Trường Đại học Nha Trang
Khoa Công nghệ Thông tin

CƠ SỞ DỮ LIỆU

Chủ đề 4: Phủ tối thiểu của lược đồ quan hệ

TS. Phạm Thị Thu Thúy
thuthuy@ntu.edu.vn

1. Ý nghĩa của phủ tối thiểu

- **Vd:**

  F = {A → B, B → C, A → C} ta thấy rõ ràng pth: A → C là pth dư thừa, vì A → C có thể được suy ra từ các pth của F theo hệ tiên đề Amstrong.

- Phủ tối thiểu của một tập pth là một tập pth *không có yếu tố dư thừa* nhưng *giữ đầy đủ các tính chất của tập pth đã cho. (nghĩa là tập các pth đã cho suy dẫn ra được pth nào thì phủ tối thiểu cũng suy dẫn ra được pth đó và ngược lại).*

2. Hai tập phụ thuộc hàm tương đương

❖**Định nghĩa:** Cho U là tập thuộc tính, hai tập pth F và G xác định trên U. Tập pth F tương đương với tập pth G, ký hiệu: F $\equiv$ G khi và chỉ khi:

$$G^{+} = F^{+}$$

3. Suy dẫn phụ thuộc hàm

❖ **Định nghĩa:** Cho U là tập thuộc tính, F và G là hai tập pth xác định trên U. G được gọi là được suy dẫn từ F.

Ký hiệu: $F \models G$ nếu và chỉ nếu $\forall g \in G$ thì $F \models g$

Hai tập phụ thuộc hàm tương đương

2. Định lý: Cho hai tập pth F và G trên tập thuộc tính R, $F \equiv G$ khi và chỉ khi $F \models G$ và $G \models F$

3. Bổ đề: Mỗi tập pth F đều tương đương với một tập pth G, mà mỗi pth trong G có vế phải không quá một thuộc tính.

4. Định lý

- Cho U là tập thuộc tính, F và G là hai tập pth xác định trên U.

$$F \equiv G \Leftrightarrow F \models G \text{ và } G \models F$$

4. Định lý

❖ **Chứng minh:**

1) $F \equiv G \Rightarrow F \models G$ và $G \models F$:

Ta có $F \equiv G \Leftrightarrow G^+ = F^+$ (định nghĩa 2 tập pth tương đương) (*)

Ta chứng minh: $F \models G$ và $G \models F$

+ $F \models G$

Ta có: $\forall g \in G$ thì $g \in G^+$ (định nghĩa bao đóng tập thuộc tính)

Mà $G^+ = F^+$(theo (*))

Vậy $g \in F^+$ nghĩa là $F \models g$ (theo suy dẫn logic)

Do đó $F \models G$ (theo suy dẫn pth)

+ Do tính chất bình đẳng của F và G nên ta cũng có $G \models F$

4. Định lý

2) $F \equiv G \Leftarrow F \models G$ và $G \models F$

Ta có $F \models G$ (1) và $G \models F$ (2)

Ta phải chứng minh: $F \equiv G$ hay chứng minh $G^+ = F^+$

$G^+ = F^+ \Leftrightarrow F^+ \subseteq G^+$ (*) và $G^+ \subseteq F^+$ (**)

Vì vai trò của F và G là bình đẳng nên ta chỉ cần cm $F^+ \subseteq G^+$

$\forall f \in F^+ \Leftrightarrow F \models f \Rightarrow G \models f$ (do (2))

$\Leftrightarrow f \in G^+ \Leftrightarrow F^+ \subseteq G^+$

4. Định lý (tt)

- Ví dụ: Cho U = ABCDE

  F = {ABC → D, B→ AE, ACE → BD}

  G = {ABC → D, B→ A, B → E, ACE → B, ACE → D}

  Chứng minh: F và G tương đương.

