CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

LOGIC MỆNH ĐỀ

4

Mệnh đề

- **Định nghĩa:** *diễn đạt có giá trị chân lý (chân trị) xác định (đúng hoặc sai)*

Ví dụ:

- Mặt trời quay quanh trái đất.
- 1+1 = 2.
- Hôm nay trời đẹp quá! (không là mệnh đề)
- Học bài đi! (không là mệnh đề)
- 3 là số chẵn phải không? (không là mệnh đề)

5

Mệnh đề

- **Ký hiệu:** Các chữ cái sẽ được dùng để ký hiệu các mệnh đề: P, Q, R….
- **Chân trị của mệnh đề:**

  Một mệnh đề chỉ có chân trị đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai.

  - Chân trị đúng: 1 (hoặc T, hoặc Đ)
  - Chân trị sai: 0 (hoặc F, hoặc S)

☞ *Chú ý: Mệnh đề không quan tâm đến ý nghĩa hoặc cấu trúc ngữ pháp.*

6

Các phép toán mệnh đề

- **Phép phủ định (Negation):** phủ định của mệnh đề **P** được ký hiệu là $\neg$**P** hay $\overline{P}$ (đọc là "không" P hay "phủ" P).

P	$\neg$P
0	1
1	0

Ví dụ:

- P : 2 là số nguyên tố

  $\neg$P : 2 **không** là số nguyên tố
- Q : 1 > 2

  $\neg$Q : 1 ≤ 2

7

Các phép toán mệnh đề

- **Phép hội (Conjunction):** Hội của hai mệnh đề P và Q kí hiệu bởi **P ∧ Q** hay **P.Q** (đọc là "P hội Q" hay "P và Q"), là mệnh đề được định bởi : P ∧ Q đúng khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng.

P	Q	P∧Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

8

Các phép toán mệnh đề

- **Phép hội (Conjunction)**

Ví dụ:

- P : 2 là số nguyên tố (T)
  Q : 1 > 2 (F)
  P ∧ Q : 2 là số nguyên tố **và** 1 > 2 (F)

- R : Tổng các góc trong một tam giác bằng 180° (T)
  S : Trong tam giác vuông có một góc 90° (T)
  R ∧ S : Tổng các góc trong một tam giác bằng 180° **và** trong tam giác vuông có một góc 90° (T)

9

Các phép toán mệnh đề

- **Phép tuyển (Disjunction):** Tuyển của hai mệnh đề P và Q kí hiệu bởi **P ∨ Q** hay **P + Q** (đọc là "P tuyển Q" hay "P hay Q"), là mệnh đề được định bởi : P ∨ Q sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời sai.

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

10

Các phép toán mệnh đề

- **Phép tuyển (Disjunction):**

Ví dụ:

- P : 2 là số nguyên tố (T)
  Q : 1 > 2 (F)
  P ∨ Q : 2 là số nguyên tố **hoặc** 1 > 2 (T)

- R : Tổng các góc trong một tam giác bằng 360° (F)
  S : Trong tam giác vuông có một góc 180° (F)
  R ∨ S : Tổng các góc trong một tam giác bằng 360° **hoặc** trong tam giác vuông có một góc 180° (F)

11

Các phép toán mệnh đề

❖ **Phép tuyển loại trừ (eXclusive Disjunction – XOR):** Tuyển loại trừ của hai mệnh đề P và Q kí hiệu bởi **P ⊕ Q** (đọc là "P tuyển loại trừ Q" hay "P hoặc Q (nhưng không cả hai)"), là mệnh đề được định bởi : P ⊕ Q sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng hoặc đồng thời sai.

P	Q	P⊕Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

12

Các phép toán mệnh đề

❖ **Phép kéo theo (Implication):** Mệnh đề P kéo theo Q của hai mệnh đề P và Q, ký hiệu bởi **P ⇒ Q** (đọc là "P kéo theo Q" hay "Nếu P thì Q" hay "P là điều kiện đủ của Q" hay "Q là điều kiện cần của P") là mệnh đề được định bởi: P ⇒ Q sai khi và chỉ khi P đúng mà Q sai.

