Inhaltsverzeichnis

1 Signaturen, Systeme und Homomorphismen

1.1 Homomorphismus

Definition 4 (Def) Zwei algebraische Systeme mit selber Signatur Σ $h : A \to B$ Familie totaler Abbildungen.

Wenn f^A für x definiert ist, dann muss f^B für $h^w(x)$ definiert sein. $[f^B(h^w(x)) = h^v(f^A(x))]$

Notation 5 (Hom. als Familie von Abbildungen ($\underline{\textbf{h}}$))

Proposition 6 (Identity) Die Identität ist ein Homomorphismus. $id : A \to A$.

Proposition 7 (Komposition) Wenn $f : A \to B$ und $g : B \to C$ homomorphismen, dann ist $g \circ f$ wieder ein Homomorphismus.

Fact 8 (Eigenschaften von Identitäten und Kompositon) Identitäten kürzbar und Klammern 'verschiebbar' (Assoziativität).

1.2 Kategorien

Definition 9 (Def) $C = (O, M, id, \circ)$ [Objects, Morphism-Sets, Identitäten, Kompositionen]
Identitäten kürzbar und Klammern 'verschiebbar' (Assoziativität).

Definition 12 (Kategorien von Mengen & Abbildungen) $C = (O^{Set}, M^{Set}, id^{Set}, \circ^{Set})$ [Die Klasse aller Mengen, die Menge aller Abbildungen, die identitätische Abbildung, Kompositionen von Abbildungen]

Definition 13 (Kategorien algebraischer Systeme) $Sys(\Sigma)$ ist Kategorie aller Σ Systeme und Homomorphismen zwischen diesen.
$\underline{\text{Sys}}(\Sigma)$ die Kategorie aller Σ Systeme in der alle Operationsnamen als totale Funktionen interpretiert werden und alle Homomorphismen zwischen diesen.

1.3 Derived Systems

1.3.1 Subsysteme

Subsysteme

Definition 15 (Def) Schwaches Subsystem ($B \subseteq A$), wenn:

1. Die Trägermengen in Teilmengenrelation $B_s \subseteq A_s$
2. Wenn Operation im Untersystem definiert ist und y liefert, muss sie auch im "drüber liegendenSSystem sein und y liefern.

Volles Subsystem $B \subseteq_f A$, wenn schwaches Untersystem und:

1. $f^A(x) = y$ definiert und $x, y \in B_s$ dann $f^B(x) = y$

Geschlossenes Subsystem $B \subseteq_c A$, wenn volles Untersystem und:

1. $f^A(x) = y$ definiert und $x \in B_s$ dann $y \in B_s$

Proposition 16 (Geschlossene Subsysteme von totalen Systemen) Jedes geschlossene Subsystem eines totalen Systems ist total.

Intersection (Schnitt) und Union (Vereinigung)

Definition 17 Schnitt Sei $\mathfrak{B} = \left(B^i \subseteq A\right)_{i \in I}$ ein nicht leere Schnitt. Der Schnitt $\bigcap \mathfrak{B}$ ist definiert als

1. Sortenweiser Schnitt über die Trägermengen ($s \in S$: $(\bigcap \mathfrak{B})_s = \bigcap_{i \in I} B^i_s$).
2. Alle Operationen zum sortenweisen Schnitt der Trägermengen ($f \in O$: $f^{\bigcap \mathfrak{B}} = \bigcap_{i \in I} f^{B^i}$).

Proposition 18 Eigenschaften der Schnitte von Subsystemen

1. $\bigcap \mathfrak{B}$ ist ein algebraisches System. D.h. die Operationen sind wohldefiniert.
2. Der Schnitt ist selber Subsystem von A ($\bigcap \mathfrak{B} \subseteq A$)
    a) *Notiz CT:* Der Schnitt über volle Untersysteme ist wieder voll
    b) *Notiz CT:* Der Schnitt über geschlossene Untersysteme ist wieder geschlossen
3. Der Schnitt ist Untersystem jedes B^i
4. Für alle Subsysteme X von B^i gilt, dass sie Untersystem von $\bigcap \mathfrak{B}$ sind.

Definition 20 Vereinigung Sei $\mathfrak{B} = \left(B^i \subseteq A\right)_{i \in I}$ eine nicht leere Vereinigung. Die Vereinigung $\bigcup \mathfrak{B}$ ist definiert als

1. Sortenweise Vereinigung der Trägermengen ($s \in S$: $(\bigcup \mathfrak{B})_s = \bigcup_{i \in I} B^i_s$).
2. Alle Operationen zur sortenweisen Vereinigung der Trägermengen ($f \in O$: $f^{\bigcup \mathfrak{B}} = \bigcup_{i \in I} f^{B^i}$).

Proposition 21 Eigenschaften der Vereinigungen von Subsystemen

1. $\bigcup \mathfrak{B}$ ist ein algebraisches System. D.h. die Operationen sind wohldefiniert.
2. Die Vereinigung ist selber Subsystem von A ($\bigcup \mathfrak{B} \subseteq A$)
3. B^i ist Untersystem der Vereinigung ($\bigcup \mathfrak{B}$) [Unterschied zum Schnitt!]
4. Für alle Obersysteme X von B^i gilt, dass $\bigcup \mathfrak{B}$ Untersystem von X ist [Unterschied zum Schnitt!].

Verband

Proposition 23 Verband von Subsystemen Die Menge von (i) allen (schwachen), (ii) allen vollen und (iii) allen geschlossenen Untersystemen ist ein kompletter Verband bis auf Inklusion.

Abschluss Operatoren (Closure Operators) & leere Systeme

Collorary 24 Abschluss Operatoren $B = (B_s \subseteq A_s)_{s \in S}$, dann gibt es ein kleinstes volles ($\lceil B \rceil_s^f$) und kleinstes geschlossene ($\lceil B \rceil_s^c$) Subsystem, dass B enthält.

Definition 25 Leeres System Das leere System $\mathcal{I}$ besteht nur aus leeren Komponenten.

Proposition 26 Leeres System als Untersystem

1. $\mathcal{I}$ ist immer das kleinste Subsystem
2. $\lceil \mathcal{I} \rceil^f$ ist das kleinste volle Subsystem
3. $\lceil \mathcal{I} \rceil^c$ ist das kleinste geschlossene Subsystem

Proposition 27 Eigenschaften von Abschluss Operatoren $x \in \{c, f\}$

1. $B \subseteq \lceil B \rceil^x$
2. $B \subseteq B' \implies \lceil B \rceil^x \subseteq \lceil B' \rceil^x$
3. $\lceil \lceil B \rceil^x \rceil^x = \lceil B \rceil^x$

Proposition 28 Endlich generierte Systeme A ist endlich erzeugt, wenn $A = \rceil G \rceil^c$ für eine endlich generierte Familie von Mengen $G = (G_s \subseteq A_s)_{s \in S}$

Inklusions-Homomorphismus

Proposition 29 Inklusions-Homomorphismus $A \subseteq B$, der Inklusions-Morphismus $\subseteq: A \to B$ ist definiert für $a \in A_s$ durch $\subseteq (a) = a$

Das Bild eines beliebigen Homorphismus $h : A \to B$ ist ein Untersystem von B.

Homomorphe Bilder

Definition 30 Bild eines Homomorphismus Trägermengen und Operationen werden abgebildet.

Proposition 31 Bild eines Homomorphismus Das Bild eines Homomorphismus ist ein Untersystem.

Proposition 32 Bilder von Kompositionen $h : A \to B$ and $k : B \to C \quad k \circ h(A) \subseteq k(B)$

Definition 33 Volle und geschlossene Homomorphismen $h : A \to B$ ist voll bzw. geschlossen wenn das Bild $(h(A))$ ein volles bzw. geschlossenes Untersystem der Co-Domain B ist: $h(A) \subseteq^x B \quad x \in \{f, c\}$

Jeder volle Homomorphismus von einem totalen System A in ein System B ist geschlossen.

Definition 35 Konstruktion von Abschlüssen Sei A System und $(B_s \subseteq A_s)_{s\in S}$ Familie von Teilmengen auf den Trägermengen. Die Operatoren sind dazu da, um ein Untersystem geschlossen/voll zu machen. Wir definieren

1. Konstanten dazu: $\lceil B \rceil^0 = B \cup \left(\left\{y \in A_s \; :: \; f^A(*) = (p, y, q), \; f \in O_{\epsilon,v}\right\}\right)_{s\in S}$
2. Notwendige Funktionswerte:
   $\lceil B \rceil^{i+1} = \left(\lceil B \rceil^i_s \cup \left\{y \in A_s \; :: \; f^A(x) = (p, y, q), \; f \in O_{w,v}, \; x \in \left(\lceil B \rceil^i\right)^w, \; |w| \geq 1\right\}\right)_{s\in S}$
3. 1 und 2 zusammen: $\lceil B \rceil^* = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} \lceil B \rceil^i$
4. Macht es voll: $\widehat{B} = \left(B, \; \left(f^A \cap (B^w \times B^v)\right)_{f\in O_{w,v}}\right)$
5. Macht es geschlossen (3 und 4 zusammen): $\widetilde{B} = \widehat{\lceil B \rceil^*}$

Proposition 36 Konstruktion von Abschlüssen $\lceil B \rceil^f = \widehat{B}$ und $\lceil B \rceil^c = \widetilde{B}$

Lemma 37 Abschlüsse und Homomorphismen $h : A \to C$ und $B_s \subseteq A_s$ Familie von Teilmengen der Trägermengen von A. Dann gilt: $h(\lceil B \rceil^c) \subseteq \lceil \underline{h}(B) \rceil^c$

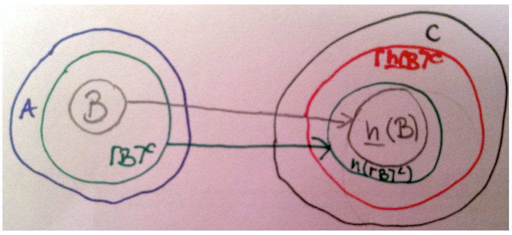


Abbildung 1.1: Abschlüsse und Homomorphismen

1.3.2 Quotient

Kongruenz

Definition 38 Kongruenzrelation Äquirel &: $x \equiv^w x'$, $f^A(x) = y, f^A(x') = y' \Rightarrow y \equiv^v y'$

Proposition 39 Schnitt von Kongruenzen $(\equiv_i)_{i \in I}$ auf A: $\bigcap_{i \in I} \equiv^i$ ist Kongruenz auf A.

