

---

# Hypergeometrische functies en hun monodromie

---

Thijs Heijligenberg

Juli 2017

Begeleider: Prof. dr. Gert Heckman



Radboud universiteit Nijmegen

## Inleiding

Een belangrijk thema in de wiskunde is abstraheren. Het idee is om in plaats van een specifiek probleem te bekijken, een algemener probleem te formuleren. Vervolgens gaat men dit grotere probleem op een handige manier aanpakken, waardoor het originele probleem opgelost wordt, en incidenteel een aantal andere aanverwante problemen. Het probleem is vaak wel dat het inzicht van het originele probleem verdwijnt. Een voorbeeld is de overgang van metrische ruimtes naar topologische ruimtes; hierbij verlies je de intuïtieve kijk op hoe punten verbonden zijn, maar je lost gelijk een aantal problemen op voor topologische ruimtes die niet metrisch zijn.

De hypergeometrische functies zijn hier een voorbeeld van. De algemene definitie van deze functies luidt:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt$$

Op het eerste gezicht lijken het hele bijzondere machtreeksen of integralen, afhankelijk van hoe je er naar kijkt. Het blijkt echter dat een heleboel “bekende” functies uit te drukken zijn in hypergeometrische functies. Er gelden een aantal identiteiten:

$$F(0, 0, 0; z) = e^z, F(1, 1, 1; z) = \frac{1}{1-z}, F(1, 1, 2; z) = -\frac{\ln(1-z)}{z}$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-z^2 \sin^2(x)}}$$

$$F(-k, k+1, \frac{1-z}{2}) = P_k(z)$$

Hierbij is  $P_k$  een Legendre-polynoom<sup>1</sup>. De integraal die daarvoor vermeld wordt staat bekend als een elliptische integraal van de eerste soort. Deze verbanden geven aan dat de hypergeometrische functies een abstractie vormen van een hoop elementaire of speciale functies.

Het concept waar in deze tekst naar gekeken wordt, de *monodromie*, geeft een manier om de strikt analytische aard van deze functies, en hun bijbehorende differentiaalvergelijking, te doorgronden. Deze maakt het ook mogelijk om enkel naar de coëfficiënten te kijken, en niet naar de gehele vergelijking. De monodromiegroep geeft een algebraïsch inzicht in deze vergelijking, en geeft ons een handig hulpmiddel bij het beantwoorden van de vraag: welke coëfficiënten in de vergelijking geven enkel algebraïsche oplossingen? Het blijkt dat dit vraagstuk goed op te lossen is, en halverwege de tekst zal zelfs een complete lijst van gevallen waar dit optreedt geleverd worden.

<sup>1</sup>Deze polynomen zijn oplossingen van een bepaalde differentiaalvergelijking die ook in de natuurkunde vaak terugkomt. Hiernaast vormen ze een orthogonaal stelsel in de  $L_2$ -norm.

Het blijkt ook dat de integraalvorm van de hypergeometrische functies in te bedden is in de theorie van Riemann-oppervlakken. Ze blijken toe te passen te zijn als eenvoudige integralen over een Riemann-oppervlak, en deze zijn handig bij het uitdrukken van een aantal eigenschappen van een oppervlak.

## Historie

De geschiedenis van de hypergeometrische functies gaat terug tot John Wallis (1616-1703), in de jaren 1650. Hij was de eerste die de term “hypergeometrisch” invoerde. De eerste die daarna met de functie werkte was Leonard Euler (1707-1783). Euler kwam onder andere met de integraalvorm van de oplossingen aan, en met de differentiaalvergelijking. Een aantal jaren later besteedde een andere grote naam in de wiskunde aandacht aan deze functies: Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Hij was degene die een aantal identiteiten van deze functie afleidde door middel van manipulatie van de machtreeks. De hypergeometrische functies die wij bekijken worden vaak ook “Gauss-hypergeometrische functies” genoemd. Deze naamgeving is enigszins ongelukkig; Gauss was noch de eerste die werkte met deze functies, nog degene die de meest fundamentele inzichten had. De eer van dat laatstgenoemde komt toe aan Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann was degene die het concept van monodromie bedacht, en daarmee de wereld van deze machtreeksen openstelde voor de abstracte algebra. Een meer meetkundig inzicht in deze monodromie werd gegeven door Hermann Schwarz (1843-1921). Hij was ook degene die een volledige lijst gaf van algebraïsche oplossingen. Andere belangrijke bijdragen aan de theorie werden geleverd door Ernst Kummer (1810-1893) die een lijst gaf van alle 24 oplossingen van de hypergeometrische vergelijking, en Felix Klein (1849-1925) die een andere afleiding gaf van de algebraïsche gevallen. Later zijn er een heleboel andere resultaten behaald met algemenere, of simpelweg andere concepten. Een voorbeeld hiervan zijn de hypergeometrische functies en vergelijking van Clausen-Thomae, die een uitbreiding vormen naar meer coëfficiënten. Deze worden genoteerd als  ${}_pF_q$ , waarbij de “gewone” functies die wij bekijken te schrijven zijn als  ${}_2F_1$ . Er is nog veel meer ander werk over dit concept te vinden, maar daar zal hier niet op ingegaan worden.

De hypergeometrische functies vallen in een lange traditie van “speciale functies”. Dit zijn niet-elementaire functies die een specifiek probleem oplossen. De eerste functies die als zodanig kunnen worden geclassificeerd zijn de trigonometrische functies  $\sin$  en  $\cos$ , als beschrijving van bepaalde verhoudingen binnen cirkels. Daarop volgen uiteraard de exponentiële functie, als oplossing van een groot aantal eerstegraads differentiaalvergelijkingen. Deze laatste is echter zo standaard dat deze niet als “speciaal” wordt aangemerkt. De daaropvolgende speciale functie was het logaritme; deze was de eerste functie waarbij een nieuwe traditie werd ingevoerd; tabellen. Er was in de 17<sup>e</sup>, 18<sup>e</sup> en 19<sup>e</sup> eeuw een levendige industrie rond het uitgeven van tabellen voor deze functies, en deze verdween pas bij de invoer van de computer. De invoer van een hoop andere speciale functies gebeurde in het begin van de 18<sup>e</sup> eeuw; binnen korte tijd ontstonden de  $\Gamma$ -functie, de  $B$ -functie, de  $\zeta$ -functie, elliptische integralen en een

breed scala aan andere functies. Ook voor deze functies waren tabellen beschikbaar. Het was Gauss die inzag dat een hoop van deze functies te realiseren waren als speciale gevallen van hypergeometrische functies. Speciale functies lijken op het eerste gezicht een overblijfsel van vroeger in een wiskundige wereld die steeds abstracter wordt. Echter, binnen de fysica blijft men tegen deze functies aanlopen. Daarnaast leggen ze verbanden tussen verschillende onderdelen van de wiskunde, zoals ook in deze tekst te zien is.

## Opzet

De tekst start met een kleine inleiding over complexe differentiaalvergelijkingen, in het bijzonder de hypergeometrische. Hierna volgt een kleine afleiding van de hypergeometrische functies als machtreeks. Hierna volgt een introductie van de monodromie, en na een kort intermezzo over configuratieruimten wordt de theorie van Schwarz gebruikt om hier invulling aan te geven. De laatste twee hoofdstukken gaan over de connectie met Riemann-oppervlakken gemotiveerd door het probleem zoals geformuleerd in 6.3.

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Hypergeometrische vergelijking</b>	<b>1</b>
1.1	Complexe differentiaalvergelijkingen . . . . .	1
1.2	De Frobenius-methode . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Monodromierepresentatie</b>	<b>5</b>
2.1	De fundamenteaalgroep . . . . .	5
2.2	Monodromie . . . . .	5
2.3	De monodromie volgens Levelt . . . . .	6
2.4	Monodromie in de differentiaalmeetkunde . . . . .	8
<b>3</b>	<b><math>X(4)</math> en <math>X\{4\}</math></b>	<b>8</b>
3.1	Projectieve ruimten . . . . .	8
3.2	$X\{n\}$ en $X(n)$ . . . . .	9
3.3	$X(3)$ en $X\{3\}$ . . . . .	9
3.4	$X(4)$ en de dubbelverhouding . . . . .	10
3.5	$X\{4\}$ en de $\phi$ -functie . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Schwarz-driehoeken</b>	<b>10</b>
4.1	Spiegelingen . . . . .	11
4.2	Monodromiegroepen . . . . .	12
<b>5</b>	<b>De Schwarz-lijst</b>	<b>13</b>
5.1	Gereduceerde tripels . . . . .	13
5.2	Het verband tussen $\Gamma(p, p, p)$ en $\Gamma(3, 2, 2p)$ . . . . .	15
5.3	Het verband tussen $\Gamma(2p, q, q)$ en $\Gamma(p, q, 2)$ . . . . .	16
5.4	Kleine stelling van Klein . . . . .	16
5.5	De lijst van Schwarz . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Euler-integraal</b>	<b>18</b>
6.1	Holomorfe differentialen op Riemann-oppervlakken . . . . .	19
6.2	Een ander contour . . . . .	20
6.3	Het verband tussen $C_{\bar{z}}$ en $E_{\bar{z}}$ . . . . .	21
6.4	Een klein intermezzo over moduli-ruimten . . . . .	21
6.5	De Jacobiaan . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Elliptische krommen</b>	<b>23</b>
7.1	De Jacobiaan van een elliptische kromme . . . . .	23
7.2	de $j$ -invariant . . . . .	24

# 1 Hypergeometrische vergelijking

In dit hoofdstuk wordt de hypergeometrische vergelijking beschreven, en worden naast de oplossingen ook enkele eigenschappen zoals de exponenten bekeken. Voor argumenten over bestaan van oplossingen en convergentiestralen verwijs ik naar [1]. In het onderstaande wordt vaak gesproken over  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , de complexe projectieve rechte. Hier kan over gedacht worden als  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ , het complexe vlak met een punt op oneindig. Dit kan ook worden gezien als  $\mathbb{S}^2$ , de riemann-bol, via stereografische projectie. Vaak zullen we simpelweg  $\mathbb{P}^1$  of  $\mathbb{P}$  schrijven. Een uitgebreidere beschrijving en een motivatie voor deze denkwijzen zal worden gegeven in subsection 3.1.

## 1.1 Complexe differentiaalvergelijkingen

De hypergeometrische vergelijking van Euler is een tweede orde complexe differentiaalvergelijking gegeven door

$$[z(1-z)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)\partial - \alpha\beta] f = 0$$

waarbij  $\partial = \frac{d}{dz}$ . Voordat we verder kunnen kijken naar de oplossingen van deze vergelijking, is het belangrijk om te kijken naar de vergelijking zelf. Complexe differentiaalvergelijkingen gedragen zich anders dan reële, net zoals differentieerbare functies zich anders gedragen dan holomorfe functies. Zo is het vaak handig om ook te kijken naar de differentiaaloperator  $\theta = z\frac{d}{dz}$ . In deze schrijfwijze krijgt de hypergeometrische vergelijking de volgende vorm:

$$[(\theta + \gamma - 1)\theta - z(\theta + \alpha)(\theta + \beta)] f = 0$$

Dit volgt door de originele vergelijking te vermenigvuldigen met  $z$  en dan de substitutie te maken.

