TOÁN RỜI RẠC
LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

NGUYỄN HẢI TRIỀU[1]

[1]Bộ môn Kỹ thuật phần mềm,

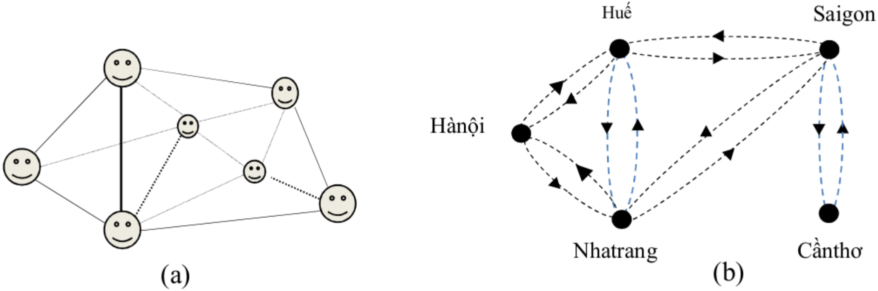
Khoa Công nghệ thông tin, Trường ĐH Nha Trang

NhaTrang, February 2022

Tổng quan

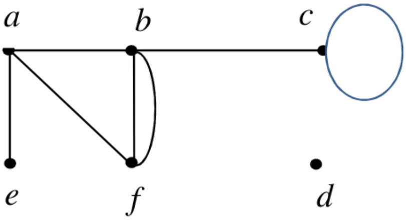
1. **Các khái niệm và tính chất cơ bản của đồ thị**
2. Đồ thị có hướng

- Lý thuyết đồ thị (graph theory) là một lĩnh vực của toán học hiện đại chuyên nghiên cứu về mối quan hệ giữa các đại lượng rời rạc
- Một số ứng dụng điển hình của lý thuyết đồ thị như: thiết kế và biểu diễn kết quả của thuật toán, thiết kế cấu trúc và lưu trữ dữ liệu trên máy tính, tìm kiếm thông tin trên mạng internet



Hình 1: đồ thị minh họa mạng Facebook kết nối thế giới và hệ thống đường bay giữa các thành phố

Đồ thị vô hướng



Hình 2: Ví dụ về đồ thị vô hướng

Định nghĩa 1.1

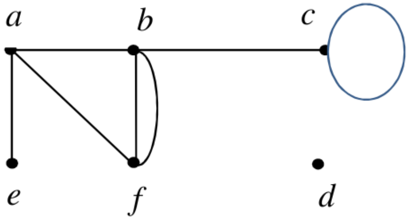
Đồ thị vô hướng (undirected graph) là một cấu trúc rời rạc bao gồm hữu hạn các đỉnh (vertex) và các cạnh (edge) nối các đỉnh của đồ thị. Ký hiệu $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng G với tập hợp các đỉnh là V và tập hợp các cạnh là E.

Lưu ý

- Ký hiệu $|V|$ và $|E|$ lần lượt là số đỉnh và số cạnh của đồ thị $G = (V, E)$.
- Các đỉnh của đồ thị thường được ký hiệu bằng chữ cái *a,b,...* hoặc các chữ số 1, 2...
- Cạnh nối hai đỉnh v và u được ký hiệu là uv hoặc (u, v), hai đỉnh v và u được gọi là kề nhau và là đầu mút của cạnh (u, v).
- Ký hiệu $ke(a) = \{\exists b \in V : (a, b) \in E\}$ là tập hợp gồm các đỉnh kề với đỉnh a.

Lưu ý

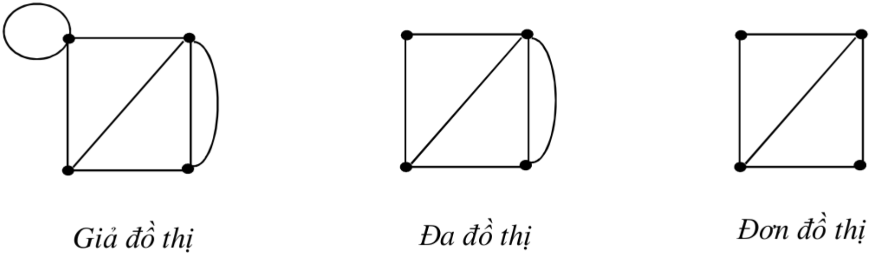
- một đỉnh không kề với đỉnh nào trong đồ thị được gọi là *đỉnh cô lập*
- một đỉnh mà chỉ kề với đúng một đỉnh khác được gọi là *đỉnh treo* hay *lá*
- một đỉnh kề với tất cả các đỉnh còn lại được gọi là *đỉnh tổng* hay *đỉnh đầy đủ*
- cạnh có hai đầu mút trùng nhau tại một đỉnh được gọi là *khuyên*
- hai đỉnh có nhiều hơn một cạnh được gọi là *cạnh bội*



