Bài tập Điều khiển quá trình

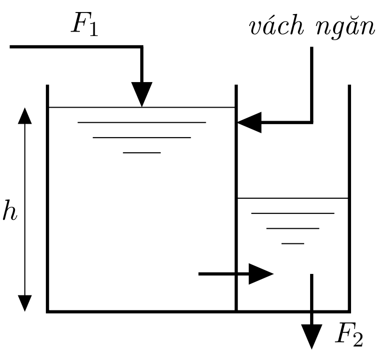
Chủ đề Mô hình hóa lý thuyết

Sưu tầm: Thi Minh Nhựt Email: thiminhnhut@gmail.com

Thời gian: Ngày 1 tháng 10 năm 2017

1 Bài tập 1

Giả thiết Cho hệ thống như hình 1: Biết lưu lượng ra F_2 tỉ lệ với chiều cao chất lỏng theo công thức $F_2 = R.h^{3/2}$ với R là hằng số. Tiết diện của bồn chứa là A.



Hình 1: Hệ thống 1 bình chứa

Yêu cầu

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

c. Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \dfrac{H(s)}{F_1(s)}$

Bài giải

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: F_1, F_2.
- Biến ra: h.
- Biến điều khiển: F_1 hoặc F_2.
- Biến cần điều khiển: h.
- Biến nhiễu: F_2 hoặc F_1.

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

- Phương trình cân bằng vật chất:

$$\frac{dV}{dt} = F_1 - F_2 \Longleftrightarrow \frac{d\left(Ah\right)}{dt} = F_1 - F_2 \Longleftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}\left(F_1 - F_2\right) \tag{1}$$

- Thay $F_2 = R.h^{3/2}$ vào (1), ta có:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}\left(F_1 - F_2\right) = \frac{1}{A}\left(F_1 - R.h^{3/2}\right) \tag{2}$$

- Kết luận, phương trình mô tả quá trình:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}\left(F_1 - R.h^{3/2}\right) \tag{3}$$

c. *Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.*

- Gọi $\left(\overline{F_1}, \overline{h}\right)$ là điểm làm việc cân bằng của hệ thống.
- Gọi $F_1 = \overline{F_1} + \Delta F_1, h = \overline{h} + \Delta h$.
- Đặt $f\left(F_1, h\right) = \dot{h} = \dfrac{1}{A}\left(F_1 - R.h^{3/2}\right)$
  - Tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{F_1}, \overline{h}\right)$ thì

$$f\left(\overline{F_1}, \overline{h}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{A}\left(\overline{F_1} - R.\overline{h}^{3/2}\right) = 0 \tag{4}$$

  - Khai triển Taylor cho $f\left(F_1, h\right) = \dot{h} = \dfrac{1}{A}\left(F_1 - R.h^{3/2}\right)$, ta có:

$$\dot{h} = \Delta\dot{h} = f\left(\overline{F_1} + \Delta F_1, \overline{h} + \Delta h\right) \tag{5}$$

$$\approx \underbrace{f\left(\overline{F_1}, \overline{h}\right)}_{0} + \left.\frac{\partial f}{\partial F_1}\right|_{\left(\overline{F_1}, \overline{h}\right)} \Delta F_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{\left(\overline{F_1}, \overline{h}\right)} \Delta h \tag{6}$$

$$\approx \frac{1}{A}\left(\Delta F_1 - \frac{3}{2}R\overline{h}^{-1/2}\Delta h\right) \tag{7}$$

- Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{F_1}, \overline{h}\right)$:

$$\Delta\dot{h} = \frac{1}{A}\left(\Delta F_1 - \frac{3}{2}R\overline{h}^{-1/2}\Delta h\right) \tag{8}$$

d. *Xác định hàm truyền* $G(s) = \dfrac{H(s)}{F_1(s)}$

- Ta có: $\Delta\dot{h} = \dfrac{1}{A}\left(\Delta F_1 - \dfrac{3}{2}R\overline{h}^{-1/2}\Delta h\right)$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH(s) = \frac{1}{A}\left[F_1(s) - \frac{3}{2}R\overline{h}^{-1/2}H(s)\right] \tag{9}$$

$$\Longleftrightarrow sAH(s) + \frac{3}{2}R\overline{h}^{-1/2}H(s) = F_1(s) \tag{10}$$

$$\Longleftrightarrow \left(sA + \frac{3}{2}R\overline{h}^{-1/2}\right)H(s) = F_1(s) \tag{11}$$