Als notatie gebruiken we hier een stelsel van eerstegraads vergelijkingen. Als er een differentiaalvergelijking wordt gegeven door  $(\partial^2 - a(z)\partial - b(z))f = 0$ , dan kunnen we schrijven

$$F = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, F' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ a(z)f' + b(z)f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(z) & a(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$$

Het is in de complexe setting van belang om te kijken naar de regulier singuliere punten van een differentiaalvergelijking.

**Definitie 1.** Zij  $(\partial + A)F = 0$ . Het punt  $z = 0$  heet een regulier singulier punt van de vergelijking als  $z \mapsto zA(z)$  holomorf rond  $z = 0$  is. Dit is equivalent met  $z \mapsto B(z)$  holomorf als  $(\theta + B)F = 0$ . Bij dit laatste geldt dat  $B(z) = zA(z)$ .

Deze definitie is alleen bruikbaar voor  $z = 0$ . Als er een ander punt regulier singulier is, is het nodig om dit punt met een translatie op  $z = 0$  af te beelden. De uitdrukkingen zoals  $z \mapsto zA(z)$  zijn matrixwaardige functies; deze afbeeldingen heten holomorf als ze in elk component holomorf zijn.

Rond een singulier punt gedragen de oplossingen van een differentiaalvergelijking zich anders. Hoewel dit een probleem lijkt, zijn de singuliere punten in de rest van de tekst juist de punten waar interessante dingen gebeuren, analoog aan het feit dat complexe integratie als residuen in polen te bekijken is. Praktisch gezien zijn de regulier singuliere punten de punten waar de coëfficiënten van de vergelijking een enkelvoudige pool hebben. Punten waar de coëfficiënten een meervoudige pool of een essentiële singulariteit hebben heten een (niet-regulier) singulier punt.

Rond een regulier singulier punt is het van belang wat de exponent is, omdat hiermee oplossingen bepaald kunnen worden. Deze definitie is ook geldig voor  $n$ -de graads vergelijkingen, maar voor de hypergeometrische vergelijking volstaat het om  $n = 2$  te bekijken.

**Definitie 2.** *Het getal  $s \in \mathbb{C}$  is een exponent rond  $z = 0$  van de vergelijking  $(\theta + B)F = 0$  als  $\det(s + B_0) = 0$ . Equivalent: als  $\theta^n + b_1\theta^{n-1} + \dots + b_{n-1}\theta + b_n = 0$ , is  $s$  een lokale exponent rond  $z = 0$  als  $s^n + b_1(0)s^{n-1} + \dots + b_{n-1}(0)s + b_0 = 0$ .*

In wat volgt zullen we de reguliere singuliere punten en de exponenten van de hypergeometrische vergelijking bepalen. Om de vergelijking in de vorm  $(\partial + A)F = 0$  te schrijven moet

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\gamma - (\alpha + \beta - 1)z}{z(z-1)} & \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Er geldt duidelijk dat  $zA(z)$  holomorf is, en  $(z-1)A(z-1)$  holomorf is rond  $z = 1$ . Voor het geval  $z = \infty$  is het handig om te kijken naar  $w = 1/z$ , met  $\vartheta = -w \frac{d}{dw}$ . Dit laatste vloeit voort uit de coördinaattransformatie:  $\theta = z \frac{d}{dz} = z \frac{dw}{dz} \frac{d}{dw} = z \frac{-1}{z^2} \frac{d}{dw} = -w \frac{d}{dw} = -\vartheta$ . Dan krijgt de differentiaalvergelijking rond  $z = \infty$  de vorm

$$\left[ (\vartheta - \gamma + 1)\vartheta + \frac{1}{w}(\alpha - \vartheta)(\beta - \vartheta) \right] f = 0$$

Een kleine berekening geeft dan dat  $z = \infty$  een regulier singulier punt is.

Voor de exponenten rond 0 is het nodig uit te rekenen dat

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\gamma - 1 - (\alpha + \beta)z}{z-1} & \frac{\alpha\beta z}{1-z} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } B_0 = \begin{pmatrix} 1 - \gamma & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

waarvan de eigenwaarden duidelijk  $1 - \gamma$  en  $0$  zijn.

Rond  $z = 1$  is het het makkelijkst om de substitutie  $w = z - 1$  te maken, met  $\frac{d}{dw} = \frac{d}{dz}$ , waarbij na substitutie de vergelijking hetzelfde er uit blijft zien behalve bij de coëfficiënt voor  $\frac{d}{dw}$ . Er geldt namelijk:

$$\begin{aligned} z(z-1)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1))\partial + \alpha\beta = \\ w(w-1)\frac{d^2}{dw^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)(w-1))\frac{d}{dw} + \alpha\beta = \\ w(w-1)\frac{d^2}{dw^2} + ((\alpha + \beta - \gamma + 1) - (\alpha + \beta + 1)w)\frac{d}{dw} + \alpha\beta \end{aligned}$$

Het valt dan op te merken dat door  $\gamma$  te substitueren voor  $\alpha + \beta - \gamma + 1$ , de hele vergelijking dezelfde coëfficiënten heeft als het origineel, en dat de exponenten dus 0 en  $1 - (\alpha + \beta - \gamma + 1) = \gamma - (\alpha + \beta)$  zijn. Rond  $z = \infty$  hebben we de vergelijking in  $\theta$  reeds uitgewerkt, en machtreeksontwikkeling geeft dan exponenten  $\alpha$  en  $\beta$ . Dit wordt samengevat in het volgende schema:

0	1	$\infty$
0	0	$\alpha$
$1 - \gamma$	$\gamma - (\alpha + \beta)$	$\beta$

Het volgende lemma maakt duidelijk waarom het handig is om de exponenten te weten. Ook geeft het aan waarom na dit hoofdstuk de expliciete differentiaalvergelijking nooit meer genoemd of gebruikt wordt.

**Lemma 1.** *Een tweede-orde complexe differentiaal vergelijking op  $\mathbb{P}$  met 3 regulier singuliere punten, is uniek bepaald door zijn singuliere punten en gegeven exponenten als deze exponenten optellen tot 1.*

*Bewijs.* We zullen slechts een schets van het bewijs geven, en niet de expliciete berekeningen opschrijven. Hierbij zullen we een algemener resultaat bewijzen, waarvan het lemma een speciaal geval is.

Beschouw de vergelijking  $[\partial^2 + a_1(z)\partial + a_2(z)]f = 0$ . Deze heeft een regulier singulier punt bij  $z = \infty$  als  $a_1(z) = 2z^{-1} + O(z^{-2})$  en  $a_2(z) = O(z^{-4})$ . Dit volgt door te schrijven  $\frac{d^2}{dz^2} = \frac{d}{dz}(\frac{dw}{dz}\frac{d}{dw}) = -w^2(-w^2\frac{d^2}{dw^2} - 2w\frac{d}{dw})$  met  $w = 1/z$ . We eisen nu dat de vergelijking  $m$  verschillende regulier singuliere punten heeft, en we schrijven  $F(z) = (z - z_1)\dots(z - z_m)$ . Dan volgt dat de meest algemene vorm van een dergelijke vergelijking gelijk is aan

$$\left[ \partial^2 + \frac{G_{m-1}(z)}{F(z)}\partial + \frac{G_{2m-4}(z)}{F(z)^2} \right] f = 0$$

met  $G_{m-1}$  een polynoom van graad  $m - 1$  en  $G_{2m-4}$  een polynoom van graad hoogstens  $2m - 4$ . Nu volgt door te eisen dat de exponenten  $\alpha_j, \beta_j$  zijn bij  $z_j$ , en dat geldt  $\sum(\alpha_j + \beta_j) = m - 2$ , dat de meest algemene vorm is

$$\left[ \partial^2 + \sum \frac{1 - \alpha_j - \beta_j}{z - z_j} \partial + \frac{1}{F(z)} \left\{ \sum \frac{F_j(z_j) \alpha_j \beta_j}{z - z_j} + G_{m-4}(z) \right\} \right] f = 0$$

Hierbij is  $F_j(z) = F(z)/(z - z_j)$ , en  $G_{m-4}$  een polynoom van graad kleiner of gelijk aan 4. Dit volgt door te breuksplitsen, en de vergelijkingen voor de exponenten op te lossen. Hieruit is duidelijk dat een vergelijking met  $m = 3$  singuliere punten een polynoom van graad -1 als onbepaald deel moet hebben, wat dus aangeeft dat deze vergelijking uniek bepaald wordt door de gegeven regulier singuliere punten en de exponenten.  $\square$

## 1.2 De Frobenius-methode

In dit deel van de tekst zal via de methode van Frobenius de ruimte van oplossingen bepaald worden. Deze zijn niet bijster belangrijk in de rest van de tekst,



maar het is altijd handig om te weten hoe deze eruitzien. Het belang zit er vooral in dat de vorm van de oplossingen het begrip monodromie in ons geval zinvol maakt.

Een algemene methode voor het vinden van oplossingen van differentiaalvergelijkingen is het invullen van een machtreeks. Dit geeft in ons geval, door te gokken  $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ ,

$$k(k-1)z(1-z)f_k z^{k-2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)k f_k z^{k-1} - \alpha \beta f_k z^k = 0$$

wat reduceert tot

$$f_{k+1} = \frac{k(k-1) + (\alpha + \beta + 1)k + \alpha\beta}{k(k+1) + \gamma(k+1)} f_k = \frac{(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+1)(k+\gamma)}$$

We kiezen  $f_0 = 1$ , waarna volgt  $f_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ ,  $f_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)}{2\gamma(\gamma-1)}$ . Het is na verder uitschrijven duidelijk dat, met de notatie  $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$  dat oplossingen van de vorm zijn

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k$$

De Frobenius-methode houdt in dat je gokt dat een oplossing rond een singulier punt van de vorm is  $z^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$  voor een onbekende  $s \in \mathbb{C}$ . Dit is het punt waar de exponenten voorbij komen:

**Lemma 2.**  $z^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$  is een oplossing van  $(\theta + B)f = 0$  rond  $z = z_0$  desda  $(s + B_0)f_0 = 0$ , wat betekent dat  $s$  rond  $z = z_0$  een exponent is.

*Bewijs.* Bekijk  $F = \sum f_k z^k$ . we willen dat

$$\begin{aligned} (\theta + B)z^s F &= \\ = sz^s F + z^s \theta F + B(z^s F) &= \\ = z^s (sF + \theta F + BF) &= 0 \end{aligned}$$

We bekijken hiervan de 0-de coëfficiënt. Deze is gelijk aan  $sf_0 + (\theta F)_0 + (BF)_0 = (s + B)f_0 = 0$ .  $(\theta F)_0 = 0$ , want  $\theta f_0 = z \cdot 0 = 0$  en de andere termen behouden hun macht.  $\square$

Dit houdt in ons geval in dat de oplossingen van de vorm zijn  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  of  $z^s F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  voor  $s$  een exponent, en de parameters natuurlijk verschillend afhankelijk van welk punt je bekijkt.

## 2 Monodromierepresentatie

Het begrip monodromie werd door Riemann ingevoerd in 1857 in [6]. Kort gezegd geeft het een idee over hoe de oplossingen veranderen na analytische voortzetting rond de singuliere punten. Dat de oplossingen veranderen komt door het feit dat  $z^s = e^{\log(z)s}$ . De  $\log$ -functie is meerwaardig, dus het ligt voor de hand dat oplossingen niet triviaal voort te zetten zijn om singuliere punten heen.

