CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

QUAN HỆ - DÀN

84

Quan hệ

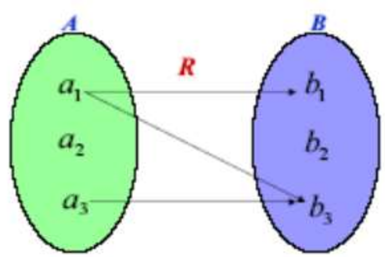
❖ **Quan hệ 2 ngôi**

- Một quan hệ giữa tập A và tập B là một tập con **R** của tích Descartes AxB.
- Nếu (a,b) $\in$ **R**, ta viết: a**R**b
- Nếu A = B thì một tập con **R** của tích Descartes A x A được gọi là quan hệ trên A.
- Quan hệ bù của **R**: $\overline{\mathbf{R}} \subset$ AxB và x$\overline{\mathbf{R}}$y $\Leftrightarrow$ (x,y) $\notin$ **R**
- Quan hệ đảo của **R**: $\mathbf{R}^{-1} \subset$ BxA và x$\mathbf{R}^{-1}$y $\Leftrightarrow$ y**R**x

85

Quan hệ

Ví dụ: Một cách biểu diễn quan hệ:



$R = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_3) \}$

86

Quan hệ

Ví dụ:

a) A = tập sinh viên; B = tập lớp học.

R = {(a, b) | sinh viên a học lớp b}

b) Cho A = {1, 2, 3, 4}, và

R = {(a, b) | a là ước số của b}

Khi đó:

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),

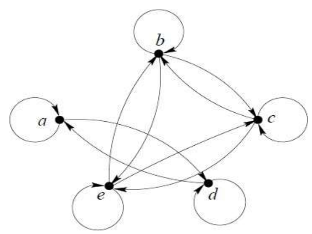
(2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)}

87

Biểu diễn quan hệ

❖ **Đồ thị**

a) Xét một quan hệ R trên tập hợp $A=\{a,b,c,d\}$
Biểu diễn quan hệ R như đồ thị sau



$R = \{(a, a),(b,b),(c, c),(d, d),(e, e),(a, d),(d, a),$
$(b, e),(e,b),(b, c),(c,b),(c,e),(e,c)\}$

88

Biểu diễn quan hệ

❖ **Ma trận**

Xét một quan hệ R trên từ tập hợp $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
đến tập hợp $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$
Ma trận biểu diễn quan hệ là một trận cấp $n \times m$, ký hiệu $W_{n\times m} = (w_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$

Trong đó,

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, (a_i, b_j) \notin R \\ 1, (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

89

Biểu diễn quan hệ

❖ **Ma trận**

	1	2	3	4
a	1	1	0	1
b	0	1	0	1
c	1	0	1	0

$R = \{(a,1), (a,2), (a,4), (b,2), (b,4), (c,1), (c,3)\}$

90

Tính chất của quan hệ

R là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp *A*.

1) Tính phản xạ

R có tính phản xạ nếu

$\forall a \in A : a\mathbf{R}a$

2) Tính đối xứng

R có tính đối xứng nếu

$\forall a,b \in A : a\mathbf{R}b \Rightarrow b\mathbf{R}a$

3) Tính phản đối xứng

R có tính phản đối xứng nếu

$\forall a,b \in A : a\mathbf{R}b, b\mathbf{R}a \Rightarrow a = b$

4) Tính bắc cầu

R có tính bắc cầu nếu

$\forall a,b,c \in A : a\mathbf{R}b, b\mathbf{R}c \Rightarrow a\mathbf{R}c$

91

Tính chất của quan hệ

Ví dụ:

Xét quan hệ $\leq$ trên tập hợp các số thực **R**

- có tính phản xạ vì $\forall a \in \mathbf{R} : a \leq a$
- không có tính đối xứng vì $\forall a,b \in \mathbf{R} : a \leq b \not\Rightarrow b \leq a$
- có tính phản đối xứng vì $\forall a,b \in \mathbf{R} : a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$
- có tính bắc cầu vì $\forall a,b,c \in \mathbf{R} : a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

