Chương II
ĐỆ QUI

1. DẪN NHẬP

- Cho S(n) = 1 + 2 + 3 + … + n

  ⇒ S(10)? S(11)?

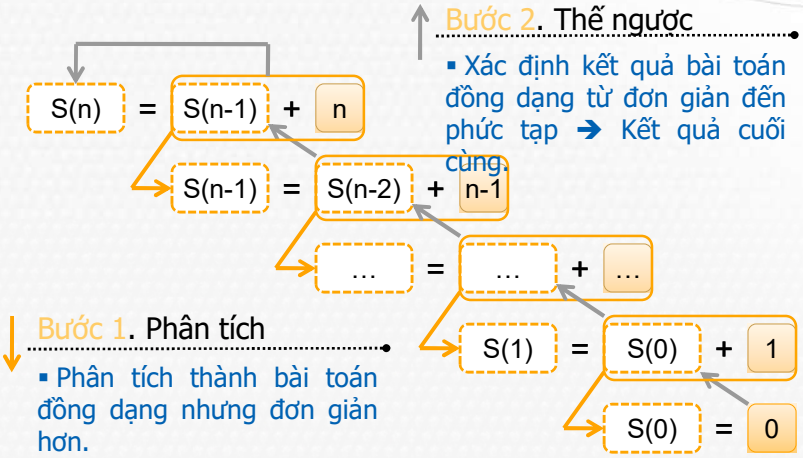
S(10) = 1 + 2 + … + 10 = 55

S(11) = 1 + 2 + … + 10 + 11 = 66

= S(10) + 11

= 55 + 11 = 66

1. DẪN NHẬP

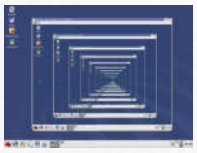


2. ĐỆ QUI

Khái niệm

Một khái niệm, định nghĩa được gọi là đệ qui nếu trong khái niệm/định nghĩa có chứa lại chính nó.

Ví dụ:



Người giàu:

Người có nhiều tiền

Người có cha mẹ là người giàu

2. ĐỆ QUI

- Ví dụ

$$n! = \begin{cases} 1, n = 0 \\ (n-1)!\, n, n > 0 \end{cases}$$

$$a^n = \begin{cases} 1, n = 0 \\ a^{n-1}.a, n > 0 \end{cases}$$

- Cần phân biệt đệ qui và các khái niệm lặp, điệp từ …

2. ĐỆ QUI

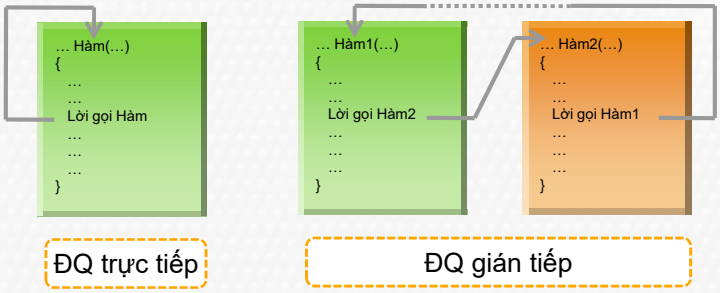
- Một khái niệm đệ qui gồm 2 thành phần:
  - Thành phần neo (dừng) (anchor)
  - Thành phần đệ qui

Phần đệ quy thể hiện tính "quy nạp"

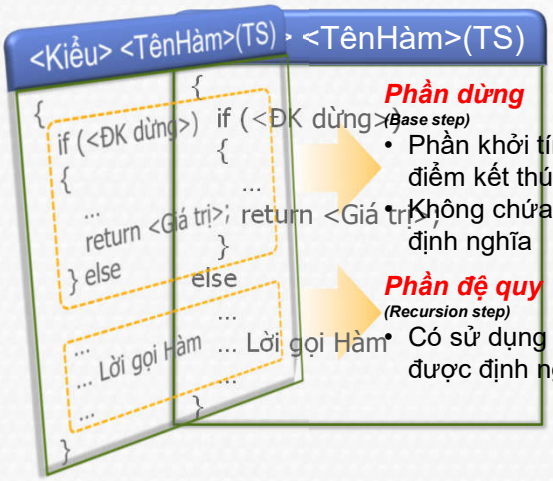
Phần neo đảm bảo cho tính dừng.

