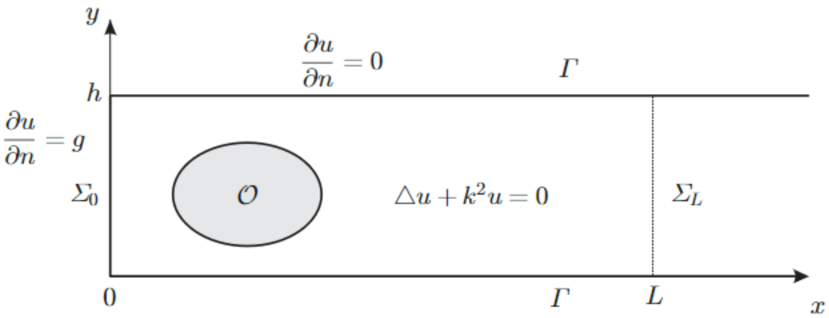
# TP AMS307

Thibault Mougin

February 2024

## 1 Introduction

On introduit la géométrie suivante :




où l'on cherche à résoudre ce problème :

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta u + k^2 u = 0$ | sur $\Omega$ | |
| $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ | sur $\Gamma \cup \partial\mathcal{O}$ | |
| $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ | sur $\Sigma_0$ | |
| $u(x,y) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{i\beta_n x}\varphi_n(y)$ | $\forall x > L$ | (condition de rayonnement) |

où $\beta_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}$ avec $\mathcal{I}m\beta_n \geq 0$ et $\mathcal{R}e\beta_n \geq 0$

$\varphi_n(y) = a_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$ avec $a_n = \sqrt{\frac{2}{h}}$ si $n > 0$ et $a_0 = \sqrt{\frac{1}{h}}$.

# 2 Réduction à un domaine borné

## 2.1 Approximation basse fréquence

### 2.1.1 Formulation variationnelle

Lorsque $k < \frac{\pi}{h}$, on introduit le problème approché suivant dans $\Omega_a = \Omega \cap ]0, a[\times]0, h[$ :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{sur } \Omega_a \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \partial\mathcal{O} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Sigma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = iku & \text{sur } \Sigma_a (a > L). \end{cases}$$

La formulation variationnelle associée est donnée par:

Trouver $p \in H^1(\Omega_a)$, tel que $\forall q \in H^1(\Omega_a)$,

$$\int_{\Omega_a} \left( \nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p \bar{q} \right) - \mathrm{i}k \int_{\Sigma_a} p\bar{q} = \int_{\Sigma_0} g\bar{q}.$$

### 2.1.2 Résultats numériques

On trace sur la figure 1 les parties réelles et imaginaires de $u$, solution du problème approché basse fréquence pour $k = 3 < \frac{\pi}{h}$ : les conditions aux limites semblent respectées, l'allure dans loin de la perturbation a l'air correcte.
Sur la figure 2, on trace la différence entre la solution $u$ obtenue par approximation basse fréquence et celle que l'on obtient avec l'opérateur DtN tronqué à 10 modes, notée $u_{10}$ (on place $\Sigma_a$ *assez loin* de la perturbation et $N = 10$ nous fournit alors une solution *quasi-exacte*). On observe que l'approximation basse fréquence fournit une solution acceptable : l'influence des modes d'ordre élevés ne se voit vraiment qu'au voisinage de $\Sigma_a$ et l'erreur est de l'ordre de $10^{-4}$ partout ailleurs.

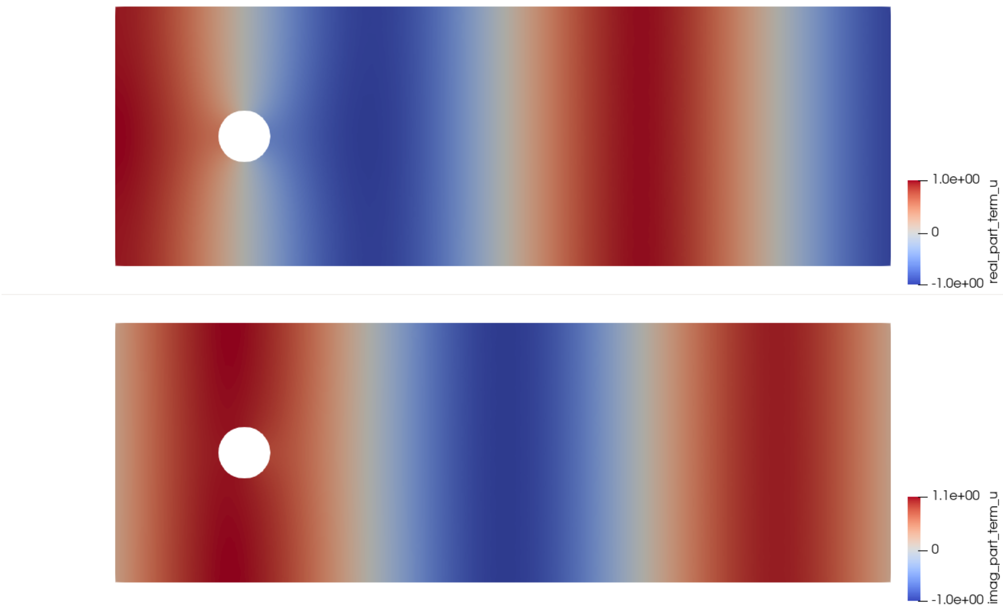



Figure 1: $\mathfrak{Re}\ u$ (haut), $\mathfrak{Im}\ u$ (bas), approximation basse fréquence, $k = 3$, $h = 1$, $a = 3$

