

Inhaltsverzeichnis

1 Signaturen, Systeme und Homomorphismen	1
1.1 Homomorphismus	1
1.2 Kategorien	1
1.3 Derived Systems	2
1.3.1 Subsysteme	2
Subsysteme	2
Intersection (Schnitt) und Union (Vereinigung)	3
Verband	4
Abschluss Operatoren (Closure Operators) & leere Systeme	4
Inklusions-Homomorphismus	4
Homomorphe Bilder	5
1.3.2 Quotient	6
Kongruenz	6
Verband	6
Abschluss Operator	6
Kernel	6
Quotient	7
Natürlicher Homomorphismus	7
Operatoren auf Relationensfamilien	7
1.4 Mono, Epi und Isomorphismen	8
1.4.1 Isomorphismus	8
1.4.2 Generelle Mono- und Epimorphismen	10
1.4.3 Spezielle Mono- und Epimorphismen	11
1.4.4 Faktorisierungssysteme	12
Faktorisierungssysteme	12
Homomorphismus Theoreme	13
Surjektive / volle injektive Homomorphismen	14
1.5 System Komposition	15
Parallele Komposition & Variante Systeme	15

1.6	Produkte & Co-Produkte	16
2	Spezifikation	20
2.1	Abstraktion: Episch reflektive Subkategorien	20
2.2	Syntaktifizierung	23
2.2.1	Terme und Termsysteme	23
2.2.2	Formeln und syntaktische Präsentation	26
2.3	Approximation	29
2.3.1	kommt nix	29
2.3.2	kommt nix	29
2.3.3	Pushout und Pullback	29
2.4	Varietät	33
2.4.1	Atomare Axiome	33
2.4.2	Atomare Spezifikationen	34
2.4.3	Spezifikationsproblem und einfache Lösung	36
2.4.4	Construction of the Reflection	36
2.5	Quasi Varietäten	39
2.5.1	Horn-Typ Axiome	39
2.5.2	HornTyp Spezifikation	40

1 Signaturen, Systeme und Homomorphismen

1.1 Homomorphismus

Definition 4 (Def) Zwei algebraische Systeme mit selber Signatur $\Sigma h : A \rightarrow B$ Familie totaler Abbildungen.

Wenn f^A für x definiert ist, dann muss f^B für $h^w(x)$ definiert sein. [$f^B(h^w(x)) = h^v(f^A(x))$]

Notation 5 (Hom. als Familie von Abbildungen (h))

Proposition 6 (Identity) Die Identität ist ein Homomorphismus. $id : A \rightarrow A$.

Proposition 7 (Komposition) Wenn $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ homomorphismen, dann ist $g \circ f$ wieder ein Homomorphismus.

Fact 8 (Eigenschaften von Identitäten und Kompositon) Identitäten kürzbar und Klammern 'verschiebbar' (Assoziativität).

1.2 Kategorien

Definition 9 (Def) $C = (O, M, id, \circ)$ [Objects, Morphism-Sets, Identitäten, Kompositionen]

Identitäten kürzbar und Klammern 'verschiebbar' (Assoziativität).

Definition 12 (Kategorien von Mengen & Abbildungen) $C = (O^{Set}, M^{Set}, id^{Set}, \circ^{Set})$
 [Die Klasse aller Mengen, die Menge aller Abbildungen, die identitatische Abbildung, Kompositionen von Abbildungen]

Definition 13 (Kategorien algebraischer Systeme) $Sys(\Sigma)$ ist Kategorie aller Σ Systeme und Homomorphismen zwischen diesen.

Sys(Σ) die Kategorie aller Σ Systeme in der alle Operationsnamen als totale Funktionen interpretiert werden und alle Homomorphismen zwischen diesen.

1.3 Derived Systems

1.3.1 Subsysteme

Subsysteme

Definition 15 (Def) Schwaches Subsystem ($B \subseteq A$), wenn:

1. Die Trägermengen in Teilmengenrelation $B_s \subseteq A_s$
2. Wenn Operation im Untersystem definiert ist und y liefert, muss sie auch im "drüber liegendenSSystem sein und y liefern.

Volles Subsystem $B \subseteq_f A$, wenn schwaches Untersystem und:

1. $f^A(x) = y$ definiert und $x, y \in B_s$ dann $f^B(x) = y$

Geschlossenes Subsystem $B \subseteq_c A$, wenn volles Untersystem und:

1. $f^A(x) = y$ definiert und $x \in B_s$ dann $y \in B_s$

Proposition 16 (Geschlossene Subsysteme von totalen Systemen) Jedes geschlossene Subsystem eines totalen Systems ist total.

Intersection (Schnitt) und Union (Vereinigung)

Definition 17 Schnitt Sei $\mathfrak{B} = (B^i \subseteq A)_{i \in I}$ ein nicht leeres Schnitt. Der Schnitt $\bigcap \mathfrak{B}$ ist definiert als

1. Sortenweiser Schnitt über die Trägermengen ($s \in S: (\bigcap \mathfrak{B})_s = \bigcap_{i \in I} B_s^i$).
2. Alle Operationen zum sortenweisen Schnitt der Trägermengen ($f \in O: f^{\bigcap \mathfrak{B}} = \bigcap_{i \in I} f^{B^i}$).

Proposition 18 Eigenschaften der Schnitte von Subsystemen

1. $\bigcap \mathfrak{B}$ ist ein algebraisches System. D.h. die Operationen sind wohldefiniert.
2. Der Schnitt ist selber Subsystem von A ($\bigcap \mathfrak{B} \subseteq A$)
 - a) *Notiz CT*: Der Schnitt über volle Untersysteme ist wieder voll
 - b) *Notiz CT*: Der Schnitt über geschlossene Untersysteme ist wieder geschlossen
3. Der Schnitt ist Untersystem jedes B^i
4. Für alle Subsysteme X von B^i gilt, dass sie Untersystem von $\bigcap \mathfrak{B}$ sind.

Definition 20 Vereinigung Sei $\mathfrak{B} = (B^i \subseteq A)_{i \in I}$ eine nicht leere Vereinigung. Die Vereinigung $\bigcup \mathfrak{B}$ ist definiert als

1. Sortenweise Vereinigung der Trägermengen ($s \in S: (\bigcup \mathfrak{B})_s = \bigcup_{i \in I} B_s^i$).
2. Alle Operationen zur sortenweisen Vereinigung der Trägermengen ($f \in O: f^{\bigcup \mathfrak{B}} = \bigcup_{i \in I} f^{B^i}$).

Proposition 21 Eigenschaften der Vereinigungen von Subsystemen

1. $\bigcup \mathfrak{B}$ ist ein algebraisches System. D.h. die Operationen sind wohldefiniert.
2. Die Vereinigung ist selber Subsystem von A ($\bigcup \mathfrak{B} \subseteq A$)
3. B^i ist Untersystem der Vereinigung ($\bigcup \mathfrak{B}$) [Unterschied zum Schnitt!]
4. Für alle Obersysteme X von B^i gilt, dass $\bigcup \mathfrak{B}$ Untersystem von X ist [Unterschied zum Schnitt!].

Verband

Proposition 23 Verband von Subsystemen Die Menge von (i) allen (schwachen), (ii) allen vollen und (iii) allen geschlossenen Untersystemen ist ein kompletter Verband bis auf Inklusion.

Abschluss Operatoren (Closure Operators) & leere Systeme

Corollary 24 Abschluss Operatoren $B = (B_s \subseteq A_s)_{s \in S}$, dann gibt es ein kleinstes volles ($[B]_s^f$) und kleinstes geschlossene ($[B]_s^c$) Subsystem, dass B enthält.

Definition 25 Leeres System Das leere System \mathcal{I} besteht nur aus leeren Komponenten.

Proposition 26 Leeres System als UnterSystem

1. \mathcal{I} ist immer das kleinste Subsystem
2. $[\mathcal{I}]^f$ ist das kleinste volle Subsystem
3. $[\mathcal{I}]^c$ ist das kleinste geschlossene Subsystem

Proposition 27 Eigenschaften von Abschluss Operatoren $x \in \{c, f\}$

1. $B \subseteq [B]^x$
2. $B \subseteq B' \implies [B]^x \subseteq [B']^x$
3. $[[B]^x]^x = [B]^x$

Proposition 28 Endlich generierte Systeme A ist endlich erzeugt, wenn $A = \sqcup G^c$ für eine endlich generierte Familie von Mengen $G = (G_s \subseteq A_s)_{s \in S}$

Inklusions-Homomorphismus

Proposition 29 Inklusions-Homomorphismus $A \subseteq B$, der Inklusions-Morphismus $\subseteq: A \rightarrow B$ ist definiert für $a \in A_s$ durch $\subseteq(a) = a$

Das Bild eines beliebigen Homomorphismus $h: A \rightarrow B$ ist ein UnterSystem von B .

Homomorphe Bilder

Definition 30 Bild eines Homomorphismus Trägermengen und Operationen werden abgebildet.

Proposition 31 Bild eines Homomorphismus Das Bild eines Homomorphismus ist ein Untersystem.

Proposition 32 Bilder von Kompositionen $h : A \rightarrow B$ and $k : B \rightarrow C$ $k \circ h(A) \subseteq k(B)$

Definition 33 Volle und geschlossene Homomorphismen $h : A \rightarrow B$ ist voll bzw. geschlossen wenn das Bild ($h(A)$) ein volles bzw. geschlossenes Untersystem der Co-Domain B ist: $h(A) \subseteq^x B$ $x \in \{f, c\}$

Jeder volle Homomorphismus von einem totalen System A in ein System B ist geschlossen.

Definition 35 Konstruktion von Abschlüssen Sei A System und $(B_s \subseteq A_s)_{s \in S}$ Familie von Teilmengen auf den Trägermengen. Die Operatoren sind dazu da, um ein Untersystem geschlossen/voll zu machen. Wir definieren

1. Konstanten dazu: $\lceil B \rceil^0 = B \cup \left(\left\{ y \in A_s :: f^A(*) = (p, y, q), f \in O_{\epsilon, v} \right\} \right)_{s \in S}$
2. Notwendige Funktionswerte:

$$\lceil B \rceil^{i+1} = \left(\lceil B \rceil_s^i \cup \left\{ y \in A_s :: f^A(x) = (p, y, q), f \in O_{w, v}, x \in (\lceil B \rceil^i)^w, |w| \geq 1 \right\} \right)_{s \in S}$$
3. 1 und 2 zusammen: $\lceil B \rceil^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \lceil B \rceil^i$
4. Macht es voll: $\widehat{B} = \left(B, \left(f^A \cap (B^w \times B^v) \right)_{f \in O_{w, v}} \right)$
5. Macht es geschlossen (3 und 4 zusammen): $\tilde{B} = \widehat{\lceil B \rceil^*}$

Proposition 36 Konstruktion von Abschlüssen $\lceil B \rceil^f = \widehat{B}$ und $\lceil B \rceil^c = \tilde{B}$

Lemma 37 Abschlüsse und Homomorphismen $h : A \rightarrow C$ und $B_s \subseteq A_s$ Familie von Teilmengen der Trägermengen von A . Dann gilt: $h([\underline{B}]^c) \subseteq [\underline{h(B)}]^c$

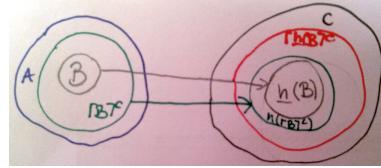


Abbildung 1.1: Abschlüsse und Homomorphismen

1.3.2 Quotient

Kongruenz

Definition 38 Kongruenzrelation Äquivalenzrel. &: $x \equiv^w x'$, $f^A(x) = y, f^A(x') = y' \Rightarrow y \equiv^v y'$

Proposition 39 Schnitt von Kongruenzen $(\equiv_i)_{i \in I}$ auf A : $\bigcap_{i \in I} \equiv^i$ ist Kongruenz auf A .

Verband

Corollary 40 Verband von Kongruenzen Die Menge $\mathfrak{C}^A = \{\equiv :: \equiv\}$ von Kongruenzrelationen auf einem algebraischen System A ist ein vollständiger Verband bis auf Inklusion.

Abschluss Operator

Corollary 41 Abschluss Operator Kleinste Kongruenz $[\underline{r}]_A$ auf A die r enthält.

