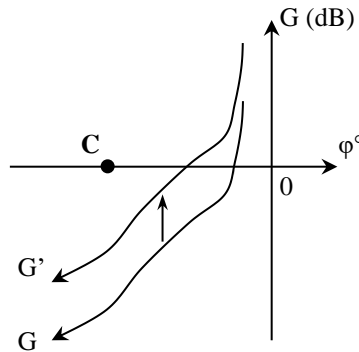


³¹ Ce mode de représentation n'utilise pas la pulsation comme axe des abscisses mais chaque couple de points $(G ; \varphi)$ dans ce diagramme correspond à une pulsation donnée.

Il n'y a pas de limites absolues mais un système possédant des marges de 45° et 12 dB en BO a généralement une stabilité convenable en BF (on peut encore avoir un léger dépassement).

III.3 Influence du gain statique sur la stabilité

Si on augmente le gain statique, la nouvelle FTBO peut s'écrire $G' = KG$. Comme K est réel, on a $\varphi'(\omega) = \varphi(\omega)$ et $|G'(\omega)| = K |G(\omega)|$ donc la fonction de transfert G' se déduit de G par une simple translation de $20\log K$ sur l'abaque de Black :



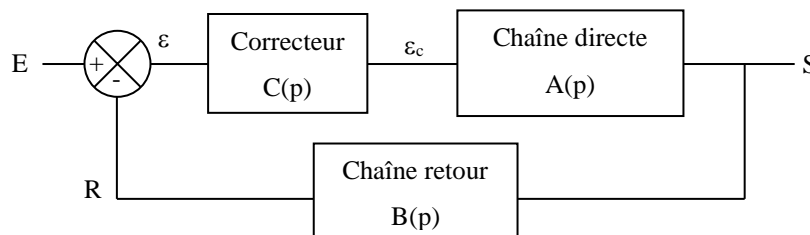
→ une valeur trop importante de K peut rapprocher la fonction de transfert du point critique et rendre le système instable. C'est une propriété importante à retenir.

IV CORRECTIONS DES SYSTEMES BOUCLES

Les correcteurs ont pour but de concilier les exigences contradictoires de précision, rapidité et stabilité.

IV.1 Principe général de la correction

On place un bloc correcteur de fonction de transfert $C(p)$ dans la boucle directe :



Cet ajout modifie les fonctions de transfert en boucle ouverte et fermée. On a :

$$\boxed{G' = ABC = GC} \quad \text{et} \quad \boxed{H' = \frac{AC}{1 + ABC} = \frac{AC}{1 + GC}}$$

Le problème consiste à trouver une fonction $C(p)$ augmentant les performances sans créer d'instabilités. Il faut donc effectuer des actions localisées sur la FTBO du système compte tenu des améliorations souhaitées :

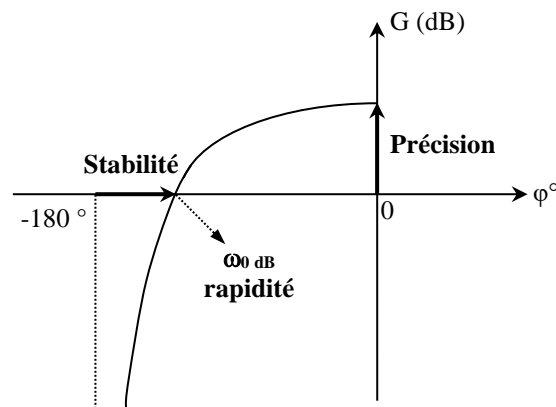
- la précision est caractérisée par l'erreur statique ε_s donc elle dépend du gain statique de la FTBO³² et de sa « forme » en basse fréquence. Si la FTBO présente au moins un

³² cf. § II.1.1.

intégrateur pur, elle diverge lorsque $\omega \rightarrow 0$. On a alors $\varepsilon_S = 0$ et aucune correction n'est nécessaire. Dans le cas contraire (asservissement type 0), il faut augmenter le gain statique pour améliorer la précision.

- la stabilité est liée au comportement de la FTBO au voisinage du point critique donc on a intérêt si nécessaire à « déformer la FTBO » à l'approche de C pour augmenter les marges de phase et de gain. Si on se limite à des systèmes ne dépassant pas l'ordre 2 ($\varphi_{max} = -180^\circ$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$), la marge de gain est infinie et seule la condition sur M_φ est importante.

