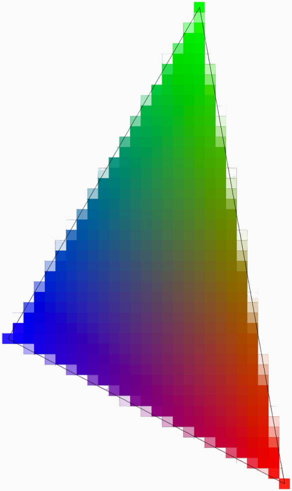
HOCHSCHULE
HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

Mathematik in der Spielentwicklung

Mikhail Safonov

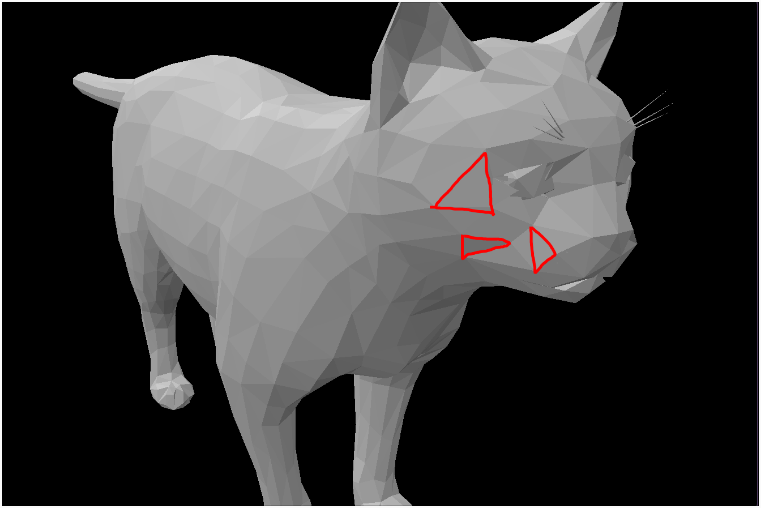
Gliederung



- Triangulation
- Rasterung
- Raytraycing
- Baryzentrische Koordinaten
- Rotation

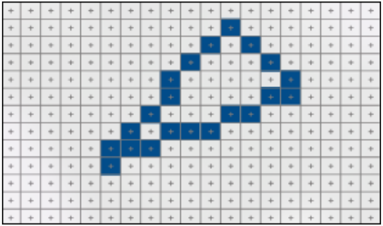
Triangulation

Warum gerade Dreiecke? Aus Dreiecken können alle anderen Vielecke zusammengesetzt werden, und Dreiecke lassen sich besonders einfach mit dem Computer zeichnen. Das Problem, ein komplexes 3D-Objekt wie zum Beispiel ein Flugzeug zu zeichnen, kann also auf das Problem reduziert werden, viele Dreiecke zu zeichnen.

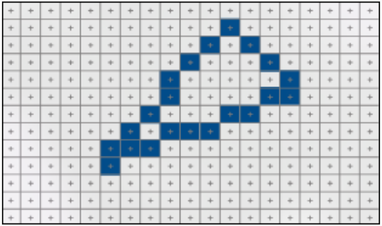


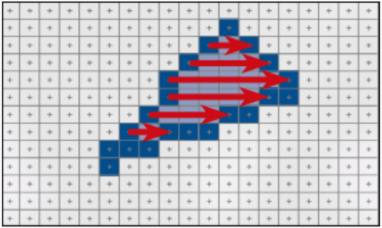
Rasterung

Bei Rasterung werden die darzustellenden Dreiecke gerastert, also auf diskrete Bildpunkte abgebildet. Ein Dreieck kann man dann zeichnen und ausfüllen, indem man es Zeile für Zeile von oben nach unten abläuft und jede Zeile füllt. Eine Zeile entspricht dabei einer Pixelzeile. Dieses Verfahren, das heutige Grafikkarten anwenden, nennt man Scanline Rendering.



Bei Rasterung werden die darzustellenden Dreiecke gerastert, also auf diskrete Bildpunkte abgebildet. Ein Dreieck kann man dann zeichnen und ausfüllen, indem man es Zeile für Zeile von oben nach unten abläuft und jede Zeile füllt. Eine Zeile entspricht dabei einer Pixelzeile. Dieses Verfahren, das heutige Grafikkarten anwenden, nennt man Scanline Rendering.





Raytracing

Raytracing wird, vereinfacht gesagt, für jeden Pixel des Bildes ein virtueller Strahl (Sichtstrahl) in die Szene geschossen, und es wird berechnet, ob er ein Objekt schneidet. Wenn das der Fall ist, wird der Pixel entsprechend eingefärbt.

