

# CAPTEURS DE GRANDEURS MECANQUES

## I INTRODUCTION

Un capteur est dispositif permettant de convertir une grandeur physique non électrique (la mesurande notée  $m$ ) en grandeur électrique (notée  $V$ ) afin de la quantifier à l'aide d'appareils électriques ou électroniques. La relation  $V = S.m$  doit être univoque, monotone et reproductible. Les propriétés permettant la conversion se regroupent en 2 familles :

- variation d'une impédance (résistance, capa ...) → capteurs passifs
- la génération d'un courant, d'une tension ou d'une charge (capteurs actifs)

En bout de chaîne, le signal mesuré peut-être de deux sortes : une fréquence (le conditionneur est alors un oscillateur) ou une tension (multiples possibilités de conditionnement). Tout capteur étant soumis à des grandeurs d'influence (la température notamment), il faut vérifier que leur effet est négligeable pour valider la mise en pratique d'un capteur.

## II MESURE D'UNE DEFORMATION

Le capteur est une jauge de déformation (et non de contrainte comme c'est écrit souvent). On met à profit la variation de résistance d'un fil fin avec sa longueur (cf. [1], p 378).

### II.1 Dispositif d'étude

On utilise une barre rectangulaire en Dural sur laquelle sont collées 3 jauges (dispositif de chez Vishay Micromesures). La face supérieure comporte une jauge orientée suivant la plus grande longueur de la barre et une autre collée perpendiculairement. La troisième jauge se trouve sur la face inférieure avec la même orientation que la première. La résistance de chaque jauge fait environ 350  $\Omega$ .

#### Effet d'une déformation sur la résistance des jauges :

On fixe solidement une des extrémités de la barre sur le bord d'une pailasse à l'aide d'un système permettant de définir un point fixe sur toute la largeur de la poutre. On peut alors appuyer sur l'autre extrémité de la barre et observer l'évolution de la résistance d'une jauge à l'aide d'un ohmmètre numérique affichant au moins 4 digits. On obtient typiquement des variations de l'ordre du  $1/10^{\text{ème}}$  d'ohm pour des déformations raisonnables<sup>1</sup>. Les jauges de contraintes sont donc des capteurs peu sensibles et une mesure directe de la résistance n'est pas optimale puisqu'elle se fait autour d'une valeur non nulle. Pour contourner ce problème, on a recours à une mesure par pont.

### II.2 Montage de mesure

[2], § V.3.2

L'utilisation d'un pont de Wheastone préalablement équilibré simplifie les choses puisqu'il permet de faire des mesures autour d'une valeur nulle.

---

<sup>1</sup> Les jauges doivent travailler dans un domaine de déformation  $\Delta \ell / \ell$  inférieur à 1%.

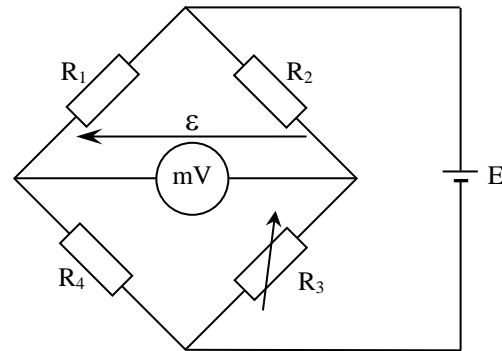
$R_1, R_2 : 350 \, \Omega$

$R_4$  : jauge  $350 \, \Omega$

$R_3$  : résistance d'équilibrage (cf. ci-dessous)

$E$  : alimentation continue stable

mV : multimètre sensible



Les résistances  $R_1$  et  $R_2$  doivent être sélectionnées ou réglées pour être les plus proches possibles afin de pouvoir utiliser les formules démontrées en annexe. Une valeur correspondant à la résistance nominale de la jauge permet d'optimiser la sensibilité du pont (cf. annexe).

