CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

1

CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

Nguyễn Đình Hoàng Sơn

BM Hệ thống thông tin – Khoa Công nghệ thông tin

Trường Đại học Nha Trang

Email: sonndh@ntu.edu.vn - DĐ: 083 8705124

0

2

Nội dung

- Logic mệnh đề
- Tập hợp & Ánh xạ
- Quan hệ
- Quan hệ đệ quy
- Không gian Metric

1

3

CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

LOGIC MỆNH ĐỀ

4

Mệnh đề

❖ **Định nghĩa:** *diễn đạt có giá trị chân lý (chân trị) xác định (đúng hoặc sai)*

Ví dụ:

- Mặt trời quay quanh trái đất.
- 1+1 = 2.
- Hôm nay trời đẹp quá! (không là mệnh đề)
- Học bài đi! (không là mệnh đề)
- 3 là số chẵn phải không? (không là mệnh đề)

5

Mệnh đề

❖ **Ký hiệu:** Các chữ cái sẽ được dùng để ký hiệu các mệnh đề: P, Q, R….

❖ **Chân trị của mệnh đề:**

Một mệnh đề chỉ có chân trị đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai.

- Chân trị đúng: 1 (hoặc T, hoặc Đ)
- Chân trị sai: 0 (hoặc F, hoặc S)

☞ *Chú ý: Mệnh đề không quan tâm đến ý nghĩa hoặc cấu trúc ngữ pháp.*

6

Các phép toán mệnh đề

❖ **Phép phủ định (Negation):** phủ định của mệnh đề **P** được ký hiệu là **¬P** hay $\overline{P}$ (đọc là "không" P hay "phủ" P).

P	¬P
0	1
1	0

Ví dụ:

- P : 2 là số nguyên tố
  ¬P : 2 **không** là số nguyên tố
- Q : 1 > 2
  ¬Q : 1 ≤ 2

7

Các phép toán mệnh đề

❖ **Phép hội (Conjunction):** Hội của hai mệnh đề P và Q kí hiệu bởi **P ∧ Q** hay **P.Q** (đọc là "P hội Q" hay "P và Q"), là mệnh đề được định bởi : P ∧ Q đúng khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng.

P	Q	P∧Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

8

Các phép toán mệnh đề

Phép hội (Conjunction)

Ví dụ:

- P : 2 là số nguyên tố (T)
  Q : 1 > 2 (F)
  P ∧ Q : 2 là số nguyên tố **và** 1 > 2 (F)

- R : Tổng các góc trong một tam giác bằng 180º (T)
  S : Trong tam giác vuông có một góc 90º (T)
  R ∧ S : Tổng các góc trong một tam giác bằng 180º **và** trong tam giác vuông có một góc 90º (T)

9

Các phép toán mệnh đề

Phép tuyển (Disjunction): Tuyển của hai mệnh đề P và Q kí hiệu bởi **P ∨ Q** hay **P + Q** (đọc là "P tuyển Q" hay "P hay Q"), là mệnh đề được định bởi : P ∨ Q sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời sai.

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

10

Các phép toán mệnh đề

Phép tuyển (Disjunction):

Ví dụ:

- P : 2 là số nguyên tố (T)
  Q : 1 > 2 (F)
  P ∨ Q : 2 là số nguyên tố **hoặc** 1 > 2 (T)

- R : Tổng các góc trong một tam giác bằng 360º (F)
  S : Trong tam giác vuông có một góc 180º (F)
  R ∨ S : Tổng các góc trong một tam giác bằng 360º **hoặc** trong tam giác vuông có một góc 180º (F)

11

Các phép toán mệnh đề

Phép tuyển loại trừ (eXclusive Disjunction – XOR): Tuyển loại trừ của hai mệnh đề P và Q kí hiệu bởi **P ⊕ Q** (đọc là "P tuyển loại trừ Q" hay "P hoặc Q (nhưng không cả hai)"), là mệnh đề được định bởi : P ⊕ Q sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng hoặc đồng thời sai.

P	Q	P⊕Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

12

Các phép toán mệnh đề

❖ **Phép kéo theo (Implication):** Mệnh đề P kéo theo Q của hai mệnh đề P và Q, ký hiệu bởi **P ⇒ Q** (đọc là "P kéo theo Q" hay "Nếu P thì Q" hay "P là điều kiện đủ của Q" hay "Q là điều kiện cần của P") là mệnh đề được định bởi: P ⇒ Q sai khi và chỉ khi P đúng mà Q sai.

P	Q	P⇒Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

13

Các phép toán mệnh đề

❖ **Phép kéo theo (Implication)**

Ví dụ:

- P : 2 là số nguyên tố (T)
  Q : 1 > 2 (F)
  P ⇒ Q : Nếu 2 là số nguyên tố **thì** 1 > 2 (F)

- R : Tổng các góc trong một tam giác bằng 360° (F)
  S : Trong tam giác vuông có một góc 90° (T)
  R ⇒ S : Nếu tổng các góc trong một tam giác bằng 360° **thì** trong tam giác vuông có một góc 90° (T)

14

Các phép toán mệnh đề

❖ **Phép kéo theo (Implication)**

☞ *Chú ý*:

- Cho mệnh đề P ⇒ Q
  - ✓ Mệnh đề Q ⇒ P được gọi là mệnh đề đảo (*converse*)
  - ✓ Mệnh đề ¬Q ⇒ ¬P được gọi là mệnh đề phản đảo (*contrapositive*)
- Trong các ngôn ngữ lập trình cấp cao như Pascal, C, Java.. đều có câu lệnh:

if p (**then**) S: nếu p thì S

cấu trúc này khác hẳn cấu trúc một mệnh đề toán học. Trong câu lệnh trên p là một mệnh đề, S là một câu lệnh.

15

Các phép toán mệnh đề

❖ **Phép kéo theo (Implication)**

☞ *Chú ý*:

- Khái niệm toán học về phép kéo theo độc lập với mối quan hệ nhân-quả, giữa giả thiết và kết luận.

Bao giờ bánh đúc có xương,

Bấy giờ dì ghẻ mới thương con chồng

16

Các phép toán mệnh đề

- **Phép tương đương (Biconditional):** Mệnh đề P kéo theo Q và ngược lại của hai mệnh đề P và Q, ký hiệu bởi **P ⇔ Q** (đọc là "P nếu và chỉ nếu Q" hay "P khi và chỉ khi Q" hay "P là điều kiện cần và đủ của Q" hay "P tương đương với Q"), là mệnh đề xác định bởi: P ⇔ Q đúng khi và chỉ khi P và Q có cùng chân trị

P	Q	P⇔Q
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

17

Các phép toán mệnh đề

- **Phép tương đương (Biconditional)**

Ví dụ:

- 2=4 khi và chỉ khi 2+1=0 (T)
- 6 chia hết cho 3 khi và chỉ khi 6 chia hết cho 2 (T)
- London là thành phố nước Anh nếu và chỉ nếu thành phố HCM là thủ đô của VN (F)
- π>4 là điều kiện cần và đủ của 5>6 (T)

18

Công thức

- **Định nghĩa:** Mệnh đề được tạo ra bằng cách kết hợp (hữu hạn) các mệnh đề đã có bằng các phép toán được gọi là mệnh đề phức hợp, còn được gọi là công thức.
  - Mỗi mệnh đề gọi là một công thức.
  - Nếu P, Q là những công thức thì ¬P, P ∧ Q, P ∨ Q, P ⊕ Q, P ⇒ Q, P ⇔ Q cũng đều là công thức.

19

Công thức

- **Các khái niệm**
  - ✓ ***Hằng đúng*** *(Tautology)*: Mệnh đề có chân trị luôn đúng.
  - ✓ ***Hằng sai*** *(Contradiction)*: Mệnh đề có chân trị luôn sai.
  - ✓ ***Tiếp liên*** *(Contingency)*: Một mệnh đề không phải là hằng đúng và không phải là hằng sai

Ví dụ:

- P ∨ ¬P là hằng đúng
- P ∧ ¬P là hằng sai
- (P ∧ Q) ∨ ¬Q là một tiếp liên

20

Công thức

❖ **Công thức tương đương:** Hai công thức A, B được gọi là tương đương, ký hiệu $\mathbf{A \equiv B}$ nếu A, B luôn có cùng chân trị hay $A \Leftrightarrow B$ có chân trị là hằng đúng.

