TOÁN RỜI RẠC
PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

NGUYỄN HẢI TRIỀU[1]

[1]Bộ môn Kỹ thuật phần mềm,

Khoa Công nghệ thông tin, Trường ĐH Nha Trang

NhaTrang, February 2022

Tổng quan

1. Các nguyên lý đếm cơ bản
2. Giải tích tổ hợp
3. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng
4. Sinh các hoán vị và tổ hợp

Nguyên lý cộng

Giả sử để làm công việc A ta có 2 phương pháp

- Phương pháp 1: có n cách làm
- Phương pháp 2: có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là $n + m$.

Ví dụ 1.1

An có 3 áo tay dài, 5 áo tay ngắn. Để chọn một cái áo thì An có mấy cách?

Nguyên lý cộng

Giả sử để làm công việc A ta có 2 phương pháp

- Phương pháp 1: có n cách làm
- Phương pháp 2: có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là $n + m$.

Ví dụ 1.1

An có 3 áo tay dài, 5 áo tay ngắn. Để chọn một cái áo thì An có mấy cách?

->*8 cách*

Ví dụ 1.2

Nhà trường cần chọn một sinh viên khoa CNTT năm hai, năm ba hoặc năm tư đi tham gia hội nghị sinh viên thành phố. Biết rằng trường có 501 sinh viên năm hai, 402 sinh viên năm ba, 345 sinh viên năm tư. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Ví dụ 1.2

Nhà trường cần chọn một sinh viên khoa CNTT năm hai, năm ba hoặc năm tư đi tham gia hội nghị sinh viên thành phố. Biết rằng trường có 501 sinh viên năm hai, 402 sinh viên năm ba, 345 sinh viên năm tư. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

-> *1248 cách*

Ví dụ 1.3

Một sinh viên có thể chọn bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 23, 15 và 19 bài. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một bài thực hành?

Ví dụ 1.2

Nhà trường cần chọn một sinh viên khoa CNTT năm hai, năm ba hoặc năm tư đi tham gia hội nghị sinh viên thành phố. Biết rằng trường có 501 sinh viên năm hai, 402 sinh viên năm ba, 345 sinh viên năm tư. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

-> *1248 cách*

Ví dụ 1.3

Một sinh viên có thể chọn bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 23, 15 và 19 bài. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một bài thực hành?

-> *57 cách*

Ví dụ 1.4

Trên kệ có 555 viên bi đỏ, 313 viên bi vàng, 123 viên bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một viên bi?

Ví dụ 1.4

Trên kệ có 555 viên bi đỏ, 313 viên bi vàng, 123 viên bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một viên bi?
-> 991 cách

Nguyên lý nhân

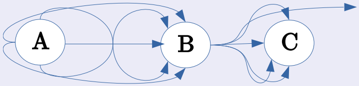
Giả sử để làm công việc A cần thực hiện 2 bước

- Bước 1 có n cách làm
- Bước 2 có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là $n \times m$.

Ví dụ 1.5

Có nhiêu cách đi từ A đến C?



Nguyên lý nhân

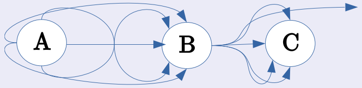
Giả sử để làm công việc A cần thực hiện 2 bước

- Bước 1 có n cách làm
- Bước 2 có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là $n \times m$.

Ví dụ 1.5

Có nhiêu cách đi từ A đến C?



->*20*

Ví dụ 1.6

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân có độ dài 6?

Ví dụ 1.6

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân có độ dài 6?
-> *64*

Ví dụ 1.7

(Nâng cao) Cho tập hợp $\boldsymbol{A}$ *gồm 6 phần tử và tập hợp* $\boldsymbol{B}$ *gồm 10 phần tử. Hỏi*

1. *Có bao nhiêu ánh xạ từ* $\boldsymbol{A}$ *vào* $\boldsymbol{B}$*?*

Ví dụ 1.6

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân có độ dài 6?
->64

Ví dụ 1.7

(Nâng cao) Cho tập hợp $\boldsymbol{A}$ *gồm 6 phần tử và tập hợp* $\boldsymbol{B}$ *gồm 10 phần tử. Hỏi*

1. *Có bao nhiêu ánh xạ từ* $\boldsymbol{A}$ *vào* $\boldsymbol{B}$*?*
   -> Với mỗi phần tử x của $\boldsymbol{A}$ *ta có 10 cách chọn ảnh của x (vì B có 10 phần tử) vậy nên có* 10^6 *cách chọn*

Ví dụ 1.6

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân có độ dài 6?
->64

Ví dụ 1.7

(Nâng cao) Cho tập hợp $\boldsymbol{A}$ *gồm 6 phần tử và tập hợp* $\boldsymbol{B}$ *gồm 10 phần tử. Hỏi*

1. *Có bao nhiêu ánh xạ từ* $\boldsymbol{A}$ *vào* $\boldsymbol{B}$*?*
   -> Với mỗi phần tử x của $\boldsymbol{A}$ *ta có 10 cách chọn ảnh của x (vì B có 10 phần tử) vậy nên có* 10^6 *cách chọn*
2. *Có bao nhiêu đơn ánh từ* $\boldsymbol{A}$ *vào* $\boldsymbol{B}$*?*

