Interpolação

Universidade Federal de São João
UFSJ

Tópicos

I. Introdução
II. Interpolação linear
III. Interpolação Polinomial
IV. Interpolação Com Método de Lagrange
V. Exercícios

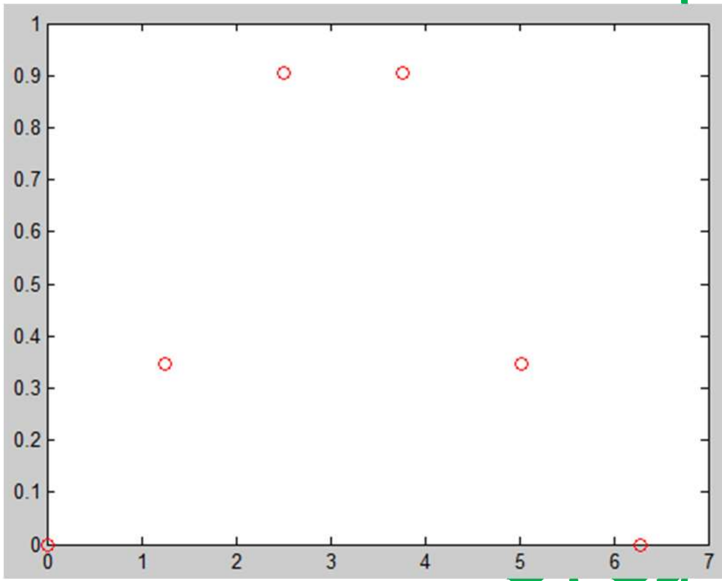
Introdução

- Interpolação é o processo de estimar os valores de uma função f para valores de x diferentes de $x_0, x_1, \ldots, x_n$, sendo estes, os pontos conhecidos da função.
- Objetiva determinar um polinômio interpolador $p(n)$ que possui grau n.
  - Para isto necessita-se de $n + 1$ pontos.

Introdução

- Veja o exemplo abaixo,
  - Deseja-se determinar o valor da $f(x)$ para $x = 2$. Foi aferido, por meio de experimentos, valores desta função para alguns valores de x. Estes valores são mostrados a seguir

x	0	1.2566	2.5133	3.7699	5.0265	6.2832
$f(x)$	0	0.3455	0.9045	0.9045	0.3455	0.0000

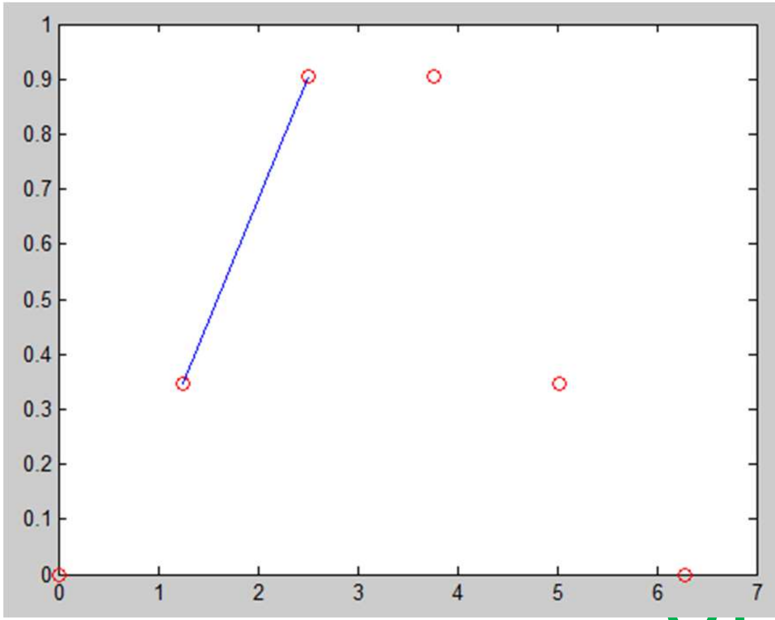


  - Como foi esclarecido nem todos os pontos são usados para na construção do polinômio interpolador, escolhe-se sempre os n+1 mais próximos