Verband

Corollary 40 Verband von Kongruenzen Die Menge $\mathfrak{C}^A = \{\equiv :: \equiv \text{ ist Kongruenz auf } A\}$ von Kongruenzrelationen auf einem algebraischen System A ist ein vollständiger Verband bis auf Inklusion.

Abschluss Operator

Corollary 41 Abschluss Operator Kleinste Kongruenz $\lceil r \rceil_A$ auf A die r enthält.

Kernel

Definition 42 Kern eines Homomorphismus Kern $h^{\equiv}$ beinhaltet all die Elemente, die durch den Homomorphismus h auf das Gleiche abgebildet werden. $h_s^{\equiv} = \{(a_1, a_2) :: h_s(a_1) = h_s(a_2)\}$

Proposition 43 Kern $h^{\equiv}$ ist eine Kongruenz auf der h-Domain.

Proposition 44 Kern einer Komposition $m^{\equiv} \subseteq (n \circ m)^{\equiv}$

Quotient

Definition 45 Quotient Gegeben System A und $\equiv$ auf A. Der Quotient $A_{\equiv}$

1. Kongruente Elemente der Trägermenge in eine Äquivalenzklasse schmeissen.

2. $f^{A_{|\equiv}}([x]^w) = [y]^v$, wenn $f^A(x) = y$

Proposition 46 Quotient von totalen Systemen Jeder Quotient eines totalen Systems ist total.

Natürlicher Homomorphismus

Proposition 47 Natürlicher Homomorphismus Bildet Elemente der Trägermengen in ihre jeweilige Äquivalenzklasse ab ($\equiv$: $A \to A_{|\equiv}$).

Proposition 48 Natürlicher Homomorphismus Jeder natürlicher Homomorphismus ist geschlossen.

Proposition 49 Kongruenz Theorem $\equiv^1$ und $\equiv^2$ sind Kongruenzen auf A, sodass $\equiv^1 \subseteq \equiv^2$, dann gibt es einen Homomorphismus $\equiv^{2-1}$: $A_{|\equiv^1} \to A_{|\equiv^2}$ mit $\equiv^{2-1} \circ \equiv^1 = \equiv^2$.

Operatoren auf Relationensfamilien

Proposition 50 Operatoren auf Relationensfamilien

1. Symmetrie

2. Reflexivität

3. $r_s^1 = r_s$

4. Rekursiver Verkettung
5. $r^* =$ Vereinigung von 1 bis 4
6. $c^0(r)_s = r_s$
7. $\mathrm{c}^{i+1}(r)_s = \mathrm{c}^i(r)_s \cup \left\{(y_i, y_i') :: f \in O_{w,psq}, i = |p| + 1, x \left(\mathrm{c}^i(r)\right)^w x', f^A(x) = y, f^A(x') = y'\right\}$
8. Vereinigung von 6 und 7

Lemma 51

1. r^* ist Familie transitiver Relationen.
2. $c^*(r)$ erfüllt Kongruenzbedingungen (Definition 38)

Lemma 52 Wenn eine Relation $r \subseteq A \times A$ reflexiv ist und $r \subseteq s \subseteq A \times A$, dann ist s auch reflexiv.

Lemma 53 Gegeben symmetrische Relation r, dann $c^*(r)$ und r^* auch symmetrisch.

Lemma 54 Gegeben Relation r auf einem totalen A. R erfüllt Kongruenzbedingung (Def 38). Dann erfüllt auch r^* die Kongruenzbedingung.

Proposition 55 Konstruktion der generierten Kongruenz A total und r, dann $\lceil r \rceil = \left(c^*\left(sym\left(r \cup r^0\right)\right)\right)^*$.

1.4 Mono, Epi und Isomorphismen

1.4.1 Isomorphismus

Definition 57 Sektion, Retraktion und Isomorphismus Morphiums $m : A \to B$ in einer Kategorie C.

1. m ist Sektion wenn $m^{-1} \circ m = id_A$
2. m ist Retraktion wenn $m \circ m^{-1} = id_B$
3. m ist Isomorphismus wenn 1 und 2.

Proposition 58/59 Kompositionen von Sektion/Retraktion

1. n, m Sektionen/Retraktionen $\Rightarrow n \circ m$ Sektion/Retraktion.
2. $n \circ m$ Sektion/Retraktion $\Rightarrow$ m ist Sektion/ n ist Retraktion.

Proposition 60 Eigenschaften von Isomorphismen

1. Alle Identitäten sind Isomorphismen
2. m Isomorphismus $\Rightarrow m^{-1}$ Isomorphismus.
3. n, m Isomorphismen $\Rightarrow n \circ m$ Isomorphismus.
4. $n \circ m$ Isomorphismus und (m Retraktion oder n Sektion) $\Rightarrow$ m und n Isomorphismen.
5. Isomorphismus $i : a \to b \Rightarrow a \approx b$ ist eine Äquivalenz.

Proposition 61 Isomorphismus in Set Kategorie Set, Map $f : a \to b$

1. f ist Sektion, wenn f injektiv ist und $a \neq \emptyset$
2. f ist Retraktion, wenn f surjektiv
3. f ist Isomorphismus, wenn f bijektiv

Proposition 62 Notwendige Bedingungen für Isomorphismen in $Sys(\Sigma)$ $h : A \to B$ ist Isomorphismus in $Sys(\Sigma) \Rightarrow$

1. h ist injektiv in allen Komponenten
2. h ist surjektiv in allen Komponenten
3. h ist voll

Proposition 63 Hinreichende Bedingungen für Isomorphismen in $Sys(\Sigma)$ Wenn h bijektiv (Prop 62: 1 und 2) und voll (Prop 62: 3) ist, dann ist es ein Isomorphismus.

Corollar 64 Ismomorphismus $Sys(\Sigma)$ und $\underline{Sys}(\Sigma)$

1. Die Isomorphismen in $Sys(\Sigma)$ sind bijektive und volle Homomorphismen.
2. Die Isomorphismen in $\underline{Sys}(\Sigma)$ sind bijektive Homomorphismen.

1.4.2 Generelle Mono- und Epimorphismen

<u>**Monomorphismus**</u>

Definition 65 (Def)
$m \circ p = m \circ q \Rightarrow p = q$

Proposition 66
Jede Sektion ist monisch.

Proposition 67 (Komposition)
(1) n, m monic $\Rightarrow n \circ m$ monic.
(2) $n \circ m$ monic $\Rightarrow m$ monic.

Proposition 68 (Geschlossen unter Iso)
$m : a \to b$ ist monisch, $a \approx a'$, $b \approx b'$ $\Rightarrow \approx \circ m \circ \approx : a' \to b'$ ist mono.

Definition 69 (Abstraktes Subobjekt)
Abstraktes Subobjekt $(a, m : a \rightarrowtail b)$ eines Objektes b in Kategorie C
- ist ein Objekt $a \in C$
- zusammen mit einem Mono $m : a \rightarrowtail b$

Zwei Subobjekte
- $(a_1,\, m_1 : a_1 \rightarrowtail b)$
- $(a_2,\, m_2 : a_2 \rightarrowtail b)$

des selben Objektes b sind die selben abstrakten Subobjekte wenn es einen Iso $\approx : a_1 \to a_2$ gibt, so dass $m_1 = m_2 \circ \approx$.

<u>**Epimorphismus**</u>

Definition 73 (Def)
$p \circ e = q \circ e \Rightarrow p = q$

Proposition 74
Jede Retraktion ist episch.

Proposition 75 (Komposition)
(1) n, m epic $\Rightarrow n \circ m$ epic.
(2) $n \circ m$ epic $\Rightarrow n$ epic.

Proposition 76 (Epi ist abstr. 'notion')
$m : a \to b$ ist episch, $a \approx a'$, $b \approx b'$ $\Rightarrow \approx \circ m \circ \approx : a' \to b'$ ist episch.

