初中数学二级结论汇总

一、公式及其变式

1、$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

2、$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab=\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$

$$ab=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{4}=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=-\frac{(a-b)^2-(a^2+b^2)}{2}$$

3、和的立方公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

差的立方公式：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

4、立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

变式：$a^3+b^3=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]$

5、立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

变式：$a^3-b^3=(a-b)\left[(a-b)^2+3ab\right]$

注意区别：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ac$$

6、$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$$=(a+b+c)\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2}$$

二、数学计算中的常用结论

1、$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

2、$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

3、$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$

4、$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5、$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

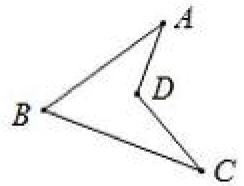
6、$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

7、$\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}$

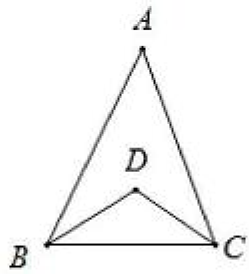
8、$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

三、常见几何基本图形及结论：

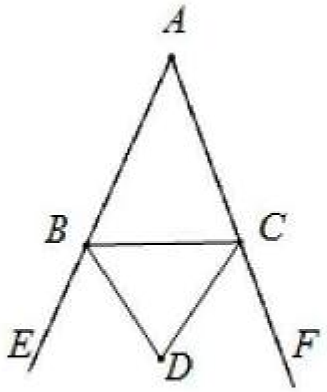
1、$\angle ADC=\angle A+\angle B+\angle C$



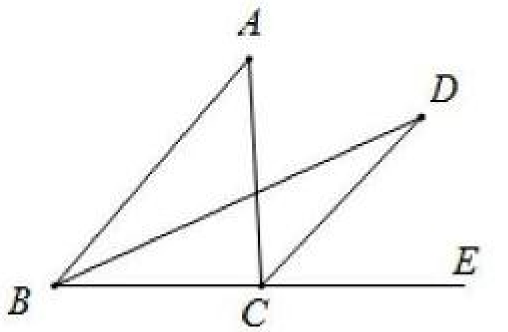
2、BD,CD 分别平分 $\angle ABC,\angle ACB$，则 $\angle BDC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$



3、BD,CD分别平分，则 $\angle BDC=90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle A$

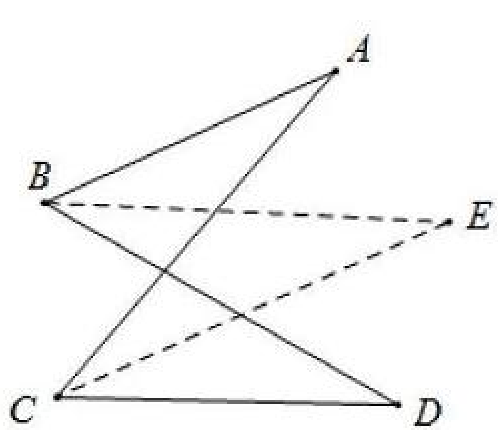


4、BD,CD分别平分 $\angle ABC,\angle ACE$，则 $\angle BDC=\frac{1}{2}\angle A$



注：2、3、4为内心和旁心的性质之一

5、BE,CE分别平分 $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$，则 $\angle E=\frac{1}{2}\left(\angle A+\angle D\right)$

