

$$\Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \wedge (x \notin A) \Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus A} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \setminus A \Leftrightarrow (x \in \overline{A} \setminus \overline{X \setminus A})$$

$$\begin{aligned} \text{(d) } x \in bd(A) &\Leftrightarrow \forall r > 0 : (A \cap B_r(x) \neq \emptyset) \wedge (B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0 : (B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset) \wedge (B_r(x) \cap (X \setminus (X \setminus A)) \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow x \in bd(X \setminus A) \end{aligned}$$

Hệ quả: Với mọi tập con A của một không gian metric X ta có:

- a) A là tập hợp mở $\Leftrightarrow A \cap bd(A) = \emptyset$
- b) A là tập hợp đóng $\Leftrightarrow bd(A) \subset A$

BÀI TẬP CHƯƠNG V

- Chứng minh nếu d là một metric trên tập hợp X thì các hàm xác định trên X^2 sau cũng là metric:

- $d_1(x, y) = 2d(x, y)$
- $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

- Hãy chỉ ra rằng nếu X, Y là hai không gian metric với hai metric lần lượt d_X, d_Y thì $X \times Y$ cũng là một không gian metric với metric:

$$D\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

- Xét X là tập các byte (các dãy các số 0, 1 có độ dài là 8). Chứng minh khoảng cách Hamming giữa 2 byte là số vị trí mà tại những vị trí đó giá trị của hai byte là khác nhau là một metric trên X
- Chỉ ra rằng: nếu $r_1 < r_2 \Rightarrow B_{r_1}(x) \subset B_{r_2}(x)$
- Chỉ ra rằng khoảng (a, b) trên trục ox là mở trong \mathbb{R} nhưng không mở trong \mathbb{R}^2 .
- Ký hiệu S là tập hợp các dãy số thực $x = \{a_k\}_k$. Ta định nghĩa

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}, \text{ với } x = \{a_k\}_k, y = \{b_k\}_k$$

Chứng minh d là một metric trên S .

- Chứng minh rằng nếu $\forall x \in X : \{x\}$ là tập mở trong X thì tất cả các tập con của X đều mở trong X . Trong thực tế tất cả các tập hợp con của \mathbb{N} đều mở trong \mathbb{N} .
- Cho U là một hợp mở, chỉ ra rằng $X \setminus U$ là đóng trong X .
- Một điểm b được gọi là một điểm tới hạn (*limit point*) của tập hợp A nếu:

$$\forall r > 0, \exists a \neq b : a \in A \cap B_r(b)$$

Chứng minh: Một tập hợp là đóng \Leftrightarrow nó chứa tất cả điểm tới hạn của nó.

10. Chứng minh trong một không gian metric $X, A, B \subset X$ ta có:

a) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

11. Cho (X, d) là không gian metric, $A, B \subset X$

a) Chứng minh $\text{Int}(A \cap B) = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) Giả sử B là tập mở, $A \cap B \neq \emptyset$. Chứng minh $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$

c) Tìm hai tập mở $A, B \subset X$ sao cho các tập hợp:

$A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A \cap B}, \overline{A \cap B}$ đều khác nhau trong trường hợp:

i. $X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$

ii. $X = \mathbb{R}^2, d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, với $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$

12. Xét X là tập các hàm số thực liên tục trên đoạn $[a, b]$ với metric

$$d(x, y) = \max\{|x(t) - y(t)|, t \in [a, b]\}$$

Cho $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. Đặt

$$D = \{x \in X : x(t) > 0, t \in [\alpha, \beta]\}$$

$$A = \{x \in X : x(t) \geq 0, t \in [\alpha, \beta]\}$$

Chứng minh: D là tập mở, A là tập đóng.