Ví dụ 35:

a) Cho ánh xạ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, n\mapsto a_n = f(n)$. Khi đó ta có họ các số thực $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được đánh chỉ số bởi tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, và thường được gọi là dãy số thực.

b) Cho ánh xạ $g:\mathbb{N}\to\wp(\mathbb{R}), n\mapsto J_n = \{x\in\mathbb{R} \mid x<n\}$. Khi đó $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là họ các tập con của $\mathbb{R}$ thỏa: $J_0\subset J_1\subset J_2\subset ..\subset J_i\subset ..$

4.9.2 Giao, hợp, tích Descartes họ các tập hợp

Cho $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các tập hợp. Khi đó định nghĩa:

- Giao của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp ký hiệu $\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ xác định như sau:

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \forall\alpha : x\in A_\alpha\}$$

- Hợp của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp ký hiệu $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ xác định như sau:

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \exists\alpha : x\in A_\alpha\}$$

- Tích Descartes của họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một tập hợp ký hiệu $\prod\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ xác định như sau:

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \mid x_\alpha\in A_\alpha, \forall\alpha\in I\}$$

Nếu $A_\alpha = A, \forall\alpha\in I$ thì $\prod\limits_{\alpha\in I} A_\alpha = A^I$ gọi là lũy thừa bậc I của *A*.

Ví dụ 36:

a) Xét $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là họ các tập con của ¡ , $J_n = \{x\in ¡ \mid x<n\}$ thì:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n = \{x\in\mathbb{R} \mid x<0\} = J_0$$

b) Xét $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ là tập hợp các dãy số thực.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Trong các câu sau, câu nào không phải là mệnh đề. Nếu câu nào là mệnh đề hãy xác định chân trị của nó:

a) Em ơi mùa Xuân tới rồi đó!

b) Tổng 3 góc trong một tam giác bằng 180^0 phải không?

c) *x* là số nguyên tố.

d) $\mathbf{2^{2017}}$ là không là số chính phương.

2. Hãy đưa các mệnh đề sau dưới dạng hội, tuyển các mệnh đề đơn sau đó tìm chân trị của nó:

a) $1 < \sqrt{3} < 2$

b) $\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right| \le 1$

c) Số 725 là số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 2.

d) 7 và 5 là 2 số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

3. Tìm phủ định các mệnh đề sau:

a) Ở Nha Trang có 3 Khoa Công nghệ thông tin

b) Mùa hè ở Huế có gió Lào và nắng nóng.

c) 4+8=11

d) $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ và không phải là số nguyên tố.

4. Hãy phát biểu các mệnh đề sau dưới dạng mệnh đề kéo theo $p \Rightarrow q$ hay mệnh đề tương đương $p \Leftrightarrow q$

a) Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề nó.

b) Mọi dãy đơn điệu, bị chặn đề là dãy hội tụ.

c) Mọi hàm liên tục trên một khoảng đóng và bị chặn đều đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên khoảng đó.

d) Nếu tam giác ABC cân thì có 2 góc bằng nhau và đảo lại.

5. Tìm số tự nhiên a biết rằng trong 3 mệnh đề dưới đây có 2 mệnh đề là đúng và 1 mệnh đề là sai:

a) a + 51 là số chính phương

b) Chữ số tận cùng của a là 1

c) a - 38 là số chính phương

6. Xét các mệnh đề:

P: *Michael Phelps thắng trong kỳ thi Olympic*

Q: *Mọi người sẽ phục cậu ấy*

R: *Cậu ta sẽ trở nên giàu có*

S: *Cậu ta sẽ mất tất cả*

a) Hãy chuyển phát biểu sau bằng các phép toán đại số mệnh đề:

" *Nếu Michael Phelps thắng trong kỳ thi Olympic, mọi người sẽ khâm phục cậu ấy, và cậu ta sẽ trở nên giàu có. Nhưng, nếu cậu ta không thắng thì cậu ta sẽ mất tất cả*."

b) Diễn đạt các mệnh đề sau bằng các các câu diễn đạt bình thường:

1. $\overline{R} \Rightarrow \overline{S}$ 2. $(P \wedge Q) \Rightarrow \overline{S}$ 3. $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \overline{S})$

7. Biết rằng tất cả dữ liệu biểu diễn trong máy đề thể hiện dưới dạng nhị phân. Hãy thể hiện các phép toán logic trên dãy các bit để hoán đổi giá trị 2 biến có kiểu dữ liệu bất kỳ.