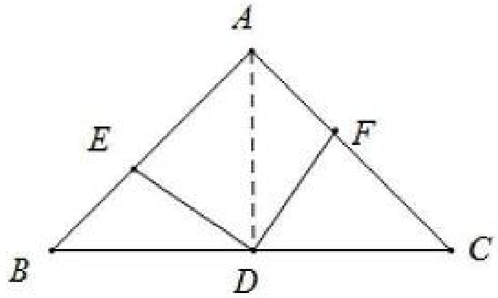


6、在 $Rt\Delta ABC$ 中，$AB=AC, D$ 为斜边 BC 的中点，$\angle EDF=90^\circ$

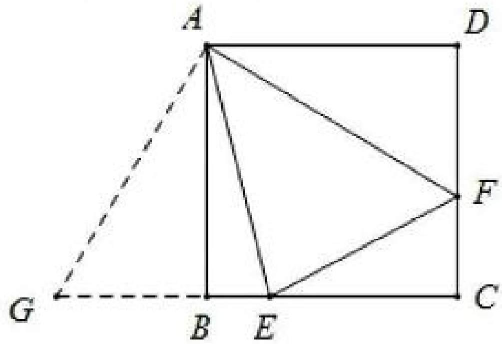
则：① $BE=AF, AE=CF$

② $DE=DF$

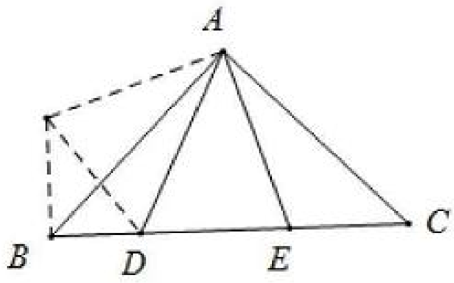
③ $S_{四边形AEDF}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$



7、正方形 $ABCD$ 中，$\angle EAF=45^\circ$，则 $BE+DF=EF$

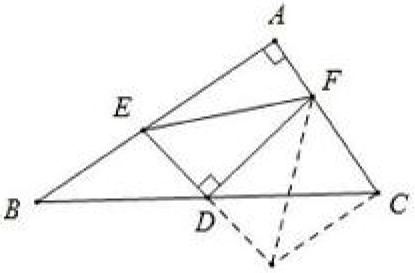


8、在 $Rt\Delta ABC$ 中，$AB=AC, \angle BAC=90^\circ, \angle DAE=45^\circ$.则 $BD^2+CE^2=DE^2$



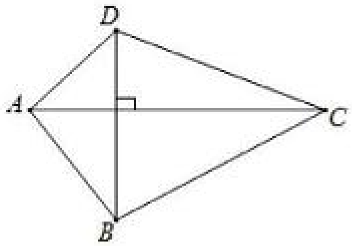
9、在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle A=90°$，D 为斜边 BC 的中点，且 $\angle EDF=90°$，

则 $BE^2+CF^2=EF^2$



10、四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，则 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$

（特别地，当四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形时有 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2=4R^2$）



11、矩形 $ABCD$ 及任意一点 P，都有 $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$

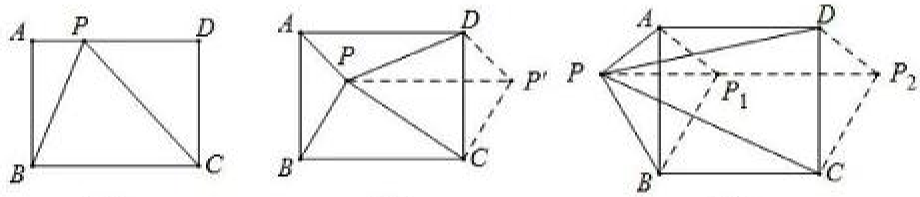
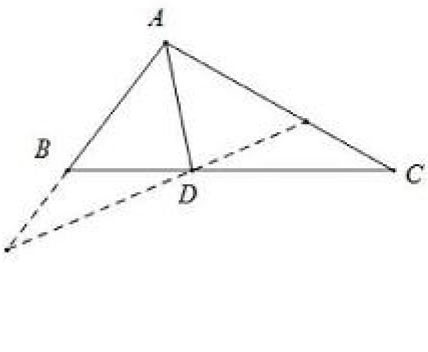
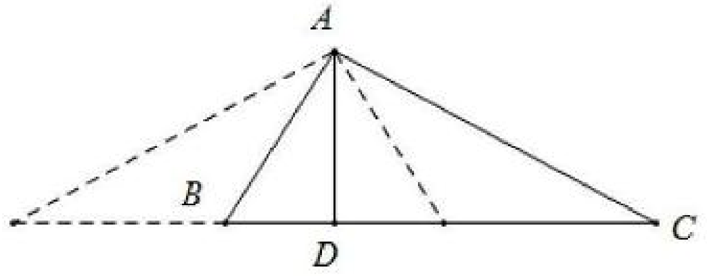


