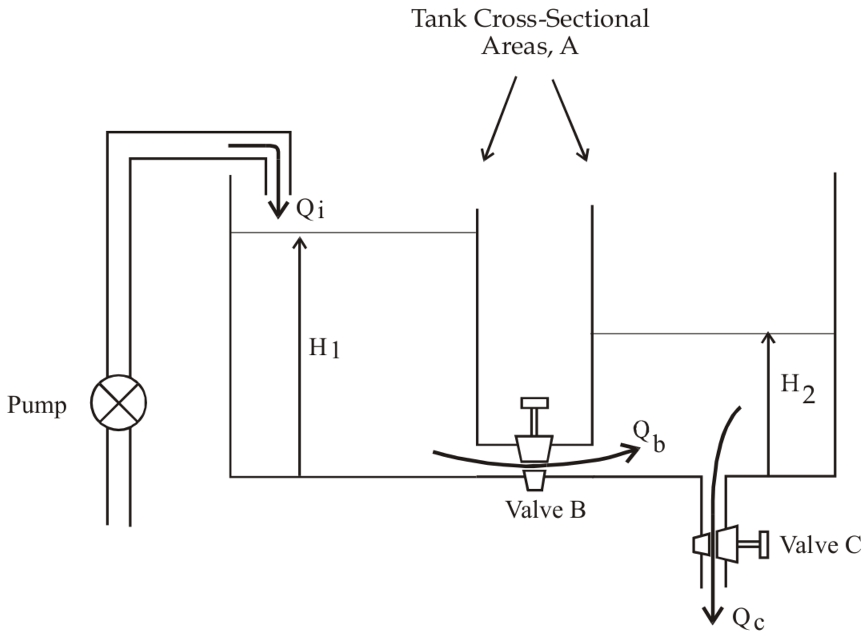
Bài tập Điều khiển quá trình
Chủ đề Mô hình hóa lý thuyết

Sưu tầm: Thi Minh Nhựt   Email: thiminhnhut@gmail.com

Thời gian: Ngày 25 tháng 9 năm 2017

1 Bài tập 1

Giả thiết Cho hệ thống như hình 1: Bình chứa thứ nhất có tiết diện là A_1 và bình chứa thứ hai có tiết diện là A_2. Các lưu lượng ra Q_b và Q_c được xác định như sau: $Q_b = C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ và $Q_c = C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}$



Hình 1: Hệ thống 2 bình chứa

Yêu cầu

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

b. Viết phương trình mô tả quan hệ giữa các biến.

c. Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.

d. Tìm hàm truyền $G(s) = \dfrac{H_2(s)}{Q_i(s)}$

Bài giải

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: Q_i, Q_b, Q_c.
- Biến ra: H_1, H_2.
- Biến điều khiển: Q_b, Q_c.
- Biến cần điều khiển: H_1, H_2.
- Biến nhiễu: Q_i.

b. Viết phương trình mô tả quan hệ giữa các biến.

- Phương trình cho bình chứa 1:
  - Bình chứa 1:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_i - Q_b \Longleftrightarrow \frac{d\left(A_1 H_1\right)}{dt} = Q_i - Q_b \Longleftrightarrow \frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(Q_i - Q_b\right) \tag{1}$$

  - Thay $Q_b = C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ vào (1), ta có:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(Q_i - Q_b\right) = \frac{1}{A_1}\left[Q_i - C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)}\right] \tag{2}$$

- Phương trình cho bình chứa 2:
  - Bình chứa 2:

$$\frac{dV_2}{dt} = Q_b - Q_c \Longleftrightarrow \frac{d\left(A_2 H_2\right)}{dt} = Q_b - Q_c \Longleftrightarrow \frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(Q_b - Q_c\right) \tag{3}$$

  - Thay $Q_b = C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ và $Q_c = C_{dc} a_c \sqrt{2gH_2}$ vào (3), ta có:

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(Q_b - Q_c\right) = \frac{1}{A_2}\left[C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc} a_c \sqrt{2gH_2}\right] \tag{4}$$

- Kết luận, hệ phương trình mô tả quá trình:

$$\begin{cases} \dfrac{dH_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_i - C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)}\right] \\ \dfrac{dH_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left[C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc} a_c \sqrt{2gH_2}\right] \end{cases} \tag{5}$$

c. Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.

