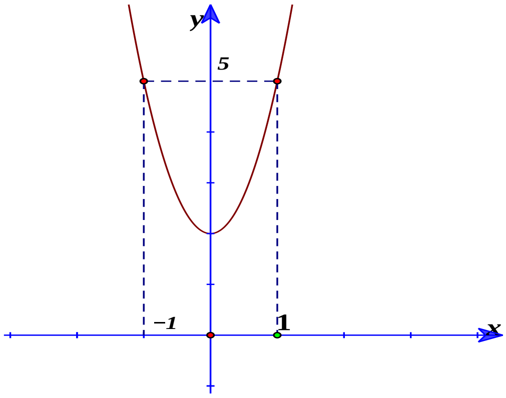
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH CÓ ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM

BÀI TẬP

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?

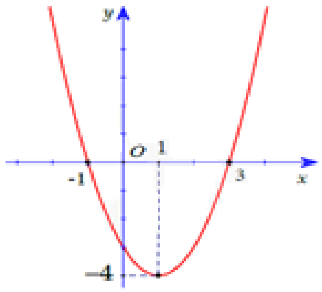
A. $H = 45$. **B.** $H = 64$. **C.** $H = 51$. **D.** $H = 58$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a,b,c,d \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc toạ độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính $f(3) - f(1)$?



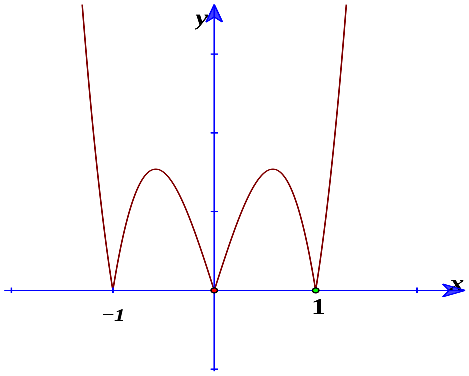
A. 24. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 21.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a,b,c,d \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = -9$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tìm phần nguyên của giá trị diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



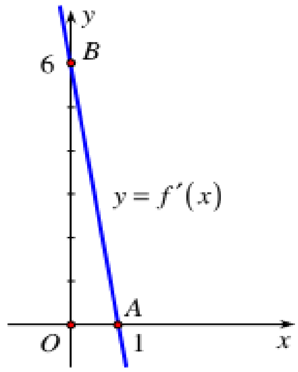
A. 2. **B.** 27. **C.** 29. **D.** 35.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c(a > 0)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y = |f'(x)|$ như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{-8\sqrt{3}}{9}\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



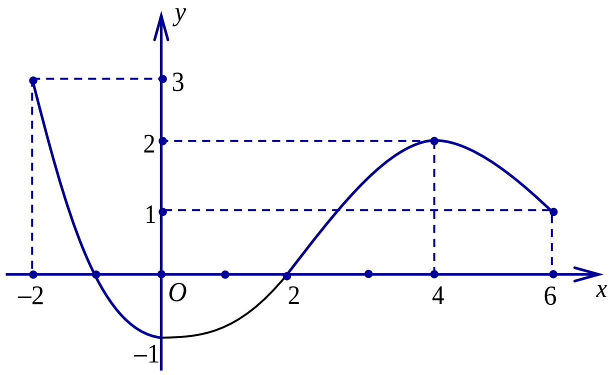
A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{8}{15}$. **C.** $\frac{14}{15}$. **D.** $\frac{16}{15}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$và có đồ thị của hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) = 5$, tính giá trị của $f(1)$?



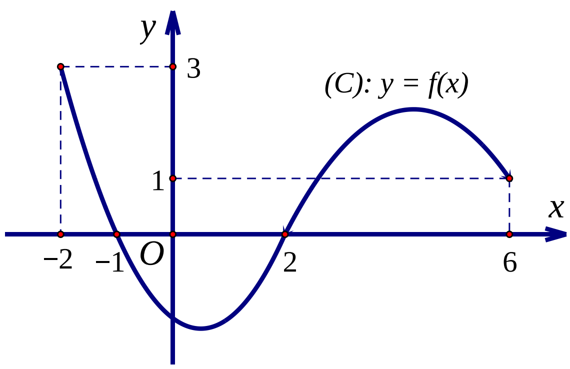
A. 0. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.



A. $\max\limits_{[-2;6]} y = f(-2)$. **B.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f(2)$. **C.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f(6)$. **D.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f(-1)$.

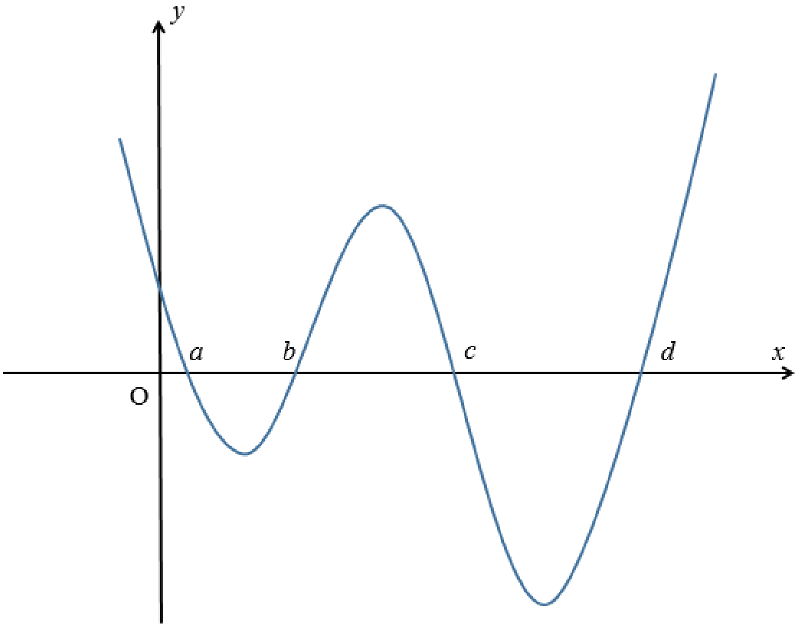
Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $f(-2) < f(-1) < f(2) < f(6)$. **B.** $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(6)$.

C. $f(-2) < f(2) < f(-1) < f(6)$. **D.** $f(6) < f(2) < f(-2) < f(-1)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình sau).

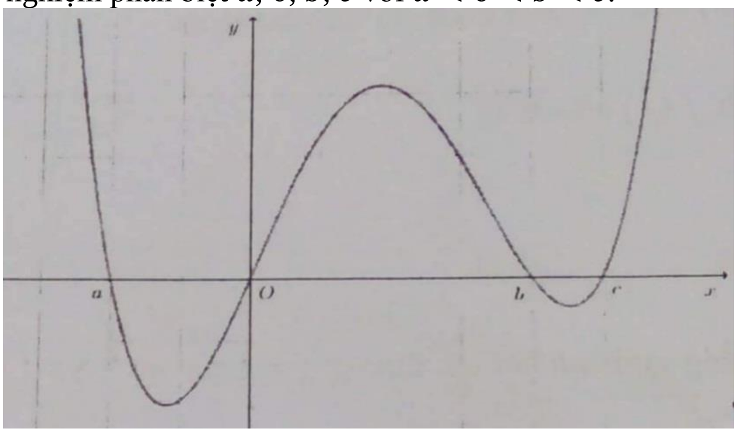


Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$. **B.** $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.

C. $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$. **D.** $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Biết phương trình $f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt a, 0, b, c với $a < 0 < b < c$.

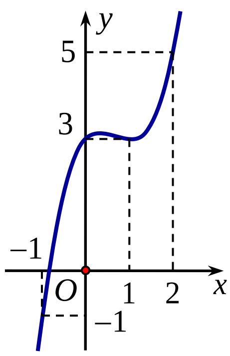


Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(b) > f(a) > f(c)$. **B.** $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(b) > f(c) > f(a)$. **D.** $f(c) > f(a) > f(b)$.

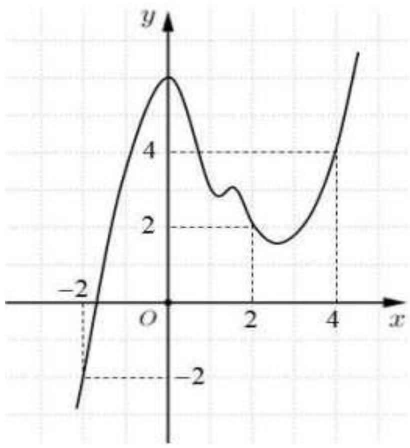
Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình 2 dưới đây.



Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1) > g(1)$. **B.** $g(-1) = g(1)$. **C.** $g(1) = g(2)$. **D.** $g(1) > g(2)$.

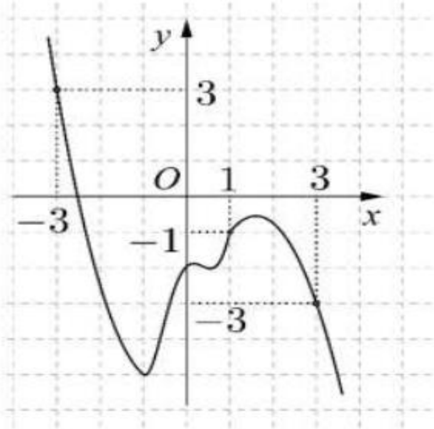
Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.
Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

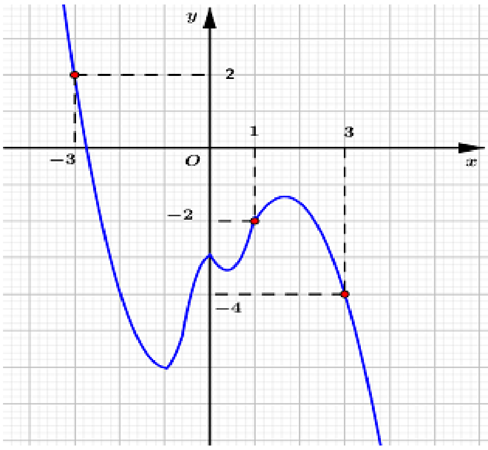
A. $h(4) = h(-2) > h(2)$.
B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.
C. $h(2) > h(4) > h(-2)$.
D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$.
Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3) < g(-3) < g(1)$.
B. $g(1) < g(3) < g(-3)$.
C. $g(1) < g(-3) < g(3)$.
D. $g(-3) < g(3) < g(1)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x + 1)^2$.



Chào

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(1) < g(3) < g(-3)$.
B. $g(1) < g(-3) < g(3)$.
C. $g(3) = g(-3) < g(1)$.
D. $g(3) = g(-3) > g(1)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên có đồ thị $y = f'(x)$ cho như hình dưới đây. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

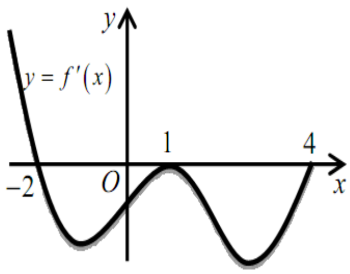
A. $\min\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

B. $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

C. $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



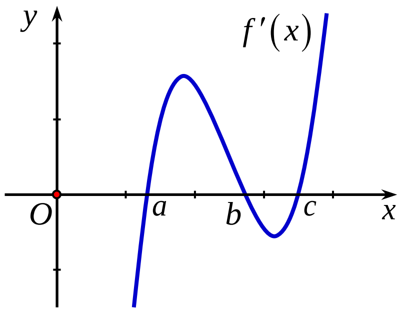
Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

A. 21
B. 9.
C. 3.
D. 2.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết $f(a) > 0$. Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 2 nghiệm.
B. 1 nghiệm.
C. 4 nghiệm.
D. 3 nghiệm.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên.



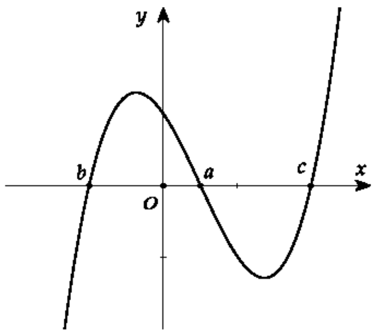
Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f(a) > 0$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$như hình vẽ. Số nào lớn nhất trong các số sau $f(0); f(1); f(3); f(4)$?