92

Tổ hợp các quan hệ

- Cho a**R**b $(a \in A, b \in B)$

  b**S**c $(b \in B, c \in C)$

  $\mathbf{S}_o\mathbf{R} = \{(a, c) \mid \exists b \in B : (a,b) \in R, (b, c) \in S\}$

Ví dụ:

$R = \{(a,1), (a, 2), (a, 4), (b, 2), (b, 4), (c,1), (c,3)\}$

$S = \{(1, e), (1, f), (2, f), (3, e), (3, f), (4, f)\}$

$S_oR = \{(a, e), (a, f), (b, f), (c, e), (c, f)\}$

93

Tổ hợp các quan hệ

- Cho quan hệ R trên tập hợp A, lũy thừa $\mathbf{R}^n$, $n \in N^*$ được định nghĩa quy nạp

  $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}, \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-1} \circ \mathbf{R}$

- Một quan hệ R trên tập hợp A, R có tính bắc cầu khi và chỉ khi $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*$

94

Quan hệ tương đương

- **Quan hệ tương đương**

  Một quan hệ R trên tập hợp A được gọi là một quan hệ tương đương nếu R có 3 tính chất: **Phản xạ, Đối xứng, Bắc cầu.**

Ví dụ:

Quan hệ đồng dư (modulo) "mod n" trên **Z** là một quan hệ tương đương

95

Quan hệ tương đương

❖ **Lớp tương đương**

Cho R là quan hệ tương đương trên A và phần tử a ∈ A.

Lớp tương đương chứa a được ký hiệu bởi $\bar{a}$, hoặc $[a]_R$,

hoặc [a], hoặc C(a) là tập

$[a]_R = \{b \in A \mid b\ R\ a\}$

Ví dụ:

Quan hệ tương đương "mod 3" trên **Z**, ta có

$[0] = \{b \in Z \mid b \bmod 3 = 0\}$

96

Quan hệ tương đương

❖ **Mệnh đề**

Cho **R** là một quan hệ tương đương trên tập hợp A, a,b ∈ A

1. $[a] \neq \varnothing$
2. $[a] = [b] \Leftrightarrow a\mathbf{R}b$
3. $[a] = [b]$ hoặc $[a] \cap [b] = \varnothing$

97

Quan hệ tương đương

❖ **Tập thương**

Cho **R** là một quan hệ tương đương trên tập hợp A, tập thương xác định bởi quan hệ R trên A, ký hiệu A / R được xác định

$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$

Ví dụ:

Quan hệ quan hệ tương đương "mod 3" trên **Z**, ta có

$Z/\text{mod } 3 = \{[0],[1],[2]\}$

98

Quan hệ tương đương

❖ **Phân hoạch**

Một phân hoạch của tập hợp A là một họ các tập con (A_i), $i = \overline{1,n}$ thỏa:

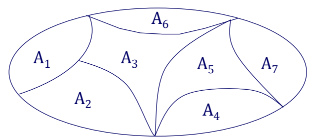
1. $A_i \neq \varnothing \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$
2. $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \neq j$
3. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$

99

Quan hệ tương đương

Ví dụ:

A



Một phân hoạch của A thành 7 tập con

100

Quan hệ tương đương

Phân hoạch

- Một phân hoạch của tập hợp A xác định một quan hệ tương đương trên A
- Cho R là một quan hệ tương đương trên A. Khi đó các lớp tương đương của R sẽ tạo nên một phân hoạch của A. Ngược lại, nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một phân hoạch của A thì tồn tại quan hệ tương đương R sao cho $\{A_i\}$ là tập các lớp tương đương của R.

