

Génération et adaptation de maillage en géométries complexes

Frédéric Alauzet

INRIA Saclay Ile-de-France - Projet Gamma - Palaiseau, France

Frederic.Alauzet@inria.fr

http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/download/Cours2_AMS314.pdf

http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/download/projet-AMS314_Partie2.pdf

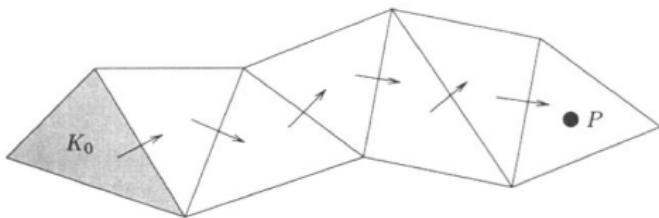
<http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/download/projet-AMS314.zip>

Partie 2: Algorithmes de génération automatique de maillages

1. Ensembles particulier d'éléments
2. Principaux opérateurs de modification de maillage
3. De la CAO au maillage
4. Génération de maillage en 2D
5. Le cas 3D

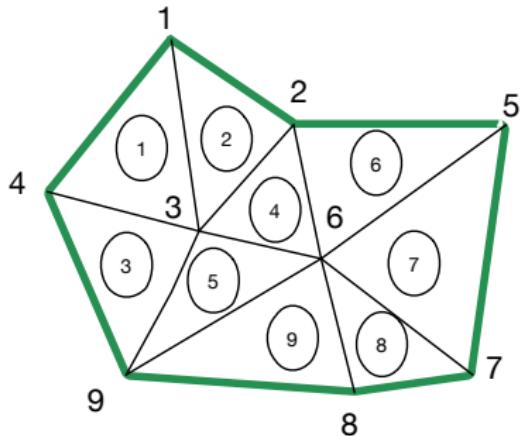
Ensembles particulier d'éléments

- La base d'un point est un élément contenant ce point (triangle ou tétraèdre)
- Utilisée comme germe pour d'autres types d'ensemble plus complexe
- $\text{base}(P) = 0$ si P n'est pas inséré dans la triangulation
- Algorithme de localisation (barycentrique) pour trouver $\text{base}(P)$
- Une passe permet d'initialiser la base, complexité $O(n)$ avec n le nombre d'éléments



Ensembles particulier d'éléments

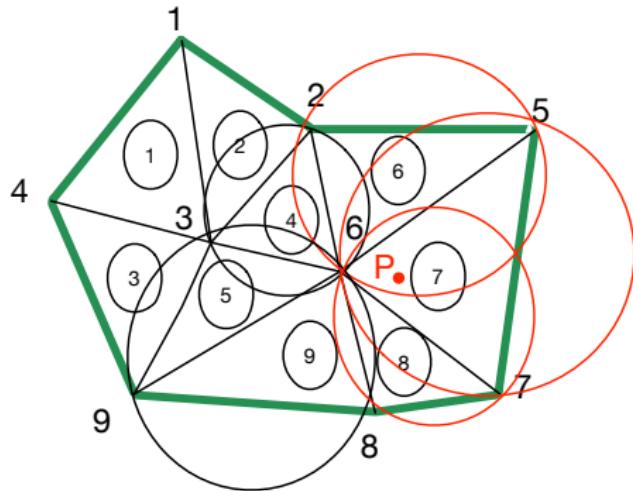
- La boule d'un point est l'ensemble des éléments contenant ce point



- $\text{base}(6) = 4, \quad \text{boule}(6) = [4 \ 5 \ 9 \ 8 \ 7 \ 6]$
- Complexité $O(n)$ sans *voi* (algo naïf) mais $O(k)$ avec *voi* et *base*

Ensembles particulier d'éléments

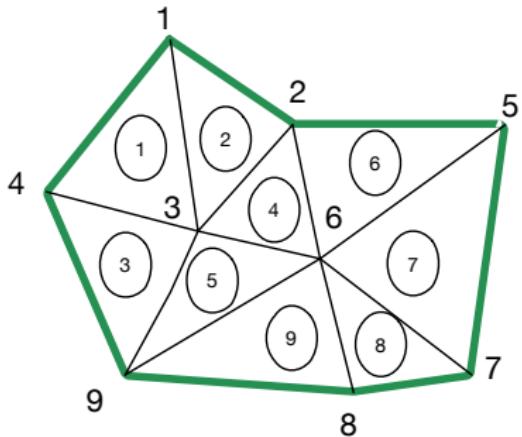
- La cavité de P est l'ensemble des éléments dont le cercle circonscrit contient P



- $\text{base}(P) = 7 \in \text{cavite}(P)$, $\text{cavite}(P) = [7 \ 8 \ 6]$
- Complexité $O(n)$ sans *voi* (algo naïf) mais $O(k)$ avec *voi* et *base*

Ensembles particulier d'éléments

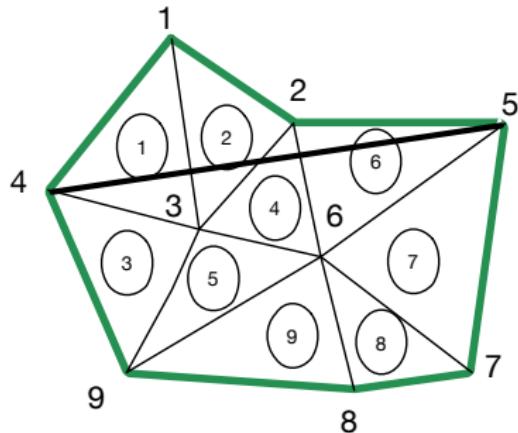
- La coquille d'une arête est l'ensemble des éléments partageant cette arête



- $\text{coquille}(1, 2) = [2]$
- $\text{coquille}(9, 6) = [5 9]$
- $\text{coquille}(A, B) = \text{boule}(A) \cap \text{boule}(B)$

Ensembles particulier d'éléments

- Le tuyau d'une arête e est l'ensemble des éléments ayant une arête dont l'intersection avec e est (strictement) non vide



- $tuyau(4, 5) = [1 2 4 6]$

Partie 2: Algorithmes de génération automatique de maillages

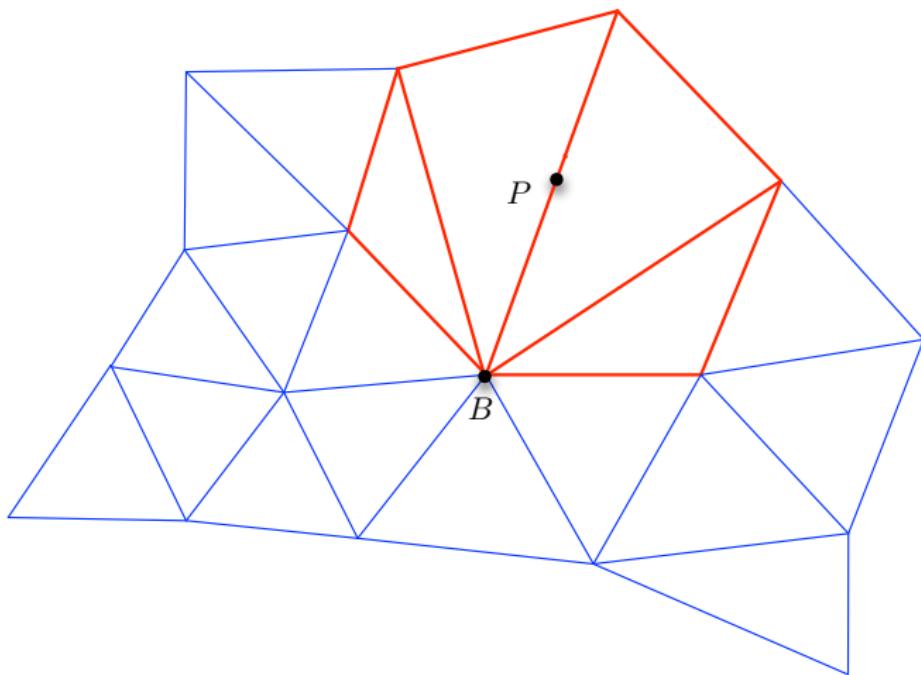
1. Ensembles particulier d'éléments
2. **Principaux opérateurs de modification de maillage**
3. De la CAO au maillage
4. Génération de maillage en 2D
5. Le cas 3D

Principaux Opérateurs de Modification de Maillage

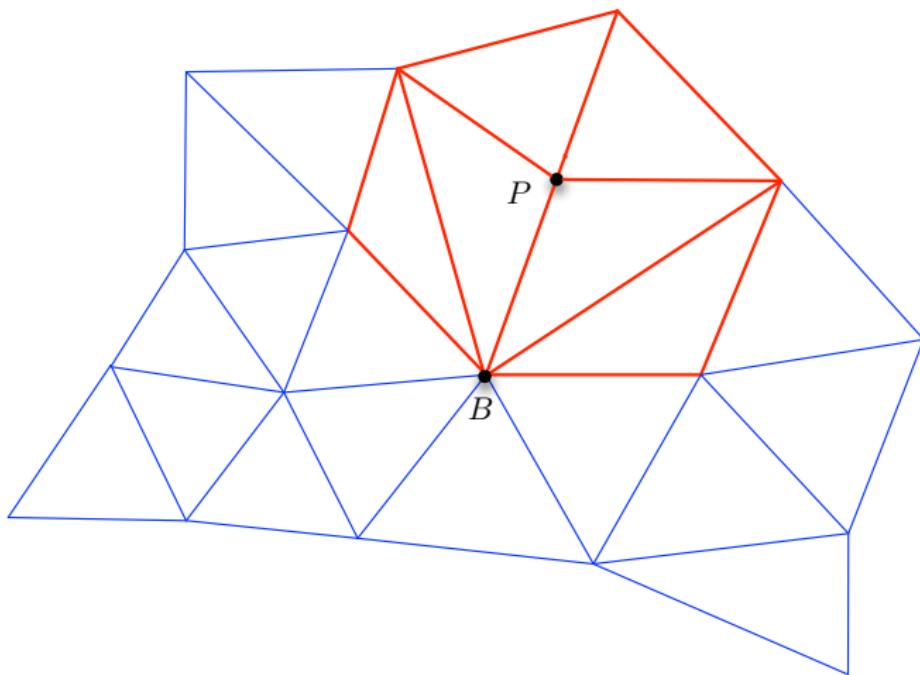
La majeure partie des algorithmes consistent à entrelacer **4 opérateurs**:

- Insertion et suppression pour améliorer **la taille** des éléments
 ⇒ Analyse sur les arêtes
- Changement de connectivité ou lissage pour améliorer **la forme**, i.e.,
la qualité, des éléments
 ⇒ Analyse sur les éléments

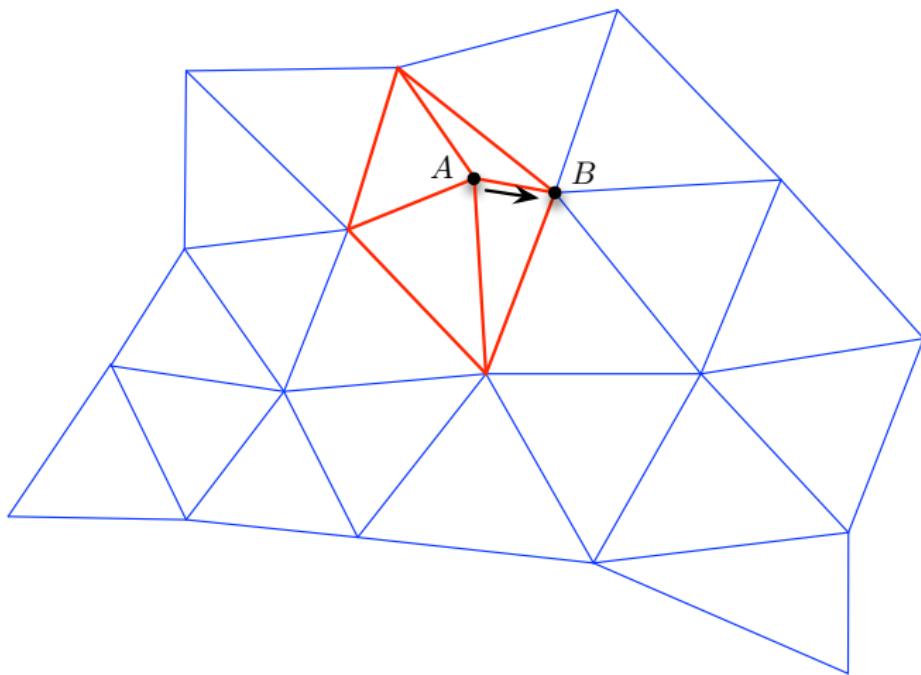
Insertion de sommets (découpe d'arête/face)



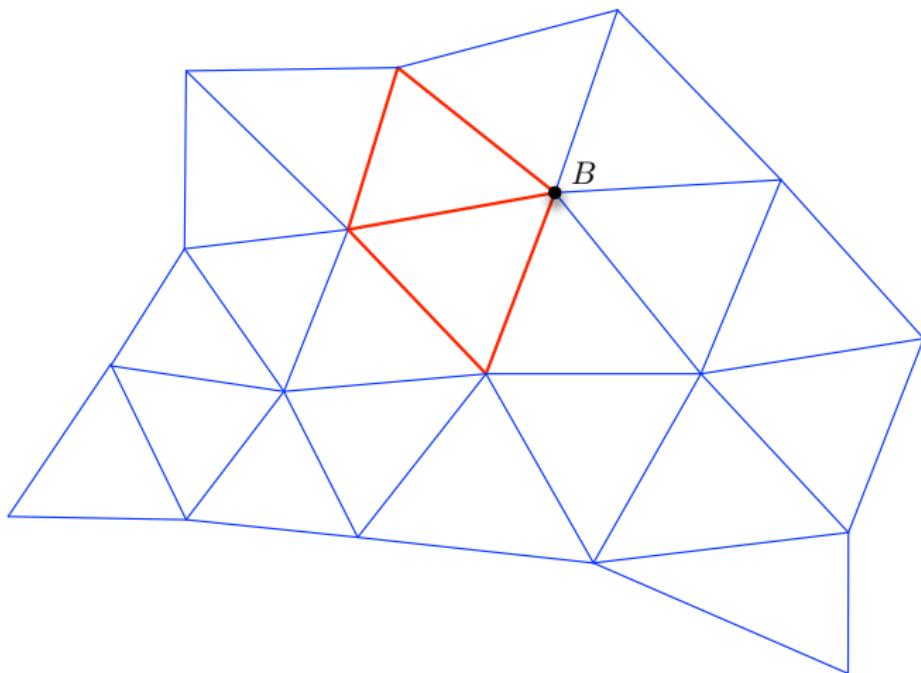
Insertion de sommets (découpe d'arête/face)



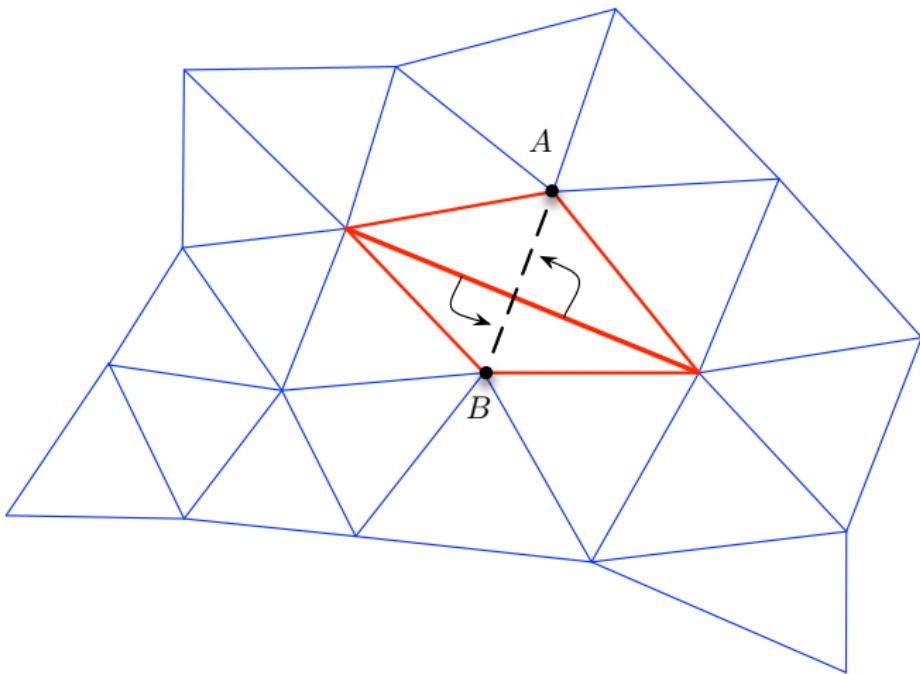
Suppression de sommets (suppression d'arête)



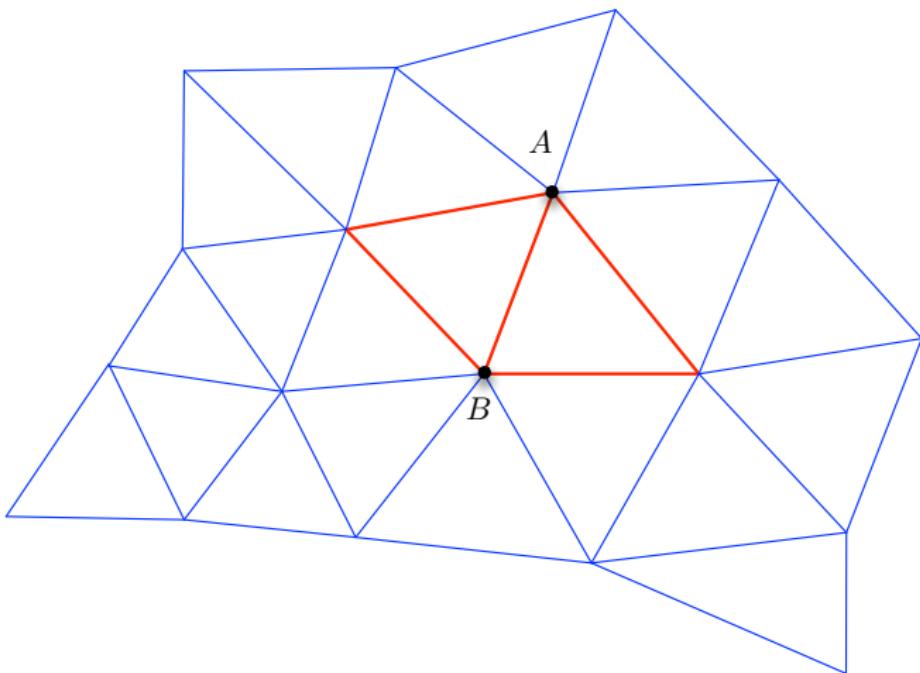
Suppression de sommets (suppression d'arête)



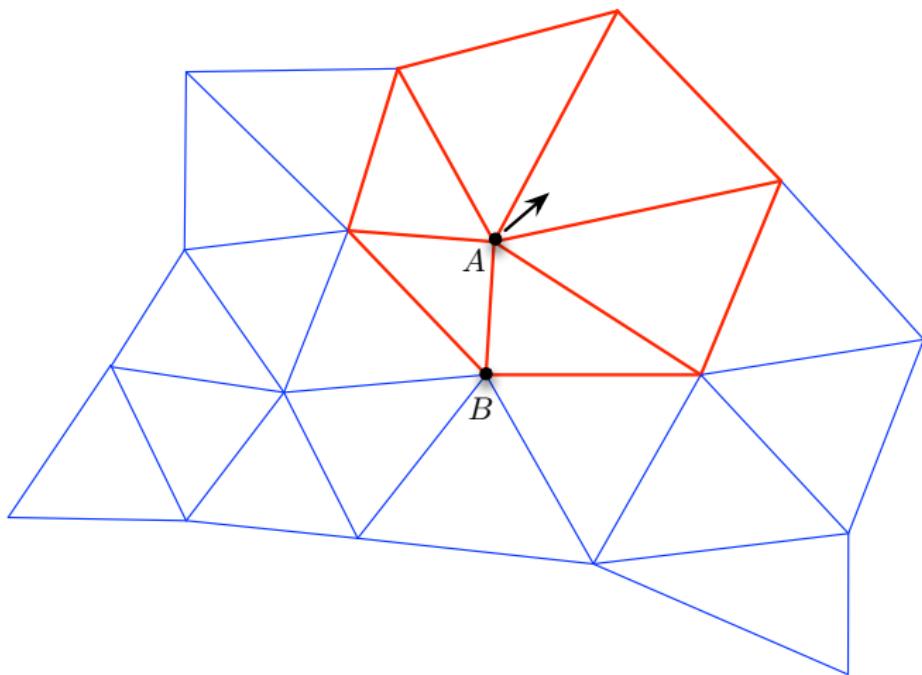
Changement de connectivité (bascule d'arête)



