

Bài tập Điều khiển quá trình

Chủ đề Mô hình hóa lý thuyết

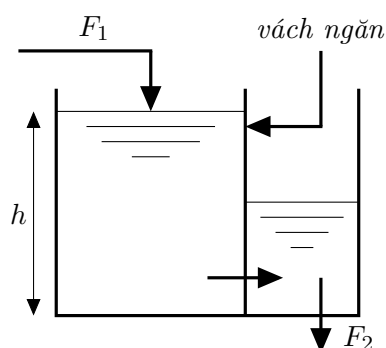
Sưu tầm: Thi Minh Nhựt

Email: thiminhnhut@gmail.com

Thời gian: Ngày 1 tháng 10 năm 2017

1 Bài tập 1

Giả thiết Cho hệ thống như hình 1: Biết lưu lượng ra F_2 tỉ lệ với chiều cao chất lỏng theo công thức $F_2 = R.h^{3/2}$ với R là hằng số. Tiết diện của bồn chứa là A .



Hình 1: Hệ thống 1 bồn chứa

Yêu cầu

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
- Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.
- Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.
- Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{H(s)}{F_1(s)}$

Bài giải

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
 - Biến vào: F_1, F_2 .
 - Biến ra: h .
 - Biến điều khiển: F_1 hoặc F_2 .
 - Biến cần điều khiển: h .
 - Biến nhiễu: F_2 hoặc F_1 .
- Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

- Phương trình cân bằng vật chất:

$$\frac{dV}{dt} = F_1 - F_2 \iff \frac{d(Ah)}{dt} = F_1 - F_2 \iff \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (F_1 - F_2) \quad (1)$$

- Thay $F_2 = R.h^{3/2}$ vào (1), ta có:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (F_1 - F_2) = \frac{1}{A} (F_1 - R.h^{3/2}) \quad (2)$$

- Kết luận, phương trình mô tả quá trình:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (F_1 - R.h^{3/2}) \quad (3)$$

c. Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

- Gọi (\bar{F}_1, \bar{h}) là điểm làm việc cân bằng của hệ thống.

- Gọi $F_1 = \bar{F}_1 + \Delta F_1, h = \bar{h} + \Delta h$.

- Đặt $f(F_1, h) = \dot{h} = \frac{1}{A} (F_1 - R.h^{3/2})$

– Tại điểm làm việc cân bằng (\bar{F}_1, \bar{h}) thì

$$f(\bar{F}_1, \bar{h}) = 0 \iff \frac{1}{A} (\bar{F}_1 - R.\bar{h}^{3/2}) = 0 \quad (4)$$

– Khai triển Taylor cho $f(F_1, h) = \dot{h} = \frac{1}{A} (F_1 - R.h^{3/2})$, ta có:

$$\dot{h} = \Delta \dot{h} = f(\bar{F}_1 + \Delta F_1, \bar{h} + \Delta h) \quad (5)$$

$$\approx \underbrace{f(\bar{F}_1, \bar{h})}_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial F_1} \right|_{(\bar{F}_1, \bar{h})} \Delta F_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{(\bar{F}_1, \bar{h})} \Delta h \quad (6)$$

$$\approx \frac{1}{A} \left(\Delta F_1 - \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2} \Delta h \right) \quad (7)$$

- Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng (\bar{F}_1, \bar{h}) :

$$\Delta \dot{h} = \frac{1}{A} \left(\Delta F_1 - \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2} \Delta h \right) \quad (8)$$

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{H(s)}{F_1(s)}$

- Ta có: $\Delta \dot{h} = \frac{1}{A} \left(\Delta F_1 - \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2} \Delta h \right)$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH(s) = \frac{1}{A} \left[F_1(s) - \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2} H(s) \right] \quad (9)$$

$$\iff sAH(s) + \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2} H(s) = F_1(s) \quad (10)$$

$$\iff \left(sA + \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2} \right) H(s) = F_1(s) \quad (11)$$

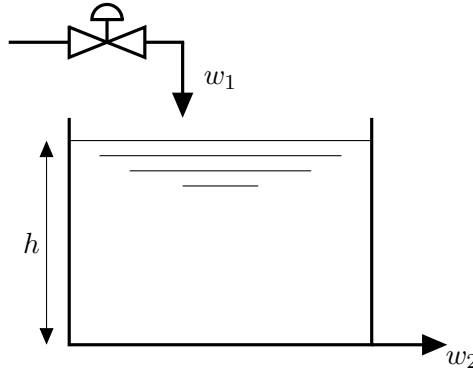
$$\iff \frac{H(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{sA + \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2}} \quad (12)$$