3. LẬP TRÌNH ĐỆ QUI

- Hàm đệ qui
  - Một hàm được gọi là đệ quy nếu bên trong thân của hàm đó có lời gọi hàm lại chính nó một cách trực tiếp hay gián tiếp.



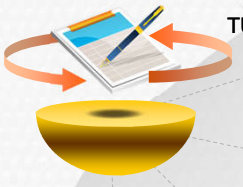
Cấu trúc hàm đệ quy



Phần dừng
(Base step)
- Phần khởi tính toán hoặc điểm kết thúc của thuật toán
- Không chứa phần đang được định nghĩa

Phần đệ quy
(Recursion step)
- Có sử dụng thuật toán đang được định nghĩa.

Phân loại



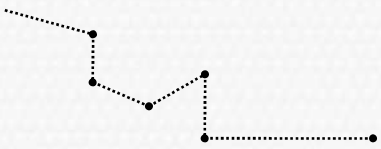
TUYẾN TÍNH 1 — Trong thân hàm có duy nhất một lời gọi hàm gọi lại chính nó một cách tường minh.

NHỊ PHÂN 2 — Trong thân hàm có hai lời gọi hàm gọi lại chính nó một cách tường minh.

HỖ TƯƠNG 3 — Trong thân hàm này có lời gọi hàm tới hàm kia và bên trong thân hàm kia có lời gọi hàm tới hàm này.

PHI TUYẾN 4 — Trong thân hàm có lời gọi hàm lại chính nó được đặt bên trong thân vòng lặp.

Đệ quy tuyến tính



Cấu trúc chương trình

```
<Kiểu> TênHàm (<TS>) {
  if (<ĐK dừng>) {
     …
     return <Giá Trị>;
  } else
  … TênHàm(<TS>); …
}
```

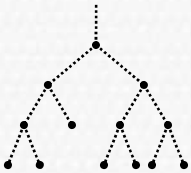
Ví dụ

Tính S(n) = 1 + 2 + … + n
➔ S(n) = S(n – 1) + n
ĐK dừng: S(0) = 0

.: Chương trình :.

```
long Tong (int n)
{
   if (n == 0)
      return 0; else
   return Tong(n–1) + n;
}
```

Đệ quy nhị phân



Cấu trúc chương trình

```
<Kiểu> TênHàm (<TS>) {
  if (<ĐK dừng>) {
     ...
     return <Giá Trị>;
  } else
  ... TênHàm(<TS>);
  ...
  ... TênHàm(<TS>);
  ...
                          }
```

Ví dụ

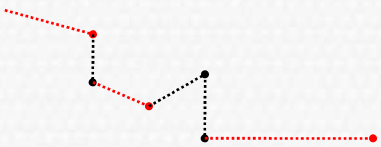
Tính số hạng thứ n của dãy Fibonacy:
f(0) = f(1) = 1
f(n) = f(n – 1)+f(n – 2), n>1
ĐK dừng: f(0)=1 và f(1)=1

.: Chương trình :.

```
long Fibo (int n)
{
   if (n == 0 || n == 1)
      return 1; else
 return Fibo(n–1)+Fibo(n–2);
}
```

Page - 45

Đệ quy hỗ tương



Cấu trúc chương trình

```
<Kiểu> TênHàm1(<TS>) {
  if (<ĐK dừng>)
     return <Giá trị>;
  ... TênHàm2(<TS>); ...
}
<Kiểu> TênHàm2(<TS>) {
  if (<ĐK dừng>)
     return <Giá trị>;
  ... TênHàm1(<TS>); ...
}
```

Ví dụ

Tính số hạng thứ n của dãy:
x(0) = 1, y(0) = 0
x(n) = x(n – 1) + y(n – 1)
y(n) = 3*x(n – 1) + 2*y(n – 1)
ĐK dừng: x(0) = 1, y(0) = 0

