



Département d'Electricité, Electronique et Informatique
(Institut Montefiore)

Notes théoriques du cours ELEC0029

Electric power systems analysis

Analyse des défauts équilibrés

Thierry VAN CUTSEM

directeur de recherches FNRS
professeur adjoint ULg

février 2016

Un défaut est une perturbation qui empêche le flux normal de puissance dans un réseau d'énergie électrique. Une grande partie des défauts survenant dans les réseaux d'énergie électrique sont causés par la foudre, qui crée un court-circuit entre au moins une des phases et la terre.

Ce chapitre est consacré à l'étude des courts-circuits triphasés symétriques, pour lesquels on peut encore recourir à une analyse par phase, d'où le nom de défaut équilibré.

1 Introduction

1.1 Court-circuit dans le réseau

Comme expliqué dans le cours ELEC0014, le rôle du câble de garde est d'attirer sur lui (à la manière d'un paratonnerre) les décharges de foudre les plus importantes. Cependant, il se peut qu'il en remplisse pas son rôle et que la ligne soit touchée au niveau d'un de ses conducteurs de phase.

Quand la foudre touche un conducteur de phase, les charges électriques se déversent dans les deux directions, à partir du point d'impact. Ceci donne naissance à deux ondes de tension se propageant le long de la ligne à la vitesse de la lumière¹. Lorsqu'une telle onde atteint la chaîne d'isolateurs la plus proche, cette dernière est soumise à une différence de potentiel très élevée. S'il y a rupture diélectrique de l'intervalle d'air qui l'entoure, un arc électrique apparaît entre le conducteur et le pylône.

Lors que la foudre touche le câble de garde (ce qui suit s'applique évidemment au cas où la foudre aurait touché directement un pylône), le courant se déverse dans ce conducteur jusqu'à atteindre les pylônes les plus proches. Dans le meilleur des cas, ces courants s'écoulent dans le sol, via les fondations des pylônes. Cependant, le haut du pylône concerné peut monter en tension sous l'effet de l'injection brusque d'un courant élevé dans la structure métallique et dans la prise de terre (qui, toutes deux, présentent une impédance). Cette montée en tension peut conduire à une différence de potentiel élevée entre le haut du pylône et le conducteur de phase, conduisant à une rupture diélectrique de l'intervalle d'air qui entoure la chaîne d'isolateurs et donc à un arc électrique entre le conducteur de phase et le pylône.

Dans ces deux scénarios de contournement d'isolateur, même après que les charges provenant du coup de foudre se soient évacuées dans le sol, l'air ionisé par l'arc reste conducteur et une connexion de faible impédance demeure entre le réseau et la terre, créant ainsi un court-circuit, dont le courant est en fait alimenté par les générateurs.

1. en première approximation la tension maximale de chaque onde vaut $V = Z_c I / 2$. Pour $Z_c \simeq 300 \Omega$ et $I / 2 = 15$ kA, on obtient $V = 4.500.000$ V !

1.2 Protections et disjoncteurs

Les courants circulant dans le réseau en présence du court-circuit ont une amplitude élevée par rapport aux courants existant en fonctionnement normal. Ils doivent être rapidement éliminés sous peine de détériorer les équipements. Par ailleurs, la mise au potentiel nul d'un point du réseau de transport risque de déstabiliser le système (rupture de synchronisme entre générateurs ou instabilité de tension). Enfin, les consommateurs subissent une chute de tension d'autant plus marquée qu'ils sont proches du défaut ; certains processus industriels sont sensibles à de tels creux de tension.

Les protections détectent l'apparition des courants élevés (ou la diminution de l'impédance vue des extrémités de la ligne) et envoient aux disjoncteurs concernés l'ordre d'ouverture. Le délai total d'élimination du défaut se décompose en trois parties :

1. temps pour les circuits de détecter le défaut et d'envoyer l'ordre d'ouverture au disjoncteur
2. temps pour les contacts de ce dernier de se mettre en mouvement
3. temps pour éteindre d'arc électrique qui a pris naissance dès que les contacts électriques se sont écartés.

Pour les disjoncteurs qui équipent les réseaux de transport, on peut considérer que le délai total d'élimination est d'*au plus 5 alternances (0.1 s)*. Les disjoncteurs les plus performants permettent de descendre à 2 alternances. Notons que les disjoncteurs qui équipent les réseaux de répartition ou de distribution sont généralement plus lents (mais moins coûteux !). Ils peuvent prendre 8 alternances, voire davantage, pour éliminer un défaut apparu à ces niveaux de tension inférieurs.

Lorsque les disjoncteurs d'extrémité de la ligne en court-circuit ont déconnecté celle-ci du reste du réseau, l'arc électrique n'est plus alimenté et s'éteint de lui-même.

Le réseau se retrouve privé de la ligne ainsi mise hors service. Dans les grands réseaux de transport, on souhaite généralement la remettre en service le plus rapidement possible. C'est le rôle du dispositif de *ré-enclenchement automatique* de la ligne. Ce dernier doit cependant attendre que l'air ait recouvré ses propriétés d'isolant. Le délai est typiquement de l'ordre de 0.3 seconde.

Le court-circuit causé par la foudre est typiquement un *défaut fugitif* : la mise hors service de la ligne suffit à le faire disparaître. Un *défaut permanent* est causé par le contact de la ligne avec un objet, par la glace accumulée sur les isolateurs, voire dans les cas extrêmes, la chute des pylônes. Dans ce cas, le ré-enclenchement se fait sur défaut et les disjoncteurs doivent être à nouveau ouverts dans les plus brefs délais.

1.3 Types de défaut

Les différents défauts qu'un système triphasé peut subir sont repris à la figure 1, on l'on ne considère pas les variantes de courts-circuits avec impédance, pour simplifier.