- Kết luận:

$$G(s) = \frac{H(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{sA + \frac{3}{2} R \bar{h}^{-1/2}} \quad (13)$$

2 Bài tập 2

Giả thiết Cho hệ thống như hình 2: Trong đó w_1 là dòng lưu lượng vào [m^3/s], w_2 là dòng lưu lượng ra [m^3/s] và h là chiều cao của mức chất lỏng [m]. Biết lưu lượng ra w_2 tỉ lệ với căn bậc hai của chiều cao mực chất lỏng bởi hằng số C_v . Diện tích mặt cắt ngang của bồn chứa là $A = 2[m^2]$. Khối lượng riêng của chất lỏng là $\rho = 500[kg/m^3]$.



Hình 2: Hệ thống 1 bình chứa

Yêu cầu

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
- Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.
- Viết phương trình động học ở trạng thái ổn định mức. Biết trạng thái ổn định: $w_1 = 2,4 \text{ m}^3/s$ và $h = 1,44 \text{ m}$. Tìm C_v .
- Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.
- Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{H(s)}{W_1(s)}$

Bài giải

- a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: w_1, w_2 .
- Biến ra: h .
- Biến điều khiển: w_1 .
- Biến cần điều khiển: h .
- Biến nhiễu: w_2 .

- b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

- Phương trình cân bằng vật chất:

$$\frac{dV}{dt} = w_1 - w_2 \iff \frac{d(Ah)}{dt} = w_1 - w_2 \iff \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (w_1 - w_2) \quad (14)$$

- Thay $w_2 = C_v \sqrt{h}$ vào (14), ta có:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (w_1 - w_2) = \frac{1}{A} (w_1 - C_v \sqrt{h}) \quad (15)$$

- Kết luận, phương trình mô tả quá trình:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (w_1 - C_v \sqrt{h}) \quad (16)$$

c. Viết phương trình động học ở trạng thái ổn định mức. Biết trạng thái ổn định: $w_1 = 2,4 \text{ m}^3/s$ và $h = 1,44 \text{ m}$. Tìm C_v .

- Gọi (\bar{w}_1, \bar{h}) là điểm làm việc cân bằng của hệ thống.
- Đặt $f(w_1, h) = \dot{h} = \frac{1}{A} (w_1 - C_v \sqrt{h})$
- Tại điểm làm việc cân bằng (\bar{w}_1, \bar{h}) thì

$$f(\bar{w}_1, \bar{h}) = 0 \iff \frac{1}{A} (\bar{w}_1 - C_v \sqrt{\bar{h}}) = 0 \quad (17)$$

- Kết luận, phương trình động học ở trạng thái ổn định mức:

$$\frac{1}{A} (\bar{w}_1 - C_v \sqrt{\bar{h}}) = 0 \quad (18)$$

- Thông số ở trạng thái ổn định: $\bar{w}_1 = 2,4 \text{ m}^3/s$ và $\bar{h} = 1,44 \text{ m}$, nên thay vào phương trình (18), ta có:

$$\frac{1}{A} (\bar{w}_1 - C_v \sqrt{\bar{h}}) = 0 \iff \frac{1}{2} (2,4 - C_v \sqrt{1,44}) = 0 \iff C_v = 2[m^2/s] \quad (19)$$

d. Tuyến tính hóa mô hình tại điểm làm việc cân bằng.

- Gọi $w_1 = \bar{w}_1 + \Delta w_1, h = \bar{h} + \Delta h$.
- Khai triển Taylor cho $f(w_1, h) = \dot{h} = \frac{1}{A} (w_1 - C_v \sqrt{h})$, ta có:

$$\dot{h} = \Delta \dot{h} = f(\bar{w}_1 + \Delta w_1, \bar{h} + \Delta h) \quad (20)$$

$$\approx \underbrace{f(\bar{w}_1, \bar{h})}_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial w_1} \right|_{(\bar{w}_1, \bar{h})} \Delta w_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{(\bar{w}_1, \bar{h})} \Delta h \quad (21)$$

$$\approx \frac{1}{A} \left(\Delta w_1 - \frac{C_v}{2\sqrt{\bar{h}}} \Delta h \right) \quad (22)$$

- Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng (\bar{w}_1, \bar{h}) :

$$\Delta \dot{h} = \frac{1}{A} \left(\Delta w_1 - \frac{C_v}{2\sqrt{\bar{h}}} \Delta h \right) \quad (23)$$

e. Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{H(s)}{W_1(s)}$

- Ta có: $\Delta \dot{h} = \frac{1}{A} \left(\Delta w_1 - \frac{C_v}{2\sqrt{\bar{h}}} \Delta h \right)$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH(s) = \frac{1}{A} \left[W_1(s) - \frac{C_v}{2\sqrt{\bar{h}}} H(s) \right] \quad (24)$$

$$\iff sAH(s) + \frac{C_v}{2\sqrt{\bar{h}}} H(s) = W_1(s) \quad (25)$$

$$\iff \left(sA + \frac{C_v}{2\sqrt{\bar{h}}} \right) H(s) = W_1(s) \quad (26)$$

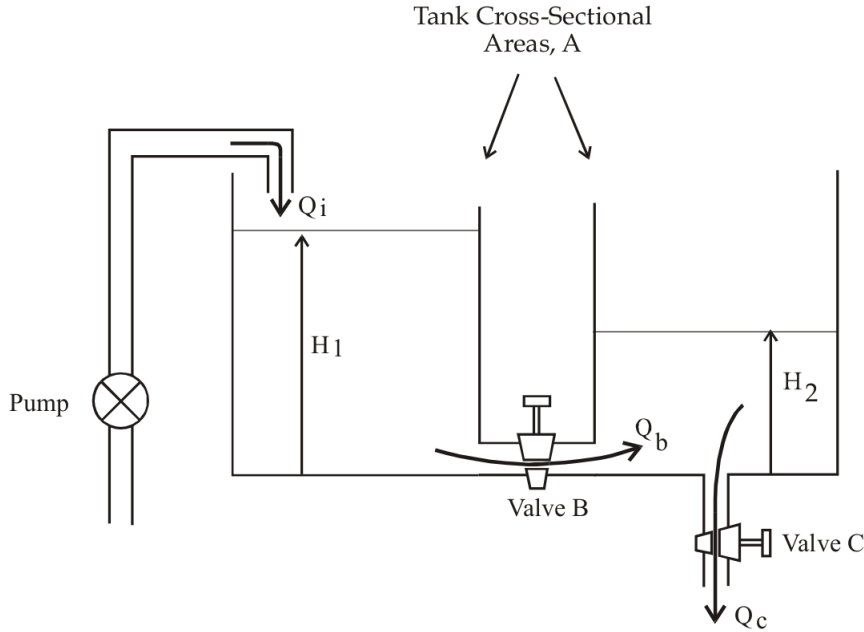
$$\iff \frac{H(s)}{W_1(s)} = \frac{1}{sA + \frac{C_v}{2\sqrt{\bar{h}}}} \quad (27)$$

- Kết luận:

$$G(s) = \frac{H(s)}{W_1(s)} = \frac{1}{sA + \frac{C_v}{2\sqrt{\bar{h}}}} \quad (28)$$

3 Bài tập 3

Giả thiết Cho hệ thống như hình 3: Bình chứa thứ nhất có tiết diện là A_1 và bình chứa thứ hai có tiết diện là A_2 . Các lưu lượng ra Q_b và Q_c được xác định như sau: $Q_b = C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ và $Q_c = C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}$



Hình 3: Hệ thống 2 bình chứa

Yêu cầu

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
- Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.
- Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.
- Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$

Bài giải

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: Q_i, Q_b, Q_c .
- Biến ra: H_1, H_2 .
- Biến điều khiển: Q_b, Q_c .
- Biến cần điều khiển: H_1, H_2 .
- Biến nhiễu: Q_i .

- Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

- Phương trình cho bình chứa 1:
– Bình chứa 1:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_i - Q_b \iff \frac{d(A_1 H_1)}{dt} = Q_i - Q_b \iff \frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (Q_i - Q_b) \quad (29)$$

– Thay $Q_b = C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ vào (29), ta có:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (Q_i - Q_b) = \frac{1}{A_1} \left[Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} \right] \quad (30)$$

• Phương trình cho bình chứa 2:

– Bình chứa 2:

$$\frac{dV_2}{dt} = Q_b - Q_c \iff \frac{d(A_2H_2)}{dt} = Q_b - Q_c \iff \frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (Q_b - Q_c) \quad (31)$$

– Thay $Q_b = C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ và $Q_c = C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2}$ vào (31), ta có:

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (Q_b - Q_c) = \frac{1}{A_2} \left[C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2} \right] \quad (32)$$

• Kết luận, hệ phương trình mô tả quá trình:

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left[Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} \right] \\ \frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left[C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2} \right] \end{cases} \quad (33)$$

c. Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

• Gọi $(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$ là điểm làm việc cân bằng của hệ thống gồm 2 bình chứa.

