TOÁN RỜI RẠC
LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

NGUYỄN HẢI TRIỀU[1]

[1]Bộ môn Kỹ thuật phần mềm,

Khoa Công nghệ thông tin, Trường ĐH Nha Trang

NhaTrang, February 2022

Tổng quan

1. Các khái niệm và tính chất cơ bản của đồ thị
2. Các đồ thị đặc biệt

Đồ thị liên thông

Định nghĩa 1.1

Trong một đồ thị, hai đỉnh phân biệt được gọi là liên thông nhau nếu tồn tại một đường đi nối chúng. Một đồ thị là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa 2 cặp đỉnh bất kỳ của đồ thị.

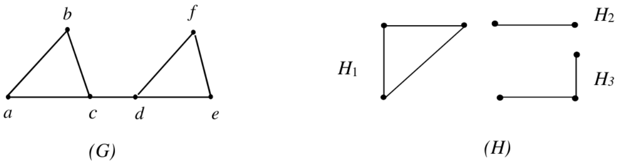
Định nghĩa 1.2

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, $H = (W, F)$ *là đồ thị con của* G. *Giả sử* G *là đồ thị không liên thông, khi đó* G *chứa một số đồ thị con liên thông rời nhau, các đồ thị con này được gọi là các thành phần liên thông của* G. *Nếu* G *chỉ có một thành phần liên thông thì* G *gọi là liên thông.*

Đỉnh khớp, cạnh cầu của đồ thị

Định nghĩa 1.3

- *Trong đồ thị G, một đỉnh mà khi loại bỏ nó và các cạnh liên thuộc với nó, đồ thị thu được có số thành phần lớn hơn số thành phần của G được gọi là đỉnh khớp của G.*
- *Một cạnh của đồ thị G mà khi loại bỏ nó, đồ thị thu được có số thành phần lớn hơn số thành phần của G, được gọi là cạnh cầu của đồ thị G.*



Hình 1: Đồ thị G liên thông, trong đó các đỉnh d và e là các đỉnh khớp, cạnh (c, d) là cạnh cầu. Đồ thị H không liên thông và có ba thành phần là các đồ thị con liên thông H_1 , H_2, H_3.

Đỉnh khớp, cạnh cầu của đồ thị

Ví dụ 1.1

Một khảo sát tại NTU cho thấy, cứ 7 giảng viên bất kỳ luôn có hai giảng viên sử dụng điện thoại của cùng một hãng. Biết rằng, mỗi giảng viên chỉ sử dụng một điện thoại. Hỏi, có nhiều nhất bao nhiêu hãng điện thoại đã bán hàng của mình cho các giảng viên.

Đỉnh khớp, cạnh cầu của đồ thị

Ví dụ 1.1

Một khảo sát tại NTU cho thấy, cứ 7 giảng viên bất kỳ luôn có hai giảng viên sử dụng điện thoại của cùng một hãng. Biết rằng, mỗi giảng viên chỉ sử dụng một điện thoại. Hỏi, có nhiều nhất bao nhiêu hãng điện thoại đã bán hàng của mình cho các giảng viên.

Hướng dẫn

Xây dựng đồ thị G với các đỉnh tương ứng là các GV. Một cạnh nối hai đỉnh tương ứng 2 GV sử dụng điện thoại của cùng một hãng. Nhận thấy rằng, G có nhiều nhất là 6 thành phần liên thông. Vì nếu đồ thị này có ít nhất 7 thành phần, khi đó ta có thể chọn từ mỗi thành phần một đỉnh, điều nay tương ứng với 7 giảng viên sử dụng điện thoại của 7 hãng khác nhau $\Rightarrow$ trái với giả thiết.

Định lý 1.1

Một đồ thị n đỉnh, mỗi đỉnh có bậc ít nhất bằng $n/2$ là đồ thị liên thông.