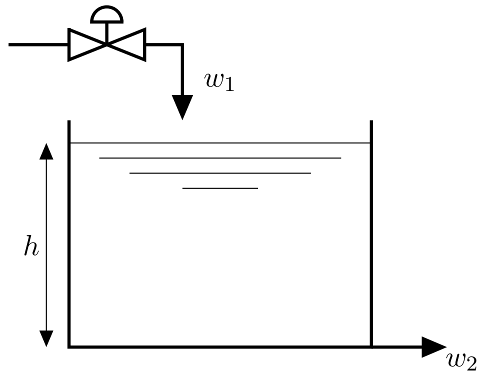
$$\Longleftrightarrow \frac{H(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{sA + \frac{3}{2}R\overline{h}^{-1/2}} \tag{12}$$

- Kết luận:

$$G(s) = \frac{H(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{sA + \frac{3}{2}R\overline{h}^{-1/2}} \tag{13}$$

2 Bài tập 2

Giả thiết Cho hệ thống như hình 2: Trong đó w_1 là dòng lưu lượng vào $[m^3/s]$, w_2 là dòng lưu lượng ra $[m^3/s]$ và h là chiều cao của mức chất lỏng $[m]$. Biết lưu lượng ra w_2 tỉ lệ với căn bậc hai của chiều cao mực chất lỏng bởi hằng số C_v. Diện tích mặt cắt ngang của bồn chứa là $A = 2[m^2]$. Khối lượng riêng của chất lỏng là $\rho = 500[kg/m^3]$.



Hình 2: Hệ thống 1 bình chứa

Yêu cầu

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

c. Viết phương trình động học ở trạng thái ổn định mức. Biết trạng thái ổn định: $w_1 = 2,4\ m^3/s$ và $h = 1,44\ m$. Tìm C_v.

d. Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

e. Xác định hàm truyền $G(s) = \dfrac{H(s)}{W_1(s)}$

Bài giải

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: w_1, w_2.
- Biến ra: h.
- Biến điều khiển: w_1.
- Biến cần điều khiển: h.
- Biến nhiễu: w_2.

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

- Phương trình cân bằng vật chất:

$$\frac{dV}{dt} = w_1 - w_2 \Longleftrightarrow \frac{d\,(Ah)}{dt} = w_1 - w_2 \Longleftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}\,(w_1 - w_2) \tag{14}$$

- Thay $w_2 = C_v\sqrt{h}$ vào (14), ta có:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}\,(w_1 - w_2) = \frac{1}{A}\left(w_1 - C_v\sqrt{h}\right) \tag{15}$$

- Kết luận, phương trình mô tả quá trình:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}\left(w_1 - C_v\sqrt{h}\right) \tag{16}$$

c. *Viết phương trình động học ở trạng thái ổn định mức. Biết trạng thái ổn định: $w_1 = 2,4\ m^3/s$ và $h = 1,44\ m$. Tìm C_v.*

- Gọi $\left(\overline{w_1}, \overline{h}\right)$ là điểm làm việc cân bằng của hệ thống.
- Đặt $f\left(w_1, h\right) = \dot{h} = \dfrac{1}{A}\left(w_1 - C_v\sqrt{h}\right)$
- Tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{w_1}, \overline{h}\right)$ thì

$$f\left(\overline{w_1}, \overline{h}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{A}\left(\overline{w_1} - C_v\sqrt{\overline{h}}\right) = 0 \tag{17}$$

- Kết luận, phương trình động học ở trạng thái ổn định mức:

$$\frac{1}{A}\left(\overline{w_1} - C_v\sqrt{\overline{h}}\right) = 0 \tag{18}$$

- Thông số ở trạng thái ổn định: $\overline{w_1} = 2,4\ m^3/s$ và $\overline{h} = 1,44\ m$, nên thay vào phương trình (18), ta có:

$$\frac{1}{A}\left(\overline{w_1} - C_v\sqrt{\overline{h}}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(2,4 - C_v\sqrt{1,44}\right) = 0 \Longleftrightarrow C_v = 2[m^2/s] \tag{19}$$

d. *Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.*

- Gọi $w_1 = \overline{w_1} + \Delta w_1, h = \overline{h} + \Delta h$.
- Khai triển Taylor cho $f\left(w_1, h\right) = \dot{h} = \dfrac{1}{A}\left(w_1 - C_v\sqrt{h}\right)$, ta có:

$$\begin{aligned}
\dot{h} = \Delta\dot{h} &= f\left(\overline{w_1} + \Delta w_1, \overline{h} + \Delta h\right) && (20)\\
&\approx \underbrace{f\left(\overline{w_1}, \overline{h}\right)}_{0} + \left.\frac{\partial f}{\partial w_1}\right|_{\left(\overline{w_1}, \overline{h}\right)} \Delta w_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{\left(\overline{w_1}, \overline{h}\right)} \Delta h && (21)\\
&\approx \frac{1}{A}\left(\Delta w_1 - \frac{C_v}{2\sqrt{\overline{h}}}\Delta h\right) && (22)
\end{aligned}$$

- Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{w_1}, \overline{h}\right)$:

$$\Delta\dot{h} = \frac{1}{A}\left(\Delta w_1 - \frac{C_v}{2\sqrt{\overline{h}}}\Delta h\right) \tag{23}$$

e. *Xác định hàm truyền $G(s) = \dfrac{H(s)}{W_1(s)}$*

- Ta có: $\Delta\dot{h} = \dfrac{1}{A}\left(\Delta w_1 - \dfrac{C_v}{2\sqrt{\overline{h}}}\Delta h\right)$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

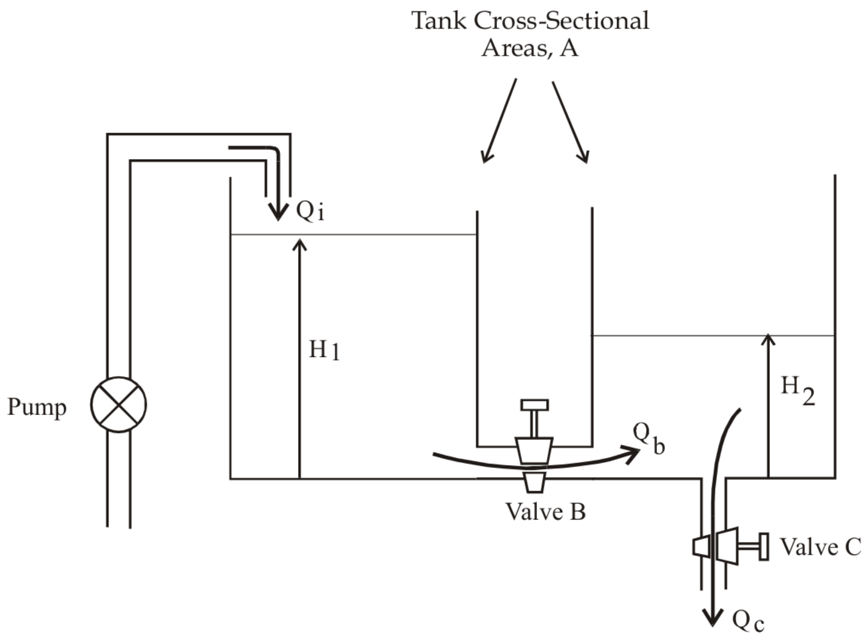
$$\begin{aligned}
sH(s) &= \frac{1}{A}\left[W_1(s) - \frac{C_v}{2\sqrt{\overline{h}}}H(s)\right] && (24)\\
\Longleftrightarrow sAH(s) &+ \frac{C_v}{2\sqrt{\overline{h}}}H(s) = W_1(s) && (25)\\
\Longleftrightarrow &\left(sA + \frac{C_v}{2\sqrt{\overline{h}}}\right)H(s) = W_1(s) && (26)\\
\Longleftrightarrow &\frac{H(s)}{W_1(s)} = \frac{1}{sA + \dfrac{C_v}{2\sqrt{\overline{h}}}} && (27)
\end{aligned}$$

- Kết luận:

$$G(s) = \frac{H(s)}{W_1(s)} = \frac{1}{sA + \dfrac{C_v}{2\sqrt{\overline{h}}}} \tag{28}$$

3 Bài tập 3

Giả thiết Cho hệ thống như hình 3: Bình chứa thứ nhất có tiết diện là A_1 và bình chứa thứ hai có tiết diện là A_2. Các lưu lượng ra Q_b và Q_c được xác định như sau: $Q_b = C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ và $Q_c = C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}$



Hình 3: Hệ thống 2 bình chứa

Yêu cầu

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

c. Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \dfrac{H_2(s)}{Q_i(s)}$

Bài giải

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: Q_i, Q_b, Q_c.
- Biến ra: H_1, H_2.
- Biến điều khiển: Q_b, Q_c.
- Biến cần điều khiển: H_1, H_2.
- Biến nhiễu: Q_i.