Ví dụ 1.6

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân có độ dài 6?
->64

Ví dụ 1.7

*(Nâng cao) Cho tập hợp **A** gồm 6 phần tử và tập hợp **B** gồm 10 phần tử. Hỏi*

1. *Có bao nhiêu ánh xạ từ **A** vào **B**?*
   *-> Với mỗi phần tử x của **A** ta có 10 cách chọn ảnh của x (vì B có 10 phần tử) vậy nên có* 10^6 *cách chọn*
2. *Có bao nhiêu đơn ánh từ **A** vào **B**?*
   -> 151200

Ví dụ 1.8

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau mà chia hết cho 2?

Ví dụ 1.8

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau mà chia hết cho 2?
-> Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$*. Dựa vào yêu cầu bài toán số a phải khác 0. Xét trường hợp* $c = 0$ *và trường hợp* $c \neq 0$*. Có 52 số.*

Ví dụ 1.9

Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái trong bảng chữ cái Latinh và một số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau?

Ví dụ 1.8

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau mà chia hết cho 2?
-> Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$*. Dựa vào yêu cầu bài toán số a phải khác 0. Xét trường hợp* $c = 0$ *và trường hợp* $c \neq 0$*. Có 52 số.*

Ví dụ 1.9

Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái trong bảng chữ cái Latinh và một số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau?
-> nhiều nhất ta có thể gán nhãn cho 2600 chiếc ghế

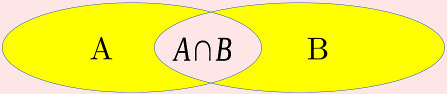
Nguyên lý bù trừ

Ví dụ 1.10

Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8 hoặc được bắt đầu bằng 1 hoặc được kết thúc bằng 00?

Khi hai hay nhiều công việc có thể được làm đồng thời, để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai hay nhiều việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời của cả hai hay nhiều việc đó. Nguyên lý bù trừ được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau: Cho **A** và **B** là hai tập hữu hạn. Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Dựa vào nguyên lý bù trừ, ta có thể giải ví dụ 1.10 như sau:

- Số lượng chuỗi nhị phân bắt đầu bằng 1 là $2^7 = 128$
- Số lượng chuỗi nhị phân kết thúc bằng 00 là $2^6 = 64$

Dựa vào nguyên lý bù trừ, ta có thể giải ví dụ 1.10 như sau:

- Số lượng chuỗi nhị phân bắt đầu bằng 1 là $2^7 = 128$
- Số lượng chuỗi nhị phân kết thúc bằng 00 là $2^6 = 64$
- Số lượng chuỗi nhị phân bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 00 là $2^5 = 32$

Vậy số lượng chuỗi thỏa yêu cầu là $128 + 64 - 32 = 160$

Dựa vào nguyên lý bù trừ, ta có thể giải ví dụ 1.10 như sau:

- Số lượng chuỗi nhị phân bắt đầu bằng 1 là $2^7 = 128$
- Số lượng chuỗi nhị phân kết thúc bằng 00 là $2^6 = 64$
- Số lượng chuỗi nhị phân bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 00 là $2^5 = 32$

Vậy số lượng chuỗi thỏa yêu cầu là $128 + 64 - 32 = 160$

Ví dụ 1.11

Có 2 bài toán kiểm tra. Trong lớp có 30 sinh viên làm được bài thứ nhất và 20 sinh viên làm được bài thứ hai và chỉ có 10 sinh viên làm được cả 2 bài. Biết rằng mỗi sinh viên đều làm ít nhất một bài, hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

Dựa vào nguyên lý bù trừ, ta có thể giải ví dụ 1.10 như sau:

- Số lượng chuỗi nhị phân bắt đầu bằng 1 là $2^7 = 128$
- Số lượng chuỗi nhị phân kết thúc bằng 00 là $2^6 = 64$
- Số lượng chuỗi nhị phân bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 00 là $2^5 = 32$

Vậy số lượng chuỗi thỏa yêu cầu là $128 + 64 - 32 = 160$

Ví dụ 1.11

Có 2 bài toán kiểm tra. Trong lớp có 30 sinh viên làm được bài thứ nhất và 20 sinh viên làm được bài thứ hai và chỉ có 10 sinh viên làm được cả 2 bài. Biết rằng mỗi sinh viên đều làm ít nhất một bài, hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

Đặt **A, B** lần lượt là những sinh viên giải được bài 1 và bài 2. Vậy số sinh viên của lớp chính là số phần tử của $|A \cup B|$.

Tương tự đối với ba tập hợp hữu hạn **A, B, C**, ta có

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ví dụ 1.12

Bài kiểm tra Toán rời rạc có 3 bài. Biết rằng, mỗi sinh viên làm được ít nhất 1 bài, trong đó có

- *20 sinh viên làm được bài 1; 14 sinh viên làm được bài 2; 10 sinh viên làm được bài 3*
- *6 sinh viên giải được bài 1 và 3; 5 sinh viên giải được bài 2 và bài 3; 2 sinh viên giải được bài 1 và 2*
- *1 sinh viên giải được cả 3 bài*

Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

Nguyên lý Dirichlet

Nguyên lý Dirichlet (chuồng bồ câu) được nhìn từ thực tế như sau:

- Có 20 chim bồ câu ở trong 7 cái chuồng. Khi đó sẽ có ít nhất 1 chuồng có 3 con bồ câu trở lên.
- Trong một nhóm 367 người thì có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh nhật.