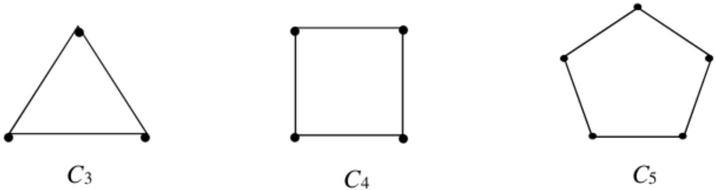
Chứng minh 1.1

- Giả sử đồ thị G đã cho không liên thông.
- G phải có ít nhất một thành phần liên thông G' chứa không quá $n/2$ đỉnh (vì nếu không, G sẽ có quá n đỉnh).
- Do đó mỗi đỉnh của G' có bậc không quá $n/2 - 1 \Rightarrow$ trái với giả thiết là bậc của đỉnh trong G ít nhất là $n/2$.

Đồ thị vòng

Định nghĩa 2.1

Đồ thị vòng - $C_n (n \geq 3)$: n đỉnh, n cạnh, các cạnh xếp liên tiếp thành 1 vòng hay là một chu trình gồm n đỉnh đều có bậc bằng 2.

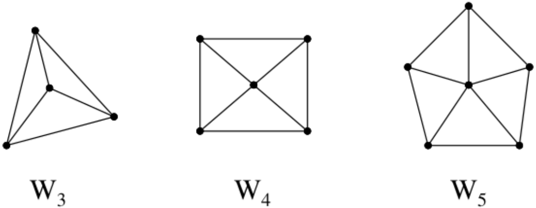


Hình 2: Các đồ thị vòng.

Đồ thị bánh xe

Định nghĩa 2.2

*Đồ thị bánh xe – W_n: có $n + 1$ đỉnh chính là đồ thị vòng n đỉnh + **1** đỉnh mới, nối với tất cả các đỉnh đã có.*



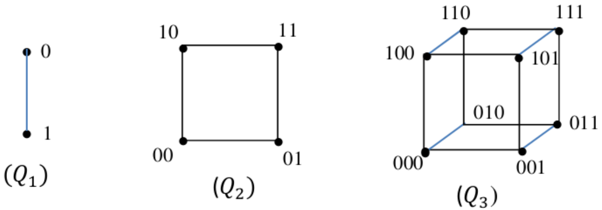
Hình 3: Các đồ bánh xe.

Dễ dàng nhận thấy, đồ thị bánh xe W_n có n đỉnh bậc 3 và một đỉnh có bậc n.

Đồ thị lập phương

Định nghĩa 2.3

Đồ thị lập phương Q_n gồm n đỉnh ($n \geq 2$) là đồ thị với các đỉnh biểu diễn 2^n chuỗi nhị phân độ dài n, trong đó các đỉnh kề nhau sai khác nhau một bit.

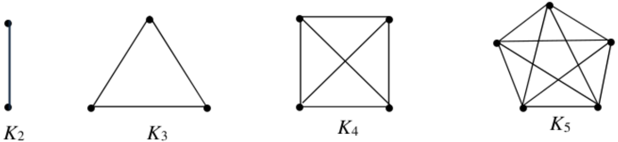


Hình 4: Các đồ thị lập phương.

Đồ thị đầy đủ

Định nghĩa 2.4

Một đồ thị được gọi là đầy đủ (complete graph) nếu mọi cặp đỉnh của nó đều kề nhau.



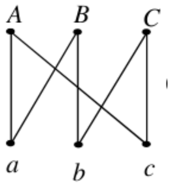
Hình 5: Các đồ thị đầy đủ.

K_n là đồ thị đầy đủ $n \geq 2$ đỉnh: mọi đỉnh đều có bậc $n-1$. Số cạnh của K_n là $C_n^2 = n(n-1)/2$. Đồ thị biểu diễn quan hệ quen biết của các sinh viên trong một lớp học là một ví dụ đồ thị đầy đủ trong thực tế.

Đồ thị hai phía

Định nghĩa 2.5

Một đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là đồ thị hai phía (bipartite graph) nếu các đỉnh của nó có thể được phân thành hai tập hợp con V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh trong G nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.



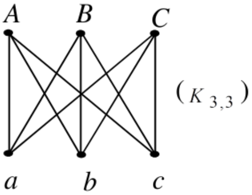
Hình 6: Đồ thị hai phía.

