Chứng minh:

Kết quả trực tiếp từ định lý 4.

Ví dụ 14:

a) Tập hợp số thực $\mathbb{R}$ với quan hệ $\leq$ thì $(\mathbb{R},\leq)$ là một dàn liên thông. Còn $x \wedge y = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}, x \vee y = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ chính là hai phép toán của dàn.

b) Cho E là một tập hợp có nhiều hơn một phần tử, dàn $(\wp(E),\cap,\cup)$ không phải là dàn liên thông. Vì lấy 2 phần tử bất kỳ khác nhau $a,b \in E, A=\{a\}, B=\{b\}$ thì $\{A,B\}$ không là dàn con.

$(A,\wedge,\vee)$ là một dàn, dàn con liên thông B của A được gọi là cực đại nếu B không thực sự chứa trong một dàn con liên thông khác của A.

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Cho tập hợp $E=\{a,b,c,d,e\}$ và quan hệ hai ngôi R xác định trên E xác định như sau:

$$R=\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,a),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d)\}$$

R có tính phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu?

2. a. Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp E. Chứng minh R vừa có tính chất đối xứng, vừa có tính chất phản đối xứng khi và chỉ khi: $\forall x,y \in E: xRy \Rightarrow x=y$

b. Một quan hệ hai ngôi R trên tập hợp A có thể vừa là quan hệ thứ tự, vừa là quan hệ tương đương ?

3. Một quan hệ hai ngôi R xác định trên tập hợp A được gọi là quan hệ vòng quanh nếu:

$$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow zRx$$

a) Một quan hệ tương đương có phải là một quan hệ vòng quanh?

b) Một quan hệ hai ngôi có tính phản xạ và vòng quanh có phải là một quan hệ tương đương?

4. Cho E là tập hợp các điểm trên mặt phẳng và O là một điểm cố định trong mặt phẳng ấy. Xem quan hệ R trên E xác định bởi:

$$MRM' \Leftrightarrow OM = OM'$$

a) Chứng minh R là một quan hệ tương đương.

b) Tìm lớp tương đương và tập thương.

5. Xét một quan hệ hai ngôi R trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$ xác định bởi

$$xRy \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x-y=6k)$$

a) Chứng minh R là một quan hệ tương đương.

b) Tìm lớp tương đương và tập hợp thương.

c) Tổng quát hóa cho quan hệ R

$$xRy \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x - y = nk, n \in \mathbb{N}^+)$$

6. Trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$ xét quan hệ hai ngôi R:

$$xRy \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y$$

Chứng minh R là một quan hệ tương đương. Tùy theo giá trị $a \in \mathbb{R}$, tìm số lượng phần tử của lớp tương đương của a.

7. Xét tập hợp số thực $\mathbb{R}$, và $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a) Nếu $M = (x, y)$ là một điểm của mặt phẳng qui về hai trục vuông góc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, thì tập hợp các điểm M là tập hợp nào?

b) Trong $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ chứng minh quan hệ hai ngôi R thỏa:

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow xy' = x'y$$

Là một quan hệ tương đương. Tìm lớp tương đương.

c) Nếu thay $\mathbb{R}^*$ bằng $\mathbb{R}$ thì quan hệ R định nghĩa như ở b) còn là quan hệ tương đương không?

8. Cho E là tập hợp các điểm của không gian, (P) là mặt phẳng của không gian ấy. Kiểm tra các quan hệ hai ngôi R định nghĩa trên E có các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu? Quan hệ nào là quan hệ tương đương, tìm tập thương? Quan hệ nào là quan hệ thứ tự?

(trong phần trình bày sau, ký hiệu $\left[A, B\right]$ là tập hợp các điểm thuộc đoạn AB kể cả A và B

a) $ARB \Leftrightarrow \left[([AB] \cap (P) = \varnothing) \vee ([AB] \subset (P)\right]$

b) $ARB \Leftrightarrow \left[AB\right] \cap (P) \neq \varnothing$

c) Cho $k \in \mathbb{R}$, $ARB \Leftrightarrow \left[\exists M \in (P), \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}\right]$. Biện luận theo trị số của k.

d) $ARB \Leftrightarrow$ có một đường thẳng vuông góc với (P) chứa A, B.

e) $ARB \Leftrightarrow$ Hình cầu đường kính AB tiếp xúc với (P)

f) Cho 3 điểm U, V, W là ba điểm không thẳng hàng

$ARB \Leftrightarrow$ có một hình cầu qua A, B, U, V, W.