21

Các phép tương đương cơ bản

1. **Luật đồng nhất:** $p \wedge 1 \equiv p$
   $p \vee 0 \equiv p$
2. **Luật nuốt:** $p \wedge 0 \equiv 0$
   $p \vee 1 \equiv 1$
3. **Luật lũy đẳng:** $p \wedge p \equiv p$
   $p \vee p \equiv p$
4. **Luật phủ định kép:** $\neg\neg p \equiv p$

22

Các phép tương đương cơ bản

5. **Luật giao hoán:** $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   $p \vee q \equiv q \vee p$
6. **Luật kết hợp:** $(p \wedge q) \wedge t \equiv p \wedge (q \wedge t)$
   $(p \vee q) \vee t \equiv p \vee (q \vee t)$
7. **Luật phân phối:** $p \wedge (q \vee t) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge t)$
   $p \vee (q \wedge t) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee t)$

23

Các phép tương đương cơ bản

8. **Luật De Morgan:** $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
   $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
9. **Luật kéo theo:** $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

24

Suy luận toán học

Suy luận toán học là rút ra một mệnh đề mới từ 1 hay nhiều mệnh đề đã có.

- **Định nghĩa:** $A_1, A_2 \ldots A_n$, ***B*** là công thức

Nếu $A_1, A_2 \ldots A_n$ đúng, và

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ là hằng đúng

thì ***B*** là hệ quả logic của $A_1, A_2 \ldots A_n$

hay có một qui tắc suy luận từ các tiền đề $A_1, A_2 \ldots A_n$ tới hệ quả logic B. Ký hiệu $\dfrac{A_1, A_2 \ldots A_n}{B}$

25

Suy luận toán học

- **Quy tắc suy luận:**

1. *Quy tắc cộng:* $\dfrac{p}{p \vee q}$
2. *Quy tắc rút gọn:* $\dfrac{p \wedge q}{p}$
3. *Quy tắc kết luận:* $\dfrac{p,\ p \Rightarrow q}{p}$
4. *Quy tắc kết luận ngược:* $\dfrac{p \Rightarrow q,\ \neg q}{\neg p}$

26

Suy luận toán học

5. *Quy tắc tam đoạn luận:* $\dfrac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$
6. *Quy tắc tương đương:* $\dfrac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q}$
7. *Quy tắc tách tuyển:* $\dfrac{p \vee q,\ \neg p}{q}$
8. *Quy tắc tách tuyển giả thiết:* $\dfrac{p \Rightarrow r,\ q \Rightarrow r}{(p \vee q) \Rightarrow r}$

27

Suy luận toán học

9. *Quy tắc hội kết luận:* $\dfrac{p \Rightarrow q,\ p \Rightarrow r}{p \Rightarrow (q \wedge r)}$
10. *Quy tắc phản đảo:* $\dfrac{\neg q \Rightarrow \neg p}{p \Rightarrow q}$
11. *Quy tắc phản chứng:* $\dfrac{\neg p \Rightarrow q,\ \neg p \Rightarrow \neg q}{p}$

28

Suy luận toán học

Ví dụ:

a. *Nếu hôm nay trời mưa thì cô ta không đến,*

Nếu cô ta không đến thì ngày mai cô ta đến.

Vậy thì, nếu hôm nay trời mưa thì ngày mai cô ta đến.

b. *Nếu hôm nay là ngày mồng một tết, thì trường đại học nghỉ học.*

Hôm nay trường đại học không nghỉ học.

Do đó, hôm nay không phải là mồng một tết

c. *Alice giỏi Toán.* Vậy Alice giỏi Toán hoặc Tin

29

Các phương pháp chứng minh

30

Các phương pháp chứng minh

❖ **Hàm mệnh đề**

Cho A_1, $A_2 \ldots A_n$ là các tập hợp không rỗng, ứng với mỗi $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$ có một mệnh đề $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một *hàm mệnh đề* theo n biến x.

Ví dụ: Cho hàm mệnh đề

$P(x,y,z) = \{ 2x + y - z = 0 \}$; $x,y,z \in Z$

$P(1,-1,1)$ là mệnh đề đúng

$P(1,1,1)$ là mệnh đề sai

31

Các phương pháp chứng minh

❖ **Phương pháp chứng minh trực tiếp**

Chứng minh mệnh đề B bằng cách suy luận logic từ giả thiết A_1, $A_2 \ldots A_n$

$$\frac{A_1, A_2 \ldots A_n}{B}$$

Ví dụ: Cho hàm mệnh đề

$P(n)$ = Nếu n là một số lẻ thì n^2 là một số lẻ

32

Các phương pháp chứng minh

Phương pháp chứng minh tìm phản ví dụ

Phương pháp này sử dụng qui tắc kết luận ngược.

Ví dụ: Cho m,n là hai số không âm. Chứng minh rằng $m + n < m.n$ là không đúng.

33

Các phương pháp chứng minh

Phương pháp chứng minh phản đảo

Phương pháp này sử dụng qui tắc phản đảo

Ví dụ: Chứng minh nếu a là một số hữu tỉ khác 0, b là một số vô tỉ thì a.b là một số vô tỉ.

34

Các phương pháp chứng minh

Phương pháp chứng minh phản chứng

Phương pháp này sử dụng qui tắc phản chứng

Ví dụ: Chứng minh $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

35

Các phương pháp chứng minh

Phương pháp vét cạn

Để chứng minh một hàm mệnh đề đúng, có thể chứng minh hàm mệnh đề đúng với tất cả các trường hợp có thể xảy ra

Ví dụ: Chứng minh tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 3

36

Các phương pháp chứng minh

❖ **Phương pháp chứng minh qui nạp**

Xét hàm mệnh đề P(n). Xét U = {n∈N | P(n)}. Nếu P(0) đúng ⇒ 0 ∈ U. Giả sử P(k) đúng ⇒ P (k+1) đúng, nghĩa là k ∈ U ⇒ (k+1) ∈ U, ∀k ∈ N. Khi đó có thể khẳng định U = N

Ví dụ: Chứng minh 1+2+3+…+n = n(n+1)/2, ∀n ∈ N.

37

Vị từ

Cho A_1, $A_2 \ldots A_n$ là n tập hợp khác rỗng, một hàm mệnh đề $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ xác định trên $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ là một vị từ (logic) n biến xác định trên $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

Các biến của vị từ có thể là: *hằng, biến*

Ví dụ:

Nam(x) ≅ x là một người có giới tính là nam

Contrai (x,y) ≅ x là con trai của y

Behon(x,8) ≅ x <8

38

Vị từ

❖ **Câu cấp 1**

Câu cấp một là một cấu trúc bao gồm các vị từ logic cấp 1 liên kết với nhau bởi:

- *Các phép toán logic:* $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- *Hàm*
- *Lượng từ*

39

Vị từ

❖ **Hàm:** là một phép biến đổi các đối tượng thành một đối tượng

Ví dụ:

a) x+y

b) Median(x,y,z)

40

Vị từ

❖ **Lượng từ:** là một phát biểu chỉ ra một số tính chất là đúng đối với một số (lượng) đối tượng được chọn.

Có 2 lượng từ:

- Với mọi: ký hiệu $\forall$
  - ✓ Cú pháp: $\forall$ <biến><câu>
  - ✓ Ý nghĩa: $\forall x$, P: có chân trị là đúng với mọi biến x thuộc miền xác định (của x)

41

Vị từ

- Tồn tại: ký hiệu $\exists$
  - ✓ Cú pháp: $\exists$ <biến><câu>
  - ✓ Ý nghĩa: $\exists x$, P: có chân trị là đúng với ít nhất một giá trị của x thuộc miền xác định của x.