Mệnh đề

Nếu có $k+1$ (hoặc nhiều hơn) đồ vật được đặt vào trong k hộp thì tồn tại một hộp có ít nhất hai đồ vật.

Định nghĩa 1.1

Giá trị trần của x, ký hiệu là $\lceil x \rceil$, là số nguyên nhỏ nhất mà lớn hơn hay bằng x (ý nghĩa tương tự như hàm ceil(x) trong nhiều ngôn ngữ lập trình).

Nguyên lý Dirichlet

Giả sử có n chim bồ câu ở trong k chuồng, khi đó tồn tại ít nhất một chuồng chứa từ $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ bồ câu trở lên.

Ví dụ 1.13

- *Trong lớp toán rời rạc có 65 bạn SV thì có ít nhất bao nhiêu bạn cùng tháng sinh?*
- *Trong một lớp học phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để có ít nhất 6 sinh viên có cùng thứ bậc học tập, biết rằng có 5 loại thứ bậc A, B, C, D và E?*

Ví dụ 1.14

Trong kỳ thi học sinh giỏi, điểm bài thi được đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi rằng ít nhất có bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm được hai học sinh có kết quả thi như nhau?

Ví dụ 1.15

Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong nước có số điện thoại khác nhau, mỗi số có 9 chữ số (giả sử số điện thoại có dạng 0XX - 8XXXXX với X nhận các giá trị từ 0 đến 9).

Ví dụ 1.15

Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong nước có số điện thoại khác nhau, mỗi số có 9 chữ số (giả sử số điện thoại có dạng 0XX - 8XXXXX với X nhận các giá trị từ 0 đến 9).
-> Có $10^7 = 10000000$ *số điện thoại khác nhau có dạng 0XX - 8XXXXX. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet, trong số 25 triệu máy điện thoại thì có ít nhất* $\left\lceil \frac{25000000}{10000000} \right\rceil = 3$ *số điện thoại bị trùng nhau. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 3 mã vùng.*

Hoán vị

Định nghĩa 2.1

Cho tập hợp ***A*** *gồm n phần tử. Mỗi cách sắp đặt* ***có thứ tự*** *n phần tử của A được gọi là một hoán vị của n phần tử.*

Ví dụ 2.1

Cho ***A*** *= {1, 2, 3}. Khi đó A có các hoán vị sau: 123, 132, 213, 231, 312, 321*

Định lý

P_n là số các hoán vị của n phần tử, và

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

Ví dụ 2.2

Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập X?

Ví dụ 2.3

Cần sắp xếp 5 sinh viên A, B, C, D, E thành một dãy hàng dọc
i) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?
ii) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai sinh viên A và B luôn đứng ở đầu hàng?

Ví dụ 2.2

Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập X?

Ví dụ 2.3

Cần sắp xếp 5 sinh viên A, B, C, D, E thành một dãy hàng dọc
i) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?
ii) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai sinh viên A và B luôn đứng ở đầu hàng?
-> A và B luôn đứng đầu hàng nên có 2! cách, vì xếp theo thứ tự nên 3 sinh viên còn lại có 3! cách. Vậy theo quy tắc nhân có 12 cách

Ví dụ 2.4

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lẻ? bao nhiêu số không chia hết cho 5?

Ví dụ 2.5

Cần sắp xếp 3 sinh viên nữ và 5 sinh viên nam thành một hàng dọc.

1. *Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu 3 sinh viên nữ luôn đứng liền nhau ?*
2. *Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu sinh viên đứng đầu hàng là sinh viên nữ và sinh viên cuối hàng là sinh viên nam ?*

Chỉnh hợp

Định nghĩa 2.2

*Cho **A** là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi bộ sắp thứ tự gồm k phần tử của **A** được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.*

Định lý

Số các chỉnh hợp chập k của n, ký hiệu A_n^k

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ 2.6

Cho $\boldsymbol{X} = \{a, b, c\}$. Khi đó $\boldsymbol{X}$ có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là 6 bộ sắp xếp có thứ tự gồm: ab, ba, ac, ca, bc, cb

Ví dụ 2.7

Có bao nhiêu số tự nhiên ngồm 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ 1, 2, 3, 4, 5, 6. Yêu cầu sử dụng cả hai cách: nguyên lý nhân và chỉnh hợp.

Ví dụ 2.8

Lớp CNTT có 15 sinh viên nam và 20 nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 sinh viên làm ban cán sự lớp gồm: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

1. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn?*
2. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam?*
3. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ?*

Ví dụ 2.7

Có bao nhiêu số tự nhiên ngồm 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ 1, 2, 3, 4, 5, 6. Yêu cầu sử dụng cả hai cách: nguyên lý nhân và chỉnh hợp.