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

- Phương trình cho bình chứa 1:
  - Bình chứa 1:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_i - Q_b \Longleftrightarrow \frac{d\left(A_1H_1\right)}{dt} = Q_i - Q_b \Longleftrightarrow \frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(Q_i - Q_b\right) \tag{29}$$

– Thay $Q_b = C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ vào (29), ta có:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(Q_i - Q_b\right) = \frac{1}{A_1}\left[Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}\right] \tag{30}$$

- Phương trình cho bình chứa 2:
  – Bình chứa 2:

$$\frac{dV_2}{dt} = Q_b - Q_c \Longleftrightarrow \frac{d\left(A_2H_2\right)}{dt} = Q_b - Q_c \Longleftrightarrow \frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(Q_b - Q_c\right) \tag{31}$$

  – Thay $Q_b = C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ và $Q_c = C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}$ vào (31), ta có:

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(Q_b - Q_c\right) = \frac{1}{A_2}\left[C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}\right] \tag{32}$$

- Kết luận, hệ phương trình mô tả quá trình:

$$\begin{cases} \dfrac{dH_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}\right] \\ \dfrac{dH_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left[C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}\right] \end{cases} \tag{33}$$

c. *Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.*

- Gọi $\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$ là điểm làm việc cân bằng của hệ thống gồm 2 bình chứa.
- Gọi $Q_i = \overline{Q_i} + \Delta Q_i, H_1 = \overline{H_1} + \Delta H_1, H_2 = \overline{H_2} + \Delta H_2$.
- Đặt $f\left(Q_i, H_1, H_2\right) = \dot{H}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}\right]$
  – Tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$ thì

$$f\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{A_1}\left[\overline{Q_i} - C_{db}a_b\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}\right] = 0 \tag{34}$$

  – Khai triển Taylor cho $f\left(Q_i, H_1, H_2\right) = \dot{H}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}\right]$, ta có:

$$\dot{H}_1 = \Delta\dot{H}_1 = f\left(\overline{Q_i} + \Delta Q_i, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2\right) \tag{35}$$

$$\approx \underbrace{f\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)}_{0} + \left.\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right|_{\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)}\Delta Q_i + \left.\frac{\partial f}{\partial H_1}\right|_{\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)}\Delta H_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial H_2}\right|_{\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)}\Delta H_2 \tag{36}$$

$$\approx \frac{1}{A_1}\left[\Delta Q_i - \frac{2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_1 + \frac{2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_2\right] \tag{37}$$

$$\approx \frac{1}{A_1}\left[\Delta Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_2\right] \tag{38}$$

  – Kết luận:

$$\Delta\dot{H}_1 = \frac{1}{A_1}\left[\Delta Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_2\right] \tag{39}$$

- Đặt $g\left(Q_i, H_1, H_2\right) = \dot{H}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}\right]$

– Tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$ thì:

$$g\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{A_2}\left[C_{db}a_b\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})} - C_{dc}a_c\sqrt{2g\overline{H_2}}\right] = 0 \tag{40}$$

– Khai triển Taylor cho $g\left(Q_i, H_1, H_2\right) = \dot{H}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1-H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}\right]$, ta có:

$$\dot{H}_2 = \Delta\dot{H}_2 = g\left(\overline{Q_i} + \Delta Q_i, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2\right) \tag{41}$$

$$\approx \underbrace{g\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)}_{0} + \left.\frac{\partial g}{\partial H_1}\right|_{\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta H_1 + \left.\frac{\partial g}{\partial H_2}\right|_{\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta H_2 \tag{42}$$

$$\approx \frac{1}{A_2}\left[\frac{2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_1 + \frac{-2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_2 - \frac{2gC_{dc}a_c}{2\sqrt{2g\overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \tag{43}$$

$$\approx \frac{1}{A_2}\left[\frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \tag{44}$$

– Kết luận:

$$\Delta\dot{H}_2 = \frac{1}{A_2}\left[\frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \tag{45}$$

- Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$:

$$\begin{cases} \Delta\dot{H}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[\Delta Q_i - \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_1 + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_2\right] \\ \Delta\dot{H}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_1 - \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_2 - \dfrac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \end{cases} \tag{46}$$

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \dfrac{H_2(s)}{Q_i(s)}$

- Ta có: $\Delta\dot{H}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[\Delta Q_i - \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_1 + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_2\right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_1(s) = \frac{1}{A_1}\left[Q_i(s) - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_1(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_2(s)\right] \tag{47}$$

$$\Longleftrightarrow sA_1H_1(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_1(s) = Q_i(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_2(s) \tag{48}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\right]H_1(s) = Q_i(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_2(s) \tag{49}$$

$$\Longleftrightarrow H_1(s) = \frac{Q_i(s) + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_2(s)}{sA_1 + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}} \tag{50}$$