Interpolação linear

- O polinômio Interpolador deve ser do 1º grau, ou seja n=1.
  - São necessários dois pontos.
  - O polinômio interpolador será a reta que une estes dois pontos,

$$p(x) = ax + b$$



Interpolação Polinomial

- **Teorema 5.0.1 (Existência e Unicidade)** Dado o conjunto de $n+\ 1$ pontos distintos (x_k, f_k), $k\ = 0,1,\ldots,n$. Existe um único polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n, tal que $p(x_k) = f_k$ para $k\ = 0,1,\ldots,n$.
- Seja $p(x) =\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\ + a_n x^n$. Para obter os a_i usamos a condição de interpolação $f_k = p(x_k)$ para $k =\ 0,1,2,\ldots,n$. Logo, segue que:

$$\begin{aligned}
f_0 &= p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n \\
f_1 &= p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n \\
\vdots &= \ \vdots \quad = \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
f_n &= p(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n
\end{aligned}$$

- Que corresponde ao sistema linear da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Interpolação Polinomial

- **Exemplo 5.0.1** Determine uma aproximação para f(0.3), usando os dados abaixo.

x_j	0.0	0.2	0.4
f_j	4	3.84	3.76

- Como se tem três pontos $(n + 1 = 3)$, o grau do polinômio será menor ou igual a dois. Logo

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

- Impondo a condição $f_k = p(x_k)$ obtemos:

$$f_0 = 4.00 = p(0.0) = a_0 + a_1 0.0 + a_2 0.0^2$$
$$f_1 = 3.84 = p(0.2) = a_0 + a_1 0.2 + a_2 0.2^2$$
$$f_2 = 3.76 = p(0.4) = a_0 + a_1 0.4 + a_2 0.4^2$$

- Que equivale ao sistema linear na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.0 & 0.00 & | & 4.00 \\ 1 & 0.2 & 0.04 & | & 3.84 \\ 1 & 0.4 & 0.16 & | & 3.76 \end{pmatrix}$$

- A solução deste sistema é $a_0 = 4$, $a_1 = -1$ e $a_2 = 1$, obtendo assim $p(x) = x^2 - x + 4$ .Desta forma $f(0.3) \approx p(0.3) = 3.79$

Interpolação Com Método de Lagrange

- Considere o conjunto de $n+1$ pontos (x_k, f_k), $k = 0,1,\dots,n$ distintos e o polinômio representado por

$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \cdots + f_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$$

$p_n(x)$ é o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$. Os polinômios $L_k(x)$ são chamados de polinômios de Lagrange e estes são obtidos da forma

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})\,(x-x_{k+1})\cdots(x-x_{n-1})\,(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})\,(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{n-1})\,(x_k-x_n)}$$

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

Interpolação Com Método de Lagrange

- Exemplo 5.1.1 Considere a tabela de pontos do exemplo anterior

x_k	0.0	0.2	0.4
f_k	4	3.84	3.76

Calculando os L_k(x) temos

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.2)(x-0.4)}{(0-0.2)(0-0.4)} = \frac{1}{0.08}(x^2-0.6x+0.08) \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-0.4)}{(0.2-0)(0.2-0.4)} = \frac{-1}{0.04}(x^2-0.4x) \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-0.2)}{(0.4-0)(0.4-0.2)} = \frac{1}{0.08}(x^2-2.6x)
\end{aligned}$$

Assim temos que

$$p(x) = x^2 - x + 4$$

Observe que o polinômio é o mesmo obtido pela resolução de sistema. Isto já era esperado, pois o polinômio interpolador é único.

Exercícios propostos

- Exercícios Propostos - Calculo Numérico, Neide Bertoli Franco, Biblioteca Virtual.

1)Exemplo 8.1 - página 289

2)Exemplo 8.2 - página 290

3) Exemplo 8.3 - página 291

Exemplo 8.3

Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
e^{3x}	1	1.3499	1.8221	2.4596	3.3201	4.4817

calcular $f(0.25)$, onde $f(x) = xe^{3x}$ usando polinômio de interpolação do 2º grau.

Exercícios propostos

- Exercícios:
- 8.10) Sabendo-se que $\sqrt{1.03} = 1.0149$ e $\sqrt{1.04} = 1.0198$. Determine o valor de $\sqrt{1.035}$, usando interpolação linear. Determine também o erro absoluto e o relativo.
- 8.12 Seja a tabela

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x) = x^2 \cdot e^x$	0	0.0110517	0.0488561	0.1214873	0.2386920	0.4121803

Usando interpolação linear sobre os pontos adequados, determine $f(0.35)$. Determine também o erro absoluto e o relativo.