### 2.1 De fundamenteaalgroep

In het vervolg van deze tekst geldt  $Z = \mathbb{C} - \{0, 1\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$ , het domein waar we naar kijken. De fundamenteaalgroep in  $z_0$  van een topologische ruimte is de verzameling equivalentieklassen van paden met begin- en eindpunt  $z_0$  onder homotopie. Dit vormt een groep onder samenstelling van paden. Ook is dit basispuntonafhankelijk als de ruimte padsamenhangend is, en omdat  $Z$  dat is, schrijven we  $\pi_1(Z)$  voor de fundamenteaalgroep. Neem een  $z_0 \in Z$  vast als basispunt. Dan zijn er drie paden te onderscheiden die niet de identiteit zijn: een pad  $\gamma_0$  rond  $z = 0$ , een pad  $\gamma_1$  rond  $z = 1$ , en een pad  $\gamma_\infty$  rond  $z = \infty$ . Het blijkt nu dat  $\gamma_0\gamma_1\gamma_\infty$  de identiteit is, dus  $\pi_1(Z)$  is isomorf aan de vrije groep voortgebracht door  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  en  $\gamma_\infty$ , met als restrictie dat  $\gamma_0\gamma_1\gamma_\infty = 0$ .

We introduceren ook alvast de homologiegroepen. Deze zijn gedefiniëerd door

$$H_1(X) = \Pi_1(X)^{\text{ab}} = \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

Dit is niet de algemene definitie, omdat deze niet voort te zetten is naar hogere homologiegroepen, maar voor ons geval is dit wel de makkelijkste.

### 2.2 Monodromie

Neem  $u_1, u_2$  een basis van oplossingen rond  $z = z_0$ . Stel  $u_1 = z^s F(z)$  rond  $z = 0$ , dat wil zeggen dat deze voor een gekozen pad hier tot voort te zetten is, voor  $F$  holomorf en  $s$  niet geheel.  $z^s = e^{s \log(z)}$  is niet eenwaardig holomorf op heel  $Z$ ; analytisch voortzetten om 0 heen geeft een andere waarde als uitkomst.

**Lemma 3.** *Analytisch voortzetten van een holomorfe functie langs een pad is homotopie-onafhankelijk.*

*Bewijs.* Stel we hebben twee homotopie paden  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$  tussen  $x$  en  $y$ , en een originele functie  $f$  rond  $x$ . De functie voortgezet langs  $\gamma_i$  heet  $f_i$  en heeft primitieve  $F_i$ . Zij  $\gamma = \gamma_1\gamma_2^{-1}$ , dit is een gesloten contour. Er geldt

$$\int_{\gamma} f dz = F_1(y) - F_2(y) = 0$$

De eerste gelijkheid volgt uit de hoofdstelling van de analyse voor  $\mathbb{C}$ , en de tweede volgt uit het feit dat de paden homotop zijn, en  $\gamma$  dus samentrekbaar is. Hieruit moet volgen  $f_1(y) = f_2(y)$ .  $\square$

**Opmerking 1.** *Het is niet meteen duidelijk dat de bovenstaande berekening correct is en niet werkt voor niet-homotope paden. Als voorbeeld geven we daarbij  $f(z) = \frac{1}{z}$  en twee paden rond 0. Als de primitieve in de ene tak  $\log(z)$  is, is de andere  $\log(z) + 2\pi i$ , en dus geldt  $\int_{\gamma} f dz = 2\pi i \neq 0$ .*

Zij nu  $v_i$  de analytische voortzetting langs  $\gamma \in \pi_1(Z)$ , waarbij begin en eindpunt nu in  $z_0$  liggen. Alhoewel  $v_i$  niet per se gelijk is aan  $u_i$ , moet de ruimte van oplossingen wel gelijk zijn gebleven. Er moet dus gelden:  $v_i = a_i u_1 + b_i u_2$  voor  $a, b \in \mathbb{C}$ . We zeggen  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  voor een  $A \in GL(2, \mathbb{C})$ . Dat de matrix  $A$  niet singulier is volgt uit het feit dat de inverse gegeven wordt door het voortzetten langs  $-\gamma$ , het pad  $\gamma$  maar dan andersom doorlopen. Ook geldt dat voortzetting langs  $\gamma_1 \gamma_2$  hetzelfde is als eerst voortzetten langs  $\gamma_2$  en dan langs  $\gamma_1$ , met vermenigvuldiging van de resulterende matrices. Deze volgorde is enigszins onnatuurlijk, maar het komt in ons geval beter uit. Dit geeft dus een representatie  $\pi_1(Z) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ . Samengevat:

**Definitie 3.** *Zij  $z \in \mathbb{P} - \{0, 1, \infty\}$ , en  $u_1$  en  $u_2$  lokaal rond  $z$  de oplossingen van de hypergeometrische vergelijking. Zij  $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{P} - \{0, 1, \infty\}, z)$ , en zij  $v_1$  en  $v_2$  de analytische voortzettingen langs  $[\gamma]$  van  $u_1$  en  $u_2$ . Dan is  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \text{Mon}_{[\gamma]} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  met  $\text{Mon}_{[\gamma]} \in GL_2(\mathbb{C})$  de monodromierepresentatie van  $\gamma$ .*

## 2.3 De monodromie volgens Levelt

Een algebraïsche beschrijving van de monodromiegroep van de hypergeometrische vergelijking wordt gegeven door Levelt in [7]. Deze is ook bruikbaar voor de algemenere hypergeometrische functies van Clausen-Thomae, maar door de algebraïsche aard minder inzichtelijk. Hierom wordt deze slechts kort bekeken, en zal later de monodromie middels de inzichten van Schwarz-Klein bekeken worden, wat een meer meetkundige en inzichtelijke kijk geeft op het concept.

Voor het bewijs van deze stelling is een lemma nodig. Een begrip wat gebruikt wordt is dat van een *irreducibele* werking: dit betekent dat de groep geen niet-triviale invariante deel ruimte heeft

**Lemma 4.** *Zij  $H < GL(2, \mathbb{C})$  een ondergroep voortgebracht door  $A, B$ , met  $\text{rk}(A - B) \leq 1$ . Dan werkt  $H$  reducibel op  $\mathbb{C}^2$  dan en slechts dan als  $\text{spec}(A) \cap \text{spec}(B) \neq \emptyset$ .*

*Bewijs.* Stel  $V$  is een niet-triviale invariante deelruimte. Aangezien  $\text{rk}(A - B) \leq 1$ , moet gelden dat  $A$  en  $B$  overeenkomen op  $V$  of  $\mathbb{C}^2/V$ .

Stel  $A$  en  $B$  hebben een gezamenlijke eigenwaarde  $\lambda$ . We zullen nu laten zien dat  $H$  dan een niet-triviale invariante deelruimte heeft. Schrijf  $W = \ker(A - B)$ . We weten dat  $\dim(W) \leq 1$ , en als dit 0 is geldt  $A = B$ , wat een reduceerbare werking impliceert. Neem dus aan  $\dim(W) = 1$ . Als  $A$  een eigenvector heeft in

$W$ , is dit ook een eigenvector van  $B$ , en deze genereert dus een invariante (niet-triviale) deelruimte. We kunnen dus aannemen dat  $A$  en  $B$  geen eigenvector hebben in  $W$ .

Schrijf  $V = (A - \lambda)\mathbb{C}^2$ . Deze is duidelijk invariant onder  $A$ . We kunnen nu zeggen dat  $\dim(\ker(A - \lambda)) = 1$ , want deze is minstens 1, en als deze 2 zou zijn zou de doorsnede van  $V$  en  $W$  niet-triviaal zijn, wat duidelijk niet zo is. Dan geldt dus  $\dim(V) = 1$ . Neem nu  $V' = (B - \lambda)\mathbb{C}^2$ , wat via dezelfde argumenten dimensie 1 heeft. Deze hebben een doorsnede van dimensie 1, namelijk  $V \supset (A - \lambda)W = (B - \lambda)W \subset V'$ . Dit komt omdat voor  $v \in W$  geldt dat  $(A - \lambda)v - (B - \lambda)v = (A - B)v = 0$ . Er moet dus gelden dat  $V = V'$ , en dus is  $V$  een invariante deelruimte van  $A$  en  $B$  en dus van  $H$ .  $\square$

Het resultaat van Levelt is als volgt:

**Stelling 1.** *Zij  $a, b, c \in \mathbb{C}^\times$  zodat  $\{a, b\} \cap \{1, c\} = \emptyset$ . Op conjugatie door  $GL(2, \mathbb{C})$  na bestaan er unieke  $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$  met  $\det(t - A) = (t - a)(t - b)$ ,  $\det(t - B) = (t - c)(t - 1)$  waarbij de matrix  $A - B$  rang gelijk aan 1 heeft.*

Als het beeld van de drie voortbrengers  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$  onder de monodromie wordt gegeven door  $h_0, h_1, h_\infty$ , dan geven de lokale exponenten in het Riemann-schema dat  $\det(t - h_\infty) = (t - e^{2\pi i \alpha})(t - e^{2\pi i \beta})$ ,  $\det(t - h_0^{-1}) = 2(t - e^{2\pi i \gamma})$ . Dan wordt de monodromiegroep gegeven door

$$h_\infty = A, h_0 = B^{-1}, h_1 = A^{-1}B$$

*Bewijs.* We kunnen een paar matrices opschrijven die voldoen, dus ze bestaan. Dit zijn:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -ab \\ 1 & -(a+b) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1 & -(1+c) \end{pmatrix}$$

Bekijk  $v \in \ker(A - B)$ . Wegens de stelling van Cayley-Hamilton<sup>2</sup> geldt dat het opspansel van  $v$  en  $Av = Bv$  invariant is onder de ondergroep voortgebracht door  $A$  en  $B$ . Via het vorige lemma moet het opspansel van  $v$  en  $Av$  wel heel  $\mathbb{C}^2$  zijn, want de ondergroep voortgebracht door  $A$  en  $B$  werkt irreducibel. Uit het lemma van Cayley-Hamilton is weer te zien dat  $A$  en  $B$  zoals hierboven expliciet gegeven in deze basis geschreven zijn. Deze zijn op conjugatie na uniek, want een conjugatie komt neer op een andere keuze van het element uit de kern.  $\square$

Alhoewel deze afleiding puur algebraïsch is en dus weinig direct inzicht verschaft, kunnen we hier wel een belangrijke conclusie trekken: de monodromie wordt uniek bepaald door  $a = e^{2\pi i \alpha}$ ,  $b = e^{2\pi i \beta}$ ,  $c = e^{2\pi i \gamma}$  onder de irreducibiliteitsconditie  $\{a, b\} \cap \{1, c\} = \emptyset$ . Dit betekent onder andere dat een verandering  $\alpha \mapsto \alpha \pm 1$  (en analoog voor  $\beta, \gamma$ ) niks uitmaakt.

<sup>2</sup>Deze zegt dat als  $p(t) = \det(tI - A)$ , dat dan  $p(A) = 0$ . Dit maakt het voor een  $n \times n$ -matrix mogelijk om de  $n$ -de macht in kleinere machten te ontbinden

## 2.4 Monodromie in de differentiaalmeetkunde

In de differentiaalmeetkunde komt de term “monodromie” ook voor als de holonomie bij een vlakke connectie, waarbij holonomie paralleltransport is langs een gesloten kromme. De monodromie die wij hier bespreken is een speciaal geval hiervan. Zie voor een introductie in de differentiaalmeetkunde [3]. Voor een introductie in de theorie van gladde variëteiten, zie [9].