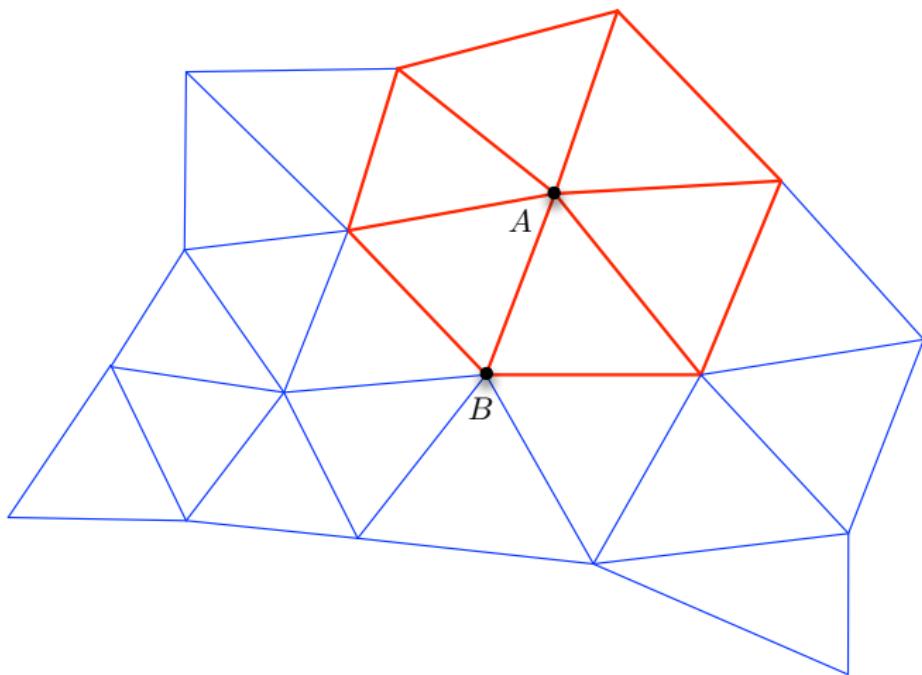
Changement de connectivité (bascule d'arête)



Déplacement d'un sommet (lissage)



Déplacement d'un sommet (lissage)



Principaux Opérateurs de Modification de Maillage

La majeure partie des algorithmes consistent à entrelacer 4 opérateurs:

- Insertion et suppression pour améliorer la taille des éléments
 ⇒ Analyse sur les arêtes
- Changement de connectivité ou lissage pour améliorer la forme, i.e., la qualité, des éléments
 ⇒ Analyse sur les éléments
- Mise à jour des tableau Crd et/ou Tri et/ou Voi
- Conditions de rejet/acceptation de l'opération

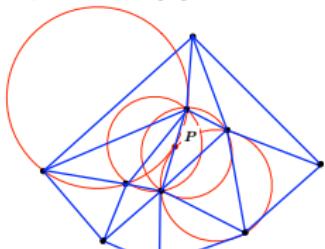
Il est très intéressant de réécrire ces opérateurs sous la forme d'un unique opérateur de cavité

Opérateur de Cavité : Le Noyau de Delaunay

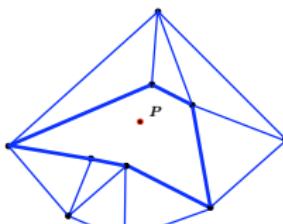
Insertion de P (Noyau Delaunay - méthode incrémentale)

$$\mathcal{H}_{k+1} = \mathcal{H}_k - \mathcal{C}_P + \mathcal{B}_P$$

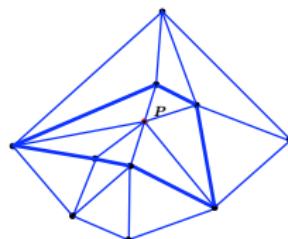
[Bowyer, CJ 1981], [Watson, CJ 1981], [Hermeline, RAIRO 1982], ...



\mathcal{H}_k



$\mathcal{H}_k - \mathcal{C}_P$



$\mathcal{H}_{k+1} = \mathcal{H}_k - \mathcal{C}_P + \mathcal{B}_P$

Principe de validité :

- a) \mathcal{H}_k est valide
- b) P est visible des faces externes de la cavité \mathcal{C}_P $\implies \mathcal{H}_{k+1}$ est valide

Extension robuste à la génération de maillage \implies Cavité contrainte et correction de cavité [George et al, ICSE 1990], [George et al, CMAME 1991], [George et al, IJNME 1992],

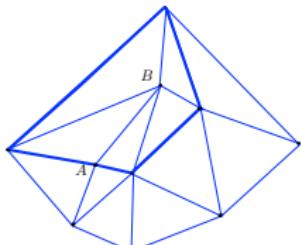
Opérateur de Cavité Unique

Opérateur de maillage unique

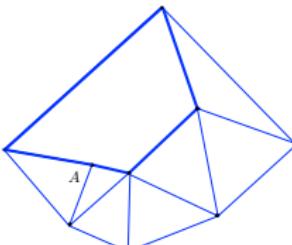
Chaque opérateur \equiv une (ré)insertion de sommet : $\mathcal{H}^{k+1} \equiv \mathcal{H}^k - \mathcal{C} + \mathcal{R}$

Suppression de l'arête AB :

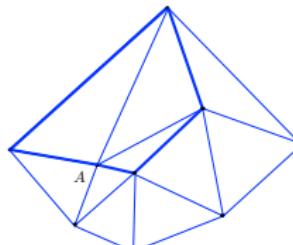
- Éléments supprimés : $boule(B)$
- Éléments créés : $boule(A) \cap cavite$



$$\mathcal{H}^k$$



$$\mathcal{H}^k - \mathcal{C}_{ball(B)}$$



$$\mathcal{H}^{k+1} = \mathcal{H}^k - \mathcal{C}_{ball(B)} + \mathcal{R}_A$$

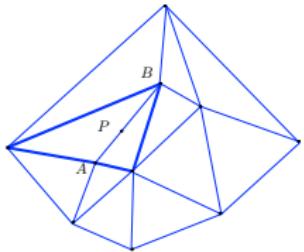
Opérateur de Cavité Unique

Opérateur de maillage unique

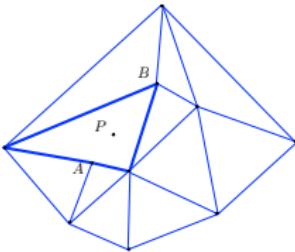
Chaque opérateur \equiv une (ré)insertion de sommet : $\mathcal{H}^{k+1} \equiv \mathcal{H}^k - \mathcal{C} + \mathcal{R}$

Insertion du sommet P :

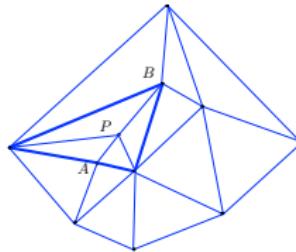
- Éléments supprimés : $coquille(A, B)$
- Éléments créés : $boule(P)$



$$\mathcal{H}^k$$



$$\mathcal{H}^k - \mathcal{C}_{shell(A,B)}$$



$$\mathcal{H}^{k+1} = \mathcal{H}^k - \mathcal{C}_{shell(A,B)} + \mathcal{R}_P$$

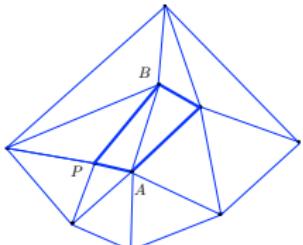
Opérateur de Cavité Unique

Opérateur de maillage unique

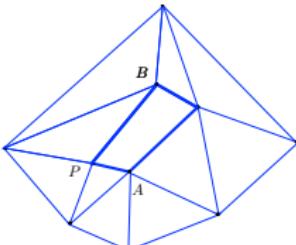
Chaque opérateur \equiv une (ré)insertion de sommet : $\mathcal{H}^{k+1} \equiv \mathcal{H}^k - \mathcal{C} + \mathcal{R}$

Bascule de l'arête AB :

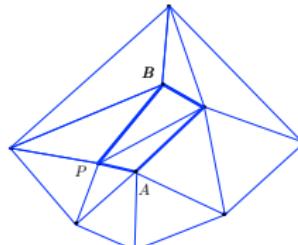
- Éléments supprimés : $coquille(A, B)$
- Éléments créés : $coquille(P, Q)$



\mathcal{H}^k



$\mathcal{H}^k - \mathcal{C}_{shell(A,B)}$



$\mathcal{H}^{k+1} = \mathcal{H}^k - \mathcal{C}_{shell(A,B)} + \mathcal{R}_P$

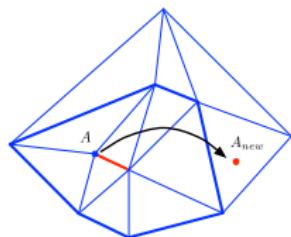
Opérateur de Cavité Unique

Opérateur de maillage unique

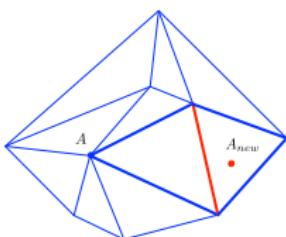
Chaque opérateur \equiv une (ré)insertion de sommet : $\mathcal{H}^{k+1} \equiv \mathcal{H}^k - \mathcal{C} + \mathcal{R}$