- la rapidité est plus délicate à traiter rigoureusement, mais elle est en général liée à la bande passante du système en boucle fermée³³. Si on se limite encore une fois à des systèmes ne dépassant pas l'ordre 2, on peut montrer pour un système à gain statique élevé qu'elle exige une bande passante en boucle ouverte $\omega_0 \text{ dB(BO)}$ la plus grande possible³⁴.



IV.2 Actions correctives élémentaires

On indique juste les conséquences potentielles des différentes actions élémentaires sans entrer dans des explications détaillées mais il faut savoir que le résultat dépend aussi des caractéristiques de la FTBO et qu'une correction mal utilisée sur un système mal maîtrisé peut donner le contraire de l'effet souhaité.

IV.2.1 Action proportionnelle P

$$\varepsilon_C = K_P \varepsilon \quad \rightarrow \quad C_P(j\omega) = K_P \quad \text{en régime harmonique}$$

Cette action agit de façon constante sur l'ensemble du spectre donc elle translate la FTBO vers le haut dans le diagramme de Black \rightarrow elle a pour conséquence :

- une amélioration de la précision en diminuant l'erreur statique mais sans l'annuler.
- une amélioration de la rapidité par augmentation de la bande passante.
- un effet potentiellement déstabilisant par réduction de la marge de phase.

³³ On le vérifie facilement sur une fonction de transfert du premier ordre puisqu'on a $f_c = BP = 1/(2p\tau)$.

³⁴ Attention aux erreurs d'interprétations sur le diagramme de Black : cette condition ne veut pas dire qu'il faut que la courbe passe sur l'axe horizontal en étant le plus à gauche possible ! Il faut juste que la pulsation à laquelle se fait le passage soit la plus grande possible, et ce quel que soit l'endroit où se fait le passage.

IV.2.2 Action intégrale I

$$\varepsilon_c = \frac{K_I}{\tau_I} \int \varepsilon \cdot dt \rightarrow C_I(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega\tau_I} = -j \frac{K_I}{\omega\tau_I} \quad \text{en régime harmonique}$$

Cette action est en $-j/\omega$ donc **elle ajoute - 90 ° de phase et prédomine en basse fréquence** ($1/\omega \rightarrow \infty$ lorsque $\omega \rightarrow 0$) → elle a pour conséquence :

- une annulation de l'erreur statique³⁵ (précision « parfaite »).
- une diminution de la stabilité (réduction de la marge de phase par rajout de - 90 °).
- un ralentissement du système (par diminution de la bande passante puisque l'action est en $1/\omega$).

IV.2.3 Action dérivée D

Elle se caractérise par la fonction de transfert :

$$\varepsilon_c = K_D \tau_D \frac{d\varepsilon}{dt} \rightarrow C_D(j\omega) = j\omega K_D \tau_D \quad \text{en régime harmonique}$$

Cette action est en $+j\omega$ donc **elle ajoute + 90 ° de phase et prédomine en haute fréquence** puisque qu'elle est proportionnelle à $\omega \rightarrow$ elle a pour conséquence :

- aucune augmentation de la précision (peu d'effet à basse fréquence).
- une amélioration de la stabilité (augmentation de la marge de phase par rajout de + 90 °).
- une amélioration de la rapidité (par augmentation de la bande passante puisque l'action est en ω).
- une augmentation de la sensibilité au bruit par renforcement des hautes fréquences.

On voit qu'aucune correction élémentaire n'est idéale. Il faut donc les combiner pour aboutir au meilleur compromis possible.

V APPLICATION À UN AMPLIFICATEUR MODÉLISABLE PAR UNE FONCTION DE TRANSFERT D'ORDRE 1

V.1 Comportement fréquentiel en boucle ouverte

Il se déduit de sa fonction de transfert :

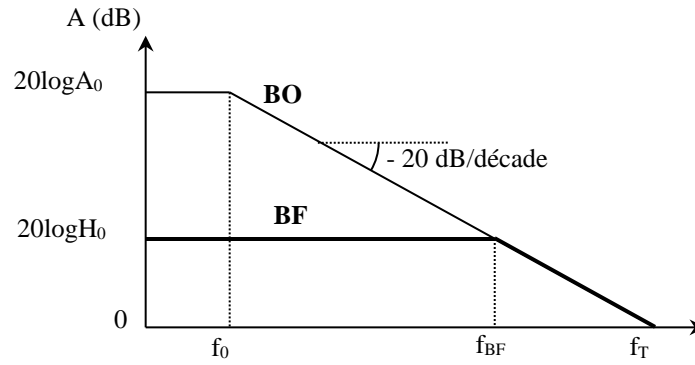
$$A = \frac{A_0}{1 + j \left(\frac{f}{f_0} \right)}$$