Ví dụ:

a) $\forall x$, Sinhvien(x,CNTT) $\Rightarrow$ thongminh(x)

(Mọi sinh viên Công nghệ thông tin thì thông minh)

b) $\forall x, y$, Cháu (x,y) $\Leftrightarrow$ $\exists z$(Anhem(z,y) $\wedge$ Con(x,z))

(Cháu là con của anh em)

42

Mệnh đề

1. Với P(x) là một vị từ xác định trên A

$$\overline{\forall x \in A, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{P(x)}$$

2. Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa từ vị từ $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ có được bằng cách thay $\forall$ bằng $\exists$ và ngược lại, và thay vị từ $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ bằng $\overline{P(x_1, x_2, ..., x_n)}$

43

Mệnh đề

3. Trong một câu lượng từ hóa theo nhiều biến độc lập, nếu ta hoán đổi hai lượng từ đứng cạnh nhau thì:
   - Câu mới tương đương (có cùng chân trị) với câu cũ nếu hai lượng từ cùng loại.
   - Câu mới là hệ quả logic của câu cũ nếu hai lượng từ trước khi hoán vị có dạng $\exists\ \forall$

44

Mệnh đề

Ví dụ:

a) Định nghĩa một hàm f liên tục tại $a \in A$, biểu diễn như sau:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

b) Khi đó, hàm f không liên tục tại $b \in A$, biểu diễn như sau:

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in A)\ (|x - b| < \delta \wedge |f(x) - f(b)| \geq \varepsilon)$

Ví dụ:

$(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})\ (x + y = 1)$

45

CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

TẬP HỢP & ÁNH XẠ

46

Tập hợp

❖ **Khái niệm**

- Tập hợp chỉ một nhóm các đối tượng phân biệt (các đối tượng định nghĩa được).
  Ký hiệu chữ in hoa: A, B, C,…
- Đối tượng tham gia tập hợp gọi là phần tử của tập hợp.
  Ký hiệu chữ thường: a, b, c,…

47

Tập hợp – Khái niệm

- Phần tử x thuộc tập hợp A, ký hiệu: $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$.
  Phần tử x không thuộc tập hợp A, ký hiệu $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$.
- Tập hợp không chứa phần tử nào cả gọi là tập rỗng, ký hiệu: $\varnothing$, hay {}.

48

Tập hợp

Xác định tập hợp

- Xác định bằng lời

  Ví dụ: A là tập hợp sinh viên của Trường đại học Nha Trang.

- Liệt kê

  Ví dụ: B = {4, 2, 1, 3}

49

Tập hợp – xác định tập hợp

- Đưa ra tính chất đặc trưng, sử dụng hàm mệnh đề - vị từ

  Ví dụ: C = {$n \in$ **N** | n chia hết cho 3}

  D = {$n \in$ **N** | $(n>3) \wedge (n\leq 7)$}

  Tổng quát:

  Tập hợp X gồm các phần tử x thỏa tính chất p(x):

  X = $\{x \in U \mid p(x)\}$ (U: gọi là tập vũ trụ)

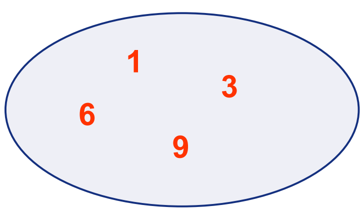
  Hay: X = $\{x \mid p(x)\}$ (U: được hiểu ngầm hoặc đã định nghĩa)

50

Tập hợp – xác định tập hợp

- Sử dụng sơ đồ (giản đồ) Venn

  Ví dụ:



51

Tập hợp

Lực lượng của tập hợp

- Số phần tử của tập hợp A được gọi là lực lượng của tập hợp, kí hiệu **|A|**.
- Nếu A có hữu hạn phần tử, ta nói A hữu hạn. Ngược lại, ta nói A vô hạn.

Ví dụ:

- $|\emptyset| = 0$
- **N, Z, Q, R** là các tập vô hạn
- X = {1, 3, 4, 5} là tập hữu hạn với |X| = 4

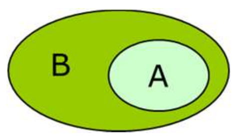
52

Quan hệ giữa các tập hợp

❖ Tập con – bao hàm

- Tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B.
- Ký hiệu: **$A \subset B$**

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$



53

Quan hệ giữa các tập hợp

❖ Tập con – bao hàm

- B gọi là bao hàm tập hợp A, ký hiệu **$B \supset A$**
- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
- A là tập con của B và có thể bằng B: $A \subseteq B$
- Các quan hệ: $\subset$, $\subseteq$, $\supset$, $\supseteq$ gọi là các quan hệ bao hàm.

Ví dụ: Cho A = {1, 3, 4, 5}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} và $C = \{x \in Z \mid 0 < x < 9\}$. Khi đó $A \subset B$ và B = C.

54

Quan hệ giữa các tập hợp

❖ Tính chất

Với A, B, C là 3 tập hợp bất kỳ ta luôn có:

- $\varnothing \subset A$
- $A \subset A$
- $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (tính bắc cầu)

55

Quan hệ giữa các tập hợp

❖ Tập hợp lũy thừa

- Tập hợp lũy thừa của tập hợp A là tập hợp tất cả các tập con của A. Ký hiệu $\wp(A)$
- $|A| = n \Rightarrow |\wp(A)| = 2^n$

Ví dụ:

- $A = \{5,7,9\} \Rightarrow \wp(A) = \{\varnothing, \{5\}, \{7\}, \{9\}, \{5,7\}, \{5,9\}, \{7,9\}, \{5,7,9\}\}$
- Chỉ ra các khẳng định đúng:

  i) $\varnothing \in \varnothing$ ii) $\varnothing \subset \varnothing$

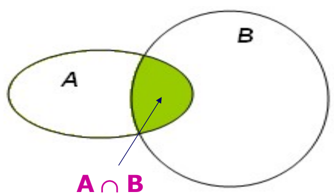
  iii) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ iv) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

56

Các phép toán trên tập hợp

❖ Phép giao

$A \cap B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

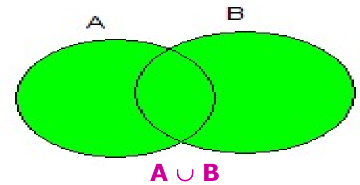


57

Các phép toán trên tập hợp

❖ Phép hợp

$A \cup B = \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

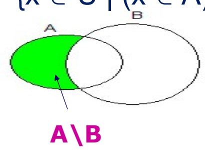


58

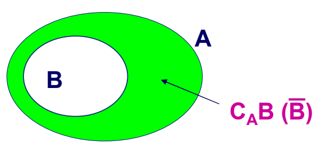
Các phép toán trên tập hợp

❖ Phép hiệu (trừ)

$A \setminus B = A - B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$



➢ Nếu $B \subset A$, $A \setminus B$ sẽ là $C_A B$ hay $\overline{B}$ (phần bù B)

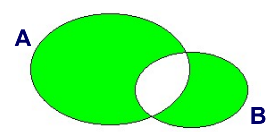


59

Các phép toán trên tập hợp

❖ Phép hiệu đối xứng

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$



Ví dụ:

- Cho $A = \{4,5,7,9,10\}$ $B = \{2,4,7,9\}$
  $A \cup B = \{2,4,5,7,9,10\}$ $A \cap B = \{4,7,9\}$ $A \setminus B = \{5,10\}$
  $A \oplus B = \{5,10\} \cup \{2\} = \{2,5,10\}$
- Cho $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\} = (-\infty, 1) \Rightarrow = C_{\mathbf{R}}A = [1, +\infty)$

60

Tích Descartes

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i,\ \forall i = \overline{1,n}\}$$

Ví dụ: Cho A = {1,2,3} và B = {x, y}. Khi đó

A × B = {(1, x),(1, y),(2, x),(2, y),(3, x),(3, y)}

61

Các phép toán đại số tập hợp

1) Tính giao hoán

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

2) Tính kết hợp

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3) Luật De Morgan

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

4) Tính phân phối

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5) Phần tử trung hòa

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap U = A$

6) Phần bù

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

$A \cup \overline{A} = U$

7) Tính thống trị

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup U = U$

8) Triệt hiệu

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

62

Các phép toán đại số tập hợp

Ví dụ: Chứng minh

1. $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
4. $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) = (A \cap B) \setminus C$
5. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

63

Ánh xạ

Khái niệm

- $f : A \to B$

  $x \mapsto y = f(x)$
- $\forall x \in A, \exists! y \in B : y = f(x)$
- A được gọi là **tập nguồn** (*miền xác định*), B được gọi là **tập đích** của ánh xạ f

64

Ánh xạ

❖ Đồ thị của ánh xạ

- Cho $f : A \to B$,

  Tập hợp $G = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$ được gọi là đồ thị của ánh xạ f
- Có thể đồng nhất ánh xạ f với đồ thị G của nó.