Đồ thị hai phía đầy đủ

Định nghĩa 2.6

Một đồ thị hai phía $G = (V, E)$ mà tất cả các đỉnh trong tập V_1 nối với tất cả các đỉnh trong tập V_2 được gọi là đồ thị hai phía đầy đủ (complete bipartite graph) và được kí hiệu là $K_{n,m}$, $n = |V_1|$, $m = |V_2|$. Số đỉnh và số cạnh của đồ thị hai phía đầy đủ là

$$|V(K_{n,m})| = n + m, \quad |E(K_{n,m})| = n \times m.$$



Hình 7: Đồ thị hai phía đầy đủ.

Định lý 2.1

Một đơn đồ thị là hai phía khi và chỉ khi mọi chu trình trong nó có độ dài chẵn. Một đơn đồ thị là hai phía đầy đủ khi và chỉ khi nó chỉ chứa các chu trình có độ dài (chẵn) bằng nhau.

Ứng dụng

Trong cuộc sống ta thường gặp các bài toán được biểu diễn bằng đồ thị hai phía. Chẳng hạn, đồ thị mô tả quan hệ giảng dạy giữa các giảng viên và các môn học là một đồ thị hai phía, trong đó các giảng viên được xem là các đỉnh thuộc V_1 và các môn học là các đỉnh thuộc V_2, mỗi cạnh của đồ thị cho biết các giảng viên giảng dạy các môn học tương ứng.

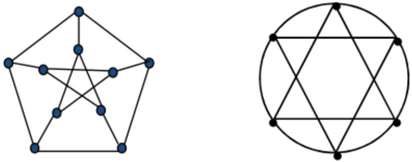
Đồ thị đều

Định nghĩa 2.7

Một đồ thị được gọi là đồ thị đều bậc k (k-regular graph) nếu mọi đỉnh của nó đều có bậc bằng k.

Hệ quả 2.1

Đồ thị vòng C_n là đồ thị đều bậc 2, đồ thị đầy đủ K là đồ thị đều bậc $n-1$, đồ thị lập phương Q_n là đồ thị đều bậc n. Số cạnh của đồ thị đều bậc k với n đỉnh là $nk/2$.

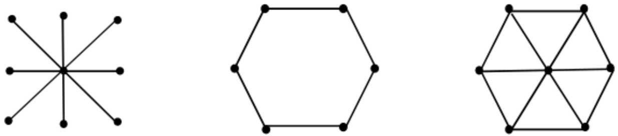


Hình 8: Các đồ thị đều bậc 3 và bậc 4

Ứng dụng

Ứng dụng của các đồ thị đặc biệt

Trong thực tế, các đồ thị đặc biệt thường được sử dụng trong các mô hình truyền dữ liệu và xử lý song song. Chẳng hạn, các mạng cục bộ (LAN) bao gồm các máy tính cùng với các thiết bị ngoại vi như máy in, máy vẽ, ... được kết nối với nhau. Các kết nối này có thể được xây dựng theo mô hình cấu trúc kiểu đồ thị hình sao, đồ thị vòng hay đồ thị bánh xe.



Đồ thị phẳng

Đặt vấn đề

Làm thế nào để có thể biểu diễn đồ thị trên mặt phẳng sao cho các cạnh của chúng không cắt (chéo) nhau??

Đồ thị phẳng

Đặt vấn đề

Làm thế nào để có thể biểu diễn đồ thị trên mặt phẳng sao cho các cạnh của chúng không cắt (chéo) nhau??

