CƠ SỞ TOÁN CHO TIN HỌC

KHÔNG GIAN METRIC

156

Khái niệm

Phép toán đặc trưng của giải tích: lấy giới hạn → phải tìm cách xác định mức độ "xa", "gần" giữa các đối tượng → khái niệm khoảng cách (metric)

157

Định nghĩa

Một metric d trên một tập hợp X là một hàm (ánh xạ) $d : X \times X \to \mathbf{R}$ thỏa mãn 3 tiên đề sau $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$

1. $d(x,y) \geq 0$

   $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (BĐT tam giác)

158

Định nghĩa

- Không gian metric (X, d) là một tập hợp X với một metric d định nghĩa trên X.
- Với ngôn ngữ hình học:
  - $x \in X$: điểm của không gian X
  - $d(x, y) \geq 0$: khoảng cách giữa 2 điểm x, y.

159

Định nghĩa

Ví dụ:

1. Metric tầm thường trên X là metric rời rạc

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

2. Cho metric d : $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$d(x,y) = |x - y|$$

160

Định nghĩa

Ví dụ:

3. Metric Euclide trên $\mathbf{R^n}$ d : $\mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

161

Định nghĩa

Ví dụ:

4. Tập hợp các hàm liên tục f : [a,b] $\to$ **R** là $\mathbf{C_{[a,b]}}$.

   Với f, g thuộc $C_{[a,b]}$ định nghĩa

$$d_1(f,g) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

$$d_2(f,g) = \int_b^a |f(x) - g(x)| dx$$

162

Một số tính chất

Cho (X, d)

1. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, ta có BĐT tam giác mở rộng

   $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)$

2. $\forall x, y, u, v \in X$, ta có BĐT tứ giác

   $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$

163

Chuẩn

❖ Các không gian cần xem xét là không gian vector hay không gian tuyến tính.

❖ Các metric thường được suy dẫn từ một chuẩn gọi là "chiều dài" của một vector.

164

Chuẩn

❖ Không gian vector được chuẩn hóa $(X, \|.\|)$ là một không gian vector X cùng với hàm $\|.\| : X \to \mathbf{R}$, được gọi là một chuẩn trên X.

❖ $\forall x, y \in X, k \in \mathbf{R}$:

1. $0 \le \|x\| < \infty$ và $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|kx\| = |k|\|x\|$
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

❖ Với $(X, \|.\|)$, cho $d : X \times X \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

là một metric trên X

165

Tập mở

❖ Cho không gian metric (X, d). Với $x_0 \in X$, ký hiệu

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

gọi là quả cầu mở tâm x_0, bán kính r

➢ Điểm x được gọi là điểm trong của tập hợp A, nếu $\exists r > 0 : B(x, r) \subset A$

➢ Tập hợp tất cả các điểm trong của A gọi là phần trong của A, ký hiệu Int A hay $\mathring{A}$, rõ ràng $\text{Int}A \subset A$

166

Tập mở

➢ Tập A gọi là tập mở nếu mọi điểm của nó là điểm trong. Quy ước $\varnothing$ là tập mở:

A tập mở $\Leftrightarrow A = \text{Int}A$

$\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists r > 0 : B(x, r) \subset A$

167

Tập mở - Tính chất

- Cho không gian metric (X, d), họ các tập con của X có 3 tính chất đặc trưng sau:
  - $\varnothing$, X là các tập mở
  - Hợp một số tùy ý các tập mở là tập mở
  - Giao hữu hạn các tập mở là tập mở
- Với một tập hợp A bất kỳ, phần trong của A là tập hợp mở lớn nhất chứa trong A.

  (B $\subset$ A, B mở) $\Rightarrow$ B $\subset$ IntA

168

Tập đóng – Bao đóng của tập hợp

- Tập hợp A $\subset$ X gọi là tập đóng nếu X \ A là tập mở.
- Điểm x được gọi là một điểm dính của tập A nếu A $\cap$ B(x, r) $\neq \varnothing$, $\forall$r > 0.
- Tập tất cả các điểm dính của A gọi là bao đóng của A, ký hiệu là $\overline{A}$ hay Cl A.

  Hiển nhiên ta luôn có A $\subset \overline{A}$

169