65

Ánh xạ

❖ Ánh xạ đồng nhất

$$id_X : A \to A$$
$$x \mapsto x$$

66

Ánh xạ

❖ Hai ánh xạ bằng nhau

- Hai ánh xạ f, g: $A \to B$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu f = g nếu

$$\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$$

67

Ánh xạ

❖ Ánh xạ thu hẹp, ánh xạ mở rộng

Cho một ánh xạ f: $A \to B$, $X \subset A$

- $g : X \to B$ là ánh xạ thu hẹp của ánh xạ f lên X, ký hiệu $f|_X$ nếu: $\forall x \in X : f(x) = g(x)$
- f còn gọi là ánh xạ mở rộng g lên A.

Ví dụ: Cho ánh xạ f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_0^+$

$$f(x) = |x| \Rightarrow f|_{R_0^+} = id|_{R_0^+}$$

68

Ánh xạ

❖ **Ảnh và tạo ảnh**

Cho một ánh xạ f: $A \to B$, $x \in A$, $X \subset A$, $Y \subset B$

- f(x): ảnh của x qua ánh xạ f
- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$: ảnh của X qua ánh xạ f
- $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subset A$: tạo ảnh của Y qua ánh xạ f.
- f(A) : ảnh của ánh xạ f, ký hiệu Imf.

69

Ánh xạ

❖ **Mệnh đề**

$f: A \to B;\ X,Y \subset A;\ S,T \subset B$

1. $X \subset f^{-1}(f(X))$
2. $f(f^{-1}(S)) \subset S$
3. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
4. $f(X \cap Y) \subset f(Y) \cap f(Y)$

70

Ánh xạ

❖ **Mệnh đề**

$f: A \to B;\ X,Y \subset A;\ S,T \subset B$

5. $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$
6. $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$
7. $f(A \backslash X) \supset f(A) \backslash f(X)$
8. $f^{-1}(B \backslash S) = A \backslash f^{-1}(S)$

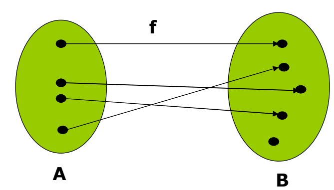
71

Các loại ánh xạ

❖ **Đơn ánh**

f: $A \to B$ gọi là đơn ánh nếu:

$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



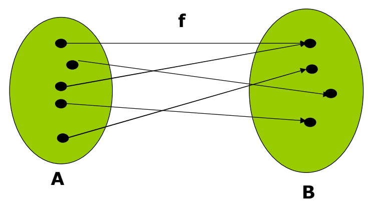
72

Các loại ánh xạ

Toàn ánh

f: A → B gọi là toàn ánh nếu:

$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$



73

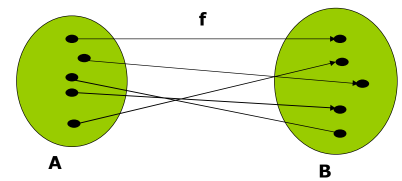
Các loại ánh xạ

Song ánh

f: A → B gọi là song ánh (ánh xạ tương ứng 1-1)

nếu f vừa đơn ánh và toàn ánh

$\forall y \in B, \exists! x \in A : f(x) = y$



74

Các loại ánh xạ

Ví dụ:

1. f : **R** → **R** xác định bởi f(x) = $x^2 - 3x + 5$
2. f : **N** → **Z** được xác định f(x) = x + 1.
3. f : **Z** → **N** được xác định f(x) = x^2
4. f : **R** → **R** được xác định f(x) = -x

75

Hợp thành của các ánh xạ (Ánh xạ hợp)

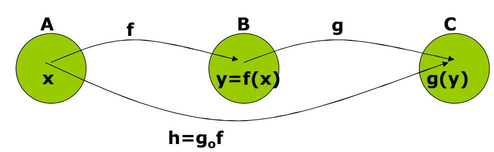
$f : A \to B$ $\quad$ $g : B \to C$

$x \mapsto f(x)$ $\quad$ $y \mapsto g(y)$

Ánh xạ hợp h = g∘f (hoặc g.f) được định nghĩa:

$$h = g_\circ f : A \to C$$

$$x \mapsto h(x) = g(f(x))$$



76

Hợp thành của các ánh xạ (Ánh xạ hợp)

Ví dụ: Cho f, g : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x) = x + 2$ và $g(x) = 3x - 1$. Xác định $g \circ f$ và $f \circ g$.

$\forall x \in \mathbf{R}$: $g \circ f(x) = g(f(x))$
$= g(x + 2)$
$= 3(x + 2) - 1$
$= 3x + 5.$

$\forall x \in \mathbf{R}$: $f \circ g(x) = f(g(x))$
$= f(3x - 1)$
$= (3x - 1) + 2$
$= 3x + 1.$

77

Hợp thành của các ánh xạ (Ánh xạ hợp)

❖ **Mệnh đề**

$f: A \to B;\ g: B \to C;\ h: C \to D$, khi đó

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

78

Ánh xạ ngược

$f: A \to B$, $g: B \to A$

g được gọi là ánh xạ ngược của f (và ngược lại) khi $g \circ f = 1_A$, $f \circ g = 1_B$. Ký hiệu f^{-1} (và g^{-1})

Ví dụ:

1. Cho f, g : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x + 5$ và $g(x) = \frac{x-5}{2}$
2. Cho f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, g: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x) = e^x$ và $g(x) = \ln(x)$

79

Họ những phần tử của một tập hợp

❖ **Khái niệm**

$I \neq \emptyset$, $f: I \to A$

- $\forall \alpha \in I$, $f(\alpha) = x_\alpha$, ký hiệu $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ là họ những phần tử thuộc A được đánh chỉ số bởi các phần tử của I.
- Nếu x_α là các tập hợp thì $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ các tập hợp đánh chỉ số bởi tập hợp I.
- Nếu mỗi phần tử của A là một tập hợp con của U thì ta gọi $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ những tập con của tập hợp U.

80

Họ những phần tử của một tập hợp

Ví dụ:

1. Cho $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \longmapsto a_n = f(n)$. Khi đó ta có họ các số thực $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ được đánh chỉ số bởi tập số tự nhiên **N**, và thường được gọi là dãy số thực.
2. Cho $f: \mathbf{N} \to \wp(\mathbf{R})$, $n \longmapsto J_n = \{x \in \mathbf{R} \mid x < n\}$. Khi đó $(J_n)_{n\in \mathbf{N}}$ là họ các tập con của **R** thỏa

   $J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_i \subset \ldots$

81

Các phép toán đại số họ các tập hợp

Cho $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các tập hợp

- **Giao** của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \forall\alpha : x \in A_\alpha\}$$

- **Hợp** của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \exists\alpha : x \in A_\alpha\}$$

82

Các phép toán đại số họ các tập hợp

Cho $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các tập hợp

- **Tích Descartes** của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \mid x_\alpha \in A_\alpha, \forall\alpha \in I\}$$

Nếu $A_\alpha = A, \forall\alpha \in I$ thì $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = A^I$ gọi là lũy thừa bậc I của *A*.

83

CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

QUAN HỆ - DÀN

84

Quan hệ

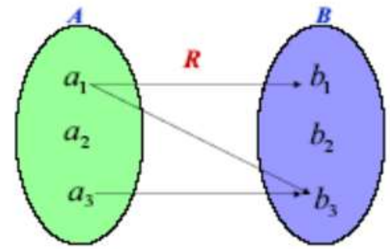
❖ Quan hệ 2 ngôi

- Một quan hệ giữa tập A và tập B là một tập con **R** của tích Descartes AxB.
- Nếu (a,b) ∈ **R**, ta viết: a**R**b
- Nếu A = B thì một tập con **R** của tích Descartes A x A được gọi là quan hệ trên A.
- Quan hệ bù của **R**: $\overline{\mathbf{R}} \subset$ AxB và x$\overline{\mathbf{R}}$y ⇔ (x,y) ∉ **R**
- Quan hệ đảo của **R**: $\mathbf{R}^{-1} \subset$ BxA và x$\mathbf{R}^{-1}$y ⇔ y**R**x

85

Quan hệ

Ví dụ: Một cách biểu diễn quan hệ:



$R = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_3) \}$

86

Quan hệ

Ví dụ:

a) A = tập sinh viên; B = tập lớp học.