De tous les courts-circuits, le monophasé est le plus courant, puisque de 70 à 80 % des défauts sont de ce type. Le court-circuit triphasé ne se produit que dans environ 5 % des cas, mais il est le plus

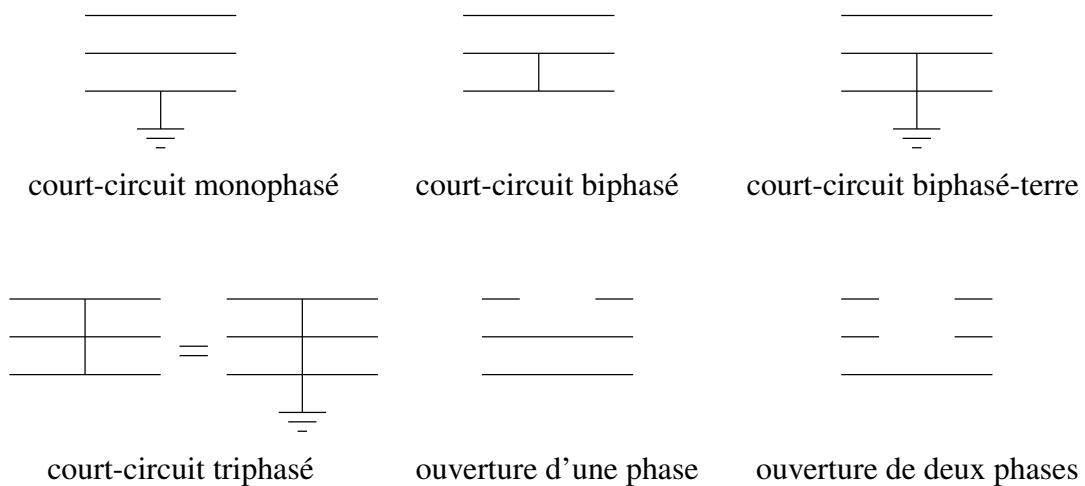


FIGURE 1 – les différents types de défaut

sévère et les équipements doivent pouvoir y faire face. Notons que si les trois phases sont court-circuitées, le système triphasé reste équilibré. Le point commun aux trois phases est virtuellement au potentiel nul et il est équivalent de considérer que le court-circuit s'est produit entre les phases et la terre.

Dans ce chapitre nous nous limitons au court-circuit triphasé, pour lequel une analyse par phase s'applique encore. Les autres types de défauts créent un déséquilibre, dont l'analyse fait intervenir les trois phases ; le chapitre suivant lui est consacré.

2 Comportement de la machine synchrone pendant un court-circuit

Les principaux composants responsables de la production des courants de court-circuit sont les générateurs synchrones. Dans cette section, nous considérons comment les représenter dans les études de courts-circuits équilibrés.

2.1 Expression du courant de court-circuit d'un générateur fonctionnant initialement à vide

Sur une période d'un ou deux dixièmes de seconde après apparition d'une perturbation, la vitesse de rotation d'une machine synchrone ne peut changer significativement, étant donné l'inertie mécanique des masses tournantes. Dans cet intervalle de temps, les transitoires sont essentiellement de nature électromagnétique ; ils proviennent des variations des flux magnétiques dans les divers enroulements de la machine.

Considérons le cas simple d'un générateur fonctionnant initialement à vide et soumis à l'instant $t = 0$ à un court-circuit triphasé sans impédance. La machine reçoit une tension d'excitation continue $v_f = R_f i_f^o$ et tourne à la vitesse de synchronisme :

$$\theta = \theta^o + \omega_N t$$

où θ^o est la position du rotor au moment où survient le court-circuit. L'amplitude de la tension aux bornes d'une des phases de la machine vaut :

$$E_q^o = \frac{\omega_N L_{fd} i_f^o}{\sqrt{3}}$$

Considérons d'abord le cas où seul le circuit d'excitation est pris en compte au rotor. On peut établir l'expression analytique du courant de court-circuit en considérant les équations de Park, en leur appliquant la transformée de Laplace², en extrayant les expressions de $I_d(s)$ et $I_q(s)$, en revenant au domaine temporel pour obtenir $i_d(t)$ et $i_q(t)$ et enfin en employant la transformée de Park inverse pour obtenir les courants au stator. Ce développement analytique, assez long, et complété par quelques simplifications justifiées par les ordres de grandeurs des paramètres fournit les expressions suivantes pour le courant dans la phase a :

$$\begin{aligned} i_a(t) = & -\sqrt{2}E_q^o \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-t/T_d'} \right] \cos(\omega_N t + \theta_o) \\ & + \sqrt{2}E_q^o \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_q} \right) e^{-t/T_\alpha} \cos(2\omega_N t + \theta_o) + \sqrt{2}E_q^o \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d'} + \frac{1}{X_q} \right) e^{-t/T_\alpha} \cos \theta_o \end{aligned} \quad (1)$$

et pour le courant d'excitation :

$$i_f(t) = i_f^o + \frac{X_d - X_d'}{X_d'} i_f^o e^{-t/T_d'} - \frac{X_d - X_d'}{X_d'} i_f^o e^{-t/T_\alpha} \cos \omega_N t \quad (2)$$

Ces expressions font intervenir :

- la constante de temps du circuit d'excitation lorsque le stator est court-circuité :

$$T_d' = \frac{L_{ff} - \frac{L_{fd}^2}{L_{dd}}}{R_f} \quad (3)$$

On notera que si le stator était ouvert, la constante de temps du même enroulement (qui n'interagirait alors avec aucun autre circuit) serait :

$$T_{do}' = \frac{L_{ff}}{R_f} \quad (4)$$

La constante de temps est donc plus petite lorsque le stator est court-circuité :

$$T_d' < T_{do}' \quad (5)$$

2. le fait que l'on suppose la vitesse de rotation constante supprime une non-linéarité majeure en présence de laquelle il ne serait pas possible d'utiliser la transformée de Laplace

- la réactance *transitoire dans l'axe direct* :

$$X'_d = \omega_N L'_d$$

elle-même fonction de l'*inductance transitoire dans l'axe direct* :

$$L'_d = L_{dd} - \frac{L_{fd}^2}{L_{ff}} \quad (6)$$

En utilisant (3) et (6) on établit aisément que :

$$L'_d = L_{dd} \frac{T'_d}{T'_{do}} \quad \text{et donc} \quad X'_d = X_d \frac{T'_d}{T'_{do}} \quad (7)$$

On voit aisément que la réactance transitoire est plus petite que la réactance synchrone.

- la constante de temps statorique :

$$T_\alpha = \frac{2}{R_a} \frac{1}{\frac{1}{L'_d} + \frac{1}{L_{qq}}} \quad (8)$$

2.2 Interprétation physique de l'évolution du courant

Les différentes composantes du courant i_a se justifient comme suit.

Avant apparition du court-circuit, l'enroulement statorique a est le siège d'un flux alternatif $\psi_{af}(t)$ créé par l'enroulement d'excitation en mouvement. Lors de l'application du défaut, ce circuit est refermé sur lui-même et un courant peut y circuler. En vertu de la loi de Lenz, ce courant est tel que, dans les premiers instants, le flux dans l'enroulement reste constant, égal à la valeur $\psi_{af}(0)$ qu'il avait au moment où le court-circuit est apparu. Plus précisément, ce courant produit un flux ψ_{aa} qui s'oppose aux variations de flux que tente d'imposer le circuit d'excitation en mouvement. La situation est représentée à la figure 2. Pour produire ce flux ψ_{aa} , le courant induit dans la bobine a doit comporter une composante *unidirectionnelle* et une composante alternative de pulsation ω_N .