A. $f(0)$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(3)$. **D.** $f(4)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$như hình vẽ.

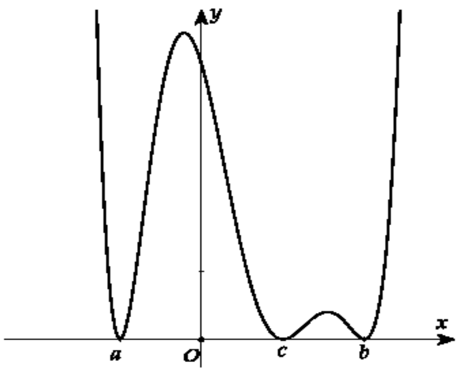


Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(a) > f(b)$ và $f(c) > f(a)$. **B.** $f(a) > f(b)$ và $f(c) < f(a)$.

C. $f(a) < f(b)$ và $f(c) > f(a)$. **D.** $f(a) < f(b)$ và $f(c) < f(a)$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$như hình vẽ.

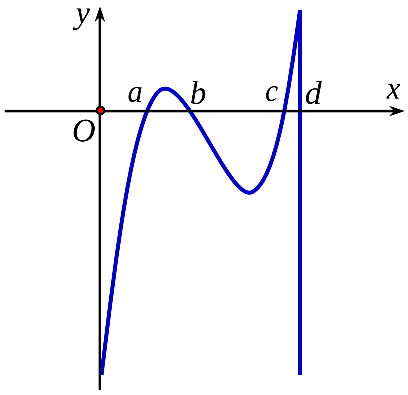


Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(b) > f(c)$ và $f(c) > f(a)$. **B.** $f(b) > f(c)$ và $f(c) < f(a)$.

C. $f(b) < f(c)$ và $f(c) > f(a)$. **D.** $f(b) < f(c)$ và $f(c) < f(a)$.

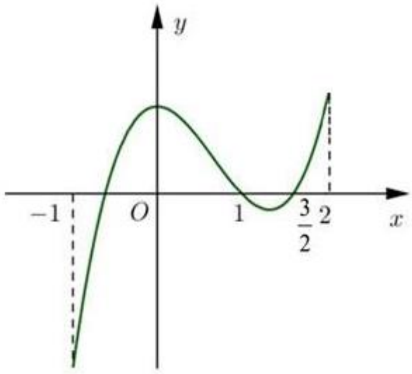
Câu 21: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0; d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $M+m=f(0)+f(c)$. **B.** $M+m=f(d)+f(c)$.

C. $M+m=f(b)+f(a)$. **D.** $M+m=f(0)+f(a)$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;2]$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.

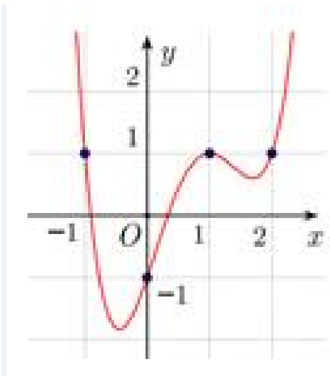


Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)$. **B.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)$.

C. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)$. **D.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



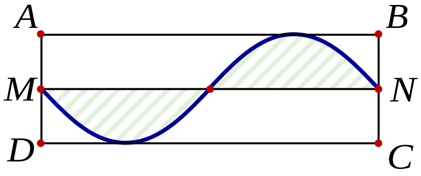
Đặt $g(x)=f(x)-x$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $g(-1)<g(1)<g(2)$. **B.** $g(2)<g(1)<g(-1)$.

C. $g(2)<g(-1)<g(1)$. **D.** $g(1)<g(-1)<g(2)$.

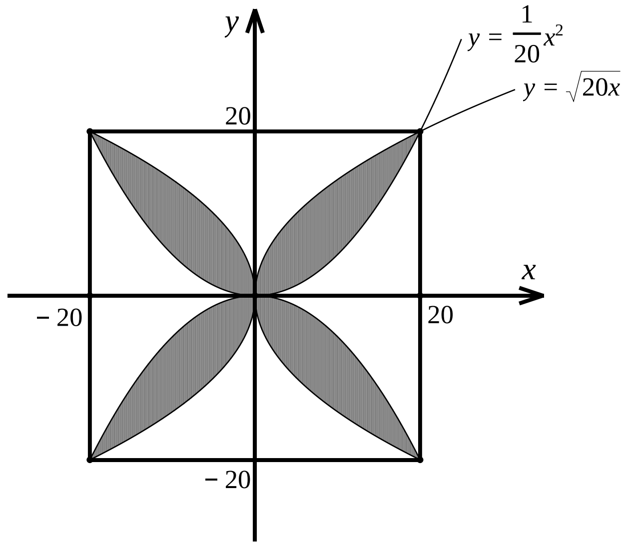
BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Câu 24: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen Được giới hạn bởi cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi(m)$, $AD = 2(m)$. Tính diện tích phần còn lại.



A. $4\pi - 1$. **B.** $4(\pi - 1)$. **C.** $4\pi - 2$. **D.** $4\pi - 3$.

Câu 25: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa (phần tô đậm) bằng

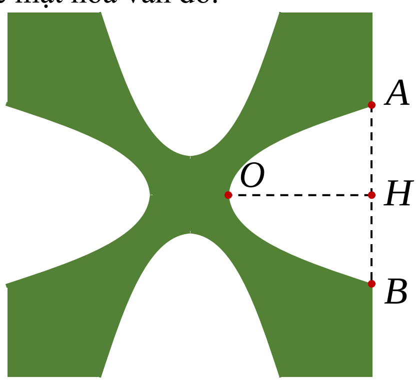


A. $\frac{800}{3}$ cm^2. **B.** $\frac{400}{3}$ cm^2. **C.** 250 cm^2. **D.** 800 cm^2.

Câu 26: Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng Parabol, chiều rộng $8\,m$, chiều cao $12,5\,m$. Diện tích của cổng là:

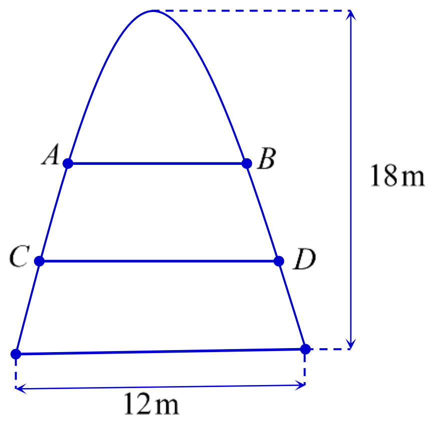
A. $100\left(\mathrm{m}^2\right)$. **B.** $200\left(\mathrm{m}^2\right)$. **C.** $\frac{100}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$. **D.** $\frac{200}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Câu 27: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\frac{160}{3}$ cm^2. **B.** $\frac{140}{3}$ cm^2. **C.** $\frac{14}{3}$ cm^2. **D.** 50 cm^2.

Câu 28: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

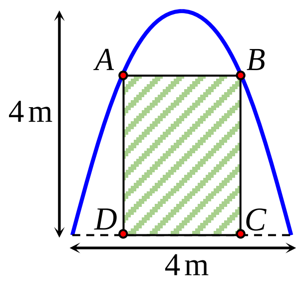
Câu 29: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Câu 30: Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng là một parabol. Giá $1m^2$ cửa sắt là 660.000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là:

A. 6500. **B.** $\frac{55}{6}.10^3$. **C.** 5600. **D.** 6050.

Câu 31: Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



A. 900.000 đồng. **B.** 1.232.000 đồng. **C.** 902.000 đồng. **D.** 1.230.000 đồng.

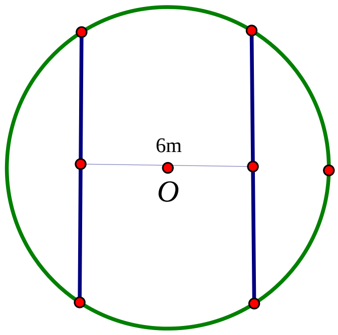
Câu 32: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 12750000 đồng. **C.** 6750000 đồng. **D.** 3750000 đồng.

Câu 33: Trên cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

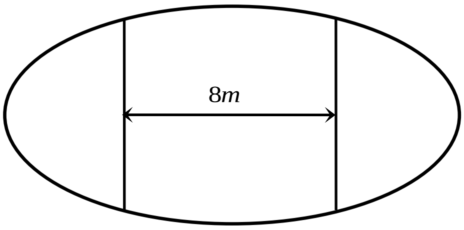
A. $1,034 m^2$ **B.** $1,574 m^2$ **C.** $1,989 m^2$ **D.** $2,824 m^2$

Câu 34: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng$/m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng. **C.** 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng.

Câu 35: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng$10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

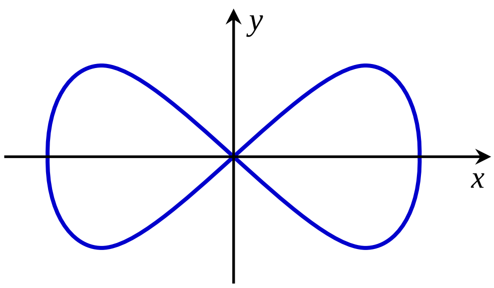


A. 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng. **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

Câu 36: Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5m, người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được giá 100 nghìn. Tuy nhiên cần có khoảng trống để dựng chồi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6m sao cho 2 đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền (tính theo đơn vị nghìn và bỏ phần số thập phân).

.**A.** 3722. **B.** 7445. **C.** 7446. **D.** 3723

Câu 37: Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S = \frac{125}{6}(m^2)$ **B.** $S = \frac{125}{4}\ (m^2)$ **C.** $S = \frac{250}{3}\ (m^2)$ **D.** $S = \frac{125}{3}\ (m^2)$

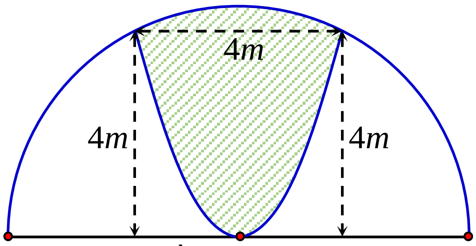
Câu 38: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/m^2Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng. **C.** 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng

Câu 39: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao *8m* và rộng *8m (như hình vẽ)*

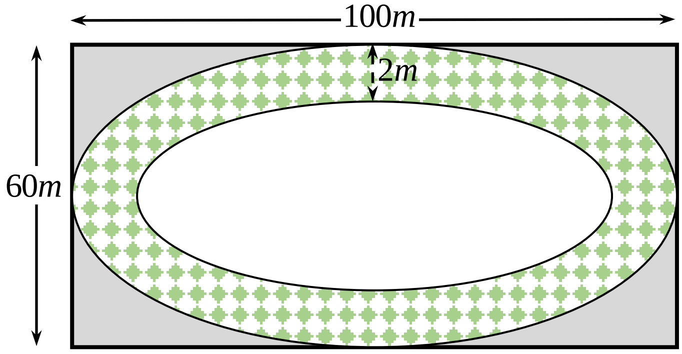
A. $\frac{28}{3}(m^2)$ **B.** $\frac{26}{3}(m^2)$ **C.** $\frac{128}{3}(m^2)$ **D.** $\frac{131}{3}(m^2)$

Câu 40: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



A. 3.895.000 **(đồng).** **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 2.388.000 (đồng). **D.** 1.194.000 (đồng).

Câu 41: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293904000. **B.** 283904000. **C.** 293804000. **D.** 283604000.

Câu 42: ChọnA.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là (E_1): $\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$. Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}=f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là (E_2): $\frac{x^2}{48^2}+\frac{y^2}{28^2}=1$. Phần đồ thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}=f_2(x)$.

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường. Khi đó

$$S = S_1 - S_2 = 2\int_{-50}^{50} 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}}dx - 2\int_{-48}^{48} 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}}dx.$$

Tính tích phân $I = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx, (a, b \in \mathbb{R}^+)$.

Đặt $x = a\sin t, \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a\cos t\,dt$.

Đổi cận $x = -a \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó $I = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1 - \sin^2 t}\,.\,a\cos t\,dt = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt$

$= ab\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.$

Do đó $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi$.