Ví dụ 2.8

Lớp CNTT có 15 sinh viên nam và 20 nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 sinh viên làm ban cán sự lớp gồm: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

1. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn?*
2. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam?*
3. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ?*

Đáp án: A_{35}^{3};

Ví dụ 2.7

Có bao nhiêu số tự nhiên ngồm 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ 1, 2, 3, 4, 5, 6. Yêu cầu sử dụng cả hai cách: nguyên lý nhân và chỉnh hợp.

Ví dụ 2.8

Lớp CNTT có 15 sinh viên nam và 20 nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 sinh viên làm ban cán sự lớp gồm: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

1. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn?*
2. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam?*
3. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ?*

Đáp án: A_{35}^{3}; $15 \times A_{34}^{2}$;

Ví dụ 2.7

Có bao nhiêu số tự nhiên ngồm 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ 1, 2, 3, 4, 5, 6. Yêu cầu sử dụng cả hai cách: nguyên lý nhân và chỉnh hợp.

Ví dụ 2.8

Lớp CNTT có 15 sinh viên nam và 20 nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 sinh viên làm ban cán sự lớp gồm: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

1. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn?*
2. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam?*
3. *Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ?*

Đáp án: A_{35}^3; $15 \times A_{34}^2$; $A_{35}^3 - A_{15}^3$.

Tổ hợp

Định nghĩa 2.3

*Cho **A** là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của **A** được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.*

Định lý

Số tổ hợp chập k của n, ký hiệu $\binom{n}{k}$ hay C_n^k

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ví dụ 2.9

Có bao nhiêu cách chọn 10 sinh viên trong một lớp có 30 sinh viên?

Ví dụ 2.10

Một lớp có 40 sinh viên gồm 25 nam và 15 nữ. Ta cần chọn ra 6 sinh viên tham gia hội nghị của trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

- *Không phân biệt nam nữ?*
- *Có 4 nam và 2 nữ?*
- *Có ít nhất là 4 sinh viên nam? (gợi ý: tức là số lượng sv nam có thể là 4 hoặc 5 hoặc 6)*

Ví dụ 2.11

Cho $\boldsymbol{T} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$. *Ký hiệu* $|X|$ *để chỉ số lượng phần tử của tập hợp* X.

1. $\boldsymbol{T}$ *có bao nhiêu tập hợp con* $\boldsymbol{A}$ *thỏa* $|\boldsymbol{A}| = 6$*?*
2. $\boldsymbol{T}$ *có bao nhiêu tập hợp con* $\boldsymbol{A}$ *thỏa* $|\boldsymbol{A}| = 6$ *và* $d \in \boldsymbol{A}$*?*
3. $\boldsymbol{T}$ *có bao nhiêu tập hợp con* $\boldsymbol{A}$ *thỏa* $|\boldsymbol{A}| = 6$ *và* $d \notin \boldsymbol{A}$*?*

Ví dụ 2.11

Cho $\boldsymbol{T} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$. *Ký hiệu* $|X|$ *để chỉ số lượng phần tử của tập hợp* X.

1. $\boldsymbol{T}$ *có bao nhiêu tập hợp con* $\boldsymbol{A}$ *thỏa* $|\boldsymbol{A}| = 6$?
2. $\boldsymbol{T}$ *có bao nhiêu tập hợp con* $\boldsymbol{A}$ *thỏa* $|\boldsymbol{A}| = 6$ *và* $d \in \boldsymbol{A}$?
3. $\boldsymbol{T}$ *có bao nhiêu tập hợp con* $\boldsymbol{A}$ *thỏa* $|\boldsymbol{A}| = 6$ *và* $d \notin \boldsymbol{A}$?

Đáp án: C_{11}^6; C_{10}^5; $C_{11}^6 - C_{10}^5$;

Ví dụ 2.12

Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bác sĩ, 4 kỹ sư, 3 luật sư vào một bàn dài có 12 chỗ ngồi (được đánh số từ 1 đến 12) trong mỗi trường hợp sau:

1. *không có điều kiện gì thêm?*
2. *các đồng nghiệp ngồi cạnh nhau?*
3. *các bác sĩ ngồi cạnh nhau ở một đầu bàn, còn các kỹ sư, luật sư ngồi xen kẻ ở đầu bàn còn lại?*

Ví dụ 2.12

Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bác sĩ, 4 kỹ sư, 3 luật sư vào một bàn dài có 12 chỗ ngồi (được đánh số từ 1 đến 12) trong mỗi trường hợp sau:

1. *không có điều kiện gì thêm?*
2. *các đồng nghiệp ngồi cạnh nhau?*
3. *các bác sĩ ngồi cạnh nhau ở một đầu bàn, còn các kỹ sư, luật sư ngồi xen kẻ ở đầu bàn còn lại?*

Đáp án:

1. $12!$
2. $3! \times 5! \times 4! \times 3!$
3. $2! \times 5! \times 4! \times 3!$

Ví dụ 2.13

Có bao nhiêu số tự nhiên $N = \overline{abcdefgh}$ *gồm 8 chữ số hệ thập phân a, b, c, d, e, f, g, h thỏa các điều kiện a lẻ,* $b = 4$, $g > 6$, *h chia hết cho 3 và c, d, e, f tùy ý?*