Elle se réduit à A_0 en basse fréquence, soit $A(\text{dB}) = 20\text{Log}A_0$. Son module en haute fréquence se ramène à :

$$|A| \approx \frac{A_0}{f/f_0} \rightarrow A(\text{dB}) = 20\text{Log}A_0 - 20\text{Log} \frac{f}{f_0}$$

³⁵ Cette correction n'a aucune utilité s'il y a déjà un intégrateur pur dans la FTBO (asservissement de type 1).

On a donc le diagramme asymptotique suivant :



La fréquence de transition $f_t = A_0 f_0$ correspond à un gain nul en dB ($A = 1$). On peut considérer en première approximation qu'un amplificateur opérationnel a, de par sa conception interne, un tel comportement³⁶ avec un gain statique $A_0 \approx 10^5$ et une fréquence de coupure $f_0 \approx 10$ Hz pour les 741, 071 et 081 $\rightarrow f_t$ vaut typiquement 1 MHz pour ces composants.

V.2 Comportement en boucle fermée

La FTBF d'un système en contre réaction valant $H = A/(1 + AB)$, on a ici :

$$H = \frac{\frac{A_0}{1 + j(f/f_0)}}{1 + \frac{A_0 B}{1 + j(f/f_0)}} = \frac{A_0}{1 + j(f/f_0) + A_0 B} = \frac{A_0}{1 + A_0 B + j \frac{f}{f_0}} = \frac{\frac{A_0}{1 + A_0 B}}{1 + j \frac{f}{f_0(1 + A_0 B)}} = \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_{BF}}}$$

La FTBF est formellement identique à la FTBO \rightarrow **le système bouclé reste d'ordre 1**, mais avec un nouveau gain statique H_0 et une nouvelle fréquence de coupure f_{BF} :

$$H_0 = \frac{A_0}{1 + A_0 B}$$

$$f_{BF} = f_0(1 + A_0 B)$$

\rightarrow Le gain statique diminue d'un facteur $1 + A_0 B$ pendant que la fréquence de coupure augmente de $1 + A_0 B$. On a donc :

$$H_0 f_{BF} = A_0 f_0 = f_T = cte$$

\rightarrow **Le produit Gain×Bande Passante d'un amplificateur opérationnel en contre réaction est une constante égale au produit Gain×Bande Passante en Boucle ouverte** (qui vaut f_T). On retiendra donc qu'une diminution du gain d'un amplificateur opérationnel s'accompagnera forcément d'une augmentation de sa bande passante dans des mêmes proportions, et vice versa.

V.3 FTBO pour le montage d'étude

On a vu § III qu'on peut appréhender la stabilité d'un système en boucle fermé à partir de l'étude de sa FTBO \rightarrow on propose de calculer la FTBO du montage étudié au § II de la partie expérimentale avec et sans les correcteurs.

³⁶ Cf. [6], p. 81 ou [9], p. 30.

V.3.1 FTBO sans correcteurs

La chaîne de retour B dans le montage étant réelle et A étant du type passe bas d'ordre 1, on a :

$$G = AB = \frac{A_0 B}{1 + j(f/f_0)}$$

$$\rightarrow G(\text{dB}) = 20 \log(A_0 \cdot B) - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad \text{et} \quad \arg(G) = \varphi = -\arctan(f/f_0)$$

Le bouclage de l'amplificateur à $H = 5$ avec $F = 2$ conduit à avoir $A_0 = 10$ et $B = 0,1$, soit $A_0 B = 1 \rightarrow$ On peut tracer le diagramme de black de l'amplificateur grâce aux relations :

$$\boxed{G(\text{dB}) = -10 \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \right]} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{f}{f_0}\right)}$$

Avec $f_0 = 1/(2\pi R_2 C) = 482 \text{ Hz}$ compte-tenu du choix des composants ($R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C = 3,3 \text{ nF}$).