• Gọi $Q_i = \overline{Q_i} + \Delta Q_i, H_1 = \overline{H_1} + \Delta H_1, H_2 = \overline{H_2} + \Delta H_2$.

• Đặt $f(Q_i, H_1, H_2) = \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} \left[Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} \right]$

– Tại điểm làm việc cân bằng $(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$ thì

$$f(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}) = 0 \iff \frac{1}{A_1} \left[\overline{Q_i} - C_{db}a_b\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})} \right] = 0 \quad (34)$$

– Khai triển Taylor cho $f(Q_i, H_1, H_2) = \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} \left[Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} \right]$, ta có:

$$\dot{H}_1 = \Delta \dot{H}_1 = f(\overline{Q_i} + \Delta Q_i, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2) \quad (35)$$

$$\approx \underbrace{f(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})}_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial Q_i} \right|_{(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta Q_i + \left. \frac{\partial f}{\partial H_1} \right|_{(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial H_2} \right|_{(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_2 \quad (36)$$

$$\approx \frac{1}{A_1} \left[\Delta Q_i - \frac{2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 + \frac{2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 \right] \quad (37)$$

$$\approx \frac{1}{A_1} \left[\Delta Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 \right] \quad (38)$$

– Kết luận:

$$\Delta \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} \left[\Delta Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 \right] \quad (39)$$

• Đặt $g(Q_i, H_1, H_2) = \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} \left[C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2} \right]$

– Tại điểm làm việc cân bằng $(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$ thì:

$$g(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2}) = 0 \iff \frac{1}{A_2} \left[C_{db}a_b \sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})} - C_{dc}a_c \sqrt{2g\overline{H_2}} \right] = 0 \quad (40)$$

– Khai triển Taylor cho $g(Q_i, H_1, H_2) = \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} \left[C_{db}a_b \sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c \sqrt{2gH_2} \right]$, ta có:

$$\dot{H}_2 = \Delta \dot{H}_2 = g(\overline{Q_i} + \Delta Q_i, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2) \quad (41)$$

$$\approx \underbrace{g(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})}_0 + \frac{\partial g}{\partial H_1} \bigg|_{(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_1 + \frac{\partial g}{\partial H_2} \bigg|_{(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_2 \quad (42)$$

$$\approx \frac{1}{A_2} \left[\frac{2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 + \frac{-2gC_{db}a_b}{2\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 - \frac{2gC_{dc}a_c}{2\sqrt{2g\overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \quad (43)$$

$$\approx \frac{1}{A_2} \left[\frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \quad (44)$$

– Kết luận:

$$\Delta \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} \left[\frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \quad (45)$$

• Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng $(\overline{Q_i}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$:

$$\begin{cases} \Delta \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} \left[\Delta Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 \right] \\ \Delta \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} \left[\frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 - \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \end{cases} \quad (46)$$

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$

• Ta có: $\Delta \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} \left[\Delta Q_i - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \Delta H_2 \right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_1(s) = \frac{1}{A_1} \left[Q_i(s) - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_1(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_2(s) \right] \quad (47)$$

$$\iff sA_1 H_1(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_1(s) = Q_i(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_2(s) \quad (48)$$

$$\iff \left[sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} \right] H_1(s) = Q_i(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_2(s) \quad (49)$$

$$\iff H_1(s) = \frac{Q_i(s) + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}} H_2(s)}{sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\overline{H_1} - \overline{H_2})}}} \quad (50)$$

- Ta có: $\Delta \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} \left[\frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} \Delta H_1 - \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} \Delta H_2 - \frac{gC_{dca_c}}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \Delta H_2 \right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_2(s) = \frac{1}{A_2} \left[\frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_1(s) - \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_2(s) - \frac{gC_{dca_c}}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} H_2(s) \right] \quad (51)$$

$$\Leftrightarrow sA_2H_2(s) + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_2(s) + \frac{gC_{dca_c}}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} H_2(s) = \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_1(s) \quad (52)$$

$$\Leftrightarrow \left[sA_2 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dca_c}}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] H_2(s) = \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_1(s) \quad (53)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}}{gC_{dba_b}} \left[sA_2 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dca_c}}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] H_2(s) = H_1(s) \quad (54)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}}{gC_{dba_b}} \left[sA_2 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dca_c}}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] H_2(s) = \frac{Q_i(s) + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_2(s)}{sA_1 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}}} \quad (55)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}}{gC_{dba_b}} \left[sA_1 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} \right] \left[sA_2 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dca_c}}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] H_2(s) = Q_i(s) + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_2(s) \quad (56)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}}{gC_{dba_b}} \left[sA_1 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} \right] \left[sA_2 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dca_c}}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] H_2(s) - \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} H_2(s) = Q_i(s) \quad (57)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}}{gC_{dba_b}} \left[sA_1 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} \right] \left[sA_2 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dca_c}}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] - \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} \right\} H_2(s) = Q_i(s) \quad (58)$$