P	Q	P⇒Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

13

Các phép toán mệnh đề

❖ **Phép kéo theo (Implication)**

Ví dụ:

➢ P : 2 là số nguyên tố (T)

Q : 1 > 2 (F)

P ⇒ Q : Nếu 2 là số nguyên tố **thì** 1 > 2 (F)

➢ R : Tổng các góc trong một tam giác bằng 360º (F)

S : Trong tam giác vuông có một góc 90º (T)

R ⇒ S : Nếu tổng các góc trong một tam giác bằng 360º **thì** trong tam giác vuông có một góc 90º (T)

14

Các phép toán mệnh đề

❖ **Phép kéo theo (Implication)**

☞ *Chú ý*:

➢ Cho mệnh đề P ⇒ Q

✓ Mệnh đề Q ⇒ P được gọi là mệnh đề đảo (*converse*)

✓ Mệnh đề ¬Q ⇒ ¬P được gọi là mệnh đề phản đảo (*contrapositive*)

➢ Trong các ngôn ngữ lập trình cấp cao như Pascal, C, Java.. đều có câu lệnh:

if p (**then**) S: nếu p thì S

cấu trúc này khác hẳn cấu trúc một mệnh đề toán học. Trong câu lệnh trên p là một mệnh đề, S là một câu lệnh.

15

Các phép toán mệnh đề

Phép kéo theo (Implication)

Chú ý:

- Khái niệm toán học về phép kéo theo độc lập với mối quan hệ nhân-quả, giữa giả thiết và kết luận.

Bao giờ bánh đúc có xương,

Bấy giờ dì ghẻ mới thương con chồng

16

Các phép toán mệnh đề

Phép tương đương (Biconditional): Mệnh đề P kéo theo Q và ngược lại của hai mệnh đề P và Q, ký hiệu bởi **P ⇔ Q** (đọc là "P nếu và chỉ nếu Q" hay "P khi và chỉ khi Q" hay "P là điều kiện cần và đủ của Q" hay "P tương đương với Q"), là mệnh đề xác định bởi: P ⇔ Q đúng khi và chỉ khi P và Q có cùng chân trị

P	Q	P⇔Q
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

17

Các phép toán mệnh đề

Phép tương đương (Biconditional)

Ví dụ:

- 2=4 khi và chỉ khi 2+1=0 (T)
- 6 chia hết cho 3 khi và chỉ khi 6 chia hết cho 2 (T)
- London là thành phố nước Anh nếu và chỉ nếu thành phố HCM là thủ đô của VN (F)
- π>4 là điều kiện cần và đủ của 5>6 (T)

18

Công thức

Định nghĩa: Mệnh đề được tạo ra bằng cách kết hợp (hữu hạn) các mệnh đề đã có bằng các phép toán được gọi là mệnh đề phức hợp, còn được gọi là công thức.

- Mỗi mệnh đề gọi là một công thức.
- Nếu P, Q là những công thức thì ¬P, P ∧ Q, P ∨ Q, P ⊕ Q, P ⇒ Q, P ⇔ Q cũng đều là công thức.

19

Công thức

❖ **Các khái niệm**

✓ ***Hằng đúng*** *(Tautology)*: Mệnh đề có chân trị luôn đúng.

✓ ***Hằng sai*** *(Contradiction)*: Mệnh đề có chân trị luôn sai.

✓ ***Tiếp liên*** *(Contingency)*: Một mệnh đề không phải là hằng đúng và không phải là hằng sai

Ví dụ:

- $P \vee \neg P$ là hằng đúng
- $P \wedge \neg P$ là hằng sai
- $(P \wedge Q) \vee \neg Q$ là một tiếp liên

20

Công thức

❖ **Công thức tương đương:** Hai công thức A, B được gọi là tương đương, ký hiệu $\mathbf{A \equiv B}$ nếu A, B luôn có cùng chân trị hay $A \Leftrightarrow B$ có chân trị là hằng đúng.

