

# Bài tập Điều khiển quá trình

## Chủ đề Mô hình hóa lý thuyết

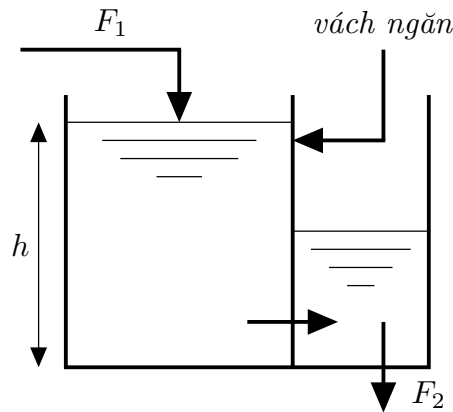
Sưu tầm: Thi Minh Nhựt

Email: thiminhnhut@gmail.com

Thời gian: Ngày 26 tháng 9 năm 2017

### 1 Bài tập 1

**Giả thiết** Cho hệ thống như hình 1: Biết lưu lượng ra  $F_2$  tỉ lệ với chiều cao chất lỏng theo công thức  $F_2 = R.h^{3/2}$  với  $R$  là hằng số. Tiết diện của bồn chứa là  $A$ .



Hình 1: Hệ thống 1 bình chứa

#### Yêu cầu

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
- Viết phương trình mô tả quan hệ giữa các biến.
- Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.
- Tìm hàm truyền  $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$

#### Bài giải

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
  - Biến vào:  $F_1, F_2$ .
  - Biến ra:  $h$ .

- Biến điều khiển:  $F_1$  hoặc  $F_2$ .
- Biến cần điều khiển:  $h$ .
- Biến nhiễu:  $F_2$  hoặc  $F_1$ .

b. Viết phương trình mô tả quan hệ giữa các biến.

- Phương trình cân bằng vật chất:

$$\frac{dV}{dt} = F_1 - F_2 \iff \frac{d(Ah)}{dt} = F_1 - F_2 \iff \frac{dH}{dt} = \frac{1}{A}(F_1 - F_2) \quad (1)$$

- Thay  $F_2 = R.h^{3/2}$  vào (1), ta có:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(F_1 - F_2) = \frac{1}{A}(F_1 - R.h^{3/2}) \quad (2)$$

- Kết luận, phương trình mô tả quá trình:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(F_1 - R.h^{3/2}) \quad (3)$$

c. Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.

- Gọi  $(\bar{F}_1, \bar{h})$  là điểm làm việc cân bằng của hệ thống.
- Gọi  $F_1 = \bar{F}_1 + \Delta F_1, h = \bar{h} + \Delta h$ .
- Đặt  $f(F_1, h) = \dot{h} = \frac{1}{A}(F_1 - R.h^{3/2})$

– Tại điểm làm việc cân bằng  $(\bar{F}_1, \bar{h})$  thì

$$f(\bar{F}_1, \bar{h}) = 0 \iff \frac{1}{A}(\bar{F}_1 - R.\bar{h}^{3/2}) = 0 \quad (4)$$

– Khai triển Taylor cho  $f(F_1, h) = \dot{h} = \frac{1}{A}(F_1 - R.h^{3/2})$ , ta có:

$$\dot{h} = \Delta h = f(\bar{F}_1 + \Delta F_1, \bar{h} + \Delta h) \quad (5)$$

$$\approx \underbrace{f(\bar{F}_1, \bar{h})}_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial F_1} \right|_{(\bar{F}_1, \bar{h})} \Delta F_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{(\bar{F}_1, \bar{h})} \Delta h \quad (6)$$

$$\approx \frac{1}{A} \left( \Delta F_1 - \frac{3}{2} R \bar{h}^{1/2} \Delta h \right) \quad (7)$$

$$(8)$$

– Thay  $\Delta F_1 = F_1$  và  $\Delta h = h$ , ta có:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} \left( F_1 - \frac{3}{2} R \bar{h}^{1/2} h \right) \quad (9)$$

- Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng  $(\bar{F}_1, \bar{h})$ :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} \left( F_1 - \frac{3}{2} R \bar{h}^{1/2} h \right) \quad (10)$$

d. Tìm hàm truyền  $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$

- Ta có:  $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} \left( F_1 - \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2} h \right)$ , thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH(s) = \frac{1}{A} \left[ F_1(s) - \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2} H(s) \right] \quad (11)$$

$$\iff sAH(s) + \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2} H(s) = F_1(s) \quad (12)$$