Beschouw  $Z$  als een 1-dimensionale complexe variëteit, met als vectorbundel de co-raakbundel. Dan is elke connectie vlak, want de kromming is een 2-vorm en dus identiek 0. Een element van de raakbundel is van de vorm  $\omega = f(z)dz$  met  $z$  de lokale coördinaat op  $Z$ . Paralleltransport van  $\omega$  langs een gesloten kromme is nu hetzelfde als analytische voortzetting van  $f$ .

## 3 $X(4)$ en $X\{4\}$

Geheel ongerelateerd aan de hypergeometrische vergelijking, en de monodromiegroepen, is de vraag: “als je een viertal punten in  $\mathbb{P}^1$  hebt, kan je die dan in een willekeurig ander viertal overbrengen na een gebroken lineaire transformatie?” Het is dan ook nodig om te kijken naar het geordende geval, en het ongeordende geval. Beide gevallen geven het antwoord: nee. Het is dan natuurlijk interessant om te kijken welke viertallen niet te onderscheiden zijn, en wat een invariant hiervan is. Deze invariant is wat van belang is bij het hierop volgende stuk theorie; de  $\phi$ -invariant die geconstrueerd wordt is de inverse van een bepaalde schwarz-afbeelding.

### 3.1 Projectieve ruimten

In wat volgt zullen we punten in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  bekijken. Deze ruimte vereist nog een formele introductie, alhoewel deze in de voorgaande hoofdstukken al genoemd en gebruikt werd. Hierbij werd  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  simpelweg beschouwd als  $\mathbb{C}$  met een punt op oneindig. Formeel is  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  gedefinieerd als de verzameling lijnen in  $\mathbb{C}^{n+1}$  door de oorsprong. Dit is hetzelfde als het te definiëren als  $\mathbb{C}^{n+1}/\sim$ , met  $x \sim y \Leftrightarrow x = cy$  voor een  $c \in \mathbb{C}$ , met  $x$  en  $y$  vectoren en de verminigvuldiging met  $c$  componentgewijs. Dezelfde constructie werkt voor  $\mathbb{R}$  of andere vectorruimten of lichamen. In wat volgt schrijven we weer  $\mathbb{P}$  voor  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , omdat dit uiteindelijk de enige projectieve ruimte is waarin we zullen werken. Een element van  $\mathbb{P}$  wordt vaak geschreven als  $y_1 : y_2$ . Omdat  $y_1 : y_2 = \frac{y_1}{y_2} : 1$  als  $y_2 \neq 0$ , kunnen we  $\mathbb{P}$  ontbinden in een deel  $\{y : 1; y \in \mathbb{C}\}$ , en een deel  $\{y : 0; y \in \mathbb{C}\}$ . Het eerste deel is isomorf aan  $\mathbb{C}$ , en het tweede deel aan een enkel punt wat we  $\infty$  noemen, waardoor de opvatting van  $\mathbb{P}$  als  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$  gerechtvaardigd is. Via projectie is dit gelijk aan een bol met als zuidpool 0, en als noordpool  $\infty$ . Via deze realisatie is ook in te zien dat een lijn door het vlak door  $\infty$  gaat, en dus in  $\mathbb{P}$  een cirkel is. Een element van  $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n$  schrijven we in matrixvorm als  $\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{n1} \\ y_{12} & \cdots & y_{n2} \end{pmatrix}$  als de eerste coördinaat  $y_{11} : y_{12}$  is etc.

### 3.2 $X\{n\}$ en $X(n)$

De configuratieruimte  $X(n)$  is gedefinieerd als de equivalentieklassen van elementen in  $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n$  die door werking van een geschikte matrix in elkaar over te brengen zijn. We schrijven ze zoals hierboven in matrixvorm. We eisen dat de  $n$  punten onderling verschillend zijn, wat neerkomt op het feit dat geen enkele minor (combinatie van twee kolommen) determinant 0 heeft.

**Definitie 4.**

$$X(n) = GL(2) \backslash M^*(2, n) / (\mathbb{C}^*)^n$$

Waarbij  $M^*(2, n)$  de verzameling  $2 \times 4$ -matrices is waarvan geen enkele  $(i, j)$ -minor determinant gelijk aan 0 heeft. De groep  $(\mathbb{C}^*)^n$  werkt van links als vermenigvuldiging met diagonale niet-singuliere matrices.  $GL(2) = GL(2, \mathbb{C})$  werkt hier niet als matrixvermenigvuldiging op de gehele matrix, maar als matrixvermenigvuldiging op de individuele kolommen. Verder geldt:

$$X\{n\} = X(n) / S_n$$

waarbij  $S_n$  werkt op  $X(n)$  door permutatie van de kolommen van  $M(2, n)$

De uitdeling naar diagonale matrices zorgt ervoor dat de kolommen daadwerkelijk projectieve coördinaten geven. De factor  $GL(2)$  geeft de daadwerkelijke equivalentie. Een translatie wordt gegeven door  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  als we een normaal getal als  $Z : 1$  uitdrukken. Translatie heeft op  $\infty$  duidelijk geen effect. De transformatie  $z \mapsto 1/z$  is ook te realiseren met  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , en hier gelden de regels  $1/\infty = 0, 1/0 = \infty$ . De andere belangrijke transformatie is  $z \mapsto 1 - z$ , waarvan de matrixuitdrukking aan de lezer wordt overgelaten.

### 3.3 $X(3)$ en $X\{3\}$

Het getal vier klinkt hier als een vrij willekeurige waarde. Echter, het blijkt zo te zijn dat dit de eerste waarde is waarvoor dit probleem een niet-triviale oplossing heeft. Voor het geval  $X\{3\}$  en  $X(3)$  zij deze ruimtes triviaal; dat wil zeggen, elk drietal punten is in elk ander drietal punten over te voeren. Hiervoor is het praktisch om te kijken of elk drietal af te beelden is op  $(0, 1, \infty)$  met de bovengenoemde transformaties.

Bekijk  $(z_1, z_2, z_3)$ . Als  $z_3 \neq \infty$ , pas dan de transformatie  $z \mapsto \frac{1}{z - z_3}$  toe. Dan hebben we nu nog  $(z'_1, z'_2, \infty)$ . Er geldt  $z_1, z_2 \neq \infty$ , want de punten werden verschillend verondersteld. Deze zijn via een geschikte translatie en een schaling over te brengen in  $(0, 1, \infty)$ .

De ruimte  $X(3)$  heeft dus een enkel punt, omdat elk drietal op elk drietal is af te beelden.  $X\{3\}$  is dus ook triviaal.

### 3.4 $X(4)$ en de dubbelverhouding

De ruimte  $X(4)$  is niet triviaal. Dat betekent dat een viertal geördende punten niet in elke willekeurig ander viertal is om te schrijven. We willen bepalen, gegeven een viertal  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ , wat een invariant is onder projectieve equivalentie. Het is duidelijk dat deze invariant 1-dimensionaal gaat zijn omdat  $X(3)$  triviaal is, en er slechts één dimensie is toegevoegd. We gaan dan ook bijna net als bij  $X(3)$  te werk, en proberen het viertal in de vorm  $(0, 1, \infty, \lambda)$  te krijgen, waarbij  $\lambda$  de invariant wordt. Dat we de eerste drie punten in deze vorm kunnen krijgen wisten we al, dus er rest enkel nog te bekijken wat het vierde wordt na die transformaties. Een kleine berekening geeft

$$\lambda = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

Dit staat ook bekend als de *dubbelverhouding*

### 3.5 $X\{4\}$ en de $\phi$ -functie

Voor het bepalen van  $X\{4\}$  bekijken we wat de werking van  $S_4$  doet met de dubbelverhouding. Een kleine berekening geeft dat permutaties van de vorm  $(ij)(pq)$  de dubbelverhouding behouden. Deze vier permutaties vormen de viergroep  $V_4$  van Klein. Er geldt  $S_4/V_4 \cong S_3$ , wat dus nog zes verschillende permutaties overlaat. Een kleine berekening geeft  $(12)(0, 1, \infty, \lambda) \sim (0, 1, \infty, 1/\lambda)$ , en  $(13)(0, 1, \infty, \lambda) \sim (0, 1, \infty, 1 - \lambda)$ . Op deze manier krijgen we zes verschillende transformaties, schematisch gegeven door

$$\lambda, 1 - \lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{1 - \lambda}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

We zoeken nu een functie die invariant is onder deze transformaties, genoteerd  $\phi$ , zodat dit een realisatie is van  $X\{4\} = X(4)/S_4$ . Een kleine evaluatie van welke punten vast zijn onder de transformatie, en een keuze waar deze op afbeelden, krijgt men de volgende functie:

$$\phi(\lambda) = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$$

## 4 Schwarz-driehoeken

Zij  $u_1(z)$  en  $u_2(z)$  lokale oplossingen van de hypergeometrische vergelijking. We definiëren:

$$\zeta(z) = \frac{u_1(z)}{u_2(z)}$$

De twee oplossingen zijn nooit gelijktijdig gelijk aan 0, want ze zijn onafhankelijk. Ook is de afbeelding biholomorf; de afgeleide wordt nooit gelijk aan 0, want  $\zeta'(z) = \frac{(\partial f_1)f_2 - f_1(\partial f_2)}{f_2^2}$ , en de teller hiervan is gelijk aan de Wronskiaan.

Bekijk  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{P} : |z| \geq 0\}$ . Het beeld van  $\mathbb{H}$  onder deze afbeelding is bekend:

**Lemma 5.** *Het beeld onder  $\zeta$  van  $\mathbb{H}$  is een driehoek, met als hoekpunten  $\zeta(0), \zeta(1), \zeta(\infty)$  en de hoek in  $\zeta(0)$  gelijk aan  $\pi|1 - \gamma| = \pi\lambda$ , de hoek in  $\zeta(1)$  gelijk aan  $\pi|1 - \gamma - \alpha| = \pi\mu$ , en de hoek in  $\zeta(\infty)$  gelijk aan  $\pi|\alpha - \beta| = \pi\nu$ .*

Hierbij is verondersteld dat  $0 \leq \lambda, \mu, \nu, \lambda + \mu, \mu + \nu, \lambda + \nu \leq 1$ .