Kernel

Definition 42 Kern eines Homomorphismus Kern h^\equiv beinhaltet all die Elemente, die durch den Homomorphismus h auf das Gleiche abgebildet werden. $h_s^\equiv = \{(a_1, a_2) :: h_s(a_1) = h_s(a_2)\}$

Proposition 43 Kern h^\equiv ist eine Kongruenz auf der h -Domain.

Proposition 44 Kern einer Komposition $m^{\equiv} \subseteq (n \circ m)^{\equiv}$

Quotient

Definition 45 Quotient Gegeben System A und \equiv auf A . Der Quotient A_{\equiv}

1. Kongruente Elemente der Trägermenge in eine Äquivalenzklasse schmeissen.
2. $f^{A_{\equiv}}([x]^w) = [y]^v$, wenn $f^A(x) = y$

Proposition 46 Quotient von totalen Systemen Jeder Quotient eines totalen Systems ist total.

Natürlicher Homomorphismus

Proposition 47 Natürlicher Homomorphismus Bildet Elemente der Trägermengen in ihre jeweilige Äquivalenzklasse ab ($\equiv: A \rightarrow A_{\equiv}$).

Proposition 48 Natürlicher Homomorphismus Jeder natürlicher Homomorphismus ist geschlossen.

Proposition 49 Kongruenz Theorem \equiv^1 und \equiv^2 sind Kongruenzen auf A , sodass $\equiv^1 \subseteq \equiv^2$, dann gibt es einen Homomorphismus $\equiv^{2-1}: A_{\equiv^1} \rightarrow A_{\equiv^2}$ mit $\equiv^{2-1} \circ \equiv^1 = \equiv^2$.

Operatoren auf Relationensfamilien

Proposition 50 Operatoren auf Relationensfamilien

1. Symmetrie
2. Reflexivität
3. $r_s^1 = r_s$
4. Rekursiver Verkettung
5. $r^* =$ Vereinigung von 1 bis 4

6. $c^0(r)_s = r_s$
7. $c^{i+1}(r)_s = c^i(r)_s \cup \{(y_i, y'_i) :: f \in O_{w,psq}, i = |p| + 1, x (c^i(r))^w x', f^A(x) = y, f^A(x') = y'\}$
8. Vereinigung von 6 und 7

Lemma 51

1. r^* ist Familie transitiver Relationen.
2. $c^*(r)$ erfüllt Kongruenzbedingungen (Definition 38)

Lemma 52 Wenn eine Relation $r \subseteq A \times A$ reflexiv ist und $r \subseteq s \subseteq A \times A$, dann ist s auch reflexiv.

Lemma 53 Gegeben symmetrische Relation r , dann $c^*(r)$ und r^* auch symmetrisch.

Lemma 54 Gegeben Relation r auf einem totalen A . R erfüllt Kongruenzbedingung (Def 38). Dann erfüllt auch r^* die Kongruenzbedingung.

Proposition 55 Konstruktion der generierten Kongruenz A total und r , dann $[r] = (c^* (sym (r \cup r^0)))^*$.

1.4 Mono, Epi und Isomorphismen

1.4.1 Isomorphismus

Definition 57 Sektion, Retraktion und Isomorphismus Morphisms $m : A \rightarrow B$ in einer Kategorie C .

1. m ist Sektion wenn $m^{-1} \circ m = id_A$
2. m ist Retraktion wenn $m \circ m^{-1} = id_B$
3. m ist Isomorphismus wenn 1 und 2.

Proposition 58/59 Kompositionen von Sektion/Retraktion

1. n, m Sektionen/Retraktionen $\Rightarrow n \circ m$ Sektion/Retraktion.
2. $n \circ m$ Sektion/Retraktion $\Rightarrow m$ ist Sektion/ n ist Retraktion.

Proposition 60 Eigenschaften von Isomorphismen

1. Alle Identitäten sind Isomorphismen
2. m Isomorphismus $\Rightarrow m^{-1}$ Isomorphismus.
3. n, m Isomorphismen $\Rightarrow n \circ m$ Isomorphismus.
4. $n \circ m$ Isomorphismus und (m Retraktion oder n Sektion) $\Rightarrow m$ und n Isomorphismen.
5. Isomorphismus $i : a \rightarrow b \Rightarrow a \approx b$ ist eine Äquivalenz.

Proposition 61 Isomorphismus in Set Kategorie Set, Map $f : a \rightarrow b$

1. f ist Sektion, wenn f injektiv ist und $a \neq \emptyset$
2. f ist Retraktion, wenn f surjektiv
3. f ist Isomorphismus, wenn f bijektiv

Proposition 62 Notwendige Bedingungen für Isomorphismen in $Sys(\Sigma)$ $h : A \rightarrow B$ ist Isomorphismus in $Sys(\Sigma) \Rightarrow$

1. h ist injektiv in allen Komponenten
2. h ist surjektiv in allen Komponenten
3. h ist voll

Proposition 63 Hinreichende Bedingungen für Isomorphismen in $Sys(\Sigma)$ Wenn h bijektiv (Prop 62: 1 und 2) und voll (Prop 62: 3) ist, dann ist es ein Isomorphismus.

Corollar 64 Isomorphismus $Sys(\Sigma)$ und $\underline{Sys}(\Sigma)$

1. Die Isomorphismen in $Sys(\Sigma)$ sind bijektive und volle Homomorphismen.
2. Die Isomorphismen in $\underline{Sys}(\Sigma)$ sind bijektive Homomorphismen.

1.4.2 Generelle Mono- und Epimorphismen

Monomorphismus

Definition 65 (Def)

$$m \circ p = m \circ q \Rightarrow p = q$$

Proposition 66

Jede Sektion ist monisch.

Proposition 67 (Komposition)

- (1) n, m monic $\Rightarrow n \circ m$ monic.
- (2) $n \circ m$ monic $\Rightarrow m$ monic.

Proposition 68 (Geschlossen unter Iso)

$m : a \rightarrow b$ ist monisch, $a \approx a'$, $b \approx b'$
 $\Rightarrow \approx \circ m \circ \approx : a' \rightarrow b'$ ist mono.

Definition 69 (Abstraktes Subobjekt)

Abstraktes Subobjekt $(a, m : a \rightarrowtail b)$ eines Objektes b in Kategorie C

- ist ein Objekt $a \in C$
- zusammen mit einem Mono $m : a \rightarrowtail b$

Zwei Subobjekte

- $(a_1, m_1 : a_1 \rightarrowtail b)$
- $(a_2, m_2 : a_2 \rightarrowtail b)$

des selben Objektes b sind die selben abstrakten Subobjekte wenn es einen Iso $\approx : a_1 \rightarrow a_2$ gibt, so dass $m_1 = m_2 \circ \approx$.

Epimorphismus

Definition 73 (Def)

$$p \circ e = q \circ e \Rightarrow p = q$$

Proposition 74

Jede Retraktion ist episch.

Proposition 75 (Komposition)

- (1) n, m epic $\Rightarrow n \circ m$ epic.
- (2) $n \circ m$ epic $\Rightarrow n$ epic.

Proposition 76 (Epi ist abstr. 'notion')

$m : a \rightarrow b$ ist episch, $a \approx a'$, $b \approx b'$
 $\Rightarrow \approx \circ m \circ \approx : a' \rightarrow b'$ ist episch.

Definition 77 (Abstrakter Quotient)

Abstrakter Quotient $(b, e : a \twoheadrightarrow b)$ eines Objektes a in Kategorie C

- ist ein Objekt $b \in C$
- zusammen mit einem Epi $e : a \twoheadrightarrow b$

Zwei Quotienten

- $(b_1, e_1 : a \twoheadrightarrow b_1)$
- $(b_2, e_2 : a \twoheadrightarrow b_2)$

des selben Objektes a sind die selben abstrakten Quotienten, wenn es einen Iso $\approx : b_1 \rightarrow b_2$ gibt, so dass $\approx \circ e_1 = e_2$.

Monomorphismus

Proposition 70 (Monische Retraktion)
Eine monische Retraktion ist ein Isomorphismus.

Proposition 71 (Mono in Set)

Hom. in *Set* ist monisch \Leftrightarrow er injektiv ist.

Proposition 72 (Mono in *Sys*(Σ))

Hom. in *Sys*(Σ) ist monisch \Leftrightarrow er injektiv in allen Komponenten ist.

Epimorphismus

Proposition 78 (Epische Sektionen)

Eine epische Sektion ist ein Isomorphismus

Proposition 79 (Epi in Set)

Hom. in *Set* ist episch \Leftrightarrow er surjektiv ist.

Proposition 80 (Hinreichende Bedingungen für Epis in *Sys*(Σ))

Jeder surjektive Homomorphismus in *Sys*(Σ) ist episch.

Proposition 82 (Epi in *Sys*(Σ))

Hom. in *Sys*(Σ) ist episch \Leftrightarrow das kleinste, geschlossene Subsystem von B induziert durch das Bild von h übereinstimmt mit B , das heißt: $\underbrace{[h(A)]^C}_\text{Def.35} = B$.

1.4.3 Spezielle Mono- und Epimorphismen

Extremale Monomorphismus

Definition 83 (Extremaler Mono)

Mono $m : a \rightarrow b$ ist extremal, wenn für jede Zerlegung $m = f \circ e$ gilt: ist e episch dann ist e auch Iso.

Proposition 84

Jede Sektion ist ein extremaler Mono.

Proposition 85 (Komposition)

$n \circ m$ extremal Mono $\Rightarrow m$ extremal Mono.

Extremale Epimorphismus

Definition 89 (Extremale Epis)

Epi $e : a \rightarrow b$ ist extremal, wenn für jede Zerlegung $e = m \circ f$ gilt: ist m monisch dann muss m auch Iso sein.

Proposition 90

Jede Retraktion ist ein extremaler Epi.

Proposition 91 (Komposition)

$e \circ f$ extremal Epi $\Rightarrow e$ extremal Epi.

Extremale Monomorphismus

Proposition 86 (Extr. Mon. ist abstr. 'Notion')

$m : a \rightarrow b$ ist extremaler Mono, $a' \approx a$, $b \approx b' \Rightarrow \approx \circ m \circ \approx$ ist extremaler Mono.

Notiz: Jeder Mono in *Set* ist extremal.

Proposition 87 (Extr. Mono in $Sys(\Sigma)$)

Hom. in $Sys(\Sigma)$ ist extremaler Mono \Leftrightarrow er injektiv und geschlossen.

Extremale Epimorphismus

Proposition 92 (Extr. Epi ist abstr. 'Notion')

$e : a \rightarrow b$ ist extremaler Epi, $a' \approx a$, $b \approx b' \Rightarrow \approx \circ e \circ \approx$ ist extremaler Epi.

Notiz: Jeder Epi ist *Set* ist extremal. Extreme Epis sind ein geeignetes Modell zur Abstraktion von Quotienten in $Sys(\Sigma)$

Proposition 93 (Extr. Epi in $Sys(\Sigma)$)

Hom. in $Sys(\Sigma)$ ist extremaler Epi \Leftrightarrow er surjektiv und voll.

1.4.4 Faktorisierungssysteme

Faktorisierungssysteme

Definition 95 Faktorisierungssystem \mathcal{E} und \mathcal{M} sind Klassen von Morphismen in C . (\mathcal{E} und \mathcal{M}) ist ein Faktorisierungssystem, wenn

1. Jeder Morphismus p lässt sich in $p = m \circ e$ zerlegen.
2. \mathcal{E} und \mathcal{M} sind geschlossen unter Komposition mit Isomorphie
3. Wenn $m \circ p = q \circ e$, dann gibt es einen eindeutigen Morphismus d (Diagonale), so dass $m \circ d = q$ und $d \circ e = p$ (siehe 1.4.4).