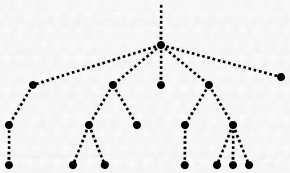
.: Chương trình :.

```
long xn (int n) {
   if (n == 0) return 1; else
   return xn (n-1)+yn (n-1);
}

long yn (int n) {
   if (n == 0) return 0; else
   return 3*xn (n-1)+2*yn (n-1);
}
```

Page - 46

Đệ quy phi tuyến



Cấu trúc chương trình

```
<Kiểu> TênHàm(<TS>) {
  if (<ĐK dừng>) {
    ...
    return <Giá Trị>;
  }
  ... Vòng lặp {
    ... TênHàm(<TS>); ...
  }
  ...
}
```

Ví dụ

Tính số hạng thứ n của dãy:

$x(0) = 1$

$x(n) = n^2x(0) + (n-1)^2x(1) + ... + 2^2x(n-2) + 1^2x(n-1)$

ĐK dừng: $x(0) = 1$

.: Chương trình :.

```
long xn(int n)
{
  if (n == 0) return 1; else {
  long s = 0;
  for (int i=1; i<=n; i++)
    s = s + i*i*xn(n–i);
  return s;}
}
```

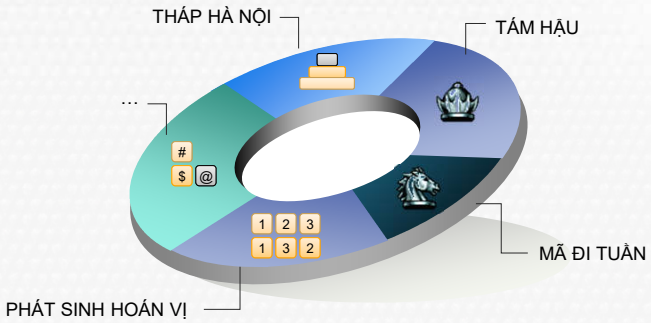

Các bước xây dựng hàm đệ quy

- Tổng quát hóa bài toán cụ thể thành bài toán tổng quát.
- Thông số hóa cho bài toán tổng quát
- VD: n trong hàm tính tổng S(n), …

- Chia bài toán tổng quát ra thành:
  - Phần không đệ quy.
  - Phần như bài toán trên nhưng kích thước nhỏ hơn.
- VD: S(n) = S(n – 1) + n, …

- Các trường hợp suy biến của bài toán.
- Kích thước bài toán trong trường hợp này là nhỏ nhất.
- VD: S(0) = 0

Một số bài toán kinh điển



Tháp Hà Nội

- Mô tả bài toán
  - Có 3 cột A, B và C và cột A hiện có N đĩa.
  - Tìm cách chuyển N đĩa từ cột A sang cột C sao cho:
    - Một lần chuyển 1 đĩa
    - Đĩa lớn hơn phải nằm dưới.
    - Có thể sử dụng các cột B làm cột trung gian.

Tháp Hà Nội

N đĩa A → C = ? đĩa A → B + Đĩa N A → C + N-1 đĩa B → C

Chuyển n đĩa từ a → c, b là cọc trung gian

```
void HaNoi(int n, char a, char c, char b)
{
    if (n == 1)
       printf("\n %c -> %c", a, c);
    else
    {
       HaNoi(n-1, a, b, c);
       printf("\n %c -> %c", a, c);
       HaNoi(n-1, b, c, a);
    }
}
int main()
{
    HaNoi(5, 'A', 'C', 'B');
}
```