Correction(s) de cavité pour créer une combinaison d'opérateurs

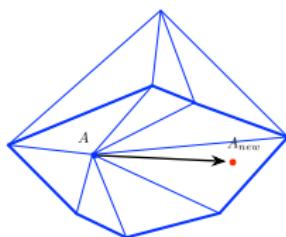
Example: Repositionner le sommet A à sa nouvelle position A_{new} nécessite
1 suppression d'arête + 1 bascule d'arête + 1 déplacement de sommet



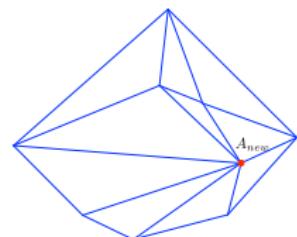
Suppression



Bascule



Déplacement



Config. finale

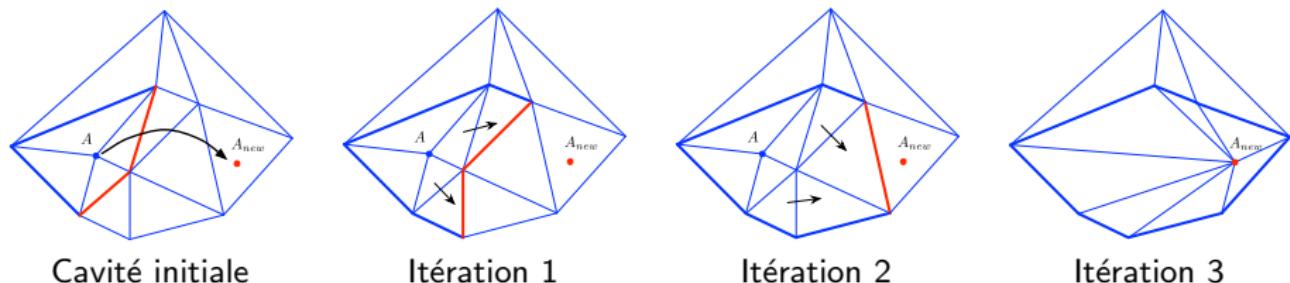
Opérateur de Cavité Unique

Opérateur de maillage unique

Chaque opérateur \equiv une (ré)insertion de sommet : $\mathcal{H}^{k+1} \equiv \mathcal{H}^k - \mathcal{C} + \mathcal{R}$

Correction(s) de cavité pour créer une combinaison d'opérateurs

Example: Repositionner le sommet A à sa nouvelle position A_{new} nécessite
1 réinsertion de sommet avec une définition adéquate de la cavité



Cavité initiale

Itération 1

Itération 2

Itération 3

A_{new} n'est pas visible des arêtes rouges \Rightarrow Correction pour agrandir la cavité
Cavité finale = l'ensemble des arêtes bleues

Partie 2: Algorithmes de génération automatique de maillages

1. Ensembles particulier d'éléments
2. Opérateurs de modification de maillage
3. De la CAO au maillage
4. Génération de maillage en 2D
5. Le cas 3D

Maillage d'une frontière

La CAO définit continûment la frontière du maillage:

$$\begin{aligned} c : \omega \in \mathbb{R} &\mapsto C \in \mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto c(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma : \Omega \in \mathbb{R}^2 &\mapsto \Sigma \in \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \sigma(u, v) \end{aligned}$$

Problématique: générer le maillage d'une courbe paramétrique (2D)

Problématique: générer le maillage d'une surface paramétrique (3D)

Exemples

- Cercle:

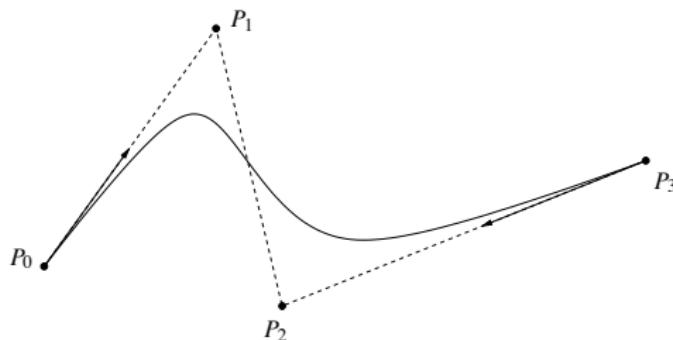
$$t \mapsto c(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \text{ avec } t \in [0, 2\pi]$$

Exemples

- Courbes de Bézier:

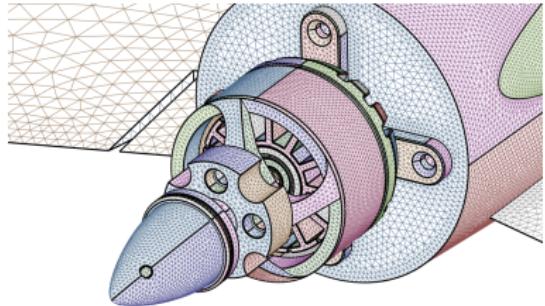
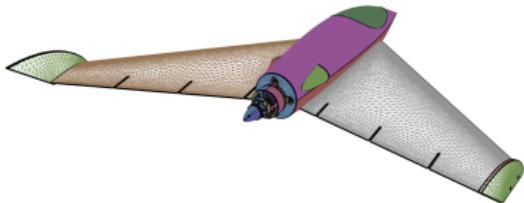
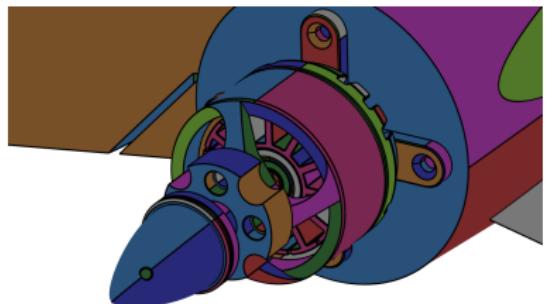
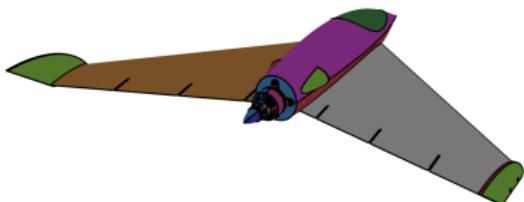
$$t \mapsto B_n(t) = \sum_{k=0}^n P_k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} t^k (1-t)^{n-k}$$

- Cas cubique avec 4 points de contrôle:



Exemples

- B-Splines, NURBS, surface implicites ...



1800 patches

Aujourd'hui c'est le point bloquant pour une automatisation complète des processus de calcul

Problème extrêmement difficile :

- CAO généralement **non valide**
 - intersection de patchs
 - trou
 - patch manquant
 - conversion de format
- Si la CAO est **valide** alors le maillage de chaque patch est un problème résolu

Partie 2: Algorithmes de génération automatique de maillages

1. Ensembles particulier d'éléments
2. Principaux opérateurs de modification de maillage
3. De la CAO au maillage
4. Génération de maillage en 2D
5. Le cas 3D

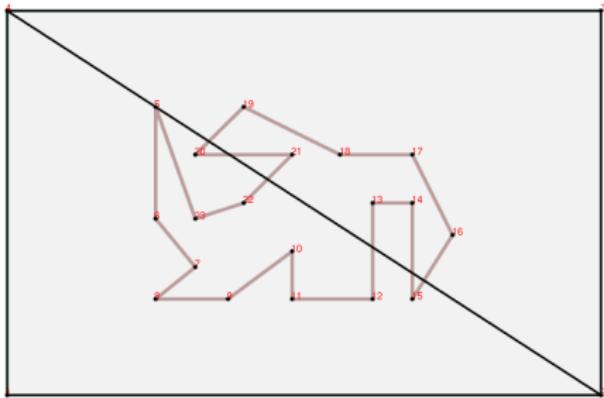
Squelette d'un mailleur 2D

Donnée initiale : un maillage de la frontière Γ_h

Étapes :

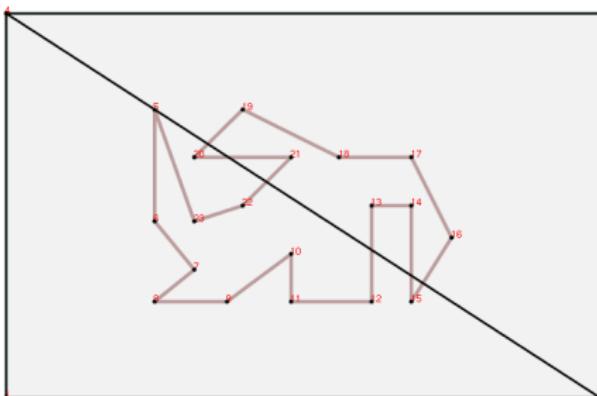
1. Création d'une boîte englobante et initialisation d'un maillage vide (2 éléments)
2. Insertion des points frontières
3. Forçage des arêtes frontières
4. Suppression de la boîte englobante
5. Création des points internes

Étape 1 : Boîte englobante et maillage vide

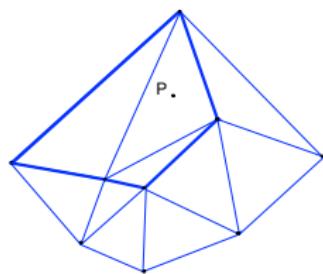


- Initialisation : 1 boîte avec 2 triangles

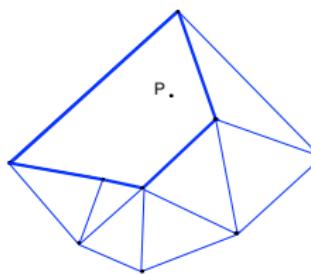
Étape 2 : Insertion des points frontières



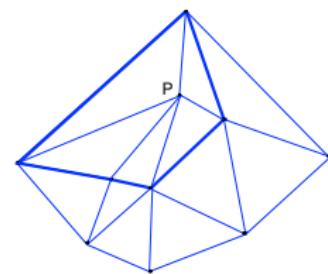
- Insertion séquentielle des points de la frontière
 - Utilisation d'un algorithme d'insertion de points :
 - méthode simple Partie 1
 - opérateur de cavité
- ⇒ voisin & localisation