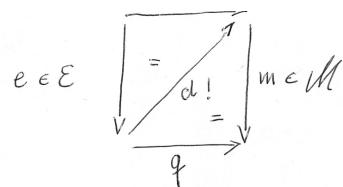


Abbildung 1.2: Diagonale

Proposition 96 Eindeutige Faktorisierung Faktorisierungen sind eindeutig bis auf Isomorphie:

1. $(e_1 : a \rightarrow c_1, m_1 : c_1 \rightarrow b)$,
 $(e_2 : a \rightarrow c_2, m_2 : c_2 \rightarrow b)$ sind zwei Faktorisierungen für den selben Morphismus
 $p : a \rightarrow b$, d.h. $m_1 \circ e_1 = p = m_2 \circ e_2$
 \Rightarrow es gibt Iso $i : c_1 \rightarrow c_2$ mit $i \circ e_1 = e_2$ und $m_2 \circ i = m_1$.
2. $(e : a \rightarrow c, m : c \rightarrow b)$ ist Faktorisierung für $p : a \rightarrow b$ und $i : c \rightarrow d$ ist ein Isomorphismus $\Rightarrow (i \circ e : a \rightarrow d, m \circ i^{-1} : d \rightarrow b)$ ist auch Faktorisierung für $p : a \rightarrow b$

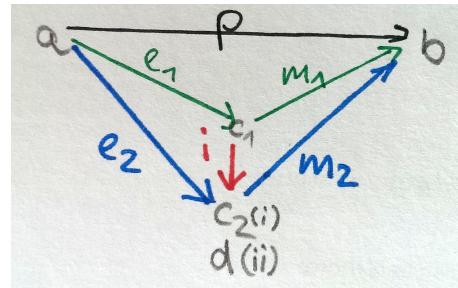


Abbildung 1.3: Eindeutige Diagonale

Proposition 96 Komposition Wenn $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ ein Faktorisierungssystem ist, dann sind die Klassen \mathcal{E} und \mathcal{M} geschlossen unter Komposition.

Proposition 97 Epi-/Mono-Faktorisierung in Set In Set: \mathcal{E} Epimorphismen und \mathcal{M} Monomorphismen

Homomorphismus Theoreme

Theorem 1

Theorem 99 Homom Theorem 1

$h : A \rightarrow B$ surjektiv und voller Hom. und
 $k : A \rightarrow C$ ist Hom. so dass $h^\equiv \subseteq k^\equiv$, d.h.
der Kern von k beinhaltet den Kern von h
 \Rightarrow es gibt einen eindeutigen Homom.
 $k^* : B \rightarrow C$ so dass $k^* \circ h = k$.
 $\equiv^h = \equiv^k \Rightarrow k^*$ ist injektiv.

Theorem 2

Theorem 103 Homom Theorem 2

$h : A \rightarrow B$ injektiver Homom. und
 $k : C \rightarrow B$ ist Hom. so dass $k(C) \subseteq h(A)$
 \Rightarrow es gibt einen eindeutigen Homom.
 $k^* : C \rightarrow A$ mit $h \circ k^* = k$
 $[k(C)]^c = h(A)$, then $k^* \Rightarrow k^*$ ist epi.

Theorem 1

Lemma 100 Invarianter Kern

m injektiver Homom. $\Rightarrow \equiv^{m \circ h} = \equiv^h$ für alle Hom., die mit m komponiert werden können.

Corollary 101 Extremal epische Faktorisierungen in $Sys(\Sigma)$

$(\mathcal{E}^x, \mathcal{M})$ ist ein Faktorisierungssystem wobei \mathcal{E}^x extremaler Epi und \mathcal{M} Monomorphismus

Corollary 102 Komposition extremer Epis

$e_1 : A \rightarrow B, e_2 : B \rightarrow C$ sind zwei extreme Epis in $Sys(\Sigma) \Rightarrow e_2 \circ e_1$ ist extremer Epi.

Theorem 2

Lemma 104 Invariante Subträgermengen

$e : A \rightarrow B$ epi $\Rightarrow [h(B)]^c = [h \circ e(A)]^c$ für alle Homomorphismen $h : B \rightarrow C$.

Corollary 105 Extremal mono Faktorisierungen in $Sys(\Sigma)$

$(\mathcal{E}, \mathcal{M}^x)$ ist ein Faktorisierungssystem wobei \mathcal{E} Epi und \mathcal{M}^x extremer Monomorphismus

Corollary 106 Komposition extremer Monos

$m_1 : A \rightarrow B, m_2 : B \rightarrow C$ sind zwei extr. Monos in $Sys(\Sigma) \Rightarrow m_2 \circ m_1$ ist extr. Mono.

Surjektive / volle injektive Homomorphismen

Proposition 107 Surjektive und volle injektive Homos Konzept der surjektiven und Konzept der vollen inkjektiven Homos ist abstrakt. D.h. Homo $h : A \rightarrow B$ surjektiv/voll und injektiv und $A \approx A'$ und $B \approx B' \Rightarrow \approx \circ m \circ \approx$ ist surjektiv/voll und injektiv.

Corollary 109 Surjektive / voll injektive Faktorisierung in $Sys(\Sigma)$ $(\mathcal{S}, \mathcal{FI})$ Faktorisierungssystem in $Sys(\Sigma)$ wobei \mathcal{S} die Klasse aller surjektiven und \mathcal{FI} aller vollen injektiven Morphismen ist.

1.5 System Komposition

Parallele Komposition & Variante Systeme

Parallele Komposition

Definition 110 Parallelle Komposition

Eine parallele Komposition $A \times B$

- (i) $\forall s \in S : (A \times B)_s = A_s \times B_s$
- (ii) $\forall f \in O_{w,v}, x \in (A \times B)^w :$
 $f^{A \times B}(x) = (y_A \times_v y_B)$

wenn $f^A(x_A) = y_A$ und $f^B(x_B) = y_B$

Notiz: Parallelle Komposition zweier totaler Systeme ist total.

Proposition 111 Eigenschaften paralleler Komposition

A, B, C sind Systeme \Rightarrow folgende parallele Kompositionen sind Isomorph

- (1) $A \times B \approx B \times A$ (Kommutativ)
- (2) $A \times (B \times C) \approx (A \times B) \times C$ (Assoziativ)
- (3) $A \times \mathcal{I} \approx \mathcal{I}$ (\mathcal{I} eine Art null-system)

Definition 112 Projektionen

$A \times B \Rightarrow$ die Projektionen

- $(p_s^A : (A \times B)_s \rightarrow A_s)_{s \in S}$ und
- $(p_s^B : (A \times B)_s \rightarrow B_s)_{s \in S}$ sind def. durch:

Für $x \in (A \times B)_s$:

- (1) $p_s^A(x) = x_A$ und
- (2) $p_s^B(x) = x_B$

Proposition 113 Projektionen

Die Projektionen p^A und p^B sind Homoms.

Proposition 114 Eindeutige Homomorphismen in paralleller Komposition

$h, k : C \rightarrow (A \times B)$ Homomorphismen mit

- (1) $p_A \circ h = p_A \circ k$ und (2) $p_B \circ h = p_B \circ k$

$$\Rightarrow h = k$$

Variante Systeme

Definition 115 Variante Systeme

Eine variantes System $A + B$

- (i) $\forall s \in S : (A + B)_s = (A_s \uplus B_s)_{| \equiv^{\mathcal{I}}}$
 $(\equiv^{\mathcal{I}}$ siehe Skript Seite 28)

- (ii) $\forall f \in O_{w,v}, [x] \in (A + B)^w :$

$$f^{A+B}[x] = \begin{cases} [y_A] & \text{wenn } x \in A^w \text{ und } f^A(x) = y_A \\ [y_B] & \text{wenn } x \in B^w \text{ und } f^B(x) = y_B \end{cases}$$

Notiz: Variantes System zweier totaler Systeme muss nicht total sein.

Proposition 116 Eigenschaften varianter Systeme

A, B, C sind Systeme \Rightarrow folgende variante Systeme sind Isomorph

- (1) $A + B \approx B + A$ (Kommutativ)
- (2) $A + (B + C) \approx (A + B) + C$ (Assoziativ)
- (3) $A + \mathcal{I} \approx A$ (\mathcal{I} eine Art neutrales System)

Definition 117 Einbettungen

$A + B \Rightarrow$ die Einbettungen

$$(i_s^A : A_s \rightarrow (A + B)_s)_{s \in S} \text{ und}$$

$$(i_s^B : B_s \rightarrow (A + B)_s)_{s \in S} \text{ sind def. durch:}$$

- (1) Für $x \in A_s$: $i_s^A(x) = [x]$ und
- (2) Für $x \in B_s$: $i_s^B(x) = [x]$.

Proposition 118 Einbettungen

Die Einbettungen i^A und i^B sind Homoms.

Corollary 119 Injektive Einbettungen

Signatur ohne Konstanten \Rightarrow Einbettungen: injektiv und geschlossen.

Proposition 120 Eindeutige Homomorphismen aus varianten Systemen

$h, k : (A + B) \rightarrow C$ Homomorphismen mit

- (1) $h \circ i_A = k \circ i_A$ und (2) $h \circ i_B = k \circ i_B$

$$\Rightarrow h = k$$

1.6 Produkte & Co-Produkte

Produkte

Definition 121 Produkt

$\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}, \Pi\mathcal{A} = (\Pi\mathcal{A}, (p_i : \Pi\mathcal{A} \rightarrow a_i)_{i \in I})$:

\forall Objekte c und $(x_i : c \rightarrow a_i)$ gibt es eindeutig $u : c \rightarrow \Pi\mathcal{A}$ so dass $p_i \circ u = x_i$.

u auch genannt $\langle x_i \rangle_{i \in I}$.

Das Produkt ist endlich wenn I endlich.

Siehe Abbildung 1.4(a)

Proposition 122 Produkt ist abstrakt

(1) $\Pi_1\mathcal{A}$ und $\Pi_2\mathcal{A} \Rightarrow \approx : \Pi_1\mathcal{A} \rightarrow \Pi_2\mathcal{A}$,

so dass $(p_i^2 \circ \approx = p_i^1)_{i \in I}$

(2) $\Pi\mathcal{A}$ und $\approx : q \rightarrow \Pi\mathcal{A} \Rightarrow$

$(q, (p_i \circ \approx : q \rightarrow a_i)_{i \in I})$ ist Produkt von \mathcal{A}

Co-Produkte

Definition 137 Co-Produkt

$\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}, \sum\mathcal{A} = (\sum\mathcal{A}, (in_i : a_i \rightarrow \sum\mathcal{A})_{i \in I})$:

\forall Objekte c und $(x_i : a_i \rightarrow c)$ gibt es eindeutig $u : \sum\mathcal{A} \rightarrow c$ so dass $u \circ in_i = x_i$.

u auch genannt $\{x_i\}_{i \in I}$.

Das Co-Produkt ist endlich wenn I endlich.

Siehe Abbildung 1.4(b).

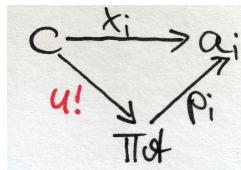
Proposition 138 Abstr Co-Produkt

(1) $\sum_1\mathcal{A}$ und $\sum_2\mathcal{A} \Rightarrow \approx : \sum_1\mathcal{A} \rightarrow \sum_2\mathcal{A}$,

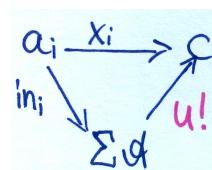
so dass $(\approx \circ in_i^1 = in_i^2)_{i \in I}$

(2) $\sum\mathcal{A}$ und $\approx : \sum\mathcal{A} \rightarrow q \Rightarrow$

$(q, (\approx \circ in_i : a_i \rightarrow q)_{i \in I})$ ist Co-Produkt v. \mathcal{A}

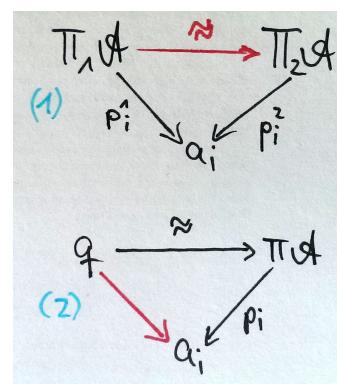


(a) Produkt

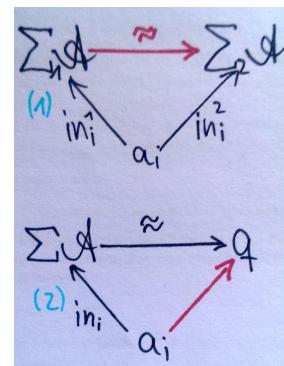


(b) Co-Produkt

Abbildung 1.4: Definitionen



(a) Produkt



(b) Co-Produkt

Abbildung 1.5: Abstrakte

Produkte

Proposition 123 Assoziativität und Kommutativität

$\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ \mathcal{J} ist Partition auf $I \Rightarrow \prod \mathcal{A} \approx \prod(\prod(a_i)_{i \in S})_{s \in \mathcal{J}}$ wenn alle teilnehmenden Produkte existieren.