Ví dụ 2.13

Có bao nhiêu số tự nhiên $N = \overline{abcdefgh}$ *gồm 8 chữ số hệ thập phân a, b, c, d, e, f, g, h thỏa các điều kiện a lẻ,* $b = 4$, $g > 6$, *h chia hết cho 3 và c, d, e, f tùy ý?*
-> $5 \times 1 \times 3 \times 4 \times 10^4$

Ví dụ 2.14

1. *Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ?*

Ví dụ 2.13

Có bao nhiêu số tự nhiên $N = \overline{abcdefgh}$ *gồm 8 chữ số hệ thập phân a, b, c, d, e, f, g, h thỏa các điều kiện a lẻ,* $b = 4$, $g > 6$, *h chia hết cho 3 và c, d, e, f tùy ý?*

-> $5 \times 1 \times 3 \times 4 \times 10^4$

Ví dụ 2.14

1. *Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ?* -> $7! \times 6!$
2. *Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ?*

Ví dụ 2.13

Có bao nhiêu số tự nhiên $N = \overline{abcdefgh}$ *gồm 8 chữ số hệ thập phân a, b, c, d, e, f, g, h thỏa các điều kiện a lẻ,* $b = 4$, $g > 6$, *h chia hết cho 3 và c, d, e, f tùy ý?*

-> $5 \times 1 \times 3 \times 4 \times 10^4$

Ví dụ 2.14

1. *Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ?* -> $7! \times 6!$
2. *Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ?* -> $6! \times 6! + 6! \times 6!$
3. *Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà 6 nam đứng gần nhau?*

Ví dụ 2.13

Có bao nhiêu số tự nhiên $N = \overline{abcdefgh}$ *gồm 8 chữ số hệ thập phân a, b, c, d, e, f, g, h thỏa các điều kiện a lẻ,* $b = 4$, $g > 6$, *h chia hết cho 3 và c, d, e, f tùy ý?*

-> $5 \times 1 \times 3 \times 4 \times 10^4$

Ví dụ 2.14

1. *Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ?* -> $7! \times 6!$
2. *Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ?* -> $6! \times 6! + 6! \times 6!$
3. *Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà 6 nam đứng gần nhau?* -> $6! \times 6! \times 7$
4. *Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà 7 nam đứng gần nhau và 6 nữ đứng gần nhau?*

Ví dụ 2.13

Có bao nhiêu số tự nhiên $N = \overline{abcdefgh}$ gồm 8 chữ số hệ thập phân a, b, c, d, e, f, g, h thỏa các điều kiện a lẻ, b = 4, g > 6, h chia hết cho 3 và c, d, e, f tùy ý?

->$5 \times 1 \times 3 \times 4 \times 10^4$

Ví dụ 2.14

1. *Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ?* -> $7! \times 6!$
2. *Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ?* -> $6! \times 6! + 6! \times 6!$
3. *Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà 6 nam đứng gần nhau?* -> $6! \times 6! \times 7$
4. *Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà 7 nam đứng gần nhau và 6 nữ đứng gần nhau?* -> $7! \times 6! \times 2$

Ví dụ 2.15

Từ 9 sinh viên nam và 8 sinh viên nữ, ta muốn chọn ra một đội gồm 10 người sao cho trong đội đó có ít nhất 4 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Ví dụ 2.15

Từ 9 sinh viên nam và 8 sinh viên nữ, ta muốn chọn ra một đội gồm 10 người sao cho trong đội đó có ít nhất 4 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Gợi ý: vì đề yêu cầu có ít nhất là 4 nam và 4 nữ nên số lượng nam có thể là 4 hoặc 5 hoặc 6. Vậy số cách chọn là:

$C_9^4 \times C_8^6 + C_9^5 \times C_8^5 + C_9^6 \times C_8^4$

Ví dụ 2.16

Cho $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$

1. *Có bao nhiêu tập hợp con mà mỗi tập có đúng 5 phần tử?*
2. *Có bao nhiêu tập hợp con mà mỗi tập có không quá 4 phần tử?*

Ví dụ 2.15

Từ 9 sinh viên nam và 8 sinh viên nữ, ta muốn chọn ra một đội gồm 10 người sao cho trong đội đó có ít nhất 4 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Gợi ý: vì đề yêu cầu có ít nhất là 4 nam và 4 nữ nên số lượng nam có thể là 4 hoặc 5 hoặc 6. Vậy số cách chọn là:

$C_9^4 \times C_8^6 + C_9^5 \times C_8^5 + C_9^6 \times C_8^4$

Ví dụ 2.16

Cho $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$

1. *Có bao nhiêu tập hợp con mà mỗi tập có đúng 5 phần tử?*
2. *Có bao nhiêu tập hợp con mà mỗi tập có không quá 4 phần tử?*

   Gợi ý: số lượng phần tử của tập con có thể là 0, 1,2 hoặc 3.

Ví dụ 2.17

Từ 9 nam và 11 nữ, ta muốn chọn ra một đội văn nghệ gồm 10 người sao cho số nam và số nữ trong đội chênh lệch nhau không quá 2. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn đội?