Ví dụ 1.1

Xét đồ thị trên Hình 2. Ta có, $|V| = 6$, $|E| = 7$, $ke(a) = \{b, e, f\}, ke(d) = \oslash \rightarrow d$ *là đỉnh cô lập,* e *là đỉnh treo, cạnh* (c, c) *là khuyên và cạnh* (b, f) *là cạnh bội. Để ý, đồ thị đã cho có đỉnh cô lập nên không có đỉnh tổng.*

Phân loại đồ thị



Hình 3: Ví dụ về các loại đồ thị

Định nghĩa 1.2

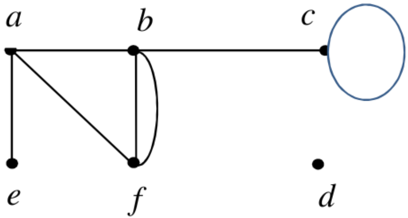
Một đồ thị vô hướng chứa khuyên được gọi là ***giả đồ thị****. Một đồ thị không có khuyên nhưng chứa cạnh bội được gọi là* ***đa đồ thị****. Một đồ thị không chứa khuyên và cạnh bội được gọi là* ***đơn đồ thị****.*

Bậc của đỉnh

Định nghĩa 1.3

Trong một đồ thị, bậc của một đỉnh là số cạnh xuất phát từ đỉnh đó.

- *Bậc (degree) của đỉnh v được ký hiệu là $deg(v)$.*
- *Trong đồ thị n đỉnh, khi đó theo định nghĩa, đỉnh đầy đủ có bậc bằng $n-1$, đỉnh treo là đỉnh có bậc bằng 1 và đỉnh cô lập có bậc bằng 0.*



Ví dụ 1.2

Xét đồ thị như trên hình 2. Ta có, $deg(a) = deg(c) = deg(f) = 3$, $deg(b) = 4$, $deg(d) = 0$, $deg(e) = 1$.

Định lý 1.1

Trong một đồ thị $G = (V, E)$, tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng hai lần số cạnh:

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v)$$

Chứng minh

Rõ ràng, mỗi cạnh (u, v) của đồ thị được tính một lần trong bậc của đỉnh u và một lần trong bậc của đỉnh v. Vì vậy, tổng bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh.

Ví dụ 1.3

Định lý 1.1 có tên gọi là định lý bắt tay bởi một ví dụ quen thuộc: "Hãy đếm số cái bắt tay của 5 sinh viên lâu ngày gặp nhau?".

Định lý 1.1

Trong một đồ thị $G = (V, E)$, tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng hai lần số cạnh:

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v)$$

Chứng minh

Rõ ràng, mỗi cạnh (u, v) của đồ thị được tính một lần trong bậc của đỉnh u và một lần trong bậc của đỉnh v. Vì vậy, tổng bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh.

Ví dụ 1.3

Định lý 1.1 có tên gọi là định lý bắt tay bởi một ví dụ quen thuộc: "Hãy đếm số cái bắt tay của 5 sinh viên lâu ngày gặp nhau?". Gợi ý: Số cái bắt tay chính là số cạnh của đồ thị 5 đỉnh.

Hệ quả 1.1

Trong một đồ thị, số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

Chứng minh

Gọi V_1 , V_2 lần lượt là các tập hợp chứa các đỉnh bậc lẻ và các đỉnh bậc chẵn tương ứng. Theo định lý bắt tay 1.1 ta có:

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v)$$

Vì $2|E|$ và $\sum_{v \in V_2} deg(v)$ đều chẵn nên $\sum_{v \in V_1} deg(v)$ cũng phải là một số chẵn. Hay tổng số đỉnh thuộc V_1 phải là số chẵn.

Định nghĩa 1.4

Trong đồ thị n đỉnh ($n \geq 2$) bao giờ cũng có ít nhất hai đỉnh cùng bậc.

Chứng minh

Trong một đồ thị không thể tồn tại đồng thời một đỉnh có bậc 0 và một đỉnh có bậc $n-1$, vì vậy với n đỉnh thì bậc của mỗi đỉnh chỉ có thể nhận một trong $n-1$ giá trị. Theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất $\lceil \frac{n}{n-1} \rceil = 2$ đỉnh cùng bậc.

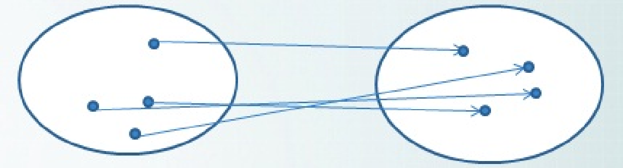
Lưu ý

Trong phần tiếp theo, chúng ta làm việc chủ yếu trên các đơn đồ thị và gọi chung là đồ thị, khi cần thiết chúng ta sẽ chỉ rõ đồ thị đang xét là đa hay giả đồ thị.