图1　　图2　　图3

12、ΔABC 中，$\angle B=2\angle C, AD$ 平分 $\angle BAC$，则 $AB+BD=AC$（截长、补短）

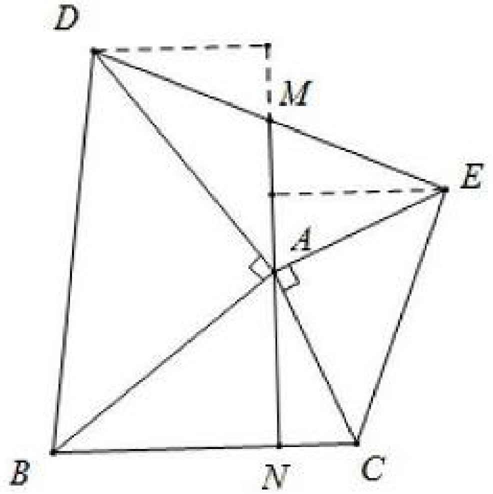


13、ΔABC 中，$\angle B=2\angle C, AD\perp BC$，则：$AB+BD=CD$

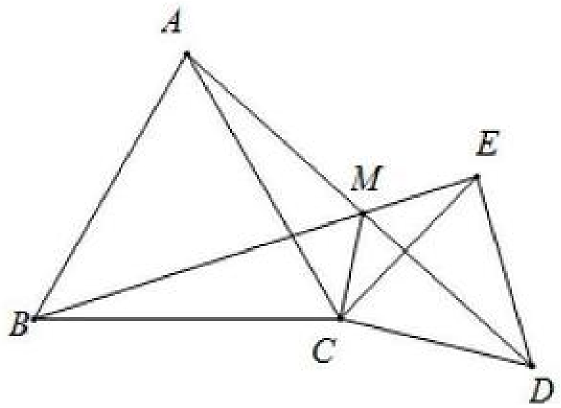


14、$\Delta DAB, \Delta EAC$ 都是等腰直角三角形，①$MN\perp BC$，则M 为DE的中点.

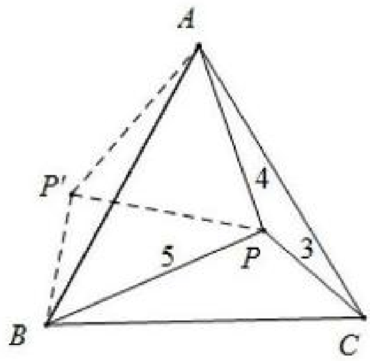
②M 为DE的中点，则$MN\perp BC$.



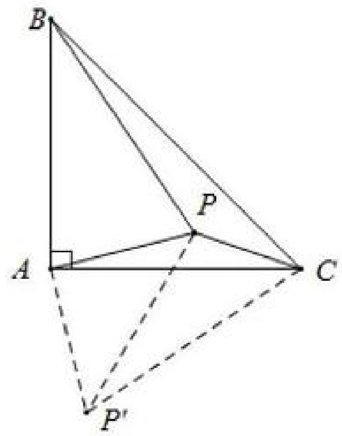
15、$\Delta ABC, \Delta CDE$ 为正三角形，则①$AD=BE$；②CM 平分$\angle BMD$



16、正ΔABC中，$PC=3,PA=4,PB=5$，则$\angle APC=150^\circ$.

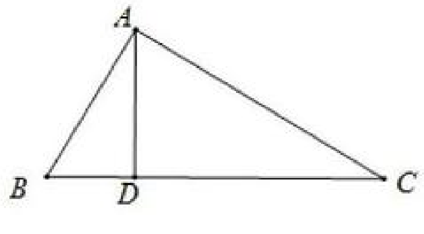


17、$Rt\Delta ABC$中，$\angle BAC=90^\circ,AB=AC$，若$PC,PA,PB$分别为1, 2, 3，则$\angle APC=135^\circ$