Ví dụ 2.17

Từ 9 nam và 11 nữ, ta muốn chọn ra một đội văn nghệ gồm 10 người sao cho số nam và số nữ trong đội chênh lệch nhau không quá 2. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn đội?

->$C_9^4 \times C_{11}^6 + C_9^5 \times C_{11}^5 + C_9^6 \times C_{11}^4$

Ví dụ 2.18

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và 8, ta có thể tạo ra

1. *bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?*
2. *bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau trong đó có chữ số 5?*

Ví dụ 2.17

Từ 9 nam và 11 nữ, ta muốn chọn ra một đội văn nghệ gồm 10 người sao cho số nam và số nữ trong đội chênh lệch nhau không quá 2. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn đội?

-> $C_9^4 \times C_{11}^6 + C_9^5 \times C_{11}^5 + C_9^6 \times C_{11}^4$

Ví dụ 2.18

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và 8, ta có thể tạo ra

1. *bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?*
2. *bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau trong đó có chữ số 5?*

-> *Đáp án:* A_8^4; $A_8^3 - A_7^3$.

Ví dụ 2.19

Có 3 luật sư, 4 bác sĩ và 5 kỹ sư xếp thành một hàng dọc sao cho các đồng nghiệp phải đứng cạnh nhau.

1. *Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp?*
2. *Nếu yêu cầu thêm các luật sư không đứng ở đầu hàng thì có tất cả bao nhiêu cách xếp?*

Ví dụ 2.19

Có 3 luật sư, 4 bác sĩ và 5 kỹ sư xếp thành một hàng dọc sao cho các đồng nghiệp phải đứng cạnh nhau.

1. *Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp?*
2. *Nếu yêu cầu thêm các luật sư không đứng ở đầu hàng thì có tất cả bao nhiêu cách xếp?*

-> *Đáp án:* $3! \times 4! \times 5! \times 3!$; $2 \times 2! \times 3! \times 4! \times 5!$

1. Các nguyên lý đếm cơ bản
2. Giải tích tổ hợp
3. **Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng**
4. Sinh các hoán vị và tổ hợp

Hoán vị lặp

Thực tế trong bài toán đếm, một số phần tử có thể giống nhau. Khi đó cần phải cẩn thận, tránh đếm chúng hơn một lần. Ví dụ: Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ **AAABB**?

Phân tích ví dụ

Chuỗi **AAABB** chứa 3 chữ **A** và 2 chữ **B**. Để xác định số chuỗi khác nhau có thể được tạo ra ta nhận thấy có C_5^3 cách chọn 3 chỗ cho 3 chữ **A**. Còn lại 2 chỗ trống, do đó có C_2^2 cách chọn 2 chỗ cho 2 chữ **B**. Theo quy tắc nhân, số chuỗi khác nhau được tạo ra là:

$$C_5^3 \times C_2^2 = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

Mệnh đề 3.1

Số hoán vị của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, ..., và n_k phần tử như nhau thuộc loại k, bằng

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

Chứng minh

Gợi ý: có $C_n^{n_1}$ cách giữ n_1 chỗ cho n_1 phần tử loại 1. Tương tự có $C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$ cách đặt n_k phần tử loại k vào chỗ trống còn lại.

Áp dụng quy tắc nhân ta có điều phải chứng minh. ∎

Ví dụ 3.1

Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ ***SUCCESS****?*

Ví dụ 3.1

Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ ***SUCCESS****?*

->

$$\frac{7!}{3! \times 1! \times 2! \times 1!} = 420$$

Ví dụ 3.2

Từ các chữ số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số tự nhiên khác nhau có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3.

Ví dụ 3.1

Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ ***SUCCESS****?*

->

$$\frac{7!}{3! \times 1! \times 2! \times 1!} = 420$$

Ví dụ 3.2

Từ các chữ số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số tự nhiên khác nhau có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3.

-> *gợi ý: số tự nhiên cần lập phải có 10 chữ số.*

Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa 3.1

Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ sắp thứ tự k phần tử của A, các phần tử có thể lặp lại. Mỗi chỉnh hợp như thế là một phần tử của tập A^k.

Mệnh đề 3.2

Mỗi phần tử của tập A^k là một hàm từ tập k phần tử vào tập n phần tử. Số chỉnh hợp lặp chập k của n là: $\boldsymbol{F}_n^k = n^k$.

Ví dụ 3.3

Từ bảng chữ cái tiếng Anh, ta lập được bao nhiêu chuỗi chữ cái có độ dài 5?

Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa 3.1

Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ sắp thứ tự k phần tử của A, các phần tử có thể lặp lại. Mỗi chỉnh hợp như thế là một phần tử của tập A^k.

Mệnh đề 3.2

Mỗi phần tử của tập A^k là một hàm từ tập k phần tử vào tập n phần tử. Số chỉnh hợp lặp chập k của n là: $\boldsymbol{F}_n^k = n^k$.

Ví dụ 3.3

Từ bảng chữ cái tiếng Anh, ta lập được bao nhiêu chuỗi chữ cái có độ dài 5? -> 26^5

Tổ hợp lặp

Ví dụ 3.4

Cửa hàng có 3 loại nón A, B, C, An muốn mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

An có 6 cách chọn là AA, AB, AC, BB, BC, CC.