101

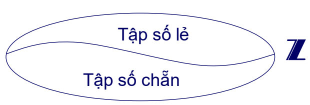
Quan hệ tương đương

Ví dụ:

Quan hệ "cùng tính chẵn lẻ" trên tập số nguyên Z phân hoạch Z thành 2 lớp tương đương:

[1]={...,-5,-3,-1,1,3,5,...}

[2]={...,-4,-2,-0,2,4,6,...}



102

Quan hệ tương đương

Ví dụ:

Cho tập $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ và các tập con của A: $E_1=\{a_1, a_3\}$, $E_2=\{a_2,a_4, a_5\}$, $E_3=\{ a_6\}$. Hãy tìm một quan hệ tương đương trên A nhận E1, E2, E3 làm các lớp tương đương?

Giải:

Ta có: $\{E_1, E_2, E_3\}$là một phân hoạch của A. Theo định lý 4.2, tồn tại quan một hệ tương đương trên A nhận E_1, E_2, E_3 làm các lớp tương đương.

Gọi R là quan hệ tương đương cần tìm.

Do R có tính phản xạ nên R có dạng:

$$R=\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3),(a_4, a_4),(a_5, a_5), (a_6, a_6)\} \cup X$$

E_1 là một lớp tương đương của R nên R phải có chứa các cặp: (a_1,a_3), (a_3,a_1)

E_2 là một lớp tương đương của R, nên R phải có chứa các cặp: (a_2,a_4), (a_4,a_2), (a_2,a_5), (a_5,a_2), (a_4, a_5), (a_5,a_4)

Vậy R cần tìm có thể là: $R=\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3),(a_4, a_4),(a_5, a_5), (a_6, a_6)\}$

$$\cup \{(a_1,a_3), (a_3,a_1), (a_2,a_4), (a_4,a_2), (a_2,a_5), (a_5,a_2), (a_4, a_5), (a_5,a_4)\}$$

103

Quan hệ thứ tự

❖ **Quan hệ thứ tự**

Một quan hệ R trên tập hợp A được gọi là một quan hệ thứ tự nếu R có 3 tính chất: **Phản xạ, Phản đối xứng, Bắc cầu**.

- Ký hiệu một quan hệ thứ tự là $\leq$
- Nếu trên A có một quan hệ thứ tự $\leq$, thì A được gọi được sắp thứ tự, ký hiệu **(A, $\leq$)**.

104

Quan hệ thứ tự

Ví dụ:

1. Quan hệ $\leq$ (so sánh nhỏ hơn hay bằng thông thường trên R) trên tập số thực **R** là một quan hệ thứ tự. Tập (**R**, $\leq$) là tập có thứ tự.
2. Quan hệ $\subseteq$ trên tập hợp các tập con của X: $\wp(X)$ là một quan hệ thứ tự.
3. Quan hệ "chia hết" trên $\mathbf{Z}^+$ là một quan hệ thứ tự.

105

Quan hệ thứ tự

❖ **Phần tử trội**

Với quan hệ thứ tự $\leq$ trên tập hợp A:

- Nếu a,b $\in$ A : a $\leq$ b thì b được gọi là phần tử trội của phần tử a.
- Nếu b là một trội của a, $\nexists$c $\in$ A, c $\neq$ a và c $\neq$ b sao cho a $\leq$ c và c $\leq$ b thì b được gọi là một phần tử trội trực tiếp của a

106

Quan hệ thứ tự

Ví dụ:

Cho tập A={a_1,a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}, Xét quan hệ:

R={(a_1, a_1), (a_2,a_2), (a_3,a_3), (a_4,a_4), (a_5,a_5), (a_6,a_6), (a_7,a_7), (a_1,a_3), (a_3, a_5), (a_1,a_5), (a_5,a_7), (a_3,a_7), (a_1,a_7)}

R là một quan hệ thứ tự trên A.

- a_3 là một trội trực tiếp của a_1.
- a_5 cũng là một trội của a_1 nhưng không là trội trực tiếp.