Điều kiện dừng

Chuyển n-1 đĩa từ a → b

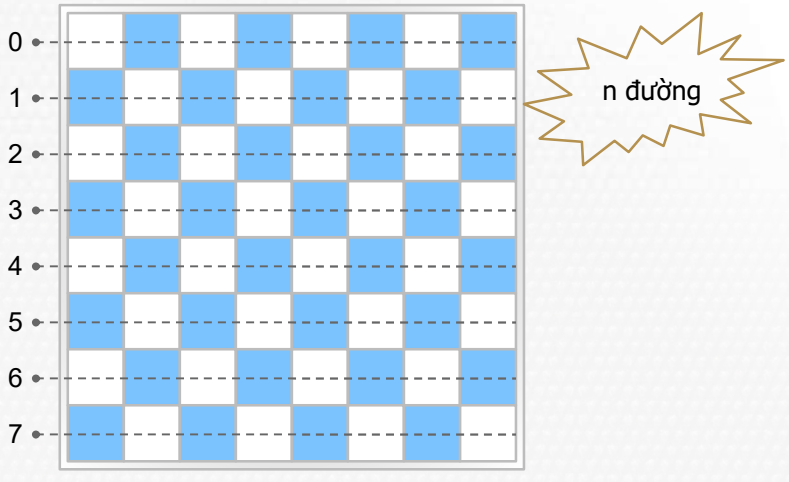
Chuyển đĩa lớn từ a → c

Chuyển n-1 đĩa từ b → c

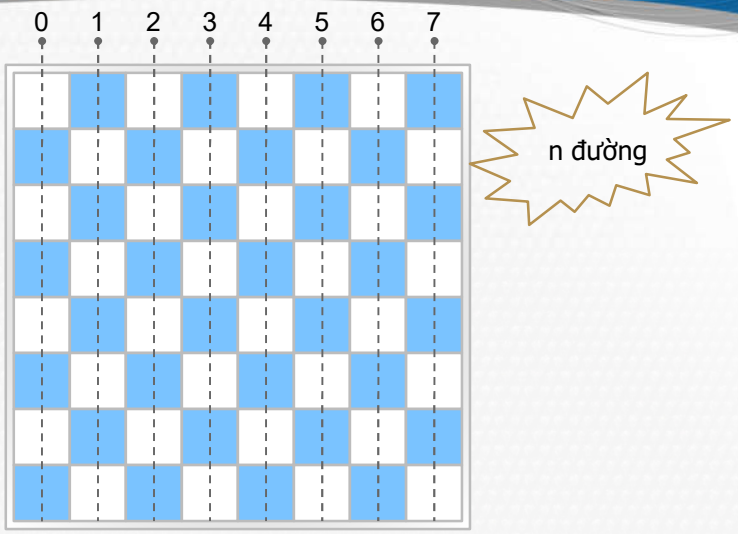
Tám hậu

- Mô tả bài toán
  - Cho bàn cờ vua kích thước 8x8
  - Hãy đặt 8 hoàng hậu lên bàn cờ này sao cho không có hoàng hậu nào "ăn" nhau:
    - Không nằm trên cùng dòng, cùng cột
    - Không nằm trên cùng đường chéo xuôi, ngược.