4. Định lý (tt)

- Để chứng minh $F \equiv G$ ta chứng minh $F \models G$ và $G \models F$ (theo định lý ở mục 4.)
- Chứng minh: $F \models G$ (*)
- Theo định nghĩa suy dẫn pth : $F \models G$ nếu và chỉ nếu $\forall\, g \in G$ thì $F \models g$ hay $g \in F^+$(Theo định lý suy dẫn logic: $F^+=\{f\ /\ F \models f\}$)
- Vậy để cm : $F \models G$, ta cm : $\forall\, g \in G$ thì $\in F^+$

4. Định lý (tt)

- Lần lượt xét từng pth trong G, ta có :
- $ABC \rightarrow D$:
  - Ta có $ABC \rightarrow D \in F$ nên $ABC \rightarrow D \in F^+$ (Định nghĩa bao đóng tập pth)
- $B \rightarrow A$:
  - Ta có: $B \rightarrow AE \in F$ (1)
  - Vì $\{A\} \in AE$ nên $AE \rightarrow A \in F^+$ (tính phản xạ) (2)
- $\Rightarrow B \rightarrow A \in F^+$ (tính bắc cầu)
- Tương tự, ta cm được $B \rightarrow E \in F^+$
- $ACE \rightarrow B$:
  - $ACE \rightarrow BD \in F$ (1)
  - $BD \rightarrow B \in F^+$(tính phản xạ) (2)
- $\Rightarrow ACE \rightarrow B \in F^+$ (tính bắc cầu)
- Tương tự, ta cm được $ACE \rightarrow D \in F^+$
- Vậy : $F \models G$

4. Định lý (tt)

- **Chứng minh: G $\models$ F**
- **Tương tự, ta xét lần lượt các pth trong F :**
- **ABC → D:**
  - Ta có: ABC → D $\in$ G nên : ABC → D $\in$ G^+
- **B→ AE:**
  - Ta có: B→ A $\in$ G và B →E $\in$ G nên B → AE (luật hội)$\in$ G^+
- **ACE → BD:**
  - Ta có: ACE→ B$\in$ G và ACE→B$\in$ G nên ACE→ BD (luật hội)$\in$ G^+
- **Vậy : G $\models$ F (**)**
- **Từ (*) và (**), theo định lý ta có F $\equiv$ G.**

5. Tập phụ thuộc hàm tối thiểu

❖ Định nghĩa: Cho U là tập thuộc tính, F là tập pth trên U. F được gọi là tập pth tối thiểu nếu thỏa mãn đồng thời 3 tính chất sau:

1) Vế phải của mỗi pth trong F chỉ có 1 thuộc tính
2) Không tồn tại bất kỳ một pth $X \rightarrow Y$ nào trong F mà: $(F - \{X \rightarrow Y\})^+ = F^+$
3) Không tồn tại một pth $X \rightarrow Y$ thuộc F và một tập con thật sự Z của X mà:

$$(F - \{X \rightarrow Y\} \cup \{Z \rightarrow Y\})^+ = F^+$$

!!! Nhận xét: Tập pth tối thiểu chỉ chứa những pth có vế phải 1 thuộc tính và không có pth thừa.

Tập phụ thuộc hàm tối thiểu

Ý nghĩa:

- Điều kiện 2 để đảm bảo không có phụ thuộc hàm nào trong F là dư thừa.
- Điều kiện 3 đảm bảo không có thuộc tính nào ở vế trái là dư thừa.
- Điều kiện 1 đảm bảo không có thuộc tính nào ở vế phải là dư thừa.

6. Phủ tối thiểu của một tập pth

- Định nghĩa: Cho U là tập thuộc tính, F và G là hai tập pth xác định trên U. G được gọi là một phủ tối thiểu (Minimal Cover) của F nếu và chỉ nếu:
    1) G là tập pth tối thiểu
    2) $G \equiv F$

7. Bổ đề 2:

❖ Cho tập thuộc tính U, F là tập pth xác định trên U. Tồn tại tập pth G thỏa:

1) $G \equiv F$
2) $\forall g \in G$: vế phải của g chỉ có một thuộc tính.