### Equilibrage du pont :

Il faut ajuster la résistance  $R_3$  pour annuler au mieux la tension  $\varepsilon$  en l'absence de déformation. Cela revient à avoir  $R_3 = R_4 \approx 350 \, \Omega$  puisque la condition d'équilibre est  $R_1 R_3 = R_2 R_4$  et on a  $R_1 = R_2$ . La difficulté consiste à obtenir au mieux cette condition. Une solution possible consiste à associer en parallèle une résistance  $R'$  légèrement supérieure à  $350 \, \Omega$  et un potentiomètre multitour de forte valeur ( $R_{\text{pot max}} = 100 \, \text{k}\Omega$  par exemple). La résistance équivalente vaut alors  $R_3 = R' R_{\text{pot}} / (R' + R_{\text{pot}}) \approx 350 \, \Omega$  si  $R_{\text{pot}}$  est grand et on peut ajuster très finement sa valeur en jouant sur le potentiomètre.

### II.3 Effet d'une déformation

Une fois le pont équilibré, on ajoute des masses à l'extrémité libre de la poutre et on mesure la tension  $\varepsilon$  :

M (g)	0	100	200	300	400	500
$\varepsilon$ (mV)						

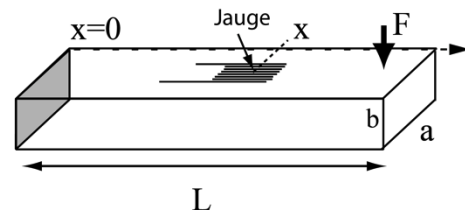
La tension  $\varepsilon$  doit être proportionnelle à la masse  $M$  pour de faibles déformations, ce que confirment les calculs faits en annexe :

$$\varepsilon = V \frac{R_1}{(R_1 + R_4)^2} \Delta R$$

### II.4 Comparaison avec la théorie

On admet que l'expression théorique de la déformation de la barre (jauge collée sur face supérieure à la distance  $x$  du point d'ancrage) soumise à une force extérieure appliquée sur son extrémité  $x = L$  est donnée par :

$$\varepsilon_{xx} = F \frac{b}{2EI} (L - x) = 6 \frac{F}{Eab^2} (L - x)$$



Où  $I = ab^3/12$  est le moment quadratique de la section droite et  $L - x$  est la distance entre la jauge et l'extrémité libre de la barre. Noter que  $x = 0$  correspond à la position du point d'ancrage où la déformation est la plus forte.

Une mesure rapide de l'ordre de grandeur de la déformation est obtenue à partir de la variation de résistance de jauge. Pour cela, il faut suspendre une masse (500g – 1kg) à l'extrémité de la barre et mesurer la tension  $\varepsilon$  aux bornes du pont. On en déduit la valeur de la variation  $\Delta R$  de la résistance de jauge à l'aide de la formule du § précédent puis la valeur de la déformation  $\varepsilon_{xx}$  compte tenu de la relation suivante :

$$\frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta \ell}{\ell} = K \varepsilon_{xx}$$

Avec le facteur de jauge  $K = 2,1$  (cf. fiche constructeur).

### **II.5 Doublement de la sensibilité**

On remplace la résistance  $R'$  par la jauge située au-dessous de la poutre. On équilibre une nouvelle fois le pont sans déformation en jouant sur  $R_{\text{pot}}$ , on remet les masses et on mesure de nouveau  $\varepsilon$ . Le signal doit être deux fois plus fort qu'auparavant pour une même masse  $M$ , ce que confirme le calcul effectué en annexe :

$$\varepsilon = V \frac{2R_1}{(R_1 + R_4)^2} \Delta R$$

### **II.6 Compensation en température**

La résistance d'un métal dépend de la température (cf. montage métaux) et les  $\Delta R$  induits sont du même ordre de grandeur que ceux dus à une déformation. On peut corriger ce biais en utilisant comme résistance  $R_3$  la seconde jauge collée perpendiculairement à la première car elle subit la même contrainte thermique sans être trop affectée par la déformation. Les calculs développés en annexe montrent qu'on a alors :