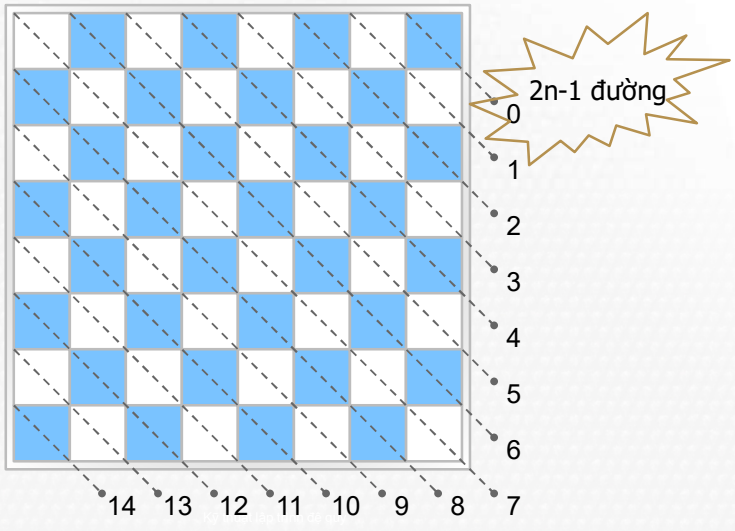
Tám hậu – Các dòng



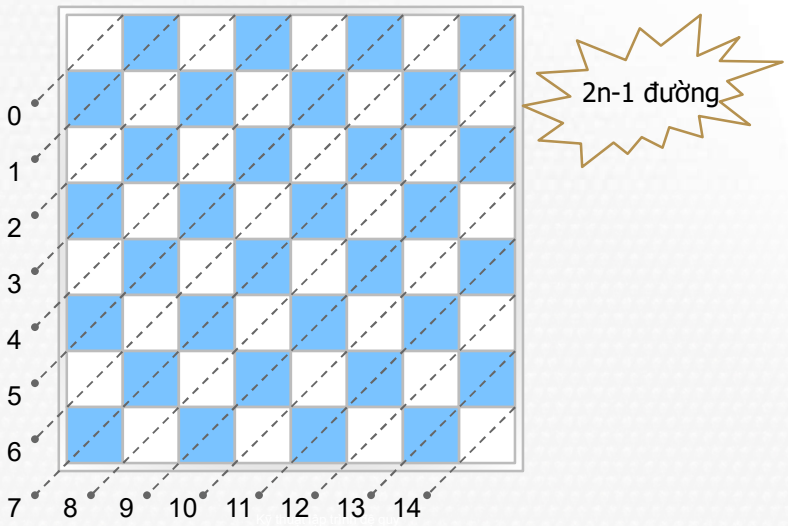
Tám hậu – Các cột



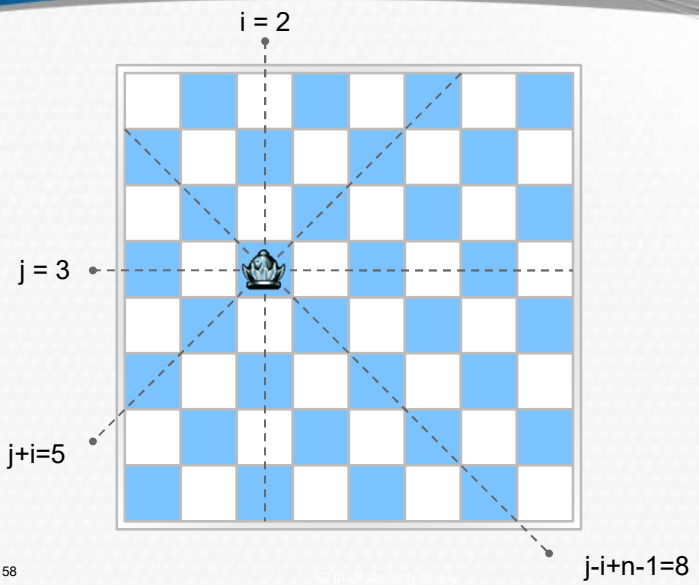
Tám hậu – Các đường chéo xuôi



Tám hậu – Các đường chéo ngược

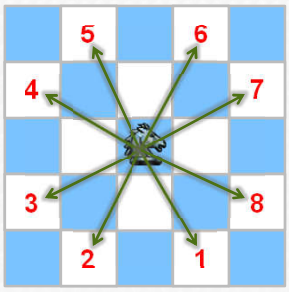


Tám hậu – Các dòng

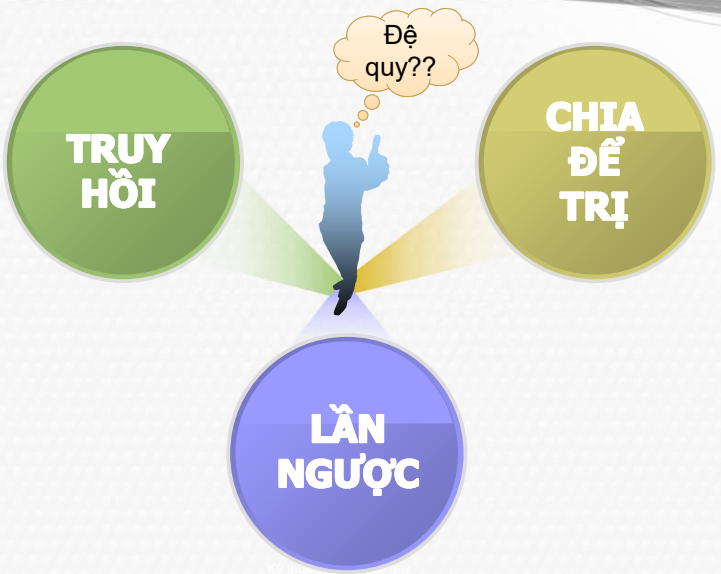


Mã đi tuần

- Mô tả bài toán
  - Cho bàn cờ vua kích thước 8x8 (64 ô)
  - Hãy đi con mã 64 nước sao cho mỗi ô chỉ đi qua 1 lần (xuất phát từ ô bất kỳ) theo luật:

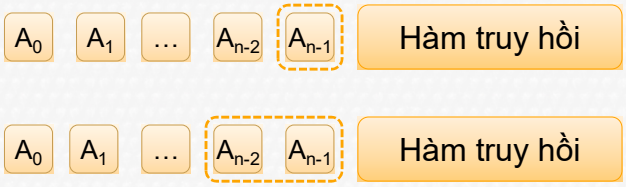


Các vấn đề đệ quy thông dụng



a. Hệ thức truy hồi

- Khái niệm
  - Hệ thức truy hồi của 1 dãy An là công thức biểu diễn phần tử An thông qua 1 hoặc nhiều số hạng trước của dãy.



a.Hệ thức truy hồi

- Ví dụ 1
  - Vi trùng cứ 1 giờ lại nhân đôi. Vậy sau 5 giờ sẽ có mấy con vi trùng nếu ban đầu có 2 con?
- Giải pháp
  - Gọi V_h là số vi trùng tại thời điểm h.
  - Ta có:
    - $V_h = 2V_{h-1}$
    - $V_0 = 2$