7. Bổ đề 2:

Chứng minh: Xây dựng tập pth G từ tập pth F như sau:

- Xét $X \rightarrow Y \in F$:
  - Nếu Y chỉ có một thuộc tính, đưa $X \rightarrow Y$ vào G
  - Nếu Y có nhiều hơn 1 thuộc tính, giả sử $Y = A_1A_2\ldots A_k$ thì đưa $X \rightarrow A_i$ vào G, $\forall i = 1..n$
- Với cách xây dựng như trên, G thỏa điều kiện 2.
- Ta chứng minh: $G \equiv F$ (nghĩa là chứng minh $F \models G$ và $G \models F$)

7. Bổ đề 2:

a) $F \models G$

- $\forall g \in G$ thì theo quy tắc xây dựng G, ta có hai trường hợp:
  - **g $\in$ F: $F \models g$ (vế phải của g có 1 thuộc tính)**
  - **vế phải của g > 1 thuộc tính, g có dạng:$X \rightarrow A_1$**
    - **$\exists X \rightarrow A_1A_2 \ldots A_k \in F$**
    - **$\{A_1\} \subset A_1A_2 \ldots A_k \Rightarrow A_1A_2 \ldots A_k \rightarrow A_1 \in F^+$**
- $\Rightarrow X \rightarrow A_1 \in F^+ : F \models X \rightarrow A_1$
- Vậy ta có: $\forall g \in G$ thì $F \models g$ nghĩa là: $F \models G$

7. Bổ đề 2:

b) $G \models F$

- $\forall f \in F$ thì theo quy tắc xây dựng G, ta có hai trường hợp:
  - Vế phải của f có 1 thuộc tính: $f \in G$ (theo quy tắc xây dựng G) $\Rightarrow G \models f$
  - vế phải của g > 1 thuộc tính, giả sử f: $X \rightarrow A_1A_{2\ldots}A_k$

$$\Rightarrow \begin{cases} X \rightarrow A_1 \in G \\ X \rightarrow A_2 \in G \\ \ldots \\ X \rightarrow A_k \in G \end{cases}$$

$\Rightarrow X \rightarrow A_1A_{2\ldots}A_k \in G^+$ (luật hợp)

- Có nghĩa là: $G \models X \rightarrow A_1A_{2\ldots}A_k$
- Nói khác hơn : $G \models F$

8. Xét $F \setminus \{X \rightarrow Y\} \cup \{Z \rightarrow Y\})^+ = F^+$ (*)

- Trong đó : Z là con thực sự của X
- (*) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} F\setminus\{X \rightarrow Y\}\cup\{Z \rightarrow Y\} \models F \ (1) \\ F \models F\setminus\{X \rightarrow Y\}\cup\{Z \rightarrow Y\} \ (2) \end{cases}$
- Đặt G = $F\setminus\{X \rightarrow Y\}\cup\{Z \rightarrow Y\}$
- $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} G \models X \rightarrow Y \ (1') \\ F \models Z \rightarrow Y (2') \end{cases}$
- Vì $Z \subset X \Rightarrow X \rightarrow Z \in G^+$ và do trong G đã có : $Z \rightarrow Y \in G$ $\Rightarrow X \rightarrow Y \in G^+$ (tính bắc cầu) vậy (1') luôn đúng.
- Nói khác hơn : (*) $\Leftrightarrow \Leftrightarrow \in F^+ \Leftrightarrow Y \subseteq Z^+_F$
- *, Xét $Z \subseteq X$: tính Z^+_F nếu $Z^+_F \supset Y$: X – Z dư.*

9. Không tồn tại bất kỳ một pth X → Y nào trong F mà: (F – {X → Y})$^+$ = F$^+$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} F\backslash\{X \to Y\} \models F \ (3) \\ F \models F\backslash\{X \to Y\} (4) \end{cases} \quad (**)$$

Đặt G = F – {X → Y}

$$(**) \Leftrightarrow \quad \begin{cases} G \models X \to Y \ (3) \\ F \models G(4) \end{cases}$$

Rõ ràng rằng (4) hiển nhiên đúng vì G $\subset$ F.