R = {(a, b) | sinh viên a học lớp b}

b) Cho A = {1, 2, 3, 4}, và

R = {(a, b) | a là ước số của b}

Khi đó:

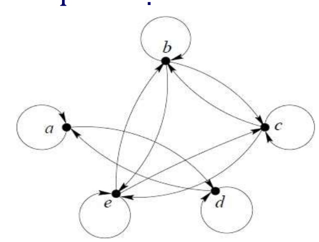
R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),
(2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)}

87

Biểu diễn quan hệ

❖ Đồ thị

a) Xét một quan hệ R trên tập hợp $A=\{a,b,c,d\}$
Biểu diễn quan hệ R như đồ thị sau



$R = \{(a, a),(b,b),(c, c),(d, d),(e, e),(a, d),(d, a),$
$(b, e),(e,b),(b, c),(c,b),(c,e),(e,c)\}$

88

Biểu diễn quan hệ

Ma trận

Xét một quan hệ R trên từ tập hợp $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ đến tập hợp $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$

Ma trận biểu diễn quan hệ là một trận cấp $n \times m$, ký hiệu $W_{n \times m} = (w_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$

Trong đó,

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, (a_i, b_j) \notin R \\ 1, (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

89

Biểu diễn quan hệ

Ma trận

	1	2	3	4
a	1	1	0	1
b	0	1	0	1
c	1	0	1	0

$R = \{(a,1), (a,2), (a,4), (b,2), (b,4), (c,1), (c,3)\}$

90

Tính chất của quan hệ

R là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp *A*.

1) Tính phản xạ

R có tính phản xạ nếu

$\forall a \in A : a\mathbf{R}a$

2) Tính đối xứng

R có tính đối xứng nếu

$\forall a,b \in A : a\mathbf{R}b \Rightarrow b\mathbf{R}a$

3) Tính phản đối xứng

R có tính phản đối xứng nếu

$\forall a,b \in A : a\mathbf{R}b, b\mathbf{R}a \Rightarrow a = b$

4) Tính bắc cầu

R có tính bắc cầu nếu

$\forall a,b,c \in A : a\mathbf{R}b, b\mathbf{R}c \Rightarrow a\mathbf{R}c$

91

Tính chất của quan hệ

Ví dụ:

Xét quan hệ $\le$ trên tập hợp các số thực **R**

- có tính phản xạ vì $\forall a \in \mathbf{R} : a \le a$
- không có tính đối xứng vì $\forall a,b \in \mathbf{R} : a \le b \not\Rightarrow b \le a$
- có tính phản đối xứng vì $\forall a,b \in \mathbf{R} : a \le b, b \le a \Rightarrow a = b$
- có tính bắc cầu vì $\forall a,b,c \in \mathbf{R} : a \le b, b \le c \Rightarrow a \le c$

92

Tổ hợp các quan hệ

❖ Cho a**R**b ($a \in A, b \in B$)

b**S**c ($b \in B, c \in C$)

S∘R = {(a, c) | ∃b ∈ B : (a,b) ∈ R, (b, c) ∈ S}

Ví dụ:

R = {(a,1), (a, 2), (a, 4), (b, 2), (b, 4), (c,1), (c,3)}

S = {(1, e), (1, f), (2, f), (3, e), (3, f), (4, f)}

S∘R = {(a, e), (a, f), (b, f), (c, e), (c, f)}

93

Tổ hợp các quan hệ

❖ Cho quan hệ R trên tập hợp A, lũy thừa $\mathbf{R^n}$, $n \in N^*$ được định nghĩa quy nạp

$\mathbf{R^1 = R, R^n = R^{n-1} \circ R}$

❖ Một quan hệ R trên tập hợp A, R có tính bắc cầu khi và chỉ khi $\mathbf{R^n} \subset \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*$

94

Quan hệ tương đương

❖ **Quan hệ tương đương**

Một quan hệ R trên tập hợp A được gọi là một quan hệ tương đương nếu R có 3 tính chất:

Phản xạ, Đối xứng, Bắc cầu.

Ví dụ:

Quan hệ đồng dư (modulo) "mod n" trên **Z** là một quan hệ tương đương

95

Quan hệ tương đương

❖ **Lớp tương đương**

Cho R là quan hệ tương đương trên A và phần tử $a \in A$.

Lớp tương đương chứa a được ký hiệu bởi $\bar{a}$, hoặc $[a]_R$, hoặc [a], hoặc C(a) là tập

$$[a]_R = \{b \in A \mid b\ R\ a\}$$

Ví dụ:

Quan hệ tương đương "mod 3" trên **Z**, ta có

[0] = {b ∈ Z | b mod 3 = 0}

96

Quan hệ tương đương

❖ **Mệnh đề**

Cho **R** là một quan hệ tương đương trên tập hợp A, a,b $\in$ A

1. $[a] \neq \varnothing$
2. $[a] = [b] \Leftrightarrow a\mathbf{R}b$
3. $[a] = [b]$ hoặc $[a] \cap [b] = \varnothing$

97

Quan hệ tương đương

❖ **Tập thương**

Cho **R** là một quan hệ tương đương trên tập hợp A, tập thương xác định bởi quan hệ R trên A, ký hiệu A / R được xác định

A/R = {[a] | a $\in$ A}

Ví dụ:

Quan hệ quan hệ tương đương "mod 3" trên **Z**, ta có

Z/mod 3 = {[0],[1],[2]}

98

Quan hệ tương đương

❖ **Phân hoạch**

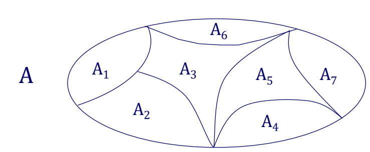
Một phân hoạch của tập hợp A là một họ các tập con (A_i), i = $\overline{1,n}$ thỏa:

1. $A_i \neq \varnothing \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$
2. $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \neq j$
3. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$

99

Quan hệ tương đương

Ví dụ:



Một phân hoạch của A thành 7 tập con

100

Quan hệ tương đương

❖ **Phân hoạch**

- Một phân hoạch của tập hợp A xác định một quan hệ tương đương trên A
- Cho R là một quan hệ tương đương trên A. Khi đó các lớp tương đương của R sẽ tạo nên một phân hoạch của A. Ngược lại, nếu A_1, A_2, ..., A_n là một phân hoạch của A thì tồn tại quan hệ tương đương R sao cho $\{A_i\}$ là tập các lớp tương đương của R.

101

Quan hệ tương đương

Ví dụ:

Quan hệ "cùng tính chẵn lẻ" trên tập số nguyên Z phân hoạch Z thành 2 lớp tương đương:

[1]={...,-5,-3,-1,1,3,5,...}

[2]={...,-4,-2,-0,2,4,6,...}

102

Quan hệ tương đương

Ví dụ:

Cho tập $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ và các tập con của A: $E_1=\{a_1, a_3\}$, $E_2=\{a_2,a_4, a_5\}$, $E_3=\{a_6\}$. Hãy tìm một quan hệ tương đương trên A nhận E1, E2, E3 làm các lớp tương đương?

Giải:

Ta có: $\{E_1, E_2, E_3\}$là một phân hoạch của A. Theo định lý 4.2, tồn tại quan một hệ tương đương trên A nhận E_1, E_2, E_3 làm các lớp tương đương.

Gọi R là quan hệ tương đương cần tìm.

Do R có tính phản xạ nên R có dạng:

$$R=\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3),(a_4, a_4),(a_5, a_5), (a_6, a_6)\} \cup X$$

E_1 là một lớp tương đương của R nên R phải có chứa các cặp: (a_1,a_3), (a_3,a_1)

E_2 là một lớp tương đương của R, nên R phải có chứa các cặp: (a_2,a_4), (a_4,a_2), (a_2,a_5), (a_5,a_2), (a_4, a_5), (a_5,a_4)

Vậy R cần tìm có thể là: $R=\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3),(a_4, a_4),(a_5, a_5), (a_6, a_6)\}$
$\cup \{(a_1,a_3), (a_3,a_1), (a_2,a_4), (a_4,a_2), (a_2,a_5), (a_5,a_2), (a_4, a_5), (a_5,a_4)\}$

103

Quan hệ thứ tự

❖ **Quan hệ thứ tự**

Một quan hệ R trên tập hợp A được gọi là một quan hệ thứ tự nếu R có 3 tính chất: **Phản xạ, Phản đối xứng, Bắc cầu**.