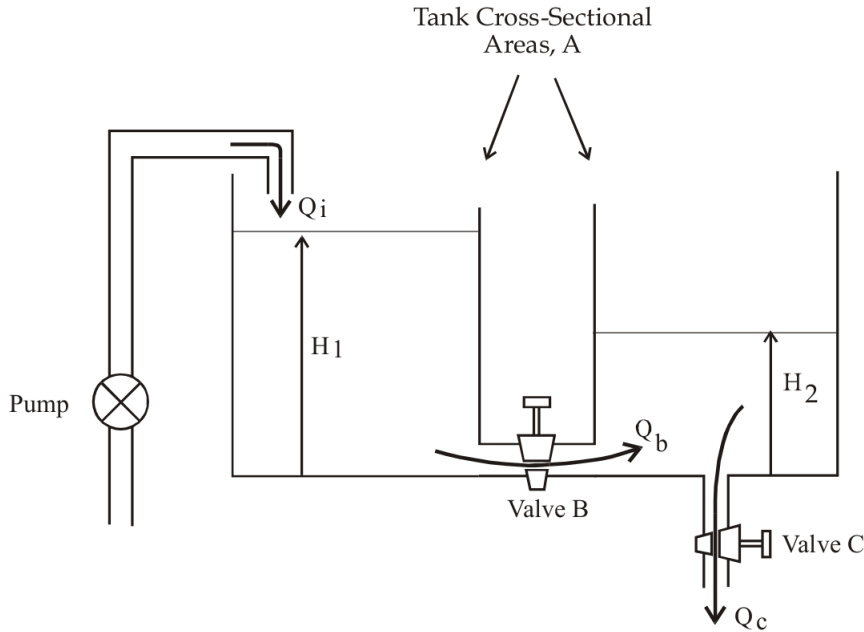
$$\iff \left( sA + \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2} \right) H(s) = F_1(s) \quad (13)$$

$$\iff \frac{H(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{sA + \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2}} \quad (14)$$

- Kết luận:  $G(s) = \frac{H(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{sA + \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2}}$

## 2 Bài tập 2

**Giả thiết** Cho hệ thống như hình 2: Bình chứa thứ nhất có tiết diện là  $A_1$  và bình chứa thứ hai có tiết diện là  $A_2$ . Các lưu lượng ra  $Q_b$  và  $Q_c$  được xác định như sau:  $Q_b = C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)}$  và  $Q_c = C_{dc} a_c \sqrt{2gH_2}$



Hình 2: Hệ thống 2 bình chứa

### Yêu cầu

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
- Viết phương trình mô tả quan hệ giữa các biến.
- Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.
- Tìm hàm truyền  $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$

## Bài giải

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào:  $Q_i, Q_b, Q_c$ .
- Biến ra:  $H_1, H_2$ .
- Biến điều khiển:  $Q_b, Q_c$ .
- Biến cần điều khiển:  $H_1, H_2$ .
- Biến nhiễu:  $Q_i$ .

b. Viết phương trình mô tả quan hệ giữa các biến.

- Phương trình cho bình chứa 1:

– Bình chứa 1:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_i - Q_b \iff \frac{d(A_1 H_1)}{dt} = Q_i - Q_b \iff \frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (Q_i - Q_b) \quad (15)$$

– Thay  $Q_b = C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)}$  vào (15), ta có:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (Q_i - Q_b) = \frac{1}{A_1} \left[ Q_i - C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} \right] \quad (16)$$

- Phương trình cho bình chứa 2:

– Bình chứa 2:

$$\frac{dV_2}{dt} = Q_b - Q_c \iff \frac{d(A_2 H_2)}{dt} = Q_b - Q_c \iff \frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (Q_b - Q_c) \quad (17)$$

– Thay  $Q_b = C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)}$  và  $Q_c = C_{dc} a_c \sqrt{2gH_2}$  vào (17), ta có:

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (Q_b - Q_c) = \frac{1}{A_2} \left[ C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc} a_c \sqrt{2gH_2} \right] \quad (18)$$

- Kết luận, hệ phương trình mô tả quá trình:

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left[ Q_i - C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} \right] \\ \frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left[ C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc} a_c \sqrt{2gH_2} \right] \end{cases} \quad (19)$$

c. Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.