➔ Đệ quy tuyến tính với V(h)=2*V(h-1) và điều kiện dừng V(0) = 2

a.Hệ thức truy hồi

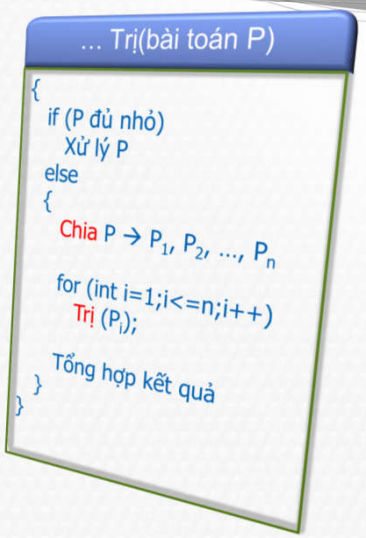
- Ví dụ 2
  - Gửi ngân hàng 1000 USD, lãi suất 12%/năm. Số tiền có được sau 30 năm là bao nhiêu?
- Giải pháp
  - Gọi T_n là số tiền có được sau n năm.
  - Ta có:
    - $T_n = T_{n-1} + 0.12T_{n-1} = 1.12T_{n-1}$
    - $T_0 = 1000$

➔ Đệ quy tuyến tính với T(n)=1.12*T(n-1) và điều kiện dừng T(0) = 1000

Page ▪ 63

b.Chia để trị (divide & conquer)

- Khái niệm
  - Chia bài toán thành nhiều bài toán con.
  - Giải quyết từng bài toán con.
  - Tổng hợp kết quả từng bài toán con để ra lời giải.



Page ▪ 64

b.Chia để trị (divide & conquer)

- Ví dụ
  - Cho dãy A đã sắp xếp thứ tự tăng. Tìm vị trí phần tử x trong dãy (nếu có)
- Giải pháp
  - mid = (l + r) / 2;
  - Nếu A[mid] = x ➔ trả về mid.
  - Ngược lại
    - Nếu x < A[mid] ➔ tìm trong đoạn [l, mid – 1]
    - Ngược lại ➔ tìm trong đoạn [mid + 1, r]

  ➔ Sử dụng đệ quy nhị phân.