8. Phát biểu mệnh đề đảo và phản đảo các mệnh đề sau:

a) Nếu hôm nay có gió mùa Đông Bắc thì ngày mai trời giá rét.

b) Tôi đều đi tắm biển bất cứ ngày nào trời nắng.

c) Nếu một số chia hết cho 6 thì chia hết cho 2 và chia hết cho 3.

d) Nếu một số chia hết cho 9 thì tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.

9. Lập bảng chân trị cho các mệnh đề phức hợp sau:

a) $p \Rightarrow (\overline{q} \vee r)$

b) $\overline{p} \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

c) $(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow r)$

d) $(p \Leftrightarrow q) \vee (\overline{q} \Leftrightarrow r)$

10. Chứng minh các mệnh đề kéo theo sau là hằng đúng

a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

b) $p \Rightarrow (p \vee q)$

c) $\overline{p} \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

e) $\overline{p \Rightarrow q} \Rightarrow p$

f) $\overline{p \Rightarrow q} \Rightarrow \overline{q}$

g) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r$

11. Chứng tỏ rằng:

a) $\dfrac{p \Leftrightarrow q, q \Leftrightarrow r}{p \Leftrightarrow r}$ b) $\dfrac{p \wedge \overline{q} \Rightarrow \overline{p}}{p \Rightarrow q}$

c) $\dfrac{p \Rightarrow q, r \Rightarrow s}{(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)}$ d) $\dfrac{p \Rightarrow q, r \Rightarrow s}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$

12. Chứng minh hoặc bác bỏ rằng tích hai số vô tỉ là một số vô tỉ.

13. Dùng phương pháp chứng minh trực tiếp để chứng minh mệnh đề: “hai đường chéo của hình chữ nhật thì bằng nhau”

14. Dùng phương pháp chứng minh phản chứng chứng minh $\sqrt[3]{3}$ là một số vô tỉ.

15. Hãy diễn đạt các mệnh đề sau bằng ngôn ngữ thông thường và xác định tính đúng sai của các mệnh đề, sau đó lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề:

a) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 1)$ b) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 1)$

c) $(\forall x \in \mathbb{N}^*)(\exists y \in \mathbb{N})(x < y)$ d) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(n < m)$

16. Trong một phiên tòa xử án 3 bị can có liên quan đến vấn đề tài chánh, trước tòa cả 3 bị cáo đều tuyên thệ khai đúng sự thật và lời khai như sau :

Anh A: Chị B có tội và anh C vô tội

Chị B : Nếu anh A có tội thì anh C cũng có tội

Anh C: Tôi vô tội nhưng một trong hai người kia là có tội

Hãy xét xem ai là người có tội ?

17. Cho $P(x) \equiv$ "x nói được tiếng Anh", $Q(x) \equiv$ " x biết ngôn ngữ C". Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng $P(x)$, $Q(x)$ và các phép toán logic. Cho không gian các lượng từ là tập hợp tất cả sinh viên Đại học Nha Trang.

a) Có một sinh viên Đại học Nha Trang nói được tiếng Anh và biết ngôn ngữ C.

b) Có một sinh viên Đại học Nha Trang nói được tiếng Anh và không biết ngôn ngữ C

c) Mọi sinh viên Đại học Nha Trang nói được tiếng Anh hoặc biết ngôn ngữ C.

d) Không có sinh viên Đại học Nha Trang không nói được tiếng Anh và không biết ngôn ngữ C.

18. Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng:

a) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$

b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$

19. Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng

a) $A \oplus A = \varnothing$

b) $A \oplus \varnothing = A$

c) $A \oplus B = B \oplus A$

d) $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

e) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

f) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

20. Cho A, B, C là 3 tập hữu hạn. Chứng minh

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

21. Dùng lý thuyết tập hợp để đơn giản các biểu thức dưới đây:

a) $A \cap (B \cap \overline{A})$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap D)$

c) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$

d) $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D})$

22. Cho $E = \{a, b, c, d\}$ và $F = \{1, 2, 3, 4\}$ và các hệ thức t, f, g, h trên $E \times F$ như sau:

$G_t = \{(a,1), (a,2), (b,2), (c,3), (d,4)\}$; $G_f = \{(a,1), (b,3), (c,2), (d,3)\}$

$G_g = \{(a,3), (b,2), (c,1), (d,4)\}$; $G_h = \{(a,4), (c,2), (d,1)\}$

Hệ thức nào thể hiện là một ánh xạ từ E vào F. Nếu hệ thức nào là một ánh xạ thì xét tính chất của ánh xạ.