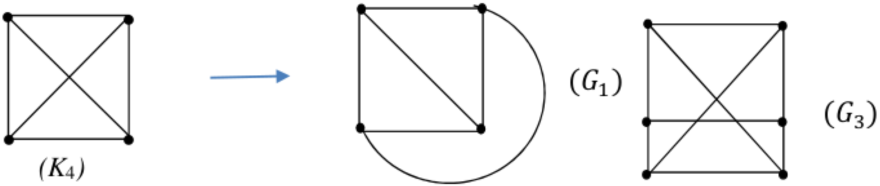
Đồ thị phẳng

Đồ thị phẳng (planar graph) có nhiều kết quả về lý thuyết và ứng dụng trong cuộc sống:

- trong công nghệ thiết kế bảng mạch điện tử
- phân chia tần số của các mạng truyền tin
- quy hoạch đô thị, tô màu bản đồ

Định nghĩa 2.8

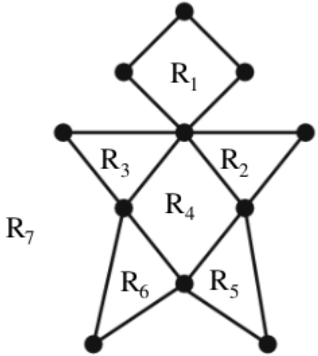
Một đồ thị được gọi là phẳng nếu nó có thể được biểu diễn trên mặt phẳng sao cho các cạnh không cắt nhau (trừ tại đỉnh).



Hình 9: Đồ thị G_1 là một biểu diễn phẳng của đồ thị đầy đủ K_4

Định nghĩa 2.9

Trong một đồ thị phẳng, mỗi phần mặt phẳng được giới hạn bởi một chu trình mà không chứa bên trong nó một chu trình con nào khác được gọi là ***vùng (miền) của đồ thị****. Tức là 2 điểm bất kỳ có thể nối với nhau mà không cắt bất cứ cạnh nào của đồ thị.*



Hình 10: Vùng lớn nhất ở ngoài cùng $R7$ là vùng ngoài

- Mỗi đồ thị phẳng liên thông luôn có một vùng vô hạn duy nhất (diện tích vô hạn), các vùng khác đều là vùng hữu hạn.
- Mỗi cạnh của vùng còn được gọi là cạnh biên của vùng.
- Độ dài của một vùng là số cạnh biên của vùng đó

Ví dụ 2.1

- *Khuyên là vùng có độ dài bằng?*

- Mỗi đồ thị phẳng liên thông luôn có một vùng vô hạn duy nhất (diện tích vô hạn), các vùng khác đều là vùng hữu hạn.
- Mỗi cạnh của vùng còn được gọi là cạnh biên của vùng.
- Độ dài của một vùng là số cạnh biên của vùng đó

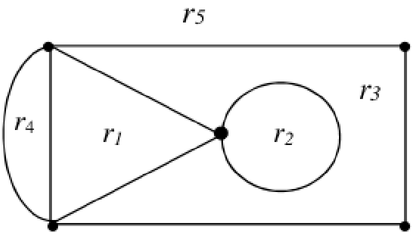
Ví dụ 2.1

- *Khuyên là vùng có độ dài bằng? 1*
- *Vùng chứa cạnh bội của hai đỉnh có độ dài bằng?*

- Mỗi đồ thị phẳng liên thông luôn có một vùng vô hạn duy nhất (diện tích vô hạn), các vùng khác đều là vùng hữu hạn.
- Mỗi cạnh của vùng còn được gọi là cạnh biên của vùng.
- Độ dài của một vùng là số cạnh biên của vùng đó

Ví dụ 2.1

- *Khuyên là vùng có độ dài bằng? 1*
- *Vùng chứa cạnh bội của hai đỉnh có độ dài bằng? 2*



Hình 11: Mô tả các vùng của đồ thị

Ví dụ 2.2

Hãy xác định độ dài của các vùng đồ thị.

Định lý 2.2

Trong một đồ thị phẳng, tổng độ dài biên của tất cả các vùng bằng hai lần số cạnh.

Định lý 2.3 (Công thức Euler)

Giả sử G là một đồ thị phẳng liên thông n đỉnh, m cạnh và r vùng. Khi đó,

$$n - m + r = 2$$

Ví dụ 2.3

Đồ thị phẳng liên thông G gồm 10 đỉnh, trong đó có hai đỉnh bậc 4, bốn đỉnh bậc 3 và các đỉnh còn lại đều có bậc là 2. Hỏi, đồ thị G có bao nhiêu vùng?