21

Các phép tương đương cơ bản

1. **Luật đồng nhất:** $p \wedge 1 \equiv p$
   $p \vee 0 \equiv p$
2. **Luật nuốt:** $p \wedge 0 \equiv 0$
   $p \vee 1 \equiv 1$
3. **Luật lũy đẳng:** $p \wedge p \equiv p$
   $p \vee p \equiv p$
4. **Luật phủ định kép:** $\neg\neg p \equiv p$

22

Các phép tương đương cơ bản

5. **Luật giao hoán:** $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   $p \vee q \equiv q \vee p$
6. **Luật kết hợp:** $(p \wedge q) \wedge t \equiv p \wedge (q \wedge t)$
   $(p \vee q) \vee t \equiv p \vee (q \vee t)$
7. **Luật phân phối:** $p \wedge (q \vee t) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge t)$
   $p \vee (q \wedge t) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee t)$

23

Các phép tương đương cơ bản

8. **Luật De Morgan:** $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

9. **Luật kéo theo:** $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

24

Suy luận toán học

Suy luận toán học là rút ra một mệnh đề mới từ 1 hay nhiều mệnh đề đã có.

❖ **Định nghĩa:** $A_1, A_2 \ldots A_n$, ***B*** là công thức

Nếu $A_1, A_2 \ldots A_n$ đúng, và

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ là hằng đúng

thì ***B*** là hệ quả logic của $A_1, A_2 \ldots A_n$

hay có một qui tắc suy luận từ các tiền đề A_1, $A_2 \ldots A_n$ tới hệ quả logic B. Ký hiệu $\dfrac{A_1, A_2 \ldots A_n}{B}$

25

Suy luận toán học

❖ **Quy tắc suy luận:**

1. *Quy tắc cộng:* $\dfrac{p}{p \vee q}$
2. *Quy tắc rút gọn:* $\dfrac{p \wedge q}{p}$
3. *Quy tắc kết luận:* $\dfrac{p,\ p \Rightarrow q}{p}$
4. *Quy tắc kết luận ngược:* $\dfrac{p \Rightarrow q,\ \neg q}{\neg p}$

26

Suy luận toán học

5. *Quy tắc tam đoạn luận:* $\dfrac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$
6. *Quy tắc tương đương:* $\dfrac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q}$
7. *Quy tắc tách tuyển:* $\dfrac{p \vee q,\ \neg p}{q}$
8. *Quy tắc tách tuyển giả thiết:* $\dfrac{p \Rightarrow r,\ q \Rightarrow r}{(p \vee q) \Rightarrow r}$

27

Suy luận toán học

9. Quy tắc hội kết luận: $\dfrac{p \Rightarrow q,\ p \Rightarrow r}{p \Rightarrow (q \wedge r)}$

10. Quy tắc phản đảo: $\dfrac{\neg q \Rightarrow \neg p}{p \Rightarrow q}$

11. Quy tắc phản chứng: $\dfrac{\neg p \Rightarrow q,\ \neg p \Rightarrow \neg q}{p}$

28

Suy luận toán học

Ví dụ:

a. *Nếu hôm nay trời mưa thì cô ta không đến,*

Nếu cô ta không đến thì ngày mai cô ta đến.

Vậy thì, nếu hôm nay trời mưa thì ngày mai cô ta đến.

b. *Nếu hôm nay là ngày mồng một tết, thì trường đại học nghỉ học.*

Hôm nay trường đại học không nghỉ học.

Do đó, hôm nay không phải là mồng một tết

c. *Alice giỏi Toán.* Vậy Alice giỏi Toán hoặc Tin

29

Các phương pháp chứng minh

30

Các phương pháp chứng minh

❖ **Hàm mệnh đề**

Cho A_1, $A_2 \ldots A_n$ là các tập hợp không rỗng, ứng với mỗi $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$ có một mệnh đề $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một *hàm mệnh đề* theo n biến x.

