

TOÁN RỜI RẠC

Đại số Boole và ứng dụng

NGUYỄN HẢI TRIỀU¹

¹Bộ môn Kỹ thuật phần mềm,
Khoa Công nghệ thông tin, Trường ĐH Nha Trang

NhaTrang, February 2022

Giới thiệu

- Đại số Boole là một cấu trúc đại số được thực hiện trên các mệnh đề toán học bởi các phép toán logic.
- Đại số Boole có nhiều ứng dụng trong cuộc sống, đặc biệt trong lĩnh vực tin học - điện tử và viễn thông.
- Trong phần này giới thiệu các khái niệm và tính chất của một đại số Boole, cách xây dựng một hàm Boole, các phương pháp tối thiểu hóa một hàm Boole và ứng dụng của nó trong việc thiết kế các mạch logic điều khiển thiết bị điện tử.

Tổng quan

- 1 Các khái niệm và tính chất cơ bản của đại số Boole

Định nghĩa đại số Boole

Mệnh đề toán học

Một mệnh đề toán học hay mệnh đề logic là một phát biểu có giá trị đúng (1) hoặc sai (0).

Trên tập hợp $B = \{0, 1\}$, người ta định nghĩa các phép toán cơ bản sau:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

x	\bar{x}
0	1
1	0

Định nghĩa 1.1

Trên tập hợp $B = \{0, 1\}$, các phép toán $+$, $.$, $-$ thỏa mãn các tính chất sau

❶ Tính kết hợp

$$\forall a, b, c \in B : (a + b) + c = a + (b + c); (a.b).c = a.(b.c)$$

❷ Tính giao hoán

$$\forall a, b \in B : a + b = b + a; a.b = b.a$$

❸ Tính phân phối

$$\forall a, b, c \in B : (a + b).c = a.c + b.c; a.(b + c) = a.b + a.c$$

❹ Phần tử trung hòa

$$\forall a \in \{0, 1\} : a + 0 = a; a.1 = a$$

❺ Phần tử bù

$$\forall a \in \{0, 1\}, \text{ tồn tại } \bar{a} \in \{0, 1\} \text{ sao cho: } a + \bar{a} = 1; a.\bar{a} = 0$$

Khi đó, bộ sáu $(B = \{0, 1\}, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ được gọi là một đại số Boole.

Các tính chất cơ bản

các luật của một đại số Boole

$\forall a, b \in B$, ta có:

- 1 Luật đồng sức: $a + a = a$; $aa = a$
- 2 Luật nuốt: $a + ab = a$; $a(a + b) = a$
- 3 Luật bù kép: $\bar{\bar{a}} = a$
- 4 Luật De Morgan: $\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b}$; $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$. Tổng quát:

$$\overline{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \bar{a}_1\bar{a}_2\dots\bar{a}_n; \quad \overline{a_1a_2\dots a_n} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n$$

Biểu thức Boole và hàm Boole

Định nghĩa 1.2

Một biểu thức Boole trên tập hợp $B = \{0, 1\}$ là sự hợp thành từ các mệnh đề logic với các phép toán (“hoặc (\vee)”, “và” (\wedge), “phủ định” ($-$)) và các dấu ngoặc ($,$). Biểu thức Boole có giá trị logic 0 hoặc 1. Phép toán phủ định được ưu tiên đầu tiên, sau đó là phép toán “và” và cuối cùng là phép toán “hoặc”.

Ví dụ 1.1

Rút gọn các biểu thức Boole sau đây:

- ❶ $P = \bar{a} + \bar{a}\bar{b}, \forall a, b \in B$
- ❷ $P = (\overline{a + b})a, \forall a, b \in B$
- ❸ $P = (\overline{\bar{a} + b + ac})a, \forall a, b, c \in B$

Định nghĩa 1.3

Ký hiệu B là tập gồm các phần tử $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, trong đó $x_i \in B$, $i = \overline{1, n}$. Một hàm Boole n biến là một ánh xạ $f : B^n \rightarrow B$. Hàm Boole $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1 tương ứng với mỗi bộ biến $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$.

Một hàm Boole thường được xác định bằng bảng chân trị (truth table) trong đó liệt kê tất cả các giá trị tương ứng với các giá trị của các đối số.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Hình 1:

$$f(x, y, z) = xy + xyz$$

Ngược lại, từ một bảng chân trị chúng ta có thể xác định được biểu thức của hàm Boole tương ứng của nó ở dạng *tổng chuẩn tắc đầy đủ* (chỉ quan tâm đến giá trị 1 trong bảng).

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Hình 2:

$$f(x, y, z) = x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

Ví dụ 1.2

Một môn thi trắc nghiệm gồm 4 câu hỏi với số điểm lần lượt 2, 3, 5, 4. Nếu trả lời đúng mỗi câu sinh viên sẽ được điểm tối đa, trả lời sai chỉ được không điểm. Sinh viên thi đạt nếu kết quả từ 10 điểm trở lên. Xác định hàm Boole cho biết sinh viên thi đạt ($=1$) hay không đạt ($=0$).

Hướng dẫn

Gọi x, y, z, t là các biến Boole tương ứng với 4 câu hỏi, các biến này nhận giá trị 0 nếu câu trả lời tương ứng là sai và nhận giá trị 1 nếu câu trả lời là đúng. Cần xác định hàm Boole $f(x, y, z, t)$ nhận giá trị 1 hoặc 0 cho biết sinh viên thi đạt hoặc không đạt tương ứng. Để xác định hàm f , trước hết cần liệt kê tất cả các giá trị của nó theo giá trị của các biến x, y, z, t gồm $2^4 = 16$ trạng thái.

x	y	z	t	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Hình 3: $f(x, y, z, t) = ?$ ở dạng tổng chuẩn tắc đầy đủ

Định nghĩa 1.4

Một hàm Boole f có dạng tổng chuẩn tắc, nếu f là một tích cơ bản hoặc là tổng của nhiều tích cơ bản trong đó không có tích nào chứa trong một tích nào khác.

Ví dụ 1.3

Hàm nào biểu diễn ở dạng tổng chuẩn tắc?

❶ $f = x\bar{z} + xyz + \bar{x}y\bar{z}$

❷ $f = x\bar{z} + xyz + x\bar{y}\bar{z}$

❸ $f = x\bar{z} + xyz$

Tài liệu tham khảo



Đ.N. An

Giáo Trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐH Nha Trang, (2021).*



Giáo trình Toán rời rạc

Giáo trình Toán Rời Rạc. *Trường DHSP Huế. (2003), 22-35.*



N.T. Nhựt

Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2011).*