Localisation de P



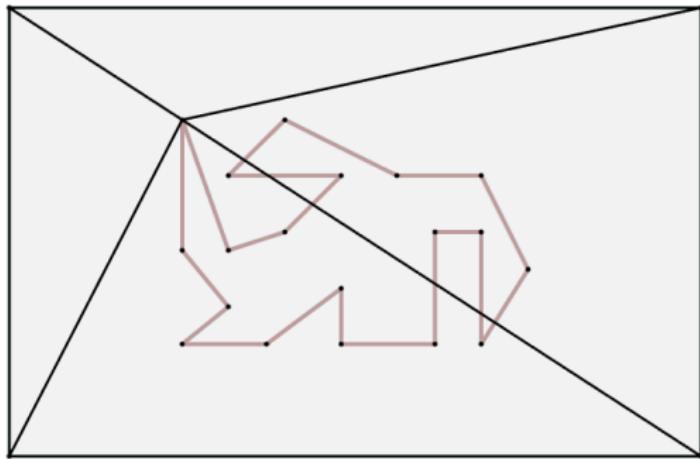
Création d'une cavité



(Re)Connection

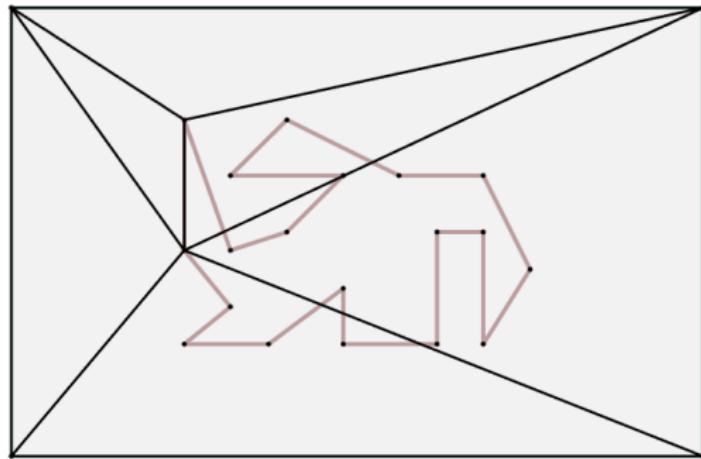
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



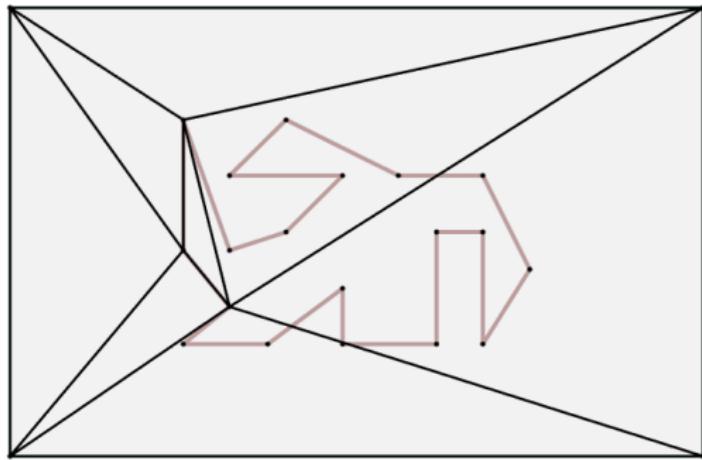
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



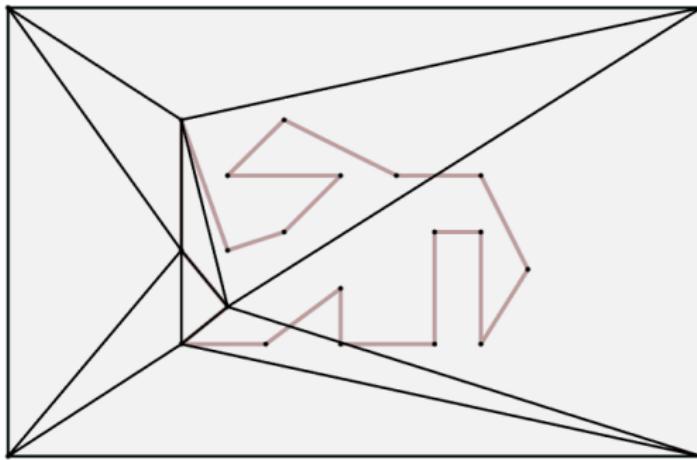
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



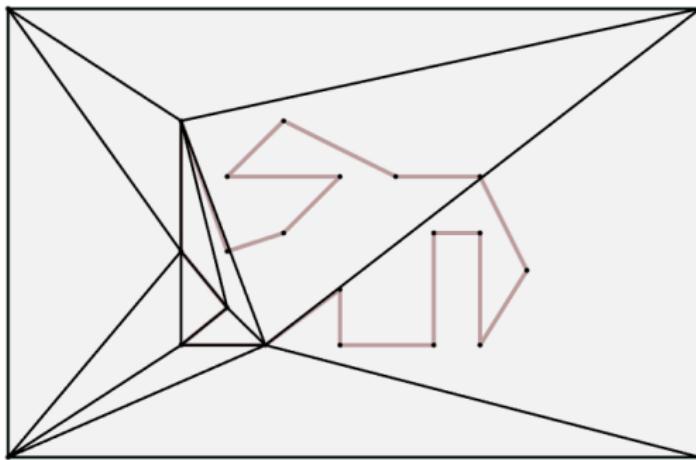
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



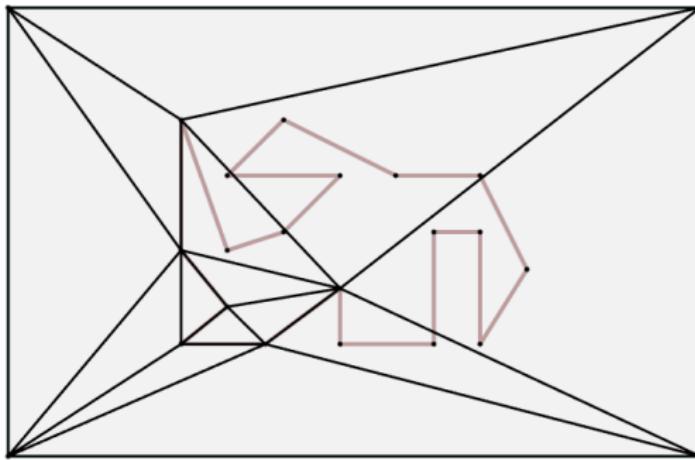
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



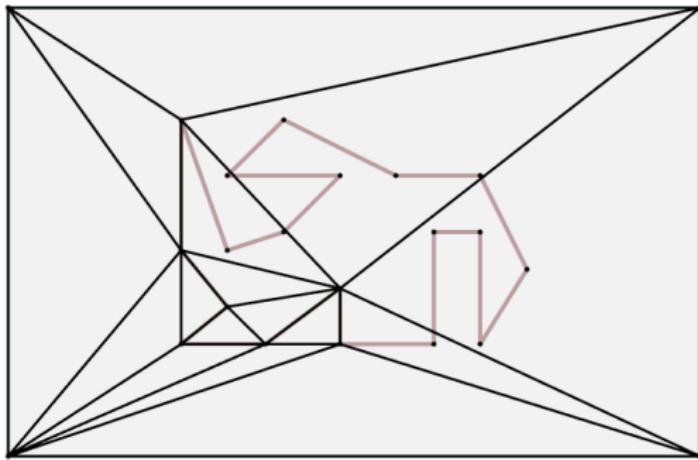
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



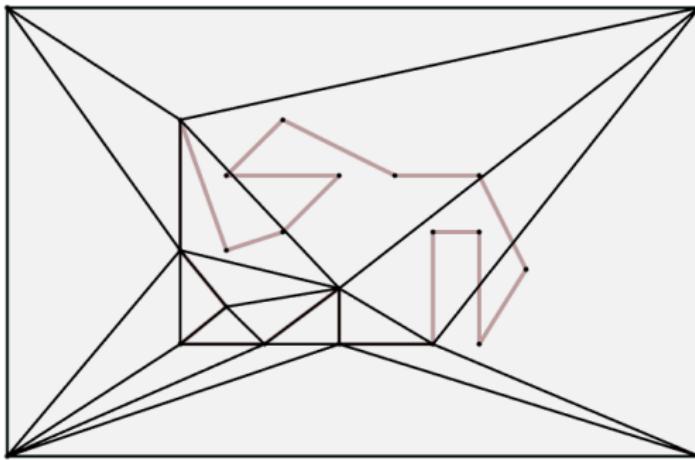
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



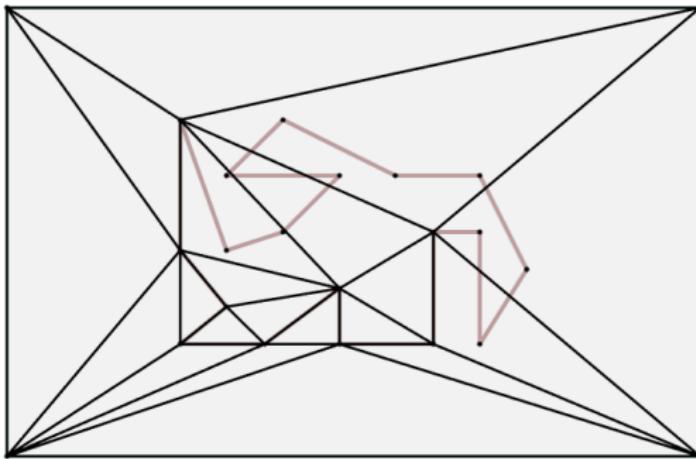
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



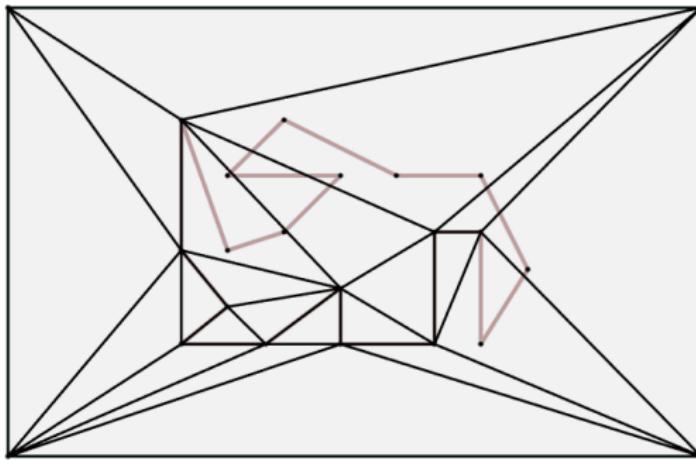
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