- Ký hiệu một quan hệ thứ tự là $\leq$
- Nếu trên A có một quan hệ thứ tự $\leq$, thì A được gọi được sắp thứ tự, ký hiệu **(A, $\leq$)**.

104

Quan hệ thứ tự

Ví dụ:

1. Quan hệ $\leq$ (so sánh nhỏ hơn hay bằng thông thường trên R) trên tập số thực **R** là một quan hệ thứ tự. Tập (**R**, $\leq$) là tập có thứ tự.
2. Quan hệ $\subseteq$ trên tập hợp các tập con của X: $\wp(X)$ là một quan hệ thứ tự.
3. Quan hệ "chia hết" trên $\mathbf{Z}^+$ là một quan hệ thứ tự.

105

Quan hệ thứ tự

❖ **Phần tử trội**

Với quan hệ thứ tự $\leq$ trên tập hợp A:

- Nếu $a,b \in A : a \leq b$ thì b được gọi là phần tử trội của phần tử a.
- Nếu b là một trội của a, $\nexists c \in A$, $c \neq a$ và $c \neq b$ sao cho $a \leq c$ và $c \leq b$ thì b được gọi là một phần tử trội trực tiếp của a

106

Quan hệ thứ tự

Ví dụ:

Cho tập A={a_1,a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}, Xét quan hệ:

R={(a_1, a_1), (a_2,a_2), (a_3,a_3), (a_4,a_4), (a_5,a_5), (a_6,a_6), (a_7,a_7), (a_1,a_3), (a_3, a_5), (a_1,a_5), (a_5,a_7), (a_3,a_7), (a_1,a_7)}

R là một quan hệ thứ tự trên A.

- a_3 là một trội trực tiếp của a_1.
- a_5 cũng là một trội của a_1 nhưng không là trội trực tiếp.

107

Quan hệ thứ tự

❖ **Biểu đồ Hasse**

Biểu đồ Hasse của một tập hữu hạn R có thứ tự (A,$\leq$) bao gồm:

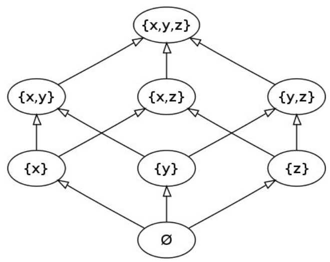
- Tập các điểm trong mặt phẳng, mỗi điểm tương ứng là một phần tử trong A.
- Một cung có hướng từ a đến b nếu b là một trội trực tiếp của a.

108

Quan hệ thứ tự

Ví dụ:

Xét tập hợp $X = \{x, y, z\}$ và tập được sắp thứ tự $(\wp(X), \subseteq)$ ta có biểu đồ Hasse:



109

Quan hệ thứ tự

- **Quan hệ thứ tự toàn phần**

  Một quan hệ thứ tự trên A gọi là toàn phần nếu mọi phần tử của A đều có thể so sánh được. Nghĩa là: **$\forall x, y \in A$: $x \le y$ hay $y \le x$.**

- **Quan hệ thứ tự bộ phận**

  Một quan hệ thứ tự trên A gọi là bộ phận nếu nó không phải là quan hệ thứ tự toàn phần

110

Quan hệ thứ tự

Ví dụ:

a) Các quan hệ "≤" và "≥" trên tập số thực là quan hệ thứ tự toàn phần.

b) Quan hệ chia hết trên tập số nguyên, quan hệ bao hàm trên các tập hợp là các quan hệ thứ tự bộ phận.

111

Quan hệ thứ tự

- **Các phần tử đặc biệt trong tập thứ tự**

  Xét một quan hệ thứ tự $\le$ trên tập hợp A, $X \subset A$:

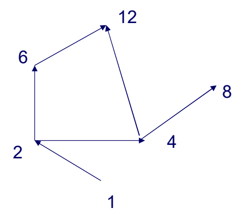
  - n $\in$ X gọi là phần tử **nhỏ nhất** nếu n **được trội bởi tất cả** các phần tử khác trong X.
  - m $\in$ X gọi là phần tử **lớn nhất** nếu m **trội tất cả** các phần tử khác trong X.

112

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ:

Cho tập có thứ tự ({1,2,4,6,8,12},|). Biểu đồ Hasse như sau:



Tập này không có phần tử lớn nhất, có phần tử nhỏ nhất là 1

113

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

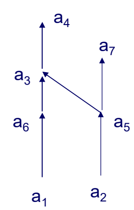
- n' ∈ X gọi là phần tử **tối tiểu** nếu n' **không là trội** của bất kỳ phần tử nào khác
- m' ∈ X gọi là phần tử **tối đại** nếu m' **không có bất kỳ trội** thực sự nào khác.

114

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ:

Tập có thứ tự cho bởi biểu đồ Hasse:



Tập này có 2 phần tử tối đại là a_4 và a_7, 2 phần tử tối tiểu là a_1 và a_2

115

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

- **a** ∈ A gọi là phần tử **chặn dưới** của X, nếu

  $\forall x \in X, a \leq x$

  Phần tử ***lớn nhất*** của tập các chặn dưới của X gọi là *phần tử cận dưới*, ký hiệu $\textbf{\textit{inf}}_A$ X (hoặc $\wedge$)
- **b** ∈ A gọi là phần tử **chặn trên** của X, nếu

  $\forall x \in X, x \leq b$

  Phần tử ***nhỏ nhất*** của tập các chặn trên của X gọi là *phần tử cận trên*, ký hiệu $\textbf{\textit{sup}}_A$ X (hoặc $\vee$)

116

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ:

Xét tập hợp **N** với quan hệ ≤ thông thường, khi đó **N** có phần tử nhỏ nhất là 0 và không có phần tử lớn nhất.

X = {6,8,9, 45,10, 7,12, 4} ⊂ **N**, X có các phần tử chặn dưới là 0,1,2,3,4. Phần tử cận dưới của X là 4.

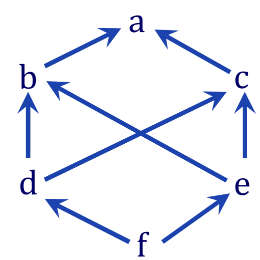
Các phần tử ≥ 45 là các phần tử chặn trên của X.

Phần tử cận trên của X là 45.

117

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ: Cho biểu đồ Hasse sau



Ta có: sup{d,e} = b|c sup{b,c} = a

inf{b,c} = e|d inf{d,e} = f

118

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ:

Xét tập thứ tự ($\wp(E)$, ⊆). Khi đó ∀A, B ∈ $\wp(E)$

Sup(A,B) = A ∪ B

Inf(A,B) = A ∩ B

119

Quan hệ thứ tự - Các phần tử đặc biệt

Ví dụ:

Xét tập thứ tự (**N***, |). Khi đó ∀a, b ∈ **N***

Sup(a,b) = BCNN(a,b)

Inf(a,b) = UCLN(a,b)

120

Dàn

❖ **Định nghĩa 1**

Bộ ba $(A, \wedge, \vee)$ được gọi là một dàn nếu nó thỏa mãn hệ tiên đề sau:

1) Luật lũy đẳng

$\forall x \in A$

$x \wedge x = x$; $x \vee x = x$

2) Luật giao hoán

$\forall x,y \in A$

$x \wedge y = y \wedge x$

$x \vee y = y \vee x$

3) Luật kết hợp

$\forall x,y,z \in A$

$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

4) Luật hút

$\forall x,y \in A$

$x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$

121

Dàn – Định nghĩa

Nếu dàn $(A, \wedge, \vee)$ còn thỏa mãn thêm luật phân phối:

- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\forall x,y,z \in A$

thì dàn $(A, \wedge, \vee)$ được gọi là dàn phân phối

122

Dàn – Định nghĩa

Ví dụ:

a) Với E là một tập nào đó, $(\wp(E), \cap, \cup)$ lập thành một dàn phân phối

b) $(\mathbf{N}^*, (\,), [\,])$ với $(a,b) = \text{UCLN}(a,b)$, $[a,b] = \text{BCNN}(a,b)$ lập thành một dàn phân phối

123

Dàn – Định nghĩa

❖ **Định nghĩa 2**

$(A, \wedge, \vee)$ là một dàn cho trước, ta nói rằng $a \leq b$ nếu như $a \wedge b = a$

❑ **Bổ đề**

$(A,\leq)$ là một quan hệ thứ tự trên A

Quan hệ thứ tự này được gọi là quan hệ thứ tự cảm sinh trên dàn $(A, \wedge, \vee)$

124

Dàn – Định nghĩa

❖ **Định nghĩa 3**

Tập thứ tự $(A, \leq)$ được gọi là một dàn nếu $\forall x,y \in A$ thì $\sup\{x,y\}$ và $\inf\{x,y\}$ đều tồn tại.