$\Leftrightarrow X \to Y \in G+$

$\Leftrightarrow Y \in X^+_G$

9. Thuật toán tìm phủ tối thiểu của tập pth/39

- *Nhập:*
  - Tập thuộc tính U
  - Tập pth F xác định trên U
- *Xuất:* G là phủ tối thiểu của F.
- *Thuật giải:*
  - *Bước 1: Từ F, xây dựng tập pth G bằng cách tách tất cả những phụ thuộc hàm có vế phải từ 2 thuộc tính trở lên*

    $\forall f \in F$:

    - vế phải của f có một thuộc tính thì đưa f vào G
    - vế phải của f có nhiều hơn một thuộc tính, giả sử f có dạng:

      $X \rightarrow A_1A_2\ldots A_k$ thì đưa $X \rightarrow A_i$ vào G, $\forall i = 1..n$

    (Tách tất cả các pth của F thành các pth mà vế phải chỉ có một thuộc tính.)

9. Thuật toán tìm phủ tối thiểu của tập pth

- *Bước 2. Loại bỏ thuộc tính dư thừa vế trái*

  Ta xét $X \rightarrow Y \in G$ mà X có từ 2 thuộc tính trở lên:
  - Giả sử: $X \rightarrow A_1A_2\ldots A_k$
  - Xét $(X-\{A_i\})^+_F$, nếu:
    - $(X - \{A_i\})^+_F \supset Y$ thì A_i dư : loại A_i
    - ngược lại không dư

9. Thuật toán tìm phủ tối thiểu của tập pth

- *Bước 3. Loại bỏ phụ thuộc hàm dư thừa*

  Với mỗi pth $X \rightarrow Y$ trong G:

  - Xét $X^{+}_{G\backslash\{X\rightarrow Y\}}$, nếu:
    - $X^{+}_{G\backslash\{X\rightarrow Y\}} \supset Y$ thì pth $X \rightarrow Y$ dư: loại $X \rightarrow Y$ khỏi G
    - ngược lại không dư.
- G là phủ tối thiểu của F

Chú ý:

- *Ứng với tập pth, có thể có nhiều phủ tối thiểu. Nếu thay đổi thứ tự xét các pth trong các bước có thể sinh ra các phủ tối thiểu khác nhau.*
- *Nếu ta thay đổi thứ tự các bước trong thuật toán trên: loại bỏ pth dư thừa ở Bước 3 trước rồi mới loại bỏ thuộc tính dư thừa (Bước 2) thì kết quả thu được chưa chắc là phủ tối thiểu của tập pth đã cho. (Xem ví dụ trang 42 sách Phương pháp giải bài tập CSDL QH, Nguyễn Đức Thuần-Trương Ngọc Châu)*

Bài tập

- Cho s = (U, F), U = ABCDEH

  F = {BH → AD, BEH → CD, CD → AE, E → BC, AH → B}

  Tìm một phủ tối thiểu của F.

Bài tập

Cho s = (U, F), U = ABCDEH, F = {BH → AD, BEH → CD, CD → AE, E → BC, AH → B}

Tìm một phủ tối thiểu của F.

Bài làm:

- *Bước 1.*

  G = {BH → A, BH → D, BEH → C, BEH →D, CD → A, CD →E, E → B, E → C, AH → B}

Bài tập

G = {BH → A, BH → D, BEH → C, BEH →D, CD → A, CD →E, E → B, E → C, AH → B}

- Bước 2. Loại bỏ thuộc tính dư thừa ở vế trái, chỉ xét những pth có vế trái nhiều hơn một thuộc tính
  - BH → A:
    - H^+_G= H không chứa A
    - B^+_G= B không chứa A
  - BH →D:
    - H^+_G= H không chứa D
    - B^+_G= B không chứa D

Bài tập

$G = \{BH \rightarrow A, BH \rightarrow D, BEH \rightarrow C, BEH \rightarrow D, CD \rightarrow A, CD \rightarrow E, E \rightarrow B, E \rightarrow C, AH \rightarrow B\}$

- $BEH \rightarrow C$:
  - $(EH)^+_G = EHBCAD \supset C$: B dư: loại B, thay pth $BEH \rightarrow C$ bằng $EH \rightarrow C$ và tiếp tục xét pth này.
  - $H^+_G = H$ không chứa C
  - $E^+_G = EBC$ $\supset$ C: H dư: loại H