$$\varepsilon = V \frac{R_1}{(R_1 + R_4)^2} \Delta R_1$$

#### **Manipulation :**

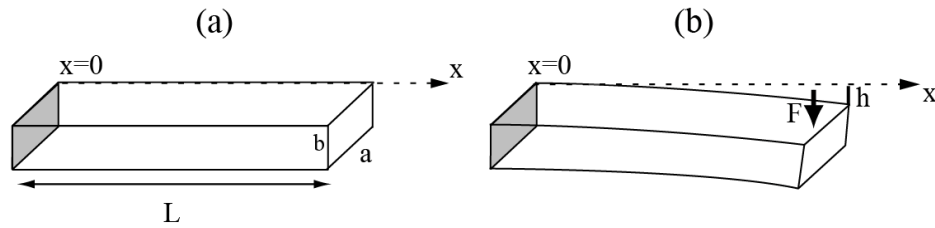
On commence avec le pont équilibré sans déformation du § II.3. On ajoute une masse  $M$  et on note la valeur de  $\varepsilon$ . On chauffe alors la jauge avec un sèche-cheveux ou une lampe QI focalisée sur la jauge → La tension  $\varepsilon$  doit augmenter.

On attend que la barre se refroidisse. On remplace  $R'$  par la jauge collée perpendiculairement. On équilibre une nouvelle fois le pont avec  $R_{\text{pot}}$ , on ajoute la masse  $M$  et on note  $\varepsilon$ . Cette tension doit maintenant rester constante si on chauffe de nouveau les jauges.

Cette manipulation est délicate à réussir si le refroidissement est imparfait entre les deux manipulations. Il faut attendre que le signal revienne à sa valeur d'origine avant de passer au 2<sup>ème</sup> montage. L'autre difficulté est d'avoir un échauffement homogène dans la barre (c'est la source d'erreur la plus difficile à éliminer).

### **II.7 Expérience complémentaire : mesure du module d'Young**

On peut évaluer le module de rigidité ou module d'Young d'une barre encastrée à l'une de ses extrémités par la mesure de sa flèche  $h$  quand on exerce une force  $F$  sur l'autre extrémité :



Soit  $E$  le module d'Young (en  $\text{N/m}^2$ ), une barre de longueur  $L$ , d'épaisseur  $b$  et de largeur  $a$ . Si le poids propre de la barre est négligeable, on peut montrer que la valeur de la flèche est donnée par l'expression suivante (cf. [3], § 448 « calcul de la flèche d'une poutre fléchie », pages 634 et 635) :

$$h = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{4FL^3}{Eab^3}$$

### Manipulation :

Mesurer la flèche  $h$  sous l'action d'une masse  $m$ . Retourner la barre, mesurer sa flèche  $h'$ . Faire la moyenne de  $h$  et  $h'$ . En déduire  $E$  et comparer aux données constructeur (Aluminium 5754 H111:  $E = 70,5 \text{ GPa}$ , PVC :  $E = 2,5 - 4 \text{ GPa}$ ).

### **III CAPTEUR DE POSITION**

On peut réaliser un capteur de position capacitif  $\rightarrow$  se reporter au montage sur les effets capacitifs. Une autre idée simple de capteur de position basé sur l'induction est aussi proposée dans le montage sur le magnétisme (§ IX.3).