$$\Leftrightarrow \frac{H_2(s)}{Q_i(s)} =$$

1

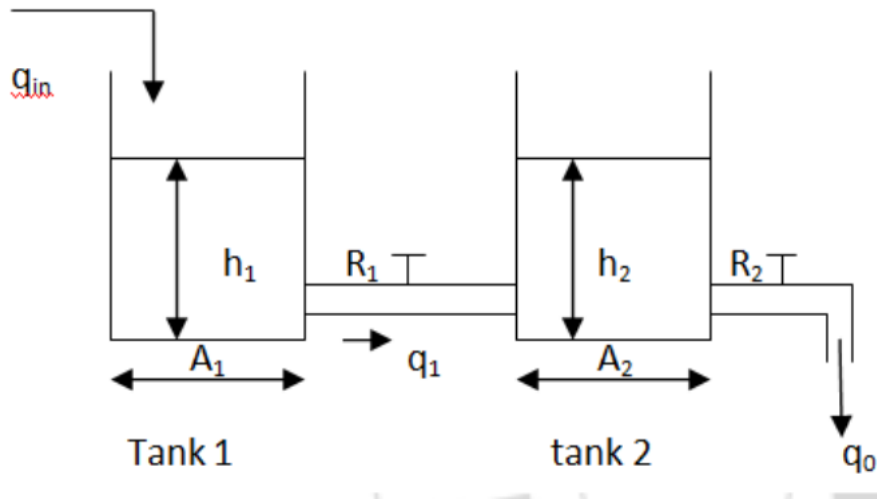
$$\frac{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}}{gC_{dba_b}} \left[sA_1 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} \right] \left[sA_2 + \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} + \frac{gC_{dca_c}}{\sqrt{2g\overline{H}_2}} \right] - \frac{gC_{dba_b}}{\sqrt{2g(\overline{H}_1 - \overline{H}_2)}} \quad (59)$$

- Kết luận:

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2g(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)}}{gC_{db}a_b} \left[sA_1 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)}} \right] \left[sA_2 + \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)}} + \frac{gC_{dc}a_c}{\sqrt{2g\bar{H}_2}} \right] - \frac{gC_{db}a_b}{\sqrt{2g(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)}}} \quad (60)$$

4 Bài tập 4

Giả thiết Cho hệ thống như hình 4: Các lưu lượng ra q_1 và q_0 được xác định như sau: $q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$ và $q_0 = \frac{h_2}{R_2}$



Hình 4: Hệ thống 2 bình chứa

Yêu cầu

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
- Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.
- Nếu phương trình phi tuyến hãy tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.
- Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)}$

Bài giải

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: q_{in}, q_1, q_0 .
- Biến ra: h_1, h_2 .
- Biến điều khiển: q_1, q_0 .
- Biến cần điều khiển: h_1, h_2 .
- Biến nhiễu: q_{in} .

b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

- Phương trình cho bình chứa 1:

– Bình chứa 1:

$$\frac{dV_1}{dt} = q_{in} - q_1 \iff \frac{d(A_1 h_1)}{dt} = q_{in} - q_1 \iff \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (q_{in} - q_1) \quad (61)$$

– Thay $q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$ vào (61), ta có:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (q_{in} - q_1) = \frac{1}{A_1} \left(q_{in} - \frac{h_1 - h_2}{R_1} \right) \quad (62)$$

- Phương trình cho bình chứa 2:

– Bình chứa 2:

$$\frac{dV_2}{dt} = q_1 - q_0 \iff \frac{d(A_2 h_2)}{dt} = q_1 - q_0 \iff \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (q_1 - q_0) \quad (63)$$

– Thay $q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$ và $q_0 = \frac{h_2}{R_2}$ vào (63), ta có:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (q_1 - q_0) = \frac{1}{A_2} \left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} \right) \quad (64)$$

- Kết luận, hệ phương trình mô tả quá trình:

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left(q_{in} - \frac{h_1 - h_2}{R_1} \right) \\ \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} \right) \end{cases} \quad (65)$$

c. Nếu phương trình phi tuyến hãy tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

- Ta có:

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left(q_{in} - \frac{h_1 - h_2}{R_1} \right) \\ \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} \right) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left(q_{in} - \frac{1}{R_1} h_1 + \frac{1}{R_1} h_2 \right) \\ \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left[\frac{1}{R_1} h_1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) h_2 \right] \end{cases} \quad (66)$$

- Do hệ phương trình (66) đã tuyến tính rồi nên ta không cần phải tuyến tính hóa.