  Vậy thay pth$BEH \rightarrow C$ bằng pth $E \rightarrow C$, mà ta thấy trong G đã có pth $E \rightarrow C$ nên ta bỏ pth này luôn.
- $BEH \rightarrow D$:
  - $(EH)^+_G = EHBCAD \supset D$: B dư: loại B, thay pth $BEH \rightarrow D$bằng $EH \rightarrow D$ và tiếp tục xét pth này.
  - $H^+_G = H$ không chứa D
  - $E^+_G = EBC$ không chứa D

Bài tập

- $CD \rightarrow A$:
  - $D^+_G = D$ không chứa A
  - $C^+_G = C$ không chứa A
- $CD \rightarrow E$:
  - $D^+_G = D$ không chứa E
  - $C^+_G = C$ không chứa E
- $AH \rightarrow B$:
  - $H^+_G = H$ không chứa B
  - $A^+_G = A$ không chứa B

$G = \{BH \rightarrow A, BH \rightarrow D, EH \rightarrow D, CD \rightarrow A, CD \rightarrow E, E \rightarrow B, E \rightarrow C, AH \rightarrow B\}$

- *Bước 3. Loại bỏ pth thừa*
  - BH → A: $(BH)^{+}_{G\setminus\{BH \rightarrow A\}}$ = BHD không chứa A
  - BH →D: $(BH)^{+}_{G\setminus\{BH \rightarrow D\}}$ = BHA không chứa D
  - EH→D:$(EH)^{+}_{G\setminus\{EH \rightarrow D\}}$ = EHBCAD $\supset$ D: EH→D dư : loại
  - CD→A: $(CD)^{+}_{G\setminus\{CD \rightarrow A\}}$ = CDEB không chứa A
  - CD→E:$(CD)^{+}_{G\setminus\{CD \rightarrow E\}}$ = CDA không chứa E
  - E→B: $(E)^{+}_{G\setminus\{E \rightarrow B\}}$ = EC không chứa B
  - E→C: $(E)^{+}_{G\setminus\{E \rightarrow C\}}$ = EB không chứa C
  - AH→B: $(AH)^{+}_{G\setminus\{AH \rightarrow B\}}$ = AH không chứa B

Vậy một phủ tối thiểu của F là:

G = {BH → A, BH → D, CD → A, CD →E, E → B, E → C, AH → B}

Bài tập

Bài 2: Cho lđqh Q(ABCDEJHK) và tập pth F định nghĩa trên Q.

F = {AB → C, ABC → D, C → B, D → EG, H → D}

Hãy tìm một phủ tối thiểu của F.

Bài tập

Giải:

- Bước 1. Gọi G là tập pth thu được từ F bằng cách phân rã vế phải của các pth trong F:

  G = {AB → C, ABC → D, C → B, D → E, D → G, H → D}

- Bước 2. *Chỉ xét những pth có vế trái nhiều hơn một thuộc tính*
  - Xét pth AB → C:
    - A_G^+ = A không chứa C (không loại B)
    - B_G^+ = B không chứa C (không loại A)
  - Xét pth ABC → D:
    - AB_G^+ = ABCD chứa D (C dư, loại C)
    - A_G^+ = A không chứa D (không loại B)
    - B_G^+ = B không chứa D (không loại A)
  - Vậy: G = (G – {ABC → D}) ∪ {AB → D}

    = {AB → C, AB → D, C → B, D → E, D → G, H → D}

Bài tập

- Bước 3:
  - Xét $AB \rightarrow C$: $AB^+_{(G - \{AB \rightarrow C\})} = ABDG$ (không chứa C)
  - Xét $AB \rightarrow D$: $AB^+_{(G - \{AB \rightarrow D\})} = ABC$ (không chứa D)
  - Xét $C \rightarrow B$: $C^+_{(G - \{C \rightarrow B\})} = C$ (Không chứa B)
  - Xét $D \rightarrow E$: $D^+_{(G - \{D \rightarrow E\})} = DG$ (Không chứa E)
  - Xét $D \rightarrow G$: $C^+_{(G - \{D \rightarrow G\})} = DE$ (Không chứa G)
  - Xét $H \rightarrow D$: $C^+_{(G - \{C \rightarrow B\})} = H$ (Không chứa D)

Vậy phủ tối thiểu của F là:

$G = \{AB \rightarrow C, AB \rightarrow D, C \rightarrow B, D \rightarrow E, D \rightarrow G, H \rightarrow D\}$

Bài tập

Bài 3: Cho lđqh Q(ABCDEGH) và tập pth F định nghĩa trên Q.