### Bibliographie :

[1] : Georges Hasch : Capteurs en instrumentation

[2] : Duffait : Expériences d'électronique

[3] : Georges Bruhat : Cours de physique générale, Mécanique, Sixième édition,

Masson

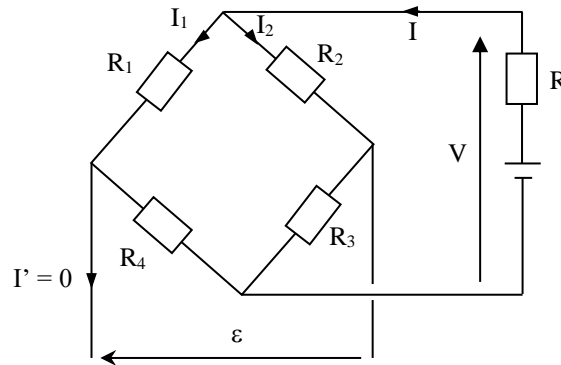
# ANNEXE : JAUGE DE DEFORMATION - CALCULS

## I MONTAGE

$R_4$  : jauge

$R_1 = R_2$

$R_3 = R_4$



## II EXPRESSION DE $\varepsilon$ SANS DEFORMATION

$$\varepsilon = R_2 I_2 - R_1 I_1 = R_4 I_1 - R_3 I_2$$

$$V = (R_1 + R_4) I_1 = (R_2 + R_3) I_2$$

$$\rightarrow \boxed{\varepsilon = V \left( \frac{R_4}{R_1 + R_4} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)}$$

$\varepsilon$  s'annule lorsque  $R_4 (R_2 + R_3) = R_3 (R_1 + R_4)$ , soit  $R_2 R_4 + R_3 R_4 = R_1 R_3 + R_3 R_4$ , d'où :

$$\boxed{\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \frac{R_4}{R_1 + R_4} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \Leftrightarrow R_1 R_3 = R_2 R_4}$$

L'extrême sensibilité du montage permet de calculer directement  $R_4$  avec une bonne précision si on a de bons étalons pour  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ .

## III EXPRESSION DE $\varepsilon$ AVEC DEFORMATION

$$\varepsilon = V \left( \frac{R_4 + \Delta R}{R_1 + R_4 + \Delta R} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)$$

$$\frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_4}{R_1 + R_4} \quad \text{suite à l'équilibrage du pont d'où :}$$

$$\varepsilon = V \left( \frac{R_4 + \Delta R}{R_1 + R_4 + \Delta R} - \frac{R_4}{R_1 + R_4} \right)$$

En mettant le même dénominateur puis en développant le numérateur, on obtient<sup>2</sup> :

<sup>2</sup> Si on souhaite refaire le calcul, il ne faut pas simplifier trop vite le quotient en effectuant l'hypothèse  $R_1 + R_4 + \Delta R \approx R_1 + R_4$  à partir de la deuxième ligne car on obtient dans ce cas  $\varepsilon = V \cdot \Delta R / (R_1 + R_4)^2$ . Cela revient alors à négliger deux fois  $\Delta R$  au lieu d'une. De plus, si on identifie les deux expressions obtenues pour  $\varepsilon$ , cela revient à faire l'hypothèse  $R_1 + R_4 \approx R_1$ .

$$\varepsilon = V \left( \frac{R_1 \Delta R}{(R_1 + R_4 + \Delta R)(R_1 + R_4)} \right)$$

Or  $\Delta R \cong 0,1 \Omega \Rightarrow R_1 + R_4 + \Delta R \cong R_1 + R_4$  d'où :

$$\boxed{\varepsilon = V \frac{R_1}{(R_1 + R_4)^2} \Delta R}$$

Remarque :

L'analyse de l'expression de  $\varepsilon$  en fonction de  $R_1$  montre que  $\varepsilon$  est maximum si  $R_1 = R_4$ . Il vaut donc mieux prendre des résistances  $R_1$  et  $R_2$  qui correspondent à la valeur de la jauge pour avoir un maximum de signal.