Ví dụ: Cho hàm mệnh đề

$P(x,y,z) = \{ 2x + y - z = 0 \};\ x,y,z \in Z$

$P(1,-1,1)$ là mệnh đề đúng

$P(1,1,1)$ là mệnh đề sai

31

Các phương pháp chứng minh

Phương pháp chứng minh trực tiếp

Chứng minh mệnh đề B bằng cách suy luận logic từ giả thiết $A_1, A_2 \ldots A_n$

$$\frac{A_1, A_2 \ldots A_n}{B}$$

Ví dụ: Cho hàm mệnh đề

P(n) = Nếu n là một số lẻ thì n^2 là một số lẻ

32

Các phương pháp chứng minh

Phương pháp chứng minh tìm phản ví dụ

Phương pháp này sử dụng qui tắc kết luận ngược.

Ví dụ: Cho m,n là hai số không âm. Chứng minh rằng $m + n < m.n$ là không đúng.

33

Các phương pháp chứng minh

Phương pháp chứng minh phản đảo

Phương pháp này sử dụng qui tắc phản đảo

Ví dụ: Chứng minh nếu a là một số hữu tỉ khác 0, b là một số vô tỉ thì a.b là một số vô tỉ.

34

Các phương pháp chứng minh

Phương pháp chứng minh phản chứng

Phương pháp này sử dụng qui tắc phản chứng

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

35

Các phương pháp chứng minh

Phương pháp vét cạn

Để chứng minh một hàm mệnh đề đúng, có thể chứng minh hàm mệnh đề đúng với tất cả các trường hợp có thể xảy ra

Ví dụ: Chứng minh tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 3

36

Các phương pháp chứng minh

Phương pháp chứng minh qui nạp

Xét hàm mệnh đề P(n). Xét $U = \{n \in N \mid P(n)\}$. Nếu P(0) đúng $\Rightarrow 0 \in U$. Giả sử P(k) đúng $\Rightarrow$ P (k+1) đúng, nghĩa là $k \in U \Rightarrow (k+1) \in U, \forall k \in N$. Khi đó có thể khẳng định U = N

Ví dụ: Chứng minh $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2, \forall n \in N$.

37

Vị từ

Cho $A_1, A_2 \ldots A_n$ là n tập hợp khác rỗng, một hàm mệnh đề $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trên $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ là một vị từ (logic) n biến xác định trên $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

Các biến của vị từ có thể là: *hằng, biến*

Ví dụ:

Nam(x) ≅ x là một người có giới tính là nam

Contrai (x,y) ≅ x là con trai của y

Behon(x,8) ≅ x <8

38

Vị từ

Câu cấp 1

Câu cấp một là một cấu trúc bao gồm các vị từ logic cấp 1 liên kết với nhau bởi:

- *Các phép toán logic:* $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- *Hàm*
- *Lượng từ*

39

Vị từ

- **Hàm:** là một phép biến đổi các đối tượng thành một đối tượng

Ví dụ:

a) x+y

b) Median(x,y,z)

40

Vị từ

- **Lượng từ:** là một phát biểu chỉ ra một số tính chất là đúng đối với một số (lượng) đối tượng được chọn.

Có 2 lượng từ:

- Với mọi: ký hiệu $\forall$
  - Cú pháp: $\forall$ <biến><câu>
  - Ý nghĩa: $\forall x$, P: có chân trị là đúng với mọi biến x thuộc miền xác định (của x)

41

Vị từ

- Tồn tại: ký hiệu $\exists$
  - Cú pháp: $\exists$ <biến><câu>
  - Ý nghĩa: $\exists x$, P: có chân trị là đúng với ít nhất một giá trị của x thuộc miền xác định của x.