Definition 77 (Abstrakter Quotient)
Abstrakter Quotient $(b, e : a \twoheadrightarrow b)$ eines Objektes a in Kategorie C
- ist ein Objekt $b \in C$
- zusammen mit einem Epi $e : a \twoheadrightarrow b$

Zwei Quotienten
- $(b_1,\, e_1 : a \twoheadrightarrow b_1)$
- $(b_2,\, e_2 : a \twoheadrightarrow b_2)$

des selben Objektes a sind die selben abstrakten Quotienten, wenn es einen Iso $\approx : b_1 \to b_2$ gibt, so dass $\approx \circ e_1 = e_2$.

Monomorphismus

Proposition 70 (Monische Retraktion)
Eine monische Retraktion ist ein Isomorphismus.

Proposition 71 (Mono in Set)
Hom. in *Set* ist monisch $\Leftrightarrow$ er injektiv ist.

Proposition 72 (Mono in $Sys(\Sigma)$)
Hom. in $Sys(\Sigma)$ ist monisch $\Leftrightarrow$ er injektiv in allen Komponenten ist.

Epimorphismus

Proposition 78 (Epische Sektionen)
Eine epische Sektion ist ein Isomorphismus

Proposition 79 (Epi in Set)
Hom. in *Set* ist episch $\Leftrightarrow$ er surjektiv ist.

Proposition 80 (Hinreichende Bedingungen für Epis in $Sys(\Sigma)$)
Jeder surjektive Homomorphismus in $Sys(\Sigma)$ ist episch.

Proposition 82 (Epi in $Sys(\Sigma)$))
Hom. in $Sys(\Sigma)$ ist episch $\Leftrightarrow$ das kleinste, geschlossene Subsystem von B induziert durch das Bild von h übereinstimmt mit B, das heißt: $\underbrace{\lceil h(A) \rceil^C}_{Def.35} = B$.

1.4.3 Spezielle Mono- und Epimorphismen

Extremale Monomorphismus

Definition 83 (Extremaler Mono)
Mono $m : a \to b$ ist extremal, wenn für jede Zerlegung $m = f \circ e$ gilt: ist e episch dann ist e auch Iso.

Proposition 84
Jede Sektion ist ein extremaler Mono.

Proposition 85 (Komposition)
$n \circ m$ extremal Mono $\Rightarrow$ m extremal Mono.

Extremale Epimorphismus

Definition 89 (Extremale Epis)
Epi $e : a \to b$ ist extremal, wenn für jede Zerlegung $e = m \circ f$ gilt: ist m monisch dann muss m auch Iso sein.

Proposition 90
Jede Retraktion ist ein extremaler Epi.

Proposition 91 (Komposition)
$e \circ f$ extremal Epi $\Rightarrow$ e extremal Epi.

Extremale Monomorphismus

Proposition 86 (Extr. Mon. ist abstr. 'Notion')
$m : a \to b$ ist extremaler Mono, $a' \approx a$, $b \approx b'$ $\Rightarrow \approx \circ m \circ \approx$ ist extremaler Mono.

Notiz: Jeder Mono in Set ist extremal.

Proposition 87 (Extr. Mono in $Sys(\Sigma)$)
Hom. in $Sys(\Sigma)$ ist extremaler Mono $\Leftrightarrow$ er injektiv und geschlossen.

Extremale Epimorphismus

Proposition 92 (Extr. Epi ist abstr. 'Notion')
$e : a \to b$ ist extremaler Epi, $a' \approx a$, $b \approx b'$ $\Rightarrow \approx \circ e \circ \approx$ ist extremaler Epi.

Notiz: Jeder Epi ist Set ist extremal. Extremale Epis sind ein geeignetes Modell zur Abstraktion von Quotienten in $Sys(\Sigma)$

Proposition 93 (Extr. Epi in $Sys(\Sigma)$)
Hom. in $Sys(\Sigma)$ ist extremaler Epi $\Leftrightarrow$ er surjektiv und voll.

1.4.4 Faktorisierungssysteme

Faktorisierungssysteme

Definition 95 Faktorisierungssystem $\mathcal{E}$ und $\mathcal{M}$ sind Klassen von Morphismen in C. ($\mathcal{E}$ und $\mathcal{M}$) ist ein Faktorisierungssystem, wenn

1. Jeder Morphismus p lässt sich in $p = m \circ e$ zerlegen.
2. $\mathcal{E}$ und $\mathcal{M}$ sind geschlossen unter Komposition mit Isomorphie
3. Wenn $m \circ p = q \circ e$, dann gibt es einen eindeutigen Morphismus d (Diagonale), so dass $m \circ d = q$ und $d \circ e = p$ (siehe 1.4.4).

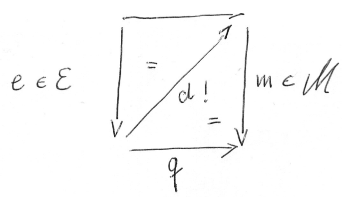


Abbildung 1.2: Diagonale

Proposition 96 Eindeutige Faktorisierung Faktorisierungen sind eindeutig bis auf Isomorphie:

1. $(e_1 : a \to c_1, m_1 : c_1 \to b)$,
   $(e_2 : a \to c_2, m_2 : c_2 \to b)$ sind zwei Faktorisierungen für den selben Morphismus $p : a \to b$, d.h. $m_1 \circ e_1 = p = m_2 \circ e_2$
   $\Rightarrow$ es gibt Iso $i : c_1 \to c_2$ mit $i \circ e_1 = e_2$ und $m_2 \circ i = m_1$.

2. $(e : a \to c, m : c \to b)$ ist Faktorisierung für $p : a \to b$ und $i : c \to d$ ist ein Isomorphismus $\Rightarrow$ $(i \circ e : a \to d, m \circ i^{-1} : d \to b)$ ist auch Faktorisierung für $p : a \to b$

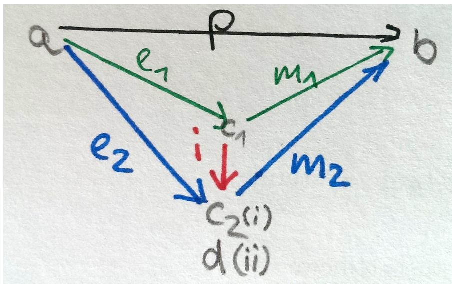


Abbildung 1.3: Eindeutige Diagonale

Proposition 96 Komposition Wenn $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ ein Faktorisierungssystem ist, dann sind die Klassen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{M}$ geschlossen unter Komposition.

Proposition 97 Epi-/Mono-Faktorisierung in Set In Set: $\mathcal{E}$ Epimorphismen und $\mathcal{M}$ Monomorphismen

Homomorphismus Theoreme

<u>**Theorem 1**</u>

Theorem 99 Homom Theorem 1
$h : A \to B$ surjektiv und voller Hom. und $k : A \to C$ ist Hom. so dass $h^{\equiv} \subseteq k^{\equiv}$, d.h. der Kern von k beinhaltet den Kern von h
$\Rightarrow$ es gibt einen eindeutigen Homom. $k^* : B \to C$ so dass $k^* \circ h = k$.
$\equiv^h = \equiv^k \Rightarrow k^*$ ist injektiv.

<u>**Theorem 2**</u>

Theorem 103 Homom Theorem 2
$h : A \to B$ injektiver Homom. und $k : C \to B$ ist Hom. so dass $k(C) \subseteq h(A)$
$\Rightarrow$ es gibt einen eindeutigen Homom. $k^* : C \to A$ mit $h \circ k^* = k$
$\lceil k(C) \rceil^c = h(A)$, then $k^* \Rightarrow k^*$ ist epi.

Theorem 1

Lemma 100 Invarianter Kern
m injektiver Homom. $\Rightarrow \equiv^{m \circ h} = \equiv^h$ für alle Hom, die mit m komponiert werden können.

Corollary 101 Extremal epische Faktorisierungen in $Sys(\Sigma)$
$(\mathcal{E}^x, \mathcal{M})$ ist ein Faktorisierungssystem wobei $\mathcal{E}^x$ extremaler Epi und $\mathcal{M}$ Monomorphismus

Corollary 102 Komposition extremaler Epis
$e_1 : A \to B$, $e_2 : B \to C$ sind zwei extremale Epis in $Sys(\Sigma) \Rightarrow\ e_2 \circ e_1$ ist extremaler Epi.

Theorem 2

Lemma 104 Invariante Sub-Trägermengen
$e : A \to B$ epi $\Rightarrow \lceil h(B) \rceil^c = \lceil h \circ e(A) \rceil^c$ für alle Homomorphismen $h : B \to C$.

Corollary 105 Extremal mono Faktorisierungen in $Sys(\Sigma)$
$(\mathcal{E}, \mathcal{M}^x)$ ist ein Faktorisierungssystem wobei $\mathcal{E}$ Epi und $\mathcal{M}^x$ extremaler Monomorphismus

Corollary 106 Komposition extremaler Monos
$m_1 : A \to B$, $m_2 : B \to C$ sind zwei extr. Monos in $Sys(\Sigma) \Rightarrow\ m_2 \circ m_1$ ist extr. Mono.

Surjektive / volle injektive Homomorphismen

Proposition 107 Surjektive und volle injektive Homos Konzept der surjektiven und Konzept der vollen inkjektiven Homos ist abstrakt. D.h. Homo $h : A \to B$ surjektiv/voll und injektiv und $A \approx A'$ und $B \approx B' \Rightarrow \approx\ \circ\ m \circ \approx$ ist surjektiv/voll und injektiv.