*Bewijs.* Omdat de coëfficiënten reëel zijn, is het mogelijk om rond punten in  $(0, 1)$  een basis te kiezen die reëelwaardig is. Hetzelfde geldt voor  $(1, \infty)$  en  $(\infty, 0)$ . Een basisverwisseling werkt op deze afbeelding door een werking van  $PGL(2, \mathbb{C})$ , want als  $\{u_1, u_2\}$  en  $\{v_1, v_2\}$  basissen, dan

$$\tilde{\zeta}(z) = \frac{v_1(z)}{v_2(z)} = \frac{au_1(z) + bu_2(z)}{cu_1(z) + du_2(z)} = \frac{a\zeta(z) + b}{d\zeta(z) + d} = A \cdot \zeta(z)$$

voor een  $A \in PGL(2, \mathbb{C})$ . De reden dat het de projectieve matrixgroep is, is omdat vermenigvuldiging met een constante duidelijk niet uitmaakt. Omdat  $PGL(2, \mathbb{C})$  cirkels en lijnen in cirkels en lijnen overvoert, is het beeld van  $(0, 1)$ ,  $(1, \infty)$  en  $(\infty, 0)$  een cirkel of lijn. Rond  $0, 1$  en  $\infty$  is een basis van de vorm  $\{z^{s_1}F(\alpha, \beta, \gamma; z), z^{s_2}F(\alpha, \beta, \gamma; z)\}$  voor de exponenten  $s_1$  en  $s_2$ , en daar is dus  $\zeta(z) = z^{s_1 - s_2}(1 + \dots)$  zodat de hoek daar  $\pi|s_1 - s_2|$  met  $|s_1 - s_2|$  het exponentverschil.  $\square$

## 4.1 Spiegelingen

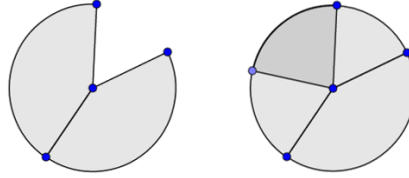
Voor wat volgt hebben we een lemma nodig wat aangeeft dat holomorfe afbeeldingen gespiegeld kunnen worden. Dit lemma is door Schwarz speciaal ontwikkeld voor het probleem waar we naar kijken

**Lemma 6.** *Zij  $\Omega$  een gebied in  $\mathbb{C}$  zodat  $\Omega \subset \mathbb{H}$  en er een interval  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  is zodat  $[a, b] \subset \partial\Omega$ , en zij  $f$  holomorf op  $\Omega \cup (a, b)$ . Dan is er een functie  $F$  holomorf op  $\Omega \cup (a, b) \cup \bar{\Omega}$ , waarbij  $\bar{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega\}$ , zodat  $F|_{\Omega} = f$ .*

*Bewijs.* Definiëer voor  $z \in \bar{\Omega} : F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ . Dit voldoet, zie [2] voor een bewijs.  $\square$

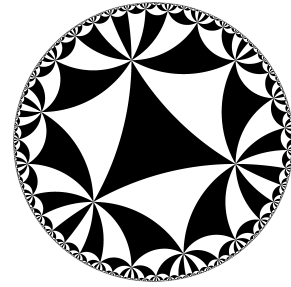
Hoewel dit geldt voor gebieden met een deel van de rand reëel, mag het duidelijk zijn dat na geschikte projectieve transformaties het ook mogelijk is om in een cirkelboog te spiegelen. Dit willen we dan ook toepassen op de driehoeken verkregen als beeld van  $\zeta$ . Er treedt dan het probleem op, dat als de coëfficiëntverschillen niet goed gekozen zijn, na herhaaldelijk spiegelen de driehoeken gaan overlappen. De onderstaande afbeelding laat zien hoe dit fout gaat nadat twee keer in twee verschillende zijden is gespiegeld.



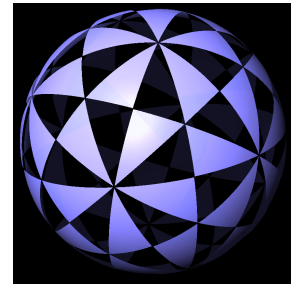


De hoeken van de driehoeken worden namelijk bewaard onder deze spiegeling. We kiezen daarom de coëfficiënten zodanig dat de exponentverschillen van de vorm  $1/k, 1/l, 1/m$  zijn. Dan overlappen de driehoeken niet, en na herhaald spiegelen leveren deze een betegeling van een deel van het vlak op. We onderscheiden drie gevallen:  $1/k + 1/l + 1/m > 1$  leveren boldriehoeken op,  $1/k + 1/l + 1/m = 1$  geeft euclidische driehoeken, en  $1/k + 1/l + 1/m < 1$  geeft hyperbolische driehoeken. Dit is gevisualiseerd in de volgende illustraties:

Het bereik hiervan is, in het hyperbolische geval, het complexe bovenhalfvlak of de poincaréschijf. In het euclidische geval is het bereik gelijk aan  $\mathbb{C}$ . Het spherische geval geeft een betegeling van  $\mathbb{P}$ , en wel in een eindig aantal driehoeken. Het domein van deze afbeelding is de universele overdekkingsruimte van  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ , waar hier niet op ingegaan wordt. Spiegelingen in deze driehoeken of hun lijnen geeft een groep, de Schwarz-spiegelingsgroep genaamd. Deze groep kent een ondergroep van index 2, namelijk de producten van even spiegelingen. Deze groep heet de *Schwarz-driehoeksgroep*, ofwel projectieve monodromiegroep, die voor rationaal gekozen coëfficiëntverschillen gelijk blijkt te zijn aan de monodromiegroep. Het feit dat dit monodromiegroepen zijn kan als volgt worden ingezien: begin in één van de driehoeken in het beeld. Spiegelen in één van de zijden van de driehoek is hetzelfde als het bovenhalfvlak spiegelen in één van de intervallen  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$  of  $(1, \infty)$ , ofwel analytisch voortzetten door één van de intervallen heen. Een tweede spiegeling geeft weer het complexe bovenhalfvlak terug. Als je niet beide keren door hetzelfde interval spiegelt, heb je echter om één van de singuliere punten heen analytisch voortgezet, wat opgevat wordt als monodromie. We noteren de projectieve monodromiegroep van de vergelijking met coëfficiëntverschillen  $\frac{1}{k}, \frac{1}{l}, \frac{1}{m}$  met  $\Gamma(k, l, m)$ .



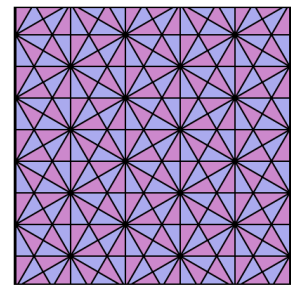
Hyperbolisch



Spherisch

## 4.2 Monodromiegroepen

Een aantal van deze monodromiegroepen is bekend. We beginnen met op te merken dat deze alleen eindig zijn als we in het spherische geval zitten: in de andere gevallen is uit het plaatje al duidelijk dat deze niet eindig zijn. Alle mogelijke spherische gevallen zijn ook gemakkelijk uit te schrijven. Men



Euclidisch

kan de drie getallen ordenen, en de kleinste moet dan 2 zijn. Hierna is het een kwestie van mogelijkheden afgaan.

$k$	$l$	$m$	$\Gamma(k, l, m)$
2	2	$n$	$D_n$ met $n > 1$
2	3	3	$A_4$
2	3	4	$S_4$
2	3	5	$A_5$

Het dient opgemerkt te worden dat deze keuze van coëfficiënten niet alle mogelijkheden voor  $\lambda + \mu + \nu > 1$  geeft, maar na wat werk blijkt dat dit op isomorfie na wel alles is. Zie voor een diepere behandeling hiervan section 5 Het euclidische geval geeft zogenaamde crystallografische groepen, waar hier niet op ingegaan wordt. In het hyperbolische geval zijn er twee gevallen waar we hier geïnteresseerd in zijn en die algemeen bekend zijn. Dit zijn:

$$\Gamma(2, 3, \infty) \cong \Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}), \Gamma(\infty, \infty, \infty) \cong \Gamma(2)$$

Hierbij is  $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$  de modulaire groep. Voor diegenen die hier niet bekend mee zijn, is  $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm I\}$ , de groep van inverteerbare matrices uitgedeeld naar scalaren. Er geldt verder dat  $PSL(2, \mathbb{Z})$  een index 2 normaaldeeler is van  $PGL(2, \mathbb{Z})$ .  $\Gamma(2)$  is de kern van de natuurlijke afbeelding  $PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Er geldt  $\Gamma/\Gamma(2) \cong S_3$ .

## 5 De Schwarz-lijst

Zoals al eerder genoemd is de lijst van algebraïsche oplossingen van de hypergeometrische gegeven door de lijst van Hermann Schwarz (1843-1921). Deze omvat niet alleen de gevallen waarvan ook de monodromiegroep is gegeven hierboven, maar ook een aantal andere gevallen die hier isomorf aan blijken te zijn. De originele afleiding is te vinden in [5]. We zullen eerst bewijzen dat het volstaat om te kijken naar coëfficiëntverschillen met bepaalde restricties

### 5.1 Gereduceerde tripels

**Stelling 2.** *Zij  $(\lambda', \mu', \nu') \in \mathbb{R}^3$ . Dan is er een tripel  $(\lambda, \mu, \nu)$  met  $0 \leq \lambda, \mu, \nu, \lambda + \mu, \mu + \nu, \lambda + \nu \leq 1$  zodat de hypergeometrische vergelijking met exponentverschillen  $(\lambda', \mu', \nu')$  dezelfde is als die met  $(\lambda, \mu, \nu)$ .*

*Bewijs.* We weten dat er een aantal operaties op de coëfficiënten zijn die de resulterende vergelijking bepalen. Er zijn twee soorten hiervan:

**Geval 1:** Uit hoofdstuk 2.3 weten we dat de substitutie  $\alpha \mapsto \alpha \pm 1$ , en zo ook voor  $\beta$  en  $\gamma$  de monodromie niet veranderen. Hierdoor kunnen we uitrekenen dat bijvoorbeeld een substitutie  $(\lambda, \mu, \nu) \mapsto (\lambda, \mu + 1, \nu + 1)$  kan worden gedaan door een substitutie  $\beta \mapsto \beta - 1$ . De transformatie  $(\lambda, \mu, \nu) \mapsto (\lambda + 1, \mu + 1, \nu)$  wordt voortgebracht door alle drie de coëfficiënten met 1 te verminderen. Als

laatste geldt dat  $(\lambda, \mu, \nu) \mapsto (\lambda + 1, \mu, \nu + 1)$  teweeg wordt gebracht door  $\beta \mapsto \beta - 1, \gamma \mapsto \gamma - 1$ . Het is ook mogelijk om de negatieve transformaties te maken. Dit komt er op neer dat transformaties  $(\lambda, \mu, \nu) \mapsto (\lambda + l, \mu + m, \nu + n)$  met  $l + m + n \in 2\mathbb{Z}$  toegestaan zijn.

**Geval 2:** De bekende oplossing van de hypergeometrische vergelijking in  $z = 1$  wordt gegeven door  $F(\alpha, \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z)$ , wat in te zien is doordat dit de rollen van  $z = 1$  en  $z = 0$  omdraait in het Riemann-schema. Omdat  $F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; 1 - z)$  een oplossing is van de vergelijking met het Riemann-schema

0	1	$\infty$
0	0	$\gamma - \alpha$
$1 - \gamma$	$-\gamma + \alpha + \beta$	$\gamma - \beta$

is  $(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; z)$  een oplossing van de vergelijking met het Riemann-schema dat impliciet werd genoemd bij  $F(\alpha, \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z)$ . Wegens de het uniek bepaald zijn van de hypergeometrische vergelijking door het Riemann-schema moeten deze dus bij dezelfde vergelijking horen, en dus zijn de geven de coëfficiëntverschillen dezelfde vergelijking. Als  $(\lambda, \mu, \nu)$  bij de bekende oplossing hoort, hoort  $(\lambda, -\mu, \nu)$  bij  $F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; 1 - z)$ , en dus mogen we deze substitueren. Hetzelfde geldt voor  $(-\lambda, \mu, \nu)$ , maar nu gebruikmakend van  $z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma - 1, \beta - \gamma - 1, 2 - \gamma; z)$ . Voor de substitutie naar  $(\lambda, \mu, -\nu)$  volstaat een simpele verwisseling van  $\alpha$  en  $\beta$ .