Les composantes alternatives des courants induits dans les trois phases sont de même amplitude mais déphasées de 120 degrés électriques les unes par rapport aux autres. Ensemble, elles produisent un champ magnétique H_{ac} tournant à la même vitesse que le rotor. Ce champ est dirigé selon l'axe direct et dans le sens opposé au champ produit par le courant d'excitation i_f^o .

Les composantes unidirectionnelles des courants induits au stator diffèrent d'une phase à l'autre car les trois phases embrassent des flux différents à l'instant $t = 0$. Ensemble, ces composantes créent un champ magnétique H_{dc} fixe par rapport au stator, c'est-à-dire tournant à la vitesse ω_N par rapport au rotor.

Dans un court intervalle de temps après l'apparition du court-circuit, le flux dans l'enroulement d'excitation ne peut pas non plus changer. Un courant unidirectionnel va donc y être induit pour créer un champ qui s'oppose au champ H_{ac} provenant du stator, et un courant alternatif pour s'opposer au champ H_{dc} . On retrouve bien ces deux composantes dans l'expression (2).

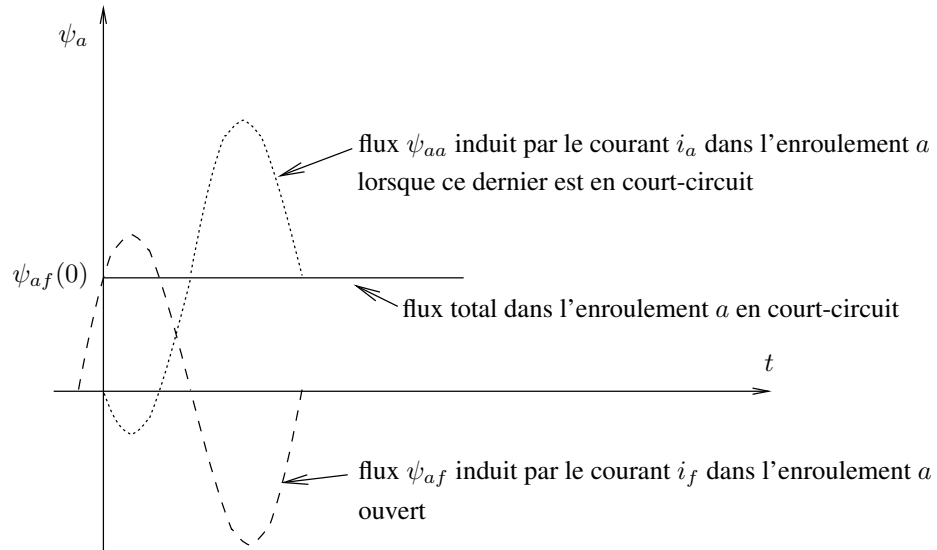


FIGURE 2 – flux dans l'enroulement a avec et sans court-circuit

Suite à la dissipation d'énergie dans les résistances, les flux, tant statoriques que rotorique, ne restent pas constants :

- les composantes unidirectionnelles des courants statoriques décroissent avec la constante de temps T_a . Cette décroissance est également celle de l'enveloppe de la composante alternative du courant d'excitation ;
- la composante unidirectionnelle du courant d'excitation décroît avec la constante de temps T'_d . Cette décroissance est également celle de l'enveloppe de la composante alternative des courants statoriques.

Comme mentionné plus haut, le champ magnétique H_{ac} associé aux composantes alternatives est dirigé selon l'axe direct de la machine. Ceci explique pourquoi seules les réactances dans l'axe direct interviennent dans les expressions de ces composantes.

Enfin, le chemin offert aux lignes du champ magnétique H_{dc} , fixe par rapport au stator, comporte en fait un entrefer de largeur variable, suivant la position du rotor. Ceci se marque de deux manières :

- la composante unidirectionnelle du courant i_a fait intervenir la moyenne entre $1/X'_d$, valeur correspondant à l'alignement de l'axe direct avec celui de la phase a , et $1/X_q$, valeur correspondant à l'alignement de l'axe en quadrature avec celui de la phase a ;
- l'apparition d'une composante alternative à la pulsation $2\omega_N$. Cette pulsation se justifie par le fait que quand le rotor a fait un *demi* tour, la largeur de l'entrefer est de nouveau la même.

2.3 Expressions tenant compte des autres enroulements rotoriques

Lorsque l'on prend en compte les autres enroulements rotoriques, on aboutit à l'expression plus précise du courant statorique que voici :

$$i_a(t) = -\sqrt{2}E_q^o \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-t/T_d'} + \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} \right) e^{-t/T_d''} \right] \cos(\omega_N t + \theta_o) \quad (9)$$

$$+ \sqrt{2}E_q^o \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) e^{-t/T_\alpha} \cos(2\omega_N t + \theta_o) + \sqrt{2}E_q^o \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right) e^{-t/T_\alpha} \cos \theta_o$$

dans laquelle :

- X_d'' est la *réactance subtransitoire dans l'axe direct*. Cette réactance provient de la réaction de l'amortisseur modélisé par le circuit d_1 . On a nécessairement :

$$X_d'' < X_d' < X_d$$

- T_d'' est la constante de temps *subtransitoire*, associée elle aussi à l'amortisseur dans l'axe direct. Cette constante de temps est plus petite que T_d' ;
- X_q'' est la *réactance subtransitoire dans l'axe en quadrature*. Cette réactance provient de la réaction de l'amortisseur modélisé par le circuit q_2 .

On voit que la présence des amortisseurs modifie l'amplitude de :

- la composante alternative du courant
- la composante unidirectionnelle. En pratique $X_d'' \simeq X_q''$ et l'amplitude vaut plus simplement :

$$\sqrt{2} \frac{E_q^o}{X_d''}$$

- la composante à $2\omega_N$. Compte tenu de l'approximation ci-dessus, l'amplitude de cette composante est très faible en pratique et peut être négligée.