#### IV DOUBLEMENT DE LA SENSIBILITE

On remplace  $R_3$  par une jauge de même nature située en dessous de la barre. Avec déformation, on remplace  $R_4$  par  $R_4 + \Delta R$  et  $R_3$  par  $R_3 - \Delta R$ . On obtient alors :

$$\varepsilon = V \left( \frac{R_4 + \Delta R}{R_1 + R_4 + \Delta R} - \frac{R_3 - \Delta R}{R_2 + R_3 - \Delta R} \right)$$

En mettant de nouveau au même dénominateur, puis en développant le numérateur, on trouve :

$$\varepsilon = V \left( \frac{R_2 R_4 + R_2 \Delta R - R_1 R_3 + \Delta R R_1}{(R_1 + R_4 + \Delta R)(R_2 + R_3 - \Delta R)} \right)$$

$R_2 R_4 = R_1 R_3$  à l'équilibre, d'où :

$$\varepsilon = V \left( \frac{(R_1 + R_2) \Delta R}{(R_1 + R_4 + \Delta R)(R_2 + R_3 - \Delta R)} \right)$$

Et avec  $R_2 = R_1$  :

$$\varepsilon = V \left( \frac{2 R_1 \Delta R}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \right)$$

Comme  $R_2 R_4 = R_1 R_3$  et  $R_2 = R_1$ , on a  $R_4 = R_3$ , d'où finalement :

$$\boxed{\varepsilon = V \left( \frac{2 R_1}{(R_1 + R_4)^2} \right) \Delta R}$$

On voit que la sensibilité est doublée par rapport à l'expression précédente de  $\varepsilon$ .

#### V COMPENSATION EN TEMPERATURE

On ne traite que le cas le plus simple où  $R_3$  est une jauge de même nature que  $R_4$ , soumise à la grandeur d'influence mais pas à la déformation (jauge collée perpendiculaire à la déformation). Avec déformation et grandeur d'influence, on remplace  $R_4$  par  $R_4 + \Delta R + \Delta R_T$  et  $R_3$  par  $R_3 + \Delta R_T$

$$\varepsilon = V \left( \frac{R_4 + \Delta R + \Delta R_T}{R_1 + R_4 + \Delta R + \Delta R_T} - \frac{R_2 + \Delta R_T}{R_2 + R_3 + \Delta R_T} \right) = V \left( \frac{(R_2 R_4 + R_2 \Delta R + R_2 \Delta R_T - R_1 R_3 - R_1 \Delta T)}{(R_1 + R_4 + \Delta R + \Delta R_T)(R_2 + R_3 - \Delta R_T)} \right)$$

$$\varepsilon = V \left( \frac{(R_2 R_4 + R_2 \Delta R + R_2 \Delta R_T - R_1 R_3 - R_1 \Delta T)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \right)$$

$R_2 R_4 = R_1 R_3$  suite au 1<sup>er</sup> premier équilibrage :

$$\varepsilon = V \left( \frac{R_2 \Delta R + (R_2 - R_1) \Delta R_T}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \right)$$

$$\varepsilon = V \left( \frac{R_2 \Delta R}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \right)$$

Comme  $R_1 + R_4 = R_2 + R_3$ , on a au final :

$$\varepsilon = V \frac{R_1}{(R_1 + R_4)^2} \Delta R$$

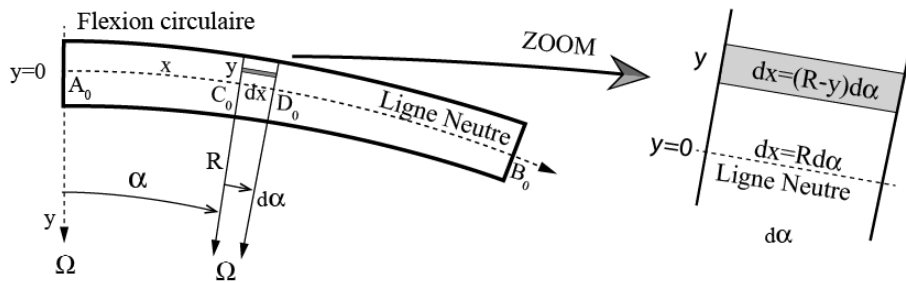
On retrouve la même expression  $\rightarrow$  la grandeur d'influence ne modifie pas le résultat avec cette configuration. On pourrait démontrer qu'en prenant pour  $R_3$  la jauge collée au-dessous, on aurait doublement de la sensibilité et compensation en température. Pour ce faire, il suffit de faire les permutations  $R_3 \rightarrow R_3 + \Delta R + \Delta R_T$  et  $R_4 \rightarrow R_4 + \Delta R + \Delta R_T$ .