2.Chia để trị (divide & conquer)

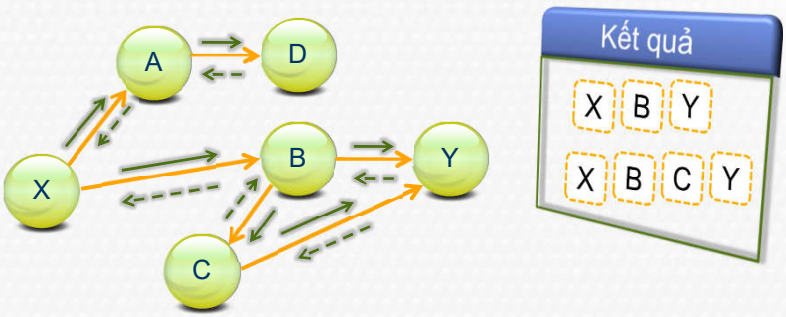
- Một số bài toán khác
  - Bài toán tháp Hà Nội
  - Các giải thuật sắp xếp: QuickSort, MergeSort
  - Các giải thuật tìm kiếm trên cây nhị phân tìm kiếm, cây nhị phân nhiều nhánh tìm kiếm.
- Lưu ý
  - Khi bài toán lớn được chia thành các bài toán nhỏ hơn mà những bài toán nhỏ hơn này không đơn giản nhiều so với bài toán gốc thì không nên dùng kỹ thuật chia để trị.

c.Lần ngược (Backtracking)

- Khái niệm
  - Tại bước có nhiều lựa chọn, ta chọn thử 1 bước để đi tiếp.
  - Nếu không thành công thì "lần ngược" chọn bước khác.
  - Nếu đã thành công thì ghi nhận lời giải này đồng thời "lần ngược" để truy tìm lời giải mới.
  - Thích hợp giải các bài toán kinh điển như bài toán 8 hậu và bài toán mã đi tuần.

c.Lần ngược (Back tracking)

- Ví dụ
  - Tìm đường đi từ X đến Y.



Thuật toán Thử sai-Quay lui

```
  void try(int i)
{ Duyệt < không gian trạng thái ứng viên ở bước i>
      { ghi nhận trạng thái chấp nhận được;
      if   (i<n)  try(i+1);
      else
         Kiểm tra nghiệm – xuất kết quả;
        xóa trạng thái đã ghi nhận;
}
```


Nhận xét

- Ưu điểm
  - Sáng sủa, dễ hiểu, nêu rõ bản chất vấn đề.
  - Tiết kiệm thời gian thực hiện mã nguồn.
  - Một số bài toán rất khó giải nếu không dùng đệ qui.
- Khuyết điểm
  - Tốn nhiều bộ nhớ, thời gian thực thi lâu.
  - Một số tính toán có thể bị lặp lại nhiều lần.
  - Một số bài toán không có lời giải đệ quy.

BÀI TẬP

LẬP CHƯƠNG TRÌNH CHO CÁC BÀI TẬP SAU

- Bài 1: Các bài tập trên mảng sử dụng đệ quy.
- Bài 2: Viết hàm đệ quy xác định chiều dài chuỗi.
- Bài 3: Hiển thị n dòng của tam giác Pascal.
  - a[i][0] = a[i][i] = 1
  - a[i][k] = a[i-1][k-1] + a[i-1][k]

  Dòng 0: 1

  Dòng 1: 1 1

  Dòng 2: 1 2 1

  Dòng 3: 1 3 3 1

  Dòng 4: 1 4 6 4 1

LẬP CHƯƠNG TRÌNH CHO CÁC BÀI TẬP SAU

- Bài 4: Viết hàm đệ quy tính C(n, k) biết
  - C(n, k) = 1 nếu k = 0 hoặc k = n
  - C(n, k) = 0 nếu k > n
  - C(n ,k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1) nếu 0<k<n
- Bài 5: Đổi 1 số thập phân sang cơ số khác.
- Bài 6: Tính các tổng truy hồi.
- Bài 7: Bài toán In ra hoán vị n số tự nhiên đầu tiên".
- Bài 8: Bài toán "8 hậu".
- Bài 9: Bài toán "Mã đi tuần".