Enfin, une expression plus précise pour la constante de temps T_α est :

$$T_\alpha = \frac{X_d''}{\omega_N R_a} \quad (10)$$

Le tableau ci-dessous donne l'ordre de grandeur des diverses réactances et constantes de temps apparaissant plus haut.

	machine à			machine à	
	rotor lisse (pu)	pôles saillants (pu)		rotor lisse (s)	pôles saillants (s)
X_d'	0.2-0.4	0.3-0.5	$T_{d'o}'$	8.0-12.0	3.0-8.0
X_d''	0.15-0.30	0.25-0.35	T_d'	0.95-1.30	1.0-2.5
X_q''	0.15-0.30	0.25-0.35	T_d''	0.02-0.05	0.02-0.05
			T_α	0.02-0.60	0.02-0.20

2.4 Exemple numérique et discussion

A titre d'illustration, considérons une machine caractérisée par :

$$E_q^o = 1, \quad X_d = X_q = 2, \quad X_d' = 0.3, \quad X_d'' = X_q'' = 0.2, \quad R_a = 0.005 \text{ pu}$$

$$T_{do}' = 9, \quad T_d'' = 0.0333 \text{ s}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} T_d' &= T_{do}' \frac{X_d'}{X_d} = 1.35 \text{ s} \\ T_\alpha &= \frac{X_d''}{R_a} = 40 \text{ pu} \\ &= \frac{40}{2\pi 50} = 0.127 \text{ s} \end{aligned} \tag{11}$$

On suppose que le court-circuit se produit au moment où l'axe direct coïncide avec l'axe de la phase a , c'est-à-dire que $\theta^o = 0$. Dans ces conditions, la valeur initiale de la composante unidirectionnelle est maximale dans la phase a . Celles dans les phases b et c sont négatives, égales et d'amplitude plus faible.

Il importe de noter que les courbes ci-après se rapportent à un court-circuit permanent et à une vitesse de rotation constante. En pratique, le court-circuit est éliminé par les protections après le délai déjà mentionné, tandis que la vitesse varie sous l'effet du déséquilibre entre couples mécanique et électromagnétique (au point que si le défaut est éliminé trop tard, la machine perd le synchronisme). Les courbes ne peuvent donc être utilisées que sur le court intervalle de temps correspondant au court-circuit.

La figure 3 montre l'évolution du courant i_a sur un intervalle de temps de l'ordre de 15 fois T_d'' ou un tiers de T_d' . On voit que la composante unidirectionnelle retarde légèrement le premier passage par zéro du courant, nécessaire à la coupure par le disjoncteur. Elle peut aussi provoquer la saturation du noyau magnétique des transformateurs de mesure utilisés par les protections.

Les courants dans les phases a et b sont comparés à la figure 4. On voit qu'une fois éteints les transitoires initiaux, i_b devient égal à i_a déphasé de 120 degrés.

La figure 5 montre séparément les composantes alternative et unidirectionnelle du courant i_a . Elles sont initialement de valeurs opposées, ce qui conduit à un courant initialement nul.

Enfin, la figure 6 montre l'évolution de l'amplitude de la composante alternative du courant i_a . La ligne horizontale en pointillé donne l'amplitude vers laquelle tend le courant, soit $\sqrt{2}E_q^o/X_d$. On voit qu'avant d'atteindre cette valeur, l'amplitude du courant de défaut est nettement plus élevée, sous l'effet du circuit d'excitation. La relation (1) montre en effet qu'en $t = 0$, l'amplitude vaut $\sqrt{2}E_q^o/X_d'$. L'expression plus précise (9) montre que sous l'effet supplémentaire des amortisseurs, l'amplitude initiale est $\sqrt{2}E_q^o/X_d''$, soit une valeur encore un peu plus élevée. La figure 6 montre l'accroissement correspondant du courant de défaut.