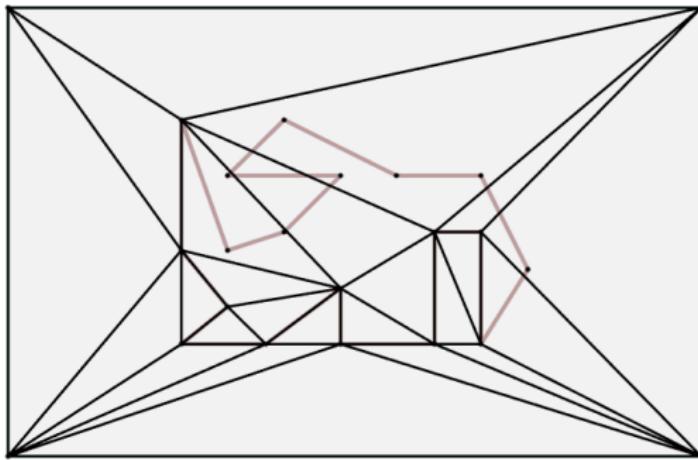
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



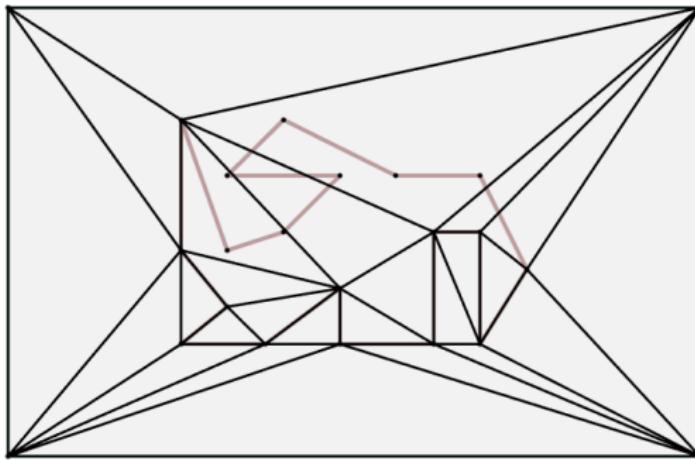
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



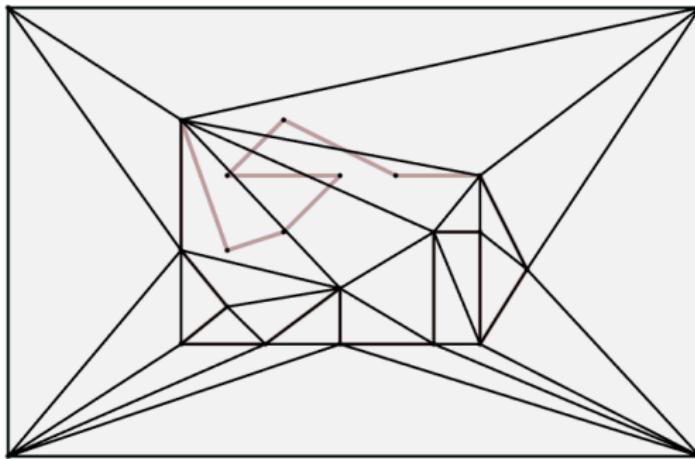
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



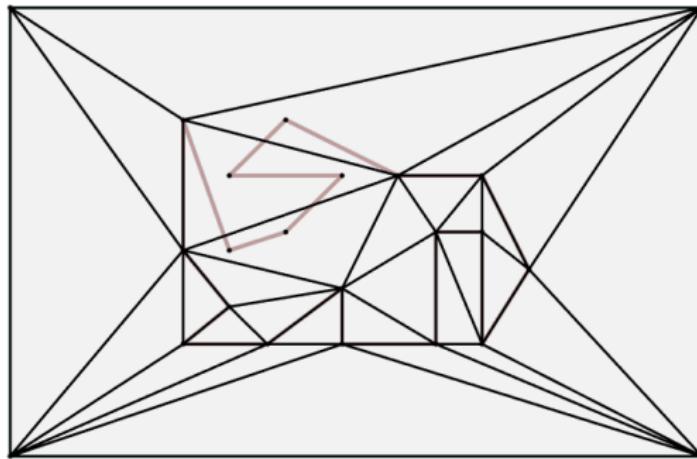
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



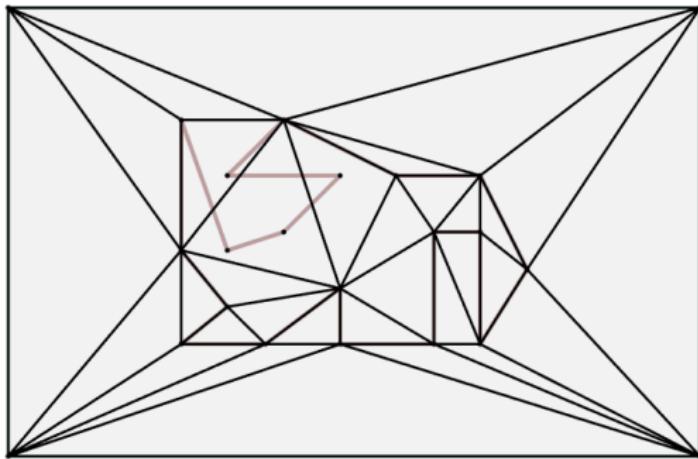
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



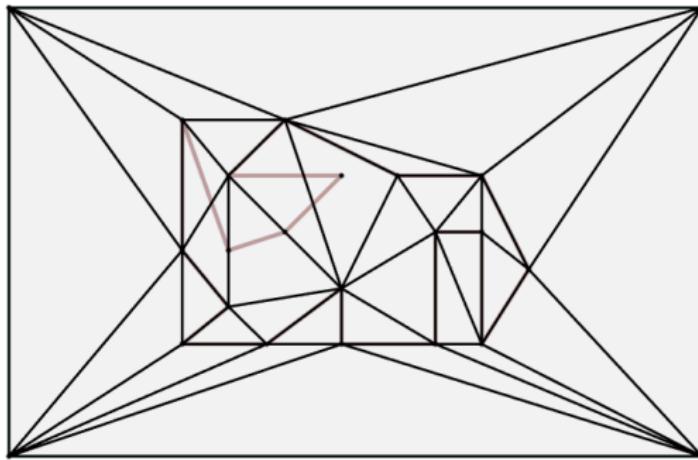
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



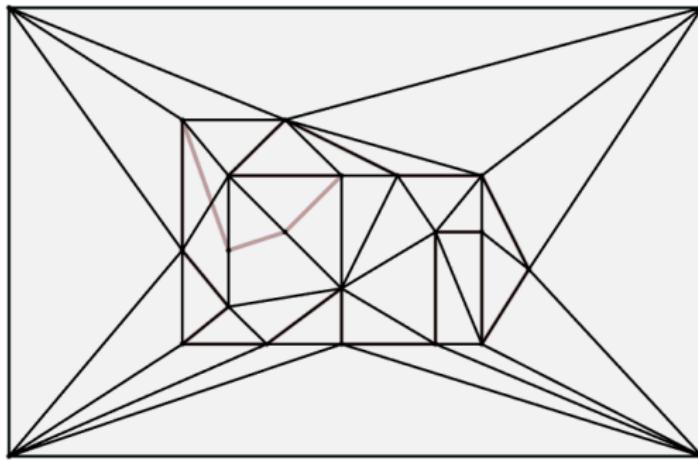
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



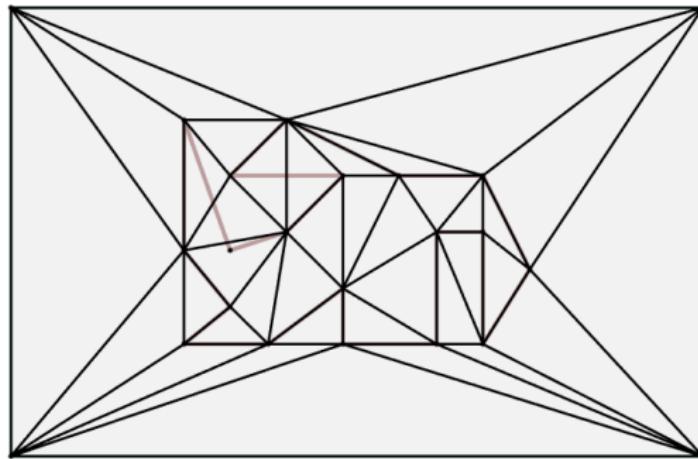
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



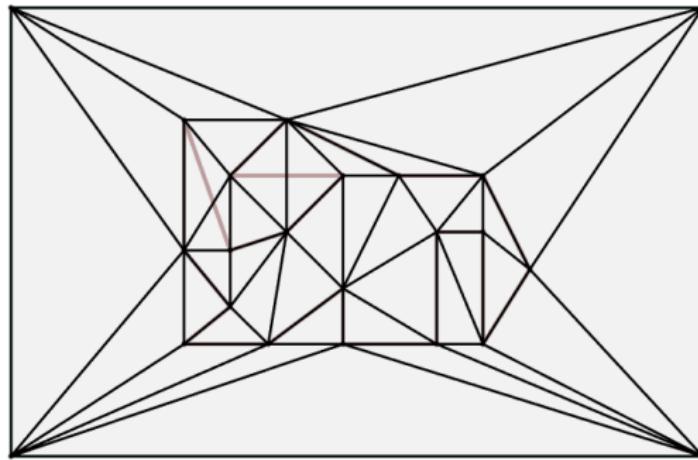
Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique

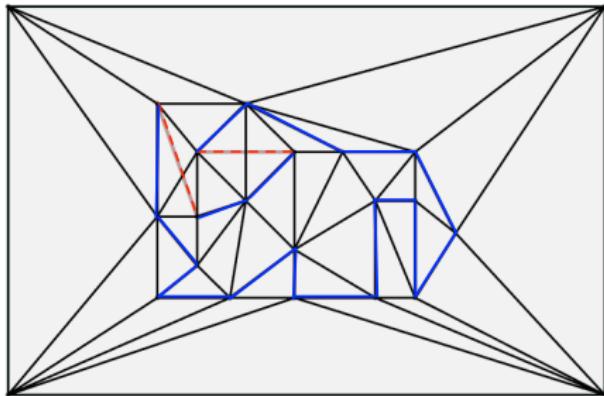


Étape 2 : Insertion des points frontières

Ici, insertion des points dans le sens trigonométrique



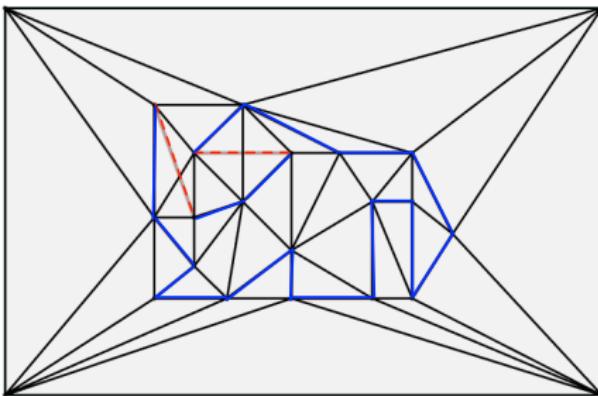
Étape 2 : Insertion des points frontières



- Tous les points sont insérés
- Certaines arêtes (contraintes) sont manquantes !



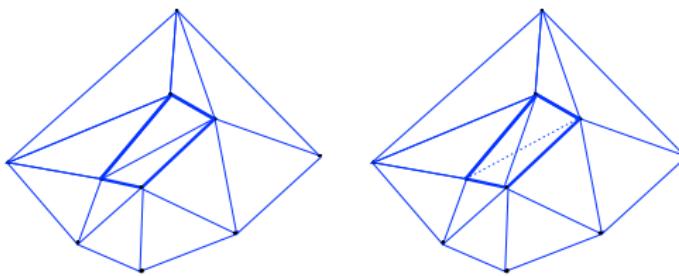
Étape 3 : Forçage des arêtes frontières



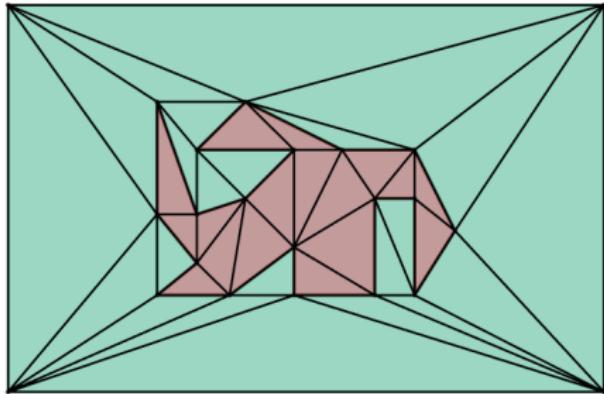
- Certaines arêtes (contraintes) sont manquantes !



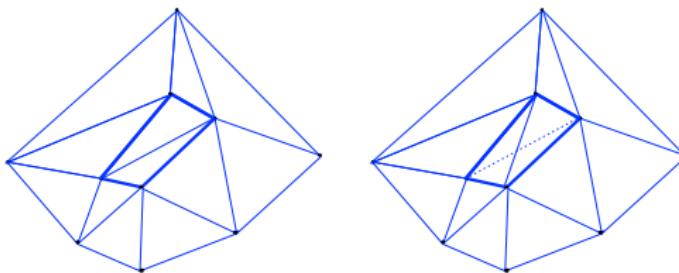
- Forçage en utilisant la bascule d'arête



Étape 3 : Forçage des arêtes frontières

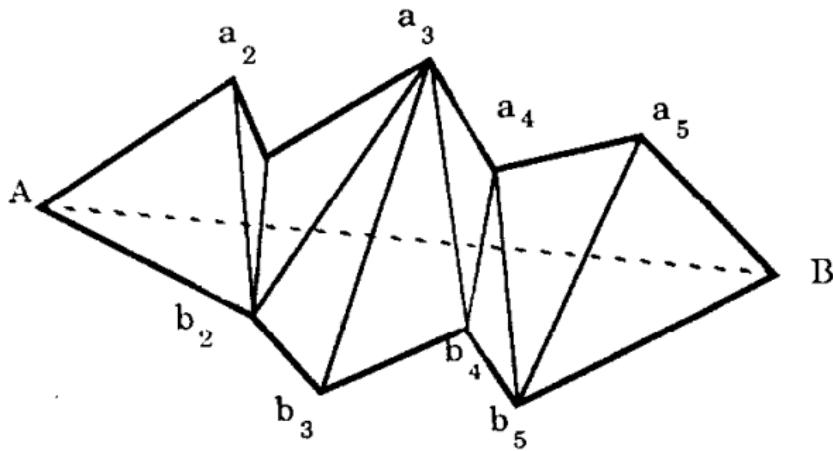


- Certaines arêtes (contraintes) sont manquantes !
- Forçage en utilisant la bascule d'arête
➡ voisin & hachage



Étape 3 : Forçage des arêtes frontières

Algorithme générique de forçage d'une arête manquante

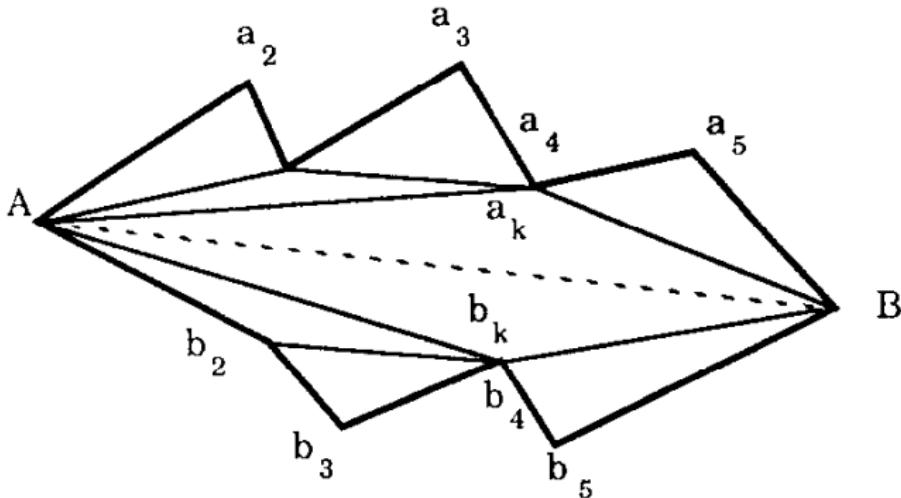


Ex: Combien de bascules d'arêtes sont nécessaires pour retrouver AB ?

P.L. George, F. Hecht, E. Saltel, Automatic mesh generator with specified boundary, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 92, Issue 3, November 1991, Pages 269-288

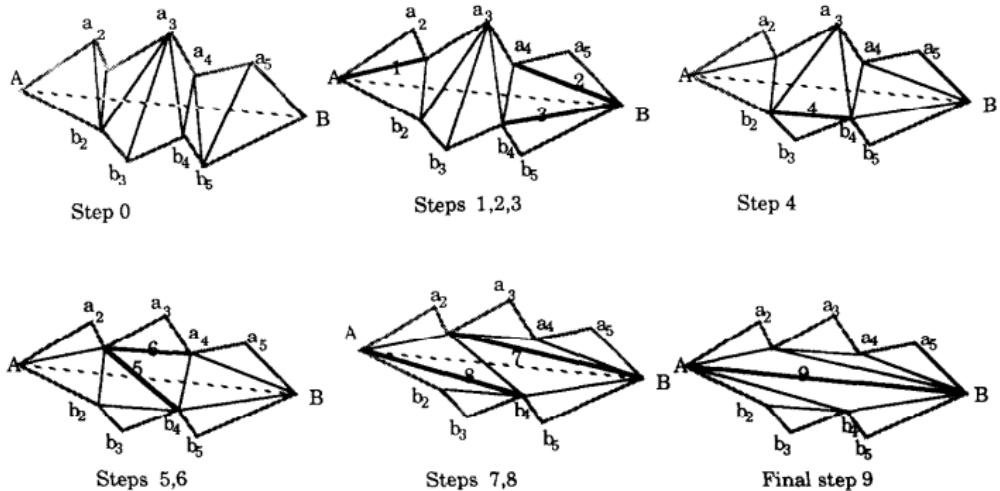
Étape 3 : Forçage des arêtes frontières

Algorithme générique de forçage d'une arête manquante



Étape 3 : Forçage des arêtes frontières

Algorithme générique de forçage d'une arête manquante



Étape 3 : Forçage des arêtes frontières

Algorithme générique de forçage d'une arête manquante

Cet algorithme nous donne **l'existence** d'un maillage 2D quelque soit le domaine par construction d'après le théorème fondamental :

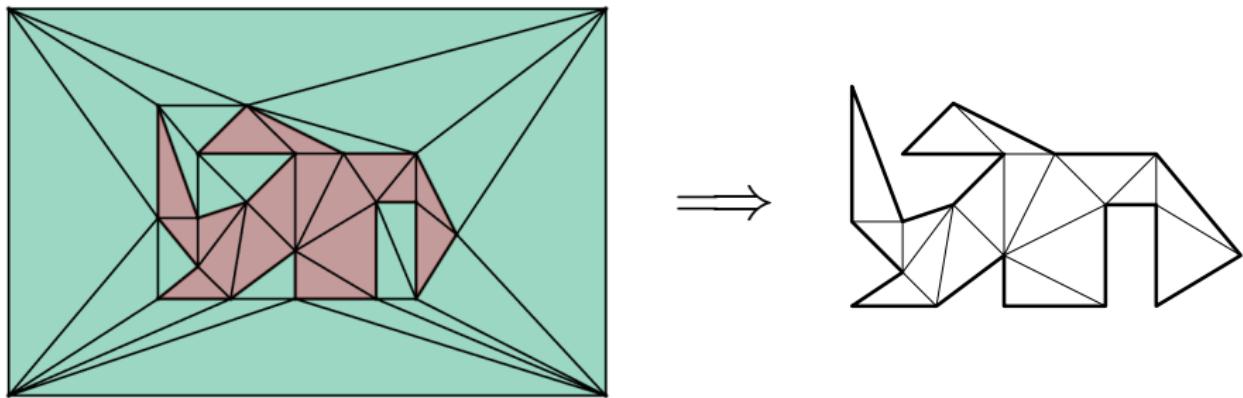
Théorème : *On peut toujours transformer une triangulation quelconque en la triangulation de Delaunay par des bascules d'arêtes et vice et versa*

