Institut National Universitaire Champollion

Chapitre 8 - Type Somme

Introduction

Jusqu'à présent, nous avons manipulé les types :

- **élémentaires :** `int`, `float`, `bool`, `char`, `string`
- **construits :** `fonctions`, `n-uplets`, `listes`

et toutes les combinaisons de ceux-ci.
Dans ce chapitre, nous allons à présent voir comment :

- Définir et nommer nos propres types
- Comment définir des types regroupant les différentes formes que peut prendre un objet. Ce sont les **types sommes**.

Important

Les types **sommes** sont définis lorsqu'un objet peut prendre plusieurs formes.

1. Exemples illustratifs

Exemple 1

Nous pourrions souhaiter regrouper les entiers (`int`) et les réels (`float`) sous un même type `nombre`.

Exemple 2

La solution d'un trinôme du second degré peut être un réel, deux réels distincts ou deux complexes conjugués. Nous pouvons avoir envie de regrouper ces différentes formes sous un même type `solution`.

Exemple 3

Un polynôme peut être représenté par :

- Son degré et la liste de ses coefficients $(n, [a_0, \ldots, a_n])$ de type `int*float list`. Il s'agit de la représentation pleine des polynômes.
- Cette représentation n'est pas adaptée pour les polynômes creux, comme $X^{17} - 1$, pour lequel on préfère la représentation par une liste de couples (k, a_k) représentants chaque monôme. Il s'agit donc d'un type `(int*float) list`

Nous voulons là encore, regrouper ces deux représentations sous un même type `polynome`.

Définir un type somme

Nous allons voir dans la suite trois façons de définir un type somme :

- Par énumération de constantes
- À l'aide de constructeurs
- De manière récursive

Fonction définies sur un type somme

Nous allons le voir au fil des exercices, le plus efficace pour écrire des fonctions sur un type somme, est de les définir...par filtrage ! La plupart du temps, il y aura un filtre pour chaque constante/constructeur.

2. Les types énumérateurs de constantes

Définition 1

La syntaxe générale permettant de définir un type ne prenant qu'un nombre fini de valeurs constantes est :

```
type id = Cst1 | ... | Cstn  ; ;
```

Notons que le nom des valeurs doit commencer par une majuscule.

Exemple 4

Le type booléen ne prend que deux valeurs constantes. Il peut être énuméré :

```
#type booleen = True | False  ; ;

#let vrai = True  ; ;
vrai  : booleen = True
```

Exemple 5

Les couleurs d'un jeu de cartes :

```
# type couleur_carte = Pique | Coeur | Carreau | Trefle  ; ;

#Pique  ; ;
-  : couleur_carte = Pique
```

Exercice . Exercice TP 1 - Les couleurs

1. Définir un type énuméré *couleur* contenant les constantes : Blanc, Noir, Rouge, Vert, Bleu, Jaune, Cyan et Magenta.
2. Écrire une fonction `est_colore : couleur -> bool` qui renvoie faux pour Noir et Blanc, et vrai pour les autres couleurs du type `couleur`.
3. Écrire une fonction `complementaire : couleur -> couleur` qui, à une couleur, associe son complémentaire.

3. Les constructeurs de type somme

Définition 2

Si nous souhaitons définir un type de nom `id` pour représenter un objet pouvant prendre plusieurs formes de types différents. Il faut donner un nom à chacune des formes possibles et la syntaxe est :

```
type id = Nom_1 of t1 | ... | Nom_n of tn  ;;
```

Un objet de ce type est alors utilisé sous la forme :

```
Nom_i exp
```

où `Nom_i` est le nom de la i-ème forme et `exp` une expression de type ti.
Là encore, le nom des formes doit commencer par une majuscule.

Exemple 6

Nous pouvons enfin regrouper les entiers et les réels dans un même type :

```
# type nombreNR = N of int | R of float  ;;

# N 4  ;;
- :nombreNR = 4
#R 4.  ;;
- :nombreNR = 4.

# (N 4) + 1  ;;
Error  : This expression has type nombreNR but an expression was expected
of type int
```

Exercice . Exercice TP 2

Définir les types `solution` et `polynome` décrits dans les exemples plus haut.

Exercice . Exercice TP 3

1. À partir du type `nombreNR` défini plus haut, écrire des fonctions `somme : nombreNR * nombreNR -> nombreNR` et `prod : nombreNR * nombreNR -> nombreNR` mettant en œuvre l'addition et la multiplication de deux objets de type `nombreNR`.
2. Définir un type somme `nombreRC`, regroupant les nombres réels et complexes (représentés par le couple de réels (partie réelle, partie imaginaire)).
3. Écrire des fonctions `somme : nombreRC * nombreRC -> nombreRC` et `prod : nombreRC * nombreRC -> nombreRC` mettant en œuvre l'addition et la multiplication de deux objets de type `nombreRC`.