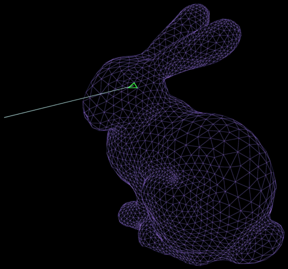
Raytracing-Verfahren:

- liefern Bilder von sehr hoher Qualität
- sind generell sehr flexibel
- sowohl mit mathematischer Darstellungsweise von 3D-Szenen als auch mit triangulierten Objekten

RAY TRACING CHALLENGE

How to Find the "Needle" in the Triangle Data "Haystack" ?

548.09	26.60	977.30	309.07	942.51	943.84	954.14	546.50	495.62
954.35	457.14	614.35	682.99	714.16	985.30	412.09	583.21	245.93
23.22	157.44	644.73	867.76	820.81	273.56	297.39	896.97	811.89
873.92	188.68	664.87	216.65	514.58	362.04	457.05	796.50	786.00
292.98	320.87	662.20	89.48	793.76	696.15	171.60	400.56	833.53
67.24	956.67	322.79	623.92	81.26	320.69	504.97	900.10	705.55
0.39	828.89	614.22	830.05	14.85	895.96	351.53	577.34	508.73
182.26	970.25	48.49	291.07	354.99	776.41	1.16	25.56	581.09
539.16	273.37	656.67	407.03	578.86	151.16	142.14	494.58	534.29
495.54	159.08	763.44	395.82	343.53	149.02	945.97	161.74	74.26
476.37	569.43	238.29	817.46	648.77	393.45	84.25	249.51	663.99
733.85	250.94	669.23	850.30	890.15	833.83	790.60	168.37	10.38
595.39	611.15	846.96	15.34	893.95	311.69	258.05	174.31	88.11
109.68	712.32	436.50	876.75	657.30	205.79	881.99	279.31	255.43
15.18	22.55	196.99	157.67	382.02	287.38	121.32	592.23	91.53
64.05	444.40	395.57	15.49	531.77	801.03	11.21	189.37	342.66
419.16	172.03	3.11	784.85	21.57	630.50	639.69	128.88	688.59
345.05	512.51	429.58	306.48	908.12	879.09	760.31	243.03	173.92
285.29	289.68	345.85	841.70	924.04	899.56	519.15	706.46	599.07
77.45	518.36	105.82	364.65	134.91	69.86	724.23	531.37	57.28
943.10	161.83	70.13	922.84	30.88	913.59	635.33	288.13	409.63
396.59	81.56	812.85	624.20	718.88	746.88	410.21	771.24	898.46
903.82	596.27	289.02	317.16	267.82	762.04	454.07	5.85	673.96
501.70	802.38	46.61	883.84	41.63	947.00	812.63	909.83	884.7



$$A = \frac{\text{Grundseite} \times \text{Höhe}}{2}$$

Wenn jedoch die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks bekannt sind, kann man den Flächeninhalt mit Hilfe der sogenannten Schoelace Formela berechnen.

$$A = \left|\frac{(b_x - a_x)(c_y - a_y) - (c_x - a_x)(b_y - a_y)}{2}\right|$$

Wenn jedoch die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks bekannt sind, kann man den Flächeninhalt mit Hilfe der sogenannten Schoelace Formel berechnen.

$$\mathrm{A} = \left|\frac{(b_x - a_x)(c_y - a_y) - (c_x - a_x)(b_y - a_y)}{2}\right|$$

$$\boxed{Area = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_1 \end{vmatrix}}$$

Wie kommt sie zustande?

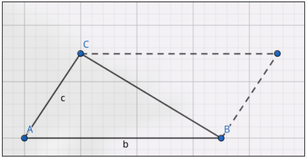
$$A = \frac{1}{2}\,||b \times c|| = \frac{1}{2}\,||(B-A) \times (C-A)||$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} B_x - A_x & C_x - A_x \\ B_y - A_y & C_y - A_y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

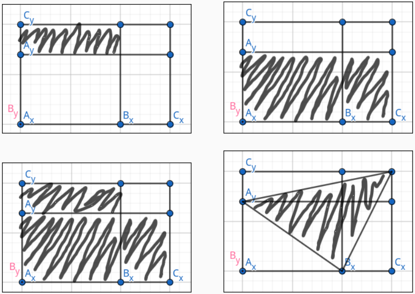
$$= \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x & c_x \\ a_y & c_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}\right) =$$