Định nghĩa 3.2

Mỗi cách chọn ra k vật không có thứ tự từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là tổ hợp lặp chập k của n.

Mệnh đề 3.3

Số các tổ hợp lặp chập k của n được ký hiệu là $\boldsymbol{K}_n^k$ *và*

$$\boldsymbol{K}_n^k = \boldsymbol{C}_{n+k-1}^k$$

Hệ quả

Số nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0)$ của phương trình

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

là $K_n^k = C_{n+k-1}^k$

Ví dụ 3.5

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

Hệ quả

Số nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0)$ của phương trình

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

là $K_n^k = C_{n+k-1}^k$

Ví dụ 3.5

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

-> Nhận thấy rằng mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 10 phần tử từ một tập có 3 loại, sao cho có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2 và x_3 phần tử loại 3 được chọn. Vì vậy số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 10 từ tập có 3 phần tử và bằng $\boldsymbol{K}_3^{10} = C_{10+3-1}^{10}$.

Ví dụ 3.6

Tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \tag{1}$$

thỏa điều kiện $x_1 \geq 4; x_2 > 2; x_3 > 5; x_4 \geq -2.$

Ví dụ 3.6

Tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \tag{1}$$

thỏa điều kiện $x_1 \geq 4;\ x_2 > 2;\ x_3 > 5;\ x_4 \geq -2.$

Ta viết điều kiện đã cho thành $x_1 \geq 4;\ x_2 \geq 3;\ x_3 \geq 6;\ x_4 \geq -2.$ Đặt $y_1 = x_1 - 4;\ y_2 = x_2 - 3;\ y_3 = x_3 - 6;\ y_4 = x_4 + 2$. Khi đó ta có $y_i \geq 0\ (i = 1, .., 4)$. Phương trình (1) trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9 \tag{2}$$

Do đó, số nghiệm của phương trình (1) chính là số nghiệm của phương trình (2) và bằng $K_4^9 = C_{12}^9$.

Sự phân bố các đồ vật vào trong hộp

Hệ quả

Số cách chia k vật giống nhau vào n hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập k của n.

Ví dụ 3.7

Tìm số cách chia 15 viên bi giống nhau cho 4 đứa trẻ.

Ví dụ 3.8

Tìm số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình sau:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$$

gợi ý: đặt $x_4 = 11 - (x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$

Ví dụ 3.9

(BTVN) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$x + y + z \leq 20,$$

biết $x \geq 1$, $y \geq 2$, $z \geq 3$.

Ví dụ 3.10

(BTVN) Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ 1000đ, 2000đ, 5000đ, 10.000đ, 20.000đ, 50.000đ, 100.000đ. Giả sử thứ tự mà các tờ tiền được chọn là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

Ví dụ 3.11

Có bao nhiêu cách chia những xấp bài 5 quân cho mỗi một trong 4 người chơi từ một cỗ bài chuẩn 52 quân?

$$C_{52}^5 \times C_{47}^5 \times C_{42}^5 \times C_{37}^5 = \frac{52!}{5! \times 5! \times 5! \times 5! \times (52-5-5-5-5)!}$$

Mệnh đề 3.4

Số cách phân chia n đồ vật khác nhau vào trong k hộp khác nhau sao cho có n_i vật được đặt vào trong hộp thứ i, với $i = 1, 2, ..., k$ bằng

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k! \times (n - n_1 - n_2 - \ldots - n_k)!}$$

Sinh các hoán vị

Để sinh ra $n!$ hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$, ta sử dụng phương pháp phổ biến là liệt kê các hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ theo thứ tự từ điển.

Thuật toán sinh các hoán vị dựa trên thủ tục xây dựng hoán vị kế tiếp, theo thứ tự từ điển. Hoán vị $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ được gọi là đi trước hoán vị $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ nếu tồn tại k $(1 \leq k \leq n)$ sao cho $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$,..., $a_{k-1} = b_{k-1}$ và $a_k < b_k$.

Algorithm 1: Tìm hoán vị liền sau

Input : Hoán vị liền trước $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$; // $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \neq (n, n-1, ..., 2, 1)$

Output: Hoán vị kế tiếp của $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$

Function FnNextP($\{a_1, a_2, ..., a_n\}$)
  Initial : j ← n-1
  while $a_j > a_{j+1}$ *and* $j > 0$ **do**
    $j \leftarrow j - 1$; // j là chỉ số lớn nhất mà $a_j < a_{j+1}$
  end
  if $j = 0$ **then** return;
  else
    $k \leftarrow n$
    while $a_j > a_k$ **do**
      $k \leftarrow k - 1$; // a_k là số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn a_j và bên phải a_j
    end
    hoán vị (a_j, a_k)
    $r \leftarrow j + 1$; $s \leftarrow n$
    while $r < s$ **do** liệt kê theo thứ tự tăng dần của các số còn lại từ a_{j+1} đến a_n
      hoán vị (a_r, a_s)
      $r \leftarrow r - 1$; $s \leftarrow s - 1$;
    end
  end
end

Ví dụ 4.1

Áp dụng thuật toán 1, hãy tìm hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển của hoán vị 4736521.