Lúc đó ta ký hiệu:

$\sup\{x,y\} = x \vee y$

$\inf\{x,y\} = x \wedge y$

125

Dàn

❖ **Tính chất**

- Tập hợp có thứ tự toàn phần là một dàn, với
  $a \vee b = \max(a,b)$ và $a \wedge b = \min(a,b)$
- Trong dàn $(L, \leq)$:
  - $a \leq \sup\{a,b\}$ và $b \leq \sup\{a,b\}$
  - $\forall c \in L : a \leq c, b \leq c \Rightarrow \sup\{a,b\} \leq c$
- Trong dàn $(L, \leq)$:
  - $\inf\{a,b\} \leq a$ và $\inf\{a,b\} \leq b$
  - $\forall c \in L : c \leq a, c \leq b \Rightarrow c \leq \inf\{a,b\}$

126

Dàn

❖ **Dàn con**

Cho dàn $(L, \leq)$, $B \subset L$.

B được gọi là dàn con của L khi và chỉ khi

- $B \neq \varnothing$
- $a \wedge b \in B, \forall a,b \in B$
- $a \vee b \in B, \forall a,b \in B$

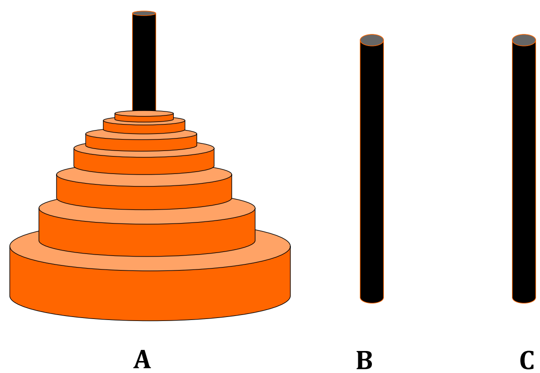
127

CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

HỆ THỨC ĐỆ QUY

128

Bài toán tháp Hà nội



129

Bài toán tháp Hà nội

Có 3 cọc A, B, C và n đĩa (có lỗ để đặt vào cọc) với đường kính đôi một khác nhau. Nguyên tắc đặt đĩa vào cọc là: mỗi đĩa chỉ được chồng lên đĩa lớn hơn nó. Ban đầu, cả n đĩa được đặt chồng lên nhau ở cọc A, hai cọc B và C để trống. Vấn đề đặt ra là chuyển cả n đĩa ở cọc A sang cọc C (có thể qua trung gian cọc B), mỗi lần chỉ chuyển một đĩa. Gọi x_n là số lần chuyển đĩa. Tìm x_n ?

130

Bài toán tháp Hà nội

Gọi x_n là số lần di chuyển đĩa trong trường hợp có n đĩa. Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 1; \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

$$\longrightarrow x_n = 2^n - 1$$

131

Hệ thức đệ quy

❖ **Dạng tổng quát của hệ thức đệ quy tuyến tính**

➢ Hệ thức **đệ qui tuyến tính cấp k**

$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots a_kx_{n-k} = f(n)$ (**I**)

trong đó

a_i ($a_0 \neq 0$) là các hệ số thực;

x_i là các biến nhận các giá trị thực.

$f(n)$ là một hàm đa thức theo n

➢ Nếu f(n) = 0 thì (I) là hệ thức **đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp k**

132

Hệ thức đệ quy

Ví dụ:

$2x_n - x_{n-2} + 5x_{n-5} = n^2 + 3^n$ (HTĐQTT cấp 5)

$2x_n - x_{n-2} + 5x_{n-5} = 0$ (HTĐQTT thuần nhất cấp 5)

$x_n^2 - 2x_{n-1} = 5$ (không phải HTĐQTT)

133

Phương pháp giải hệ thức đệ quy

❖ **Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng**

Hệ thức đệ qui tuyến tính cấp k

$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots a_kx_{n-k} = f(n)$ **(I)**

- Mỗi dãy $\{x_n\}$ thỏa (I) được gọi là một *nghiệm* của (I).
- Họ dãy số $\{x_n = x_n(C_1, C_2,\dots,C_k)\}$ phụ thuộc vào k họ tham số $C_1, C_2,\dots,C_k$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của (I) nếu mọi dãy của họ này đều là nghiệm của (I)

134

Phương pháp giải hệ thức đệ quy

- Với k giá trị ban đầu $y_0, y_1,\dots, y_{k-1}$, tồn tại duy nhất các giá trị của k tham số $C_1, C_2,\dots,C_k$ sao cho nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng thỏa

$x_0 = y_0, x_1 = y_1,\dots, x_{k-1} = y_{k-1}$ $(*)$

Khi đó, nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng được gọi *nghiệm riêng* ứng với điều kiện ban đầu $(*)$.

Giải một hệ thức đệ qui là đi *tìm nghiệm tổng quát* của nó; nhưng nếu hệ thức đệ qui có kèm theo điều kiện ban đầu, ta phải *tìm nghiệm riêng thỏa điều kiện ban đầu* đó.

135

Phương pháp giải hệ thức đệ quy

Ví dụ:

Xét dãy số *Fibonacci* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (với điều kiện ban đầu $a_0 = 0, a_1 = 1$)

✓ Nghiệm tổng quát: $a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

✓ Nghiệm riêng: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

136

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

Hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất cấp k

$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots a_kx_{n-k} = 0$ (II)

❖ **Bước 1**

Xác định phương trình đặc trưng của (II)

$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0$ (III)

Các nghiệm λ_i gọi là các **nghiệm gốc** của (III)

137

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

❖ **Bước 2**

Giải phương trình đặc trưng (III) tìm các nghiệm gốc.

➢ **Trường hợp 1:** (III) có k nghiệm gốc phân biệt (khác nhau) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Khi đó (II) có nghiệm

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} C_i\lambda_i^n \qquad (C_i: \text{hằng số})$$

138

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

➢ **Trường hợp 2:** (III) có nghiệm bội λ (bậc k). Khi đó (II) có nghiệm

$$x_n = (C_1n^{k-1} + C_2n^{k-2} + \dots + C_{k-1}n + C_k)\lambda^n$$

(C_i: hằng số)

139

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

➢ **Trường hợp 3:** (III) có một số nghiệm bội và một số nghiệm phân biệt. *Ví dụ*: (III) có một nghiệm bội 3 là λ_1 và các nghiệm phân biệt $\lambda_4 \neq \lambda_5 \neq \lambda_6 \neq \dots \neq \lambda_k$. Khi đó (II) có nghiệm

$$x_n = (C_1n^2 + C_2n + C_3)\lambda_1^n + C_4\lambda_4^n + C_5\lambda_5^n + \dots + C_k\lambda_k^n$$

(C_i: hằng số)

140

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

❖ **Bước 3**

Xác định các hằng số C_i dựa vào các điều kiện ban đầu

141

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

Ví dụ:

Xét dãy số *Fibonacci* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (với điều kiện ban đầu $a_0 = 0, a_1 = 1$)

➢ Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

➢ Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

142

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

Ví dụ:

2 nghiệm gốc của phương trình đặc trưng $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

➢ Nghiệm tổng quát: $a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

➢ Xác định C_1, C_2 từ các giá trị a_0, a_1 ta được

$$C_1 = 1/\sqrt{5}, C_2 = -1/\sqrt{5}$$

Nghiệm riêng: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

143

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots a_kx_{n-k} = f(n),\ f(n) \neq 0 \quad \textbf{(IV)}$$

❖ **Bước 1**

Tìm nghiệm của hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots a_kx_{n-k} = 0 \qquad \text{(II)}$$

144

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

❖ **Bước 2**

Tìm một nghiệm riêng của (IV)

❖ **Bước 3**

Nghiệm tổng quát của (IV) = Nghiệm tổng quát của (II)
+ Nghiệm riêng của (IV)