Definition 125 Finales Objekt

Ein Objekt \mathcal{T} ist final in Kategorie \mathcal{C} , wenn es einen eindeutigen Morphismus von jedem anderen \mathcal{C} -Objekt in \mathcal{T} gibt.

Corollary 126 Leeres Produkt

Das finale Objekt einer Kategorie deckt sich mit dem leeren Produkt, d.h. $\mathcal{T} = \prod \emptyset$

Proposition 127 Neutrales Element für Produktoperator

Für alle Objekte $a : a \times \mathcal{T} \approx a$

Definition 128 Produktmorphismus

Geg. Fam. von Morphismen $(m_i : d_i \rightarrow c_i)_{i \in I}$ einer Kategorie \mathcal{C} mit den Produkten

$D = \prod(d_i)_{i \in I}$ und $C = \prod(c_i)_{i \in I}$.

Der Produktmorphismus $\prod(m_i)_{i \in I} : D \rightarrow C$ ist der eindeutige Morphismus für die Familie von Morphismen $(m_i \circ p_i : D \rightarrow c_i)_{i \in I}$, d.h. $\prod(m_i)_{i \in I} = \langle m_i \circ p_i \rangle_{i \in I}$

Co-Produkte

Proposition 139 Assoziativität und Kommutativität

$\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ \mathcal{J} ist Partition auf $I \Rightarrow \sum \mathcal{A} \approx \sum(\sum(a_i)_{i \in S})_{s \in \mathcal{J}}$ wenn alle teilnehmenden Co-Produkte existieren.

Definition 141 Initiales Objekt

Ein Objekt \mathcal{I} ist initial in Kategorie \mathcal{C} , wenn es einen eindeutigen Morphismus in jedes andere \mathcal{C} -Objekt von \mathcal{I} gibt.

Corollary 142 Leeres Co-Produkt

Das initiale Objekt einer Kategorie deckt sich mit leerem Co-Produkt, d.h. $\mathcal{I} = \sum \emptyset$

Proposition 143 Neutrales Element für Co-Produktoperator

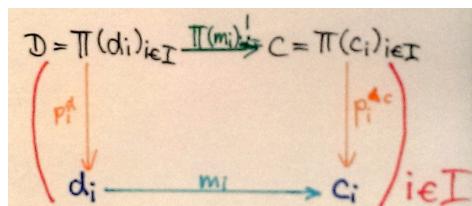
Für alle Objekte $a : a + \mathcal{I} \approx a$

Definition 144 Co-Produkt Morphism.

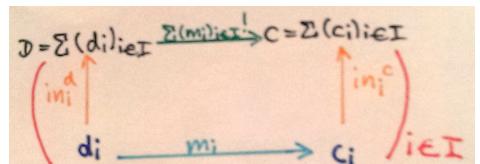
Geg. Fam. von Morphismen $(m_i : d_i \rightarrow c_i)_{i \in I}$ einer Kategorie \mathcal{C} mit den Co-Produkten

$D = \sum(d_i)_{i \in I}$ und $C = \sum(c_i)_{i \in I}$.

Der Co-Produktmorph. $\sum(m_i)_{i \in I} : D \rightarrow C$ ist der eindeutige Morphismus für die Familie von Morphismen $(in_i \circ m_i : d_i \rightarrow C)_{i \in I}$, d.h. $\sum(m_i)_{i \in I} = \{in_i \circ m_i\}_{i \in I}$



(a) Produkt



(b) Co-Produkt

Abbildung 1.6: - Morphismus

Produkte

Proposition 129 Produkt monischer Morphismen

$(m_i : d_i \rightarrow c_i)_{i \in I}$ mono $\Rightarrow (\Pi(m_i)_{i \in I} : \Pi(d_i)_{i \in I} \rightarrow \Pi(c_i)_{i \in I})$ ist auch monisch.

Proposition 130 Produkt extremaler Morphismen

In einer Kategorie C mit Faktorisierungssystem in Epis und extremeale Monos ist Produkt der extremalen Monos wieder extremal mono.

Definition 131 Kartesisches Produkt

Objekte $(a_i)_{i \in I}$ in Set. Das Produkt $(\Pi(a_i)_{i \in I}, (p_i : \Pi(a_i)_{i \in I} \rightarrow a_i)_{i \in I})$ ist definiert durch

- (1) $\Pi(a_i)_{i \in I} = \{c : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} a_i :: \forall i \in I : c(i) \in a_i\}$
- (2) $\forall i \in I$ and $c \in \Pi(a_i)_{i \in I}$: $p_i(c) = c(i)$

Proposition 132 Kartesisches Produkt

Das Kartesische Produkt ist das Produkt in der Kategorie Set.

Corollary 133 Finales Objekt in Set

Das finale Objekt in Set ist $\{\ast\}$.

Definition 134 Generelle Produkte in $Sys(\Sigma)$

Sei $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ eine Familie algebraischer Systeme, dann ist das Produkt $\Pi\mathcal{A} = (\Pi\mathcal{A}, (p_i : \Pi\mathcal{A} \rightarrow A_i)_{i \in I})$ definiert durch

- (1) Produkt über alle Trägermengen
- (2) Operationen auf Produkten ausführen die für Faktoren ausgelegt sind.
- (3) $Sys(\Sigma)$ Projektionen $p_{i,s}$ stimmen überein mit $p_{i,s}^{Set}$

Co-Produkte

Proposition 145 Co-Produkt epischer Morphismen

$(m_i : d_i \rightarrow c_i)_{i \in I}$ epi $\Rightarrow (\sum(m_i)_{i \in I} : \sum(d_i)_{i \in I} \rightarrow \sum(c_i)_{i \in I})$ ist auch episch.

Proposition 146 Co-Produkt extremaler Epis

In einer Kategorie C mit Faktorisierungssystem in extremal Epis und Monos ist Co-Produkt der extremalen Epis wieder extremal epi.

Definition 147 Co-Produkt in Set

Objekte $(a_i)_{i \in I}$ in Set. Das Co-Produkt $(\sum(a_i)_{i \in I}, (in_i : a_i \rightarrow \sum(a_i)_{i \in I})_{i \in I})$ ist definiert durch

- (1) $\sum(a_i)_{i \in I} = \bigoplus_{i \in I} a_i$
- (2) $\forall i \in I$ und $x \in a_i$:
 $in_i : a_i \rightarrow \sum(a_i)_{i \in I} ::= in_i(x) = (x, i)$

Proposition 148 Co-Produkt in Set

Das Co-Produkt ist das Co-Produkt in der Kategorie Set.

Corollary 149 Initiales Objekt in Set

Das initiale Objekt in Set ist \emptyset .

Corollary 150 Initiales Objekt in $Sys(\Sigma)$

Das leere algebraische System \mathcal{I} ist das initiale Objekt in $Sys(\Sigma)$

Produkte

Proposition 135 Generelle Produkte in $Sys(\Sigma)$

Das algebraische System $\Pi\mathcal{A}$ mit $(p_i : \Pi\mathcal{A} \rightarrow A_i)_{i \in I}$ (aus Def 134) ist Produkt der Familie von Systemen $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$

Corollary 136 Finales Objekt in $Sys(\Sigma)$

Das finale Objekt T in $Sys(\Sigma)$ ist das folgende algebraische System

- (1) $(T_s = \{\ast\})_{s \in S}$
- (2) $\forall f \in O_{w,v} \forall x \in T^w : f^T(x) = \ast$

Co-Produkte

Proposition 151 Binäres Co-Produkt in $Sys(\Sigma)$

Das variante System $A + B$ ist das Co-Produkt der zwei Systeme A und B .

Notiz

Dualer Begriff in Corollary 150.

2 Spezifikation

2.1 Abstraktion: Episch reflektive Subkategorien

Definition 152: Subkategorie Kategorie \mathcal{D} ist Subkategorie von \mathcal{C} ($\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$), wenn

1. $O^{\mathcal{D}} \subseteq O^{\mathcal{C}}$ (Objekte in Teilmengenbeziehung)
 2. $\forall a, b \in O^{\mathcal{D}} : M_{a,b}^{\mathcal{D}} \subseteq M_{a,b}^{\mathcal{C}}$
 3. $\forall a \in O^{\mathcal{D}} : id_a^{\mathcal{D}} = id_a^{\mathcal{C}}$
 4. $\forall a, b, c \in O^{\mathcal{D}} \wedge m \in M_{a,b}^{\mathcal{D}}, n \in M_{b,c}^{\mathcal{D}} : n \circ_{a,b,c}^{\mathcal{D}} m = n \circ_{a,b,c}^{\mathcal{C}} m$
- \mathcal{D} ist voll, wenn
 1. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ und
 2. $\forall a, b \in O^{\mathcal{D}} : M_{a,b}^{\mathcal{D}} = M_{a,b}^{\mathcal{C}}$
 - \mathcal{D} ist isomorph geschlossen, wenn $\approx : a \rightarrow b \in M_{a,b}^{\mathcal{C}}$ mit $a \in O^{\mathcal{D}} \implies b \in O^{\mathcal{D}}$
 - Wenn \mathcal{D} voll und isomorph-geschlossen ist: $\mathcal{D} \subseteq^{\approx} \mathcal{C}$

Notiz: Nur isomorph-geschlossene Kategorien sind abstrakt (bis auf Isomorphie)!

Definition 153: Episch reflektive Subkategorie \mathcal{D} ist reflektive Subkategorie von \mathcal{C} , wenn

1. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$
2. $\forall c \in O^{\mathcal{C}} :$ gibt es
 - ein $c_{\mathcal{D}}$ (\mathcal{D} - Reflektion von c) und
 - ein Morphismus $\eta_c : c \rightarrow c_{\mathcal{D}}$ (Reflektor von c)

mit der folgenden Eigenschaft: $\forall m : c \rightarrow z$, so dass $z \in \mathcal{D}$, dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $m^* : c_{\mathcal{D}} \rightarrow z$ mit $m^* \circ \eta = m$
 \mathcal{D} ist episch reflektiv, wenn zusätzlich alle Reflektoren epis sind.

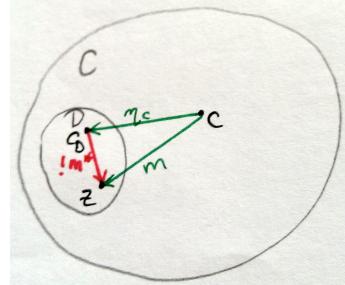


Abbildung 2.1: Episch reflektive Subkategorie

Proposition 154: Reflektionen sind abstrakt Sei \mathcal{D} reflektive Subkategorie von \mathcal{C}

1. $\eta_1 : c \rightarrow c_{\mathcal{D}}^1$ und $\eta_2 : c \rightarrow c_{\mathcal{D}}^2$ zwei Reflektionen von \mathcal{C} $\implies \approx : \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1 \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^2$ mit $\eta : c \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^2$
2. $\eta : c \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1$ Reflektor für c und $\approx : \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^1 \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^2$ ist Iso $\implies \eta' = \approx \circ \eta : c \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^2$ ist auch Reflektor für c

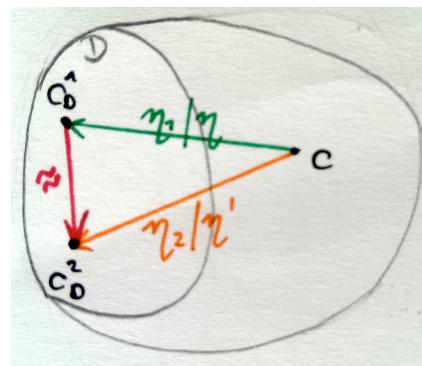


Abbildung 2.2: Reflektionen sind abstrakt

Proposition 155: Isomorphe Reflektoren

1. \mathcal{D} reflektive Subkategorie von \mathcal{C} und $d \in \mathcal{D} \implies \eta_d : d \rightarrow d_{\mathcal{D}}$ ist iso.
2. \mathcal{D} ist reflektive und isomorph-geschlossene Subkategorie von \mathcal{C}
 $\implies \forall c \in \mathcal{C} : c \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$ der Reflektor für c ist iso.