- Gọi $\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$ là điểm làm việc cân bằng của hệ thống gồm 2 bình chứa.
- Gọi $Q_i = \overline{Q_i} + \Delta Q_i, H_1 = \overline{H_1} + \Delta H_1, H_2 = \overline{H_2} + \Delta H_2$.
- Đặt $f\left(Q_i, H_1, H_2\right) = \dot{H}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_i - C_{db} a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)}\right]$
  - Tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$ thì

$$f\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{A_1}\left[\overline{Q_i} - C_{db} a_b \sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}\right] = 0 \tag{6}$$

– Khai triển Taylor cho $f\left(Q_i, H_1, H_2\right) = \dot{H}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}\right]$, ta có:

$$\dot{H}_1 = \Delta H_1 = f\left(\overline{Q_i} + \Delta Q_i, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2\right) \tag{7}$$

$$\approx \underbrace{f\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)}_{0} + \left.\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right|_{\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta Q_i + \left.\frac{\partial f}{\partial H_1}\right|_{\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta H_1 \tag{8}$$

$$\approx \frac{1}{A_1}\left[\Delta Q_i - \frac{2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_1\right] \tag{9}$$

$$\approx \frac{1}{A_1}\left[\Delta Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_1\right] \tag{10}$$

– Thay $\Delta Q_i = Q_i$ và $\Delta H_1 = H_1$, ta có:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left[Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1\right] \tag{11}$$

- Đặt $g\left(Q_i, H_1, H_2\right) = \dot{H}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}\right]$

  – Tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$ thì:

$$g\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{A_2}\left[C_{db}a_b\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})} - C_{dc}a_c\sqrt{2g\overline{H2}}\right] = 0 \tag{12}$$

  – Khai triển Taylor cho $g\left(Q_i, H_1, H_2\right) = \dot{H}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}\right]$, ta có:

$$\dot{H}_2 = \Delta H_2 = g\left(\overline{Q_i} + \Delta Q_i, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2\right) \tag{13}$$

$$\approx \underbrace{g\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)}_{0} + \left.\frac{\partial g}{\partial H_1}\right|_{\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta H_1 + \left.\frac{\partial g}{\partial H_2}\right|_{\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)} \Delta H_2 \tag{14}$$

$$\approx \frac{1}{A_2}\left[\frac{2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_1 + \frac{-2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_2 - \frac{2gC_{dc}a_c}{2\sqrt{2g\overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \tag{15}$$

$$\approx \frac{1}{A_2}\left[\frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\Delta H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\Delta H_2\right] \tag{16}$$

  – Thay $\Delta H_1 = H_1$ và $\Delta H_2 = H_2$, ta có:

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left[\frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}H_2\right] \tag{17}$$

- Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}\right)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dH_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_i - \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1\right] \\ \dfrac{dH_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1 - \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_2 - \dfrac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}H_2\right] \end{cases} \tag{18}$$

d. Tìm hàm truyền $G(s) = \dfrac{H_2(s)}{Q_i(s)}$

- Ta có: $\dfrac{dH_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left[Q_i - \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1\right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_1(s) = \frac{1}{A_1}\left[Q_i(s) - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1(s)\right] \tag{19}$$

$$\Longleftrightarrow sA_1H_1(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1(s) = Q_i(s) \tag{20}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\right]H_1(s) = Q_i(s) \tag{21}$$

$$\Longleftrightarrow H_1(s) = \frac{Q_i(s)}{sA_1 + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}} \tag{22}$$

- Ta có: $\dfrac{dH_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1 - \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_2 - \dfrac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}H_2\right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_2(s) = \frac{1}{A_2}\left[\frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1(s) - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_2(s) - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}H_2(s)\right] \tag{23}$$

$$\Longleftrightarrow sA_2H_2(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_2(s) + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}H_2(s) = \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1(s) \tag{24}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]H_2(s) = \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}H_1(s) \tag{25}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]H_2(s) = \frac{gC_{db}a_bQ_i(s)}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}\left[sA_1 + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}\right]} \tag{26}$$