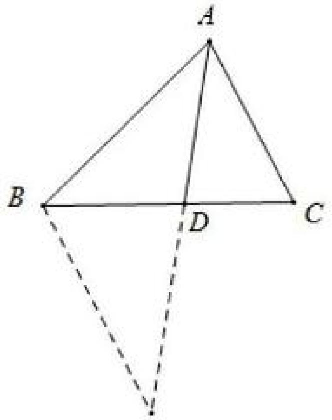


18、射影定理：①$AD^2=BD\cdot CD$，②$AB^2=BD\cdot BC$，③$AC^2=CD\cdot BC$

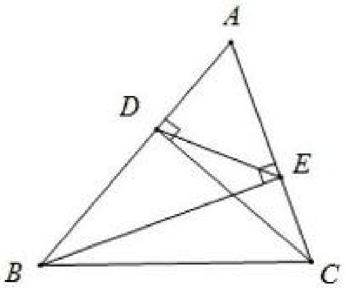
等积原理：$AB\cdot AC=BC\cdot AD$



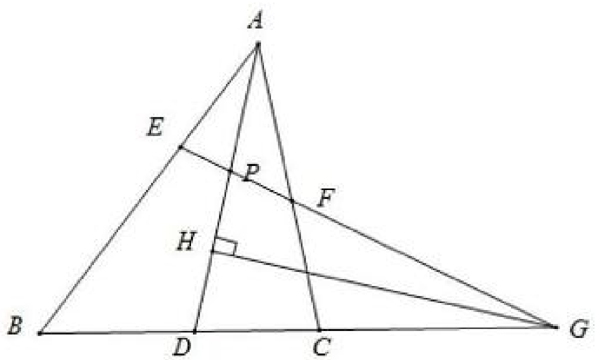
19、三角形角平分线定理：AD 平分 $\angle BAC$，则有 $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$.



20、$CD\perp AB, BE\perp AC$，则 $\Delta ADE \backsim \Delta ACB$



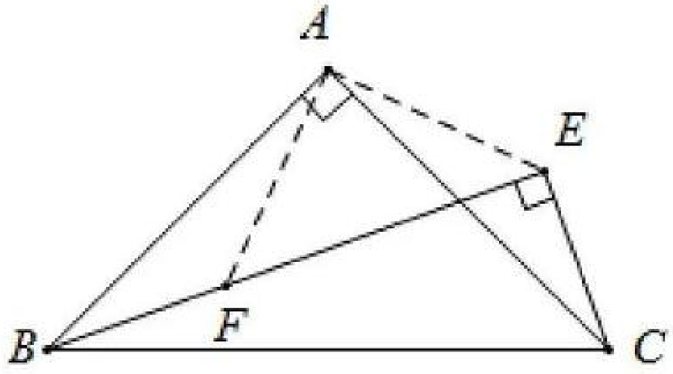
21、ΔABC 中，AD 平分 $\angle BAC$，P 是 AD 上的动点，DP 的中垂线交 BC 延长线于点 G，直线 GP 交 AB, AC 于 E, F，则：$\Delta AEF \backsim \Delta ACB$.



22、等腰直角三角形中的一种几何构造方式

在$Rt\Delta ABC$中，$AB = AC, CE \perp BE$

构造：连AE，过A作AE的垂线交BE于F



四、直线及坐标系知识补充

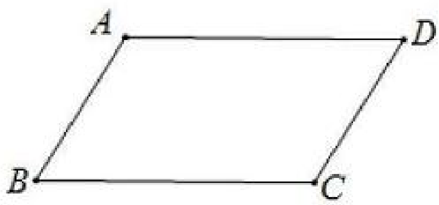
1、两点间的距离公式：$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，则$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

2、中点公式及推论：

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$　线段AB中点$C(x_0, y_0)$，则$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

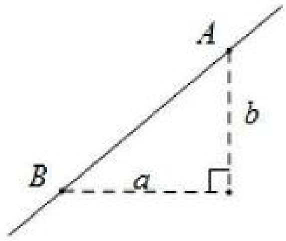
推论1：$x_2 = 2x_0 - x_1$　　$y_2 = 2y_0 - y_1$

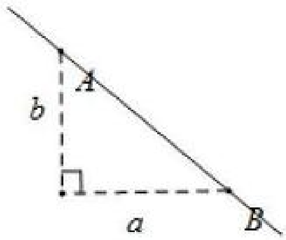
推论2：平行四边形顶点坐标计算：$A = B + D - C, D = A + C - B$



3、 $y=kx+b$（斜截式方程）

①k 的几何意义：$|k|=\dfrac{b}{a}$





②斜率公式：$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

③直线的点斜式方程

经过 $P_0(x_0,y_0)$ 且斜率为 k 的直线的方程为：$y-y_0=k(x-x_0)$

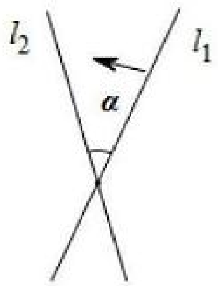
④直线位置与 k 的关系：

$$\begin{array}{l} l_1: y=k_1x+b_1 \\ l_2: y=k_2x+b_2 \end{array} \quad \text{则：} \quad \begin{array}{l} l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2(b_1\neq b_2) \\ l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1 \end{array}$$

⑤点到直线的距离公式

点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$（直线的一般式方程）的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

⑥倒角公式：$\tan\alpha=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}$



⑦弦长公式：直线 $y=kx+b$ 与曲线 C 交于 A,B 两点，则 $AB=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$