## VI CALCUL DE LA DEFORMATION D'UNE BARRE SOUMISE A UNE FORCE EXTERIEURE (POIDS NEGLIGEABLE)

### VI.1 Flexion circulaire

[3], § 446 p. 631.

On considère une barre (supposée de poids négligeable) soumise à une flexion circulaire pure obtenue par pincement de la barre à chaque extrémité en exerçant un couple de flexion  $C$  identique en tout point de la barre. Dans ce cas, le rayon de courbure  $R$  est le même en tout point de la barre et  $\Omega$  est le centre de courbure unique de la barre (flexion circulaire).



#### VI.1.1 Ligne neutre

Il existe une ligne centrale  $A_0B_0$  (ligne en pointillée) qui ne change pas de longueur. Cette ligne est appelée la ligne neutre et elle a une circonférence de rayon  $R$ . Après déformation, un petit élément en gris et de longueur initiale  $dx = R d\alpha$  s'allonge en  $(R-y)d\alpha$ . L'allongement est donc  $y d\alpha$  ( $y < 0$ ) et l'allongement relatif qui représente la déformation longitudinale  $\varepsilon_{xx}$  est donc :

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{d\alpha}{dx} = -\frac{y}{R} \quad (1)$$

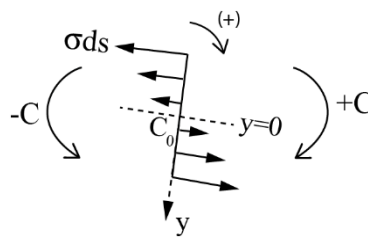
Le petit élément en gris qui s'allonge ( $y < 0$ ) est donc soumis en M à une contrainte positive  $\sigma$  (N/m<sup>2</sup>) normale à sa section droite d'expression :

$$\frac{\sigma}{E} = -\frac{y}{R} \quad (2)$$

Les deux points essentiels à retenir sont (i) la contrainte  $\sigma$  change de signe de part et d'autre de la ligne neutre centrale (ii) la valeur de cette contrainte  $\sigma$  dépend du rayon de courbure de la barre qui est ici constant dans le cas d'une section circulaire.

### VI.1.2 Equilibre de la barre en flexion circulaire

Les forces  $\sigma ds$  qui s'exercent en tout point d'une section droite en  $C_0$  sont égales et opposées de telle sorte que leur résultante est nulle. L'ensemble des forces  $\sigma ds$  qui s'exercent en tout point d'une section droite en  $C_0$  constituent le couple de rappel  $(-C)$ .



En écrivant que le moment des forces  $-y\sigma ds$  sur l'ensemble de la section S forme le couple de rappel  $-C$ , on obtient :

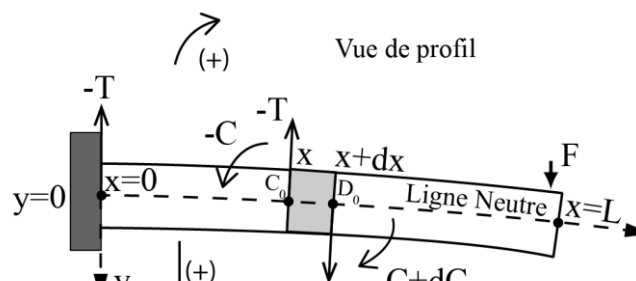
$$\int_S y\sigma dS = -C \rightarrow -\frac{E}{R} \int_S y^2 dS = -C$$