107

Quan hệ thứ tự

❖ **Biểu đồ Hasse**

Biểu đồ Hasse của một tập hữu hạn R có thứ tự $(A,\leq)$ bao gồm:

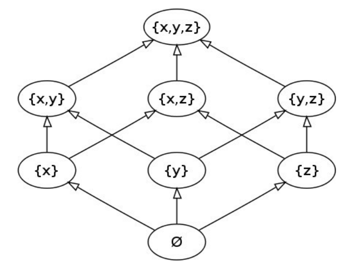
- Tập các điểm trong mặt phẳng, mỗi điểm tương ứng là một phần tử trong A.
- Một cung có hướng từ a đến b nếu b là một trội trực tiếp của a.

108

Quan hệ thứ tự

Ví dụ:

Xét tập hợp $X = \{x, y, z\}$ và tập được sắp thứ tự $(\wp(X),\subseteq)$ ta có biểu đồ Hasse:



109

Quan hệ thứ tự

❖ **Quan hệ thứ tự toàn phần**

Một quan hệ thứ tự trên A gọi là toàn phần nếu mọi phần tử của A đều có thể so sánh được. Nghĩa là: $\forall x,y \in A: x \leq y$ **hay** $y \leq x$.

❖ **Quan hệ thứ tự bộ phận**

Một quan hệ thứ tự trên A gọi là bộ phận nếu nó không phải là quan hệ thứ tự toàn phần

110

Quan hệ thứ tự

Ví dụ:

a) Các quan hệ "≤" và "≥" trên tập số thực là quan hệ thứ tự toàn phần.

b) Quan hệ chia hết trên tập số nguyên, quan hệ bao hàm trên các tập hợp là các quan hệ thứ tự bộ phận.

111

Quan hệ thứ tự

❖ **Các phần tử đặc biệt trong tập thứ tự**

Xét một quan hệ thứ tự $\leq$ trên tập hợp A, $X \subset A$:

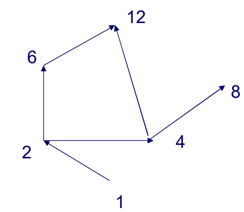
- n $\in$ X gọi là phần tử **nhỏ nhất** nếu n **được trội bởi tất cả** các phần tử khác trong X.
- m $\in$ X gọi là phần tử **lớn nhất** nếu m **trội tất cả** các phần tử khác trong X.

112

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ:

Cho tập có thứ tự ({1,2,4,6,8,12},|). Biểu đồ Hasse như sau:



Tập này không có phần tử lớn nhất, có phần tử nhỏ nhất là 1

113

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

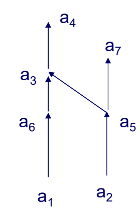
- n' $\in$ X gọi là phần tử **tối tiểu** nếu n' **không là trội** của bất kỳ phần tử nào khác
- m' $\in$ X gọi là phần tử **tối đại** nếu m' **không có bất kỳ trội** thực sự nào khác.

114

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ:

Tập có thứ tự cho bởi biểu đồ Hasse:



Tập này có 2 phần tử tối đại là a_4 và a_7, 2 phần tử tối tiểu là a_1 và a_2

115

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

- $a \in A$ gọi là phần tử **chặn dưới** của X, nếu

  $\forall x \in X, a \leq x$

Phần tử ***lớn nhất*** của tập các chặn dưới của X gọi là *phần tử cận dưới*, ký hiệu $\underset{A}{\boldsymbol{inf}}$ X (hoặc $\wedge$)

- $b \in A$ gọi là phần tử **chặn trên** của X, nếu

  $\forall x \in X, x \leq b$

Phần tử ***nhỏ nhất*** của tập các chặn trên của X gọi là *phần tử cận trên*, ký hiệu $\underset{A}{\boldsymbol{sup}}$ X (hoặc $\vee$)

116

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ:

Xét tập hợp **N** với quan hệ $\leq$ thông thường, khi đó **N** có phần tử nhỏ nhất là 0 và không có phần tử lớn nhất.

X = {6,8,9, 45,10, 7,12, 4} $\subset$ **N**, X có các phần tử chặn dưới là 0,1,2,3,4. Phần tử cận dưới của X là 4.