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

Câu 43: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $B(a;\sqrt{a})$, với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a.

A. $a = 9$. **B.** $a = 4$. **C.** $a = \frac{1}{2}$. **D.** $a = 3$.

Câu 44: Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O. Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$ (như hình vẽ). Phần diện tích S_l, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng /1m^2, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

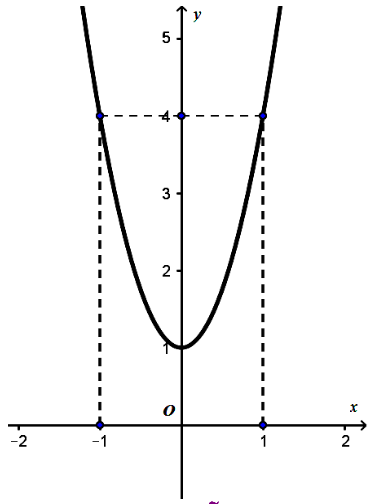
A. 6.060.000 đồng. **B.** 5.790.000 đồng. **C.** 3.270.000 đồng. **D.** 3.000.000 đồng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH CÓ ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?

A. $H = 45$. **B.** $H = 64$. **C.** $H = 51$. **D.** $H = 58$.



Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo bài ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ do đó $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y = f'(x) = a'x^2 + b'x + c'$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases} c' = 1 \\ a' - b' + c' = 4 \\ a' + b' + c' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases} \Rightarrow y = f'(x) = 3x^2 + 1$.

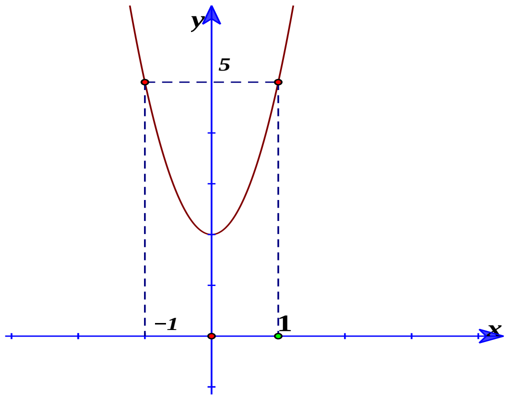
Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox, $x = 4$, $x = 2$.

Ta có $S = \int_2^4 (3x^2 + 1)\mathrm{dx} = 58$.

Lại có: $S = \int_2^4 f'(x)\mathrm{dx} = f(x)\Big|_2^4 = f(4) - f(2)$.

Do đó: $H = f(4) - f(2) = 58$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a,b,c,d \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc toạ độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính $f(3) - f(1)$?



A. 24. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 21.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là parabol có trục đối xứng là trục tung nên $b = 0$.

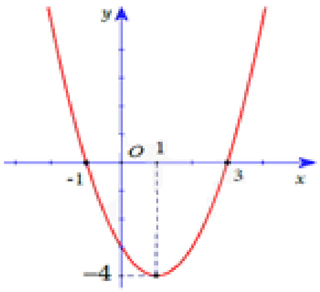
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua 2 điểm $(1; 5), (0; 2)$ ta tìm được: $a = 1; c = 2$.

Suy ra: $f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x + C$, đồ thị hàm số (C) đi qua gốc toạ độ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f(3) - f(2) = 21$.

Chọn D

Hoặc: $f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f(3) - f(2) = \int_2^3 f'(x)dx = 21$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = -9$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tìm phần nguyên của giá trị diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



A. 2. **B.** 27. **C.** 29. **D.** 35.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$đi qua 3 điểm $(-1; 0), (3,0), (1, -4)$ ta tìm được: $a = \frac{1}{3}; b = -1; c = -3$.

Suy ra: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C$.

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = -9$ tại điểm có hoành độ dương nên ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3 \Rightarrow x = 3.$$

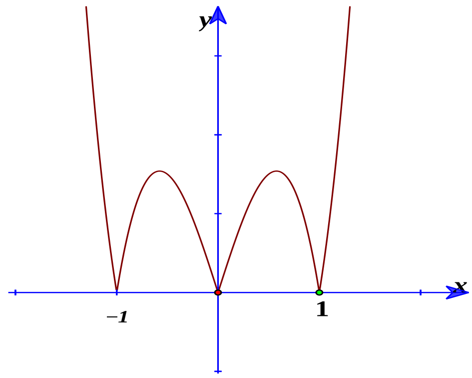
Như vậy (C) đi qua điểm $(3; -9)$ ta tìm được $C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.

Xét phương trình trình hoành độ giao điểm và trục hoành: $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

$$S=\int_{\frac{3-3\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{5}}{2}}\left|\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right|dx=29{,}25.$$

Chọn C

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c(a>0)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y=|f'(x)|$ như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{-8\sqrt{3}}{9}\right)$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



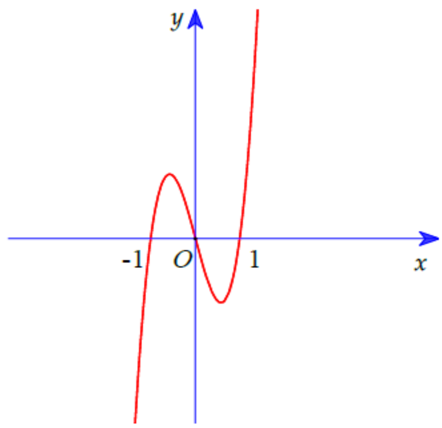
A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{8}{15}$. **C.** $\frac{14}{15}$. **D.** $\frac{16}{15}$.

Hướng dẫn giải

Từ đồ thị của hàm số $y=|f'(x)|$ và $a>0$ ta dễ dàng có được đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như sau:

Ta có

$f'(x)=4ax^3+2bx$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua $(1;0),\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{-8\sqrt{3}}{9}\right)$ ta tìm được $a=1;b=-2\Rightarrow f'(x)=4x^3-4x\Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+C$.



Do (C) tiếp xúc với trục hoành nên $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=\pm1$. Do (C) đối xứng qua trục tung nên (C) tiếp xúc với trục hoành tại 2 điểm $(1;0),(-1;0)$.

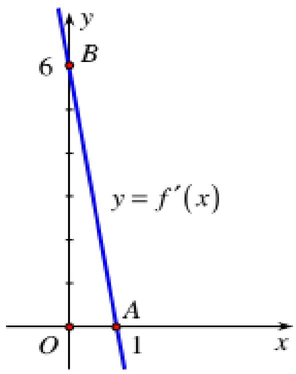
Do đó: $f(0)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành: $x^4-2x^2+1=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

$S=\int_{-1}^{1}|x^4-2x^2+1|\,dx=\frac{16}{15}$.

Chọn D

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$và có đồ thị của hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0)=5$, tính giá trị của $f(1)$?



A. 0. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 11.

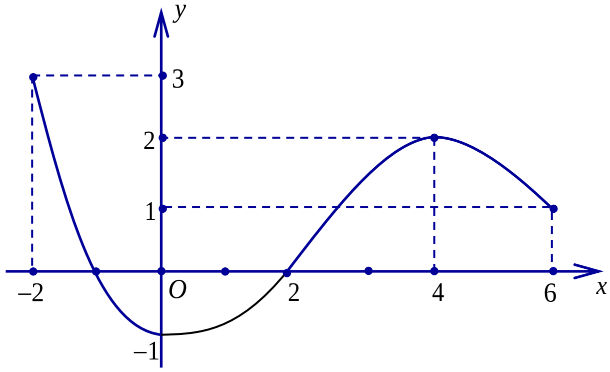
Hướng dẫn giải

Cách 1: $f'(x) = ax + b$. Theo hình vẽ ta tìm được $f'(x) = -6x + 6 \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 6x + c$

Mà $f(0) = 5 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(1) = 8$.

Cách 2: $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)\,dx = S_{OAB} = 3 \Rightarrow f(1) = 3 + 5 = 8$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.



A. $\max\limits_{[-2;6]} y = f(-2)$. **B.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f(2)$. **C.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f(6)$. **D.** $\max\limits_{[-2;6]} y = f(-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-2;6]} y = \max\{f(-1); f(6)\}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 2$ là

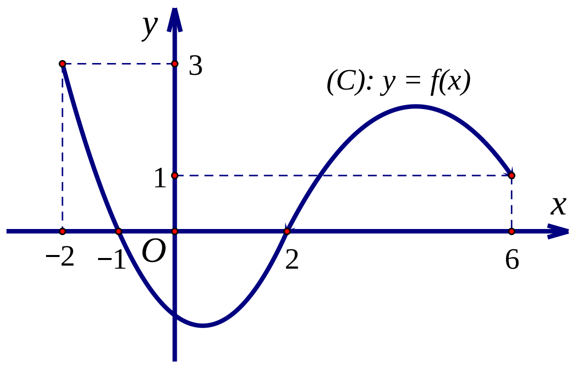
$S_1 = -\int_{-1}^{2} f'(x)dx = -f(x)|_{-1}^{2} = f(-1) - f(2)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$ và $x = 6$ là

$S_2 = \int_2^6 f'(x)dx = f(x)|_2^6 = f(6) - f(2)$.

Từ hình vẽ suy ra $S_2 > S_1 \Rightarrow f(6) - f(2) > f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(6) > f(-1)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $f(-2) < f(-1) < f(2) < f(6)$. **B.** $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(6)$.
C. $f(-2) < f(2) < f(-1) < f(6)$. **D.** $f(6) < f(2) < f(-2) < f(-1)$.

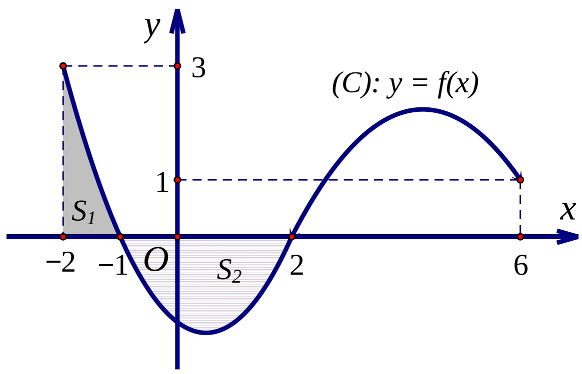
Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như sau:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(-2) < f(-1) \\ f(2) < f(-1) \\ f(2) < f(6) \end{cases}$ nên A, D sai.



Chỉ cần so sánh $f(-2)$ và $f(2)$ nữa là xong.

Gọi $\cos\widehat{CAB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$, S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm như trên hình vẽ.

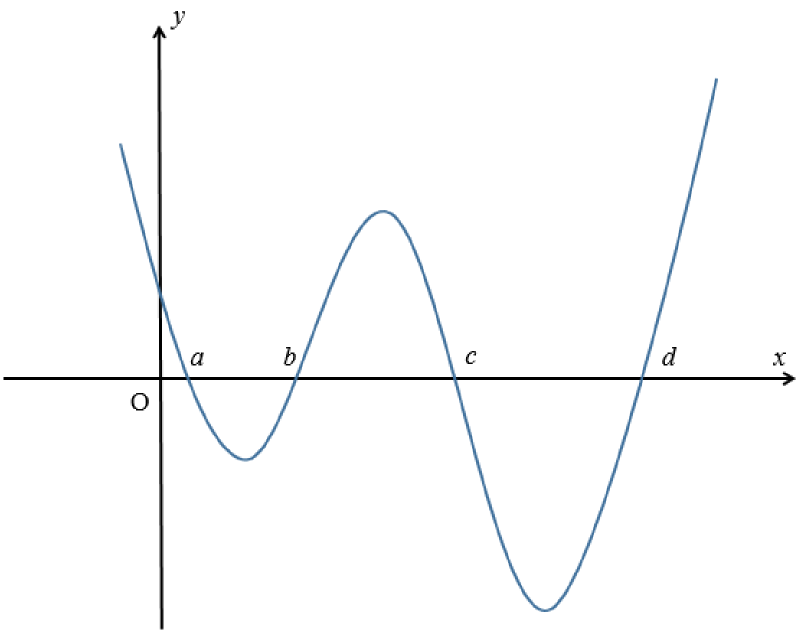
Ta có:

$S_1 = \int_{-2}^{-1} |f'(x)|dx = \int_{-2}^{-1} f'(x)dx = f(-1) - f(-2)$.