（配合韦达定理使用）

五、三角函数公式补充

1、$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　　$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

2、$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3、$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

4、$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

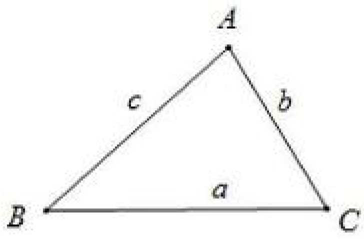
5、辅助角公式：$a\sin\alpha+b\cos\beta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$

六、余弦定理及推论：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

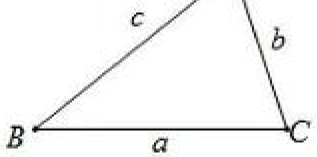
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

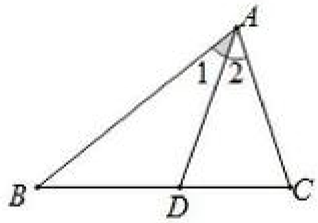
推论：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-2bc}{a^2}$



七、三角形的面积及推论

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$$

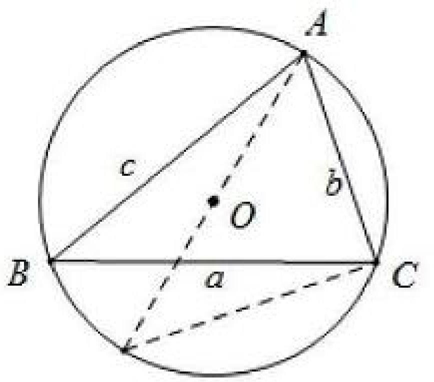




推论：$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB\cdot\sin\angle 1}{AC\cdot\sin\angle 2}$

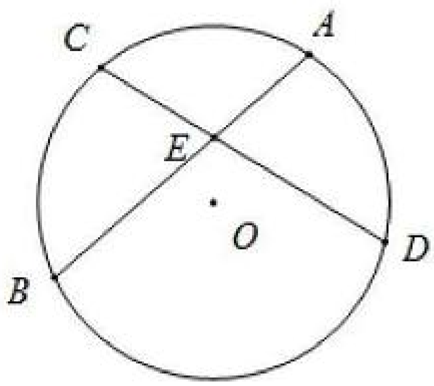
八、正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