BONUS - Complément sur les filtres

3.1. match...with

Définition 3

La structure `match .. with` permet un filtrage dit explicite, c'est à dire en nommant le paramètre de la fonction.

Exemple 7

```
let liste_vide = function l -> match l with
[] -> true
|_ -> false  ; ;
```

Ce qui permet notamment de choisir de ne filtrer que sur un élément d'un n-uplet :

```
let rec concatene = function (a,b) -> match a with
[] -> b
| x : :q -> x : : concatene(q,b)  ; ;
```

Ce qui peut se réécrire encore plus simplement :

```
let rec concatene (a,b) = match a with
[] -> b
| x : :q -> x : : concatene(q,b)  ; ;
```

3.2. Nommage d'une valeur filtrée

Définition 4

Le mot-clef `as` permet de nommer tout ou partie d'un filtre.

Exemple 8

Le calcul du minimum de deux nombres rationnels ; c'est à dire de deux nombres fractionnels $\frac{n1}{d1}, \frac{n2}{d2}$ représentés par des couples $(n1,d1)$ et $(n2,d2)$.

```
let minRat = fun
(((n1,d1) as r1), ((n2,d2) as r2)) -> if n1*d2 < n2*d1 then r1 else r2  ; ;
```

3.3. Le filtrage gardé

Définition 5

Le filtrage gardé `when cond` est une syntaxe allégée pour le cas fréquent ou un filtre est immédiatement suivi par une expression conditionnelle.

Remarque : La condition après le `when` doit avoir une complexité triviale.

Exemple 9

```
let egalNonNul = fun
(0,0)-> false
|(x,y) when x=y -> true
|(x,y) -> false ; ;
```

4. Les types sommes récursif

Définition 6

Un type somme est **récursif** si son identificateur apparaît dans sa définition. Cela ne nécessite pas de syntaxe spéciale, mais une attention particulière.

Exemple 10

Une peinture, c'est une couleur primaire, ou c'est un mélange de couleurs.

```
type peinture = Bleu | Jaune | Rouge | Melange of peinture*peinture  ; ;
```

Une bibliothèque, c'est vide ou c'est le résultat d'ajouts de livres :

```
type livre = Conte | Roman | Nouvelle  ; ;
(* livre est un type somme défini par énumération de constantes *)

type biblio = Vide | Ajout of livre*biblio  ; ;
(* biblio est un type somme récursif *)
```

Et sans surprise, les fonctions définies sur un type somme récursif, seront la plupart du temps, elles-mêmes récursives.

```
let rec nb_livres = fun
Vide -> 0
| (Ajout (_, bib)) -> 1 + nb_livres(bib)  ; ;
```

Exemple 11

Un arbre binaire, c'est une feuille ou un noeud constitué de deux sous-arbres. En prenant par exemple des valeurs entières pour les noeuds, on obtient

```
type arbre = Feuille of int | Noeud of int*arbre*arbre  ; ;
```

La somme des valeurs des sommets d'un arbre binaire entier est alors obtenue par :

```
let rec somme = fun
(Feuille n) -> n
| (Noeud(n, t1, t2)) -> n + somme(t1) + somme(t2) ; ;
```

Exercice . Exercice TP 4 - Les expressions logiques

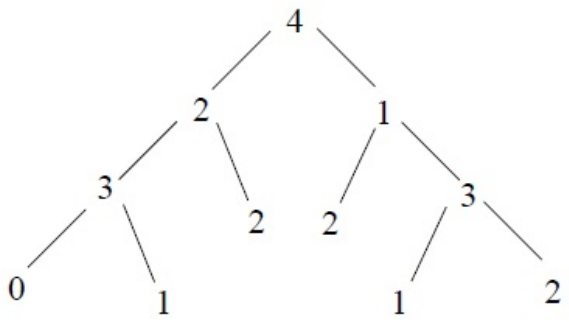
Une expression logique peut être définie à l'aide du type somme énuméré suivant :

```
type exprLogique =
Vrai | Faux
| Non of exprLogique
| Et of exprLogique*exprLogique
| Ou of exprLogique*exprLogique ; ;
```

1. Définir l'expression logique *exp = ((V et V) ou (non (F ou non V)) et V)*.
2. Écrire une fonction `echange : exprLogique -> exprLogique` qui, au sein d'une expression logique, échange toutes les constantes `Vrai` et `Faux`.
3. Écrire une fonction `evalue : exprLogique -> bool` qui calcule la valeur d'une expression logique. Que vaut l'expression *exp* ?