- Gọi  $(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$  là điểm làm việc cân bằng của hệ thống gồm 2 bình chứa.
- Gọi  $Q_i = \overline{Q_i} + \Delta Q_i, H_1 = \overline{H_1} + \Delta H_1, H_2 = \overline{H_2} + \Delta H_2$ .
- Đặt  $f(Q_i, H_1, H_2) = \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} \left[ Q_i - C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} \right]$ 
  - Tại điểm làm việc cân bằng  $(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$  thì

$$f(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}) = 0 \iff \frac{1}{A_1} \left[ \overline{Q_i} - C_{db} a_b \sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})} \right] = 0 \quad (20)$$

- Khai triển Taylor cho  $f(Q_i, H_1, H_2) = \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} [Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}]$ , ta có:

$$\dot{H}_1 = \Delta H_1 = f(\overline{Q_i} + \Delta Q_i, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2) \quad (21)$$

$$\approx \underbrace{f(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})}_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial Q_i} \right|_{(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta Q_i + \left. \frac{\partial f}{\partial H_1} \right|_{(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_1 \quad (22)$$

$$\approx \frac{1}{A_1} \left[ \Delta Q_i - \frac{2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 \right] \quad (23)$$

$$\approx \frac{1}{A_1} \left[ \Delta Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 \right] \quad (24)$$

- Thay  $\Delta Q_i = Q_i$  và  $\Delta H_1 = H_1$ , ta có:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left[ Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_1 \right] \quad (25)$$

- Đặt  $g(Q_i, H_1, H_2) = \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} [C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}]$

- Tại điểm làm việc cân bằng  $(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$  thì:

$$g(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}) = 0 \iff \frac{1}{A_2} [C_{db}a_b\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})} - C_{dc}a_c\sqrt{2g\overline{H_2}}] = 0 \quad (26)$$

- Khai triển Taylor cho  $g(Q_i, H_1, H_2) = \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} [C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}]$ , ta có:

$$\dot{H}_2 = \Delta H_2 = g(\overline{Q_i} + \Delta Q_i, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2) \quad (27)$$

$$\approx \underbrace{g(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})}_0 + \left. \frac{\partial g}{\partial H_1} \right|_{(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_1 + \left. \frac{\partial g}{\partial H_2} \right|_{(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_2 \quad (28)$$

$$\approx \frac{1}{A_2} \left[ \frac{2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 + \frac{-2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 - \frac{2gC_{dc}a_c}{2\sqrt{2g\overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \quad (29)$$

$$\approx \frac{1}{A_2} \left[ \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \quad (30)$$

- Thay  $\Delta H_1 = H_1$  và  $\Delta H_2 = H_2$ , ta có:

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left[ \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}} H_2 \right] \quad (31)$$

- Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng  $(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$ :

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left[ Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_1 \right] \\ \frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left[ \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}} H_2 \right] \end{cases} \quad (32)$$

d. Tìm hàm truyền  $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$

- Ta có:  $\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left[ Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_1 \right]$ , thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_1(s) = \frac{1}{A_1} \left[ Q_i(s) - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_1(s) \right] \quad (33)$$

$$\Longleftrightarrow sA_1H_1(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_1(s) = Q_i(s) \quad (34)$$

$$\Longleftrightarrow \left[ sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} \right] H_1(s) = Q_i(s) \quad (35)$$

$$\Longleftrightarrow H_1(s) = \frac{Q_i(s)}{sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}}} \quad (36)$$

- Ta có:  $\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left[ \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} H_2 \right]$ , thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_2(s) = \frac{1}{A_2} \left[ \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_1(s) - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_2(s) - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} H_2(s) \right] \quad (37)$$

$$\Longleftrightarrow sA_2H_2(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_2(s) + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} H_2(s) = \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_1(s) \quad (38)$$

$$\Longleftrightarrow \left[ sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] H_2(s) = \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_1(s) \quad (39)$$

$$\Longleftrightarrow \left[ sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] H_2(s) = \frac{gC_{db}a_b Q_i(s)}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)} \left[ sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} \right]} \quad (40)$$