F = {AB → CD, CE → BH, DGH → AC, G → A, G→B}

Hãy tìm một phủ tối thiểu của F.

Bài 4: Cho lđqh Q(ABCDEGH) và tập pth F định nghĩa trên Q.

F = {DA → CG, BD → GH, CD → A, DAC → BH}

Hãy tìm một phủ tối thiểu của F.

Bài tập

Bài 5: Cho lđqh Q(ABCDEGHI) và tập pth F định nghĩa trên Q.

F = {DGH → AC, AB → CD, E → BH, GI → AB}

a. Hãy tìm một phủ tối thiểu của F.

b. Tìm 1 khóa.

c. Tìm tất cả các khóa.

Bài 6: Cho lđqh Q(ABCDEGHI) và tập pth F định nghĩa trên Q.

F = {GI → AB, E → BH, DGH → AC, AB → CD}

a. Hãy tìm một phủ tối thiểu của F.

b. Tìm 1 khóa.

c. Tìm tất cả các khóa.

Bài tập

Bài 7: Cho lđqh Q(ABCDEGHI) và tập pth F định nghĩa trên Q.

F = {D → A, DAI → CG, BD → GH, DAC → BH}

a. Hãy tìm một phủ tối thiểu của F.

b. Tìm 1 khóa.

c. Tìm tất cả các khóa.

Bài 8: Cho lđqh Q(ABCDEGHI) và tập pth F định nghĩa trên Q.

F = {DAI → CG, BD → GH, DAC → BH, D → A}

a. Hãy tìm một phủ tối thiểu của F.

b. Tìm 1 khóa.

c. Tìm tất cả các khóa.

Bài tập

Bài 3: Cho lđqh Q(ABCDEGH) và tập pth F định nghĩa trên Q.

F = {AB → CD, CE → BH, DGH → AC, G → A, G→B}

Hãy tìm một phủ tối thiểu của F.

Bài 4: Cho lđqh Q(ABCDEGH) và tập pth F định nghĩa trên Q.

F = {DA → CG, BD → GH, CD → A, DAC → BH}

Hãy tìm một phủ tối thiểu của F.

Các dạng bài tập cơ bản

- ***Dạng 1. Tìm phủ tối thiểu của một tập phụ thuộc hàm***
  - *Phương pháp: Sử dụng thuật toán tìm phủ tối thiểu*
  - BT: Cho lđqh s = (R, F), R = ABCDEH, F = {BH → AD, BEH → CD, CD → AE, E → BC, AH →B}.
  - Tìm một phủ tối thiểu của F.

Các dạng bài tập cơ bản

❖ *Dạng 2. Chứng minh hai pth tương đương*

- *Phương pháp:* Sử dụng định lý $F^+ = G^+ \Leftrightarrow (F \models G) \wedge (G \models F)$

  (Với : $F \models G \Leftrightarrow \forall g \in G: F \models g$

  $F \models (X \rightarrow Y) \Leftrightarrow Y \subseteq X^+_F$)

- Ví dụ: Cho hai tập pth F, G xác định trên tập thuộc tính U = ABCDE,

  $F = \{AB \rightarrow DE, D \rightarrow BC, C \rightarrow A, B \rightarrow E\}$

  $G = \{AB \rightarrow D, AB \rightarrow E, D \rightarrow CE, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow E\}$

  Chứng minh: $F \equiv G$

Bài tập

- Bài tập Sách Phương pháp giải bài tập cơ sở dữ liệu quan hệ, Nguyễn Đức Thuần, Trương Ngọc Châu.

Q&A