V.3.2 FTBO avec les correcteurs

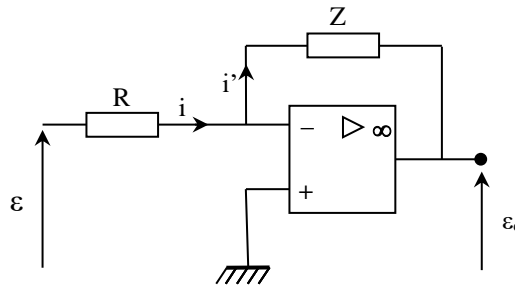
La FTBO devient :

$$G' = GC = |G|e^{j\varphi}|C|e^{j\varphi_c} = |G||C|e^{j(\varphi+\varphi_c)}$$

\rightarrow Le gain et la phase de la FTBO corrigée se déduit de la FTBO d'origine par les relations :

$$\boxed{G'(\text{dB}) = 20 \log|C| + G(\text{dB})} \quad \boxed{\varphi' = \varphi_c + \varphi}$$

Le correcteur utilisé à la structure suivante :



L'amplificateur étant en contre réaction, on a $V_+ - V_- \approx 0 \text{ V}$, d'où $V_- \approx 0 \text{ V}$ puisque $V_+ = 0 \text{ V}$. Les impédances d'entrées d'un amplificateur opérationnel étant très grandes, on a $i_- = 0$, d'où $i = i'$, soit :

$$\frac{\varepsilon - V_-}{R} = \frac{V_- - \varepsilon_c}{Z} \rightarrow \frac{\varepsilon}{R} \approx -\frac{\varepsilon_c}{Z} \quad \text{d'où} \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon} \approx -\frac{Z}{R}}$$

Le signe $-$ correspond à une inversion qu'il faut prendre en compte au moment du bouclage pour éviter de transformer la contre réaction en réaction positive. On l'annule facilement dans l'expérience en effectuant le retour non pas sur l'entrée $-$ de l'amplificateur, mais sur son entrée $+$ \rightarrow on omet le signe $-$ de C dans la suite des calculs.

Action proportionnelle :

$$\text{On a } Z = R' \rightarrow |C_P| = R'/R \text{ et } \varphi_P = 0^\circ$$

On peut donc tracer le diagramme de black de la FTBO corrigée P grâce aux relations :

$$\boxed{G'_P(dB) = 20 \log \left(\frac{R'}{R} \right) + G(dB)} \quad \boxed{\varphi'_P = \varphi}$$

Avec $R'/R = 10$ ou 100 compte tenu du choix des composants dans le montage.

Action intégrale :

$$Z = 1/jC\omega \rightarrow C_I = -j/(2\pi RCf) = -jf_I/f \rightarrow |C_I| = f_I/f \text{ et } \varphi_I = -90^\circ$$

On peut donc tracer le diagramme de black de la FTBO corrigée I grâce aux relations :

$$\boxed{G'_I(dB) = 20 \log \left(\frac{f_I}{f} \right) + G(dB)} \quad \boxed{\varphi'_I = -90^\circ + \varphi}$$

Avec $f_I = 1/2\pi RC = 4820 \text{ Hz}$ compte tenu du choix des composants ($R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 3,3 \text{ nF}$).

Action proportionnelle intégrale :

$$Z = R' - j/C\omega = R'(1 - j/2\pi R' Cf) = R'(1 - jf_{PI}/f)$$

$$C_{PI} = \frac{Z}{R} \rightarrow |C_{PI}| = \frac{R'}{R} \sqrt{1 + \left(\frac{f_{PI}}{f} \right)^2} \quad \text{et} \quad \varphi_{PI} = -\arctan \left(\frac{f_{PI}}{f} \right)$$

On peut donc tracer le diagramme de black de la FTBO corrigée PI grâce aux relations :

$$\boxed{G'_{PI}(dB) = 20 \log \left(\frac{R'}{R} \right) + 10 \log \left[1 + \left(\frac{f_{PI}}{f} \right)^2 \right] + G(dB)} \quad \boxed{\varphi'_{PI} = -\arctan \left(\frac{f_{PI}}{f} \right) + \varphi}$$

Cette correction a été testée avec $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R' = 30 \text{ k}\Omega$, $C = 3,3 \text{ nF}$, puis avec $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R' = 100 \text{ k}\Omega$, $C = 3,3 \text{ nF} \rightarrow$ on a respectivement $R'/R = 3$, $f_{PI} = 1610 \text{ Hz}$ et $R'/R = 10$, $f_{PI} = 480 \text{ Hz}$.