We kunnen dus de substituties  $(\lambda, \mu, \nu) \mapsto (\lambda + l, \mu + m, \nu + n), l + m + n \in 2\mathbb{Z}$  en  $(\lambda, \mu, \nu) \mapsto (\pm\lambda, \pm\mu, \pm\nu)$  maken. Stel nu dat  $(\lambda, \mu, \nu)$  een gegeven tripel is, en veronderstel zonder verlies van algemeenheid dat ze allemaal positief zijn. We kunnen nu verschuiven totdat er één of twee van de getallen tussen 0 en 1 zitten. Het geval dat het er twee zijn reduceert gemakkelijkerwijs tot  $0 \leq \lambda, \mu, \nu \leq 1$ . Als het er één is, pas dan een verschuiving en een tekenwissel toe. Het rest nu enkel nog om de paarsgewijze sommen kleiner dan 1 te krijgen. Omdat de coëfficiëntverschillen die we nu verkregen hebben al tussen de 0 en de 1 liggen, passen we alleen de transformaties  $x \mapsto 1 - x$  toe.

We onderscheiden weer een aantal gevallen. Als alle drie de getallen kleiner dan  $\frac{1}{2}$  zijn, zijn we klaar. Als er precies twee van de getallen groter of gelijk aan  $\frac{1}{2}$  zijn, kunnen op deze twee de transformatie toegepast worden, en zijn we klaar. Als het er slechts één is, pas dan op deze de transformatie toe, en op de grootste van de andere twee. Dit voldoet aan de eisen van  $0 \leq \lambda + \mu, \mu + \nu, \lambda + \nu \leq 1$ , en we zijn dus klaar.  $\square$

## 5.2 Het verband tussen $\Gamma(p, p, p)$ en $\Gamma(3, 2, 2p)$

We bekijken een driehoek met drie gelijke hoeken allen gelijk aan  $\pi/p$ . Een dergelijke driehoek kan in zes gelijke delen verdeeld worden door de middelloodlijnen te tekenen. De hoeken van de resulterende zes driehoeken zijn gelijk aan  $1/2\pi, 1/2\pi, \frac{\pi}{2p}$ . We willen het verband bekijken tussen deze driehoeken.

Het blijkt dat alles samenkomt in de volgende stelling:

**Stelling 3.** Zij  $\zeta$  de schwarz-afbeelding behorende bij  $\Gamma(p, p, p)$ , en  $\tilde{\zeta}$  de schwarz-afbeelding behorende bij  $\Gamma(3, 2, 2p)$ . Dan geldt  $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\phi(z))$ , en  $\Gamma(3, 2, 2p) \cong \Gamma(p, p, p) \rtimes S_3$ . Ook geldt, als  $HG$  de operator horende bij de hypergeometrische vergelijking is, dat  $HG_{\{p, p, p\}} = \phi^* HG_{\{3, 2, 2p\}}$

Hierbij is  $\phi^*$  de pullback van de functie gedefinieerd in subsection 3.5

*Bewijs.* Hierboven staat een voorbeelddriehoek opgedeeld in zes stukken, en het origineel van de middelloodlijnen in  $\mathbb{C}$ . Deze zijn doorgetrokken om aan te geven hoe deze zich voortzetten.

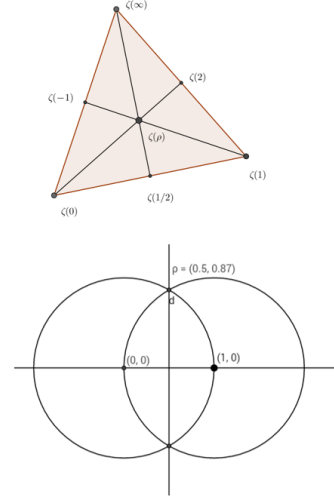
Het is duidelijk dat de transformaties  $z \rightarrow 1/z, z \rightarrow 1 - z$  de verschillende vlakken in elkaar overvoeren. Dit betekent dat  $\tilde{\zeta}\zeta^{-1} 6 : 1$  over  $\mathbb{C}$  is, en invariant onder de bovengenoemde transformaties. Deze functie is, omdat bijvoorbeeld  $\tilde{\zeta}\zeta^{-1}(\rho) = \infty$  zoals te zien in het plaatje, precies de  $\phi$ -functie.

Het feit dat  $\Gamma(3, 2, 2p) \cong \Gamma(p, p, p) \rtimes S_3$  volgt er uit dat  $\Gamma(3, 2, 2p)$  duidelijk als ondergroepen  $\Gamma(p, p, p)$  en  $S_3$  heeft. Het feit dat  $S_3$  een ondergroep is, volgt uit het feit dat binnen elk driehoek horende bij  $\Gamma(p, p, p)$  zes driehoeken horen waarin gespiegeld kan worden. Dit is  $D_6$ , alleen tellen enkel de orde 2 elementen mee, en dit is  $D_3 \cong S_3$ .

Bekijk  $\phi^* HG_{\{3, 2, 2p\}}$ . Deze vergelijking heeft een singulariteit in  $z$  als  $\phi^{-1}(z) \in \{0, 1, \infty\}$ , oftewel als  $z \in \{-1, 0, 1/2, 1, 2, \rho, \bar{\rho}, \infty\}$ . Rond  $\rho$  of  $\bar{\rho}$  geldt dat  $\phi(z) = z^3 + \dots$ , en dus heeft  $\phi^* HG_{\{3, 2, 2p\}}$  hier geen singulariteit omdat lokaal dus geldt. Hetzelfde geldt voor  $z \in \{-1, 1/2, 2\}$ , met  $\phi(z) = z^2 + \dots$ . Het blijkt dus dat  $\phi^* HG_{\{3, 2, 2p\}}$  hier helemaal geen singulariteiten heeft. De overgebleven singulariteiten zijn  $\{0, 1, \infty\}$ , en de exponenten komen na een kleine berekening ook goed uit. Uit het feit dat een dergelijke differentiaalvergelijking met gegeven exponenten uniek is, zie 1 volgt de stelling.  $\square$

De volgende stelling geeft een aardige toepassing van hypergeometrische functies, en in het bijzonder de Schwarz-afbeeldingen.

**Stelling 4.** De  $\phi$ -functie is de holomorfe inverse van de schwarz-afbeelding met exponentverschillen  $\lambda = 1 - \gamma = 1/3$  rond 0,  $\mu = \gamma - \alpha - \beta = 1/2$  rond 1, en  $\nu = \alpha - \beta = 1/2$  rond  $\infty$ .

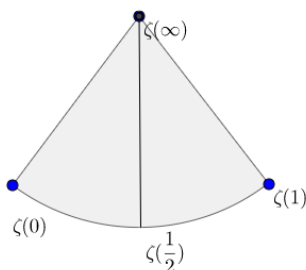


### 5.3 Het verband tussen $\Gamma(2p, q, q)$ en $\Gamma(p, q, 2)$

De stelling die in dit hoofdstuk wordt gegeven en bewezen lijkt in alles veel op de stelling uit de vorige paragraaf. Het enige verschil is nu dat het figuurtje anders is, en we ook monodromiegroepen die niet binnen onze restricties van  $\lambda, \mu, \nu \in \frac{1}{\mathbb{Z}}$  vallen kunnen bekijken.

**Stelling 5.** *Zij  $\zeta$  de schwarz-afbeelding behorende bij  $\Gamma(2p, q, q)$ , en  $\tilde{\zeta}$  de schwarz-afbeelding behorende bij  $\Gamma(p, q, 2)$ . Dan geldt  $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(f(z))$  voor een complexwaardige functie  $f$  die over het algemeen ook meerwaardig is, en  $\Gamma(3, 2, 2p) \cong \Gamma(p, p, p) \rtimes S_3$ . Ook geldt, als  $HG$  de operator horende bij de hypergeometrische vergelijking is, dat  $HG_{\{p,p,p\}} = f^* HG_{\{3,2,2p\}}$*

*Bewijs.* Dit gaat geheel analoog aan het bewijs van de vorige stelling. Het is hier wel makkelijker om uit het gegeven probleem de functie  $f$  af te leiden. Deze moet het halve bovenhalfvlak afbeelden op het hele bovenhalfvlak afbeelden. Ook moet gelden dat  $f(1) = 1, f(\infty) = \infty$ . Geen enkel ander punt moet op  $\infty$  worden afgebeeld. Ook moet gelden dat  $f(\frac{1}{2}) = 0, f(1) = 1$ . Daarnaast legt de symmetrie op dat  $f(1-x) = f(x)$ . Verder is gegeven dat de afbeelding 2:1 is, en dus lokaal een kwadraat. Dit alles geeft als uitkomst  $f(x) = 4(x - \frac{1}{2})^2$ .



### 5.4 Kleine stelling van Klein

**Stelling 6.** *Voor elk triplet coëfficiëntverschillen  $(\lambda, \mu, \nu)$  met algebraïsche oplossingen is er een rationale functie zodat  $HG_{(\lambda, \mu, \nu)} = f^* HG_{(\lambda', \mu', \nu')}$ , met  $(\lambda', \mu', \nu')$  uit het lijstje  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n})|_{n \in \mathbb{N}}, (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{k})|_{k=3,4,5}$*

Voor het bewijs van deze stelling is een klein lemma nodig

**Lemma 7.** *Zij  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  meromorf. Dan is  $f$  rationaal.*

*Bewijs.*  $f$  heeft slechts een eindig aantal polen in  $\mathbb{C}$ , en er is dus een polynoom  $p$  zodat  $g(x) = p(x)f(x)$  holomorf is op  $\mathbb{C}$ . Deze functie heeft dus een Laurentreeks  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$  rond 0 met oneindige convergentiestraal. Er moet gelden  $g(1/z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n}$  voor  $|1/z| > 0$  want dit is precies de machtreeks die eerder was bepaald. Wegens de uniciteit van machtreeksen moet deze machtreeks ook overeen komen voor  $1/z = 0$ , ofwel  $z = \infty$ . De machtreeks in  $z = \infty$  heeft slechts een eindig negatief deel want hier is  $f$  en dus  $g$  meromorf. Het negatieve

deel van die machtreeks komt overeen met het positieve deel van de machtreeks rond  $z = 0$  van  $g$  want zoals net bepaald komen de machtreeksen overeen, dus  $g$  is een polynoom. Hieruit volgt dat  $f(z) = \frac{g(z)}{p(z)}$  rationaal is.  $\square$

We zijn nu klaar om te beginnen aan het bewijs van de stelling.

*Bewijs.* De grote motivatie bij dit bewijs zijn de stellingen uit de voorgaande twee hoofdstukken. Het idee is nu dat we elke gewenste doorsnijding van de driehoeken kunnen maken, mits dit in een aantal equivalente driehoeken resulteert. Het geval waar een gelijkzijdige driehoek in zessen wordt gedeeld, of een gelijkbenige driehoek in tweeën is al behandeld. Het is intuïtief in te zien dat de laatste soort opdeling het in  $p$  delen opsplitsen van een hoek is. Het enige wat ons nog rest om te bewijzen is dan dat deze afbeelding rationaal is, en we weten via het vorige lemma dat het dus voldoende is om te bewijzen dat deze afbeelding meromorf is. In het bewijs van 5 werd een expliciete afbeelding geconstrueerd; dit zullen we hier niet doen, aangezien een algemeen argument volstaat.

