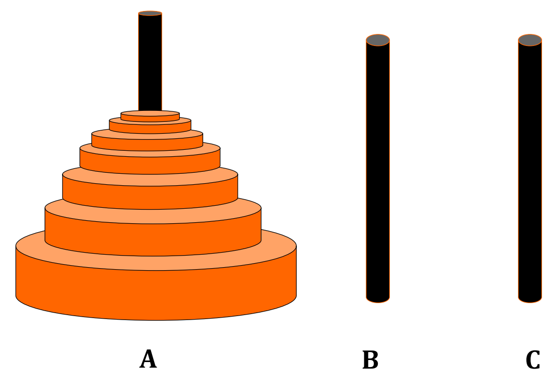
CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

HỆ THỨC ĐỆ QUY

128

Bài toán tháp Hà nội



129

Bài toán tháp Hà nội

Có 3 cọc A, B, C và n đĩa (có lỗ để đặt vào cọc) với đường kính đôi một khác nhau. Nguyên tắc đặt đĩa vào cọc là: mỗi đĩa chỉ được chồng lên đĩa lớn hơn nó. Ban đầu, cả n đĩa được đặt chồng lên nhau ở cọc A, hai cọc B và C để trống. Vấn đề đặt ra là chuyển cả n đĩa ở cọc A sang cọc C (có thể qua trung gian cọc B), mỗi lần chỉ chuyển một đĩa. Gọi x_n là số lần chuyển đĩa. Tìm x_n ?

130

Bài toán tháp Hà nội

Gọi x_n là số lần di chuyển đĩa trong trường hợp có n đĩa. Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 1; \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

$$\longrightarrow x_n = 2^n - 1$$

131

Hệ thức đệ quy

❖ **Dạng tổng quát của hệ thức đệ quy tuyến tính**

- Hệ thức **đệ qui tuyến tính cấp k**

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots a_kx_{n-k} = f(n) \qquad \textbf{(I)}$$

trong đó

a_i ($a_0 \neq 0$) là các hệ số thực;

x_i là các biến nhận các giá trị thực.

$f(n)$ là một hàm đa thức theo n

- Nếu f(n) = 0 thì (I) là hệ thức **đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp k**

132

Hệ thức đệ quy

Ví dụ:

$2x_n - x_{n-2} + 5x_{n-5} = n^2 + 3^n$ (HTĐQTT cấp 5)

$2x_n - x_{n-2} + 5x_{n-5} = 0$ (HTĐQTT thuần nhất cấp 5)

$x_n^2 - 2x_{n-1} = 5$ (không phải HTĐQTT)

133

Phương pháp giải hệ thức đệ quy

❖ **Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng**

Hệ thức đệ qui tuyến tính cấp k

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots a_kx_{n-k} = f(n) \qquad \textbf{(I)}$$

- Mỗi dãy $\{x_n\}$ thỏa (I) được gọi là một *nghiệm* của (I).
- Họ dãy số $\{x_n = x_n(C_1, C_2,\dots,C_k)\}$ phụ thuộc vào k họ tham số $C_1, C_2,\dots,C_k$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của (I) nếu mọi dãy của họ này đều là nghiệm của (I)

134

Phương pháp giải hệ thức đệ quy

- Với k giá trị ban đầu $y_0, y_1,\dots, y_{k-1}$, tồn tại duy nhất các giá trị của k tham số $C_1, C_2,\dots,C_k$ sao cho nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng thỏa

$$x_0 = y_0, x_1 = y_1,\dots, x_{k-1} = y_{k-1} \qquad (*)$$

Khi đó, nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng được gọi *nghiệm riêng* ứng với điều kiện ban đầu (*).

Giải một hệ thức đệ qui là đi *tìm nghiệm tổng quát* của nó; nhưng nếu hệ thức đệ qui có kèm theo điều kiện ban đầu, ta phải *tìm nghiệm riêng thỏa điều kiện ban đầu* đó.

135

Phương pháp giải hệ thức đệ quy

Ví dụ:

Xét dãy số *Fibonacci* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (với điều kiện ban đầu $a_0 = 0, a_1 = 1$)

✓ Nghiệm tổng quát: $a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

✓ Nghiệm riêng: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

136

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp k

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots a_kx_{n-k} = 0 \qquad \text{(II)}$$

❖ **Bước 1**

Xác định phương trình đặc trưng của (II)

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0 \qquad \text{(III)}$$

Các nghiệm λ_i gọi là các **nghiệm gốc** của (III)

137

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

❖ **Bước 2**

Giải phương trình đặc trưng (III) tìm các nghiệm gốc.

➢ **Trường hợp 1:** (III) có k nghiệm gốc phân biệt (khác nhau) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Khi đó (II) có nghiệm

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} C_i\lambda_i^n \qquad (C_i: \text{hằng số})$$

138

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

➢ **Trường hợp 2:** (III) có nghiệm bội λ (bậc k). Khi đó (II) có nghiệm

$$x_n = (C_1n^{k-1} + C_2n^{k-2} + \ldots + C_{k-1}n + C_k)\lambda^n$$

(C_i: hằng số)

139

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

- **Trường hợp 3:** (III) có một số nghiệm bội và một số nghiệm phân biệt. *Ví dụ*: (III) có một nghiệm bội 3 là λ_1 và các nghiệm phân biệt $\lambda_4 \neq \lambda_5 \neq \lambda_6 \neq \ldots \neq \lambda_k$. Khi đó (II) có nghiệm

  $x_n = (C_1 n^2 + C_2 n + C_3)\lambda_1^n + C_4\lambda_4^n + C_5\lambda_5^n + \ldots + C_k\lambda_k^n$