145

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

❑ **Tìm một nghiệm riêng của (IV)**

Xét vế phải f(n) của (IV) có các dạng:

1. f (n) là hằng số

Nghiệm riêng là hằng số H cần xác định

146

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

2. f (n) là một đa thức bậc t của n

$$f(n) = F_1 n^t + F_2 n^{t-1} + \cdots + F_t n + F_{t+1}$$

với F_i là các hệ số của đa thức, khi đó nghiệm riêng sẽ có dạng:

$$H_1 n^t + H_2 n^{t-1} + \cdots + H_t n + H_{t+1}$$

H_i là các hằng số cần xác định

147

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

3. f (n) = $\beta^n P_t(n)$

với $P_t(n) = F_1 n^t + F_2 n^{t-1} + \cdots + F_t n + F_{t+1}$

β **không là nghiệm** của phương trình đặc trưng của (II), nghiệm riêng có dạng

$$(H_1 n^t + H_2 n^{t-1} + \cdots + H_t n + H_{t+1})\beta^n$$

H_i là các hằng số cần xác định

Nếu $P_t(n)$ là hằng số thì nghiệm riêng có dạng **$H\beta^n$**

148

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

4. $f(n) = \beta^n P_t(n)$

với $P_t(n) = F_1 n^t + F_2 n^{t-1} + \cdots + F_t n + F_{t+1}$

β **là nghiệm bội bậc m** của phương trình đặc trưng của (II), nghiệm riêng có dạng

$$n^m(H_1 n^t + H_2 n^{t-1} + \cdots + H_t n + H_{t+1})\beta^n$$

H_i là các hằng số cần xác định

149

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

5. $f(n) = \sum f_d(n)$

với mỗi f_d ta tìm nghiệm riêng x_{id} của hệ thức đệ quy: $a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots a_kx_{n-k} = f_d(n)$

Khi đó, một nghiệm riêng của (IV) sẽ là

$$x_n = \sum x_{id}$$

150

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Sau khi tìm được nghiệm riêng, thế nghiệm riêng vào (IV) để tìm các hằng số H.

151

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Ví dụ: $x_n + 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 1$

f(n) = 1 là hằng số → Trường hợp 1

Nghiệm riêng của hệ thức là hằng số **H**. Thế vào hệ thức ta được

$H + 5H + 6H = 1 \Rightarrow H = 1/12$

Vậy nghiệm riêng của hệ thức là $x_n = 1/12$

152

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Ví dụ: $x_n + 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 3n^2 - 2n + 1$

$f(n) = 3n^2 - 2n + 1 \rightarrow$ Trường hợp 2

Nghiệm riêng của hệ thức có dạng $\mathbf{H_1n^2 + H_2n + H_3}$

Thế vào hệ thức:

$(H_1n^2 + H_2n + H_3) + 5(H_1(n-1)^2 + H_2(n-1) + H_3) + 6(H_1(n-2)^2 + H_2(n-2) + H_3) = 3n^2 - 2n + 1$

Rút gọn

$12H_1n^2 - (34H_1 - 12H_2)n + (29H_1 - 17H_2 + 12H_3) = 3n^2 - 2n + 1$

153

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Rút gọn

$12H_1n^2 - (34H_1 - 12H_2)n + (29H_1 - 17H_2 + 12H_3) = 3n^2 - 2n + 1$

Đồng nhất hệ số 2 vế

$$\left.\begin{aligned} 12H_1 &= 3 \\ 34H_1 - 12H_2 &= 2 \\ 29H_1 - 17H_2 + 12H_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} H_1 &= 1/4 \\ H_2 &= 13/24 \\ H_3 &= 71/288 \end{aligned}$$

154

Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

Ví dụ: $x_n + x_{n-1} = 2n3^n$

$f(n) = 2n3^n$, 3 không là nghiệm của phương trình đặc trưng $\rightarrow$ Trường hợp 3

Nghiệm riêng của hệ thức có dạng $\mathbf{(H_1n + H_2)3^n}$

Thế vào hệ thức:

$(H_1n + H_2)3^n + (H_1(n-1) + H_2)3^{(n-1)} = 2n3^n$

Rút gọn và giải ta được $H_1 = 3/2$, $H_2 = 3/8$

Nghiệm riêng của hệ thức: $x_n = \left(\frac{3}{2}n + \frac{3}{8}\right)3^n$

155

CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

KHÔNG GIAN METRIC

156

Khái niệm

Phép toán đặc trưng của giải tích: lấy giới hạn $\rightarrow$ phải tìm cách xác định mức độ "xa", "gần" giữa các đối tượng $\rightarrow$ khái niệm khoảng cách (metric)

157

Định nghĩa

Một metric d trên một tập hợp X là một hàm (ánh xạ) $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn 3 tiên đề sau $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$

1. $d(x,y) \geq 0$

   $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (BĐT tam giác)

158

Định nghĩa

- Không gian metric (X, d) là một tập hợp X với một metric d định nghĩa trên X.
- Với ngôn ngữ hình học:
  - $x \in X$: điểm của không gian X
  - $d(x, y) \geq 0$: khoảng cách giữa 2 điểm x, y.

159

Định nghĩa

Ví dụ:

1. Metric tầm thường trên X là metric rời rạc

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

2. Cho metric $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$d(x,y) = |x - y|$$

160

Định nghĩa

Ví dụ:

3. Metric Euclide trên $\mathbf{R}^n$ $\quad d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

161

Định nghĩa

Ví dụ:

4. Tập hợp các hàm liên tục $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ là $\mathbf{C}_{[a,b]}$.

Với f, g thuộc $C_{[a,b]}$ định nghĩa

$$d_1(f,g) = \max_{[a,b]}|f(x) - g(x)|$$

$$d_2(f,g) = \int_b^a |f(x) - g(x)|dx$$

162

Một số tính chất

Cho (X, d)

1. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, ta có BĐT tam giác mở rộng

   $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)$

2. $\forall x, y, u, v \in X$, ta có BĐT tứ giác

   $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$

163

Chuẩn

- Các không gian cần xem xét là không gian vector hay không gian tuyến tính.
- Các metric thường được suy dẫn từ một chuẩn gọi là "chiều dài" của một vector.

164

Chuẩn

- Không gian vector được chuẩn hóa $(X, \|.\|)$ là một không gian vector X cùng với hàm $\|.\| : X \to \mathbf{R}$, được gọi là một chuẩn trên X.
- $\forall x, y \in X, k \in \mathbf{R}$:
  1. $0 \le \|x\| < \infty$ và $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  2. $\|kx\| = |k|\|x\|$
  3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$
- Với $(X, \|.\|)$, cho $d : X \times X \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

là một metric trên X

165

Tập mở

- Cho không gian metric (X, d). Với $x_0 \in X$, ký hiệu

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

gọi là quả cầu mở tâm x_0, bán kính r

- Điểm x được gọi là điểm trong của tập hợp A, nếu $\exists r > 0 : B(x, r) \subset A$
- Tập hợp tất cả các điểm trong của A gọi là phần trong của A, ký hiệu Int A hay $\mathring{A}$, rõ ràng $\text{Int}A \subset A$

166

Tập mở

- Tập A gọi là tập mở nếu mọi điểm của nó là điểm trong. Quy ước $\varnothing$ là tập mở:

A tập mở $\Leftrightarrow A = \text{Int}A$

$\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists r > 0 : B(x, r) \subset A$

167

Tập mở - Tính chất

- Cho không gian metric (X, d), họ các tập con của X có 3 tính chất đặc trưng sau:
  - $\varnothing$, X là các tập mở
  - Hợp một số tùy ý các tập mở là tập mở
  - Giao hữu hạn các tập mở là tập mở
- Với một tập hợp A bất kỳ, phần trong của A là tập hợp mở lớn nhất chứa trong A.

$(B \subset A$, B mở$) \Rightarrow B \subset \text{Int}A$

168

Tập đóng – Bao đóng của tập hợp

- Tập hợp $A \subset X$ gọi là tập đóng nếu $X \setminus A$ là tập mở.
- Điểm x được gọi là một điểm dính của tập A nếu $A \cap B(x, r) \neq \varnothing, \forall r > 0$.
- Tập tất cả các điểm dính của A gọi là bao đóng của A, ký hiệu là $\overline{A}$ hay Cl A.

  Hiển nhiên ta luôn có $A \subset \overline{A}$

169

170