Exercice . Exercice TP 5 - Les arbres d'entiers

Considérons des arbres binaires dont les nœuds et les feuilles sont des entiers. Par exemple, appelons T l'arbre suivant :



Un tel arbre peut être décrit par le type récursif suivant :

```
type arbre =  Feuille of int
| Noeud of int*arbre*arbre ; ;
```

L'arbre T peut alors être défini par :

```
let t= Noeud  (4,   Noeud    (2, Noeud (3, Feuille 0, Feuille 1),  Feuille 2),
Noeud    (1,  Feuille 2, Noeud (3, Feuille 1, Feuille 2))) ; ;
```

1. Écrire une fonction `profondeur : arbre -> int` calculant la profondeur d'un arbre, c'est à dire, la plus grande distance entre la racine et une feuille de l'arbre. La hauteur de l'arbre T est 3. On écrire localement la fonction `max` qui calcule le maximum de deux entiers.
2. Un arbre binaire est dit **complet de profondeur** p si toutes ses feuilles sont à la même profondeur p. T n'est pas complet car il possède 6 feuilles, 2 de profondeur 2 et 4 de profondeur 3.

Écrire une fonction `complet : int * int -> arbre` qui, à un entier p et un entier n, associe l'arbre binaire complet de profondeur p dont tous les nœuds et toutes les feuilles valent n.

```
complet(3,1) ; ;
- : arbre = Noeud (1, Noeud (1, Noeud (1, Feuille 1, Feuille 1),
Noeud (1, Feuille 1, Feuille 1)),
Noeud (1, Noeud (1, Feuille 1, Feuille 1), Noeud (1, Feuille 1, Feuille 1)))
```

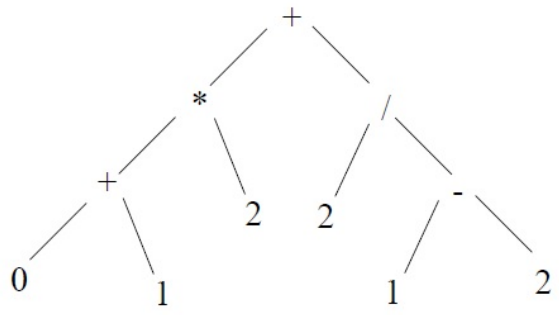
3. Écrire une fonction `liste : arbre -> int list` qui, à un arbre, associe la liste des valeurs de ses nœuds et de ses feuilles en donnant la valeur du nœud, puis le résultat du parcours du sous-arbre gauche, puis celui du sous-arbre droit :

```
liste(t) ; ;
- : int list = [4 ; 2 ; 3 ; 0 ; 1 ; 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 1 ; 2]
```

Expliciter les différents appels récursifs lors de l'appel à `liste(t)`.

Exercice . Exercice TP 6 - Les expressions arithmétiques

Considérons maintenant des arbres binaires dont les nœuds sont des opérations et les feuilles sont des entiers. Un tel arbre est utilisé pur représenter une expression arithmétique.
Par exemple, l'expression arithmétique $exp = ((0+1)*2)+(2/(1-2))$ peut être représentée par l'arbre T ci-dessous :



En Caml, nous utiliserons le type récursif suivant :

```
type expArithm =  Nb of int
| Oper of char*expArithm *expArithm  ; ;
```

1. Écrire l'expression exp.
2. Écrire une fonction `nbOper : expArithm -> int` qui compte le nombre d'opérations contenues dans une expression arithmétique.
3. Écrire une fonction `evalue : expArithm -> int` qui calcule la valeur d'une expression arithmétique. On pourra écrire au préalable une fonction `calcul : char * int * int -> int` définie par filtrage sur le caractère c et mettant en œuvre le calcul d'une des quatre opérations entre deux entiers a et b.

Exercice . Exercice TP 7 - Les mobiles

Le but de cet exercice est d'écrire un certain nombre de fonctions aidant à la réalisation de mobiles décoratifs pour berceaux.

Un mobile est constitué de baguettes de bois horizontales suspendues par des fils verticaux et aux extrémités desquels pendent des objets.