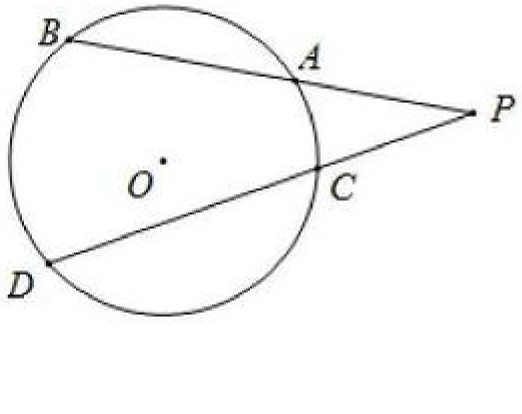


九、圆中的重要定理与结论

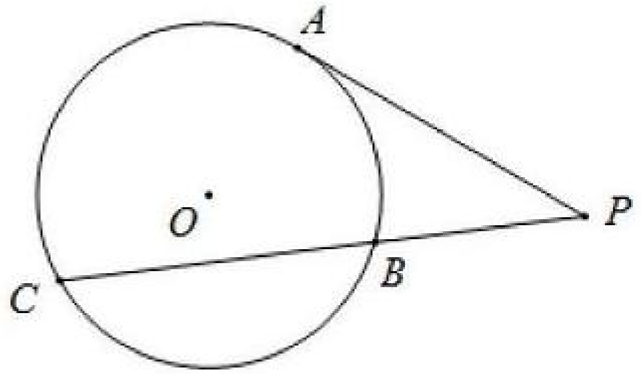
1、相交弦定理：$CE\cdot DE=AE\cdot BE$



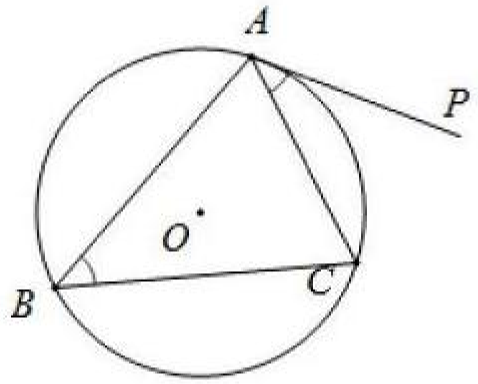
2、割线定理：$PA\cdot PB=PC\cdot PD$



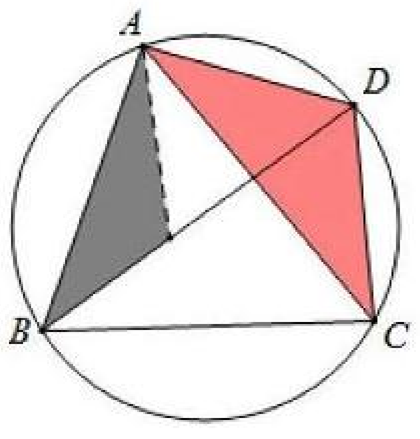
3、切割线定理：$PA^2 = PB \cdot PC$



4、弦切角定理$\angle PAC = \angle ABC$



5、托勒密定理　　$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

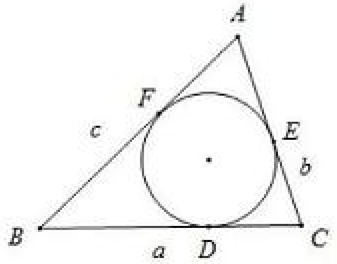


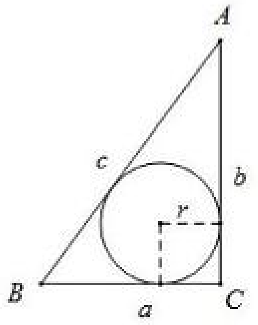
6、三角形内切圆的切线长公式

$$AE = AF = \frac{b+c-a}{2}$$

$$BD = BF = \frac{a+c-b}{2}$$

$$CD = CE = \frac{a+b-c}{2}$$

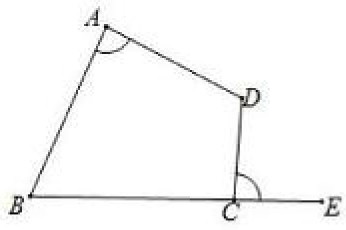


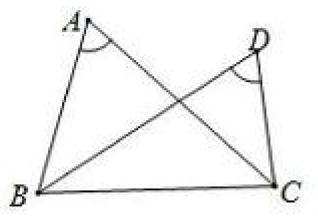


推论：直角三角形内切圆的半径公式 $r = \dfrac{a+b-c}{2}$

7、四点共圆的两种判定方式

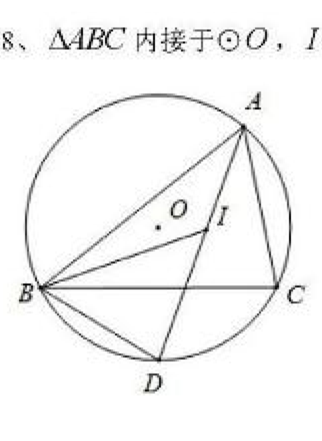
① $\angle A = \angle DCE$ 或 $\angle A + \angle BCD = 180°$，则 A, B, C, D 四点共圆.



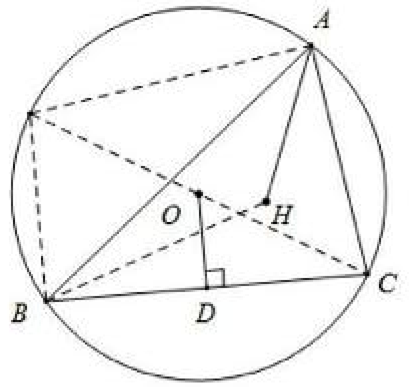


② $\angle A = \angle D$（注意：对的边都是 BC），则 A, B, C, D 四点共圆.

8、ΔABC 内接于$\odot O$，I 为 ΔABC 内心，则 $BD = ID$.