- Ta có: $\Delta\dot{H}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_1 - \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\Delta H_2 - \dfrac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\Delta H_2\right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_2(s) = \frac{1}{A_2}\left[\frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_1(s) - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_2(s) - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}H_2(s)\right] \tag{51}$$

$$\Longleftrightarrow sA_2H_2(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_2(s) + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}H_2(s) = \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_1(s) \tag{52}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]H_2(s) = \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_1(s) \tag{53}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}{gC_{db}a_b}\left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]H_2(s) = H_1(s) \tag{54}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}{gC_{db}a_b}\left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]H_2(s) = \frac{Q_i(s) + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_2(s)}{sA_1 + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}} \tag{55}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}{gC_{db}a_b}\left[sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\right]\left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]H_2(s)$$

$$= Q_i(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_2(s) \tag{56}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}{gC_{db}a_b}\left[sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\right]\left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]H_2(s)$$

$$- \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}H_2(s) = Q_i(s) \tag{57}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\frac{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}{gC_{db}a_b}\left[sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\right]\left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]\right.$$

$$\left. - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\right\}H_2(s) = Q_i(s) \tag{58}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{H_2(s)}{Q_i(s)} =$$

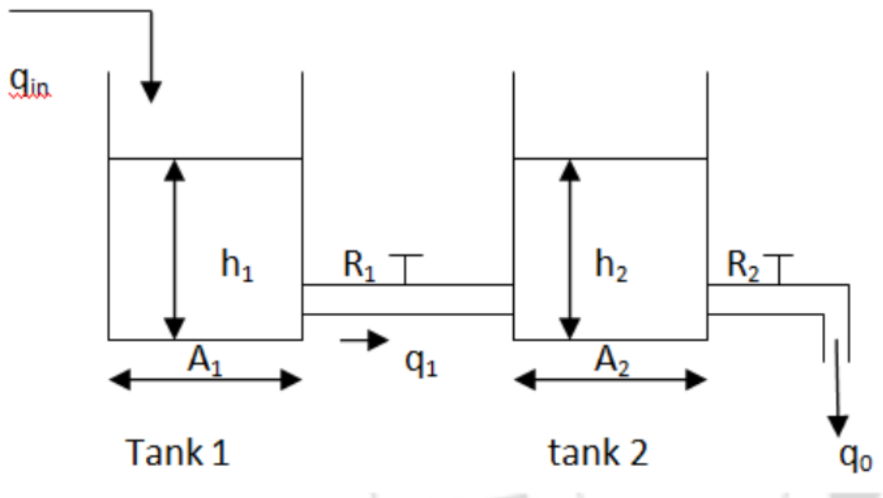
$$\frac{1}{\dfrac{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}{gC_{db}a_b}\left[sA_1 + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}\right]\left[sA_2 + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}} + \dfrac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right] - \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1}-\overline{H_2})}}} \tag{59}$$

- Kết luận:

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$$
$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}{gC_{db}a_b}\left[sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\right]\left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right] - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}} \tag{60}$$

4 Bài tập 4

Giả thiết Cho hệ thống như hình 4: Các lưu lượng ra q_1 và q_0 được xác định như sau: $q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$ và $q_0 = \frac{h_2}{R_2}$



Hình 4: Hệ thống 2 bình chứa

Yêu cầu

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

c. Nếu phương trình phi tuyến hãy tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)}$

Bài giải

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: q_{in}, q_1, q_0.
- Biến ra: h_1, h_2.
- Biến điều khiển: q_1, q_0.
- Biến cần điều khiển: h_1, h_2.
- Biến nhiễu: q_{in}.