Les objets suspendus aux extrémités des tiges seront décrits par un type `objet` et constitueront les feuilles du mobile.

```
type  objet = Chat | Clown | Mouton ; ;

type mobile = Feuille of objet | Noeud of (int*int*mobile*mobile) ; ;
```

Les entiers représentent les longueurs des tiges. Nous associons à chaque objet un poids :

```
let poids_f =  fun
Chat -> 1
| Clown -> 3
| Mouton -> 2  ; ;

poids_f  : objet -> int = <fun>
```

On suppose que le poids des fils et des tiges est négligeable.

1. Écrire une fonction à deux arguments `fait_mob_simple  : int * objet -> mobile` permettant de construire un mobile constitué de deux tiges de même longueur donnée et de deux objets identiques à un objet donné.

   ```
   let m1 = fait_mob_simple(2,Chat) ; ;
   - m1  : mobile = Noeud (2, 2, Feuille Chat, Feuille Chat)
   ```

2. Écrire une fonction `poids_m  : mobile -> int` permettant de calculer le poids total d'un mobile, c'est à dire la somme des poids de tous les objets d'un mobile.
3. Écrire une fonction `agrandir_m  : mobile -> mobile` permettant de construire un mobile en doublant la longueur de toutes les tides d'un mobile donné.
4. Écrire une fonction `echanger_m  : objet * objet * mobile -> mobile` permettant de construire un mobile en échangeant deux objets à partir d'un mobile donné.

   ```
   let m2 = Noeud(2,4, Feuille(Mouton),
   Noeud (3,4, Feuille (Chat), Feuille (Clown)))  ; ;

   echanger_m (Chat, Mouton, m2)  ; ;
   -  : mobile = Noeud (2,4, Feuille(Chat) ,
   Noeud (3,4, Feuille(Mouton), Feuille (Clown)))
   ```

5. Un constructeur souhaite réaliser ce type de mobiles. Il a besoin de connaître la longueur des tiges utilisées, les différentes longueurs utilisées et les différents objets utilisés.
   a) Écrire une fonction `tiges_m : mobile -> int` permettant de calculer la longueur totale des tiges d'un mobile.
   b) Écrire une fonction `lg_tiges_m : mobile -> int list` permettant de calculer la liste des longueurs de toutes les tiges d'un mobile.
   c) Écrire une fonction `objets_m : mobile -> objet list` permettant de connaître la liste de tous les objets d'un mobile.

      Par exemple, `(objets_m m1)` retourne la liste [$Chat$,$Chat$] et `(objets_m m2)` retourne la liste [$Mouton$, $Chat$, $Clown$].
6. Un mobile est dit **localement équilibré** s'il est réduit à une feuille, OU s'il est de la forme $Noeud(\ell_1,\ell_2,m_1,m_2)$ avec $\ell_1 \times$ `poids_m` $m_1 = \ell_2 \times$ `poids_m` m_2.

   Un mobile est dit **globalement équilibré** si tous ses nœuds sont localement équilibrés.
   a) Écrire une fonction `eq_loc : mobile -> bool` permettant de déterminer si un mobile est localement équilibré.
   b) Écrire une fonction `eq_glob : mobile -> bool` permettant de déterminer si un mobile est globalement équilibré.
7. On appelle `profondeur d'une feuille`, la somme des longueurs des tiges à suivre pour atteindre cette feuille. Dans le mobile `m2`, la feuille `Chat` est à une profondeur 7.

   On appelle `profondeur d'un mobile`, la profondeur maximale d'une feuille de ce mobile (c'est à dire, la profondeur de la feuille la plus profonde).
   Écrire une fonction `profondeur : mobile -> int` permettant de calculer la profondeur d'un mobile. Par exemple, `profondeur m2` doit renvoyer 8.
8. Écrire la fonction `nombre_objets : mobile -> int list` qui détermine le nombre d'objets de chaque catégorie d'un mobile donné.
9. Écrire la fonction `egale_m : mobile * mobile -> bool` qui détermine si deux mobiles sont égaux.
10. Écrire la fonction `hauteur : mobile -> int` qui calcule le nombre maximum de fils verticaux dans un mobile donné. Par exemple, le mobile `m2` a pour hauteur 3.

    Nous dirons qu'un mobile m_1 est un sous-mobile du mobile m_2 si m_1 et m_2 sont égaux ou si m_1 est égal à un mobile participant à la construction de m_2.
11. Écrire une fonction `sous_mobile : mobile * mobile -> bool` qui détermine si un mobile est un sous-mobile d'un mobile donné.
12. Écrire la fonction `remplacer : mobile * mobile -> mobile` qui, dans un mobile, remplace toutes les occurrences d'un sous-mobile par un mobile donné.