Ví dụ:

a) $\forall x$, Sinhvien(x,CNTT) $\Rightarrow$ thongminh(x)

(Mọi sinh viên Công nghệ thông tin thì thông minh)

b) $\forall x, y$, Cháu (x,y) $\Leftrightarrow \exists z$(Anhem(z,y) $\wedge$ Con(x,z))

(Cháu là con của anh em)

42

Mệnh đề

1. Với P(x) là một vị từ xác định trên A

$$\overline{\forall x \in A, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{P(x)}$$

2. Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa từ vị từ $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ có được bằng cách thay $\forall$ bằng $\exists$ và ngược lại, và thay vị từ $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ bằng $\overline{P(x_1, x_2, ..., x_n)}$

43

Mệnh đề

3. Trong một câu lượng từ hóa theo nhiều biến độc lập, nếu ta hoán đổi hai lượng từ đứng cạnh nhau thì:
   - Câu mới tương đương (có cùng chân trị) với câu cũ nếu hai lượng từ cùng loại.
   - Câu mới là hệ quả logic của câu cũ nếu hai lượng từ trước khi hoán vị có dạng $\exists\ \forall$

44

Mệnh đề

Ví dụ:

a) Định nghĩa một hàm f liên tục tại $a \in A$, biểu diễn như sau:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

b) Khi đó, hàm f không liên tục tại $b \in A$, biểu diễn như sau:

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in A)\ (|x - b| < \delta \wedge |f(x) - f(b)| \geq \varepsilon)$

Ví dụ:

$(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})\ (x + y = 1)$

45

CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

TẬP HỢP & ÁNH XẠ

46

Tập hợp

❖ **Khái niệm**

- Tập hợp chỉ một nhóm các đối tượng phân biệt (các đối tượng định nghĩa được).

  Ký hiệu chữ in hoa: A, B, C,…
- Đối tượng tham gia tập hợp gọi là phần tử của tập hợp.

  Ký hiệu chữ thường: a, b, c,…

47

Tập hợp – Khái niệm

- Phần tử x thuộc tập hợp A, ký hiệu: **$x \in A$**.
  Phần tử x không thuộc tập hợp A, ký hiệu **$x \notin A$**.
- Tập hợp không chứa phần tử nào cả gọi là tập rỗng, ký hiệu: $\varnothing$, hay {}.

48

Tập hợp

Xác định tập hợp

- Xác định bằng lời

  Ví dụ: A là tập hợp sinh viên của Trường đại học Nha Trang.
- Liệt kê

  Ví dụ: B = {4, 2, 1, 3}

49

Tập hợp – xác định tập hợp

- Đưa ra tính chất đặc trưng, sử dụng hàm mệnh đề - vị từ

  Ví dụ: $C = \{n \in \mathbf{N} \mid n$ chia hết cho $3\}$

  $D = \{n \in \mathbf{N} \mid (n>3) \wedge (n \leq 7)\}$

  Tổng quát:

  Tập hợp X gồm các phần tử x thỏa tính chất p(x):

  $X = \{x \in U \mid p(x)\}$ (U: gọi là tập vũ trụ)

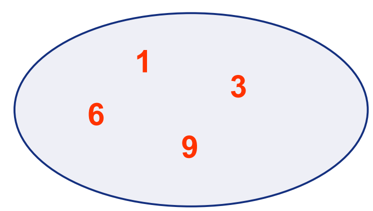
  Hay: $X = \{x \mid p(x)\}$ (U: được hiểu ngầm hoặc đã định nghĩa)

50

Tập hợp – xác định tập hợp

- Sử dụng sơ đồ (giản đồ) Venn

  Ví dụ:



51

Tập hợp

❖ Lực lượng của tập hợp

- Số phần tử của tập hợp A được gọi là lực lượng của tập hợp, kí hiệu **|A|**.
- Nếu A có hữu hạn phần tử, ta nói A hữu hạn. Ngược lại, ta nói A vô hạn.

Ví dụ:

- $|\emptyset| = 0$
- **N, Z, Q, R** là các tập vô hạn
- X = {1, 3, 4, 5} là tập hữu hạn với |X| = 4

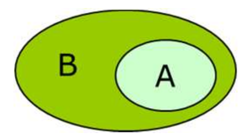
52

Quan hệ giữa các tập hợp

❖ Tập con – bao hàm

- Tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B.
- Ký hiệu: $\mathbf{A \subset B}$

$$\mathbf{A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)}$$



53

Quan hệ giữa các tập hợp

❖ Tập con – bao hàm

- B gọi là bao hàm tập hợp A, ký hiệu $\mathbf{B \supset A}$
- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
- A là tập con của B và có thể bằng B: $A \subseteq B$
- Các quan hệ: $\subset$, $\subseteq$, $\supset$, $\supseteq$ gọi là các quan hệ bao hàm.