$S_2 = \int_{-1}^{2} |f'(x)|dx = -\int_{-1}^{2} f'(x)dx = f(-1) - f(2)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 < S_2$ nên $f(-1) - f(-2) < f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) > f(2)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình sau).



Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.

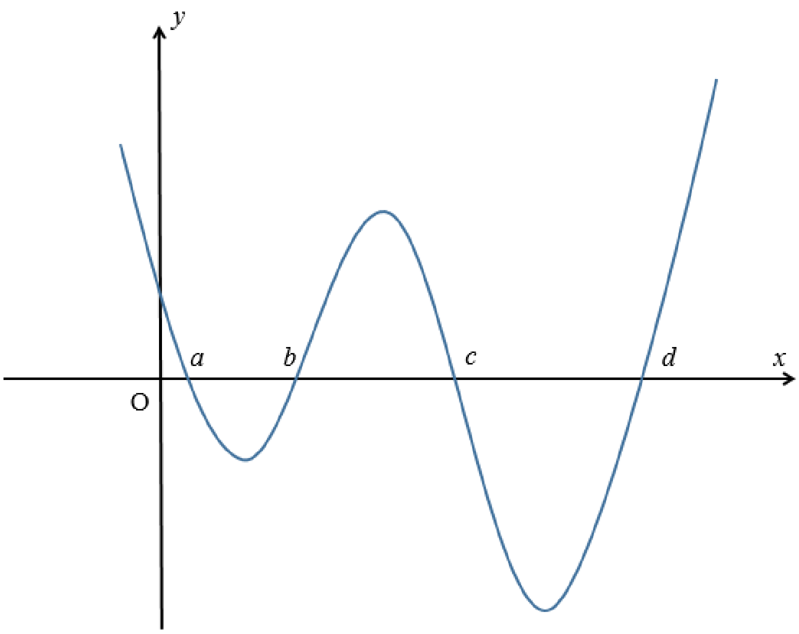
B. $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.

C. $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$.

D. $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

Hướng dẫn giải

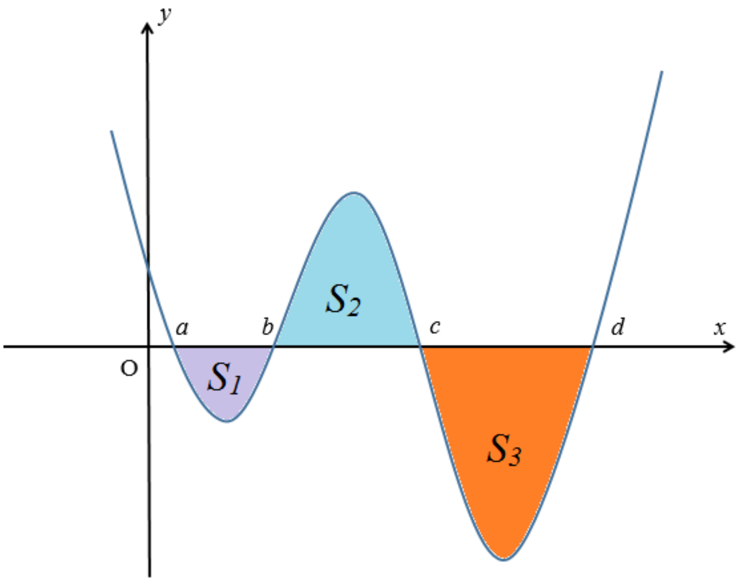
Chọn D



☑ Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có dấu của $f'(x)$ và BBT như sau

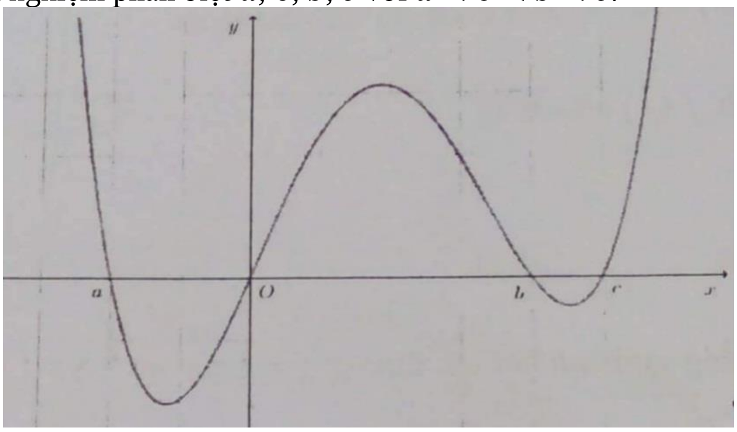
x	$-\infty$		a		b		c		d		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(d)$	$\nearrow$	

☑ Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $f(a)$ và $f(c)$ cùng lớn hơn $f(b)$ và $f(d)$ **(1)**



☑ + $S_1 < S_2 \Rightarrow \int_b^a f'(x)dx < \int_b^c f'(x)dx \Rightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b)$
$\Rightarrow f(a) < f(c)$ **(2)**
☑ + $S_2 < S_3 \Rightarrow \int_b^c f'(x)dx < \int_d^c f'(x)dx \Rightarrow f(c) - f(b) < f(c) - f(d)$
$\Rightarrow f(b) > f(d)$ **(3)**
☑ Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Biết phương trình $f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt a, 0, b, c với $a < 0 < b < c$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

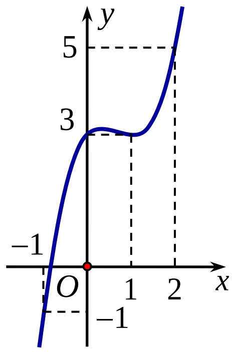
A. $f(b) > f(a) > f(c)$.
B. $f(c) > f(b) > f(a)$.
<u>C.</u> $f(b) > f(c) > f(a)$.
D. $f(c) > f(a) > f(b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

+ Từ hình vẽ ta thấy: $f'(x) < 0$ khi $x \in (b; c)$; $f'(x) > 0$ khi $x > c$ nên có $f(b) > f(c)$.
+ Ta lại có: $\int_a^0 [-f'(x)]dx < \int_0^b f'(x)dx - \int_b^c [-f'(x)]\,dx \Leftrightarrow \int_a^0 [-f'(x)]dx < \int_0^c f'(x)dx$
$\Rightarrow [-f(x)]|_a^0 < f(x)|_0^c \Rightarrow -f(0) + f(a) < f(c) - f(0) \Rightarrow f(a) < f(c)$.
+ Vậy $f(b) > f(c) > f(a)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình 2 dưới đây.



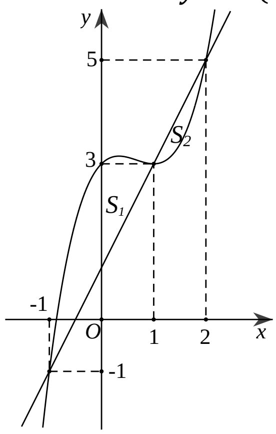
Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1) > g(1)$. **B.** $g(-1) = g(1)$. **C.** $g(1) = g(2)$. **D.** $g(1) > g(2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f'(x) - (2x+1)$. Khi đó hàm số $h(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1;1]$, $[1;2]$ và có $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = h(x)$.



Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ y = f'(x) \\ y = 2x+1 \end{cases}$ là

$S_1 = \int_{-1}^{1} |f'(x) - (2x+1)| dx = \int_{-1}^{1} [f'(x) - (2x+1)] dx = g(x)|_{-1}^{1} = g(1) - g(-1)$.

Vì $S_1 > 0$ nên $g(1) > g(-1)$.

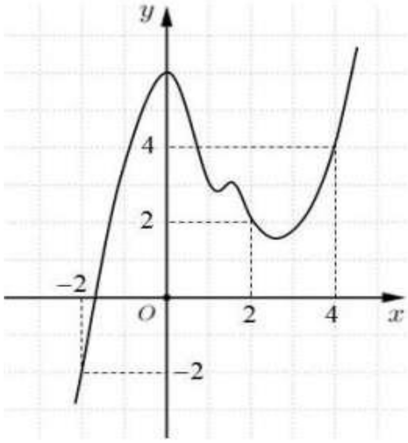
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ y = f'(x) \\ y = 2x+1 \end{cases}$ là

$S_2 = \int_{1}^{2} |f'(x) - (2x+1)| dx = \int_{1}^{2} [(2x+1) - f'(x)] dx = -g(x)|_{1}^{2} = g(1) - g(2)$.

Vì $S_2 > 0$ nên $g(1) > g(2)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$.

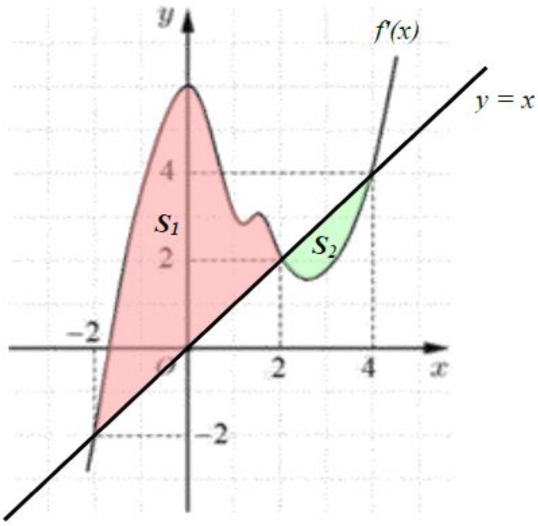


Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

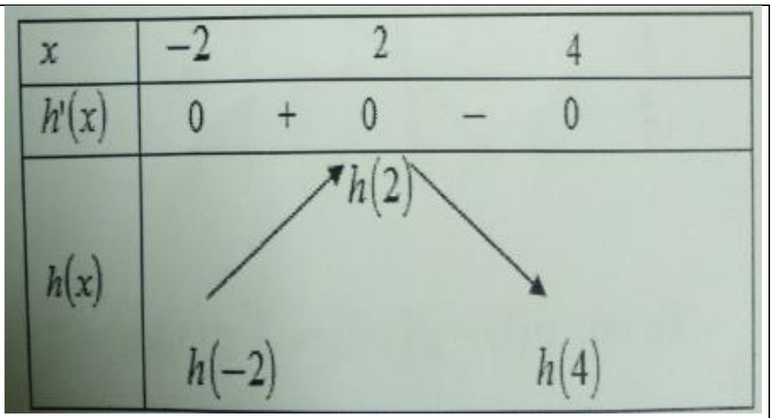
A. $h(4) = h(-2) > h(2)$.
B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.
C. $h(2) > h(4) > h(-2)$.
D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $h'(x) = 2f'(x) - 2x = 2[f'(x) - x]$. Ta vẽ đường thẳng $y = x$.



$h(2) - h(-2) = \int_{-2}^{2} h'(x)\,dx$ $= 2\int_{-2}^{2} [f'(x) - x]\,dx > 0$ $\Rightarrow h(2) > h(-2)$.	Hoặc

$h(4)-h(2)=\int_{2}^{4} h'(x)\,dx$ $=2\int_{-2}^{2}[f'(x)-x]\,dx<0$ $\Rightarrow h(4)<h(2).$	

$$h(4)-h(-2)=\int_{-2}^{4} h'(x)\,dx=2\int_{-2}^{4}[f'(x)-x]\,dx$$

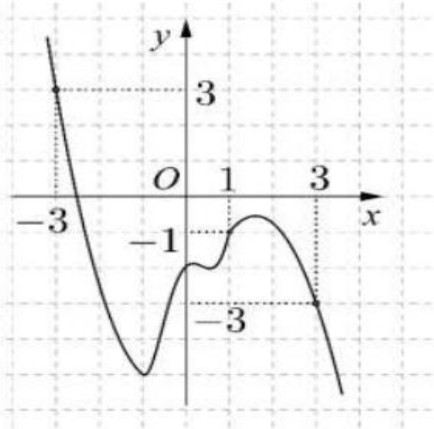
$$=2\int_{-2}^{2}[f'(x)-x]\,dx+2\int_{2}^{4}[f'(x)-x]\,dx$$

$$=2S_1-2S_2>0\Rightarrow h(4)>h(-2).$$

Như vậy ta có:$h(-2)<h(4)<h(2)$.