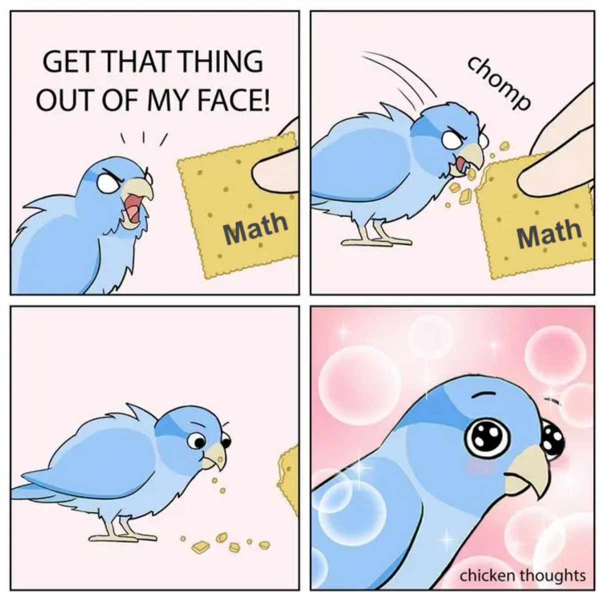
$$\frac{(b_x c_y - c_x b_y + c_x a_y - a_x c_y + a_x b_y - a_y b_x)}{2}$$

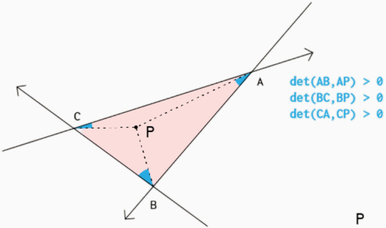


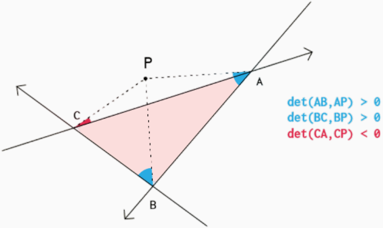
Geometrische Darstellung

$$A = \frac{1}{2}(b_x - a_x)(c_y - a_y) - (c_x - a_x)(b_y - a_y)$$




GET THAT THING OUT OF MY FACE!
Math
chomp
Math
chicken thoughts


A
B
C
P
det(AB,AP) > 0
det(BC,BP) > 0
det(CA,CP) > 0


P
A
B
C
det(AB,AP) > 0
det(BC,BP) > 0
det(CA,CP) < 0

Definition:
Sei Ω ein konvexes Polygon im $\mathbb{R}^2$, gegeben durch n Ecken $P_1 ... P_n n >= 3$, in CCW - Anorndnung. Eine Menge von Abbildungen

$$\lambda_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt baryzentrische Koordinaten, wenn für alle $X \in \Omega$ folegende Bedinungen gelten:

- Telung der Eins $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(X) = 1$
- Lineare Konvergenz $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(X) P_i = X$
- Konvexe Kombnation $\forall i = 1...n : \lambda_i(X) \geq 0$

Wegen $\sum \lambda_i(X) = 1$

$$\sum \lambda_i P_i = X \leftrightarrow \sum \lambda_i (P_i - X) = 0$$

Hat man $w_i = w_i X$ für die

$$\sum w_i (P_i - X) = 0 \quad w_i \geq 0$$

so kann man daraus baryzentrische Koordinaten machen, indem man:

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

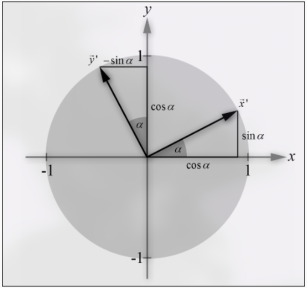
Rotation

Nun kann man ablesen

$$x' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad y' = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Achsen jetzt in die Zeilen einer Matrix einsetzen,

$$M_{rotation2D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$



Die neuen Achsen haben immer noch die Länge 1 und sie sind auch senkrecht zueinander. Beides sind Merkmale einer Rotationsmatrix.

$$M_x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad M_y \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$M_z \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Möchte man um eine beliebige Achse drehen dann kann man die unten angegebene Rotationsmatrix anwenden. Einheitsvektor $a = (a_1, a_2, a_3)$ stellt die Achse dar, um die edreht werden soll:

$$M_x \begin{pmatrix} \cos(\alpha) + a_1^2 * (1 - \cos(\alpha)) & a_1 a_2(1 - \cos(\alpha)) - a_3 \sin(\alpha)) & a_1 a_2(1 - \cos(\alpha)) + a_2 \sin(\alpha) \\ a_2 a_1(1 - \cos(\alpha)) + a_3 \sin(\alpha)) & \cos(\alpha) + a_2^2 * (1 - \cos(\alpha)) & a_2 a_3(1 - \cos(\alpha)) + a_1 \sin(\alpha)) \\ a_3 a_1(1 - \cos(\alpha)) - a_2 \sin(\alpha)) & a_3 a_2(1 - \cos(\alpha)) + a_1 \sin(\alpha) & \cos(\alpha) + a_3^2 * (1 - \cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

Quellen

- https://www.david-scherfgen.de/downloads/neues-buch-kapitel-3d-grafik.pdf
- https://cgvr.cs.uni-bremen.de/teaching/cg212/folien/Generalbarycentriccoords.pdf
- https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/ray-tracing-rendering-a-triangle/barycentric-coordinates.html
- https://mathoverflow.net/
- https://old.mipt.ru/education/chair/mathematics/study/