Ví dụ: Cho A = {1, 3, 4, 5}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} và C = $\{x \in Z \mid 0 < x < 9\}$. Khi đó $A \subset B$ và B = C.

54

Quan hệ giữa các tập hợp

❖ Tính chất

Với A, B, C là 3 tập hợp bất kỳ ta luôn có:

- $\emptyset \subset A$
- $A \subset A$
- $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (tính bắc cầu)

55

Quan hệ giữa các tập hợp

Tập hợp lũy thừa

- Tập hợp lũy thừa của tập hợp A là tập hợp tất cả các tập con của A. Ký hiệu $\wp(A)$
- $|A| = n \Rightarrow |\wp(A)| = 2^n$

Ví dụ:

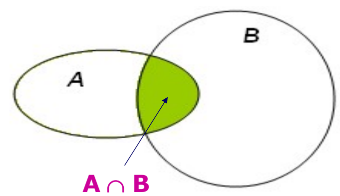
- $A = \{5,7,9\} \Rightarrow \wp(A) = \{\varnothing, \{5\}, \{7\}, \{9\}, \{5,7\}, \{5,9\}, \{7,9\}, \{5,7,9\}\}$
- Chỉ ra các khẳng định đúng:
  - i) $\varnothing \in \varnothing$ ii) $\varnothing \subset \varnothing$
  - iii) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ iv) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

56

Các phép toán trên tập hợp

Phép giao

$A \cap B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

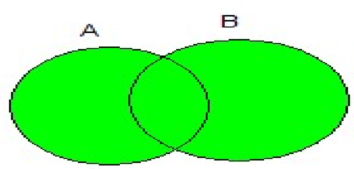


57

Các phép toán trên tập hợp

Phép hợp

$A \cup B = \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

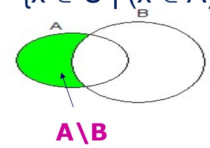


58

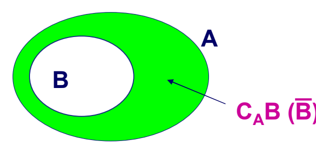
Các phép toán trên tập hợp

Phép hiệu (trừ)

$A \setminus B = A - B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$



- Nếu $B \subset A$, $A \setminus B$ sẽ là $C_A B$ hay $\overline{B}$ (phần bù B)

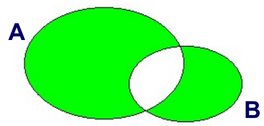


59

Các phép toán trên tập hợp

❖ Phép hiệu đối xứng

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$



Ví dụ:

- Cho $A = \{4,5,7,9,10\}$ $B = \{2,4,7,9\}$

  $A \cup B = \{2,4,5,7,9,10\}$ $A \cap B = \{4,7,9\}$ $A \setminus B = \{5,10\}$

  $A \oplus B = \{5,10\} \cup \{2\} = \{2,5,10\}$

- Cho $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\} = (-\infty, 1) \Rightarrow = C_{\mathbf{R}}A = [1, +\infty)$

60

Tích Descartes

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_i \in A_i,\ \forall i = \overline{1,n}\}$$

Ví dụ: Cho $A = \{1,2,3\}$ và $B = \{x, y\}$. Khi đó

$A \times B = \{(1, x),(1, y),(2, x),(2, y),(3, x),(3, y)\}$

61

Các phép toán đại số tập hợp

1) Tính giao hoán

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

2) Tính kết hợp

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3) Luật De Morgan

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

4) Tính phân phối

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5) Phần tử trung hòa

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap U = A$

6) Phần bù

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

$A \cup \overline{A} = U$

7) Tính thống trị

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup U = U$

8) Triệt hiệu

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

62

Các phép toán đại số tập hợp

Ví dụ: Chứng minh

1. $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
4. $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) = (A \cap B) \setminus C$
5. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