  (C_i: hằng số)

140

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

❖ **Bước 3**

Xác định các hằng số C_i dựa vào các điều kiện ban đầu

141

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

Ví dụ:

Xét dãy số *Fibonacci* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (với điều kiện ban đầu $a_0 = 0, a_1 = 1$)

- Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

  $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

- Phương trình đặc trưng

  $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

142

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

Ví dụ:

2 nghiệm gốc của phương trình đặc trưng $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

- Nghiệm tổng quát: $a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Xác định C_1, C_2 từ các giá trị a_0, a_1 ta được

  $C_1 = 1/\sqrt{5}, C_2 = -1/\sqrt{5}$

  Nghiệm riêng: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

143

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

$\mathbf{a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots a_kx_{n-k} = f(n)}$, $f(n) \neq 0$ (IV)

❖ **Bước 1**

Tìm nghiệm của hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất tương ứng

$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots a_kx_{n-k} = 0$ (II)

144

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

❖ **Bước 2**

Tìm một nghiệm riêng của (IV)

❖ **Bước 3**

Nghiệm tổng quát của (IV) = Nghiệm tổng quát của (II)
+ Nghiệm riêng của (IV)

145

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

❑ **Tìm một nghiệm riêng của (IV)**

Xét vế phải f(n) của (IV) có các dạng:

1. f (n) là hằng số

Nghiệm riêng là hằng số H cần xác định

146

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

2. f (n) là một đa thức bậc t của n

$$f(n) = F_1n^t + F_2n^{t-1} + \cdots + F_tn + F_{t+1}$$

với F_i là các hệ số của đa thức, khi đó nghiệm riêng sẽ có dạng:

$$H_1n^t + H_2n^{t-1} + \cdots + H_tn + H_{t+1}$$

H_i là các hằng số cần xác định

147

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

3. $f(n) = \beta^n P_t(n)$

với $P_t(n) = F_1 n^t + F_2 n^{t-1} + \cdots + F_t n + F_{t+1}$

β **không là nghiệm** của phương trình đặc trưng của (II), nghiệm riêng có dạng

$$(H_1 n^t + H_2 n^{t-1} + \cdots + H_t n + H_{t+1})\beta^n$$

H_i là các hằng số cần xác định

Nếu $P_t(n)$ là hằng số thì nghiệm riêng có dạng **$H\beta^n$**

148

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

4. $f(n) = \beta^n P_t(n)$

với $P_t(n) = F_1 n^t + F_2 n^{t-1} + \cdots + F_t n + F_{t+1}$

β **là nghiệm bội bậc m** của phương trình đặc trưng của (II), nghiệm riêng có dạng

$$n^m(H_1 n^t + H_2 n^{t-1} + \cdots + H_t n + H_{t+1})\beta^n$$

H_i là các hằng số cần xác định

149

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

5. $f(n) = \sum f_d(n)$

với mỗi f_d ta tìm nghiệm riêng x_{id} của hệ thức đệ quy: $a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots a_kx_{n-k} = f_d(n)$

Khi đó, một nghiệm riêng của (IV) sẽ là

$$x_n = \sum x_{id}$$

150

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Sau khi tìm được nghiệm riêng, thế nghiệm riêng vào (IV) để tìm các hằng số H.

151

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Ví dụ: $x_n + 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 1$

$f(n) = 1$ là hằng số $\rightarrow$ Trường hợp 1

Nghiệm riêng của hệ thức là hằng số **H**. Thế vào hệ thức ta được

$$H + 5H + 6H = 1 \Rightarrow H = 1/12$$

Vậy nghiệm riêng của hệ thức là $x_n = 1/12$

152

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Ví dụ: $x_n + 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 3n^2 - 2n + 1$

$f(n) = 3n^2 - 2n + 1 \rightarrow$ Trường hợp 2

Nghiệm riêng của hệ thức có dạng $\mathbf{H_1n^2 + H_2n + H_3}$

Thế vào hệ thức:

$$(H_1n^2 + H_2n + H_3) + 5(H_1(n-1)^2 + H_2(n-1) + H_3) + 6(H_1(n-2)^2 + H_2(n-2) + H_3) = 3n^2 - 2n + 1$$

Rút gọn

$$12H_1n^2 - (34H_1 - 12H_2)n + (29H_1 - 17H_2 + 12H_3) = 3n^2 - 2n + 1$$

153

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Rút gọn

$$12H_1n^2 - (34H_1 - 12H_2)n + (29H_1 - 17H_2 + 12H_3) = 3n^2 - 2n + 1$$

Đồng nhất hệ số 2 vế

$$\left.\begin{array}{l} 12H_1 = 3 \\ 34H_1 - 12H_2 = 2 \\ 29H_1 - 17H_2 + 12H_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H_1 = 1/4 \\ H_2 = 13/24 \\ H_3 = 71/288 \end{array}$$

154

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Ví dụ: $x_n + x_{n-1} = 2n3^n$

$f(n) = 2n3^n$, 3 không là nghiệm của phương trình đặc trưng $\rightarrow$ Trường hợp 3

Nghiệm riêng của hệ thức có dạng $\mathbf{(H_1n + H_2)3^n}$

Thế vào hệ thức:

$$(H_1n + H_2)3^n + (H_1(n-1) + H_2)3^{(n-1)} = 2n3^n$$

Rút gọn và giải ta được $H_1 = 3/2$, $H_2 = 3/8$

Nghiệm riêng của hệ thức: $x_n = \left(\frac{3}{2}n + \frac{3}{8}\right)3^n$

155