Corollary 109 Surjektive / voll injektive Faktorisierung in $Sys(\Sigma)$ $(\mathcal{S}, \mathcal{FI})$ Faktorisierungssystem in $Sys(\Sigma)$ wobei $\mathcal{S}$ die Klasse aller surjektiven und $\mathcal{FI}$ aller vollen injektiven Morphismen ist.

1.5 System Komposition

Parallele Komposition & Variante Systeme

Parallele Komposition

Definition 110 Parallele Komposition
Eine parallele Komposition $A \times B$
(i) $\forall\, s \in S :\, (A \times B)_s = A_s \times B_s$
(ii) $\forall\, f \in O_{w,v},\, x \in (A \times B)^w :$
$f^{A \times B}(x) = (y_A \times_v y_B)$
wenn $f^A(x_A) = y_A$ *und* $f^B(x_B) = y_B$
Notiz: Parallele Komposition zweier totaler Systeme ist total.

Proposition 111 Eigenschaften paralleler Komposition
A, B, C sind Systeme $\Rightarrow$ folgende parallele Kompositionen sind Isomorph
(1) $A \times B \approx B \times A$ (Kommutiativ)
(2) $A \times (B \times C) \approx (A \times B) \times C$ (Assoziativ)
(3) $A \times \mathcal{I} \approx \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ eine Art null-system)

Definition 112 Projektionen
$A \times B \Rightarrow$ die Projektionen
$\left(p_s^A : (A \times B)_s \to A_s\right)_{s \in S}$ und
$\left(p_s^B : (A \times B)_s \to B_s\right)_{s \in S}$ sind def. durch:
Für $x \in (A \times B)_s$:
(1) $p_s^A(x) = x_A$ und
(2) $p_s^B(x) = x_B$

Proposition 113 Projektionen
Die Projektionen p^A und p^B sind Homoms.

Proposition 114 Eindeutige Homomorphismen in parall. Kompositionen
$h, k : C \to (A \times B)$ Homomorphismen mit
(1) $p_A \circ h = p_A \circ k$ und (2) $p_B \circ h = p_B \circ k$
$\Rightarrow h = k$

Variante Systeme

Definition 115 Variante Systeme
Eine variantes System $A + B$
(i) $\forall\, s \in S :\, (A + B)_s = (A_s \uplus B_s)_{|\equiv^{\mathcal{I}}}$
(ii) $\forall\, f \in O_{w,v},\, [x] \in (A + B)^w :$

$$f^{A+B}[x] = \begin{cases} [y_A] & \text{wenn } x \in A^w \textit{ und } f^A(x) = y_A \\ [y_B] & \text{wenn } x \in B^w \textit{ und } f^B(x) = y_B \end{cases}$$

Notiz: Variantes System zweier totaler Systeme muss nicht total sein.

Proposition 116 Eigenschaften varianter Systeme
A, B, C sind Systeme $\Rightarrow$ folgende variante Systeme sind Isomorph
(1) $A + B \approx B + A$ (Kommutiativ)
(2) $A + (B + C) \approx (A + B) + C$ (Assoziativ)
(3) $A + \mathcal{I} \approx A$ ($\mathcal{I}$ eine Art neutrales System)

Definition 117 Einbettungen
$A + B \Rightarrow$ die Einbettungen
$\left(i_s^A : A_s \to (A + B)_s\right)_{s \in S}$ und
$\left(i_s^B : B_s \to (A + B)_s\right)_{s \in S}$ sind def. durch:

(1) Für $x \in A_s$: $i_s^A(x) = [x]$ und
(2) Für $x \in B_s$: $i_s^B(x) = [x]$.

Proposition 118 Einbettungen
Die Einbettungen i^A und i^B sind Homoms.

Corollary 119 Injektive Einbettungen
Signatur ohne Konstanten $\Rightarrow$ Einbettungen: injektiv und geschlossen.

Proposition 120 Eindeutige Homomorphismen aus varianten Systemen
$h, k : (A + B) \to C$ Homomorphismen mit
(1) $h \circ i_A = k \circ i_A$ und (2) $h \circ i_B = k \circ i_B$
$\Rightarrow h = k$

1.6 Produkte & Co-Produkte

Produkte

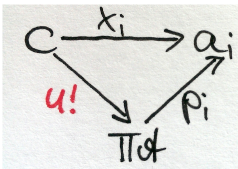
Definition 121 Produkt
$\mathcal{A} = (a_i)_{i\in I}, \Pi\mathcal{A} = (\Pi\mathcal{A}, (p_i : \Pi\mathcal{A} \to a_i)_{i\in I})$: $\forall$ Objekte c und $(x_i : c \to a_i)$ gibt es eindeutig $u : c \to \Pi\mathcal{A}$ so dass $p_i \circ u = x_i$.
u auch genannt $\langle x_i\rangle_{i\in I}$.
Das Produkt ist endlich wenn I endlich.
Siehe Abbildung 1.4(a)

Proposition 122 Produkt ist abstrakt
(1) $\Pi_1\mathcal{A}$ und $\Pi_2\mathcal{A} \Rightarrow\ \approx: \Pi_1\mathcal{A} \to \Pi_2\mathcal{A}$,
so dass $(p_i^2\circ \approx = p_i^1)_{i\in I}$
(2) $\Pi\mathcal{A}$ und $\approx: q \to \Pi\mathcal{A}\ \Rightarrow$
$(q, (p_i\circ \approx: q \to a_i)_{i\in I})$ ist Produkt von $\mathcal{A}$

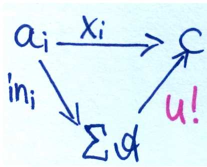
Co-Produkte

Definition 137 Co-Produkt
$\mathcal{A} = (a_i)_{i\in I}, \sum\mathcal{A} = (\sum\mathcal{A}, (in_i : a_i \to \sum\mathcal{A})_{i\in I})$: $\forall$ Objekte c und $(x_i : a_i \to c)$ gibt es eindeutig $u : \sum\mathcal{A} \to c$ so dass $u \circ in_i = x_i$.
u auch genannt $\{x_i\}_{i\in I}$.
Das Co-Produkt ist endlich wenn I endlich.
Siehe Abbildung 1.4(b).

Proposition 138 Abstr Co-Produkt
(1) $\sum_1\mathcal{A}$ und $\sum_2\mathcal{A} \Rightarrow\ \approx: \sum_1\mathcal{A} \to \sum_2\mathcal{A}$,
so dass $(\approx \circ in_i^1 = in_i^2)_{i\in I}$
(2) $\sum\mathcal{A}$ und $\approx: \sum\mathcal{A} \to q\ \Rightarrow$
$(q, (\approx \circ in_i : a_i \to q)_{i\in I})$ is Co-Produkt v. $\mathcal{A}$

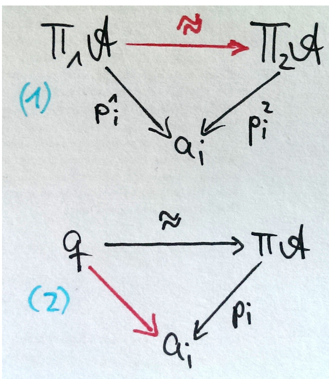


(a) Produkt

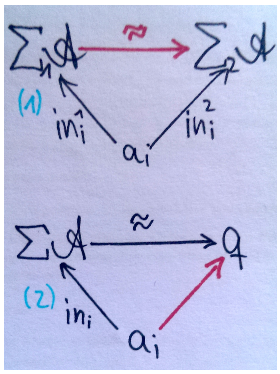


(b) Co-Produkt

Abbildung 1.4: Definitionen



(a) Produkt



(b) Co-Produkt

Abbildung 1.5: Abstrakte

Produkte

Proposition 123 Assoziativität und Kommutativität
$\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ $\mathcal{J}$ ist Partition auf $I \Rightarrow$ $\Pi\mathcal{A} \approx \Pi(\Pi(a_i)_{i \in S})_{s \in \mathcal{J}}$ wenn alle teilnehmenden Produkte exististeren.

Definition 125 Finales Objekt
Ein Objekt $\mathcal{T}$ ist final in Kategorie $\mathcal{C}$, wenn es einen eindeutigen Morphismus von jedem anderen $\mathcal{C}$-Objekt in $\mathcal{T}$ gibt.

Corollary 126 Leeres Produkt
Das finale Objekt einer Kategorie deckt sich mit dem leeren Produkt, d.h. $\mathcal{T} = \Pi\emptyset$

Proposition 127 Neutrales Element für Produktoperator
Für alle Objekte $a : a \times \mathcal{T} \approx a$

Definition 128 Produktmorphismus
Geg. Fam. von Morphismen $(m_i : d_i \to c_i)_{i \in I}$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit den Produkten $D = \Pi(d_i)_{i \in I}$ und $C = \Pi(c_i)_{i \in I}$.
Der Produktmorphismus $\Pi(m_i)_{i \in I} : D \to C$ ist der eindeutige Morphismus für die Familie von Morphismen $(m_i \circ p_i : D \to c_i)_{i \in I}$, d.h. $\Pi(m_i)_{i \in I} = \langle m_i \circ p_i \rangle_{i \in I}$

Co-Produkte

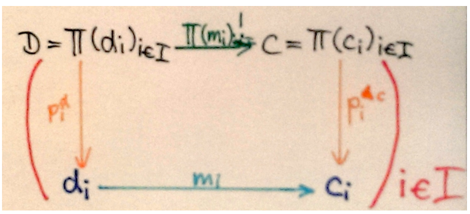
Proposition 139 Assoziativität und Kommutativität
$\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ $\mathcal{J}$ ist Partition auf $I \Rightarrow$ $\sum\mathcal{A} \approx \sum(\sum(a_i)_{i \in S})_{s \in \mathcal{J}}$ wenn alle teilnehmenden Co-Produkte exististeren.