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

- Phương trình cho bình chứa 1:
  - Bình chứa 1:

$$\frac{dV_1}{dt} = q_{in} - q_1 \Longleftrightarrow \frac{d\left(A_1 h_1\right)}{dt} = q_{in} - q_1 \Longleftrightarrow \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(q_{in} - q_1\right) \tag{61}$$

  - Thay $q_1 = \dfrac{h_1 - h_2}{R_1}$ vào (61), ta có:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(q_{in} - q_1\right) = \frac{1}{A_1}\left(q_{in} - \frac{h_1 - h_2}{R_1}\right) \tag{62}$$

- Phương trình cho bình chứa 2:
  - Bình chứa 2:

$$\frac{dV_2}{dt} = q_1 - q_0 \Longleftrightarrow \frac{d\left(A_2 h_2\right)}{dt} = q_1 - q_0 \Longleftrightarrow \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(q_1 - q_0\right) \tag{63}$$

  - Thay $q_1 = \dfrac{h_1 - h_2}{R_1}$ và $q_0 = \dfrac{h_2}{R_2}$ vào (63), ta có:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(q_1 - q_0\right) = \frac{1}{A_2}\left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}\right) \tag{64}$$

- Kết luận, hệ phương trình mô tả quá trình:

$$\begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left(q_{in} - \dfrac{h_1 - h_2}{R_1}\right) \\ \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left(\dfrac{h_1 - h_2}{R_1} - \dfrac{h_2}{R_2}\right) \end{cases} \tag{65}$$

c. Nếu phương trình phi tuyến hãy tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

- Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left(q_{in} - \dfrac{h_1 - h_2}{R_1}\right) \\ \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left(\dfrac{h_1 - h_2}{R_1} - \dfrac{h_2}{R_2}\right) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left(q_{in} - \dfrac{1}{R_1}h_1 + \dfrac{1}{R_1}h_2\right) \\ \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{1}{R_1}h_1 - \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)h_2\right] \end{cases} \tag{66}$$

- Do hệ phương trình (66) đã tuyến tính rồi nên ta không cần phải tuyến tính hóa.

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \dfrac{h_2(s)}{Q_{in}(s)}$

- Ta có: $\dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left(q_{in} - \dfrac{h_1}{R_1}\right)$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_1(s) = \frac{1}{A_1}\left[Q_{in}(s) - \frac{H_1(s)}{R_1} + \frac{H_2(s)}{R_1}\right] \tag{67}$$

$$\Longleftrightarrow sA_1H_1(s) + \frac{1}{R_1}H_1(s) = Q_{in}(s) + \frac{H_2(s)}{R_1} \tag{68}$$

$$\Longleftrightarrow \left(sA_1 + \frac{1}{R_1}\right)H_1(s) = Q_{in}(s) + \frac{H_2(s)}{R_1} \tag{69}$$

$$\Longleftrightarrow H_1(s) = \frac{Q_{in}(s) + \dfrac{H_2(s)}{R_1}}{sA_1 + \dfrac{1}{R_1}} \tag{70}$$

- Ta có: $\dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{h_1}{R_1} - \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)h_2\right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_2(s) = \frac{1}{A_2}\left[\frac{H_1(s)}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)H_2(s)\right] \tag{71}$$

$$\Longleftrightarrow sA_2H_2(s) + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)H_2(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \tag{72}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]H_2(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \tag{73}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]H_2(s) = \frac{Q_{in}(s) + \dfrac{H_2(s)}{R_1}}{R_1\left(sA_1 + \dfrac{1}{R_1}\right)} \tag{74}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]H_2(s) = \frac{Q_{in}(s) + \dfrac{H_2(s)}{R_1}}{sA_1R_1+1} \tag{75}$$

$$\Longleftrightarrow (sA_1R_1+1)\left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]H_2(s) = Q_{in}(s) + \frac{H_2(s)}{R_1} \tag{76}$$

$$\Longleftrightarrow (sA_1R_1+1)\left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]H_2(s) - \frac{H_2(s)}{R_1} = Q_{in}(s) \tag{77}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{(sA_1R_1+1)\left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right] - \frac{1}{R_1}\right\}H_2(s) = Q_{in}(s) \tag{78}$$

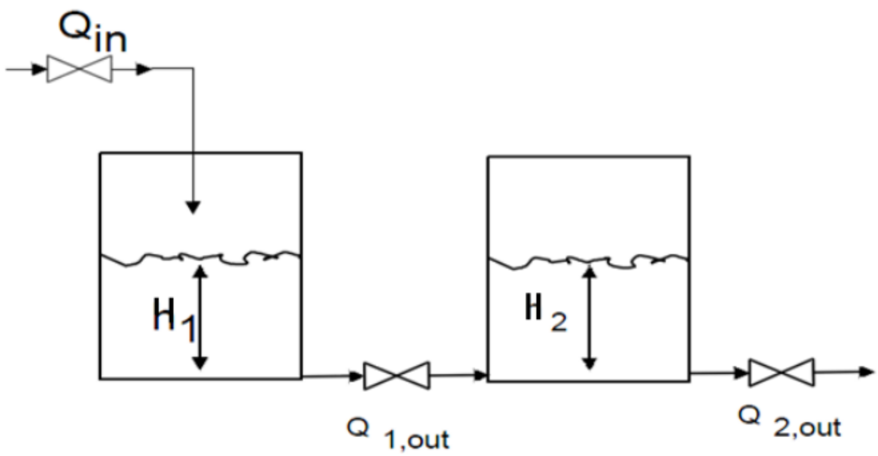
$$\Longleftrightarrow \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{1}{(sA_1R_1+1)\left[sA_2 + \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)\right] - \dfrac{1}{R_1}} \tag{79}$$