Sự đẳng cấu của các đồ thị

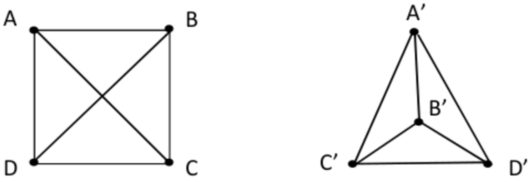
Nhắc lại định nghĩa

Ta nói $f : X \to Y$ là một song ánh nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Nghĩa là: $\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y$



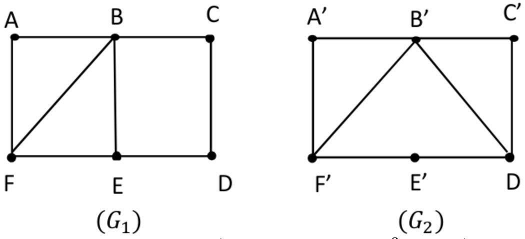
Định nghĩa 1.5

Hai đơn đồ thị $G_1(V_1, E_1)$ và $G_2(V_2, E_2)$ là đẳng cấu nếu tồn tại một song ánh $f : V_1 \to V_2$ sao cho các đỉnh u và v kề nhau trong G_1 khi và chỉ khi các đỉnh $f(u)$ và $f(v)$ kề nhau trong G_2.



Hình 4: Hai đồ thị đẳng cấu

Khi hai đồ thị là đẳng cấu sẽ tồn tại một phép tương ứng 1–1 giữa các đỉnh của hai đồ thị và bảo toàn quan hệ kề nhau. Có đến $n!$ phép tương ứng 1-1 giữa hai tập đỉnh của hai đồ thị n đỉnh
$\Rightarrow$ Kiểm tra mỗi phép tương ứng xem có bảo toàn tính liền kề hay không là không thực tế!



Hình 5: Hai đồ thị không đẳng cấu

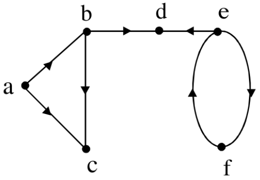
Kiểm tra hai đồ thị không đẳng cấu bằng cách chỉ ra chúng không có chung một tính chất mà hai đồ thị đẳng cấu cần phải có như

- số đỉnh, số cạnh, bậc của các đỉnh tương ứng
- quan hệ liền kề giữa các đỉnh

Ví dụ 1.4

Ở hình 5: vì trong G_2 các đỉnh bậc hai không kề nhau, điều này không xảy ra với G_1.

Đồ thị có hướng



Hình 6: Đồ thị có hướng

Định nghĩa 2.1

Một đồ thị trên đó các cạnh được định hướng được gọi là đồ thị có hướng (digraph). Các cạnh có hướng được gọi là ***cung*** *của đồ thị.*

Có nhiều bài toán được biểu diễn bằng đồ thị có hướng:

- hệ thống giao thông trong thành phố
- hệ thống đường bay giữa các thành phố
- hệ thống nước sinh hoạt trong thành phố

Đồ thị có hướng được ký hiệu bởi $G = [V, E]$, trong đó V là tập hợp các đỉnh, E là tập hợp các cung.

- (a, b) là một cung nối hai đỉnh a và b của đồ thị, khi đó a được gọi là đỉnh đầu, b là đỉnh cuối của cung (a, b)
- đỉnh a kề với đỉnh b, nhưng đỉnh b không kề với đỉnh a

Định nghĩa 2.2

Bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh v trong đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra khỏi nó (đi vào nó) và ký hiệu là $deg^+(v)$, $deg^-(v)$.

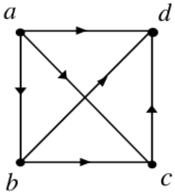
Ví dụ 2.1

Trong đồ thị trên Hình 6, ta có $deg^+(b) = 2$, $deg^-(b) = 1$.

Định nghĩa 2.3

Giả sử $G = [V, E]$ *là đồ thị có hướng, khi đó*

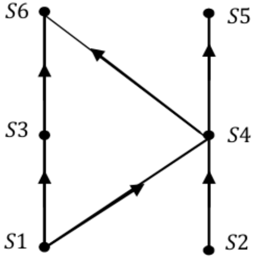
$$|E| = \sum_{v \in V} deg^+(v) = \sum_{v \in V} deg^-(v)$$



Hình 7: Ví dụ 2.2: đồ thị minh họa kết quả của giải đấu, trong đó đội a toàn thắng, đội d toàn thua.