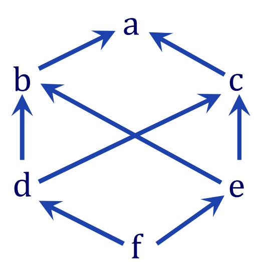
Các phần tử ≥ 45 là các phần tử chặn trên của X.

Phần tử cận trên của X là 45.

117

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ: Cho biểu đồ Hasse sau



Ta có: sup{d,e} = b|c sup{b,c} = a

inf{b,c} = e|d inf{d,e} = f

118

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ:

Xét tập thứ tự ($\wp(E)$, $\subseteq$). Khi đó $\forall A, B \in \wp(E)$

Sup(A,B) = $A \cup B$

Inf(A,B) = $A \cap B$

119

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ:

Xét tập thứ tự (**N***, |). Khi đó $\forall$a, b $\in$ **N***

Sup(a,b) = BCNN(a,b)

Inf(a,b) = UCLN(a,b)

120

Dàn

❖ **Định nghĩa 1**

Bộ ba (A, $\wedge$, $\vee$) được gọi là một dàn nếu nó thỏa mãn hệ tiên đề sau:

1) Luật lũy đẳng

$\forall x \in A$

$x \wedge x = x$; $x \vee x = x$

2) Luật giao hoán

$\forall x,y \in A$

$x \wedge y = y \wedge x$

$x \vee y = y \vee x$

3) Luật kết hợp

$\forall x,y,z \in A$

$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

4) Luật hút

$\forall x,y \in A$

$x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$

121

Dàn – Định nghĩa

Nếu dàn (A, $\wedge$, $\vee$) còn thỏa mãn thêm luật phân phối:

- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\forall x,y,z \in A$

thì dàn (A, $\wedge$, $\vee$) được gọi là dàn phân phối

122

Dàn – Định nghĩa

Ví dụ:

a) Với E là một tập nào đó, ($\wp(E)$, $\cap$, $\cup$) lập thành một dàn phân phối

b) ($\mathbf{N}^*$, ( ), [ ]) với (a,b) = UCLN(a,b), [a,b] = BCNN(a,b) lập thành một dàn phân phối

123

Dàn – Định nghĩa

❖ **Định nghĩa 2**

$(A, \wedge, \vee)$ là một dàn cho trước, ta nói rằng $a \leq b$ nếu như $a \wedge b = a$

❑ **Bổ đề**

$(A, \leq)$ là một quan hệ thứ tự trên A

Quan hệ thứ tự này được gọi là quan hệ thứ tự cảm sinh trên dàn $(A, \wedge, \vee)$

124

Dàn – Định nghĩa

❖ **Định nghĩa 3**

Tập thứ tự $(A, \leq)$ được gọi là một dàn nếu $\forall x,y \in A$ thì $\sup\{x,y\}$ và $\inf\{x,y\}$ đều tồn tại.

Lúc đó ta ký hiệu:

$\sup\{x,y\} = x \vee y$

$\inf\{x,y\} = x \wedge y$

125

Dàn

❖ **Tính chất**

- Tập hợp có thứ tự toàn phần là một dàn, với $a \vee b = \max(a,b)$ và $a \wedge b = \min(a,b)$
- Trong dàn $(L, \leq)$:
  - $a \leq \sup\{a,b\}$ và $b \leq \sup\{a,b\}$
  - $\forall c \in L : a \leq c, b \leq c \Rightarrow \sup\{a,b\} \leq c$
- Trong dàn $(L, \leq)$:
  - $\inf\{a,b\} \leq a$ và $\inf\{a,b\} \leq b$
  - $\forall c \in L : c \leq a, c \leq b \Rightarrow c \leq \inf\{a,b\}$

126

Dàn

❖ **Dàn con**

Cho dàn $(L, \leq)$, $B \subset L$.

B được gọi là dàn con của L khi và chỉ khi

- $B \neq \varnothing$
- $a \wedge b \in B, \forall a,b \in B$
- $a \vee b \in B, \forall a,b \in B$

127