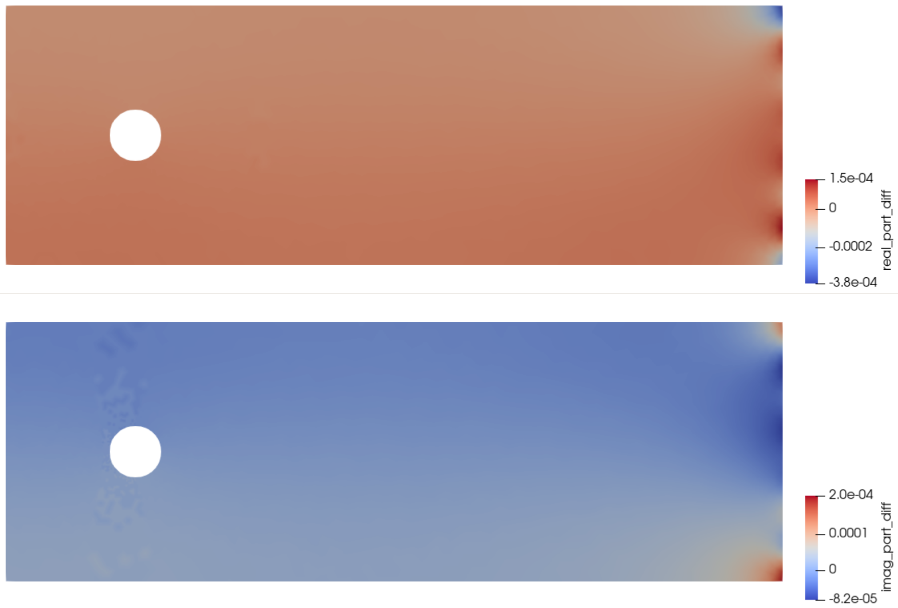



Figure 2: $\mathfrak{Re}\,(u - u_{10})$ (haut), $\mathfrak{Im}\,(u - u_{10})$ (bas), $k = 3$, $h = 1$, $a = 3$

## 2.2 Méthode DtN

### 2.2.1 Formulation variationnelle

On introduit l'opérateur DtN tronqué au rang $N$ usuel :

$$T_n u = \sum_{0 \leq n \leq N} i\beta_n \left( \int_{\Sigma_a} u\varphi_n \right) \varphi_n(y) \text{ sur } \Sigma_a \quad (a > L)$$

Le problème approché est alors :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{sur } \Omega_a \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \partial\mathcal{O} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Sigma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = T_N u & \text{sur } \Sigma_a (a > L). \end{cases}$$

La formulation variationnelle associée est donnée par:

Trouver $p \in H^1(\Omega_a)$, tel que $\forall q \in H^1(\Omega_a)$,

$$\int_{\Omega_a} (\nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p\bar{q}) - \int_{\Sigma_a} T_N p\bar{q} = \int_{\Sigma_0} g\bar{q}.$$

### 2.2.2 Résultats numériques

On trace sur la figure 3 les parties réelles et imaginaires de $u_4$, solution du problème avec DtN, avec $k = 10$, $N = 4$ et $a = 2$.
Sur la figure 4, on trace la différence entre la solution $u_4$ obtenue pour $N = 4$ et $u_{16}$ avec $N = 16$. On observe qu'augmenter $N$ au delà de 4 n'a pas d'effet sur la résolution au voisinage de la perturbation..

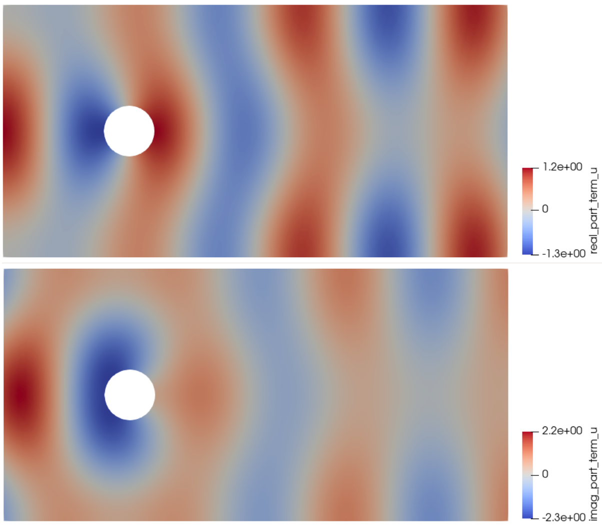



Figure 3: $\mathfrak{Re}\ u_4$ (haut), $\mathfrak{Im}\ u_4$ (bas), $k = 10$, $h = 1$, $a = 2$