23. Cho E là tập hợp các điểm thuộc mặt phẳng, O là một điểm cố định của E. F là tập hợp các đường thẳng trong E. Với mỗi điểm $M \in E$, ta cho tương ứng với đường thẳng OM. Ta có định nghĩa được một ánh xạ không? Phải sửa đổi thế nào để có một ánh xạ $f : E \to F$? f có đơn ánh không? f có toàn ánh không?

24. Khảo sát tính chất của các ánh xạ sau từ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, xác định bởi:

a) $x\mapsto 3x+2$ b) $x\mapsto x^2$ c) $x\mapsto x^3$ d) $x\mapsto x^n, n\in\mathbb{N}$

Tìm các ánh xạ ngược nếu có.

25. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

a) Khảo sát tính chất của f. Tìm $f(\mathbb{R})$. Tìm ảnh đảo của 1,2 và $\frac{3}{5}$.

b) Cho ánh xạ $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ xác định như sau: $x\mapsto\frac{1}{x}$. Tìm $f\circ g$.

26. Cho 4 số nguyên a,b,c,d thỏa $ad-bc=1$, gọi là 4 số nguyên tỉ đối. Xét ánh xạ: $f:(x,y)\mapsto(ax+by,cx+dy)$ từ $\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2$. Gọi F là tập hợp các ánh xạ được xác định bởi các số nguyên tỉ đối.

a) Chứng minh f là một song ánh. Tìm f^{-1}.

b) Chứng minh nếu $f,g\in F\Rightarrow f\circ g\in F$

27. Cho A là một tập con xác định của tập hợp E. Xét các ánh xạ $f,g:\wp(E)\to\wp(E)$

$$f(X)=Y=A\cap X \qquad g(X)=Z=A\cup X$$

Tìm: $f(\wp(E)),g(\wp(E)),f^{-1}(Y),g^{-1}(Z)$

28. Cho ánh xạ $f:E\to F$ và $A,B\subset E; A',B'\subset F$. Chứng minh:

a) $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$

b) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

c) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

d) $f^{-1}(f(A))\supset A$

29. Cho hai ánh xạ $f:E\to F, g:F\to G$. Chứng minh:

a) (f toàn ánh và g toàn ánh) $\Rightarrow$ ($g\circ f$ là toàn ánh)

b) (f đơn ánh và g đơn ánh) $\Rightarrow$ ($g\circ f$ là đơn ánh)

c) (f,g là song ánh) $\Rightarrow$ ($g\circ f$ là song ánh) và $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

30. Xét ánh xạ $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, xác định bởi $f(n)=n+(-1)^n$

a) Tìm f^2 suy ra f^{-1}

b) Chứng minh f là một đơn ánh

c) Giải phương trình $f(n)=365$

Bài đọc thêm Nghịch lý Russel

Lý thuyết tập hợp của Cantor là có mâu thuẫn. Nhà toán học Zermelo đã phát hiện ra mâu thuẫn này nhưng chỉ công bố cho một số thành viên của Đại học Gốttingen:

$$R = \{x \mid x \notin x\} \Rightarrow R \in R \Leftrightarrow R \notin R$$

Nếu định nghĩa: Ông thợ cạo là người cạo cho những người (khác) mà không thể cạo cho chính mình. Vậy, Ông thợ cạo đó có cạo cho chính mình không?

Nghịch lý: *Ông thợ cạo không cạo cho chính mình, vì vậy ông thuộc nhóm người không tự cạo cho chính mình. Do đó, ông thợ cạo cạo cho chính ông (vì theo định nghĩa Ông thợ cạo là người cạo cho những người mà không thể cạo cho chính mình). Nếu điều này xảy ra, ông thợ cạo cạo cho chính mình thì theo định nghĩa ông không phải là thợ cạo.*