Definition 141 Initiales Objekt
Ein Objekt $\mathcal{I}$ ist initial in Kategorie $\mathcal{C}$, wenn es einen eindeutigen Morphismus in jedes andere $\mathcal{C}$-Objekt von $\mathcal{I}$ gibt.

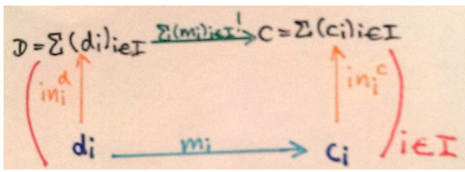
Corollary 142 Leeres Co-Produkt
Das initiale Objekt einer Kategorie deckt sich mit leerem Co-Produkt, d.h. $\mathcal{I} = \sum\emptyset$

Proposition 143 Neutrales Element für Co-Produktoperator
Für alle Objekte $a : a + \mathcal{I} \approx a$

Definition 144 Co-Produkt Morphism.
Geg. Fam. von Morphismen $(m_i : d_i \to c_i)_{i \in I}$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit den Co-Produkten $D = \sum(d_i)_{i \in I}$ und $C = \sum(c_i)_{i \in I}$.
Der Co-Produktmorph. $\sum(m_i)_{i \in I} : D \to C$ ist der eindeutige Morphismus für die Familie von Morphismen $(in_i \circ m_i : d_i \to C)_{i \in I}$, d.h. $\sum(m_i)_{i \in I} = \{in_i \circ m_i\}_{i \in I}$



(a) Produkt



(b) Co-Produkt

Abbildung 1.6: - Morphismus

Produkte

Proposition 129 Produkt monischer Morphismen
$(m_i : d_i \to c_i)_{i\in I}$ mono $\Rightarrow$ $\Pi(m_i)_{i\in I} : \Pi(d_i)_{i\in I} \to \Pi(c_i)_{i\in I}$ ist auch monisch.

Proposition 130 Produkt extremaler Morphismen
In einer Kategorie C mit Faktorisierungssystem in Epis und extremale Monos ist Produkt der extremalen Monos wieder extremal mono.

Definition 131 Kartesisches Produkt
Objekte $(a_i)_{i\in I}$ in Set. Das Produkt $(\Pi(a_i)_{i\in I}, (p_i : \Pi(a_i)_{i\in I} \to a_i)_{i\in I})$ ist definiert durch
(1) $\Pi(a_i)_{i\in I} = \{c : I \to \bigcup_{i\in I} a_i ::$
$\forall i \in I : c(i) \in a_i\}$
(2) $\forall\, i \in I$ and $c \in \Pi(a_i)_{i\in I}$: $p_i(c) = c(i)$

Proposition 132 Kartesisches Produkt
Das Kartesische Produkt ist das Produkt in der Kategorie Set.

Corollary 133 Finales Objekt in Set
Das finale Objekt in Set ist $\{*\}$.

Definition 134 Generelle Produkte in $Sys(\Sigma)$
Sei $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ eine Familie algebraischer Systeme, dann ist das Produkt $\Pi\mathcal{A} = (\Pi\mathcal{A}, (p_i : \Pi\mathcal{A} \to A_i)_{i\in I})$ definiert durch
(1) Produkt über alle Trägermengen
(2) Operationen auf Produkten ausführen die für Faktoren ausgelegt sind.
(3) $Sys(\Sigma)$ Projektionen $p_{i,s}$ stimmen überein mit $p_{i,s}^{Set}$

Co-Produkte

Proposition 145 Co-Produkt epischer Morphismen
$(m_i : d_i \to c_i)_{i\in I}$ epi $\Rightarrow$ $\sum(m_i)_{i\in I} : \sum(d_i)_{i\in I} \to \sum(c_i)_{i\in I}$ ist auch episch.

Proposition 146 Co-Produkt extremaler Epis
In einer Kategorie C mit Faktorisierungssystem in extremal Epis und Monos ist Co-Produkt der extremalen Epis wieder extremal epi.

Definition 147 Co-Produkt in Set
Objekte $(a_i)_{i\in I}$ in Set. Das Co-Produkt $(\sum(a_i)_{i\in I}, (in_i : a_i \to \sum(a_i)_{i\in I})_{i\in I})$ ist definiert durch
(1) $\sum(a_i)_{i\in I} = \biguplus_{i\in I} a_i$
(2) $\forall\, i \in I$ und $x \in a_i$:
$in_i : a_i \to \sum(a_i)_{i\in I} ::= in_i(x) = (x, i)$

Proposition 148 Co-Produkt in Set
Das Co-Produkt ist das Co-Produkt in der Kategorie Set.

Corollary 149 Initiales Objekt in Set
Das initiale Objekt in Set ist $\emptyset$.

Corollary 150 Initiales Objekt in $Sys(\Sigma)$
Das leere algebraische System $\mathcal{I}$ ist das initiale Objekt in $Sys(\Sigma)$

Produkte

Proposition 135 Generelle Produkte in $Sys(\Sigma)$
Das algebraische System $\Pi\mathcal{A}$ mit
$(p_i : \Pi\mathcal{A} \to A_i)_{i\in I}$ (aus Def 134) ist Produkt der Familie von Systemen $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$

Corollary 136 Finales Objekt in $Sys(\Sigma)$
Das finale Objekt T in $Sys(\Sigma)$ ist das folgende algebraische System
(1) $(T_s = \{*\})_{s\in S}$
(2) $\forall f \in O_{w,v} \forall x \in T^w : f^T(x) = *$

Co-Produkte

Proposition 151 Binäres Co-Produkt in $Sys(\Sigma)$
Das variante System $A + B$ ist das Co-Produkt der zwei Systeme A und B.

2 Spezifikation

2.1 Abstraktion: Episch reflektive Subkategorien

Definition 152: Subkategorie Kategorie $\mathcal{D}$ ist Subkategorie von $\mathcal{C}$ ($\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$), wenn

1. $O^{\mathcal{D}} \subseteq O^{\mathcal{C}}$ (Objekte in Teilmengenbeziehung)
2. $\forall\, a, b \in O^{\mathcal{D}} : M^{\mathcal{D}}_{a,b} \subseteq M^{\mathcal{C}}_{a,b}$
3. $\forall\, a \in O^{\mathcal{D}} : id^{\mathcal{D}}_a = id^{\mathcal{C}}_a$
4. $\forall\, a, b, c, \in O^{\mathcal{D}} \wedge m, n \in O^{\mathcal{D}}_{a,b} : n \circ^{\mathcal{D}_{a,b,c}} m = n \circ^{\mathcal{C}_{a,b,c}} m$

- $\mathcal{D}$ ist voll, wenn
  1. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$
  2. $\forall\, a, b \in O^{\mathcal{D}} : M^{\mathcal{D}}_{a,b} = M^{\mathcal{C}}_{a,b}$
- $\mathcal{D}$ ist isomorph geschlossen, wenn $\approx$: $a \to b \in M^{\mathcal{C}}_{a,b}$ mit $a \in O^{\mathcal{D}} \implies b \in O^{\mathcal{D}}$
- Wenn $\mathcal{D}$ voll und isomorph geschlossen ist: $\mathcal{D} \subseteq^{\approx} \mathcal{C}$

Notiz: Nur geschlossene Kategorien sind abstrakt (bis auf Isomorphie)!

Definition 153: Episch reflektive Subkategorie $\mathcal{D}$ ist reflektive Subkategorie von $\mathcal{C}$, wenn

1. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$
2. $\forall\, c \in O^{\mathcal{C}}$: gibt es
   - ein $c_{\mathcal{D}}$ ($\mathcal{D}$- Reflektion von c) und
   - ein Morphismus $\eta_c : c \to c_{\mathcal{D}}$ (Reflektor von c)

mit der folgenden Eigenschaft: $\forall m : c \to z$, so dass $z \in \mathcal{D}$ gibt es einen eindeutigen Morphismus $m^* : c_\mathcal{D} \to z$ mit $m^* \circ \eta = m$
$\mathcal{D}$ ist episch reflektiv, wenn zusätzlich alle Reflektoren epis sind.