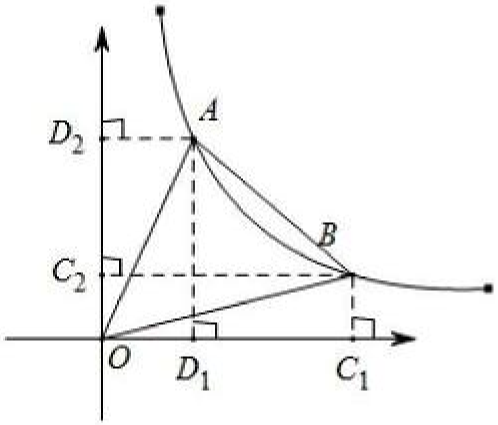


9、O与H分别是ΔABC的外心和内心，$CD \perp BC$，则$OD // AH, OD = \frac{1}{2}AH$

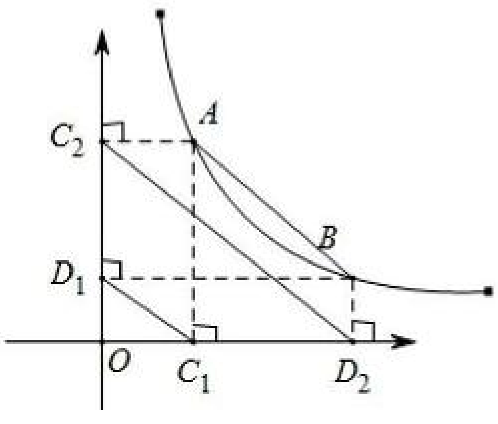


十、反比例函数的性质

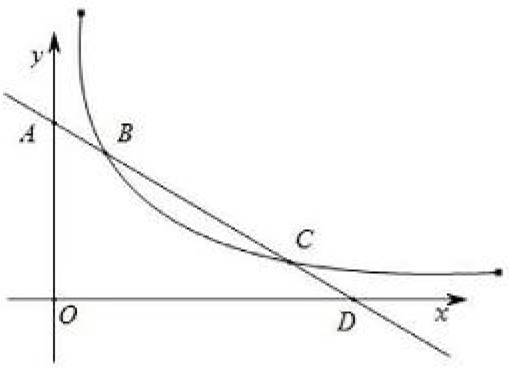
1、$S_{\Delta ACB} = S_{梯形ABC_1D_1} = S_{梯形ABC_2D_2}$

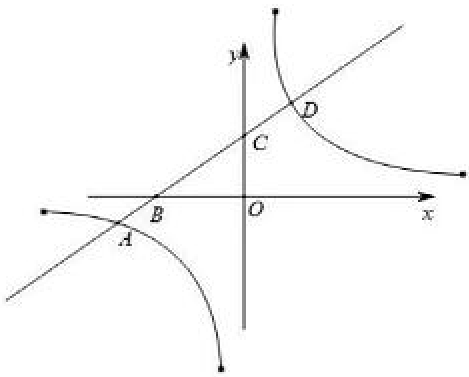


2、$AB // C_1D_1, AB // C_2D_2 (AB // C_1D_1 // C_2D_2)$



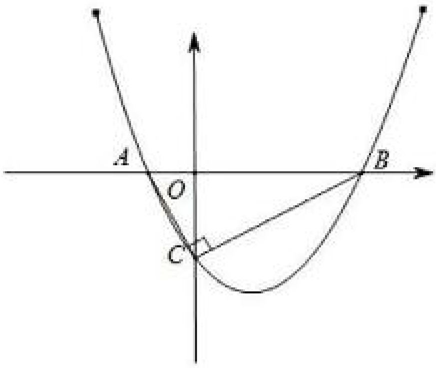
3、直线$y=kx+b$与双曲线$y=\dfrac{m}{x}$及坐标轴顺次交于A,B,C,D，则$AB=CD$.



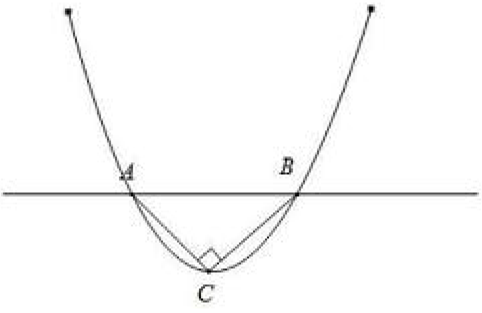


十一、二次函数知识补充（$y=ax^2+bx+c$）

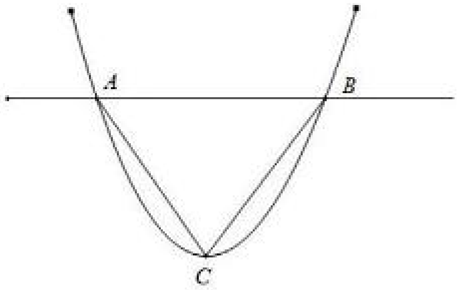
1、ΔABC为直角三角形时，$ac=-1$，$AB=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.