On note que  $I = \int_S y^2 dS$  est le moment quadratique de la section droite de la barre. On obtient le résultat important suivant, que le moment fléchissant C est reliée à la courbure  $d\alpha/dx$  de la barre par la relation suivante :

$$C = \frac{EI}{R} = EI \frac{d\alpha}{dx} \quad (3)$$

### VI.2 Flexion plane non circulaire

La barre (supposée de poids négligeable) est encastrée à une extrémité et est fléchie sous l'action d'une force extérieure  $F$ . La partie supérieure de la barre s'allonge tandis que la partie inférieure se rétrécit. On admet qu'il existe toujours une "ligne neutre" non déformée (en pointillé). L'origine des axes  $x$  et  $y$  est pris par rapport à cette ligne. Dans ce cas, la flexion n'est plus circulaire et le rayon de courbure change en tout point de la ligne neutre.  $R$  en  $x = L$  et  $R = \infty$  en  $x = 0$ . Sous l'action de la force extérieure  $F$ , un cisaillement  $T$  de la barre apparaît. La section en gris sur la figure est en équilibre sous l'action de forces de cisaillement  $T$  et de couples de flexion  $+C$  et de rappel  $-C$  qui sont exercés par le reste de la barre sur ses sections droites en  $C_0$  et  $D_0$  :





Bilan des forces sur la partie en gris :

$$(-T) + (T + dT) = 0 \rightarrow T = \text{cte}$$

Remarque : le cisaillement est constant sur chaque section droite. C'est le résultat de l'approximation du poids négligeable.

Bilan des moments au point  $D_0$  (sens + horaire) :

$$(-C) + (C + dC) + Tdx = 0 \rightarrow dC/dx = -T$$

L'existence de l'effort tranchant  $T$  entraîne (i) une variation du moment fléchissant  $C$  d'une section à l'autre de la barre, (ii) une variation du rayon de courbure  $R$  de la barre ( $R = dx/d\alpha$ ).

Bilan des forces en  $x = 0$  :

$$F = T, \text{ on a donc } dC/dx = -F \text{ à partir de l'équation précédente, d'où } C = -Fx + \text{cte}$$

Bilan des moments en  $x = 0$  :

$$C = FL \rightarrow FL = \text{cte. On a donc l'expression suivante du moment fléchissant :}$$

$$C = F(L - x) \quad (4)$$

Déformation longitudinale  $\varepsilon_{xx}$  de la barre de poids négligeable sous l'action d'une force extérieure  $F$  :

Soient  $b$  l'épaisseur et  $a$  la largeur  $a$  de la barre de longueur  $L$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \varepsilon_{xx} = -y \frac{d\alpha}{dx} \\ (3) \quad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{C}{EI} \\ (4) \quad C = F(L - x) \end{array} \right\} \rightarrow \varepsilon_{xx} = -y \frac{F(L - x)}{EI} \xrightarrow{y = -b/2} \varepsilon_{xx} = \frac{Fb(L - x)}{2EI} = \frac{6F}{Eab^2} (L - x)$$

## **VII FLECHE h D'UNE BARRE DE LONGUEUR L SOUMISE A UNE FORCE EXTERIEURE F (POIDS NEGLIGEABLE)**

[3], § 447, p. 633 ; Flexion non circulaire.

Soit deux points voisins  $C_0$  et  $D_0$  de la ligne neutre séparés par  $dx$ .  $R$  et  $\alpha$  sont respectivement le rayon de courbure et l'angle de courbure en  $C_0$ .  $R$  et  $\alpha$  varient le long de la barre car la flexion n'est plus circulaire. Si les courbures sont grandes et les déplacements verticaux  $dy$  suivant  $y$  sont faibles, on a :

$$dy \approx \alpha dx \quad (5)$$

$$(3) \quad C = EI \frac{d\alpha}{dx}$$

$$(4) \quad C = F(L - x) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{EI} (L - x) \quad \xrightarrow{x=L} \quad y_{\max} = h = \frac{FL^3}{3EI}$$

$$(5) \quad \alpha = \frac{dy}{dx}$$