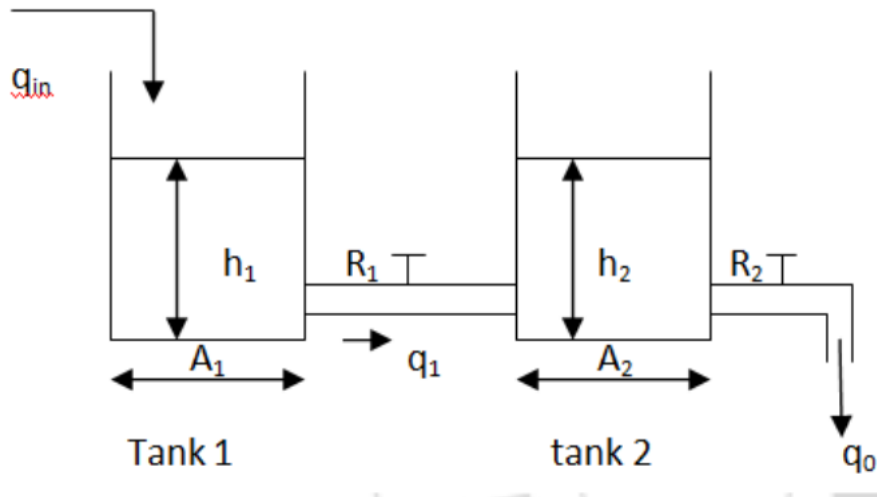
$$\Longleftrightarrow \left[ sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] H_2(s) = \frac{gC_{db}a_b Q_i(s)}{sA_1 \sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)} + gC_{db}a_b} \quad (41)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{gC_{db}a_b}{\left[ sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] \left[ sA_1 \sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)} + gC_{db}a_b \right]} \quad (42)$$

• Kết luận:  $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{gC_{db}a_b}{\left[ sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\bar{H}_2}} \right] \left[ sA_1\sqrt{2g(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)} + gC_{db}a_b \right]}$

### 3 Bài tập 3

**Giả thiết** Cho hệ thống như hình 3: Các lưu lượng ra  $q_1$  và  $q_0$  được xác định như sau:  $q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$  và  $q_0 = \frac{h_2}{R_2}$



Hình 3: Hệ thống 2 bình chứa

#### Yêu cầu

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
- Viết phương trình mô tả quan hệ giữa các biến.
- Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.
- Tìm hàm truyền  $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)}$

#### Bài giải

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
  - Biến vào:  $q_{in}, q_1, q_0$ .
  - Biến ra:  $h_1, h_2$ .
  - Biến điều khiển:  $q_1, q_0$ .
  - Biến cần điều khiển:  $h_1, h_2$ .
  - Biến nhiễu:  $q_{in}$ .

- Viết phương trình mô tả quan hệ giữa các biến.

- Phương trình cho bình chứa 1:

– Bình chứa 1:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_i - Q_b \iff \frac{d(A_1 h_1)}{dt} = q_{in} - q_1 \iff \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (q_{in} - q_1) \quad (43)$$

– Thay  $q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$  vào (43), ta có:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (q_{in} - q_1) = \frac{1}{A_1} \left( q_{in} - \frac{h_1 - h_2}{R_1} \right) \quad (44)$$

- Phương trình cho bình chứa 2:

– Bình chứa 2:

$$\frac{dV_2}{dt} = Q_b - Q_c \iff \frac{d(A_2 h_2)}{dt} = q_1 - q_0 \iff \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (q_1 - q_0) \quad (45)$$

– Thay  $q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$  và  $q_0 = \frac{h_2}{R_2}$  vào (45), ta có:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (q_1 - q_0) = \frac{1}{A_2} \left( \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} \right) \quad (46)$$

- Kết luận, hệ phương trình mô tả quá trình:

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left( q_{in} - \frac{h_1 - h_2}{R_1} \right) \\ \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left( \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} \right) \end{cases} \quad (47)$$

c. Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.

- Gọi  $(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2)$  là điểm làm việc cân bằng của hệ thống gồm 2 bình chứa.

- Gọi  $q_{in} = \bar{q}_{in} + \Delta q_{in}, h_1 = \bar{h}_1 + \Delta h_1, h_2 = \bar{h}_2 + \Delta h_2$ .