Ví dụ 2.2

Một giải bóng chuyền gồm 4 đội, mỗi đội phải thi đấu với 3 đội còn lại. Cuộc thi đấu như thế có thể được mô tả bằng đồ thị có hướng, trong đó các đỉnh biểu thị các đội bóng, giả sử đội a thắng đội b thì đồ thị sẽ có cung (a, b).



Hình 8: Thứ tự thực hiện các lệnh:

$S1 \quad a := 0$

$S2 \quad b := 1$

$S3 \quad c := a + 1$

$S4 \quad d := a + b$

$S5 \quad e := d + 1$

$S6 \quad g := c + d$

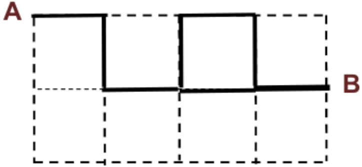
Ví dụ 2.3

Một số ngôn ngữ lập trình cho phép thực thi đồng thời một số câu lệnh nào đó mà chúng không phụ thuộc vào nhau. Sự phụ thuộc của các câu lệnh có thể được biểu diễn bởi đồ thị có hướng, mỗi câu lệnh là một đỉnh, một cung nối hai đỉnh tương ứng với hai câu lệnh phải thực hiện theo thứ tự.

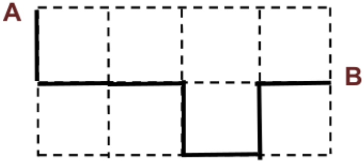
Hành trình và đường đi trong đồ thị

Ví dụ 2.4

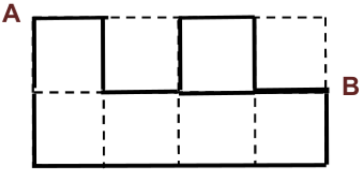
Một người du lịch muốn đi dạo qua các con phố từ điểm A đến điểm B như hình bên dưới



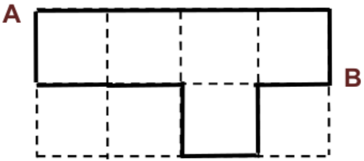
(a) hành trình (có thể lặp)



(b) đường đi (không lặp lại)



(c) hành trình khép kín



(d) chu trình

Hành trình và hành trình khép kín

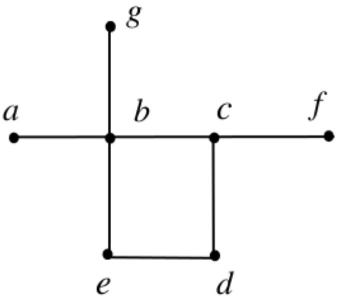
Định nghĩa 2.4

$W = v_0e_1v_1e_2...e_lv_l$ là một hành trình trong đó $v_0, v_1, v_2, ..., v_l$ là các đỉnh và $e_1, e_2, e_3, ..., e_l$, $e_i = v_{i-1}v_i (1 \leq i \leq l)$ là các cạnh của G. Để đơn giản, có thể biểu diễn một hành trình thông qua các đỉnh của nó $W = (v_0, v_1, v_2, ..., v_l)$, trong đó v_0 và v_l được gọi là đỉnh đầu và đỉnh cuối của W và l là độ dài của W.

Định nghĩa 2.5

Một hành trình $W = (v_0, v_1, v_2, ..., v_l)$ trong đồ thị vô hướng G được gọi là khép kín (closed walk) nếu $v_0 = v_l$.

Hành trình và hành trình khép kín



Ví dụ 2.5

- *Xét đồ thị trên,* $W_1 = (a, b, c, d, e, b, g)$ *là hành trình có độ dài bằng 6, trong đó a là đỉnh đầu và g là đỉnh cuối, hành trình này đi qua đỉnh b hai lần*
- $W_2 = (a, b, c, d, e, b, a)$ *là hành trình khép kín có độ dài bằng 6 và đi qua cạnh* (a, b) *hai lần.*

Đường đi và chu trình

Định nghĩa 2.6

- *Một hành trình* $W = (v_0, v_1, v_2, ..., v_l)$ *trong đồ thị vô hương* G *được gọi là một đường đi (Path) nếu các đỉnh* $v_0, v_1, v_2, ..., v_l$ *của nó là khác nhau.*
- *Một hành trình khép kín* $C = (v_0, v_1, v_2, ..., v_l, v_0)$ *được gọi là chu trình (cycle) nếu các đỉnh* $v_0, v_1, v_2, ..., v_l$ *của nó là khác nhau.*

Tài liệu tham khảo

Đ.N. An
Giáo Trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐH Nha Trang, (2021).*

Giáo trình Toán rời rạc
Giáo trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐHSP Huế. (2003), 22-35.*

N.T. Nhựt
Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2011).*