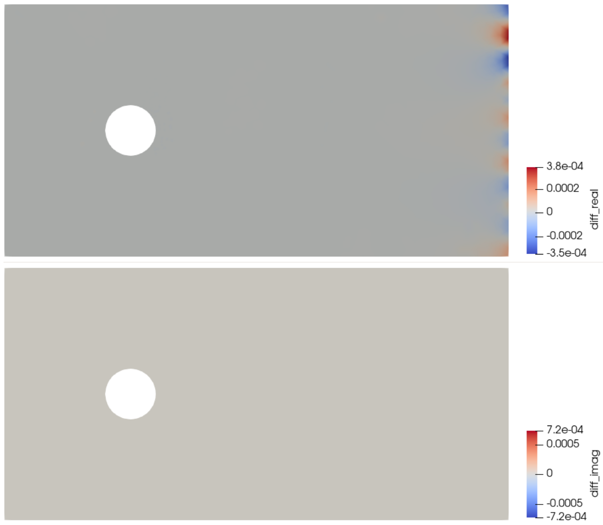



Figure 4: $\mathfrak{Re}\ (u_4 - u_{16})$ (haut), $\mathfrak{Im}\ (u_4 - u_{16})$ (bas), $k = 10$, $h = 1$, $a = 2$

Pour $a = 1$, en revanche, on aurait intérêt à augmenter $N$ : on voit ici que $N = 4$ n'est pas suffisant pour éliminer les reflexions parasites vers la perturbation :

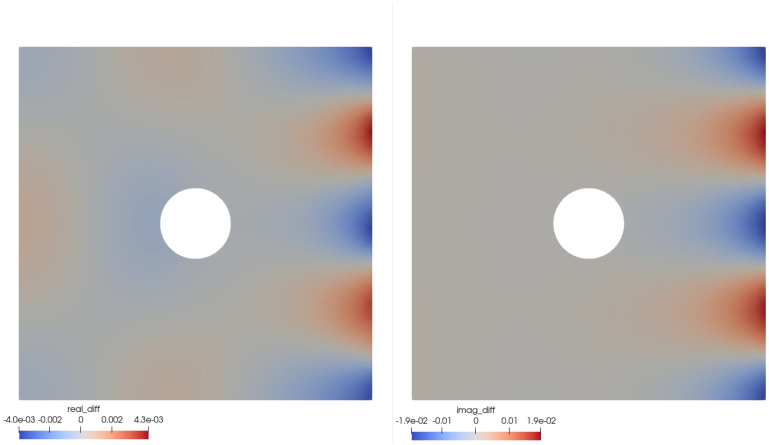



Figure 5: $\mathfrak{Re}\ (u_4 - u_{16})$ (haut), $\mathfrak{Im}\ (u_4 - u_{16})$ (bas), $k = 10$, $h = 1$, $a = 1$

## 2.3 Méthode DtN épais

### 2.3.1 Formulation variationnelle

On introduit l'opérateur DtN épais tronqué

$$\tilde{T}_N u = \sum_{n=0}^{N} i\beta_n e^{i\beta_n(b-a)} \left( \int_{\Sigma_a} u\varphi_n \right) \varphi_n(y) \text{ sur } \Sigma_b \quad (b > a)$$

La formulation variationnelle devient : Trouver $p \in H^1(\Omega_b)$, tel que $\forall q \in H^1(\Omega_b)$,

$$\int_{\Omega_b} (\nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p \bar{q}) - \int_{\Sigma_b} \tilde{T}_N p \bar{q} = \int_{\Sigma_0} g \bar{q}.$$

### 2.3.2 Résultats numériques

## 2.4 Méthode PML

### 2.4.1 Formulation variationnelle

En introduisant la fonction

$$\tilde{\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < a \\ \alpha & \text{si } a < x < b \end{cases}$$

où

$$\mathfrak{Re}\ \alpha > 0 \text{ et } \mathfrak{Im}\ \alpha < 0.$$

on obtient le problème PML dans $\Omega_b$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tilde{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + k^2 u = 0 & \text{sur } \Omega_b \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \partial\mathcal{O} \cup \Sigma_b \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Sigma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_b. \end{cases}$$

La formule variationnelle associée est alors : Trouver $p \in H^1(\Omega_b)$, tel que $\forall q \in H^1(\Omega_b)$

$$\int_{\Omega_b} \frac{1}{\tilde{\alpha}}\frac{\partial p_L}{\partial x}\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{1}{\tilde{\alpha}}\frac{\partial p_L}{\partial y}\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \tilde{\alpha}\frac{\partial p_L}{\partial z}\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} - \frac{k^2}{\tilde{\alpha}} p\bar{q} = \int_{\Sigma_0} g\bar{q}\,d\gamma$$

### 2.4.2 Résultats numériques