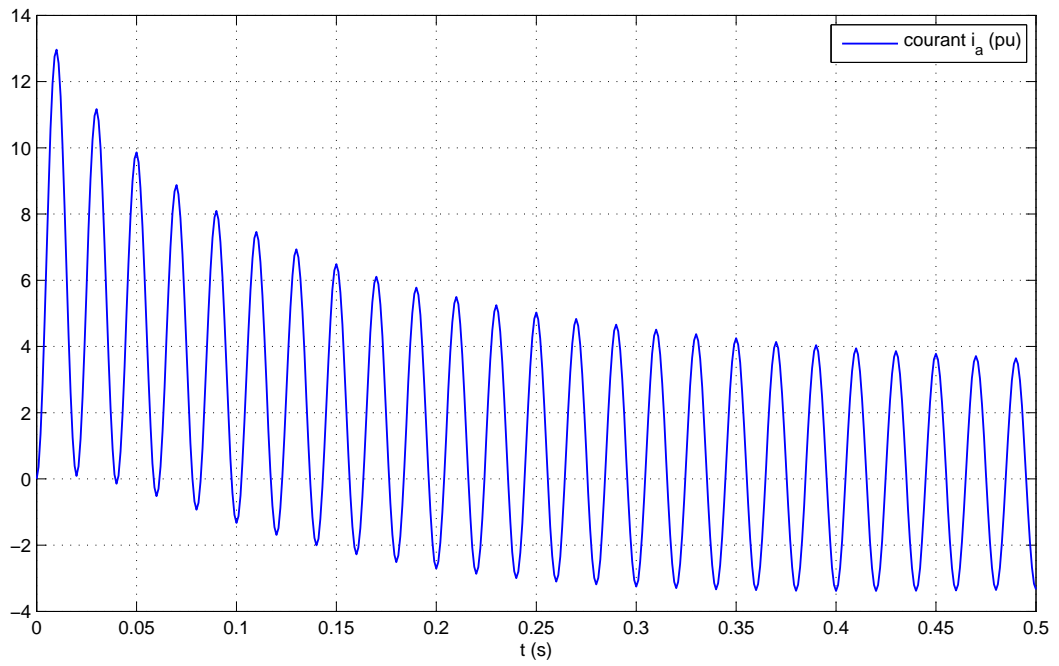


FIGURE 3 – évolution du courant de court-circuit dans la phase a

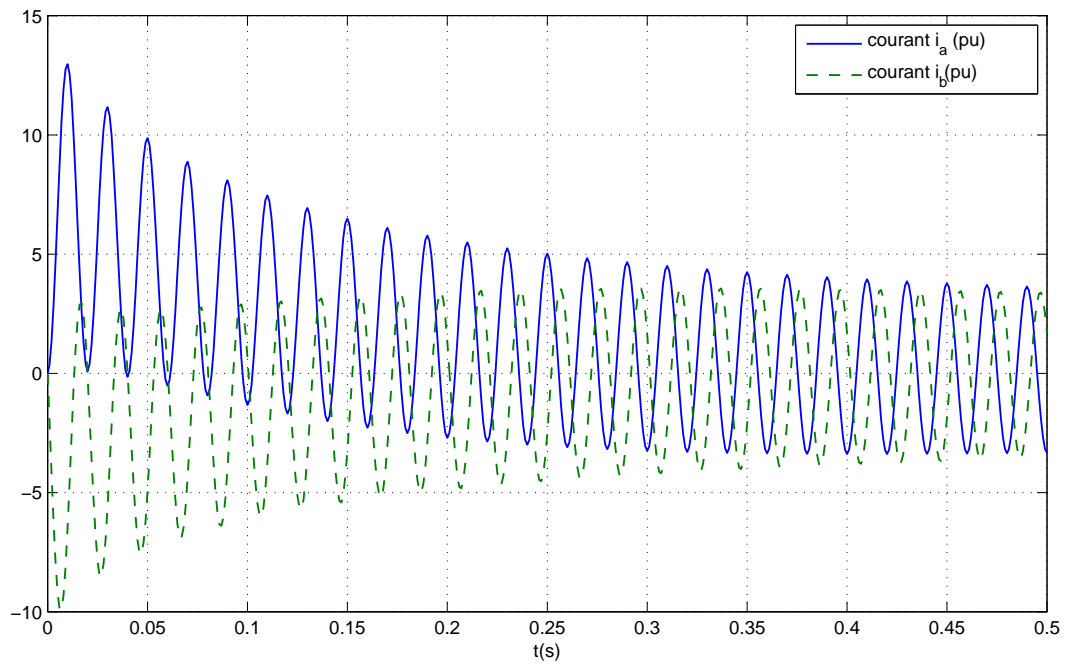


FIGURE 4 – évolution des courants de court-circuit dans les phases a et b

Il résulte de ceci que les disjoncteurs sont appelés à couper un courant nettement plus important que celui qu'on aurait en régime établi, ce qui doit être pris en compte dans leur dimensionnement.

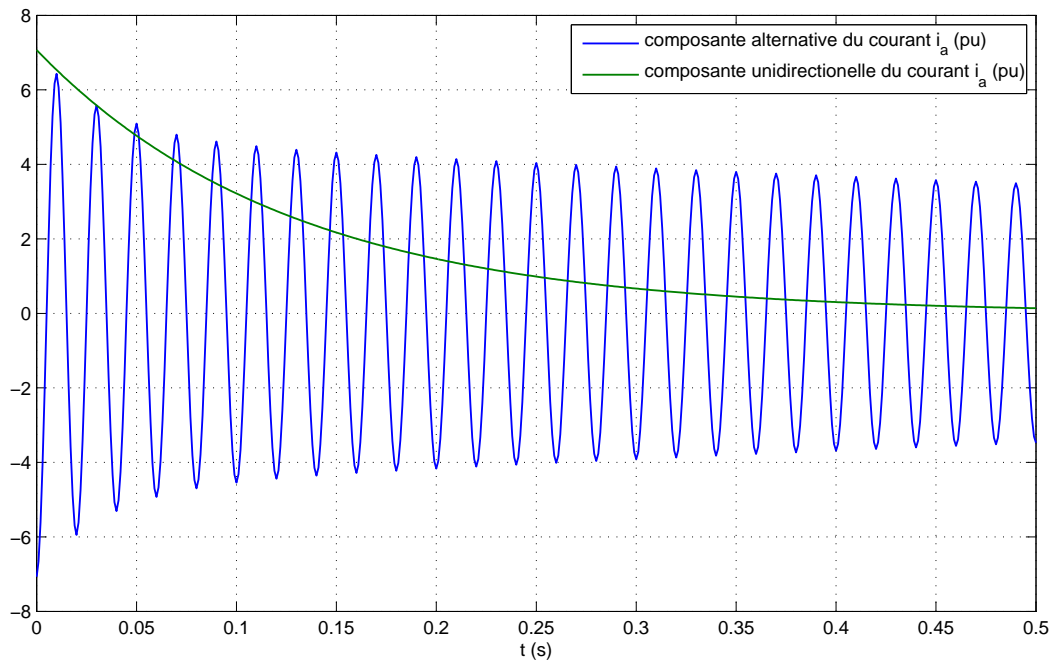


FIGURE 5 – composantes alternative et unidirectionnelle du courant dans la phase a

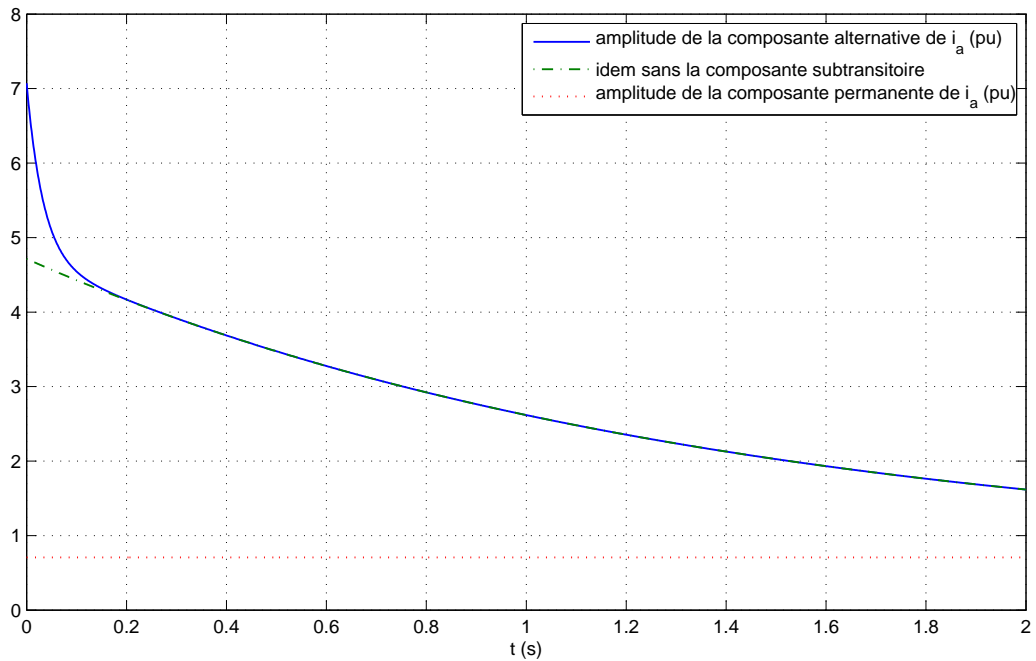


FIGURE 6 – évolution de l'amplitude de la composante alternative du courant dans la phase a

2.5 Effet de la localisation du défaut

En pratique, il est extrêmement rare d'avoir un court-circuit aux bornes d'un générateur, ce dernier étant abrité dans la centrale. L'endroit le plus proche du générateur où un court-circuit est

susceptible de survenir est le poste où se trouve le transformateur élévateur du générateur.

Pour étudier l'effet de la localisation du court-circuit, il convient d'interposer, dans chaque phase, un dipôle (R_e, L_e) entre la machine et le court-circuit. Compte tenu des valeurs typiques du rapport L_e/R_e , on montre que :

- plus le défaut est éloigné de la machine, plus la composante alternative du courant décroît lentement ; la constante de temps se situe entre T'_d (court-circuit aux bornes de la machine) et T'_{do} (court-circuit infiniment éloigné de celle-ci) ;
- plus le défaut est éloigné de la machine, plus la composante unidirectionnelle décroît rapidement.