Proposition 156: Epische Reflektionen und Produkte \mathcal{D} episch-reflektiv und isomorph-geschlossene Subkategorie von \mathcal{C} und

$\Pi\mathcal{A}$ ist Produkt in \mathcal{C} einer Familie $\mathcal{A} = (a_i)_{i \in I}$ von \mathcal{D} -Objekten, d.h. $(a_i \in \mathcal{D})_{i \in I}$
 $\implies \Pi\mathcal{A} \in \mathcal{D}$

Proposition 157: Epische Reflektionen und extreme Mono \mathcal{D} episch-reflektiv und isomorph-geschlossene Subkategorie von \mathcal{C} mit $(\mathcal{E}, \mathcal{M}^x)$ $\implies c \in \mathcal{D}$ wenn $m : c \rightarrowtail d$ ist extremal Mono und $d \in \mathcal{D}$.

D.h. in TCs Worten:

Wenn wir \mathcal{D} aus Def haben und $(\mathcal{E}, \mathcal{M}^x)$ dann folgt daraus, jedes d , was über einen extremalen Mono erreicht wird, hat ein 'Urbild' in \mathcal{D} .

Proposition 158: Co-Well-Powered Categories Kategorie \mathcal{C} its Co-well-powered, wenn $\forall a \in \mathcal{C}$ die 'Collection' abstrakter Quotienten (Def 77) von a eine Menge bildet.

'Collection abstrakter Quotienten von a ' = Paarweise nicht isomorphe Epis mit Domain a .

Theorem 159: Charakterisierung episch reflektiver Subkategorien Gegeben: \mathcal{C} co-well-powered Kategorie mit $(\mathcal{E}, \mathcal{M}^x)$. Isomorph geschlossene Subkategorie \mathcal{D} von \mathcal{C} ist episch reflektiv $\Leftrightarrow \mathcal{D}$ geschlossen unter Produkten und extremalen Subobjekten ist.

Definition 160 Reflektion von Morphismen Gegeben \mathcal{D} reflektive Subkategorie von \mathcal{C} und $c \mapsto (\eta_c : c \rightarrow c_{\mathcal{D}})$ eine festgelegte Auswahl von Reflektoren η_c für jedes Objekt $c \in \mathcal{C}$. Dann definieren wir das folgende Mapping von Morphismen $m : c \rightarrow c' \in \mathcal{C}$ zu Morphismen in $\mathcal{D} : m : c \rightarrow c' \mapsto m^{\mathcal{D}} : c_{\mathcal{D}} \rightarrow c'_{\mathcal{D}} = (\eta_{c'} \circ m)^* : c_{\mathcal{D}} \rightarrow c'_{\mathcal{D}}$.

In CTs Worten: Morphismen werden von \mathcal{C} nach \mathcal{D} reflektiert.

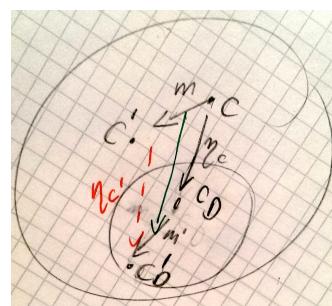


Abbildung 2.3: Reflektion von Monomorphismen

Proposition 161 Eigenschaften von Morphismusreflektionen \mathcal{D} reflektive Subkategorie von \mathcal{C} und $m \mapsto m^{\mathcal{D}} \Rightarrow$

1. $id_c^{\mathcal{D}} = id_{c_{\mathcal{D}}} \forall c \in C$
2. $(m \circ_C n)^{\mathcal{D}} = m^{\mathcal{D}} \circ_{\mathcal{D}} n^{\mathcal{D}}$ wenn m, n komponierbar in C .

CT Notiz zu 2.: Erst verkullern und dann Übertragen ist gleich zu erst einzeln Übertragen und dann verkullern.

2.2 Syntaktifizierung

2.2.1 Terme und Termsysteme

Definition 162 Variablen-Mengen und Variablen-Systeme Eine Variablenmenge X ist eine S-Indizierte Familie von Mengen von Variablen, d.h. $X = (X_s)_{s \in S^*}$. Eine Variablenmenge ist ein algebraisches System in dem alle Funktionen komplett undefiniert sind.

Definition 163 Terme und totale Termsysteme Die 'Collection' von Termen $T^{\Sigma, X}$ mit Variablen in X ist die kleinste S-Indizierte Familie von Mengen $T^{\Sigma, X} = (T_s^{\Sigma, X})_{s \in S}$ die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Variablen: $x \in T_s^{\Sigma, X}$ wenn $x \in X_s$
2. Funktionen: $f_i(t) \in T_s^{\Sigma, X}$ wenn $f \in O_{w,v}$ und $t \in (T^{\Sigma, X})^w$ und $v = v_lsv_r$ und $i = |v_l| + 1$

Das totale Termsystem $T^{\Sigma, X}$ mit Variablen in X ist das Σ -System, welches die Familie von Termen $(T_s^{\Sigma, X})_{s \in S}$ als Träger nehmen und alle Funktionen definieren durch:

3. Funktionen: Für $f \in O_{w,v}$ und $|v| \geq 1$ und $x \in (T^{\Sigma, X})^w : f^{T^{\Sigma, X}}(x) = (f_i(x))_{i \in 1 \dots |v|}$
4. Prädikate: Für $f \in O_{w,\epsilon}$ und $f \neq =: f^{T^{\Sigma, X}} = \emptyset$, d.h. $f^{T^{\Sigma, X}}$ Alle Prädikate bis auf die Gleichheit sind komplett undefiniert.

Notiz CT: 1. und 2. definiert die Trägermengen des totalen Termsystems

Zu 3.: Ist das nicht das mit der 'Tiefe' von Termen bei Elsner? $s(s(s(\dots)))$
' $f \neq =$ ' bedeutet: f ist nur für $=$ definiert. Sonst nichts

Definition 164 Operationen auf Termen Die Operationen (a) enthalten Variablen, (b) enthalten Terme und (c) die Höhe ist definiert auf der 'Collection' von Termen $T^{\Sigma, X}$ durch:

1. Fall: Variablen
2. Fall: Rekursiver Aufruf für Operationen mit Termen
3. Fall: Konstanten
4. Fall: Wenn Variable Kreuzprodukt

$$_X : (T^{\Sigma, X})^w \rightarrow 2^X ::= t_X = \begin{cases} \{t\} & t \in X \\ x_X & t = f_i(x), f \in O_{w,v}, 1 \leq i \leq |v| \\ \emptyset & t \in (T^{\Sigma, X})^\epsilon \\ x_X^1 \cup x_X^2 & t = x^1 \times x^2 \end{cases} \quad (a)$$

$$_T : (T^{\Sigma, X})^w \rightarrow 2^{T^{\Sigma, X}} ::= t_T = \begin{cases} \{t\} & t \in X \\ \{f_j(x) :: j \in [1, |v|]\} \cup x_T & t = f_i(x), f \in O_{w,v}, i \in [1, |v|] \\ \emptyset & t \in (T^{\Sigma, X})^\epsilon \\ x_T^1 \cup x_T^2 & t = x^1 \times x^2 \end{cases} \quad (b)$$

$$|_| : (T^{\Sigma, X})^w \rightarrow \mathbb{N}_0 ::= |t| = \begin{cases} 0 & t \in X \\ |x| + 1 & t = f_i(x), f \in O_{w,v}, 1 \leq i \leq |v| \\ 0 & t \in (T^{\Sigma, X})^\epsilon \\ \max(|x^1|, |x^2|) & t = x^1 \times x^2 \end{cases} \quad (c)$$

Definition 165 Partielle Termsysteme Ein partielle Termsystem $P^{\Sigma, X}$ ist ein Subsystem von dem totalen Termsystem $T^{\Sigma, X}$, so dass

1. $X \subseteq P^{\Sigma, X}$
2. $[X]_{P^{\Sigma, X}}^c$ (Wenn Argumente des Terms selber wieder Terme sind, sind diese auch in $P^{\Sigma, X}$ enthalten)

Corollary 166 Variablen-Einbettung und eindeutiger Homomorphismus

1. Für jedes partielle System $P^{\Sigma, X}$ die Einbettung $X \hookrightarrow P^{\Sigma, X}$ ist epi.

2. $h^1, h^2 : P^{\Sigma, X} \rightarrow A$ homo eines partiellen Systems $P^{\Sigma, X}$ in ein anderes algebraisches System $A \implies h_{|X|}^1 = h_{|X|}^2 \implies h^1 = h^2$, d.h. wenn die Homos h_1 und h_2 in den Variablen übereinstimmen, sind sie gleich.

Proposition 167 Struktur des partiellen Systems Die Menge aller partiellen Systeme $P^{\Sigma, X}$ stimmt bis auf einer Variablenmenge X überein mit einem kompletten Verband bis auf die Subsystem-Relation.

Proposition 168 Generiertes Termsystem Gegeben: X und eine Familie von Termmengen $\mathsf{T} = (\mathsf{T}_s \subseteq T_s^{\Sigma, X})_{s \in S}$, $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma, X}$ beschreibt das kleinste partielle Termsystem das alle Terme in T beinhaltet, d.h. $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma, X} = \bigcap \left\{ P^{\Sigma, X} \in \mathcal{P}^{\Sigma, X} :: (\mathsf{T}_s \subseteq P_s^{\Sigma, X})_{s \in S} \right\}$ ¹

Proposition 169 Konstruktion von generierten Termsystemen $\mathsf{T} = (\mathsf{T}_s \subseteq T_s^{\Sigma, X})_{s \in S}$, die Träger von $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma, X}$ können wie folgt konstruiert werden $\bigcup_{t \in \mathsf{T}} t_T$.

Proposition 170 Generiertes Termsystemen Das generierte Termsystem hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\mathsf{T} \subseteq P_{\mathsf{T}}^{\Sigma, X}$
2. $\mathsf{T}_1 \subseteq \mathsf{T}_2 \implies P_{\mathsf{T}_1}^{\Sigma, X} \subseteq^f P_{\mathsf{T}_2}^{\Sigma, X}$.
3. $P_{(P_{\mathsf{T}}^{\Sigma, X})}^{\Sigma, X} = P_{\mathsf{T}}^{\Sigma, X}$

Proposition 171 Variablenzuweisung und Erweiterungen von Variablenzuweisungen

1. Geg. X, Σ -System A : Eine Variablenzuweisung ist ein Homomorphismus $h : X \rightarrow A$
2. $P^{\Sigma, X}$ mit Variablen in X , mit der Variableneinbettung $x : X \hookrightarrow P^{\Sigma, X}$ und $h : X \rightarrow A$ ist eine Variablenzuweisung in A .
 \implies wenn er existiert, wird der eindeutige Homomorphismus, der die Variablenzuweisung zu $P^{\Sigma, X}$ erweitert, bezeichnet mit $h^* : P^{\Sigma, X} \rightarrow A$, d.h. h^* ist der einzige Homomorphismus, der $h^* \circ x = h$ erfüllt.

¹ \mathcal{P} ist eine Menge von partiellen Termsystemen

Definition 172 Auswertung Gegeben Variablenzuweisung $h : X \rightarrow A$. Partielles Termsystem $P(h) = (P(h)_s)_{s \in S} \subseteq T^{\Sigma, X}$, genannt die Auswertungsdomain von h , und die Auswertung $h^* : P(h) \rightarrow A = (h_s^* : P(h)_s \rightarrow A_s)_{s \in S}$ selbst, sind wie folgt definiert: $P(h)$ ist das kleinste partielle Termsystem das das folgende erfüllt:

- (i) $x \in P(h)_s$ if $x \in X_s$
- (i') $h_s^*(x) = h_s(x)$ for $x \in X_s$
- (ii) $f_i(x) \in P(h)_s$ if $f \in O_{w,v}, v = v_l s v_r, i = |v_l| + 1, x \in (P(h))^w$ and f^A defined for $(h^*)^w(x)$
- (ii') $h_s^*(f_i(x)) = f^A((h^*)^w(x))_i$ if $f \in O_{w,v}, f_i(x) \in P(h)_s$

Proposition 173 Auswertungshomomorphismus Die Auswertung $h^* : P(h) \rightarrow A$, die für die Variablenzuweisungen $h : X \rightarrow A$ (nach Def 172) definiert ist, ist ein Homo.