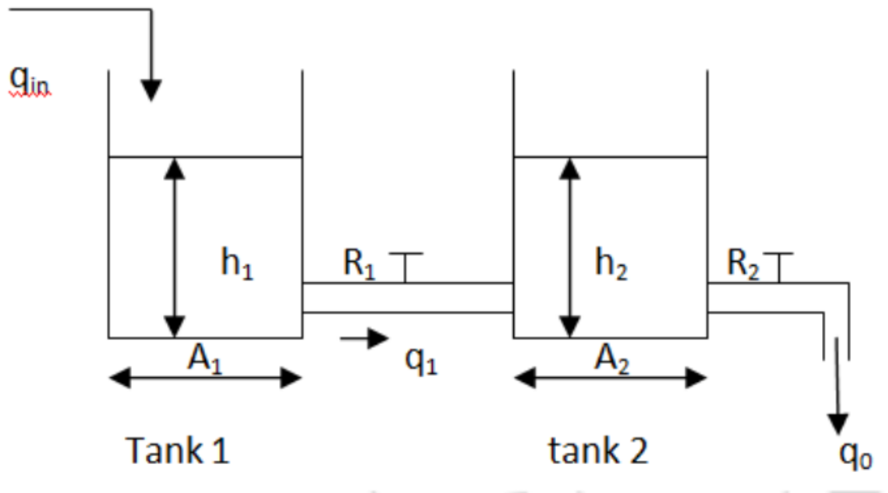
$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]H_2(s) = \frac{gC_{db}a_bQ_i(s)}{sA_1\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})} + gC_{db}a_b} \tag{27}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{gC_{db}a_b}{\left[sA_2 + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} + \dfrac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]\left[sA_1\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})} + gC_{db}a_b\right]} \tag{28}$$

- Kết luận: $G(s) = \dfrac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \dfrac{gC_{db}a_b}{\left[sA_2 + \dfrac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} + \dfrac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}}\right]\left[sA_1\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})} + gC_{db}a_b\right]}$

2 Bài tập 2

Giả thiết Cho hệ thống như hình 2: Các lưu lượng ra q_1 và q_0 được xác định như sau: $q_1 = \dfrac{h_1 - h_2}{R_1}$ và $q_0 = \dfrac{h_2}{R_2}$



Hình 2: Hệ thống 2 bình chứa

Yêu cầu

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

b. Viết phương trình mô tả quan hệ giữa các biến.

c. Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.

d. Tìm hàm truyền $G(s) = \dfrac{H_2(s)}{Q_{in}(s)}$

Bài giải

a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: q_{in}, q_1, q_0.
- Biến ra: h_1, h_2.
- Biến điều khiển: q_1, q_0.
- Biến cần điều khiển: h_1, h_2.
- Biến nhiễu: q_{in}.

b. Viết phương trình mô tả quan hệ giữa các biến.

- Phương trình cho bình chứa 1:
  - Bình chứa 1:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_i - Q_b \Longleftrightarrow \frac{d\left(A_1 h_1\right)}{dt} = q_{in} - q_1 \Longleftrightarrow \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(q_{in} - q_1\right) \tag{29}$$

  - Thay $q_1 = \dfrac{h_1 - h_2}{R_1}$ vào (29), ta có:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(q_{in} - q_1\right) = \frac{1}{A_1}\left(q_{in} - \frac{h_1 - h_2}{R_1}\right) \tag{30}$$

- Phương trình cho bình chứa 2:
  - Bình chứa 2:

$$\frac{dV_2}{dt} = Q_b - Q_c \Longleftrightarrow \frac{d\left(A_2 h_2\right)}{dt} = q_1 - q_0 \Longleftrightarrow \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(q_1 - q_0\right) \tag{31}$$

  - Thay $q_1 = \dfrac{h_1 - h_2}{R_1}$ và $q_0 = \dfrac{h_2}{R_2}$ vào (31), ta có:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(q_1 - q_0\right) = \frac{1}{A_2}\left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}\right) \tag{32}$$

- Kết luận, hệ phương trình mô tả quá trình:

$$\begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left(q_{in} - \dfrac{h_1 - h_2}{R_1}\right) \\ \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left(\dfrac{h_1 - h_2}{R_1} - \dfrac{h_2}{R_2}\right) \end{cases} \tag{33}$$

c. *Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.*

- Gọi $\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right)$ là điểm làm việc cân bằng của hệ thống gồm 2 bình chứa.
- Gọi $q_{in} = \overline{q_{in}} + \Delta q_{in}, h_1 = \overline{h_1} + \Delta h_1, h_2 = \overline{h_2} + \Delta h_2$.
- Đặt $f\left(q_{in}, h_1, h_2\right) = \dot{h_1} = \dfrac{1}{A_1}\left(q_{in} - \dfrac{h_1 - h_2}{R_1}\right)$
  - Tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right)$ thì

$$f\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{A_1}\left(\overline{q_{in}} - \frac{\overline{h_1} - \overline{h_2}}{R_1}\right) = 0 \tag{34}$$