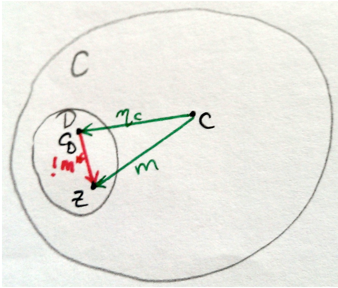


Abbildung 2.1: Episch reflektive Subkategorie

Proposition 154: Reflektionen sind abstrakt Sei $\mathcal{D}$ reflektive Subkategorie von $\mathcal{C}$

1. $\eta_1 : c \to c^1_\mathcal{D}$ und $\eta_2 : c \to c^2_\mathcal{D}$ zwei Relfektionen von $\mathcal{C}$ $\implies \approx: \mathcal{C}^1_\mathcal{D} \to \mathcal{C}^2_\mathcal{D}$ mit $\eta : c \to \mathcal{C}^2_\mathcal{D}$

2. $\eta : c \to \mathcal{C}^1_\mathcal{D}$ Reflektor für c und $\approx: c^1_\mathcal{D} \to c^2_\mathcal{D}$ ist Iso $\implies$ $\eta' = \approx \circ \eta : c \to c^2_\mathcal{D}$ ist auch Reflektor für c

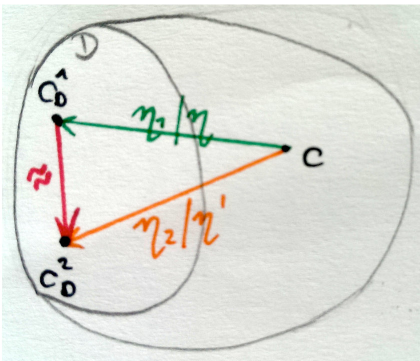


Abbildung 2.2: Reflektionen sind abstrakt

Proposition 155: Isomorphe Reflektoren

1. $\mathcal{D}$ reflektive Subkategorie von $\mathcal{C}$ und $d \in \mathcal{D}$ $\implies$ $\eta_d : d \to d_\mathcal{D}$ ist iso.

2. $\mathcal{D}$ ist reflektive und isomorph-geschlossene Subkategorie von $\mathcal{C}$
$\implies \forall\, c \in \mathcal{C} : c \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$ der Reflektor für c ist iso.

GANZ WICHTIG! NOCH MAL ANGUCKEN! JA CHRISTIN - AUCH DU!Proposition 156: Epische Reflektionen und Produkte $\mathcal{D}$ episch-reflektiv und isomorph-geschlossene Subkategorie von $\mathcal{C}$ und
$\Pi\mathcal{A}$ ist Produkt in $\mathcal{C}$ einer Familie $\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{D}$-Objekten, d.h. $(a_i \in \mathcal{D})_{i \in I}$
$\implies \Pi\mathcal{A} \in \mathcal{D}$

Proposition 157: Epische Reflektionen und extremale Monos $\mathcal{D}$ episch-reflektiv und isomorph-geschlossene Subkategorie von $\mathcal{C}$ mit $(\mathcal{E}, \mathcal{M}^x) \implies c \in \mathcal{D}$ wenn $m : c \rightarrowtail d$ ist extremal Mono und $d \in \mathcal{D}$.
D.h. in TCs Worten:
Wenn wir $\mathcal{D}$ aus Def haben und $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ dann folgt daraus, jedes d was über einen extremalen Mono erreicht wird, hat ein 'Urbild' in c.

Proposition 158: Co-Well-Powered Categories Kategorie $\mathcal{C}$ its Co-well-powered, wenn $\forall\, a \in \mathcal{C}$ die 'Collection' abstrakter Quotienten (Def 77) von a eine Menge bilden.
'Colletion abstrakter Quotienten von a' = Paarweise nicht isomorphe Epis mit Domain a.

Theorem 159: Charakterisierung episch reflektiver Subkategorien Gegeben: $\mathcal{C}$ co-well-powered Kategorie mit $(\mathcal{E}, \mathcal{M}^x)$. Isomorph geschlossene Subkategorie $\mathcal{D}$ von $\mathcal{C}$. Ist episch reflektiv $\Leftrightarrow$ $\mathcal{D}$ geschlossen unter Produkten und extremalen Subobjekten ist.

Definition 160 Reflektion von Morphismen Gegeben $\mathcal{D}$ reflektive Subkategorie von $\mathcal{C}$ und $c \mapsto (\eta_c : c \to c_{\mathcal{D}})$ eine festgelegte Auswahl von Reflektoren η_c für jedes Objekt $c \in \mathcal{C}$. Dann definieren wir das folgende Mapping von Morphismen $m : c \to c' \in \mathcal{C}$ zu Morphismen in $\mathcal{D} : m : c \to c' \mapsto m^{\mathcal{D}} : c_{\mathcal{D}} \to c'_{\mathcal{D}} = (\eta_{c'} \circ m)^* : c_{\mathcal{D}} \to c'_{\mathcal{D}}$.
In CTs Worten: Morphismen werden von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ reflektiert.

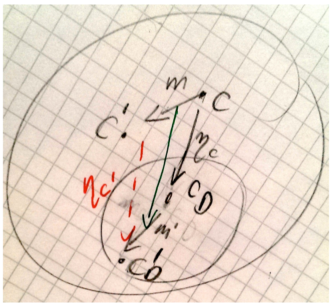


Abbildung 2.3: Reflektion von Monomorphismen

Proposition 161 Eigenschaften von Morphismusreflektionen $\mathcal{D}$ reflektive Subkategorie von $\mathcal{C}$ und $m \mapsto m^{\mathcal{D}} \Rightarrow$

1. $id_c^D = id_{c_{\mathcal{D}}}\ \forall c \in C$
2. $(m \circ_{\mathcal{C}} n)^{\mathcal{D}} = m^{\mathcal{D}} \circ_{\mathcal{D}} n^{\mathcal{D}}$ wenn m, n komponierbar in C.

CT Notiz zu 2.: Erst verkullern und dann Übertragen ist gleich zu erst einzeln Übertragen und dann verkullern.

2.2 Syntaktifizierung

2.2.1 Terme und Termsysteme

Definition 162 Variablen-Mengen und Variablen-Systeme Eine Variablenmenge X ist eine S-Indizierte Familie von Mengen von Variablen, d.h. $X = (X_s)_{s \in S*}$
Eine Variablenmenge ist ein algebraisches System in dem alle Funktionen komplett undefiniert sind.

Definition 163 Terme und totale Termsysteme Die 'Collection' von Termen $T^{\Sigma,X}$ mit Variablen in X ist die kleinste S-Indizierte Familie von Mengen $T^{\Sigma,X} = (T_s^{\Sigma,X})_{s \in S}$ die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Variablen: $x \in T_s^{\Sigma,X}$ wenn $x \in X_s$
2. Funktionen: $f_i(t) \in T_s^{\Sigma,X}$ wenn $f \in O_{w,v}$ und $t \in (T^{\Sigma,X})^w$ und $v = v_l s v_r$ und $i = |v_l| + 1$

   Das totale Termsystem $T^{\Sigma,X}$ mit Variablen in X ist das Σ-System, welches die Familie von Termen $(T_s^{\Sigma,X})_{s \in S}$ als Träger nehmen und alle Funktionen definieren durch:

3. Funktionen: Für $f \in O_{w,v}$ und $|v| \geq 1$ und $x \in (T^{\Sigma,X})^w : f^{T^{\Sigma,X}}(x) = (f_i(x))_{i \in 1 \ldots |v|}$
4. Prädikate: Für $f \in O_{w,\epsilon}$ und $f \neq =$: $f^{T^{\Sigma,X}} = \emptyset$, d.h. $f^{T^{\Sigma,X}}$ ist komplett undefiniert.

Notiz CT: Zu 3.: Ist das nicht das mit der 'Tiefe' von Termen bei Elsner? s(s(s(...)))
'$f \neq =$' bedeutet: f ist komplett undefiniert

Definition 164 Operationen auf Termen Die Operationen (a) enthalten Variablen, (b) enthalten Terme und (c) die Höhe ist definiert auf der 'Collection' von Termen $T^{\Sigma,X}$ durch:

$$\_{}_X : \left(T^{\Sigma,X}\right)^w \to 2^X ::= t_X = \begin{cases} \{t\} & t \in X \\ x_X & t = f_i(x), f \in O_{w,v}, 1 \leq i \leq |v| \\ \emptyset & t \in \left(T^{\Sigma,X}\right)^\epsilon \\ x_X^1 \cup x_X^2 & t = x^1 \times x^2 \end{cases} \tag{a}$$

$$\_{}_T : \left(T^{\Sigma,X}\right)^w \to 2^{T^{\Sigma,X}} ::= t_T = \begin{cases} \{t\} & t \in X \\ \{f_j(x) :: j \in [1, |v|]\} \cup x_T & t = f_i(x), f \in O_{w,v}, i \in [1, |v|] \\ \emptyset & t \in \left(T^{\Sigma,X}\right)^\epsilon \\ x_T^1 \cup x_T^2 & t = x^1 \times x^2 \end{cases} \tag{b}$$

$$|\_|: \left(T^{\Sigma,X}\right)^w \to \mathbb{N}_0 ::= |t| = \begin{cases} 0 & t \in X \\ |x| + 1 & t = f_i(x), f \in O_{w,v}, 1 \leq i \leq |v| \\ 0 & t \in \left(T^{\Sigma,X}\right)^\epsilon \\ \max(|x^1|, |x^2|) & t = x^1 \times x^2 \end{cases} \tag{c}$$

Definition 165 Partielle Termsysteme Ein partielles Termsystem $P^{\Sigma,X}$ ist ein Subsystem von dem totalen Termsystem $T^{\Sigma,X}$, so dass

1. $X \subseteq P^{\Sigma,X}$
2. $\lceil X \rceil^c_{P^{\Sigma,X}}$ (Wenn Argumente des Terms selber wieder Terme sind, sind diese auch in $P^{\Sigma,X}$ enthalten)

Corollary 166 Variablen-Einbettung und eindeutiger Homomorphismus

1. Für jedes partielle System $P^{\Sigma,X}$ die Einbettung $X \hookrightarrow P^{\Sigma,X}$ ist epi.
2. $h^1, h^2 : P^{\Sigma,X} \to A$ homo eines partiellen Systems $P^{\Sigma,X}$ in ein anderes algebraisches System $A \implies h^1_{|X|} = h^2_{|X|} \implies h^1 = h^2$, d.h. wenn die Homos h_1 und h_2 in den Variablen übereinstimmen, sind sie gleich.