Định lý 2.3 (Công thức Euler)

Giả sử G là một đồ thị phẳng liên thông n đỉnh, m cạnh và r vùng. Khi đó,

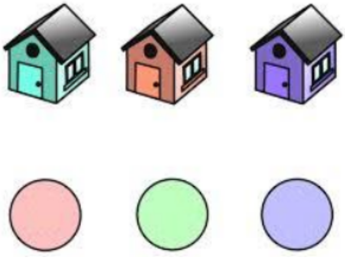
$$n - m + r = 2$$

Ví dụ 2.3

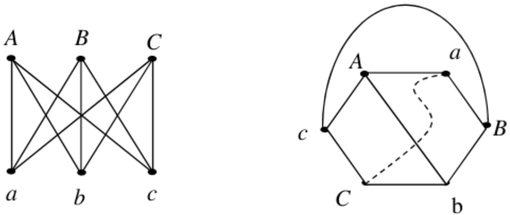
Đồ thị phẳng liên thông G gồm 10 đỉnh, trong đó có hai đỉnh bậc 4, bốn đỉnh bậc 3 và các đỉnh còn lại đều có bậc là 2. Hỏi, đồ thị G có bao nhiêu vùng?
Hướng dẫn: tổng bậc của các đỉnh trong G là 2 × 4 + 4 × 3 + 4 × 2 = 28. Theo Định lý bắt tay, số cạnh của G là $m = 28/2 = 14$ *và theo công thức Euler, số vùng của G là* $r = 6$.

Ví dụ 2.4

Bài toán "ba nhà ba giếng". Có ba nhà A, B, C và ba cái giếng a, b, c. Từ mỗi nhà có các con đường đi đến mỗi giếng. Do bất hoà, họ tìm cách làm các con đường đến các giếng sao cho chúng không cắt nhau. Họ không thể thực hiện được, vì sao? Lưu ý: không làm đường giữa các nhà hay giữa các giếng.



Hình 12: Minh họa cho trường hợp nhà đi đến 3 giếng



Hình 13: Mô hình hóa ví dụ 2.4 bằng đồ thị $K_{3,3}$

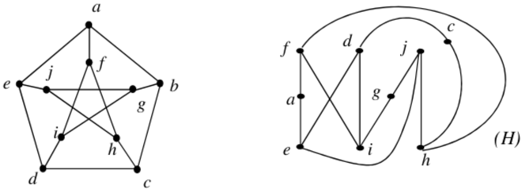
Giải ví dụ 2.4

$K_{3,3}$ chứa một chu trình chẵn gồm 6 đỉnh $AaBbCc$. Biểu diễn phẳng của chu trình này là hình lục giác 13. Nối Ab bên trong lục giác, Bc bên ngoài lục giác. Rõ ràng, dù vẽ thế nào cạnh Ca cũng sẽ cắt ít nhất một cạnh còn lại của $K_{3,3}$. Tổng quát, đồ thị đầy đủ $K(n \geq 5)$ và đồ thị đầy đủ hai phía $K_{n,m}, (m \geq n \geq 3)$ là những đồ thị không phẳng.

Định lý Kuratowski

Định lý 2.4 (Định lý Kuratowski, 1930)

Điều kiện cần và đủ của đồ thị không phẳng: một đồ thị là không phẳng nếu và chỉ nếu nó chứa đồ thị con đồng cấu với $K_{3,3}$ hoặc K_5 (G và G′ là đồng cấu nếu ta có thể thu được G′ từ G bằng cách bỏ bớt hoặc thêm vào G các đỉnh có bậc bằng 2).



Hình 14: Đồ thị Petersen và đồ thị con đồng cấu H của nó. Đồ thị con H nhận được bằng cách bỏ đi đỉnh b và các cạnh liên thuộc với b.

Tài liệu tham khảo

- Đ.N. An
  Giáo Trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐH Nha Trang, (2021).*
- Giáo trình Toán rời rạc
  Giáo trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐHSP Huế. (2003), 22-35.*
- N.T. Nhựt
  Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2011).*