Stel we hebben een driehoek, waarvan één van de hoeken  $\frac{p}{k}\pi$  is, met  $2p < k$ . Deze hoek gaan we in  $p$  delen splitsen. De afbeelding die de kleinere driehoeken op de grotere driehoek afbeeldt is  $p:1$ . Deze afbeelding is dus rond het hoekpunt de pullback van  $z^p$ . Dit is dus een holomorfe afbeelding. De samenstelling van deze afbeelding met de Schwarz-functie  $\zeta$  is dus een holomorfe afbeelding  $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  en dus meromorf, waarmee de stelling bewezen is.  $\square$

De lezer die een achtergrond heeft in de symmetrie zal wellicht in de lijst van eindige monodromiegroepen zoals eerder gegeven al gemerkt hebben dat deze precies overeenkomen met een andere bekende lijst. Dit zijn namelijk alle symmetrieën van  $\mathbb{R}^3$ . Preciezer gezegd zijn dit de eindige ondergroepen van  $SO(3)$ . Dit heeft een bekende klassieke analoog, want dit zijn precies de klassieke platonische lichamen. Dit zijn de diëders, de tetraeder, octaeder, en icoesaeder. De icoesaeder komt overeen met  $A_5$ , en dit is de symmetriegroep van een voetbal. Een volledige uitleg van deze groepen is te vinden in [8], onder andere in appendix A.

## 5.5 De lijst van Schwarz

Met de stelling die nu bewezen is, is het mogelijk om de hele lijst van Schwarz in te vullen. Deze geeft alle mogelijke coëfficiëntverschillen die een eindige monodromiegroep opleveren op equivalentie na. De eerste 4 zijn de gevallen die origineel als eindige gevallen werden gevonden bij de vastlegging van  $\lambda, \mu, \nu \in 1/\mathbb{N}$ . De andere zijn uit deze elementaire gevallen opgebouwd; het is aan het oppervlak te zien uit welke, en hoe veel.

$\lambda$	$\mu$	$\nu$	Area/ $\pi$
1/2	1/2	1/n	1/n
1/2	1/3	1/3	1/6
1/2	1/3	1/4	1/12
1/2	1/3	1/5	1/30
1/2	1/2	p/n ( $\leq 1/2$ ) <sup>3</sup>	p/n
2/3	1/3	1/3	2/6
2/3	1/4	1/4	2/12
2/5	1/3	1/3	2/30
2/3	1/5	1/5	2/30
1/2	2/5	1/5	3/30
3/5	1/3	1/5	4/30
2/5	2/5	2/5	6/30
2/3	1/3	1/5	6/30
4/5	1/5	1/5	6/30
1/2	2/5	1/3	7/30
3/5	2/5	1/3	10/30

Het enige wat nu nog rest is aantonen dat deze lijst volledig is. Dat deze lijst alle gevallen opgebouwd uit de 4 elementaire gevallen bevat is een feit wat wordt overgelaten aan de lezer. Ook zijn dit alle toelaatbare gevallen opgebouwd uit  $1/2, p/3, p/4, p/5$  voor verschillende  $p \in \mathbb{N}_{>0}$ . Het enige wat dus nagegaan moet worden is dat er geen andere coëfficiëntverschillen kunnen voortkomen.

Als er ergens een factor  $p/6$  voorkomt, dan is dit op te delen in een aantal keer de driehoek  $(1/k, 1/l, 1/6)$  via de stelling van Klein. Als  $k$  en  $l$  niet beide 2 zijn, komt dit niet in de lijst voor. Dan moet echter gelden dat  $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ , dus de groep is op een factor na het euclidisch geval of hyperbolische geval. Met hetzelfde argument geven de nog kleinere coëfficiëntverschillen allemaal hyperbolische driehoeken, en is de lijst dus volledig.

## 6 Euler-integraal

Naast de differentiaalvergelijking, het schema van lokale exponenten, en de oplossingen in de vorm van machtreeksen, kennen de hypergeometrische functies nog een vorm: de oplossingen geschreven als integraal.

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt$$

Het blijkt dat we, door een kleine abstractie toe te passen, Riemann-oppervlakken in ons verhaal kunnen betrekken. We zullen ook proberen om met deze inzichten, en alles wat hiervoor bekeken is, een verband tussen twee families van Riemann-oppervlakken te onderzoeken. Het is uiteindelijk niet mogelijk gebleken een dergelijk verband te vinden binnen het bereik van deze tekst. Hierdoor

zal het begrip van de Jacobiaan wel geïntroduceerd worden, maar weinig worden gebruikt. Ook blijft het onduidelijk of er een verband bestaat.

In dit hoofdstuk wordt uitgegaan van bekendheid met complexe variëteiten, en een intuïtief inzicht in de theorie hiervan. Voor een introductie in gladde variëteiten: zie [9]. De holomorfe setting die hier gebruikt wordt is slechts een kleine aanpassing hiervan.

## 6.1 Holomorfe differentiaal op Riemann-oppervlakken

**Definitie 5.** Zij  $m_j, j = 1, 2, 3, 4$  gehele getallen, onderling ondeelbaar,  $\sum m_j = 2m$ . Bekijk  $y = \prod (x - z_j)^{m_j}, \omega = \frac{dx}{y}$ . Dan is  $\omega$  een holomorfe meerwaardige differentiaal op  $\mathbb{C}$ . Een integraal van de vorm  $\int \omega$  met  $\omega$  van deze vorm heet een hypergeometrische integraal.

Er blijven nu nog twee vragen over: over wat voor paden kunnen hypergeometrische integralen bekeken worden, en hoe gaat men met de meerwaardigheid om? We zullen eerst kijken naar de meerwaardigheid. Hiervoor is het handig om de  $\omega$  te bekijken als een differentiaal op een Riemann-oppervlak.

**Definitie 6.** Een Riemann-oppervlak is een 1-dimensionale complexe (holomorfe) variëteit, in ons geval altijd compact.

Vergelijkingen van de vorm  $y^m = \prod (x - z_i)^{m_i}$  met  $\sum m_j = m$  geven Riemann-oppervlakkingen als oplossing. Dit zijn oppervlakken die  $m$ -voudig boven  $\mathbb{P}$  liggen, behalve bij de punten  $z_i$ . In wat volgt zullen altijd vergelijkingen met nulpunten  $0, 1, z, \infty$  bekeken worden voor een  $z \in \mathbb{P} - \{0, 1, \infty\}$ . In het geval  $m = 2$  zijn alle Riemann-oppervlakken isomorf aan een oppervlak van deze vorm. Dit gaat enigszins analoog aan het verhaal over  $X(4)$ . Zie voor een vollediger uitwerking [10]. Een Riemann-oppervlak voortkomend uit een vergelijking van de vorm  $y^2 = x(x-1)(x-z)$  heet een kromme van geslacht 1, en de vastlegging van een basispunt maakt dit een *elliptische kromme*. De keuze van dit basispunt is voor deze tekst niet van belang. Elliptische krommen kunnen ook gezien worden als het complexe vlak modulo een rooster, dus  $\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau}$ . Deze  $\tau$  kan berekend worden via de hypergeometrische integraal: er geldt namelijk

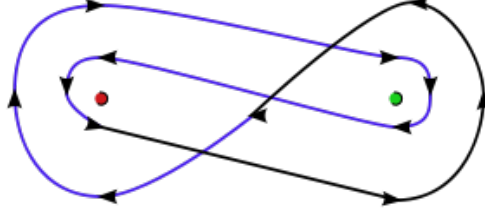
$$\tau = \frac{\int_1^z \omega}{\int_0^1 \omega}$$

Deze integraal kan men zinnig maken door een kant van de kromme te kiezen, of door de differentiaal te zien als éénwaardig gedefiniëerd op het Riemann-oppervlak. Ter illustratie is het dan handig om in te zien dat  $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$ . Hierbij is  $dx$  natuurlijk een coördinaat in  $\mathbb{C}$ , en  $d(\sqrt{x})$  een coördinaat op een Riemann-oppervlak. Het is bij de berekening van  $\tau$  wel belangrijk om bij beide integralen dezelfde kant van de kromme te bekijken.



## 6.2 Een ander contour

Het is mogelijk de hypergeometrische functie te beschrijven met een integraal over een ander pad dan hierboven genoemd. Schrijf weer  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$  voor de voortbrengers van  $\pi_1(Z)$ , met  $Z = \mathbb{P} - \{0, 1, \infty\}$ . Definieer nu het *Pochhammer-contour* als  $P = [\gamma_0, \gamma_1] = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_0^{-1} \gamma_1^{-1}$ . Deze kan getekend worden als:

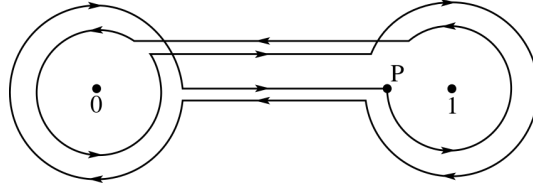


Een interessant feit over deze contour, is dat deze niet-triviaal is in  $\pi_1(Z)$ , maar wel in de homologiegroep  $H_1(Z)$ .

We willen nu de integraal

$$\int_P t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt$$

uitrekenen. Hiervoor is het prettig om de Pochhammer-contour op een andere, suggestieve wijze te schrijven:



Hier is te zien dat het contour een paar keer het interval  $(0, 1)$  aflegt, en telkens een om een punt heen gaat. Hier is de theorie van monodromie toe passen. In de looprichting van de eenheidscirkel mee om  $z = 0$  heen krijgt de integrand een factor  $e^{2\pi i \beta}$  mee, en om  $z = 1$  mee is deze factor  $e^{2\pi i(\gamma-\beta)}$ . In de andere richting rond een punt gaan levert deze factor met een negatieve macht op. In totaal geeft dit:

$$\begin{aligned} & (-e^{2\pi i(\gamma-\beta)} + e^{2\pi i(\gamma-\beta)} e^{2\pi i \beta} - e^{2\pi i(\gamma-\beta)} e^{2\pi i \beta} e^{-2\pi i(\gamma-\beta)}) \\ & \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha+1} dt \\ & = (1 - e^{2\pi i(\gamma-\beta)} + e^{2\pi i \gamma} - e^{2\pi i \beta}) \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt \end{aligned}$$

Dit is op een factor na gelijk aan de hypergeometrische functie. Dit geeft een andere definitie van de hypergeometrische functie. Een keuze van een ander beginpunt op de contour geeft een factor verschil.

### 6.3 Het verband tussen $C_{\bar{z}}$ en $E_{\bar{z}}$

Het originele doel van deze tekst was om een verband te beschrijven tussen  $C_{\bar{z}}$  en  $E_{\bar{z}}$ , of anders gezegd een verband tussen  $\mathcal{M}_2$  en  $\mathcal{M}$ , waar  $\mathcal{M}_2$  de moduli-ruimte is van elliptische krommen, en  $\mathcal{M}$  die van krommen van de vorm  $y^{12} = x(x-1)^5(x-z)^7$ . Dat hier een connectie zou kunnen zitten is niet direct duidelijk, maar het wordt aannemelijker zodra men opmerkt dat de eerste ruimte hoort bij de hypergeometrische functie met monodromiegroep  $\Gamma(2, 3, \infty)$ , en de andere die met  $\Gamma(\infty, \infty, \infty)$ . Deze zijn isomorf aan  $\mathbb{H}/\Gamma(2)$  en  $\mathbb{H}/\Gamma$  respectievelijk, en tussen deze ruimten bestaat een duidelijk verband. Hieronder is dit schematisch weergegeven:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2 & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{H}/\Gamma \\ \downarrow ? & & \downarrow \phi \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{H}/\Gamma(2) \end{array}$$

Het is echter niet gelukt tot een dergelijk resultaat te komen. Er zal dus alleen worden beschreven wat voor theorie er bekeken is bij deze poging.