V.3.3 Calcul plus développé pour P = 100

Les oscillations observées en régime transitoire sur le système en boucle fermée corrigé à $P = 100$ ne s'expliquent pas avec un modèle d'amplificateur d'ordre 1³⁷. Le gain élevé du correcteur oblige à tenir compte du caractère passe bas d'ordre 1 de son amplificateur opérationnel. Un gain $P = 100$ conduit à une fréquence de coupure $f_{AO} \approx 1 \text{ MHz}/100 \approx 10 \text{ kHz}$ avec le produit Gain \times Bande Passante du composant. On a alors :

$$C'_P = \frac{R'}{R} \frac{1}{1 + j(f/f_{AO})} \quad |C'_P| = \frac{R'}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_{AO})^2}} \quad \text{et} \quad \varphi'_P = -\arctan \left(\frac{f}{f_{AO}} \right)$$

On peut donc modifier le diagramme de black de la FTBO corrigée à $P = 100$ grâce aux relations :

³⁷ Le système bouclé restant d'ordre 1 (cf. § V.2), il ne peut pas osciller.

$$G'_{P=100}(dB) = 20 \log \left(\frac{R'}{R} \right) - 10 \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_{AO}} \right)^2 \right] + G(dB)$$

$$\varphi'_{P=100} = -atg \left(\frac{f}{f_{AO}} \right) + \phi$$

V.3.4 Représentation graphique

Les expressions obtenues précédemment permettent de tracer les diagrammes de Black présentés au § II.6 de la partie expérimentale.

V.4 Evolution de la FTBF avec les correcteurs

Cette étude sert à juger du comportement du système en régime transitoire donc on utilise les constantes de temps comme paramètres dynamiques.

Comportement de l'amplificateur d'étude :

Le montage réalisé expérimentalement a pour fonction de transfert :

$$A(p) = \frac{A_0}{1 + \tau_0 p} \quad \text{ou} \quad \tau_0 = R_2 C = 330 \mu s \quad \text{avec} \quad R_2 = 100 k\Omega \quad \text{et} \quad C = 3,3 nF$$

Comportement en boucle fermée :

On a montré au § 5.2 que le comportement restait d'ordre 1 avec

$$f_{BF} = f_0(1 + AB).$$

$$\rightarrow \tau_{BF} = \frac{\tau_0}{1 + A_0 B} = 165 \mu s$$

Comportement avec correcteur P :

On a :

$$H = \frac{AC}{1 + ABC} \quad \text{avec ici} \quad C_P = \frac{R'}{R} = cte$$

$$\rightarrow H = \frac{\frac{A_0}{1 + \tau_0 p} C_P}{1 + \frac{A_0}{1 + \tau_0 p} B C_P} = \frac{A_0 C_P}{1 + \tau_0 p + A_0 B C_P} = \frac{\frac{A_0 C_P}{1 + A_0 B C_P}}{1 + \frac{\tau_0}{1 + A_0 B C_P} p} = \frac{H_{0P}}{1 + \tau_{BFP} p}$$

Le système reste d'ordre 1 avec les paramètres caractéristiques :

$$H_{0P} = \frac{A_0 C_P}{1 + A_0 B C_P} \quad \text{et} \quad \tau_{BFP} = \frac{\tau_0}{1 + A_0 B C_P}$$

Correction intégrale I :

$$C_I = \frac{1}{jRC\omega} = \frac{1}{\tau_I p} \quad \text{avec} \quad \tau_I = RC$$

$$\rightarrow H = \frac{\frac{A_0}{1 + \tau_0 p} \frac{1}{\tau_I p}}{1 + \frac{A_0}{1 + \tau_0 p} B \frac{1}{\tau_I p}} = \frac{A_0}{(1 + \tau_0 p) \tau_I p + A_0 B} = \frac{A_0}{A_0 B + \tau_I p + \tau_0 \tau_I p^2} = \frac{1/B}{1 + \frac{\tau_I}{A_0 B} p + \frac{\tau_0 \tau_I}{A_0 B} p^2}$$

La correction intégrale transforme cette fois-ci l'amplificateur en boucle fermée en un système d'ordre 2. L'identification avec l'équation caractéristique donnée au § II.2.2 de cette annexe permet d'obtenir les expressions de la pulsation propre et de l'amortissement du système ainsi que du dépassement à prévoir en régime transitoire :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A_0 B}{\tau_0 \tau_I}} \quad m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_I}{A_0 B \tau_0}} \quad D(\%) = 100 \times \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{\tau_I}{4A_0 B \tau_0 - \tau_I}}\right)$$