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{h_2(s)}{Q_{in}(s)}$

- Ta có: $\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \left(q_{in} - \frac{h_1}{R_1} \right)$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_1(s) = \frac{1}{A_1} \left[Q_{in}(s) - \frac{H_1(s)}{R_1} + \frac{H_2(s)}{R_1} \right] \quad (67)$$

$$\iff sA_1 H_1(s) + \frac{1}{R_1} H_1(s) = Q_{in}(s) + \frac{H_2(s)}{R_1} \quad (68)$$

$$\iff \left(sA_1 + \frac{1}{R_1} \right) H_1(s) = Q_{in}(s) + \frac{H_2(s)}{R_1} \quad (69)$$

$$\iff H_1(s) = \frac{Q_{in}(s) + \frac{H_2(s)}{R_1}}{sA_1 + \frac{1}{R_1}} \quad (70)$$

- Ta có: $\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} \left[\frac{h_1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) h_2 \right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_2(s) = \frac{1}{A_2} \left[\frac{H_1(s)}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) H_2(s) \right] \quad (71)$$

$$\Leftrightarrow sA_2H_2(s) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) H_2(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \quad (72)$$

$$\Leftrightarrow \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] H_2(s) = \frac{H_1(s)}{R_1} \quad (73)$$

$$\Leftrightarrow \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] H_2(s) = \frac{Q_{in}(s) + \frac{H_2(s)}{R_1}}{R_1 \left(sA_1 + \frac{1}{R_1} \right)} \quad (74)$$

$$\Leftrightarrow \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] H_2(s) = \frac{Q_{in}(s) + \frac{H_2(s)}{R_1}}{sA_1R_1 + 1} \quad (75)$$

$$\Leftrightarrow (sA_1R_1 + 1) \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] H_2(s) = Q_{in}(s) + \frac{H_2(s)}{R_1} \quad (76)$$

$$\Leftrightarrow (sA_1R_1 + 1) \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] H_2(s) - \frac{H_2(s)}{R_1} = Q_{in}(s) \quad (77)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ (sA_1R_1 + 1) \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] - \frac{1}{R_1} \right\} H_2(s) = Q_{in}(s) \quad (78)$$

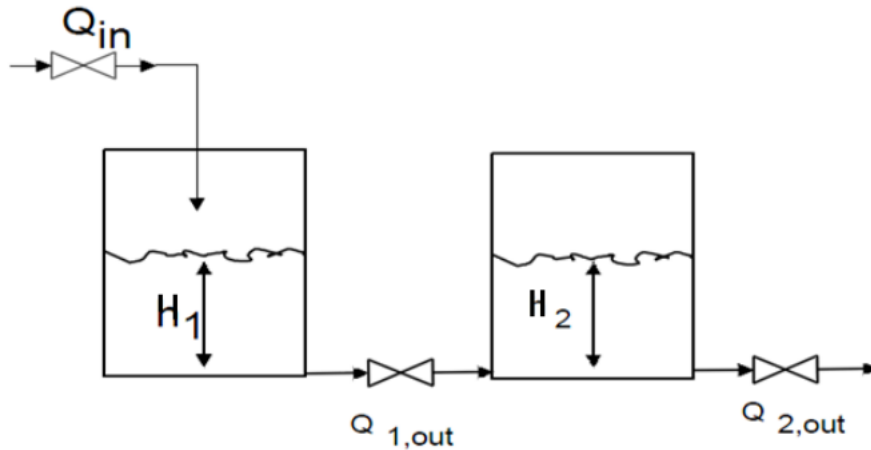
$$\Leftrightarrow \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{1}{(sA_1R_1 + 1) \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] - \frac{1}{R_1}} \quad (79)$$

- Kết luận:

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{1}{(sA_1R_1 + 1) \left[sA_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] - \frac{1}{R_1}} \quad (80)$$

5 Bài tập 5

Giả thiết Cho hệ thống như hình 5: Bình chứa thứ nhất có tiết diện là A_1 và bình chứa thứ hai có tiết diện là A_2 . Các lưu lượng ra Q_{1out} và Q_{2out} được xác định như sau: $Q_{1out} = k_1\sqrt{H_1 - H_2}$ và $Q_{2out} = k_2\sqrt{H_2}$.