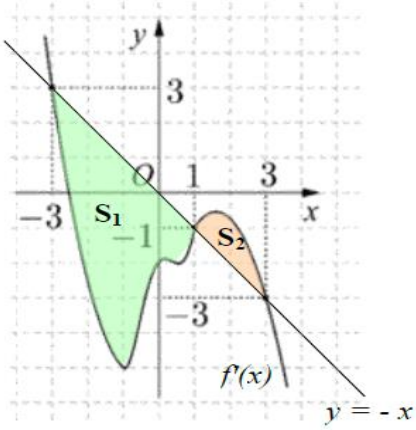
Chọn C

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3)<g(-3)<g(1)$.
B. $g(1)<g(3)<g(-3)$.
C. $g(1)<g(-3)<g(3)$.
D. $g(-3)<g(3)<g(1)$.

Hướng dẫn giải



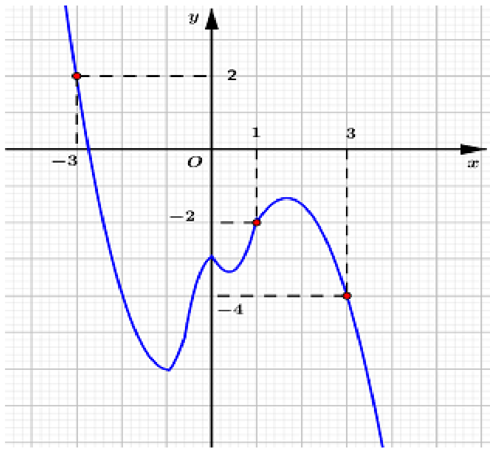
Ta có: $g'(x) = 2f'(x) + 2x = 2[f'(x) + x] \Rightarrow -g'(x) = 2[-x - f'(x)]$
Ta vẽ đường thẳng $y = -x$.
$g(-3) - g(1) = -\int_{-3}^{1} g'(x)\,dx = 2\int_{-3}^{1}[-x - f'(x)]dx > 0 \Rightarrow g(-3) > g(1)$.

$$g(1) - g(3) = -\int_{1}^{3} g'(x)\,dx = 2\int_{1}^{3}[-x - f'(x)]dx < 0 \Rightarrow g(3) > g(1).$$

$$g(-3) - g(3) = -\int_{-3}^{3} g'(x)\,dx = 2\int_{-3}^{1}[-x - f'(x)]\,dx + 2\int_{1}^{3}[-x - f'(x)]\,dx$$
$$= 2S_1 - 2S_2 > 0$$
$$\Rightarrow g(-3) > g(3).$$

Chọn B

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x + 1)^2$.

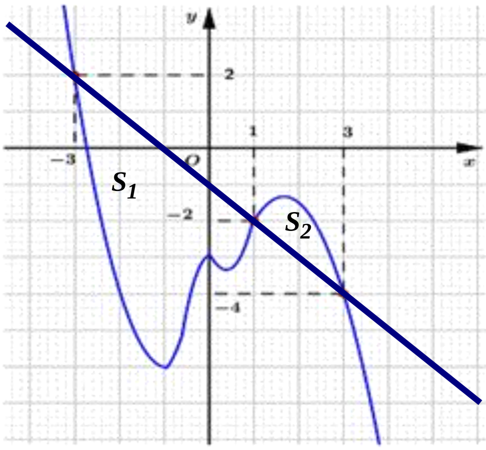


Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(1) < g(3) < g(-3)$.
B. $g(1) < g(-3) < g(3)$.
C. $g(3) = g(-3) < g(1)$.
D. $g(3) = g(-3) > g(1)$.

Hướng dẫn giải

Ta có:
$g'(x) = 2f'(x) + 2(x + 1) = 2[f'(x) + (x + 1)] \Rightarrow -g'(x) = 2[-(x + 1) - f'(x)]$
Ta vẽ đường thẳng $y = -(x + 1)$.



$$g(-3)-g(1)=-\int_{-3}^{1} g'(x)dx = 2\int_{-3}^{1}[-(x+1)-f'(x)]\,dx > 0 \Rightarrow g(-3) > g(1).$$

$$g(1)-g(3)=-\int_{1}^{3} g'(x)dx = 2\int_{1}^{3}[-(x+1)-f'(x)]\,dx < 0 \Rightarrow g(3) > g(1).$$

$$g(-3)-g(3)=-\int_{-3}^{3} g'(x)dx$$

$$= 2\int_{-3}^{1}[-(x+1)-f'(x)]\,dx + 2\int_{1}^{3}[-(x+1)-f'(x)]\,dx = 2S_1 - 2S_2 > 0$$

$\Rightarrow g(-3) > g(3)$

Như vậy ta có: $g(1) < g(3) < g(-3)$

Chọn A

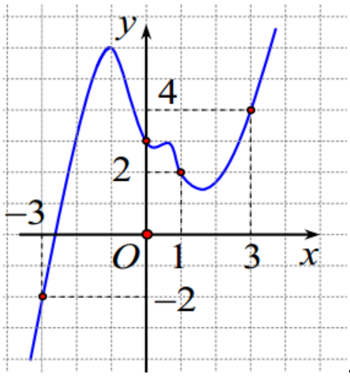
Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên ℝ có đồ thị $y=f'(x)$ cho như hình dưới đây. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

A. $\min\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

B. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

C. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(3)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$.



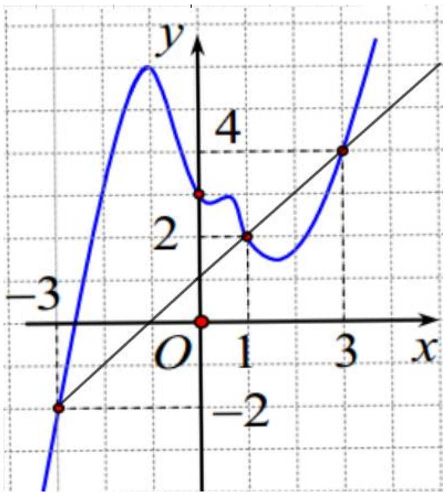
Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$

$\Rightarrow g'(x)=2f'(x)-(2x+2)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1$. Quan sát trên đồ thị ta có hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $y=x+1$ trên khoảng $(-3;3)$ là $x=1$.

Vậy ta so sánh các giá trị $g(-3)$, $g(1)$, $g(3)$



Xét $\int_{-3}^{1} g'(x)dx = 2\int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx > 0$

$\Leftrightarrow g(1)-g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(1) > g(-3)$.

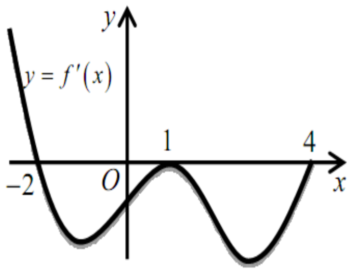
Tương tự xét $\int_{1}^{3} g'(x)dx = 2\int_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx < 0 \Leftrightarrow g(3)-g(1) < 0 \Leftrightarrow g(3) < g(1)$.

Xét $\int_{-3}^{3} g'(x)dx = 2\int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx + 2\int_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx > 0$

$\Leftrightarrow g(3)-g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(3) > g(-3)$. Vậy ta có $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

A. 21 **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $\int_{-2}^{1}|f'(x)|dx = 9$ và $\int_{1}^{4}|f'(x)|dx = 12$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\int_{-2}^{1}|f'(x)|dx = -\int_{-2}^{1}f'(x)dx = -f(x)|_{-2}^{1} = -f(-1) + f(-2) \Rightarrow -f(1) + f(-2) = 9$.

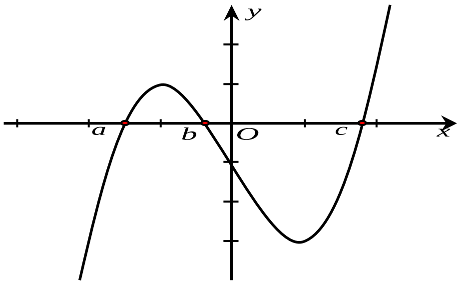
Tương tự ta có $-f(4) + f(1) = 12$.

Như vậy $[-f(1) + f(-2)] - [-f(4) + f(1)] = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 2f(1) = -3$

$\Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 6 = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) = 3$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết $f(a) > 0$. Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 2 nghiệm. **B.** 1 nghiệm. **C.** 4 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.



Hướng dẫn giải

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘	$f(a)$	↗	$f(b)$	↘	$f(c)$	↗	

$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,dx + \int_b^c f'(x)\,dx < 0 \Rightarrow f(c) < f(a)$.

Do $f(a) > 0$ nên

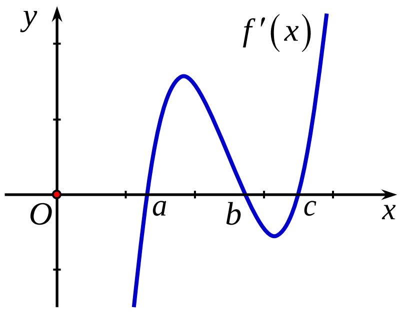
$f(c) > 0$: PT $f(x) = 0$ vô nghiệm.

$f(c) = 0$: PT $f(x) = 0$ có 1 nghiệm.

$f(c) < 0$: PT $f(x) = 0$ có 2 nghiệm.

Chọn A

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên.



Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f(a) > 0$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y					$f(b)$			↗	

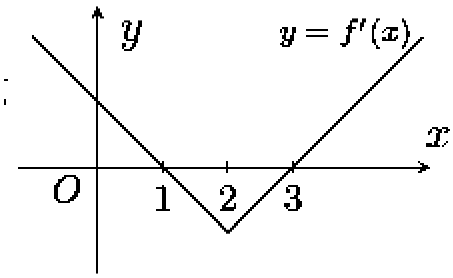
	$f(a)$ ↘		↗	$f(c)$ ↘	

$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,dx + \int_b^c f'(x)\,dx > 0 \Rightarrow f(c) > f(a) > 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Chọn D

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$như hình vẽ. Số nào lớn nhất trong các số sau $f(0); f(1); f(3); f(4)$?

A. $f(0)$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(3)$. **D.** $f(4)$.



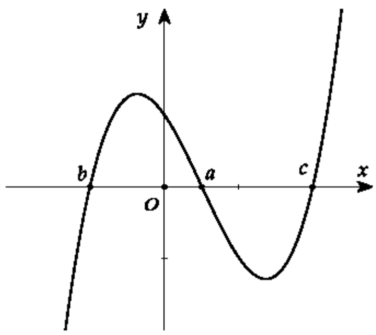
Hướng dẫn giải

x	0		1		3		4
y'		+	0	-	0	+	
y	$f(0)$	↗	$f(1)$	↘	$f(3)$	↗	$f(4)$

$$f(4) - f(1) = \int_1^4 f'(x)\,dx = \int_1^3 f'(x)\,dx + \int_3^4 f'(x)\,dx < 0 \Rightarrow f(4) < f(1).$$

Chọn B

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(a) > f(b)$ và $f(c) > f(a)$. **B.** $f(a) > f(b)$ và $f(c) < f(a)$.

C. $f(a) < f(b)$ và $f(c) > f(a)$. **D.** $f(a) < f(b)$ và $f(c) < f(a)$.

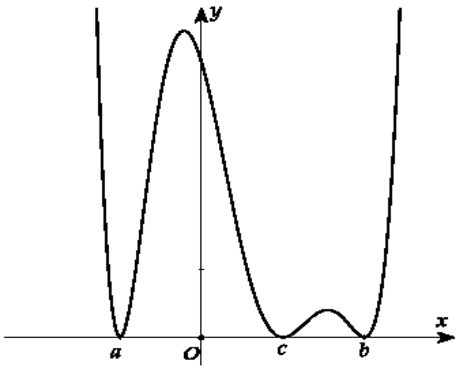
Hướng dẫn giải

$$f(a) - f(b) = \int_b^a f'(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b).$$

$$f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)\,dx<0 \Leftrightarrow f(c)<f(a).$$

Chọn B

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(b)>f(c)$ và $f(c)>f(a)$.
B. $f(b)>f(c)$ và $f(c)<f(a)$.
C. $f(b)<f(c)$ và $f(c)>f(a)$.
D. $f(b)<f(c)$ và $f(c)<f(a)$.