2.6 Simplifications usuelles pour le calcul des courants de court-circuit

Les calculs de courants de court-circuit usuels négligent :

- les composantes unidirectionnelles des courants produits par les machines synchrones. En effet, ces composantes décroissent assez rapidement, d'autant plus que le défaut est éloigné des machines. Toutefois, on peut compenser cette approximation en multipliant le courant calculé sans cette composante par un facteur empirique supérieur à l'unité, afin de se placer en sécurité ;
- les composantes alternatives de pulsation $2\omega_N$ des courants, négligeables pour la raison mentionnée précédemment.

Les calculs portent donc sur les composantes alternatives de pulsation ω_N , ce qui permet de calculer les courants de défaut via les techniques (mais pas les paramètres !) s'appliquant au régime sinusoïdal établi.

Dans les réseaux de transport, compte tenu de la rapidité des disjoncteurs, on considère qu'il faut pouvoir couper la valeur initiale de cette composante, ce qui revient à considérer la réactance subtransitoire des machines dans les calculs. Ceci procure une marge de sécurité puisque ultérieurement l'amplitude du courant de défaut décroît.

Dans les réseaux de distribution, les disjoncteurs sont moins rapides et l'on considère généralement la réactance transitoire dans les calculs. Dans ce cas, il est encore plus légitime de négliger la composante unidirectionnelle du courant de défaut.

2.7 Schéma équivalent simplifié d'une machine synchrone

L'analyse du court-circuit d'un générateur initialement à vide a montré que ce dernier se comporte comme une f.e.m. d'amplitude $\sqrt{2}E_q^o$ derrière la réactance subtransitoire X_d'' . Qu'en est-il dans le cas usuel où le générateur produit un courant avant apparition du défaut ?

En fait, on peut montrer que la machine synchrone obéit au schéma équivalent de la figure 7, dans lequel la f.e.m. \bar{E}'' est constante. En effet, on démontre (cf cours ELEC0047) que cette f.e.m. est

proportionnelle aux flux dans les enroulements rotoriques de la machine, lesquels ne changent dans les premiers instants qui suivent le court-circuit. En pratique, on appelle \bar{E}'' la *f.e.m. derrière réactance subtransitoire*. La résistance statorique a été négligée.

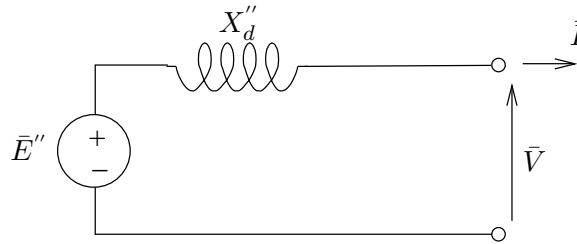


FIGURE 7 – schéma équivalent d'une machine synchrone

Supposant le court-circuit appliqué en $t = 0$, la continuité de cette f.e.m. se traduit par :

$$\bar{E}''(0^+) = \bar{E}''(0^-) = \bar{V}(0^-) + jX_d''\bar{I}(0^-) \quad (12)$$

On peut donc déterminer cette f.e.m. au départ d'un calcul de load flow pré-incident fournissant $\bar{V}(0^-)$ et $\bar{I}(0^-)$. On retrouve évidemment le cas du générateur initialement à vide en posant $\bar{I}(0^-) = 0$ d'où $\bar{E}''(0^-) = \bar{V}(0^-) = E_q^o$.

3 Calcul des courants de court-circuit triphasé

Il importe d'évaluer l'amplitude des courants de défaut pour :

- dimensionner les disjoncteurs, qui doivent avoir un pouvoir de coupure suffisant pour interrompre les courants en question ;
- régler les protections commandant les disjoncteurs. Celles-ci doivent impérativement agir lorsqu'il leur incombe d'éliminer le défaut mais ne doivent pas agir intempestivement lorsque ce n'est pas nécessaire.

3.1 Hypothèses de calcul

Considérons un réseau à N noeuds, comportant des lignes, des câbles et des transformateurs. Soit n le nombre de machines synchrones. Sans perte de généralité, nous supposons que les noeuds du réseau sont numérotés en réservant les n premiers numéros aux noeuds de connexion des machines synchrones.

Chaque machine synchrone est représentée par le schéma équivalent de Thévenin de la figure 7.

Chaque charge est supposée se comporter à admittance constante. Cette hypothèse est raisonnable pour de nombreux équipements, dans les premiers instants qui suivent un court-circuit. L'admittance équivalente Y_c d'une charge peut se calculer à partir des puissances active $P(0^-)$ et réactive

$Q(0^-)$ qu'elle consomme et de la tension $V(0^-)$ à ses bornes, toutes grandeurs relatives à la situation avant court-circuit³ :

$$Y_c = \frac{P(0^-) - jQ(0^-)}{[V(0^-)]^2}$$

Nous supposons qu'un court-circuit d'impédance Z_f se produit au noeud f du réseau. On a donc :

$$\bar{V}_f = Z_f \bar{I}_f \quad (13)$$

où \bar{V}_f est la tension au noeud f pendant le défaut et \bar{I}_f est le courant de défaut. Z_f est nul dans le cas d'un court-circuit franc.

Le système se présente comme indiqué à la figure 8.a. En fait, la formulation qui suit s'accommode mieux d'un équivalent de Norton pour chaque générateur. Ceci conduit au schéma de la figure 8.b, auquel nous nous référerons dans ce qui suit. Le courant \bar{I}_f est compté positivement lorsqu'il sort du réseau.