9. Cho $X, Y \subset E$, ký hiệu $X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Với $A \subset E$, xét quan hệ hai ngôi R trên $\wp(E)$ như sau:

$$XRY \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$

a) Chứng minh R là một quan hệ tương đương.

b) Tìm tập thương

c) Chứng minh $XRY \Leftrightarrow (X \oplus Y) \cap A = \varnothing$

d) Tìm R khi $A = \varnothing$ và khi $A = E$

10. Xét quan hệ R trên tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ như sau

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : aRb \Leftrightarrow a^3 \le b^3$$

a) Chứng minh R sắp thứ tự toàn phần tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

b) Quan hệ S trên tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ xác định như sau có phải là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$?

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : aSb \Leftrightarrow a^2 \le b^2$$

11. Xét tập hợp số thực $\mathbb{R}$ với quan hệ thứ tự $\le$ thông thường, và tập hợp $X = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N}^*, 0 < m < n\}$. Chứng minh rằng X không có phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất. Tìm cận trên và cận dưới của X.

12. Trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ xét quan hệ chia hết như sau :

$\forall a,b \in \mathbb{N}^*$ aRb $\Leftrightarrow$ a là ước số của b (ký hiệu a|b)

a) Chứng minh rằng : quan hệ chia hết là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$

b) Tìm các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, tối đại, tối tiểu của tập A với quan hệ R

$$A = \{2,3,4,5,6,10,12,15,30,60\}$$

c) Vẽ biểu đồ Hasse minh hoa tập được sắp thứ tự A.

13. Cho tập $X=\{1,2,3\}$. Kí hiệu $\wp(X)$ là tập hợp tất các tập con của X.

a) Chứng minh rằng quan hệ bao hàm là một quan hệ thứ tự trên $\wp(X)$

b) Tìm các phần tử nhỏ nhất, lớn nhất, tối đại, tối tiểu của $\wp(X)$, $\wp(X)\setminus X, \wp(X)\setminus\{\varnothing\}$

14. Cho P và S là hai quan hệ thứ tự toàn phần trên tập hợp E. Xét quan hệ R xác định như sau:

$$xRy \Leftrightarrow (xPy \wedge xSy) \qquad (1)$$

Đặt $\overline{R}$ là quan hệ "không R" nghĩa là:

$$x\overline{R}y \Leftrightarrow \text{ không } (xRy)$$

a) $\overline{R}$ có phải là quan hệ thứ tự không?

b) Biểu diễn $\overline{R}$ qua $\overline{P}$ và $\overline{S}$ của P và S.

c) Chứng minh:

$$x\overline{P}y \Leftrightarrow (yPx \wedge x \ne y)$$

$$y\overline{S}x \Leftrightarrow (xSy \wedge x \ne y)$$

$$xSy \Leftrightarrow [xRy \vee (yPx \wedge y\overline{R}x)]$$

15. Cho E là một tập được sắp bởi quan hệ R. Ta nói tập con $F \subset E$ là một tập con tự do của E nếu $\forall a,b \in F \Rightarrow (a,b) \notin R$ và $(b,a) \notin R$. Gọi S là tập hợp tất cả tập con tự do của E. Trên S ta định nghĩa quan hệ $\le$ như sau:

$$\forall X,Y \in S,\; X \le Y \Leftrightarrow \forall x \in X, \exists y \in Y, (x,y) \in R$$

a) Chứng minh rằng quan hệ $\le$ là một quan hệ thứ tự trên S.

b) $\forall X,Y \in S$ nếu $X \subset Y \Rightarrow X \le Y$.

c) Tập hợp S được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ $\leq$ khi và chỉ khi E được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ R.

16. Một tập được sắp thứ tự L được gọi là một dàn đầy đủ nếu mọi tập con khác rỗng của L đều tồn tại cận trên, cận dưới. Chứng minh rằng:

a) Một dàn đầy đủ L đều có phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất.

b) Tập hợp các tập con của X là $\wp(X)$ với quan hệ bao hàm ($\subset$) là một dàn đầy đủ.

c) Tập hợp $\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương với quan hệ chia hết là một dàn đầy đủ?

17. Cho X là tập hợp tùy ý, S là tập hợp tất cả các quan hệ tương đương trên X. Chứng minh S với quan hệ thứ tự là quan hệ bao hàm là một dàn đầy đủ.

18. Chứng minh rằng một tập được sắp thứ tự L là một dàn đầy đủ khi và chỉ khi tỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

a) Tập hợp L chứa phần tử lớn nhất và mọi tập con khác rỗng của L đều có cận dưới.

b) Tập hợp L chứa phần tử nhỏ nhất và mọi tập con khác rỗng của L đều có cận trên.