Proposition 167 Struktur des partiellen Systems Die Menge aller partiellen Systeme $P^{\Sigma,X}$ stimmt bis auf einer Variablenmenge X überein mit einem kompletten Verband bis auf die Subsystem-Relation.

Proposition 168 Generiertes Termsystem Gegeben: X und eine Familie von Termmengen $\mathsf{T} = \left(\mathsf{T}_s \subseteq T_s^{\Sigma,X}\right)_{s\in S}$, $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma,X}$ beschreibt das kleinste partielle Termsystem das alle Terme in T beinhaltet, d.h. $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma,X} = \bigcap \left\{ P^{\Sigma,X} \in \mathcal{P}^{\Sigma,X} :: \left(\mathsf{T}_s \subseteq P_s^{\Sigma,X}\right)_{s\in S} \right\}$

Proposition 169 Konstruktion von generierten Termsystemen $\mathsf{T} = \left(\mathsf{T}_s \subseteq T_s^{\Sigma,X}\right)_{s\in S}$, die Träger von $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma,X}$ können wie folgt konstruiert werden $\bigcup\limits_{t\in\mathsf{T}} t_T$.

Proposition 170 Generiertes Termsystemen Das generierte Termsystem hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\mathsf{T} \subseteq P_{\mathsf{T}}^{\Sigma,X}$
2. $\mathsf{T}_1 \subseteq \mathsf{T}_2 \implies P_{\mathsf{T}_1}^{\Sigma,X} \subseteq^f P_{\mathsf{T}_2}^{\Sigma,X}$.
3. $P_{\left(P_{\mathsf{T}}^{\Sigma,X}\right)}^{\Sigma,X} = P_{\mathsf{T}}^{\Sigma,X}$

Proposition 171 Variablenzuweisung und Erweiterungen von Variablenzuweisungen

1. Geg. X, Σ-System A: Eine Variablenzuweisung ist ein Homomorphismus $h : X \to A$
2. $P^{\Sigma,X}$ mit Variablen in X, mit der Variableneinbettung $x : X \hookrightarrow P^{\Sigma,X}$ und $h : X \to A$ ist eine Variablenzuweisung in A.
   $\implies$ wenn er existiert, wird der eindeutige Homomorphismus, der die Variablenzuweisung zu $P^{\Sigma,X}$ erweitert, bezeichnet mit $h^* : P^{\Sigma,X} \to A$, d.h. h^* ist der einzige Homomorphismus, der $h^* \circ x = h$ erfüllt.

Definition 172 Auswertung Gegeben Variablenzuweisung $h : X \to A$. Partielles Termsystem $P(h) = (P(h)_s)_{s\in S} \subseteq T^{\Sigma,X}$, genannt die Auswertungsdomain von h, und die Auswertung $h* : P(h) \to A = (h_s^* : P(h)_s \to A_s)_{s\in S}$ selbst, sind wie folgt definiert: $P(h)$

ist das kleinste partielle Termsystem das das folgende erfüllt:

(i) $x \in P(h)_s$ if $x \in X_s$

(i') $h_s^*(x) = h_s(x)$ for $x \in X_s$

(ii) $f_i(x) \in P(h)_s$ if $f \in O_{w,v}, v = v_l s v_r, i = |v_l| + 1, x \in (P(h))^w$ and f^A defined for $(h^*)^w(x)$

(ii') $h_s^*(f_i(x)) = f^A((h^*)^w(x))_i$ if $f \in O_{w,v}, f_i(x) \in P(h)_s$

Proposition 173 Auswertungshomomorphismus Die Auswertung $h^* : P(h) \to A$ ist für die Variablenzuweisungen $h : X \to A$ (in Def 172) ist ein Homo.

Corollary 174 Auswertungen und Homomorphismen $k : A \to B$ ist Homo und $h : X \to A$ Variablenzuweisung $\Rightarrow$

1. $P(h) \subseteq P(k \circ h)$

2. $k \circ h^* = (k \circ h)^* \circ \subseteq_k$, wenn der Inklusionsmorphismus von $P(h)$ in $P(k \circ h)$ bezeichnet wird durch $\subseteq_k$: $P(h) \to P(k \circ h)$

Corollary 175 Auswertungen und geschlossene Monomorphismen $k : A \to B$ geschlossener Mono und $h : X \to A$ Variablenzuweisung $\Rightarrow$

1. $P(h) = P(k \circ h)$

2. $k \circ h^* = (k \circ h)^*$

Corollary 175 Auswertungen und Epimorphismen $e : B \twoheadrightarrow C$ ist epi $\implies$ $e^* : P(e) \to C$ ist surjektiv.

2.2.2 Formeln und syntaktische Präsentation

Definition 177 Atomare Formeln Die Menge atomarer Formeln $F^{\Sigma,X} = (P_s^{\Sigma,X})_{s \in S \cup \{\epsilon\}}$ über einer gegebenen Variablenmenge X ist die kleinste Menge die folgende Klauseln definiert wird:

1. Existenzformeln: $t \in F_s^{\Sigma,X}$, wenn $t \in T_s^{\Sigma,X}$

2. Atomare Formeln: $f(t) \in F_\epsilon^{\Sigma,X}$, wenn $f \in O_{w,\epsilon}$, $t \in (T^{\Sigma,X})^w$

Definition 178 Operatoren auf Formeln Die Operatoren *beinhaltete Variablen*($\_\_{X}$), *beinhaltete Terme*($\_\_{T}$), *Höhe*($|\_\_|$) können auf Formeln und Familien von Formeln durch die folgenden zusätzlichen Definitionen erweitert werden:

$$\begin{aligned}
__{X} : F_\epsilon^{\Sigma,X} \to 2^X &::= f(x)_X = x_X \\
__{X} : 2^{F^{\Sigma,X}} \to 2^X &::= F_X = \bigcup\nolimits_{a \in F} a_X \\
__{T} : F_\epsilon^{\Sigma,X} \to 2^{T^{\Sigma,X}} &::= f(x)_T = x_T \\
__{T} : 2^{F^{\Sigma,X}} \to 2^X &::= F_T = \bigcup\nolimits_{a \in F} a_T \\
|__|{:}F_\epsilon^{\Sigma,X} \to \mathbb{N}_0 &::= |f(x)| = |x|
\end{aligned}$$

Definition 179 Syntaktische Präsentation Eine syntaktische Präsentation $F = (X, F \subseteq F^{\Sigma,X})$ eines algebraischen System A besteht aus der Variablenmenge X und der Menge von Formeln F über X, welche gültig im präsentierten System sind. Eine Präsentation endlich, wenn X und F endlich sind. Wenn

1. $\mathsf{T} = F_T$ in die Menge von Termen die in F auftreten,
2. $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma,X}$ ist das partielle Termsystem definiert durch T und
3. $P_{\mathsf{F}}^{\Sigma,X}$ ist das kleinste Supersystem von $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma,X}$, wo, für allel $f \in O_{w,\epsilon}$ und $f \neq =$, $f^{P_{\mathsf{F}}^{\Sigma,X}}(x)$ definiert ist, wenn $f(x) \in F$
   $\Longrightarrow$ dann wird das *System* A_F, welches durch F *präsentiert* wird, wird definiert durch $\mathbf{A}_F = \left(P_{\mathsf{F}}^{\Sigma,X}\right)_{|\equiv_F}$, wobei
4. $\equiv_F$ ist die durch $\sim_F = \{(x_1, x_2) :: = (x_1, x_2) \in F\}$ generierte Kongruenz, welche die Menge der Gleichheiten, die durch F spezifiert sind, ist.