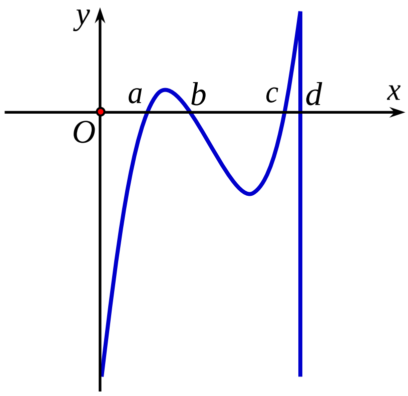
Hướng dẫn giải

$$f(b)-f(c)=\int_c^b f'(x)\,dx>0 \Leftrightarrow f(b)>f(c).$$

$$f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)\,dx>0 \Leftrightarrow f(c)>f(a).$$

Chọn A

Câu 21: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $M+m=f(0)+f(c)$.
B. $M+m=f(d)+f(c)$.
C. $M+m=f(b)+f(a)$.
D. $M+m=f(0)+f(a)$.

Hướng dẫn giải

Ta có bảng biến thiên:

x	0		a		b		c		d
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(d)$

So sánh $f(a); f(c)$

$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,dx + \int_b^c f'(x)\,dx < 0 \Rightarrow f(c) < f(a) \Rightarrow m = f(c)$.

So sánh $f(0); f(b); f(d)$.

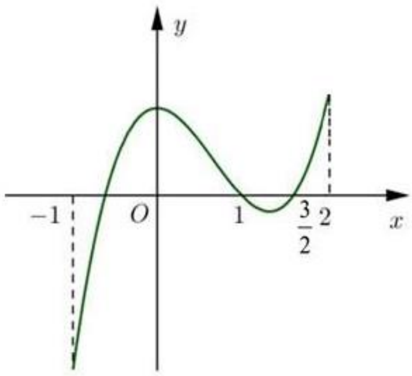
$$f(b) - f(0) = \int_0^b f'(x)\,dx = \int_0^a f'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)\,dx < 0 \Rightarrow f(b) < f(0).$$

$$f(d) - f(b) = \int_b^d f'(x)\,dx = \int_b^c f'(x)\,dx + \int_c^d f'(x)\,dx < 0 \Rightarrow f(d) < f(b).$$

$\Rightarrow f(d) < f(b) < f(0) \Rightarrow M = f(0)$.

Chọn A

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 2]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(-1)$.

B. $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2)$.

C. $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(1)$.

D. $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

x	-1		a		1		$\frac{3}{2}$		2
y'		-	0	+	0	-	0	+	

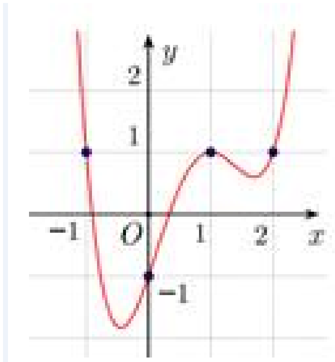
y	$f(-1)$		$f(1)$		$f(2)$
		$f(a)$		$f\left(\frac{3}{2}\right)$	

$f(1)-f(-1)=\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx=\int_{-1}^{a} f'(x)\,dx+\int_{a}^{1} f'(x)\,dx>0 \Rightarrow f(1)>f(-1)$.

$f(2)-f(1)=\int_{1}^{2} f'(x)\,dx=\int_{1}^{1,5} f'(x)\,dx+\int_{1,5}^{2} f'(x)\,dx>0 \Rightarrow f(2)>f(1)$.

Chọn B

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.

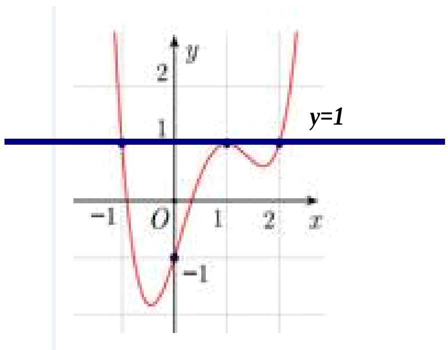


Đặt $g(x)=f(x)-x$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $g(-1)<g(1)<g(2)$. **B.** $g(2)<g(1)<g(-1)$.
C. $g(2)<g(-1)<g(1)$. **D.** $g(1)<g(-1)<g(2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $g'(x)=f'(x)-1$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y=1$.



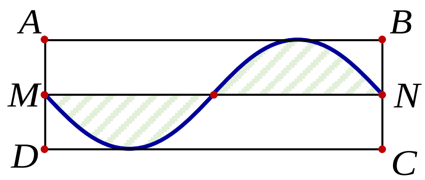
Ta có: $g(1)-g(-1)=\int_{-1}^{1} g'(x)\,dx=\int_{-1}^{1}[f'(x)-1]\,dx<0 \Rightarrow g(1)<g(-1)$.

$$g(2)-g(1)=\int_{1}^{2} g'(x)\,dx=\int_{1}^{2}[f'(x)-1]\,dx<0 \Rightarrow g(2)<g(1).$$

Chọn B

BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Câu 24: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen Được giới hạn bởi cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình $\sin$ (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi\left(m\right)$, $AD = 2\left(m\right)$. Tính diện tích phần còn lại.

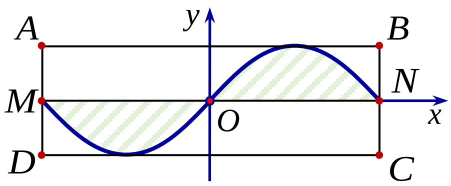


A. $4\pi - 1$. **B.** $4\left(\pi - 1\right)$. **C.** $4\pi - 2$. **D.** $4\pi - 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Chọn hệ tọa độ Oxy (như hình bên). Khi đó

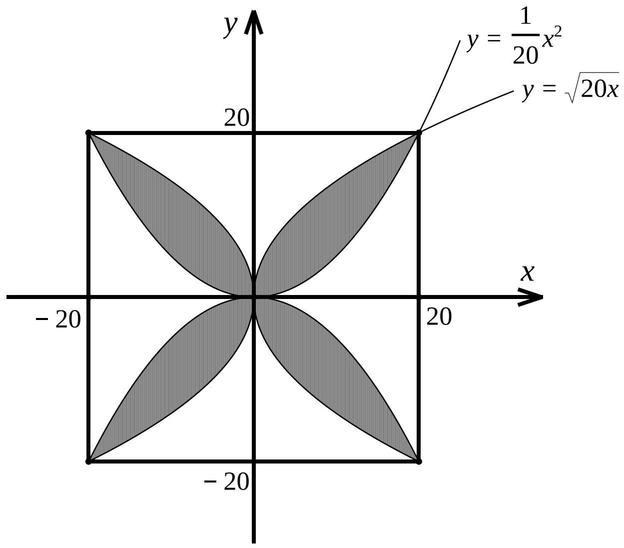


Diện tích hình chữ nhật là $S_1 = 4\pi$.

Diện tích phần đất được tô màu đen là $S_2 = 2\int\limits_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = 4$.

Tính diện tích phần còn lại: $S = S_1 - S_2 = 4\pi - 4 = 4\left(\pi - 1\right)$.

Câu 25: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa (phần tô đậm) bằng



A. $\frac{800}{3}$ cm^2. **B.** $\frac{400}{3}$ cm^2. **C.** 250 cm^2. **D.** 800 cm^2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Diện tích một cánh hoa là diện tích hình phẳng được tính theo công thức sau:

$$S = \int\limits_0^{20}\left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20}x^2\right)\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{2}{3}.\sqrt{20}.\sqrt{x^3} - \frac{1}{60}x^3\right)\right|_0^{20} = \frac{400}{3}\ \left(\text{cm}^2\right).$$

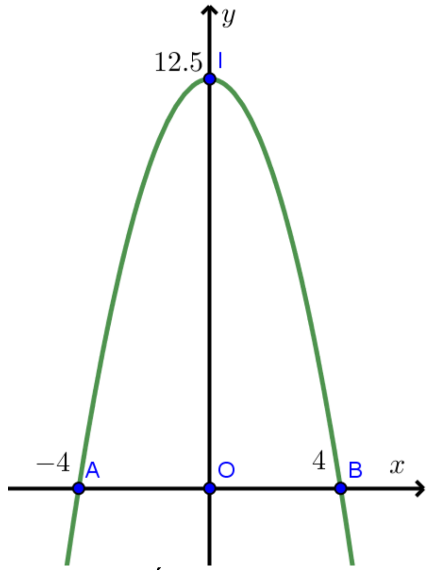
Câu 26: Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng Parabol, chiều rộng $8\,m$, chiều cao $12,5\,m$. Diện tích của cổng là:

A. $100\left(\mathrm{m}^2\right)$. **B.** $200\left(\mathrm{m}^2\right)$. **C.** $\dfrac{100}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$. **D.** $\dfrac{200}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1:



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ mà trục đối xứng của Parabol trùng với trục tung, trục hoành trùng với đường tiếp đất của cổng.

Khi đó Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + c$.

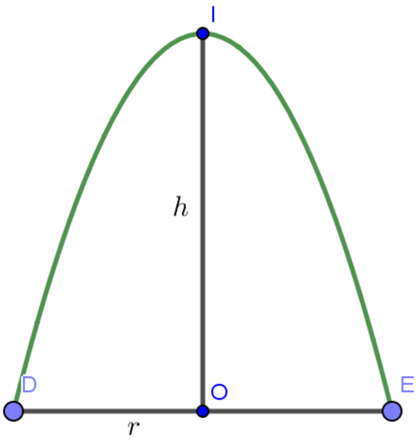
Vì (P) đi qua đỉnh $I(0;12,5)$ nên ta có $c = 12,5$.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4;0)$ và $B(4;0)$ nên ta có $0 = 16a + c \Rightarrow a = \dfrac{-c}{16} = -\dfrac{25}{32}$.

Do đó $(P): y = -\dfrac{25}{32}x^2 + 12,5$.

Diện tích của cổng là: $S = \displaystyle\int_{-4}^{4}\left(-\dfrac{25}{32}x^2 + 12,5\right)dx = \dfrac{200}{3}\left(m^2\right)$.

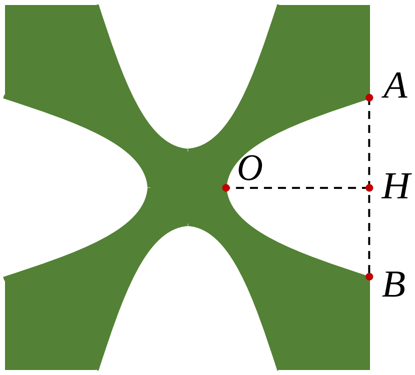
Cách 2:



Ta có parabol đã cho có chiều cao là $h = 12,5m$ và bán kính đáy $OD = OE = 4m$.

Do đó diện tích parabol đã cho là: $S = \dfrac{4}{3}rh = \dfrac{200}{3}\left(m^2\right)$.

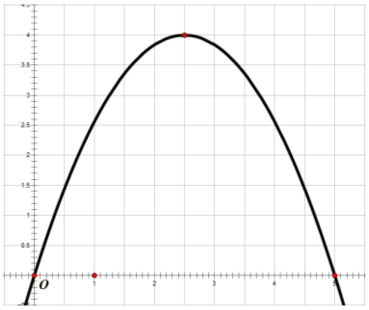
Câu 27: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\frac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** 50 cm^2.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

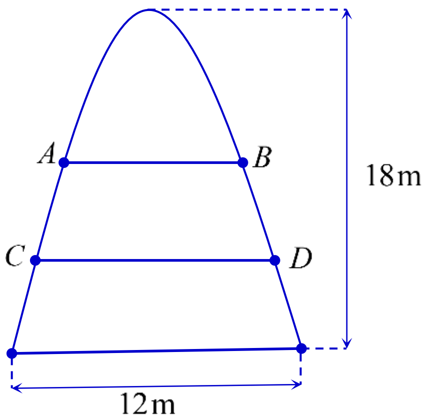
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=5$ là $S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x\right)\text{d}x = \frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3}\text{ cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là $S_{hv} = 100\text{ cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3}\text{ cm}^2$.