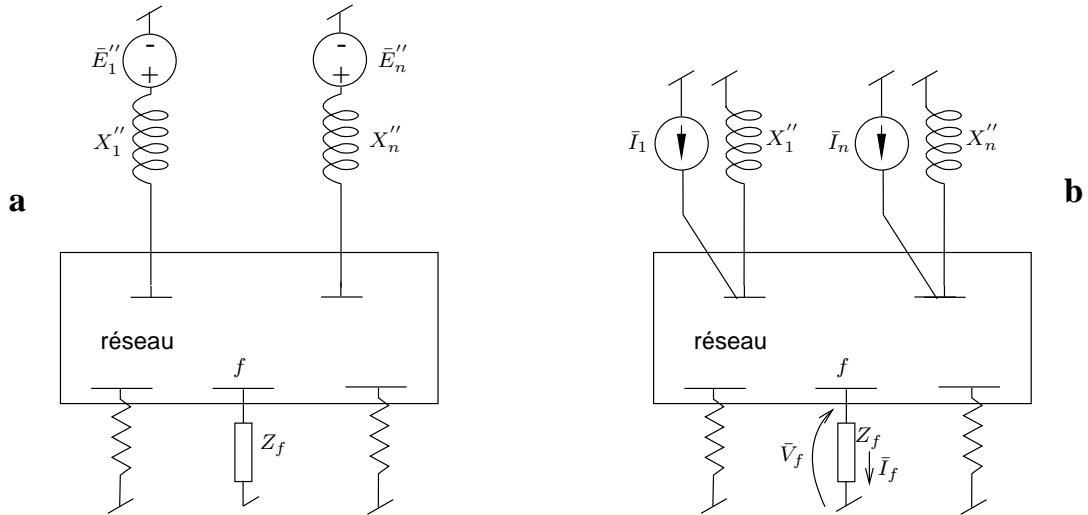


FIGURE 8 – réseau soumis à un court-circuit, machines représentées par leur schémas équivalents de Thévenin et de Norton

3.2 Matrice d'admittance et équations du réseau

Considérons un réseau à N noeuds comprenant des lignes, des câbles et des transformateurs. Ajoutons-y :

- aux noeuds générateurs : les admittances $1/jX''$
 - aux noeuds charges : les admittances Y_c
 - aux noeuds avec de la compensation shunt : les admittances jB_c correspondantes.
- comme représenté à la figure 8.b.

3. en MW et Mvar, P et Q représentent les puissances consommées par phase ; en per unit, ils représentent la puissance triphasée. La notation (0^-) évoque la situation juste avant l'apparition du défaut en $t = 0$

Soit \mathbf{Y} la matrice d'admittance du circuit ainsi obtenu. La terre est prise comme noeud de référence (non compté parmi les N). La méthode la plus générale pour construire \mathbf{Y} est la suivante :

- partir d'une matrice carrée, de dimension N , composée entièrement de zéros
- déterminer les matrices d'admittance des quadripôles décrivant les lignes, les câbles et les transformateurs. Ces matrices de dimension 2 ont été détaillées aux chapitres 4 et 6
- ajouter les termes de chacune de ces matrices aux termes appropriés de \mathbf{Y} , en fonction de la numérotation adoptée pour les N noeuds. Un exemple pour un réseau à 4 noeuds est donné à la figure 9
- ajouter aux termes diagonaux les contributions des machines, des charges et de la compensation shunt.

Il est très aisé d'implémenter ces règles dans un logiciel de calcul.

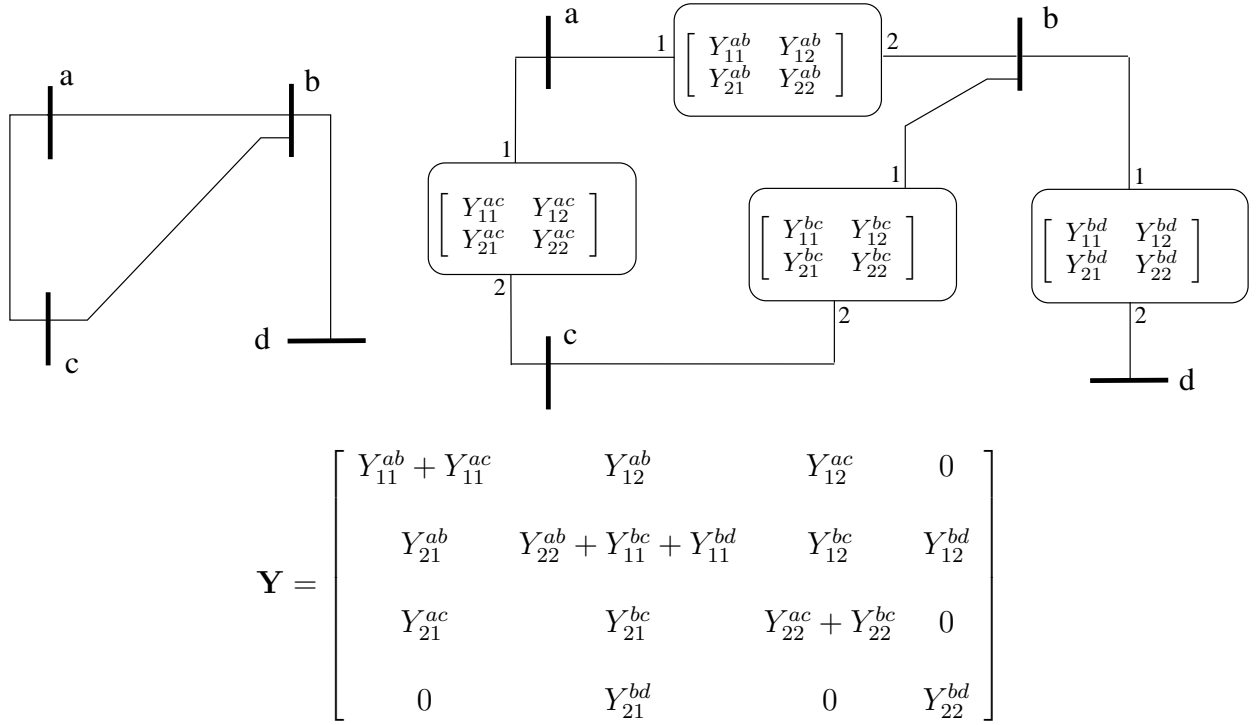


FIGURE 9 – Exemple de construction de la matrice d'admittance \mathbf{Y}

Dans le cas où il n'y a pas de transformateurs déphaseurs, la matrice \mathbf{Y} peut aussi être construite “par inspection” comme suit :

- les lignes, les câbles et les transformateurs sont représentés par leurs schémas équivalents
- ces différents schémas en pi sont assemblés conformément à la topologie du réseau
- à cet ensemble, on ajoute les admittances shunt provenant des machines, des charges et de la compensation shunt
- les termes de \mathbf{Y} s'obtiennent un à un comme suit :
 - le terme non diagonal $[\mathbf{Y}]_{ij} (i \neq j)$ est la somme de toutes les admittances joignant les noeuds i et j , changée de signe ;
 - le terme diagonal $[\mathbf{Y}]_{ii}$ est la somme de toutes les admittances connectées au noeud i .

Notons qu'en l'absence de transformateurs déphaseurs, \mathbf{Y} est symétrique. Elle est non singulière pour autant qu'il existe au moins un élément shunt dans chaque partie connexe du schéma unifilaire du réseau.

Les équations du réseau s'écrivent :

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{Y} \bar{\mathbf{V}} \quad (14)$$

où $\bar{\mathbf{I}}$ est le vecteur des courants injectés aux N noeuds et $\bar{\mathbf{V}}$ celui des tensions à ces mêmes noeuds. Toutes les composantes de ces vecteurs sont des nombres complexes. Les courants sont considérés comme positifs quand ils *entrent* dans le réseau.