### 6.4 Een klein intermezzo over moduli-ruimten

Een moduli-ruimte is een ruimte met als punten equivalentieklassen van algebraïsch-meetkundige structuren. Hoewel met dit concept in de rest van de tekst losjes wordt omgegaan, is het wel handig om op te merken dat de theorie over deze ruimten veel dieper gaat. Zo houden we ons bijvoorbeeld bezig met zogenaamde “grofte” moduli-ruimten, terwijl men graag met “fijne” moduli-ruimten werkt. Het algemene idee is om een ruimte van objecten, bijvoorbeeld algebraïsche krommen, te bestuderen aan de hand van een zo klein mogelijke invariant. Een probleem hierbij is dat sommige krommen, bijvoorbeeld  $y^2 = x^2(x-1)$ , niet-triviale automorfismen hebben, wat de zaak compliceert.

Enkele moduli-ruimten zijn wel bekend. Zo is  $X(n)$ , zoals eerder besproken, de moduli-ruimte van  $n$ -tallen onder projectieve equivalentie. Deze ruimte is wel een fijne moduli-ruimte. De ruimte van elliptische krommen is via de  $j$ -invariant gelijk aan  $\mathbb{P} - \{0, 1, \infty\}$ . Deze  $j$ -invariant is gelinkt aan de  $\phi$ -functie die we voor  $X\{4\}$  gebruikten. Dit geeft ook aan waarom deze moduli-ruimten praktisch hetzelfde zijn. In het algemeen geldt dat, als  $\mathcal{M}_g$  de moduli-ruimte is van krommen van genus  $g$ , dat  $\dim(\mathcal{M}_g) = 3g - 3$ . Hierbij moet opgemerkt worden dat  $g = 0, 1$  hiervan uitgezonderd zijn.  $\dim(\mathcal{M}_0) = 0$ , want dit is alleen de Riemann-bol, en  $\dim(\mathcal{M}_1) = 1$  zoals hierboven beschreven.

Een ander voorbeeld van een moduli-ruimte met niet-triviale automorfismen is  $X\{3\}$ . Deze is namelijk gelijk aan  $X(3)/S_3$ , en  $X(3)$  is al een enkel punt. Dit punt heeft dus 6 automorfismen. De term voor een ruimte die, analoog aan een manifold, lokaal homeomorf is aan  $\mathbb{R}/G$  voor  $G$  een eindige ondergroep van  $GL(\mathbb{R}^n)$ , heet een *orbifold*. Dezelfde definitie gaat op met  $\mathbb{C}/G$ . Hier wordt verder niet op ingegaan, omdat dit geen toepassing heeft in deze tekst.

## 6.5 De Jacobiaan

De moderne aanpak van Riemann-oppervlakken gaat vaak via de zogenaamde *Jacobiaan*. Dit is een object wat bij een oppervlak hoort, met een aantal handige eigenschappen. Het nut hiervan wordt onderschreven door de volgende stelling van Torelli, waar  $J(C)$  voor de Jacobiaan van een oppervlak  $C$  wordt geschreven.

**Stelling 7.**

$$C_1 \cong C_2 \leftrightarrow J(C_1) \cong J(C_2)$$

De diepere theorie hierachter ligt niet in binnen het bereik van deze tekst. Ook het bewijs van deze stelling zal hier niet gegeven worden.

De algemene definitie luidt als volgt:

**Definitie 7.**

$$J(C) = \frac{(\Omega^1(C))^*}{H_1(C, \mathbb{Z})}$$

waarbij  $(\Omega^1(C))^*$  de duale ruimte van de vectorruimte van differentiaalvormen is.  $H_1(C, \mathbb{Z})$  wordt hierin afgebeeld door  $\gamma \mapsto (\int_\gamma : \Omega^1(C) \ni \omega \mapsto \int_\gamma \omega)$

Uit de theorie van Riemann-oppervlakken volgt dat  $\Omega^1(C) \cong \mathbb{C}^g$ , waarbij  $g$  de genus van het oppervlak is. Ook is bekend dat  $H_1(C, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ . Dit laatste is makkelijk in te beelden door een lus te maken van elk gat naar buiten, en tussen elk paar gaten. Er volgt dus dat  $J(C) \cong \frac{\mathbb{C}^g}{\mathbb{Z}^{2g}}$ .

De inbedding van een kromme in zijn Jacobiaan gaat via de Abel-Jacobi-afbeelding. Hiervoor is het nodig een punt  $p \in C$  te kiezen, en een basis  $\omega_1, \dots, \omega_g$  van  $\Omega^1(C)$ . De afbeelding wordt dan gegeven door

$$u : p \mapsto (\int_{p_0}^p \omega_1, \dots, \int_{p_0}^p \omega_g) / \Lambda$$

Waar  $\Lambda$  het rooster voortgebracht door de  $\int_{\gamma_j} \omega_i$  is, waarbij de  $\gamma_j$  een basis voor  $H_1(C, \mathbb{Z})$  vormen. Deze afbeelding is welgedefinieerd, want als je een ander pad van  $p_0$  naar  $p$  kiest, is het verschil een gesloten kromme, en dus een element van  $H_1(C, \mathbb{Z})$ , en dit valt weg door het uitdelen naar  $\Lambda$ .

Het volgende is de stelling van Abel:

**Stelling 8.** *De afbeelding  $u$  is injectief.*

Van het bewijs wordt enkel een kleine schets gegeven. Een uitgebreidere versie in het geval van een elliptische kromme is te vinden in [11].

*Bewijs.* Het bewijs rust op het vinden van een meromorfe functie met bepaalde eisen, die vervolgens niet kan bestaan. Preciezer: stel  $u(p) = u(q), p \neq q$ . Dan is er een functie  $F$  met een pool in alleen  $p$ , en een nulpunt in alleen  $q$ . Echter, er bestaat per aanname een differentiaalvorm  $\omega$  die identiek ongelijk 0 is. Dan geldt, als  $\gamma$  een pad is rond  $p$  waar  $q$  niet binnen ligt, dat

$$\int_\gamma F(z)\omega \neq 0, \int_\gamma F(z)\omega = 0$$

waarbij eerst over de binnenkant, en daarna over de buitenkant van  $\gamma$  wordt geïntegreerd. Dit is een tegenspraak, dus moet gelden  $p = q$ .  $\square$

Zoals al eerder gezegd gaat de theorie achter deze Jacobianen te ver voor deze tekst. De Jacobianen  $J(C)$  zijn zogenaamde Abelse variëteiten: dit zijn projectieve algebraïsche variëteiten die een groepsstructuur toelaten. Hier zijn veel stellingen over bekend, maar ook nog grote vraagstukken. Zo is een moeilijk vraagstuk binnen deze theorie welke Abelse variëteiten als Jacobiaan voorkomen.

## 7 Elliptische krommen

Bij het vinden van het verband tussen de twee families van Riemann-oppervlakken, bleek het probleem vooral te zijn dat er wel veel theorie bekend is over de elliptische krommen, maar over de familie van krommen met geslacht  $g = 11$  valt nagenoeg niks te vinden en niks te zeggen. We zullen dan hier twee voorbeelden hiervan geven; van de twee eigenschappen die genoemd worden is over oppervlakken met een hoger geslacht nagenoeg niks bekend.

### 7.1 De Jacobiaan van een elliptische kromme

Over het algemeen is de Jacobiaan van een oppervlak niet simpel te berekenen, maar bij het geval  $g = 1$ , een elliptische kromme, is dit wel mogelijk. Het is uit de definitie, en het feit dat  $\pi_1$  en  $\pi_2$  lineair onafhankelijk zijn, al duidelijk dat

$$J(E) = \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\pi_1 + \mathbb{Z}\pi_2}$$

en via de stelling van Abel weten we dat  $E \hookrightarrow J(E)$ . Het is nu nog enkel nodig de stelling van Jacobi te bewijzen:

**Stelling 9.** *De Abel-Jacobi-afbeelding  $u : E \rightarrow J(E)$  is surjectief.*

*Bewijs.*  $u$  is per definitie holomorf.  $E$  is een compacte open verzameling, en omdat  $u$  holomorf en dus continu is, is  $u(E)$  compact en open. Zie Stelling 4.4 van [2] voor het bewijs dat holomorfe afbeeldingen open afbeeldingen zijn. Echter,  $J(E)$  is Hausdorff, en dus impliceert de compactheid van  $u(E)$  geslotenheid.  $u(E)$  is dus clopen, en omdat  $J(E)$  samenhangend is, moet gelden  $u(E) = J(E)$ .  $\square$

Hiermee is bewezen dat voor een elliptische kromme geldt dat  $E \cong J(E)$ . Dit is voor een algemeen Riemann-oppervlak niet zo. In het bewijs worden een aantal aannames gedaan, zoals de Hausdorff-eigenschap van  $J(E)$ , en diens samenhangendheid. Deze volgen uit de diepere theorie van deze Abelse variëteiten, en worden hier niet nader verklaard.

## 7.2 de $j$ -invariant

Een handige invariant van een equivalentieklasse van elliptische krommen is de zogenaamde  $j$ -invariant. Deze wordt vaak gedefinieerd als

$$j(\omega_1 : \omega_2) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

waarbij de elliptische kromme in de Weierstrass-normaalvorm geschreven wordt als  $y^2 = 4z^3 - g_2(z) - g_3$ , en  $\omega_1, \omega_2$  de perioden van de elliptische kromme. In deze algemene vorm wordt aangenomen dat deze vergelijkingen nulpunten heeft in  $e_1, e_2, e_3$  en  $\infty$ . Deze kiezen wij uiteraard als  $0, 1, z, \infty$ . Een kruisverhouding hiervan wordt dan  $\lambda = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2} = z$ . Er zijn zoals bekend zes van deze kruisverhoudingen, met als invariant hiervan de  $\phi$ -functie, bekend uit het verhaal over  $x\{4\}$ . Deze blijkt na een kort berekening op een constante factor na gelijk te zijn aan de  $j(\lambda)$  van een elliptische kromme. Voor een elliptische kromme  $y^2 = x(x-1)(x-z)$  geldt dus dat  $j = \phi(z)$ .

## Referenties

- [1] G. Heckman, Tsinghua Lectures on Hypergeometric Functions (lecture notes), 2015
- [2] E. Stein & R. Shakarchi, Complex Analysis, 2003, ISBN: 9781400831159
- [3] G. Heckman, Introduction to Riemannian geometry (lecture notes), 2017
- [4] M. Yoshida, 'Hypergeometric functions, my love', 1997, ISBN:3528069252
- [5] H.A. Schwarz, Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1873  
<http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PID=GDZPPN002155206&physid=phys311#navi>
- [6] G.F.B. Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische hypergeometrische Reihe  $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$  darstellbaren Funktionen (1857), Gesammelte mathematische Werke, Teubner, Leipzig, 1892  
<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/PFunct/PFunct.pdf>
- [7] A.H.M. Levelt, Hypergeometric Functions, PhD, Universiteit van Amsterdam, 1961.
- [8] H. Weyl, Symmetry, 1952,
- [9] L. Tu, An introduction to Manifolds, 2011, ISB: 9781441974006
- [10] C. Clemens, A scrapbook of complex curve theory, 1980, ISBN:0821833073
- [11] S. Gmira, Abel-Jacobi theorem, 2015, arXiv:1507.05345