Câu 28: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng

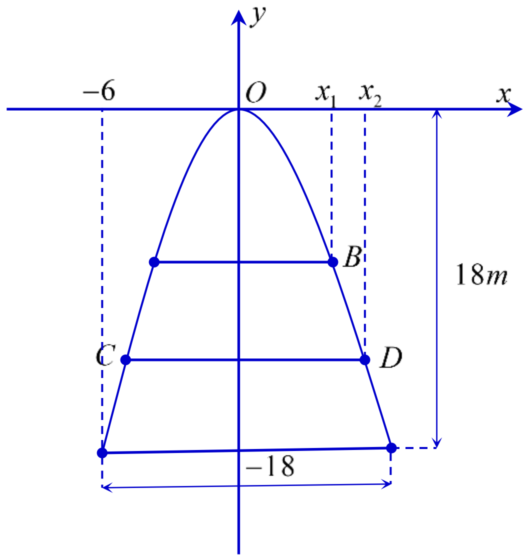


A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6;-18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới bạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2x\right)\Bigg|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng CD $y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2x\right)\Bigg|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

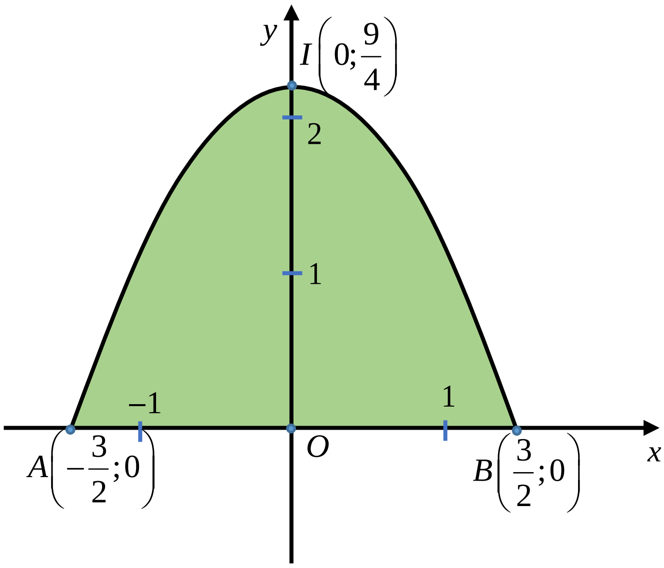
Câu 29: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{9}{4}=c,\left(I\in(P)\right)\\ \frac{9}{4}a-\frac{3}{2}b+c=0\left(A\in(P)\right)\\ \frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b+c=0\left(B\in(P)\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\frac{9}{4}\\ a=-1\\ b=0\end{cases}$.

Vậy $(P): y=-x^2+\frac{9}{4}$.

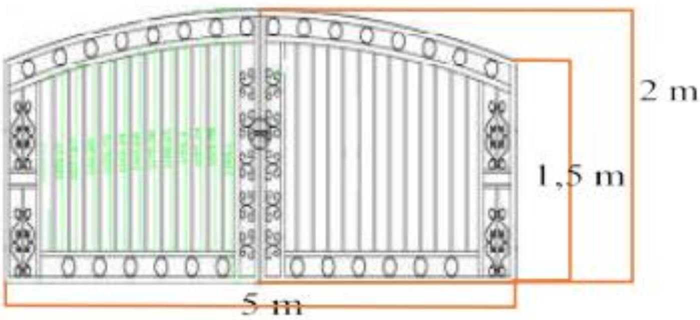
Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S=\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{9}{4}x\right)\Bigg|_0^{\frac{9}{4}}=\frac{9}{2}\mathrm{m}^2.$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000=6750000$ đồng.

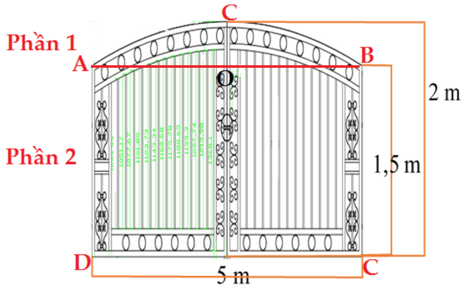
Câu 30: Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng là một parabol. Giá $1m^2$ cửa sắt là 660.000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là:

A. 6500. **B.** $\frac{55}{6}.10^3$. **C.** 5600. **D.** 6050.



Hướng dẫn giải

Chọn D



Từ hình vẽ ta chia cửa rào sắt thành 2 phần như sau:

Khi đó $S = S_1 + S_2 = S_1 + 5.1,5 = S_1 + 7,5$

Để tính S_1 ta vận dụng kiến thức diện tích hình phẳng của tích phân.

Gắn hệ trục Oxy trong đó O trùng với trung điểm AB, $OB \subset Ox, OC \subset Oy$,

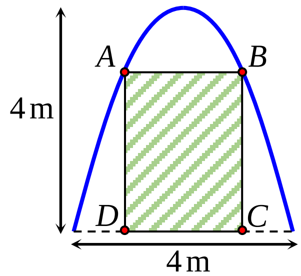
Theo đề bài ta có đường cong có dạng hình Parabol. Giả sử $(P): y = ax^2 + bx + c$

Khi đó: $\begin{cases} A\left(-\frac{5}{2};0\right) \in (P) \\ B\left(\frac{5}{2};0\right) \in (P) \\ C\left(0,\frac{1}{2}\right) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + c = 0 \\ \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}$

Diện tích $S_2 = 2\int_0^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{10}{6}(m^2) \Rightarrow S = \frac{55}{6}(m^2)$.

Vậy giá tiền cửa sắt là: $\frac{55}{6}$ x 660.000 = 6.050.000 (đồng).

Câu 31: Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

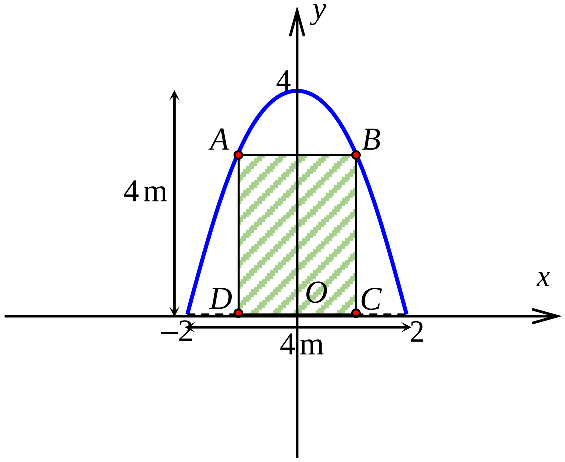


A. 900.000 đồng. **B.** 1.232.000 đồng. **C.** 902.000 đồng. **D.** 1.230.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó phương trình đường parabol có dạng: $y = ax^2 + b$.



Parabol cắt trục tung tại điểm $(0;4)$ và cắt trục hoành tại $(2;0)$ nên:
$\begin{cases} b = 4 \\ a.2^2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$.
Do đó, phương trình parabol là $y = -x^2 + 4$.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol và trục hoành là
$S_1 = \int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$.
Gọi $C(t;0) \Rightarrow B(t;4-t^2)$ với $0 < t < 2$.
Ta có $CD = 2t$ và $BC = 4 - t^2$. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là
$S_2 = CD.BC = 2t.(4-t^2) = -2t^3 + 8t$.
Diện tích phần trang trí hoa văn là
$S = S_1 - S_2 = \frac{32}{3} - (-2t^3 + 8t) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}$.
Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}$ với $0 < t < 2$.

Ta có $f'(t) = 6t^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0;2) \\ t = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0;2) \end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên

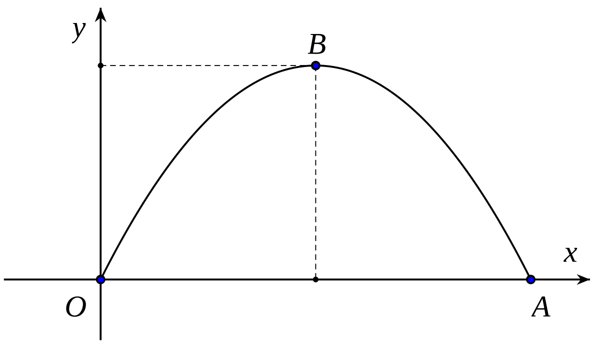
Suy ra diện tích phần trang trí nhỏ nhất là bằng $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}m^2$, khi đó chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}.200000 \approx 902000$ đồng.

Câu 32: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 12750000 đồng. **C.** 6750000 đồng. **D.** 3750000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C



• Gắn parabol (P) và hệ trục tọa độ sao cho (P)đi qua $O(0;0)$
• Gọi phương trình của parbol là (P):$(P): y = ax^2 + bx + c$

Theo đề ra, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$,$A(3;0)$,$B(1{,}5;2{,}25)$.
Từ đó, suy ra $(P): y = -x^2 + 3x$

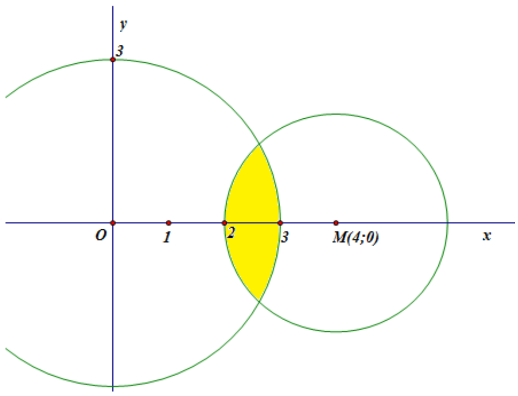
- Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S = \int_0^3 |-x^2 + 3x| dx = \frac{9}{2}$
- Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000 = 6750000$ (đồng)

Câu 33: Trên cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

A. 1,034m^2 **B.** 1,574m^2 **C.** 1,989m^2 **D.** 2,824m^2

Hướng dẫn giải

Diện tích mặt cỏ ăn chung sẽ lớn nhất khi 2 sợi dây được kéo căng và là phần giao của 2 đường tròn.



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ, gọi O, M là vị trí của cọc. Bài toán đưa về tìm diện tích phần được tô màu.

Ta có phương trình đường tròn tâm $(O): x^2 + y^2 = 3^2$ và phương trình đường tròn tâm $(M): (x-4)^2 + y^2 = 2^2$

Phương trình các đường cong của đường tròn nằm phía trên trục Ox là: $y = \sqrt{9-x^2}$ và $y = \sqrt{4-(x-4)^2}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-(x-4)^2} = \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow 4 + 8x - 16 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{21}{8}$

Diện tích phần được tô màu là: $S = 2\left[\int_2^{\frac{21}{8}} \sqrt{4-(x-4)^2}\, dx + \int_{\frac{21}{8}}^3 \sqrt{9-x^2}\, dx\right] \approx 1{,}989$. Ta có thể giải tích phân này bằng phép thế lượng giác, tuy nhiên để tiết kiệm thời gian nên bấm máy.