Hình 5: Hệ thống 2 bình chứa

Yêu cầu

- Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.
- Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.
- Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.
- Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)}$

Bài giải

- a. Xác định các biến vào, biến ra, biến điều khiển, biến cần điều khiển và biến nhiễu.

- Biến vào: $Q_{in}, Q_{1out}, Q_{2out}$.
- Biến ra: H_1, H_2 .
- Biến điều khiển: $Q_{in}, Q_{1out}, Q_{2out}$.
- Biến cần điều khiển: H_1, H_2 .
- Biến nhiễu: không có.

- b. Viết phương trình động học cho mức chất lỏng trong bồn chứa.

- Phương trình cho bình chứa 1:

– Bình chứa 1:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_{in} - Q_{1out} \iff \frac{d(A_1 H_1)}{dt} = Q_{in} - Q_{1out} \iff \frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (Q_{in} - Q_{1out}) \quad (81)$$

– Thay $Q_{1out} = k_1 \sqrt{H_1 - H_2}$ vào (81), ta có:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (Q_{in} - Q_{1out}) = \frac{1}{A_1} [Q_{in} - k_1 \sqrt{H_1 - H_2}] \quad (82)$$

- Phương trình cho bình chứa 2:

– Bình chứa 2:

$$\frac{dV_2}{dt} = Q_{1out} - Q_{2out} \iff \frac{d(A_2 H_2)}{dt} = Q_{1out} - Q_{2out} \iff \frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (Q_{1out} - Q_{2out}) \quad (83)$$

– Thay $Q_{1out} = k_1 \sqrt{H_1 - H_2}$ và $Q_{2out} = k_2 \sqrt{H_2}$ vào (83), ta có:

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (Q_{1out} - Q_{2out}) = \frac{1}{A_2} [k_1 \sqrt{H_1 - H_2} - k_2 \sqrt{H_2}] \quad (84)$$

- Kết luận, hệ phương trình mô tả quá trình:

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{A_1} [Q_{in} - k_1 \sqrt{H_1 - H_2}] \\ \frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{A_2} [k_1 \sqrt{H_1 - H_2} - k_2 \sqrt{H_2}] \end{cases} \quad (85)$$

- c. Tuyến tính hóa phương trình xây dựng được xung quanh vị trí cân bằng dựa trên phương pháp khai triển Taylor.

- Gọi $(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$ là điểm làm việc cân bằng của hệ thống gồm 2 bình chứa.
- Gọi $Q_{in} = \overline{Q_{in}} + \Delta Q_{in}, H_1 = \overline{H_1} + \Delta H_1, H_2 = \overline{H_2} + \Delta H_2$.
- Đặt $f(Q_{in}, H_1, H_2) = \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} [Q_{in} - k_1 \sqrt{H_1 - H_2}]$

– Tại điểm làm việc cân bằng $(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$ thì

$$f(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}) = 0 \iff \frac{1}{A_1} \left[\overline{Q_{in}} - k_1 \sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}} \right] = 0 \quad (86)$$

– Khai triển Taylor cho $f(Q_{in}, H_1, H_2) = \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} \left[Q_{in} - k_1 \sqrt{H_1 - H_2} \right]$, ta có:

$$\dot{H}_1 = \Delta \dot{H}_1 = f(\overline{Q_{in}} + \Delta Q_{in}, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2) \quad (87)$$

$$\begin{aligned} &\approx \underbrace{f(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})}_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial Q_{in}} \right|_{(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta Q_{in} + \left. \frac{\partial f}{\partial H_1} \right|_{(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_1 \\ &+ \left. \frac{\partial f}{\partial H_2} \right|_{(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_2 \end{aligned} \quad (88)$$

$$\approx \frac{1}{A_1} \left[\Delta Q_{in} - \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \quad (89)$$

– Kết luận:

$$\Delta \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} \left[\Delta Q_{in} - \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \quad (90)$$

• Đặt $g(Q_{in}, H_1, H_2) = \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} \left[k_1 \sqrt{H_1 - H_2} - k_2 \sqrt{H_2} \right]$

– Tại điểm làm việc cân bằng $(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$ thì:

$$g(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2}) = 0 \iff \frac{1}{A_2} \left[k_1 \sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}} - k_2 \sqrt{\overline{H_2}} \right] = 0 \quad (91)$$