Corollary 174 Auswertungen und Homomorphismen $k : A \rightarrow B$ ist Homo und $h : X \rightarrow A$ Variablenzuweisung \Rightarrow

1. $P(h) \subseteq P(k \circ h)$
2. $k \circ h^* = (k \circ h)^* \circ \subseteq_k$, wenn der Inklusionsmorphmus von $P(h)$ in $P(k \circ h)$ bezeichnet wird durch $\subseteq_k : P(h) \rightarrow P(k \circ h)$

Corollary 175 Auswertungen und geschlossene Monomorphismen $k : A \rightarrow B$ geschlossener Mono und $h : X \rightarrow A$ Variablenzuweisung \Rightarrow

1. $P(h) = P(k \circ h)$
2. $k \circ h^* = (k \circ h)^*$

Corollary 175 Auswertungen und Epimorphismen $e : B \twoheadrightarrow C$ ist epi $\implies e^* : P(e) \rightarrow C$ ist surjektiv.

2.2.2 Formeln und syntaktische Präsentation

Definition 177 Atomare Formeln Die Menge atomarer Formeln $F^{\Sigma, X} = (F_s^{\Sigma, X})_{s \in S \cup \{\epsilon\}}$ über einer gegebenen Variablenmenge X ist die kleinste Menge die folgende Klauseln definiert wird:

1. Existenzformeln: $t \in F_s^{\Sigma, X}$, wenn $t \in T_s^{\Sigma, X}$
2. Atomare Formeln: $f(t) \in F_\epsilon^{\Sigma, X}$, wenn $f \in O_{w, \epsilon}$, $t \in (T^{\Sigma, X})^w$

Definition 178 Operatoren auf Formeln Die Operatoren *beinhaltete Variablen*($_X$), *beinhaltete Terme*($_T$), *Höhe*($|_|$) können auf Formeln und Familien von Formeln durch die folgenden zusätzlichen Definitionen erweitert werden:

$$\begin{aligned}_X : F_\epsilon^{\Sigma, X} &\rightarrow 2^X & ::= & f(x)_X = x_X \\ _X : 2^{F^{\Sigma, X}} &\rightarrow 2^X & ::= & F_X = \bigcup_{a \in F} a_X \\ _T : F_\epsilon^{\Sigma, X} &\rightarrow 2^{T^{\Sigma, X}} & ::= & f(x)_T = x_T \\ _T : 2^{F^{\Sigma, X}} &\rightarrow 2^X & ::= & F_T = \bigcup_{a \in F} a_T \\ |_| : F_\epsilon^{\Sigma, X} &\rightarrow \mathbb{N}_0 & ::= & |f(x)| = |x|\end{aligned}$$

Definition 179 Syntaktische Präsentation Eine syntaktische Präsentation $F = (X, F \subseteq F^{\Sigma, X})$ eines algebraischen System A besteht aus der Variablenmenge X und der Menge von Formeln F über X , welche gültig im präsentierten System sind. Eine Präsentation endlich, wenn X und F endlich sind. Wenn

1. $\mathsf{T} = F_T$ in die Menge von Termen die in F auftreten,
2. $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma, X}$ ist das partielle Termsystem definiert durch T und
3. $P_F^{\Sigma, X}$ ist das kleinste Supersystem von $P_{\mathsf{T}}^{\Sigma, X}$, wo, für alle $f \in O_{w, \epsilon}$ und $f \neq =$, $f^{P_F^{\Sigma, X}}(x)$ definiert ist, wenn $f(x) \in F$
 \implies dann wird das *System* A_F , welches durch F präsentiert wird, wird definiert durch $\mathbf{A}_F = (P_F^{\Sigma, X})_{|_{\equiv_F}}$, wobei
4. \equiv_F ist die durch $\sim_F = \{(x_1, x_2) :: = (x_1, x_2) \in F\}$ generierte Kongruenz, welche die Menge der Gleichheiten, die durch F spezifiziert sind, ist.

Der Epimorphismus $x^F = \equiv_F \circ \subseteq_F \circ x : X \rightarrow \mathbf{A}_F$ definiert durch folgende Epis:

- $x : X \rightarrow P_{\mathsf{T}}^{\Sigma, X}$
- $\subseteq_F : P_{\mathsf{T}}^{\Sigma, X} \rightarrow P_F^{\Sigma, X}$ und
- $\equiv_F : P_F^{\Sigma, X} \rightarrow \mathbf{A}_F$

Proposition 180 Sub-Präsentationen (X^1, F^1) ist Sub-Präsentation von (X^2, F^2) im Sinne von $X^1 \subseteq X^2$ und $F^1 \subseteq F^2$ mit den Einbettungshomo $i : X^1 \rightarrow X^2$
 \Rightarrow es gibt einen eindeutigen Homo $i^* : \mathbf{A}_{F^1} \rightarrow \mathbf{A}_{F^2}$ mit $i^* \circ x^{F^1} = x^{F^2} \circ i$

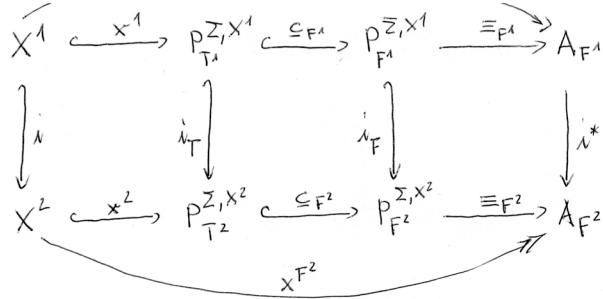


Abbildung 2.4: Sub-Präsentationen

Definition 181 Erweiterte Auswertung Gegeben $h : X \rightarrow A$ Variablenzuweisung. $F(h) = (X, (F(h)_s)_{s \in S \cup \{\epsilon\}}$ (Syntaktische Präsentation des geschlossenen Sub-Systems von A , welches generiert wurde durch $h(X)$) ist die kleinste Menge von Formeln definiert durch

1. $(F(h)_s = P(h)_s)_{s \in S}$ und
2. $f(x) \in F(h)_\epsilon$, wenn $f \in O_{w,\epsilon}$, $f \in P(h)^w$, und f^A ist definiert für $(h*)^w(x)$

Corollary 182 Erweiterte Auswertung und Homos $k : A \rightarrow B$ ist Homo und $h : X \rightarrow A$ Variablenzuweisung $\Rightarrow F(h) \subseteq F(k \circ h)$

Corollary 183 Syntaktische Präsentation für ein System $\mathbf{A}_{F(id_A)} \approx A$, wobei $id_A : (A_s)_{s \in S} \rightarrow A$ ist die identische Variablenzuweisung definiert durch $a \mapsto a$ für alle $a \in (A_s)_{s \in S}$

Corollary 184 Syntaktische Präsentation von Epis $e : B \rightarrow C$ ist epi $\Rightarrow \mathbf{A}_{F(e)} \approx C$ und $\approx \circ x^{F(e)} = e$

2.3 Approximation

2.3.1 kommt nix

2.3.2 kommt nix

2.3.3 Pushout und Pullback

Definition 206 Span, Co-Span In einer Kategorie \mathcal{C} :

Span ist ein Paar (p, q) von Morphismen mit der selben Domain.

Co-Span ist so ein paar mit der selben Co-Domain.

Notiz: Span ist ein Diagramm von Graphen $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$ und ein Co-Span ist ein Diagramm von $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$

Pushout

Definition 207 Pushout

Ein Pushout eines Span $(P : a \rightarrow b, q : a \rightarrow c)$ ist ein Paar von Morphismen $(p^* : c \rightarrow d, q^* : b \rightarrow d)$, so dass $(p^*, q^*, p^* \circ q = q^* \circ p)$ ist der Co-Limit des Span.

Notiz: Zwei Morphismen p^ und q^* Charakterisieren den Co-Limes, der dritte $p^* \circ q = q^* \circ p$ kann von der Co-Cone-Eigenschaft abgeleitet werden.*

Corollary 208 Pushout Komposition

2.5(a) ist kommutatives Diagramm und (1) ist Pushout, dann (2) ist Pushout \Leftrightarrow das ganze Diagramm (1) + (2) ist ein Pushout.

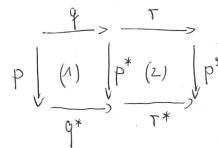
Pullback

Definition 216 Pullback

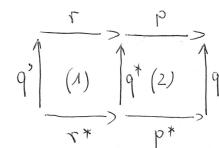
Ein Pullback eines Co-Span $(p : b \rightarrow a, q : c \rightarrow a)$ ist ein Paar von Morphismen $(p^* : d \rightarrow c, q^* : d \rightarrow b)$, so dass $p^*, q^*, q \circ p^* = p \circ q^*$ ist der Limit des Co-Span.

Weitere Pullbacks...

Weitere siehe Skript.



(a) Pushout



(b) Pullback

Abbildung 2.5: Definitionen

Pushout

Corollary 209 Pushout Dekomposition

In einer Kategorie, in welcher jeder Span ein Pushout hat kann der Pushout $(p^*, (r \circ q)^*)$ des Span $(p, r \circ q)$ dekomponiert werden in zwei Produkte

1. $(p'q^*)$ von (p, q) und
2. (p^*, r^*) von (p', r) , so dass
 $(r \circ q)^* = r^* \circ q^*$

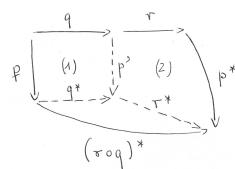
Corollary 210 Pushouts bewahren Epis

(p^*, q^*) ist Pushout (p, q) und p ist Epi.
 $\Rightarrow p^*$ ist epi.

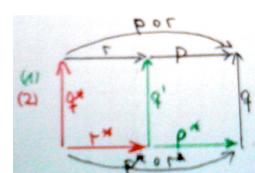
Pullback

Weitere Pullbacks...

Weitere siehe Skript.

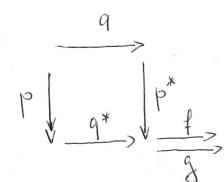


(a) Pushout

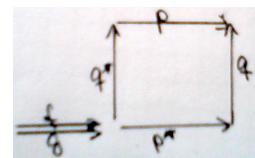


(b) Pullback

Abbildung 2.6: Dekomposition



(a) Pushouts und Epis



(b) Pullback

Abbildung 2.7: Pushouts und Pullbacks

Pushout

Proposition 211 Pushouts bewahren extremeale Epis

Die zugrundeliegende Kategorie (\mathcal{C}) hat ein $(\mathcal{E}^x, \mathcal{M})$, (p^*, q^*) ist Pushout von (p, q) und p ist extremal Epi $\Rightarrow p^*$ ist extremal Epi.

Proposition 212 Pushouts bewahren Sektionen

(p^*, q^*) ist Pushout von (p, q) und p ist Sektion $\Rightarrow p^*$ ist Sektion.

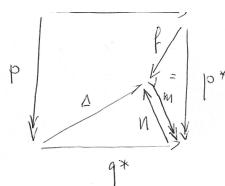
Corollary 213 Abgeleitete Pushouts

(p^*, q^*) ist Pushout von (p, q) , wobei p Sektion $\Rightarrow (q, (p^*)^{-1})$ ist Pushout von (q^*, p^{-1}) , wenn wir $(p^*)^{-1}$ als das eindeutige u in Prop 212 wählen.

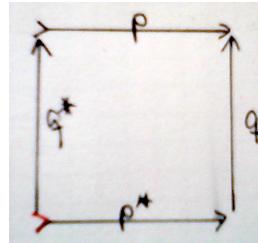
Pullback

Weitere Pullbacks...

Weitere siehe Skript.

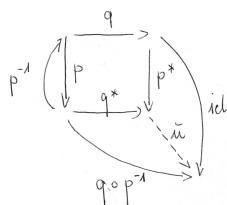


(a) Pushouts und extremeale Epi



(b) Pullback

Abbildung 2.8: Pushouts und Pullbacks



(a) Pushouts und extremeale Epi



(b) Pullback

Abbildung 2.9: Pushouts und Pullbacks

Pushout

Corollary 214 Pushouts bewahren Isomorphismen

(p^*, q^*) ist Pushout von (p, q) und p Iso $\Rightarrow p^*$ ist Iso.