- Kết luận:

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{1}{(sA_1R_1+1)\left[sA_2 + \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)\right] - \dfrac{1}{R_1}} \tag{80}$$

5 Bài tập 5

Giả thiết Cho hệ thống như hình 5: Bình chứa thứ nhất có tiết diện là A_1 và bình chứa thứ hai có tiết diện là A_2. Các lưu lượng ra Q_{1out} và Q_{2out} được xác định như sau: $Q_{1out} = k_1\sqrt{H_1 - H_2}$ và $Q_{2out} = k_2\sqrt{H_2}$.



Hình 5: Hệ thống 2 bình chứa

Yêu cầu

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

c. Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \dfrac{H_2(s)}{Q_{in}(s)}$

Bài giải

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: $Q_{in}, Q_{1out}, Q_{2out}$.
- Biến ra: H_1, H_2.
- Biến điều khiển: $Q_{in}, Q_{1out}, Q_{2out}$.
- Biến cần điều khiển: H_1, H_2.
- Biến nhiễu: không có.

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

- Phương trình cho bình chứa 1:
  - Bình chứa 1:
$$\frac{dV_1}{dt} = Q_{in} - Q_{1out} \Longleftrightarrow \frac{d\left(A_1H_1\right)}{dt} = Q_{in} - Q_{1out} \Longleftrightarrow \frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(Q_{in} - Q_{1out}\right) \tag{81}$$
  - Thay $Q_{1out} = k_1\sqrt{H_1 - H_2}$ vào (81), ta có:
$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(Q_{in} - Q_{1out}\right) = \frac{1}{A_1}\left[Q_{in} - k_1\sqrt{H_1 - H_2}\right] \tag{82}$$
- Phương trình cho bình chứa 2:
  - Bình chứa 2:
$$\frac{dV_2}{dt} = Q_{1out} - Q_{2out} \Longleftrightarrow \frac{d\left(A_2H_2\right)}{dt} = Q_{1out} - Q_{2out} \Longleftrightarrow \frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(Q_{1out} - Q_{2out}\right) \tag{83}$$
  - Thay $Q_{1out} = k_1\sqrt{H_1 - H_2}$ và $Q_{2out} = k_2\sqrt{H_2}$ vào (83), ta có:
$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(Q_{1out} - Q_{2out}\right) = \frac{1}{A_2}\left[k_1\sqrt{H_1 - H_2} - k_2\sqrt{H_2}\right] \tag{84}$$
- Kết luận, hệ phương trình mô tả quá trình:
$$\begin{cases} \dfrac{dH_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_{in} - k_1\sqrt{H_1 - H_2}\right] \\ \dfrac{dH_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left[k_1\sqrt{H_1 - H_2} - k_2\sqrt{H_2}\right] \end{cases} \tag{85}$$

c. Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

- Gọi $\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$ là điểm làm việc cân bằng của hệ thống gồm 2 bình chứa.
- Gọi $Q_{in} = \overline{Q_{in}} + \Delta Q_{in}, H_1 = \overline{H_1} + \Delta H_1, H_2 = \overline{H_2} + \Delta H_2$.
- Đặt $f\left(Q_{in}, H_1, H_2\right) = \dot{H}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_{in} - k_1\sqrt{H_1 - H_2}\right]$

– Tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$ thì

$$f\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{A_1}\left[\overline{Q_{in}} - k_1\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}\right] = 0 \tag{86}$$

– Khai triển Taylor cho $f\left(Q_{in}, H_1, H_2\right) = \dot{H}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_{in} - k_1\sqrt{H_1 - H_2}\right]$, ta có:

$$\dot{H}_1 = \Delta\dot{H}_1 = f\left(\overline{Q_{in}} + \Delta Q_{in}, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2\right) \tag{87}$$

$$\approx \underbrace{f\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)}_{0} + \left.\frac{\partial f}{\partial Q_{in}}\right|_{\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta Q_{in} + \left.\frac{\partial f}{\partial H_1}\right|_{\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta H_1$$