Notons que l'impédance de défaut Z_f a été conservée à l'extérieur du circuit modélisé par \mathbf{Y} et n'intervient donc pas dans cette matrice. On pourrait l'inclure en ajoutant $Y_f = 1/Z_f$ au terme diagonal correspondant de \mathbf{Y} . Cependant, cela présente deux inconvénients pratiques :

- on est amené à calculer les courants de défaut en de nombreux noeuds. Incorporer Y_f à la matrice d'admittance \mathbf{Y} requiert de modifier celle-ci pour chaque défaut ;
- on considère fréquemment des défauts francs (comme cas pessimiste). Ceci correspond à une valeur infinie pour Y_f , ce qui n'est pas compatible avec l'utilisation de \mathbf{Y} . Notons néanmoins qu'en pratique, on peut donner une très grande valeur à Y_f , ce qui donne une tension quasiment nulle.

La formulation qui suit permet de n'utiliser que la seule matrice \mathbf{Y} relative à la configuration saine (sans défaut) du réseau et s'applique au cas particulier où $Z_f = 0$.

3.3 Calcul des tensions pendant défaut par superposition

Nous allons calculer les tensions pendant défaut. A partir de celles-ci il est possible de calculer le courant dans n'importe quelle branche du réseau.

Sous l'effet des courants $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_n$ injectés par les générateurs et du courant \bar{I}_f soutiré au noeud f (cf figure 8.b), les tensions prennent une valeur $\bar{\mathbf{V}}$ qui satisfait à :

$$\mathbf{Y} \bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_n \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -\bar{I}_f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par superposition, la solution $\bar{\mathbf{V}}$ est la somme de deux termes :

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}(0^-) + \Delta \bar{\mathbf{V}} \quad (15)$$

avec

$$\mathbf{Y} \bar{\mathbf{V}}(0^-) = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_n \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{Y} \Delta \bar{\mathbf{V}} = -\bar{I}_f \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -\bar{I}_f \mathbf{e}_f \quad (16)$$

$\bar{\mathbf{V}}(0^-)$ n'est rien d'autre que le vecteur des tensions aux noeuds avant l'application du défaut (c'est-à-dire en $t = 0^-$). $\Delta \bar{\mathbf{V}}$ apparaît donc comme une correction représentant l'effet du court-circuit. \mathbf{e}_f est un vecteur unitaire dont toutes les composantes sont nulles, à l'exception de la f -ème qui vaut 1.

A ce stade, on ne connaît pas la valeur de \bar{I}_f . Provisoirement, résolvons le système linéaire :

$$\mathbf{Y} \Delta \bar{\mathbf{V}}^{(1)} = \mathbf{e}_f \quad (17)$$

Les membres de droite des systèmes linéaires (16) et (17) diffèrent par le facteur $-\bar{I}_f$. On a donc :

$$\Delta \bar{\mathbf{V}} = -\bar{I}_f \Delta \bar{\mathbf{V}}^{(1)}$$

En introduisant ce résultat dans (15) on obtient :

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}(0^-) - \bar{I}_f \Delta \bar{\mathbf{V}}^{(1)} \quad (18)$$

La f -ème composante de cette relation vectorielle s'écrit :

$$\bar{V}_f = \bar{V}_f(0^-) - \bar{I}_f \Delta \bar{V}_f^{(1)}$$

En combinant cette relation avec (13), on obtient enfin la valeur du courant de défaut :

$$\bar{I}_f = \frac{\bar{V}_f(0^-)}{\Delta \bar{V}_f^{(1)} + Z_f} \quad (19)$$

et en remplaçant dans (18, 15), on trouve les tensions recherchées :

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}(0^-) - \frac{\bar{V}_f(0^-)}{\Delta \bar{V}_f^{(1)} + Z_f} \Delta \bar{\mathbf{V}}^{(1)}$$

3.4 Relation avec le schéma équivalent de Thévenin

Dans le cours ELEC0014, nous avons mentionné le lien entre le courant de court-circuit, l'impédance de Thévenin et la puissance de court-circuit. Considérons le schéma équivalent de Thévenin du réseau, dans sa configuration avant court-circuit et vu du jeu de barres f (cf figure 10).

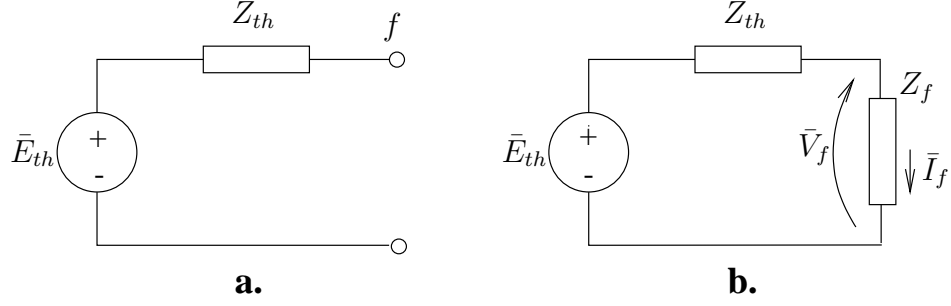


FIGURE 10 – schéma équivalent de Thévenin sans et avec défaut

La f.e.m. de Thévenin est donnée par :

$$\bar{E}_{th} = \bar{V}_f(0^-) \quad (20)$$

L'impédance de Thévenin peut être obtenue en injectant un courant unitaire au noeud f du réseau passifié et en relevant la tension apparaissant en ce noeud. Dans ces conditions, les tensions aux noeuds valent :

$$\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{e}_f = \Delta \bar{\mathbf{V}}^{(1)}$$

et celle au noeud f vaut :

$$Z_{th} = \Delta \bar{V}_f^{(1)} = [\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{e}_f]_f = [\mathbf{Y}^{-1}]_{ff} = [\mathbf{Z}]_{ff}$$

où \mathbf{Z} est la *matrice d'impédance* aux jeux de barres. L'impédance de Thévenin vue d'un noeud f est donc égale au terme diagonal (f, f) de la matrice d'impédance.

Le courant de défaut s'obtient très aisément à partir du schéma de la figure 10.b :

$$\bar{I}_f = \frac{\bar{E}_{th}}{Z_{th} + Z_f} = \frac{\bar{V}_f(0^-)}{[\mathbf{Z}]_{ff} + Z_f} = \frac{\bar{V}_f(0^-)}{\Delta \bar{V}_f^{(1)} + Z_f} \quad (21)$$

On retrouve bien l'expression (19).