- Đặt  $f(q_{in}, h_1, h_2) = \dot{h}_1 = \frac{1}{A_1} \left( q_{in} - \frac{h_1 - h_2}{R_1} \right)$

– Tại điểm làm việc cân bằng  $(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2)$  thì

$$f(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2) = 0 \iff \frac{1}{A_1} \left( \bar{q}_{in} - \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{R_1} \right) = 0 \quad (48)$$

– Khai triển Taylor cho  $f(q_{in}, h_1, h_2) = \dot{h}_1 = \frac{1}{A_1} \left( q_{in} - \frac{h_1 - h_2}{R_1} \right)$ , ta có:

$$\dot{h}_1 = \Delta h_1 = f(\bar{q}_{in} + \Delta q_{in}, \bar{h}_1 + \Delta h_1, \bar{h}_2 + \Delta h_2) \quad (49)$$

$$\approx \underbrace{f(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2)}_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial q_{in}} \right|_{(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2)} \Delta q_{in} + \left. \frac{\partial f}{\partial h_1} \right|_{(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2)} \Delta h_1 \quad (50)$$

$$\approx \frac{1}{A_1} \left( \Delta q_{in} - \frac{\Delta h_1}{R_1} \right) \quad (51)$$

$$(52)$$



– Thay  $\Delta q_{in} = q_{in}$  và  $\Delta h_1 = h_1$ , ta có:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left( q_{in} - \frac{h_1}{R_1} \right) \quad (53)$$

• Đặt  $g(q_{in}, h_1, h_2) = \dot{h}_2 = \frac{1}{A_2} \left( \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} \right)$

– Tại điểm làm việc cân bằng  $(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2)$  thì:

$$g(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2) = 0 \iff \frac{1}{A_2} \left( \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{R_1} - \frac{\bar{h}_2}{R_2} \right) = 0 \quad (54)$$

– Khai triển Taylor cho  $g(q_{in}, h_1, h_2) = \dot{h}_2 = \frac{1}{A_2} \left( \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} \right)$ , ta có:

$$\dot{h}_2 = \Delta h_2 = g(\bar{q}_{in} + \Delta q_{in}, \bar{h}_1 + \Delta h_1, \bar{h}_2 + \Delta h_2) \quad (55)$$

$$\approx \underbrace{g(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2)}_0 + \frac{\partial g}{\partial h_1} \Big|_{(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2)} \Delta h_1 + \frac{\partial g}{\partial h_2} \Big|_{(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2)} \Delta h_2 \quad (56)$$

$$\approx \frac{1}{A_2} \left( \frac{\Delta h_1}{R_1} - \frac{\Delta h_2}{R_1} - \frac{\Delta h_2}{R_2} \right) \quad (57)$$

$$\approx \frac{1}{A_2} \left[ \frac{\Delta h_1}{R_1} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta h_2 \right] \quad (58)$$

– Thay  $\Delta h_1 = h_1$  và  $\Delta h_2 = h_2$ , ta có:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left[ \frac{h_1}{R_1} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) h_2 \right] \quad (59)$$

• Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng  $(\bar{q}_{in}, \bar{h}_1, \bar{h}_2)$ :

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left( q_{in} - \frac{h_1}{R_1} \right) \\ \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left[ \frac{h_1}{R_1} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) h_2 \right] \end{cases} \quad (60)$$

d. Tìm hàm truyền  $G(s) = \frac{h_2(s)}{Q_{in}(s)}$

• Ta có:  $\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left( q_{in} - \frac{h_1}{R_1} \right)$ , thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_1(s) = \frac{1}{A_1} \left( Q_{in}(s) - \frac{H_1(s)}{R_1} \right) \quad (61)$$

$$\iff sA_1H_1(s) + \frac{1}{R_1}H_1(s) = Q_{in}(s) \quad (62)$$

$$\iff \left( sA_1 + \frac{1}{R_1} \right) H_1(s) = Q_{in}(s) \quad (63)$$

$$\iff H_1(s) = \frac{Q_{in}(s)}{sA_1 + \frac{1}{R_1}} \quad (64)$$

- Ta có:  $\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left[ \frac{h_1}{R_1} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) h_2 \right]$ , thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_2(s) = \frac{1}{A_2} \left[ \frac{H_1(s)}{R_1} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) H_2(s) \right] \quad (65)$$

$$\Longleftrightarrow sA_2H_2(s) + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) H_2(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \quad (66)$$

$$\Longleftrightarrow \left[ sA_2 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] H_2(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \quad (67)$$

$$\Longleftrightarrow \left[ sA_2 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] H_2(s) = \frac{Q_{in}(s)}{R_1 \left( sA_1 + \frac{1}{R_1} \right)} \quad (68)$$

$$\Longleftrightarrow \left[ sA_2 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] H_2(s) = \frac{Q_{in}(s)}{sA_1R_1 + 1} \quad (69)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{\left[ sA_2 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] (sA_1R_1 + 1)} \quad (70)$$

- Kết luận:  $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{\left[ sA_2 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] (sA_1R_1 + 1)}$