Der Epimorphismus $x^F = \equiv_F \circ \subseteq_{\mathsf{F}} \circ x : X \to \mathbf{A}_F$ definiert durch folgende Epis:

- $x : X \to P_{\mathsf{T}}^{\Sigma,X}$
- $\subseteq_{\mathsf{F}}$: $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma,X} \to P_{\mathsf{F}}^{\Sigma,X}$ und
- $\equiv_F$: $P_{\mathsf{F}}^{\Sigma,X} \to \mathbf{A}_F$

Proposition 180 Sub-Präsentationen (X^1, F^1) ist Sub-Präsentation von (X^2, F^2) im Sinne von $X^1 \subseteq X^2$ und $F^1 \subseteq F^2$ mit den Einbettungshomo $i : X^1 \to X^2$
$\Longrightarrow$ es gibt einen eindeutigen Homo $i^* : \mathbf{A}_{F^1} \to \mathbf{A}_{F^2}$ mit $i^* \circ x^{F^1} = x^{F^2} \circ i$

$$\begin{tikzcd}
X^1 \arrow[r, hook, "x^1"] \arrow[d, "i"] \arrow[rrr, bend left] & P^{\Sigma,X^1}_{T^1} \arrow[r, hook, "\subseteq_{F^1}"] \arrow[d, "i_T"] & P^{\Sigma,X^1}_{F^1} \arrow[r, two heads, "\equiv_{F^1}"] \arrow[d, "i_F"] & A_{F^1} \arrow[d, "i^*"] \\
X^2 \arrow[r, hook, "x^2"] \arrow[rrr, bend right, "x^{F^2}"'] & P^{\Sigma,X^2}_{T^2} \arrow[r, hook, "\subseteq_{F^2}"] & P^{\Sigma,X^2}_{F^2} \arrow[r, two heads, "\equiv_{F^2}"] & A_{F^2}
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.4: Sub-Präsentationen

Definition 181 Erweiterte Auswertung Gegeben $h : X \to A$ Variablenzuweisung. $F(h) = (X, (F(h)_s)_{s \in S \cup \{\epsilon\}}$ (Syntaktische Präsentation des geschlossenen Sub-Systems von A, welches generiert wurde durch $h(X)$) ist die kleinste Menge von Formeln definiert durch

1. $(F(h)_s = P(h)_s)_{s \in S}$ und
2. $f(x) \in F(h)_\epsilon$, wenn $f \in O_{w,\epsilon}$, $f \in P(h)^w$, und f^A ist definiert für $(h*)^w(x)$

Corollary 182 Erweiterte Auswertung und Homos $k : A \to B$ ist Homo und $h : X \to A$ Variablenzuweisung $\Longrightarrow$ $F(h) \subseteq F(k \circ h)$

Corollary 183 Syntaktische Präsentation für ein System $\mathbf{A}_{F(id_A)} \approx A$, wobei $id_A : (A_s)_{s \in S} \to A$ ist die identische Variablenzuweisung definiert durch $a \mapsto a$ für alle $a \in (A_s)_{s \in S*}$

Corollary 184 Syntaktische Präsentation von Epis $e : B \twoheadrightarrow C$ ist epi $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}_{F(e)} \approx C$ und $\approx \circ x^{F(e)} = e$

2.3 Approximation

2.3.1 kommt nix

2.3.2 kommt nix

2.3.3 TODO: Pushout und Pullback

2.4 Varietät

2.4.1 Atomare Axiome

Definition 238 Atomares Axiom und Lösung Gegeben: $\Sigma = (S, O)$, atomares Axiom $a = (X, f)$ besteht aus einer endlichen Variablenmenge X und einer Formel $f \in F^{\Sigma,X}$.
Eine Variablenzuweisung $h : X \to B$ in ein Σ-System B löst das Axiom $A = (X, f)$, wenn es einen Homomorphismus $h^* : \mathbf{A}_a \to B$ gibt, so dass $h^* \circ x^a = h$.
Wenn h eine Lösung ist, schreiben wir $h \models a$

Proposition 239 Homomorphismus und Lösung $h : X \to B$ ist Lösung von atomarem Axiom $a = (X, f)$ in B und $k : B \to C$ ist ein Homomorphismus $\implies$ $k \circ h$ löst a in C, d.h. $k \circ h \models a$.

Definition 240 Gültigkeit atomarer Axiome $a = (X, f)$ ist gültig in einem algebraischen System B ($B \models a$), wenn jede Variablenzuweisung $h : X \to B$ a löst, d.h.
$B \models a$ wenn $\forall\, h : X \to B :: h \models a$.

Proposition 241 Gültigkeit ist abstrakt Wenn a atomares Axiom ist, $B \models a$, und $B \approx B' \implies B' \models a$.

Definition 242 Gefülltes algebraisches System Ein algebraisches System B ist gefüllt, wenn jede Trägermenge von B nicht leer ist (d.h. $B_s \neq \emptyset$ für alle $s \in S$)
$S' \subseteq S \implies B$ ist 'S'-gefüllt', wenn $B_s \neq \emptyset$ für alle $s \in S'$.

Proposition 244 Gültigkeit in Produkten a atomres Axiom, I indizierte Menge.
$(B_i \models a)_{i \in I} \implies \Pi(B_i)_{i \in I} \models a$

Proposition 245 Gültigkeit in extremalen Subsystem a atomares Axiom, $i : C \rightarrowtail B$ extremaler Mono, $B \models a \implies C \models a$

Definition 246: Homomorphe Bilder Algebraisches System C ist homomorphes Bild eines Systems B, wenn es einen subjektiven Homomorphismus $q : B \twoheadrightarrow C$ gibt.

(Notiz: Homomorphes Bild ist Spezialfall von Epi (Vgl. Prop 80) (Bedenke: Wenn surjektiv, dann Epi. Umgekehrt nicht))

Proposition 247: Gültigkeit in homomorphen Bildern $B \models a$, C homomorphes Bild von B, d.h. Es gibt einen surjektiven Homomorphismus $q : B \twoheadrightarrow C \implies C \models a$

Corollary 248: Gültigkeit in Produktkomponenten $a = (X, f)$ atomares Axiom und $S_X \subseteq S$ (Teilmenge der Sorten für welche a Variablen hat), d.h. $s \in S_X \Leftrightarrow X_s \neq \emptyset$. $\Pi(B_i)_{i \in I} \models a$ und $(B_{i,s} \neq \emptyset)_{i \in I, s \in S_X}$ ('S_X' gefüllt)
$\implies B_i \models a \; \forall \, i \in I$ (jede Komponente des Produktes erfüllt das Axiom).

Lemma 249: Variablenzuweisung in approximierte Systeme (ausgelassen)

Proposition 250: Gültigkeit in approximierte Systemen (ausgelassen)

2.4.2 Atomare Spezifikationen

Definition 251: Atomare Spezifikation, Varietäten Atomare Spezifikation $ASpec = (\Sigma, \Phi)$ besteht aus einer Signatur Σ und einer Menge von atomaren Axiomen Φ wrt. Σ. $B \in Sys(\Sigma)$ erfüllt die Spezifikation (geschrieben: $B \models ASpec$), wenn $B \models a$ für alle $a \in \Phi$.
Die volle Subkategorie von $Sys(\Sigma)$, welches alle Systeme beinhaltet, die die Spezifikation $ASpec = (\Sigma, \Phi)$ erfüllen, wird bezeichnet als Sys($ASpec$) oder Sys(Φ).
Eine volle Subkategorie $\mathbb{K}$ aller Σ-Systeme wird eine Varietät genannt, wenn es eine atomare Spezifikation (Σ, Φ) gibt, so dass $\mathbb{K} = Sys(\Phi)$

Proposition 252: Varietäten sind abstrakt Jede Varietät ist isomorph-geschlossen. Siehe Defi 253.

Definition 253: Bündel atomarer Axiome, Lösungen Ein Bündel $\mathcal{B}$ atomarer Axiome mit den selben Variablenmengen X ist eine syntaktische Präsentation $\mathcal{B} = (X, F \subseteq F^{\Sigma,X})$. C erfüllt ein Bündel (geschrieben: $C \models \mathcal{B}$), wenn jede Variablenzuweisung $h : X \to C$ erweitert werden kann auf einen Homomorphismus $h^* : \mathbf{A}_\mathcal{B} \to C$, so dass $h^* \circ^\mathcal{B} = h$

Lemma 254: Bündel definieren Co-Limiten (ausgelassen)

Proposition 255: Bündel atomarer Axiome $(a_i)_{i \in I}$ ist Familie atomarer Axiome mit den selben Variablenmengen X, d.h. $a_i = (X, f_i)$ für alle $i \in I$
$\Longrightarrow$ C erfüllt alle Axiome $((C \models a_i)_{i \in I}) \Leftrightarrow C$ erfüllt das Bündel $\mathcal{B} = (X, \{f_i :: i \in I\})$, d.h. $C \models \mathcal{B}$

Lemma 256: Co-well-powered Basis $Sys(\Sigma)$ its co-well-powered.

Corollary 257: Varietäten sind episch-reflektive Subkategorien Jede Varietät $\mathbb{K} \subseteq Sys(\Sigma)$ ist episch-reflektive Subkategorie von $Sys(\Sigma)$.

Theorem 258: Birkhoffs Charakterisierung Eine volle Unterkategorie $\mathbb{K}$ von $Sys(\Sigma)$ ist eine Varietät $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}$ ist geschlossen bis auf Produkte, extremale Subobjekte, homomorphe Bilder und approximierte Systeme.

2.4.3 Spezifikationsproblem und einfache Lösung

Definition 259: Spezifikationsproblem, einfache Lösung Ein Spezifikationsproblem ist gegeben durch eine Signatur Σ und entweder

1. Ein Σ-System K oder
2. Eine volle und isomorph-geschlossene Subkategorie $\mathbb{K} \subseteq Sys(\Sigma)$

Eine einfache Lösung für das Spezifikationsproblem ist eine atomare Spezifikation $ASpec = (\Sigma, \Phi)$, so dass

1. K ist initial in $Sys(ASpec)$ oder
2. $Sys(ASpec) = \mathbb{K}$