– Khai triển Taylor cho $g(Q_{in}, H_1, H_2) = \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} \left[k_1 \sqrt{H_1 - H_2} - k_2 \sqrt{H_2} \right]$, ta có:

$$\dot{H}_2 = \Delta \dot{H}_2 = g(\overline{Q_{in}} + \Delta Q_{in}, \overline{H_1} + \Delta H_1, \overline{H_2} + \Delta H_2) \quad (92)$$

$$\approx \underbrace{g(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})}_0 + \left. \frac{\partial g}{\partial H_1} \right|_{(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_1 + \left. \frac{\partial g}{\partial H_2} \right|_{(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})} \Delta H_2 \quad (93)$$

$$\approx \frac{1}{A_2} \left[\frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_1 + \frac{-k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_2 - \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \quad (94)$$

– Kết luận:

$$\Delta \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} \left[\frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_1 + \frac{-k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_2 - \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \quad (95)$$

• Kết luận, phương trình tuyến tính hóa của mô hình tại điểm làm việc cân bằng $(\overline{Q_{in}}, \overline{H_1}, \overline{H_2})$:

$$\begin{cases} \Delta \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} \left[\Delta Q_{in} - \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \\ \Delta \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} \left[\frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_1 + \frac{-k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \Delta H_2 - \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}} \Delta H_2 \right] \end{cases} \quad (96)$$

d. Xác định hàm truyền $G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)}$

- Ta có: $\Delta \dot{H}_1 = \frac{1}{A_1} \left[\Delta Q_{in} - \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \Delta H_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \Delta H_2 \right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_1(s) = \frac{1}{A_1} \left[Q_{in}(s) - \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_1(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_2(s) \right] \quad (97)$$

$$\Leftrightarrow sA_1 H_1(s) + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_1(s) = Q_{in}(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_2(s) \quad (98)$$

$$\Leftrightarrow \left[sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \right] H_1(s) = Q_{in}(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_2(s) \quad (99)$$

$$\Leftrightarrow H_1(s) = \frac{Q_{in}(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_2(s)}{sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}}} \quad (100)$$

- Ta có: $\Delta \dot{H}_2 = \frac{1}{A_2} \left[\frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_1 + \frac{-k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \Delta H_2 - \frac{k_2}{2\sqrt{H_2}} \Delta H_2 \right]$, thực hiện biến đổi Laplace 2 vế của phương trình ta có:

$$sH_2(s) = \frac{1}{A_2} \left[\frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_1(s) + \frac{-k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_2(s) - \frac{k_2}{2\sqrt{H_2}} H_2(s) \right] \quad (101)$$

$$\Leftrightarrow sA_2 H_2(s) + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_2(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{H_2}} H_2(s) = \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_1(s) \quad (102)$$

$$\Leftrightarrow \left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{k_2}{2\sqrt{H_2}} \right] H_2(s) = \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_1(s) \quad (103)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{H_1 - H_2}}{k_1} \left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{k_2}{2\sqrt{H_2}} \right] H_2(s) = H_1(s) \quad (104)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{H_1 - H_2}}{k_1} \left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{k_2}{2\sqrt{H_2}} \right] H_2(s) = \frac{Q_{in}(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_2(s)}{sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}}} \quad (105)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{H_1 - H_2}}{k_1} \left[sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \right] \left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{k_2}{2\sqrt{H_2}} \right] H_2(s) = Q_{in}(s) + \frac{k_2}{2\sqrt{H_1 - H_2}} H_2(s) \quad (106)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{H_1 - H_2}}{k_1} \left[sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \right] \left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{k_2}{2\sqrt{H_2}} \right] H_2(s) - \frac{k_2}{\sqrt{H_1 - H_2}} H_2(s) = Q_{in}(s) \quad (107)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{2\sqrt{H_1 - H_2}}{k_1} \left[sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \right] \left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{k_2}{2\sqrt{H_2}} \right] - \frac{k_2}{\sqrt{H_1 - H_2}} \right\} H_2(s) = Q_{in}(s) \quad (108)$$

$$\Leftrightarrow \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{H_1 - H_2}}{k_1} \left[sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \right] \left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{k_2}{2\sqrt{H_2}} \right] - \frac{k_2}{\sqrt{H_1 - H_2}}} \quad (109)$$

- Kết luận:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{H_2(s)}{Q_{in}(s)} \\
&= \frac{1}{\frac{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}{k_1} \left[sA_1 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} \right] \left[sA_2 + \frac{k_1}{2\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}} + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{H_2}}} \right] - \frac{k_2}{\sqrt{\overline{H_1} - \overline{H_2}}}} \quad (110)
\end{aligned}$$