Proposition 215 Spezielle Pushouts in $Sys(\Sigma)$

Wenn $(p : A \rightarrow B, q : A \rightarrow C)$ span extremer Monos in $Sys(\Sigma)$, kann der pushout $(p^* : C \rightarrow D, q^* : B \rightarrow D)$ wie folgt konstruiert werden. Obda. Angenommen, dass A_s, B_s , und C_s paarweise disjunkt sind, jede Sorte s :

(i) $\forall s \in S :$

$$D_s = A_s \cup (B_s - p(A_s)) \cup (C_s - q(A_s))$$

(ii) $\forall s \in S$ and $c \in C_s :$

$$p_s^*(c) = \begin{cases} a & c = q(a) \\ c & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iii) $\forall s \in S$ and $b \in B_s :$

$$q^*(b) = \begin{cases} a & b = q(a) \\ b & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iv) $\forall f \in O_{w,v} :$

$$f^D(x) = \begin{cases} (p^*)^v(y_C) & f^C(x_C) = y_C \\ & \text{and } f^C(x_C) = y_C \\ (q^*)^v(y_B) & \text{if } x = (q^*)^w(x_B) \\ & \text{and } f^B(x_B) = y_B \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Pullback

Weitere Pullbacks...

Weitere siehe Skript.

2.4 Varietät

2.4.1 Atomare Axiome

Definition 238 Atomares Axiom und Lösung Gegeben: $\Sigma = (S, O)$, atomares Axiom $a = (X, f)$ besteht aus einer endlichen Variablenmenge X und einer Formel $f \in F^{\Sigma, X}$.

Eine Variablenzuweisung $h : X \rightarrow B$ in ein Σ -System B löst das Axiom $A = (X, f)$, wenn es einen Homomorphismus $h^* : \mathbf{A}_a \rightarrow B$ gibt, so dass $h^* \circ x^a = h$.

Wenn h eine Lösung ist, schreiben wir $h \models a$

Proposition 239 Homomorphismus und Lösung $h : X \rightarrow B$ ist Lösung von atomarem Axiom $a = (X, f)$ in B und $k : B \rightarrow C$ ist ein Homomorphismus $\implies k \circ h$ löst a in C , d.h. $k \circ h \models a$.

Definition 240 Gültigkeit atomarer Axiome $a = (X, f)$ ist gültig in einem algebraischen System B ($B \models a$), wenn jede Variablenzuweisung $h : X \rightarrow B$ a löst, d.h.

$B \models a$ wenn $\forall h : X \rightarrow B :: h \models a$.

Proposition 241 Gültigkeit ist abstrakt Wenn a atomares Axiom ist, $B \models a$, und $B \approx B' \implies B' \models a$.

Definition 242 Gefülltes algebraisches System Ein algebraisches System B ist gefüllt, wenn jede Trägermenge von B nicht leer ist (d.h. $B_s \neq \emptyset$ für alle $s \in S$)
 $S' \subseteq S \implies B$ ist ' S' -gefüllt', wenn $B_s \neq \emptyset$ für alle $s \in S'$.

Proposition 244 Gültigkeit in Produkten a atomres Axiom, I indizierte Menge.
 $(B_i \models a)_{i \in I} \implies \prod(B_i)_{i \in I} \models a$

Proposition 245 Gültigkeit in extremalen Subsystem a atomares Axiom, $i : C \rightarrow B$ extremer Mono, $B \models a \implies C \models a$

Notiz CT aus der Vorlesung: Wenn $C \models a$ und $h : B \rightarrow C$ injektiver Homo $\implies B \models a$

Definition 246: Homomorphe Bilder Algebraisches System C ist homomorphes Bild eines Systems B , wenn es einen surjektiven Homomorphismus $q : B \rightarrow C$ gibt.

(Notiz: Homomorphe Bild ist Spezialfall von Epi (Vgl. Prop 80) (Bedenke: Wenn surjektiv, dann Epi. Umgekehrt nicht))

Proposition 247: Gültigkeit in homomorphen Bildern $B \models a$, C homomorphes Bild von B , d.h. Es gibt einen surjektiven Homomorphismus $q : B \rightarrow C \implies C \models a$

Corollary 248: Gültigkeit in Produktkomponenten $a = (X, f)$ atomares Axiom und $S_X \subseteq S$ (Teilmenge der Sorten für welche a Variablen hat), d.h. $s \in S_X \Leftrightarrow X_s \neq \emptyset$.
 $\Pi(B_i)_{i \in I} \models a$ und $(B_{i,s} \neq \emptyset)_{i \in I, s \in S_X}$ (' S_X ' gefüllt)
 $\implies B_i \models a \forall i \in I$ (jede Komponente des Produktes erfüllt das Axiom).

Lemma 249: Variablenzuweisung in approximierte Systeme (ausgelassen)

Proposition 250: Gültigkeit in approximierte Systemen (ausgelassen)

2.4.2 Atomare Spezifikationen

Definition 251: Atomare Spezifikation, Varietäten Atomare Spezifikation

$ASpec = (\Sigma, \Phi)$ besteht aus einer Signatur Σ und einer Menge von atomaren Axiomen Φ wrt. Σ . $B \in Sys(\Sigma)$ erfüllt die Spezifikation (geschrieben: $B \models ASpec$), wenn $B \models a$ für alle $a \in \Phi$.

Die volle Subkategorie von $Sys(\Sigma)$, welches alle Systeme beinhaltet, die die Spezifikation $ASpec = (\Sigma, \Phi)$ erfüllen, wird bezeichnet als $Sys(ASpec)$ oder $Sys(\Phi)$.

Eine volle Subkategorie \mathbb{K} aller Σ -Systeme wird eine Varietät genannt, wenn es eine atomare Spezifikation (Σ, Φ) gibt, so dass $\mathbb{K} = Sys(\Phi)$

Proposition 252: Varietäten sind abstrakt Jede Varietät ist isomorph-geschlossen.

Definition 253: Bündel atomarer Axiome, Lösungen Ein Bündel \mathcal{B} atomarer Axiome mit den selben Variablenmengen X ist eine syntaktische Präsentation $\mathcal{B} = (X, F \subseteq F^{\Sigma, X})$. C erfüllt ein Bündel (geschrieben: $C \models \mathcal{B}$), wenn jede Variablenzuweisung $h : X \rightarrow C$ erweitert werden kann auf einen Homomorphismus $h^* : \mathbf{A}_{\mathcal{B}} \rightarrow C$, so dass $h^* \circ \mathcal{B} = h$

Lemma 254: Bündel definieren Co-Limiten (ausgelassen)

Proposition 255: Bündel atomarer Axiome $(a_i)_{i \in I}$ ist Familie atomarer Axiome mit den selben Variablenmengen X , d.h. $a_i = (X, f_i)$ für alle $i \in I$
 $\Rightarrow C$ erfüllt alle Axiome $((C \models a_i)_{i \in I}) \Leftrightarrow C$ erfüllt das Bündel $\mathcal{B} = (X, \{f_i :: i \in I\})$, d.h. $C \models \mathcal{B}$

Lemma 256: Co-well-powered Basis $Sys(\Sigma)$ its co-well-powered.

Corollary 257: Varietäten sind episich-reflektive Subkategorien Jede Varietät $\mathbb{K} \subseteq Sys(\Sigma)$ ist episich-reflektive Subkategorie von $Sys(\Sigma)$.

Theorem 258: Birkhoffs Charakterisierung Eine volle Unterkategorie \mathbb{K} von $Sys(\Sigma)$ ist eine Varietät $\Leftrightarrow \mathbb{K}$ ist geschlossen bis auf Produkte, extreme Subobjekte, homomorphe Bilder und approximierte Systeme.

2.4.3 Spezifikationsproblem und einfache Lösung

Definition 259: Spezifikationsproblem, einfache Lösung Ein Spezifikationsproblem ist gegeben durch eine Signatur Σ und entweder

1. Ein Σ -System K oder
2. Eine volle und isomorph-geschlossene Subkategorie $\mathbb{K} \subseteq \text{Sys}(\Sigma)$

Eine einfache Lösung für das Spezifikationsproblem ist eine atomare Spezifikation $ASpec = (\Sigma, \Phi)$, so dass

1. K ist initial in $\text{Sys}(ASpec)$ oder
2. $\text{Sys}(ASpec) = \mathbb{K}$

Corollary 261: Reflektion des initialen Objektes \mathcal{D} relflektive Subkategorie von \mathcal{C} , \mathcal{C} hat initiales Objekt $\mathcal{I} \implies$ Reflektion $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ von \mathcal{I} ist initial in \mathcal{D}

Corollary 262: Spezifizierbare Systeme Eine Spezifikationsproblem $K \in \text{Sys}(\Sigma)$ vom Typ 1. (siehe Defi 259 1.) ist lösbar $\Leftrightarrow K$ ist generiert durch seine Operationen, d.h. $K = \lceil i(\emptyset^{\Sigma}) \rceil^c$, wobei $i : \emptyset^{\Sigma} \rightarrow K$ ist der eindeutige Homomorphismus vom initialen Objekt nach K .

2.4.4 Construction of the Reflection

Definition 264: Substitution Given a term $t \in T^{\Sigma, X}$ and a variable assignment $h : X \rightarrow B$ in an algebraic system B , the *substitution* $t/h \in T^{\Sigma, B}$ of h in t is the term defined by:

1. $t/h = h(t)$ if $t \in X$,
2. $t/h = f_i(x/h)$
3. $t/h = f_i(x/h)$ if $t = f_i(x)$, $f \in O_{w,v}$, $1 \leq i \leq |w|$, and $x \in (T^{\Sigma, X})^w$
4. $\epsilon/h = \epsilon$, and
5. $x/h = (x_1/h, x_2/h)$ if $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in (T^{\Sigma, X})^{w_1}$, $x_2 \in (T^{\Sigma, X})^{w_2}$, and $w_1 w_2 = w$.

For a partial term system $P \subset T^{\Sigma, X}$ and variable assignment $h : X \rightarrow B$, $P/h \subseteq T^{\Sigma, B}$ is the partial term system given by the carriers $(P/h)_s = \{t/h :: t \in P_s\}$ for all $s \in S$.

Definition 265 Partial-Term-System-Atomic-Axioms If B is an algebraic system and Φ a set of atomic Σ -axioms, then $P_\Phi(B) \subseteq T^{\Sigma, B}$ is the smallest partial term system containing the following terms: (i) $B_s \subseteq (P_\Phi(B))_s$ for all sorts $s \in S$, (ii) $t \in B_s$, if there is $(X, a) \in \Phi$, a term $t' \in a_T$ occurring in a of sort s , and a variable assignment $h : X \rightarrow P_\Phi(B)$, such that $t = t'/h$

Lemma 266: Partial-Term-System-Hom-Extension If $m : B \rightarrow C$ is a homomorphism, then there is a unique homomorphism $m^\Phi : P_\Phi(B) \rightarrow P_\Phi(C)$ with $m^\Phi \circ \subseteq_B = \subseteq_C \circ m$ where $\subseteq_B : B \rightarrow P_\Phi(B)$ and $\subseteq_C : C \rightarrow P_\Phi(C)$ are the respective embeddings of the carriers into the term systems. The homomorphism m^Φ is defined by $P_\Phi(B)/m$.

Lemma 267: Satisfaction-and-AA-Partial-Term-System If a system B satisfies a set of atomic axioms Φ , i. e. $B \models \Phi$, $P_\Phi(B) \subseteq P(\text{id}_B)$.

Definition 268: Self-Substitution The *self-substitution* P/B of a set of terms $P \subseteq T^{\Sigma, B}$ with values in a system B is the family $(P/B)_s = \{t/B :: t \in P_s\}$ where t/B , the substitution of t with values in B , is recursively defined by: (i) $t/B = \text{id}_B^*(t)$ if $t \in P(\text{id}_B)$, (ii) $t/B = f_i(x/B)$ if $t = f_i(x) \notin P(\text{id}_B)$, $f \in O_{w,v}$, $1 \leq i \leq |w|$, and $x \in (T^{\Sigma, B})^w$, (iii) $\epsilon/B = \epsilon$, and (iv) $x/B = (x_1/B, x_2/B)$ if $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in (T^{\Sigma, B})^{w_1}$, $x_2 \in (T^{\Sigma, B})^{w_2}$, and $w_1 w_2 = w$.