$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial H_2}\right|_{\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta H_2 \tag{88}$$

$$\approx \frac{1}{A_1}\left[\Delta Q_{in} - \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \tag{89}$$

– Kết luận:

$$\Delta\dot{H}_1 = \frac{1}{A_1}\left[\Delta Q_{in} - \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \tag{90}$$

- Đặt $g\left(Q_{in}, H_1, H_2\right) = \dot{H}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[k_1\sqrt{H_1 - H_2} - k_2\sqrt{H_2}\right]$

  – Tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$ thì:

$$g\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{A_2}\left[k_1\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}} - k_2\sqrt{\overline{H_2}}\right] = 0 \tag{91}$$

– Khai triển Taylor cho $g\left(Q_{in}, H_1, H_2\right) = \dot{H}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[k_1\sqrt{H_1 - H_2} - k_2\sqrt{H_2}\right]$, ta có:

$$\dot{H}_2 = \Delta\dot{H}_2 = g\left(\overline{Q_{in}} + \Delta Q_{in}, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2\right) \tag{92}$$

$$\approx \underbrace{g\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)}_{0} + \left.\frac{\partial g}{\partial H_1}\right|_{\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta H_1 + \left.\frac{\partial g}{\partial H_2}\right|_{\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta H_2 \tag{93}$$

$$\approx \frac{1}{A_2}\left[\frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_1 + \frac{-k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_2 - \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \tag{94}$$

– Kết luận:

$$\Delta\dot{H}_2 = \frac{1}{A_2}\left[\frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_1 + \frac{-k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_2 - \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \tag{95}$$

- Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$:

$$\begin{cases} \Delta\dot{H}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[\Delta Q_{in} - \dfrac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_1 + \dfrac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \\ \Delta\dot{H}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_1 + \dfrac{-k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}\Delta H_2 - \dfrac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \end{cases} \tag{96}$$

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \dfrac{H_2(s)}{Q_{in}(s)}$

- Ta có: $\Delta\dot{H}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[\Delta Q_{in} - \dfrac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}\Delta H_1 + \dfrac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}\Delta H_2\right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_1(s) = \frac{1}{A_1}\left[Q_{in}(s) - \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_1(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_2(s)\right] \tag{97}$$

$$\Longleftrightarrow sA_1H_1(s) + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_1(s) = Q_{in}(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_2(s) \tag{98}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}\right]H_1(s) = Q_{in}(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_2(s) \tag{99}$$

$$\Longleftrightarrow H_1(s) = \frac{Q_{in}(s) + \dfrac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_2(s)}{sA_1 + \dfrac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}} \tag{100}$$

- Ta có: $\Delta\dot{H}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_1 + \dfrac{-k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}\Delta H_2 - \dfrac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\Delta H_2\right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_2(s) = \frac{1}{A_2}\left[\frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_1(s) + \frac{-k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_2(s) - \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}H_2(s)\right] \tag{101}$$

$$\Longleftrightarrow sA_2H_2(s) + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_2(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}H_2(s) = \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_1(s) \tag{102}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}} + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\right]H_2(s) = \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_1(s) \tag{103}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}{k_1}\left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}} + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\right]H_2(s) = H_1(s) \tag{104}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}{k_1}\left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}} + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\right]H_2(s) = \frac{Q_{in}(s) + \dfrac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_2(s)}{sA_1 + \dfrac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}} \tag{105}$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow &\frac{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}{k_1}\left[sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}\right]\left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}} + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\right]H_2(s)\\ &= Q_{in}(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_2(s)\end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow &\frac{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}{k_1}\left[sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}\right]\left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}} + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\right]H_2(s)\\ &- \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}H_2(s) = Q_{in}(s)\end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow &\left\{\frac{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}{k_1}\left[sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}\right]\left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}} + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\right]\right.\\ &\left.-\frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}\right\}H_2(s) = Q_{in}(s)\end{aligned} \tag{108}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{1}{\dfrac{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}{k_1}\left[sA_1 + \dfrac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}\right]\left[sA_2 + \dfrac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}} + \dfrac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\right] - \dfrac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}} \tag{109}$$

- Kết luận:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)} \\
&= \frac{1}{\frac{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}{k_1}\left[sA_1+\frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}\right]\left[sA_2+\frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}+\frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}}\right]-\frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1}-\overline{H_2}}}}
\end{aligned} \tag{110}
$$