  - Khai triển Taylor cho $f\left(q_{in}, h_1, h_2\right) = \dot{h_1} = \dfrac{1}{A_1}\left(q_{in} - \dfrac{h_1 - h_2}{R_1}\right)$, ta có:

$$\dot{h_1} = \Delta h_1 = f\left(\overline{q_{in}} + \Delta q_{in}, \overline{h_1} + \Delta h_1, \overline{h_2} + \Delta h_2\right) \tag{35}$$

$$\approx \underbrace{f\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right)}_{0} + \left.\frac{\partial f}{\partial q_{in}}\right|_{\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right)} \Delta q_{in} + \left.\frac{\partial f}{\partial h_1}\right|_{\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right)} \Delta h_1 \tag{36}$$

$$\approx \frac{1}{A_1}\left(\Delta q_{in} - \frac{\Delta h_1}{R_1}\right) \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

– Thay $\Delta q_{in} = q_{in}$ và $\Delta h_1 = h_1$, ta có:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(q_{in} - \frac{h_1}{R_1}\right) \tag{39}$$

- Đặt $g\left(q_{in}, h_1, h_2\right) = \dot{h_2} = \dfrac{1}{A_2}\left(\dfrac{h_1 - h_2}{R_1} - \dfrac{h_2}{R_2}\right)$

  – Tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right)$ thì:

$$g\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{A_2}\left(\frac{\overline{h_1} - \overline{h_2}}{R_1} - \frac{\overline{h_2}}{R_2}\right) = 0 \tag{40}$$

  – Khai triển Taylor cho $g\left(q_{in}, h_1, h_2\right) = \dot{h_2} = \dfrac{1}{A_2}\left(\dfrac{h_1 - h_2}{R_1} - \dfrac{h_2}{R_2}\right)$, ta có:

$$\dot{h_2} = \Delta h_2 = g\left(\overline{q_{in}} + \Delta q_{in}, \overline{h_1} + \Delta h_1, \overline{h_2} + \Delta h_2\right) \tag{41}$$

$$\approx \underbrace{g\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right)}_{0} + \left.\frac{\partial g}{\partial h_1}\right|_{\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right)} \Delta h_1 + \left.\frac{\partial g}{\partial h_2}\right|_{\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right)} \Delta h_2 \tag{42}$$

$$\approx \frac{1}{A_2}\left(\frac{\Delta h_1}{R_1} - \frac{\Delta h_2}{R_1} - \frac{\Delta h_2}{R_2}\right) \tag{43}$$

$$\approx \frac{1}{A_2}\left[\frac{\Delta h_1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Delta h_2\right] \tag{44}$$

  – Thay $\Delta h_1 = h_1$ và $\Delta h_2 = h_2$, ta có:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\left[\frac{h_1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) h_2\right] \tag{45}$$

- Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng $\left(\overline{q_{in}}, \overline{h_1}, \overline{h_2}\right)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left(q_{in} - \dfrac{h_1}{R_1}\right) \\ \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{h_1}{R_1} - \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) h_2\right] \end{cases} \tag{46}$$

d. Tìm hàm truyền $G(s) = \dfrac{h_2(s)}{Q_{in}(s)}$

- Ta có: $\dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}\left(q_{in} - \dfrac{h_1}{R_1}\right)$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_1(s) = \frac{1}{A_1}\left(Q_{in}(s) - \frac{H_1(s)}{R_1}\right) \tag{47}$$

$$\Longleftrightarrow sA_1H_1(s) + \frac{1}{R_1}H_1(s) = Q_{in}(s) \tag{48}$$

$$\Longleftrightarrow \left(sA_1 + \frac{1}{R_1}\right) H_1(s) = Q_{in}(s) \tag{49}$$

$$\Longleftrightarrow H_1(s) = \frac{Q_{in}(s)}{sA_1 + \dfrac{1}{R_1}} \tag{50}$$

- Ta có: $\dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{h_1}{R_1} - \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)h_2\right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_2(s) = \frac{1}{A_2}\left[\frac{H_1(s)}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)H_2(s)\right] \tag{51}$$

$$\Longleftrightarrow sA_2H_2(s) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)H_2(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \tag{52}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]H_2(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \tag{53}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]H_2(s) = \frac{Q_{in}(s)}{R_1\left(sA_1 + \dfrac{1}{R_1}\right)} \tag{54}$$

$$\Longleftrightarrow \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]H_2(s) = \frac{Q_{in}(s)}{sA_1R_1 + 1} \tag{55}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{\left[sA_2 + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)\right](sA_1R_1 + 1)} \tag{56}$$

- Kết luận: $G(s) = \dfrac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \dfrac{1}{\left[sA_2 + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)\right](sA_1R_1 + 1)}$