Ví dụ 4.1

Áp dụng thuật toán 1, hãy tìm hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển của hoán vị 4736521.

Cặp số nguyên đầu tiên tính từ phải qua trái có số trước nhỏ hơn số sau là $a_3 = 3$ và $a_4 = 6$ (tìm được j thỏa điều kiện $a_j < a_{j+1}$).

- Số nhỏ nhất trong các số **bên phải của số 3** mà lại lớn hơn 3 là **số** $a_5 = 5$
- Hoán vị (a_3, a_5)
- Sau đó đặt các số 3, 6, 1, 2 theo thứ tự tăng dần vào bốn vị trí còn lại
- Hoán vị liền sau hoán vị đã cho là 4751236

Ví dụ 4.2

Tìm hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển của hoán vị 436521.

Ví dụ 4.2

Tìm hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển của hoán vị 436521.
-> *451236*

Bài tập thực hành

Yêu cầu sinh viên code lại thuật toán 1.

- Input: số nguyên dương n của tập $\{1, 2, ..., n\}$.
- Output: số lượng hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ và liệt kê các hoán vị đó.

Sinh các tổ hợp

Mỗi tổ hợp chập k có thể biểu diễn bằng một chuỗi tăng. Khi đó có thể liệt kê các tổ hợp theo thứ tự từ điển. Chúng ta có thể xây dựng tổ hợp liền sau tổ hợp $a_1 a_2 ... a_k$ bằng cách:

1. tìm phần tử đầu tiên a_i trong dãy đã cho kể từ phải qua trái sao cho $a_i \neq n - k - i$
2. thay a_i bằng $a_i + 1$, thay a_j bằng $a_i + j - i + 1$ với $j = i + 1, i + 2, ..., k$

Algorithm 2: Tìm Tổ hợp liền sau

Input : Tổ hợp liền trước $a_1a_2...a_k$;
`//` $\{n-k+1,...,n\} \neq \{a_1,a_2,...,a_k\} \subset \{1,2,...,n\}$ `với` $a_1 < a_2 < ... < a_k$

Output: Tổ hợp liền sau của $a_1a_2,...,a_k$

Function `FnNextCOMBI(`$a_1a_2...a_k$`)`
    Initial : $i \leftarrow k$
    while $a_i = n-k+i$ **do**
        $i \leftarrow i-1$
        $a_i \leftarrow a_i+1$
    end
    for $j \leftarrow i+1$ **to** k **do**
        $a_j \leftarrow a_i+j-i$
    end
end

Ví dụ 4.3

Tìm tổ hợp chập 4 từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *đi liền sau tổ hợp* $\{1, 2, 5, 6\}$.

Ví dụ 4.3

Tìm tổ hợp chập 4 từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *đi liền sau tổ hợp* $\{1, 2, 5, 6\}$.

Áp dụng thuật toán 2, ta thấy từ phải qua trái $a_2 = 2$ là số hạng đầu tiên của tổ hợp đã cho thỏa mãn điều kiện $a_i \neq 6 - 4 + i$. Để nhận được tổ hợp tiếp sau ta:

1. tăng a_i lên một đơn vị, tức $i = 2, a_2 = 3$
2. sau đó $j = 3, 4$. Vậy $a_3 = 3 + 3 - 2 = 4$ và $a_4 = 3 + 4 - 2 = 5$

Bài tập thực hành

Yêu cầu sinh viên code lại thuật toán 2.

- Input: số nguyên dương n, k (tổ hợp chập k của n phần tử $\{1, 2, ..., n\}$).
- Output: liệt kê các tổ hợp đó theo thứ tự từ điển.

Khai triển lũy thừa của đa thức

Định lý

Cho x, y là biến và n là số tự nhiên. Khi đó

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n$$

Ví dụ 4.4

Khai triển $(x+y)^4$*?*

Khai triển lũy thừa của đa thức

Định lý

Cho x, y là biến và n là số tự nhiên. Khi đó

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n$$

Ví dụ 4.4

Khai triển $(x+y)^4$*?*

$$(x+y)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k x^{4-k} y^k = x + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Ví dụ 4.5

Tìm hệ số của $x^{12}y^{13}$ *trong khai triển* $(2x - 3y)^{25}$ *?*

Ví dụ 4.5

Tìm hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $(2x-3y)^{25}$?

$$[2x-3y]^{25} = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^{k}(2x)^{25-k}(-3y)^{k}$$

Với $k = 13$ hệ số của $x^{12}y^{13}$ là $C_{25}^{13}2^{12}(-3)^{13}$

Định lý

Cho $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các biến và n là số nguyên dương. Khi đó

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$$

Ví dụ 4.6

Tìm hệ số của x^3y^5z trong khai triển $(x + 2y - 3z + t)^9$?

Tài liệu tham khảo

L.V. Luyen
Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2018), chương 3.*

Giáo trình Toán rời rạc
Giáo trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐHSP Huế. (2003), 22-35.*

N.T. Nhựt
Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2011).*