Simulation de variables aléatoires

Exercice 1 (Convergence de variables aléatoires)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles.

1. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge p.s, elle converge en probabilité.
2. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité, elle converge en loi.
3. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers x, supposé déterministe, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers x.
4. Soit $\bar{X}$ telle que pour tout $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$, et tout $p \in \mathbb{N}^*$, $n^\gamma \mathbb{E}[|X_n - \bar{X}|^p]^{1/p} \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que $X_n \to \bar{X}$ p.s. quand $n \to \infty$.

Exercice 2 (Méthode de rejet pour les lois à densité)**.** Soit Z et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ de densités respectives f et g. On suppose savoir simuler selon la densité g et qu'il existe $k > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq kg(x)$. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ (resp. $(U_n)_{n\geq 1}$) deux suites iid de loi f (resp. uniforme sur $[0, 1]$) et indépendantes entre elles. On définit

$$\tau = \inf\{n \geq 1 \ : \ kg(Y_n)U_n \leq f(Y_n)\}.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que Y_τ a pour densité g en utilisant le résultat général.

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E} = \Big\{(x, y) : 0 \leq y \leq kg(x)\Big\}$$

et le sous ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ défini par

$$\mathcal{D} = \Big\{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x)\Big\}.$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ définie par $X_n = (Y_n, kg(Y_n)U_n)$ est i.i.d de loi uniforme sur $\mathcal{E}$.
2. En déduire que X_τ suit la loi uniforme sur $\mathcal{D}$.
3. En déduire que Y_τ a pour densité f

Exercice 3 (simulation d'une loi Gamma)**.** On chercher à simuler une variable aléatoire X de loi $\Gamma(\alpha, \beta)$, avec $\alpha, \beta > 0$. On rappelle la densité f de la v.a. X, $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$.

1. Montrer que pour α entier, $\sum_{i=1}^{\alpha} Y_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ où la suite $(Y_i)_i$ est i.i.d selon la loi exponentielle de paramètre β.

2. En remarquant que si $Y \sim \mathcal{E}(1)$, alors $\beta^{-1}Y \sim \mathcal{E}(\beta)$, montrer que $\beta^{-1}\sum_{i=1}^{\alpha} Z_i \sim \Gamma(\alpha, 1)$, où $(Z_i)_i$ est i.i.d. selon la loi $\mathcal{E}(1)$.
3. Pour α quelconque, on définit g la densité de la loi $\Gamma(\lfloor\alpha\rfloor, b)$ avec $b > 0$. On souhaite mettre en œuvre une méthode de rejet pour simuler selon la densité f en utilisant la densité g. Expliquer pourquoi on doit choisir $0 < b < \beta$.
4. Montrer que $x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est maximale en $x^\star = \frac{\alpha-\lfloor\alpha\rfloor}{\beta-b}$. Quel est le meilleur choix de b pour minimiser le nombre moyen de rejets.

Exercice 4. Soit $(T_i)_i$ une suite i.i.d de loi exponentielle de paramètre λ. On définit $Y_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$. On pose

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{1}_{\{Y_i \leq 1 < Y_{i+1}\}}$$

1. Déterminer la fonction caractéristique de Y_n pour $n \geq 1$. Quelle loi reconnaît-on ?
2. Déterminer la loi de X
3. En déduire une méthode pour simuler une loi de Poisson à partir d'une suite de v.a. de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{x}{16}e^{-\frac{x}{4}}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}.$$

L'exercice consiste à trouver une méthode pour simuler selon la loi de X.

1. Justifier que f est une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Expliquer pourquoi la méthode de la fonction de répartition inverse ne permet pas de simuler une v.a. de densité f.
4. Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Expliquer comment simuler une réalisation de Y.
5. On souhaite mettre en oeuvre une méthode de rejet pour simuler une réalisation de X.
   (a) Pour quelles valeurs de λ existe-t-il une constante C finie telle que
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq C\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}. \tag{1}$$
   (b) Comment choisir λ pour optimiser la méthode de rejet ?

(c) Ecrire l'algorithme associé à cette méthode de rejet.

Exercice 6 (simulation exacte du processus d'Ornstein Ulhenbeck)**.** On considère le processus d'Ornstein Ulhenbeck défini par

$$\begin{cases} dX_t = -cX_t dt + \sigma dW_t, \\ X_0 = x \end{cases}$$

où c et σ sont deux constantes strictement positives et x un réel.

1. Soit $M \in \mathbb{N}^\star$ et $h = \frac{1}{M}$. Ecrire le schéma d'Euler $(\bar{X}_{kh})_{0 \leq k \leq M}$ de pas h du processus X sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. En utilisant le processus $Y_t = X_t \mathrm{e}^{ct}$, montrer que X_t s'écrit
$$X_t = x \mathrm{e}^{-ct} + \sigma \mathrm{e}^{-ct} \int_0^t \mathrm{e}^{cs} dW_s. \tag{2}$$
3. Montrer que $\mathbb{E}(X_t) = x \mathrm{e}^{-ct}$ et que $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2 \frac{1-\mathrm{e}^{-2ct}}{2c}$. En déduire que $\bar{X}_h$ et X_h n'ont pas même loi.
4. Soit la grille de discrétisation $t_i = ih$, pour $i = 0 \ldots M$. Montrer que l'on peut écrire
$$X_{t_i} = m_i + \int_0^1 f_i(s) dW_s$$
où l'on précisera la valeur des constantes m_i et des fonctions f_i pour $i = 0 \ldots M$.
5. Déduire de la question précédente une méthode de simulation exacte du processus X à l'instant t_i pour i fixé dans $\{1 \ldots M\}$.
6. Montrer que le vecteur $(x, Y_{t_1} - Y_{t_0}, \ldots, Y_{t_M} - Y_{t_{M-1}})$ est un vecteur gaussien de moyenne μ et de matrice de covariance Γ, où
$$\mu = (x, 0, \ldots, 0), \quad \Gamma = \mathrm{diag}\left(0, \sigma^2 \frac{\mathrm{e}^{2ct_1} - \mathrm{e}^{-2ct_0}}{2c}, \ldots, \sigma^2 \frac{\mathrm{e}^{2ct_N} - \mathrm{e}^{-2ct_{N-1}}}{2c}\right).$$
Indication : on rappelle que pour tout $s < t$ et toute fonction continue f, $\int_s^t f(u) dW_u$ est indépendante de $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u, u \leq 0 \leq s)$.
7. Donner la loi du vecteur $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_M})$ et en déduire celle de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_M})$.
8. En utilisant la question précédente, expliquer comment simuler le vecteur $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_M})$.