Definition 269: Operation Closure for Atomic Axioms Given a Σ -system B and a set of atomic Σ -axioms Φ , the *operation closure* B_{T_Φ} of B is the following system: For all sorts $s \in S$, $(B_{\mathsf{T}_\Phi})_s = (P_\Phi(B)/B)_s$. For all operations $f \in O_{w,v}$ with $v \neq \epsilon$, (i) $f^{B_{\mathsf{T}_\Phi}}(x) = f^B(x)$, if $x \in B^w$ and f^B is defined for x , (ii) $f^{B_{\mathsf{T}_\Phi}}(x) = (f_i(x))_{1 \leq i \leq |v|}$, if $f_i(x) \in B_{\mathsf{T}_\Phi}$ for all $1 \leq i \leq |v|$. For all operations $f \in O_{w,\epsilon}$ with $f \neq =$, $f^{B_{\mathsf{T}_\Phi}}(x) = f^B(x)$, if $x \in B^w$ and f^B is defined for x .

Proposition 270: Embedding into Operation Closure The embedding $i_B^\Phi : B \rightarrow B_{\mathsf{T}_\Phi}$ defined by $i_B^\Phi(b) = b$ for all $b \in B$ (i) is a monomorphism, (ii) is an epimorphism, and satisfies (iii) $P_\Phi(B) \subseteq P(i_B^\Phi)$

Lemma 271 Pushout-of-Atomic-Axioms The pair of homomorphisms $i_B^\mathsf{T} : P_\Phi(B) \rightarrow B_{\mathsf{T}_\Phi}$ and $i_B^\Phi : B \rightarrow B_{\mathsf{T}_\Phi}$ is the pushout of the two variable assignments $\text{id}_B : B \rightarrow B$ and $\subseteq_B : B \rightarrow P_\Phi(B)$.

Lemma Operation-Closure If B is a Σ -system, Φ is a set of atomic Σ -axioms, $i_B^\Phi : B \rightarrow B_{T_\Phi}$ is the embedding of B into its operation closure, $m : B \rightarrow D$ is a homomorphism, and $D \models \Phi$, then there is a homomorphism $m^* : B_{T_\Phi} \rightarrow D$ with $m^* \circ i_B^\Phi = m$.

Definition 273: Predicate-Closure-for-Atomic (Predicate Closure for Atomic Axioms) Given a Σ -system B , a set of atomic Σ -axioms Φ , and the operation closure B_{T_Φ} , the predicate closure B_{F_Φ} is an algebraic system with the same carriers and operations as B_{T_Φ} and the following definition for predicates $p \in O_{w,\epsilon}$ and $p \neq = : p^{B_{F_\Phi}}(x)$ is defined either (i) if $p^B(x)$ is defined or (ii) there is an axiom $(Y, p(z)) \in \Phi$ and a variable assignment $h : Y \rightarrow B_{T_\Phi}$ such that $(h^*)^w(z) = x$.

Proposition 274: Embedding into Predicate Closure The embedding $j_B^\Phi : B_{T_\Phi} \rightarrow B_{F_\Phi}$ defined by $j_B^\Phi(b) = b$ for all $b \in B_{T_\Phi}$ is a monomorphism and a surjective epimorphism.

Lemma 275: Predicate-Closure If B is a Σ -system, Φ is a set of atomic Σ -axioms, $j_B^\Phi : B_{T_\Phi} \rightarrow B_{F_\Phi}$ is the embedding into the predicate closure, $p : B_{T_\Phi} \rightarrow D$ is a homomorphism, and $D \models \Phi$, then there is a homomorphism $p^* : B_{F_\Phi} \rightarrow D$ with $p^* \circ i_B^\Phi = p$.

Definition 276: Construction-of-the-Atomic-Reflection (Construction of the Reflection for Varieties) Given a Σ -system B , a set of atomic Σ -axioms Φ , the operation closure $i_B^\Phi : B \rightarrow B_{T_\Phi}$, and the predicate closure $j_B^\Phi : B_{T_\Phi} \rightarrow B_{F_\Phi}$, the reflection $\eta_B : B \rightarrow B_\Phi$ is defined as follows: (i) $B_\Phi = (B_{F_\Phi})_{|\equiv^\Phi}$ where \equiv^Φ is the smallest congruence containing $\sim^\Phi = \{(h^*(t_l), h^*(t_r)) :: (X, t_l = t_r) \in \Phi \text{ and assignment } h : X \rightarrow B_{F_\Phi}\}$ and (ii) $\eta_B = \equiv_B^\Phi \circ j_B^\Phi \circ i_B^\Phi$ where $\equiv_B^\Phi : B_{F_\Phi} \rightarrow B_\Phi$ is the natural (surjective) homomorphism onto the quotient $(B_{F_\Phi})_{|\equiv^\Phi} = B_\Phi$.

Lemma 277: Reflection-Satisfaction $B_\Phi \models \Phi$.

Lemma 278 : Equality-Closure If B is a Σ -system, Φ is a set of atomic Σ -axioms, $\equiv_B^\Phi : B_{F_\Phi} \rightarrow B_\Phi$ is the natural homomorphism onto the quotient B_Φ , $q : B_{F_\Phi} \rightarrow D$ is a homomorphism, and $D \models \Phi$, then there is a homomorphism $q^* : B_\Phi \rightarrow D$ with $q^* \circ \equiv_B^\Phi = q$.

Theorem 279: Construction of the Reflection for Varieties The homomorphism $\eta_B : B \rightarrow B_\Phi$, constructed in Definition, is the reflector for B .

2.5 Quasi Varietäten

2.5.1 Horn-Typ Axiome

Definition 280: Hornaxiom Hornaxiom $a = (X, P \subseteq F^{\Sigma, X}, c \in F^{\Sigma, X})$

X ist endliche Variablenmenge, P (Prämissen) endliche syntaktische Präsentation, $c \in F^{\Sigma, X}$ Formel (Konklusion).

Definition 281: Gültigkeit von Hormaxiomen Hormaxiom $a = (X, P, c)$ ist gültig in einem algebraischen System B ($B \models a$), wenn jeder Morphismus

$h : \mathbf{A}_P \rightarrow B$ erweitert werden kann zu einem Homomorphismus

$h^* : \mathbf{A}_{c^P} \rightarrow B$, so dass $h^* \circ x_p^c = h$, wobei $c^P = (X, P \cup \{c\})$ und $x_P^c : \mathbf{A}_P \rightarrow \mathbf{A}_{c^P}$ ist der eindeutige Homomorphismus, der $x_P^c \circ x^P = x^{c^P}$ erfüllt.

Proposition 282: Gültigkeit ist abstrakt $a = (X, P, c)$ Hornaxiom, $B \models a$, $B \approx B' \implies B' \models a$.

Proposition 283: Gültigkeit Produkt und Subsystem $a = (X, P, c)$ Hornaxiom

1. I Indexmenge, $(B_i \models a)_{i \in I} \implies \Pi(B_i)_{i \in I} \models a$
2. $i : C \rightarrow B$ extremal Mono, $B \models a \implies C \models a$

Lemma 284: Homomorphismen in approximierte Systeme (I, \leq) gerichtete Indexmenge $\mathcal{H} = ((B^I)_{I \in I}, (k^{i,j} : B^i \rightarrow B^j)_{i,j \in I, i \leq j})$ approximierte Situation

mit approximierende System $(\mathcal{H}^\bullet, (i^\bullet : B^i \rightarrow \mathcal{H}^\bullet)_{i \in I})$,

$F = (X, F \subseteq F^{\Sigma, X})$ endliche syntaktische Präsentation,

$m : \mathbf{A}_F \rightarrow \mathcal{H}^\bullet$ homo,

\implies es gibt $j \in I$ und ein Homo $m' : \mathbf{A}_F \rightarrow B^j$, so dass $m = j^\bullet \circ m'$.

Proposition 285: Gültigkeit in approximierten Systeme (I, \leq) ist eine gerichtete, partiell geordnete Indexmenge und $\mathcal{H} = ((B^i)_{i \in I}, (k^{i,j} : B^i \rightarrow B^j)_{i,j \in I, i \leq j})$ eine approximierende Situation, so dass $(B^i \models a)_{i \in I}$ für ein Hornaxiom a

$\implies a$ ist gültig im approximierten System \mathcal{H}^\bullet , d.h. $\mathcal{H}^\bullet \models a$

2.5.2 Horntyp Spezifikation

Definition 286: Horn-Spezifikation Ein Horntyp-Spezifikation $HSpec = (\Sigma, \Phi)$ besteht aus einer Signatur Σ und einer Menge an Hornaxiomen Φ wrt. to Σ .

Algebraisches System $B \in Sys(\Sigma)$ erfüllt die Spezifikation ($B \models HSpec$ oder $B \models \Phi$), wenn $B \models a$ für alle $a \in \Phi$.

Die volle Subkategorie von $Sys(\Sigma)$, welche alle Systeme beinhaltet, die die Spezifikation $HSpec = (\Sigma, \Phi)$ erfüllen, wird bezeichnet als $Sys(HSpec)$ oder $Sys(\Phi)$.

Eine volle Subkategorie \mathbb{K} aller Σ -Systeme wird Hornklasse genannt, wenn es eine Hornspezifikation $HSpec = (\Sigma, \Phi)$ gibt, so dass $\mathbb{K} = Sys(HSpec)$.

Proposition 287: Hornklassen sind abstrakt Jede Hornklasse ist isomorph-geschlossen.

Definition 288: Bündel von Hornaxiomen, Lösung Ein Bündel $\mathcal{B} = (X, P \subseteq F^{\Sigma, X}, C \subseteq F^{\Sigma, X})$ von Hornaxiomen mit der gleichen endlichen Variablenmenge X und der gleichen endlichen Menge von Prämisse P besteht aus zwei syntaktischen Präsentationen P und C .

Die syntaktische Präsentation für Prämisse und Konklusion wird bezeichnet als $C^P = (X, P \cup C)$.

Der eindeutige Epimorphismus, der $x_P^C \circ x^P = x^{C^P}$ erfüllt, wird bezeichnet als $x_P^C : \mathbf{A}_P \rightarrow \mathbf{A}_{C^P}$.

Ein algebraisches System D erfüllt ein Bündel ($D \models \mathcal{B}$), wenn jeder Homo $h : \mathbf{A}_P \rightarrow D$ erweitert werden kann zu einem Homo $h^* : \mathbf{A}_{C^P} \rightarrow C$, so dass $h^* \circ x_P^C = h$.

Lemma 289: Bündel definieren Co-Limiten $(a_i = (X, P, c_i))_{i \in I}$ ist eine Familie von Hornaxiomen, mit der selben Variablenmenge X und der selben Menge von Prämissen P und dessen Bündel \mathcal{B}

$\Rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ ist Co-Limit von $(x^{c_i^P} : \mathbf{A}_P \rightarrow \mathbf{A}_{c_i^P})_{i \in I}$

Proposition 290: Bündel von Hornaxiomen Wenn $(a_i)_{i \in I}$ ist Familie von Hornaxiomen mit der gleichen Variablenmenge X und der gleichen Menge von Prämissen, das heißt $a_i = (X, P, c_i)$ für alle $i \in I$

dann \Rightarrow ein algebraisches System D erfüllt alle Axiome, d.h. $(D \models a_i)_{i \in I} \Leftrightarrow D$ erfüllt das Bündel $\mathcal{B} = (X, P, \{c_i :: i \in I\})$, d.h. $D \models \mathcal{B}$

Corollary 291: Hornklassen sind episich reflektive Subkategorien Jede Hornklasse $\mathbb{K} \subseteq Sys(\Sigma)$ ist eine episich reflektive Subkategorie von $Sys(\Sigma)$

Theorem 292: Charakterisierung von Hornklassen Eine volle Subkategorie \mathbb{K} von $Sys(\Sigma)$ ist eine Hornklasse $\Leftrightarrow \mathbb{K}$ ist geschlossen bis auf Produkte, extreme Subobjekte und approximierte Systeme.