Étape 4 : Suppression de la boîte englobante

Algorithme de **coloriage** des composantes connexes

Algorithme efficace \Rightarrow

- on utilise les voisins
- on a haché les arêtes frontières



Squelette d'un mailleur 2D

Donnée initiale : un maillage de la frontière Γ_h

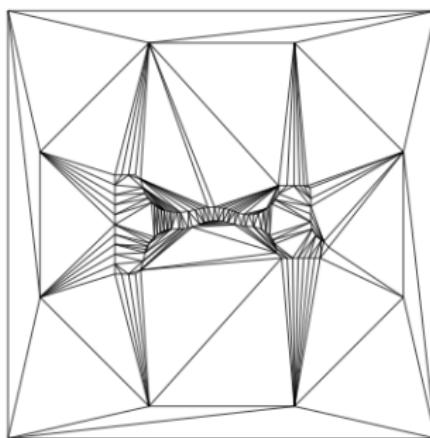
Étapes :

1. Création d'une boite englobante et initialisation d'un maillage vide (2 éléments)
2. Insertion des points frontières
3. Forçage des arêtes frontières
4. Suppression de la boite englobante
 \Rightarrow On obtient un maillage vide de Ω
5. Création des points internes

Étape 5 : Création des points internes

Questions :

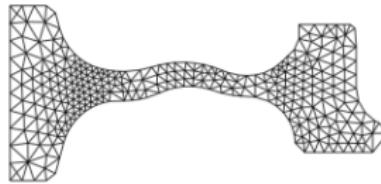
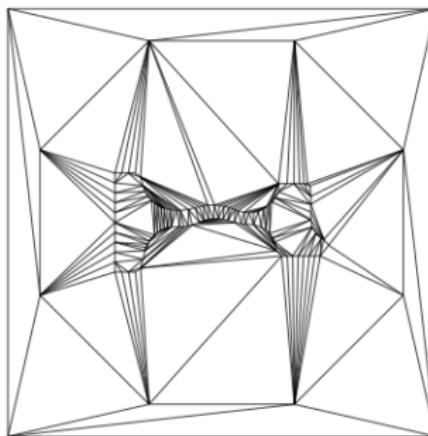
- Où ?
 - Combien ?
 - Pourquoi faire ?
- ⇒ Il faut définir l'objectif



Étape 5 : Création des points internes

Il nous faut :

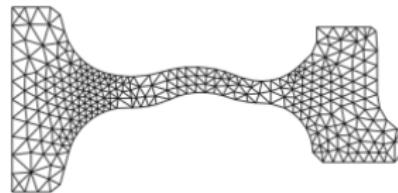
- Une fonction de qualité Q (contrôle de la forme)
- Une taille h (contrôle de la taille)
- Une méthode d'**insertion contrainte** (préserve la frontière)



Étape 5 : Création des points internes

Algorithme :

- ① Définir la taille h en chaque point de Γ_h
- ② Saturer les arêtes tant que
 - Pour chaque arête :
 - Analyse de la longueur $\ell(e)$
 - Propose un ou deux points à h des extrémités
 - Pour la liste des points proposés :
 - Filtrer les points trop proches
 - Insérer les points non filtrés via l'opérateur de cavité contraint
 - Calculer h en chaque sommet inséré
- ③ Optimisation de la qualité du maillage



Partie 2: Algorithmes de génération automatique de maillages

1. Ensembles particulier d'éléments
2. Principaux opérateurs de modification de maillage
3. De la CAO au maillage
4. Génération de maillage en 2D
5. **Le cas 3D**

Et le 3D ?

Le 3D c'est vraiment beaucoup plus compliqué car de nouveaux problèmes très complexes apparaissent

Théorème du passage à l'échelle du maillage : $3D \neq 2D + z$

Quelques exemples :

1. Le critère de Delaunay

- est un critère de qualité en maillage 2D
- n'est pas un critère de qualité en maillage 3D

Et le 3D ?

Le 3D c'est vraiment beaucoup plus compliqué car de nouveaux problèmes très complexes apparaissent

Théorème du passage à l'échelle du maillage : $3D \neq 2D + z$

Quelques exemples :

2. On peut paver le plan avec le triangle équilatéral
Mais, on ne peut pas paver l'espace avec le tétraèdre régulier
 \implies on ne peut pas générer un maillage uniforme !

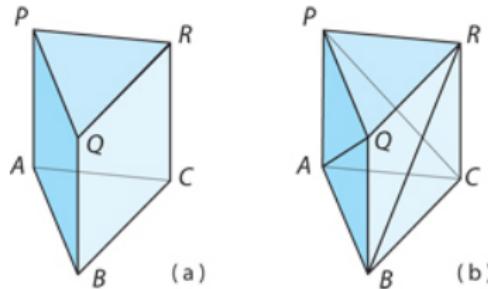
Et le 3D ?

Le 3D c'est vraiment beaucoup plus compliqué car de nouveaux problèmes très complexes apparaissent

Théorème du passage à l'échelle du maillage : $3D \neq 2D + z$

Quelques exemples :

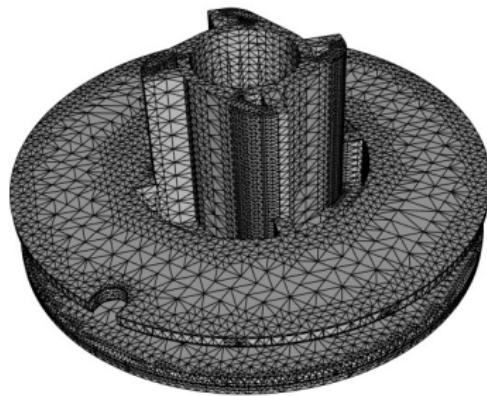
- Il existe des polyèdres **impossible à mailler** sans point interne
⇒ problématique pour le forçage de la frontière !



polyèdre de Schönhart

Un exemple complet

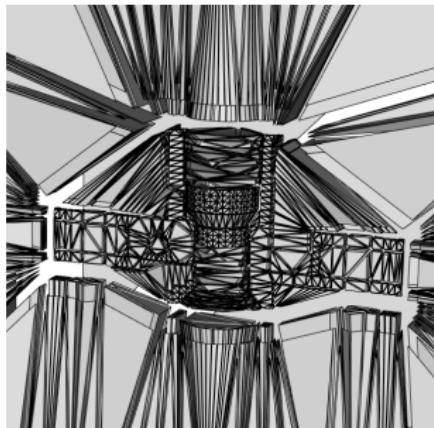
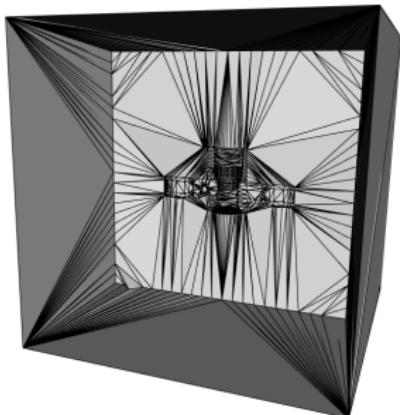
Maillage de surface initial représentant Γ_h



Number of given vertices	22 243
Number of given boundary faces	44 494
Number of given boundary edges	66 741

Un exemple complet

Triangulation du nuage de points de Γ_h dans la boîte englobante



Forçage de frontière :

- 44 494 faces à retrouver
- 66 741 arêtes à retrouver

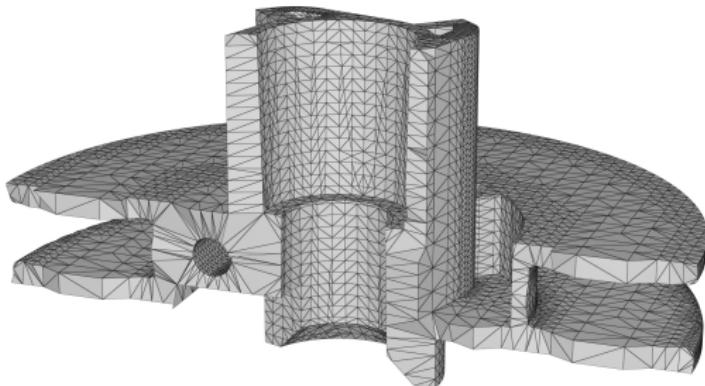


Après insertion des points :

- 727 faces manquantes
- 1 419 arêtes manquante

Un exemple complet

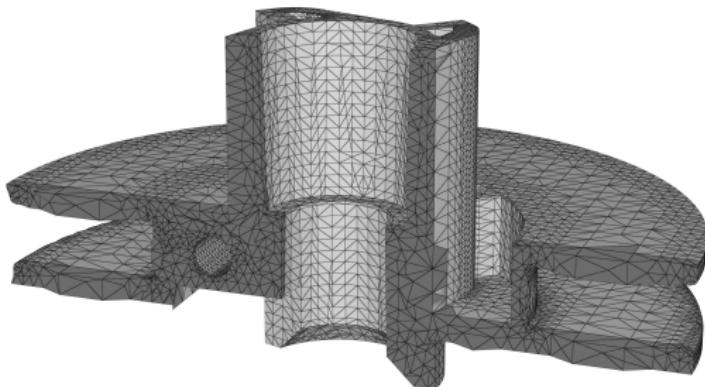
Maillage vide du domaine Ω



Number of given vertices	22 243
Number of created vertices	22
Number of vertices	22 265
Number of tetrahedra	68 828

Un exemple complet

Maillage du domaine Ω



Number of given vertices	22 243
Number of created vertices	21 794
Number of vertices	44 037
Number of tetrahedra	196 701