Chọn C

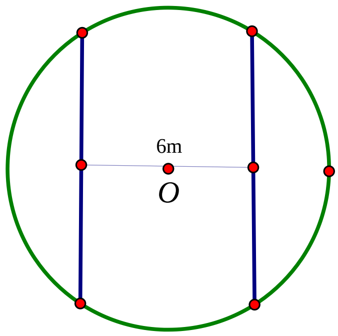
Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} (E_1) \\ y = \frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} \quad (E_1) \end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x = -4$; $x = 4$ và diện tích của dải vườn là $S = 2\int_{-4}^{4} \frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} dx = \frac{5}{2}\int_0^4 \sqrt{64-x^2} dx$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x = 8 \sin t$, ta được $S = 80\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là$T = 80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).100000 = 7652891,82 \simeq 7.653.000.$

Câu 34: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng$/m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng. **C.** 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là

$x^2+y^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y=\sqrt{36-x^2}=f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3; x=3$

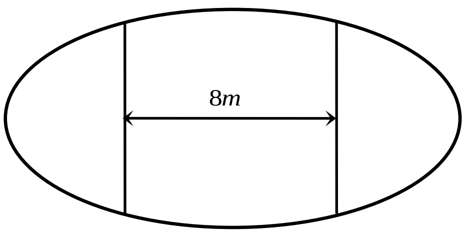
$$\Rightarrow S = 2\int_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,dx$$

Đặt $x=6\sin t \Rightarrow dx = 6\cos t\,dt$. Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}$; $x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}36\cos^2 t\,dt = 36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t+1)\,dt = 18(\sin 2t+2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3}+12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S\approx 4821322$ đồng

Câu 35: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng$10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng$/1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. $7.862.000$ đồng. **B.** $7.653.000$ đồng. **C.** $7.128.000$ đồng. **D.** $7.826.000$ đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

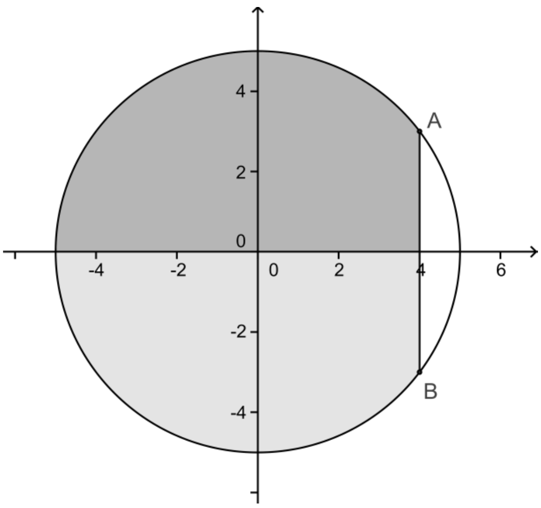
Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

Câu 36: Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5m, người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được giá 100 nghìn. Tuy nhiên cần có khoảng trống để dựng chồi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6m sao cho 2 đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền (tính theo đơn vị nghìn và bỏ phần số thập phân).

.**A.** 3722. **B.** 7445. **C.** 7446. **D.** 3723

Hướng dẫn giải



Đặt hệ trục tọa độ 4349582 như hình vẽ.

Phương trình đường tròn của miếng đất sẽ là$x^2+y^2=25$

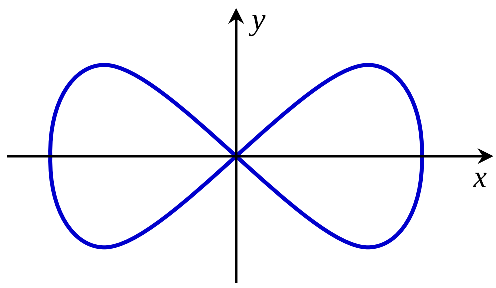
Diện tích cần tính sẽ bằng 2 lần diện tích phần tô đậm phía trên.

Phần tô đậm được giới hạn bởi đường cong có phương trình là $y=\sqrt{25-x^2}$, trục $Ox; x=-5; x=4$ (trong đó giá trị 4 có được dựa vào bán kính bằng 5 và độ dài dây cung bằng 6)

Vậy diện tích cần tính là $S=2\int_{-5}^{4}\sqrt{25-x^2}dx\approx 74{,}45228\ldots$

Chọn B

Câu 37: Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2=x^2(25-x^2)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S=\frac{125}{6}(m^2)$ **B.** $S=\frac{125}{4}\ (m^2)$ **C.** $S=\frac{250}{3}\ (m^2)$ **D.** $S=\frac{125}{3}\ (m^2)$

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**

Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y = \pm\frac{1}{4}x\sqrt{5 - x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y = \frac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2}; x \in [0; 5]$

Nên $S_{(I)} = \frac{1}{4}\int_0^5 x\sqrt{25 - x^2}dx = \frac{125}{12} \Rightarrow S = \frac{125}{3}(m^3)$

Câu 38: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng$/m^2$Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng. **C.** 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng

Hướng dẫn giải

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là

$x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3; x = 3$

$$\Rightarrow S = 2\int_{-3}^{3}\sqrt{36 - x^2}dx$$

Đặt $x = 6\sin t \Rightarrow dx = 6\cos t\,dt$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}; x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36\cos^2 t dt = 36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t + 1)\,dt = 18(\sin 2t + 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S \approx 4821322$ đồng

Câu 39: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao 8m và rộng 8m *(như hình vẽ)*

A. $\frac{28}{3}(m^2)$ **B.** $\frac{26}{3}(m^2)$ **C.** $\frac{128}{3}(m^2)$ **D.** $\frac{131}{3}(m^2)$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

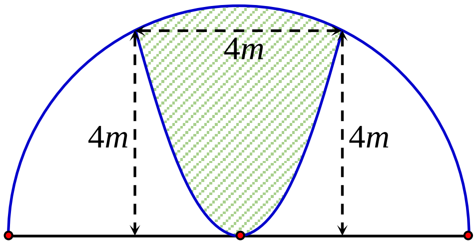
Các phương án nhiễu:

A. HS tính tích phân sai$S = \int_{-4}^{4}\left|-\frac{1}{2}x^2 + 8\right|dx = \frac{28}{3}(m^2)$

B. HS tính tích phân sai$S = \int_{-4}^{4}\left|-\frac{1}{2}x^2+8\right|dx = \frac{26}{3}\,(m^2)$)

D. HS nhầm a = $-\frac{1}{2}$, b= 8, c = 0 =>$S = \int_{-4}^{4}\left|-\frac{1}{2}x^2+8x\right|dx = \frac{131}{3}\,(m^2)$

Câu 40: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)

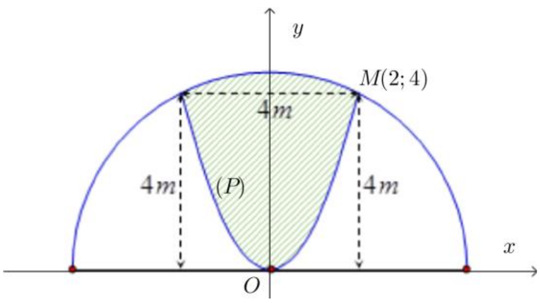


A. 3.895.000 **(đồng).** **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 2.388.000 (đồng). **D.** 1.194.000 (đồng).

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là $y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - x^2} = \sqrt{20 - x^2}$.



Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y = ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M(2;4)$ do đó: $4 = a(-2)^2 \Rightarrow a = 1$.

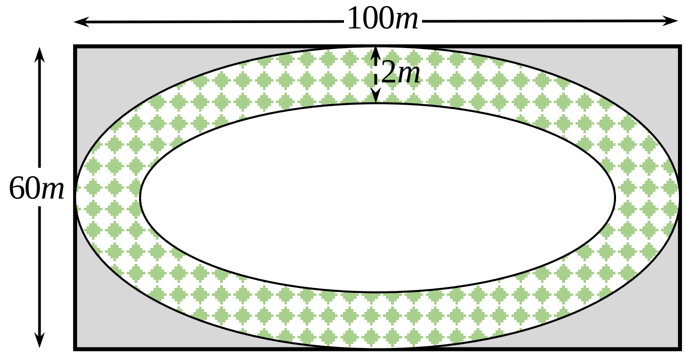
Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn.(phần tô màu)

Ta có công thức $S_1 = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{20 - x^2} - x^2\right)dx \cong 11{,}94m^2$.

Vậy phần diện tích trồng cỏ là $S_{trongco} = \frac{1}{2}S_{hinhtron} - S_1 \approx 19{,}47592654$

Vậy số tiền cần có là $S_{trongxo} \times 100000 \approx 1.948.000$ (đồng).đồng.

Câu 41: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293904000. **B.** 283904000. **C.** 293804000. **D.** 283604000.

Hướng dẫn giải:

Câu 42: ChọnA.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1): \frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1$. Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y = 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} = f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2): \frac{x^2}{48^2} + \frac{y^2}{28^2} = 1$. Phần đồ thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y = 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} = f_2(x)$.

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường. Khi đó

$$S = S_1 - S_2 = 2\int_{-50}^{50} 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}}\,dx - 2\int_{-48}^{48} 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}}\,dx.$$

Tính tích phân $I = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx\,, (a, b \in \mathbb{R}^+)$.

Đặt $x = a\sin t\,, \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a\cos t\,dt$.

Đổi cận $x = -a \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó $I = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1 - \sin^2 t}\,.\,a\cos t\,dt = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt$

$$= ab\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.$$

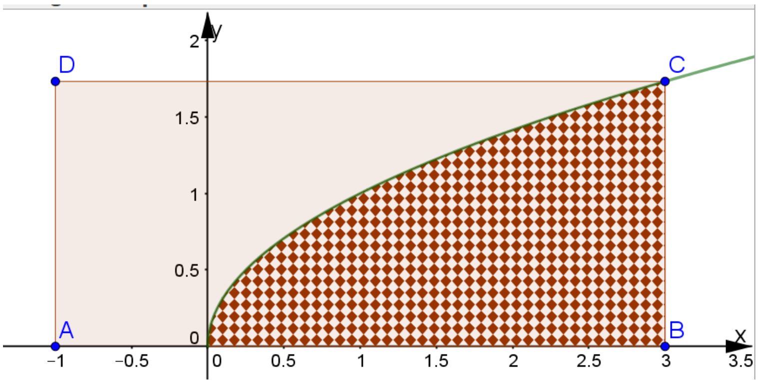
Do đó $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi$.

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

Câu 43: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $B(a;\sqrt{a})$, với $a>0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a.

A. $a=9$. **B.** $a=4$. **C.** $a=\frac{1}{2}$. **D.** $a=3$.

Hướng dẫn giải:



Chọn D

Gọi $ACBD$là hình chữ nhật với AC nằm trên trục Ox, $A(-1;0)$ và $B(a;\sqrt{a})$

Nhận thấy đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua $B(a;\sqrt{a})$. Do đó nó chia hình chữ nhật $ACBD$ ra làm 2 phần là có diện tích lần lượt là S_1,S_2. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$ và trục Ox, $x=0, x=a$ và S_1là diện tích phần còn lại. Ta lần lượt tính S_1,S_2.

Tính diện tích $S_2=\int_0^a \sqrt{x}\,dx$.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2tdt=dx$; Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=a\Rightarrow t=\sqrt{a}$.

Do đó $S_2=\int_0^{\sqrt{a}} 2t^2\,dt=\left(\frac{2t^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{a}}=\frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

Hình chữ nhật $ACBD$ có $AC=a+1; AD=\sqrt{a}$ nên $S_1=S_{ACBD}-S_2=\sqrt{a}(a+1)-\frac{2a\sqrt{a}}{3}=\frac{1}{3}a\sqrt{a}+\sqrt{a}$

Do đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên $S_1=S_2\Leftrightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3}=\frac{1}{3}a\sqrt{a}+\sqrt{a}\Leftrightarrow a\sqrt{a}=3\sqrt{a}\Leftrightarrow a=3$ (Do $a>0$)

Câu 44: Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O. Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$ (như hình vẽ). Phần diện tích S_l, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng /1m^2, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

A. 6.060.000 đồng. **B.** 5.790.000 đồng. **C.** 3.270.000 đồng. **D.** 3.000.000 đồng.

Hướng dẫn giải:

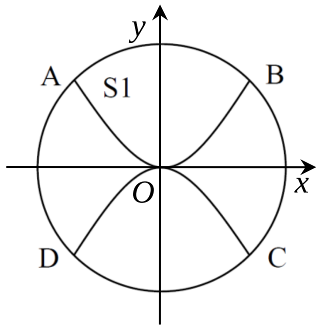
Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Parabol có hàm số dạng $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $B(2; 2)$ nên có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$

Đường tròn bồn hoa có tâm là gốc tọa độ và bán kính $OB = 2\sqrt{2}$ nên có phương trình là $x^2 + y^2 = 8$. Do ta chỉ xét nhánh trên của đường tròn nên ta chọn hàm số nhánh trên là $y = \sqrt{8 - x^2}$.

Vậy diện tích phần $S_1 = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx$



Do đó, diện tích trồng hoa sẽ là $S_1 + S_2 = 2\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx \approx 15{,}233\ldots$

Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là: $15{,}233 \times 150.000 + \left(\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 15{,}233\right) \times 100.000 \approx 3.274.924$ đồng.

Làm tròn đến hàng chục nghìn nên ta có kết quả là 3.270.000 đồng.