63

Ánh xạ

❖ **Khái niệm**

➢ $f : A \to B$

$x \mapsto y = f(x)$

➢ $\forall x \in A, \exists! y \in B : y = f(x)$

➢ A được gọi là **tập nguồn** (*miền xác định*), B được gọi là **tập đích** của ánh xạ f

64

Ánh xạ

❖ **Đồ thị của ánh xạ**

➢ Cho $f : A \to B$,

Tập hợp $G = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$ được gọi là đồ thị của ánh xạ f

➢ Có thể đồng nhất ánh xạ f với đồ thị G của nó.

65

Ánh xạ

❖ **Ánh xạ đồng nhất**

$id_X : A \to A$

$x \mapsto x$

66

Ánh xạ

❖ **Hai ánh xạ bằng nhau**

➢ Hai ánh xạ f, g: $A \to B$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu f = g nếu

$\forall x \in A, f(x) = g(x)$

67

Ánh xạ

❖ Ánh xạ thu hẹp, ánh xạ mở rộng

Cho một ánh xạ $f: A \to B$, $X \subset A$

- $g : X \to B$ là ánh xạ thu hẹp của ánh xạ f lên X, ký hiệu $f|_X$ nếu: $\forall x \in X : f(x) = g(x)$
- f còn gọi là ánh xạ mở rộng g lên A.

Ví dụ: Cho ánh xạ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_0^+$

$f(x) = |x| \Rightarrow f|_{R_0^+} = id|_{R_0^+}$

68

Ánh xạ

❖ Ảnh và tạo ảnh

Cho một ánh xạ $f: A \to B$, $x \in A$, $X \subset A$, $Y \subset B$

- $f(x)$: ảnh của x qua ánh xạ f
- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$: ảnh của X qua ánh xạ f
- $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subset A$: tạo ảnh của Y qua ánh xạ f.
- $f(A)$: ảnh của ánh xạ f, ký hiệu Imf.

69

Ánh xạ

❖ Mệnh đề

$f: A \to B;\ X,Y \subset A;\ S,T \subset B$

1. $X \subset f^{-1}(f(X))$
2. $f(f^{-1}(S)) \subset S$
3. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
4. $f(X \cap Y) \subset f(Y) \cap f(Y)$

70

Ánh xạ

❖ Mệnh đề

$f: A \to B;\ X,Y \subset A;\ S,T \subset B$

5. $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$
6. $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$
7. $f(A \backslash X) \supset f(A) \backslash f(X)$
8. $f^{-1}(B \backslash S) = A \backslash f^{-1}(S)$

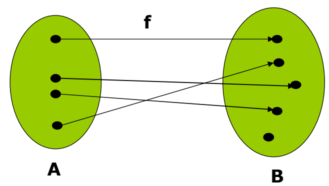
71

Các loại ánh xạ

❖ **Đơn ánh**

f: A → B gọi là đơn ánh nếu:

$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



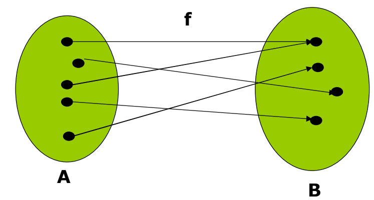
72

Các loại ánh xạ

❖ **Toàn ánh**

f: A → B gọi là toàn ánh nếu:

$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$



73

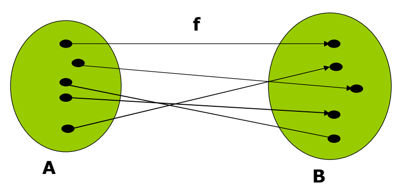
Các loại ánh xạ

❖ **Song ánh**

f: A → B gọi là song ánh (ánh xạ tương ứng 1-1)

nếu f vừa đơn ánh và toàn ánh

$\forall y \in B, \exists! x \in A : f(x) = y$



74

Các loại ánh xạ

Ví dụ:

1. f : **R** → **R** xác định bởi $f(x) = x^2 - 3x + 5$
2. f : **N** → **Z** được xác định $f(x) = x + 1$.
3. f : **Z** → **N** được xác định $f(x) = x^2$
4. f : **R** → **R** được xác định $f(x) = -x$

75

Hợp thành của các ánh xạ (Ánh xạ hợp)

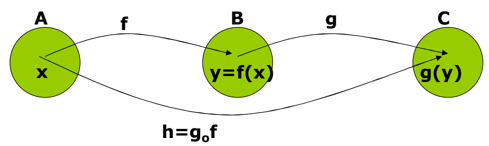
$f : A \to B$ $\qquad$ $g : B \to C$

$x \mapsto f(x)$ $\qquad$ $y \mapsto g(y)$

Ánh xạ hợp h = g∘f (hoặc g.f) được định nghĩa:

$$h = g_{\circ} f : A \to C$$

$$x \mapsto h(x) = g(f(x))$$



76

Hợp thành của các ánh xạ (Ánh xạ hợp)

Ví dụ: Cho *f*, *g* : **R** → **R** xác định bởi *f*(*x*) = *x* + 2 và *g*(*x*) = 3*x* − 1. Xác định *g*∘*f* và *f*∘*g*.

∀x ∈ **R** : g∘f(x) = g(f(x))
= g(x + 2)
= 3(x + 2) − 1
= 3x + 5.

∀x ∈ **R** : f∘g(x) = f(g(x))
= f(3x − 1)
= (3x − 1) + 2
= 3x + 1.

77

Hợp thành của các ánh xạ (Ánh xạ hợp)

❖ **Mệnh đề**

f:A → B; g:B → C; h:C → D, khi đó

h∘(g∘f) = (h∘g)∘f

78

Ánh xạ ngược

f: A → B, g: B → A

g được gọi là ánh xạ ngược của f (và ngược lại) khi **$g_{\circ}f = 1_A$** , **$f_{\circ}g = 1_B$**. Ký hiệu **f^{-1}** (và **g^{-1}**)

Ví dụ:

1. Cho *f*, *g* : **R** → **R** xác định bởi *f*(*x*) = 2*x* + 5 và *g*(*x*) = $\frac{x-5}{2}$
2. Cho *f*: **R** → **R⁺** , *g*: **R⁺** → **R** xác định bởi f(x) = e^x và g(x) = ln(x)

79

Họ những phần tử của một tập hợp

- **Khái niệm**

  $I \neq \varnothing$, $f: I \to A$

  - $\forall \alpha \in I$, $f(\alpha) = x_\alpha$, ký hiệu $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ là họ những phần tử thuộc A được đánh chỉ số bởi các phần tử của I.
  - Nếu x_α là các tập hợp thì $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các tập hợp đánh chỉ số bởi tập hợp I.
  - Nếu mỗi phần tử của A là một tập hợp con của U thì ta gọi $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ những tập con của tập hợp U.

80

Họ những phần tử của một tập hợp

Ví dụ:

1. Cho $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \mapsto a_n = f(n)$. Khi đó ta có họ các số thực $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ được đánh chỉ số bởi tập số tự nhiên **N**, và thường được gọi là dãy số thực.
2. Cho $f: \mathbf{N} \to \wp(\mathbf{R})$, $n \mapsto J_n = \{x \in \mathbf{R} \mid x < n\}$. Khi đó $(J_n)_{n\in \mathbf{N}}$ là họ các tập con của **R** thỏa

   $J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_i \subset \ldots$

81

Các phép toán đại số họ các tập hợp

Cho $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các tập hợp

- **Giao** của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \forall\alpha : x \in A_\alpha\}$$

- **Hợp** của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \exists\alpha : x \in A_\alpha\}$$

82

Các phép toán đại số họ các tập hợp

Cho $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các tập hợp

- **Tích Descartes** của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \mid x_\alpha \in A_\alpha, \forall\alpha \in I\}$$

Nếu $A_\alpha = A$, $\forall\alpha \in I$ thì $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = A^I$ gọi là lũy thừa bậc I của A.

83