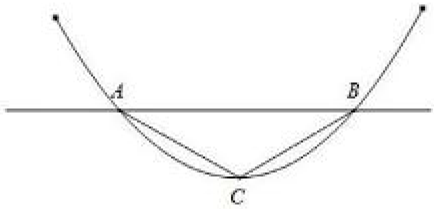
2、ΔABC为直角三角形时，$\Delta=4(b^2-4ac=4)$



3、ΔABC 为正三角形时，$\Delta=12$.

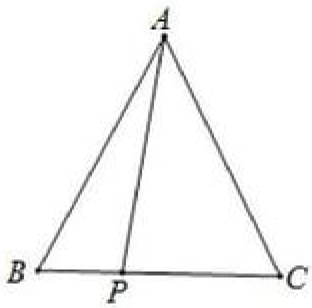


4、当 $\angle ACB=120°$ 时，$\Delta=\dfrac{4}{3}$.

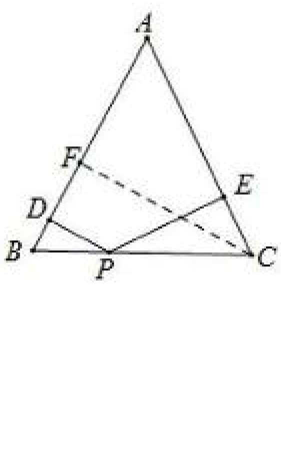


十二、定值模型

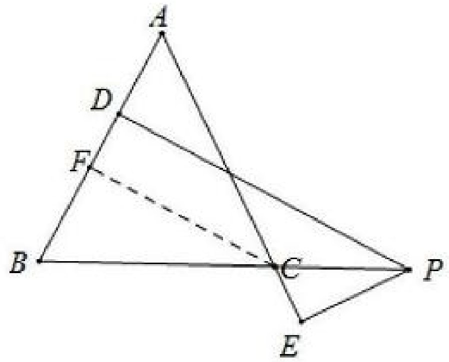
1、$AB=AC,P$ 是 BC 上一动点，则 $AP^2+BP\cdot PC=AB^2$.



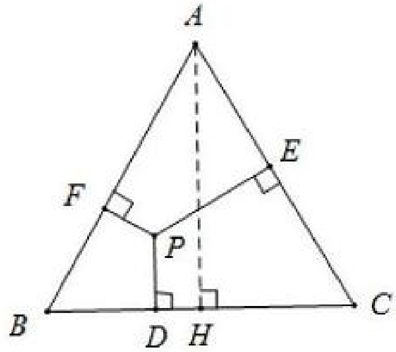
2、$AB=AC,P$ 是 BC 上一动点，则 $PD\perp AB,PE\perp AC$，则 $PD+PE=CF$.



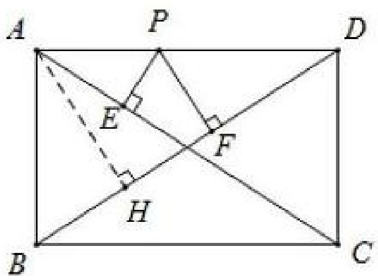
3、$AB=AC, P$ 是 BC 延长线上一动点，则 $PD\perp AB, PE\perp AC$，则 $PD-PE=CF$.



4、P 是正 ΔABC 内任一点，有 $PD\perp BC, PE\perp AC, PF\perp AB$，则 $PD+PE+PF=AH$.

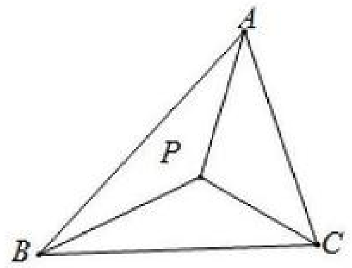


5、如图，矩形 $ABCD$ 中 P 为 AD 上一动点，$PE\perp AC, PF\perp BD$，则 $PE+PF=AH$



十三、三角形的两个重要最值点

1、$PA^2+PB^2+PC^2$ 最小时，P 为 ΔABC 的重心.（注：重心坐标是顶点坐标的平均数）



2、当 $PA+PB+PC$ 最小时，P 为 ΔABC 的费马点.

费马点的定义、位置：

①当三角形有一个内角不小于$120°$时，该钝角顶点就是三角形的费马点.

②当三角形每一个内角都小于$120°$时，费马点是三角形内到三边张角相等的点.

（$\angle APB=\angle BPC=\angle APC=120°$）