Méthodes de Monte Carlo imbriquées

Dans ce TP, on se place dans le modèle de Black Scholes

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

On considère une portefeuille contenant une option asiatique de maturité T, sur ce sous-jacent et dont le payoff est donné par

$$\left(\frac{1}{T}\,A_T - K\right)_+ \quad \text{avec} \quad A_t = \int_0^t S_u du.$$

On discrétisera le processus A en utilisant la méthode des trapèzes pour approcher l'intégrale. Sur une grille régulière $(t_k)_{0\leq k\leq M}$ de pas T/M, la méthode des trapèzes s'écrit

$$\frac{T}{M}\left(\sum_{k=0}^{M} S_{t_k} - \frac{1}{2}(S_{t_0} + S_{t_M})\right).$$

La valeur du portefeuille à l'instant t est donnée par

$$V_t = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{T}\,A_T - K\right)_+ \Big| \mathcal{F}_t\right]$$

On souhaite calculer le prix d'une option d'achat de maturité $t = 1$ sur ce portefeuille

$$\mathrm{e}^{-rt}\,\mathbb{E}[(V_t - \alpha V_0)_+]$$

pour $\alpha \in (0, 1)$ fixé.

Pour ce faire, on testera tour à tour les différentes méthodes présentées en cours. On remarquera que que l'espérance conditionnelle donnant le prix du portefeuille peut se réécrire

$$V_{t_k} = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{T}\,A_T - K\right)_+ \Big| (\Delta W_{t_1}, \ldots, \Delta W_{t_k})\right]$$

où $\Delta W_{t_k} = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$.
Question 1 : Implémenter une méthode de Monte Carlo imbriqué classique.

Question 2 : Implémenter une méthode de Monte Carlo imbriqué multi-niveaux.

Question 3 : Pour chacune de ces deux méthodes, faire varier le nombre de tirages pour tracer la valeur en fonction du temps de calcul.

A titre indicatif, on pourra prendre $r = 0.03$, $S_0 = 100$, $K = 110$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ et $t = 1$, $\alpha = 0.8$.