

2022年下半年初中《数学学科知识与教学能力》
教师资格证笔试真题及答案解析

公众号：教资资料库

一、单项选择题

(本大题共8小题，每小题5分，40分)

- (单选题) 函数 $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$ 零点的个数是()。
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- (单选题) 定积分 $\int_0^1 e^{2x} dx$ 的值是()。
A. $\frac{1}{2}(1 - e^2)$ B. $1 - e^2$ C. $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ D. $\frac{1}{2}e^2$
- (单选题) 若线性方程组 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 有非零解，则 λ 的值是()。
A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$
- (单选题) 已知向量 $\alpha = (2, 0, 1)$ ， $\beta = (1, 1, -1)$ ，则 $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$ 的值是()。
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
- (单选题) 在空间直角坐标系中， z 轴与平面 $3x - 6y - 4 = 0$ 的位置关系是()。
A. 斜交 B. 平行 C. 垂直 D. 在平面内
- (单选题) 现在有大小相等、颜色不同的6个球，编号分别为1、2、3、4、5、6，从这6个球里面随机取出来3个球，则编号为1、2、3的概率是()。
A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{3}{20}$ D. $\frac{1}{5}$
- (单选题) “文华逾九章，拓扑公式彪史册；俊杰胜十书，机器证明誉寰球。”是对数学家成就的高度概括，这位数学家是()。
A. 吴文俊 B. 苏步青 C. 祖冲之 D. 李善兰
- (单选题) 在初中数学的教学中，下列结论不要求证明的是()。
A. 三角形的内角和为 180° B. 直角三角形的两个锐角互余
C. 两点之间线段最短 D. 角平分线上的点到角两边距离相等

二、简答题

(本大题共5小题，每小题7分，共35分)

- (简答题) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ ax + b, & x < 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处可导，求 a, b 。
- (简答题) 有4件产品，其中3件是合格品，1件是次品。不放回地随机抽取两次，每次取1件产品。求在第一次取到合格品的条件下，第二次仍然取到合格品的概率。
- (简答题) 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ 与 $x^2 + y^2 = 4z$ 的交线是什么曲线？并求该曲线在 Oxy 平面上投影的方程。
- (简答题) 义务教育阶段要求理解有理数的运算律，请列出并用符号表示。
- (简答题) 结合实例给出学生积累数学经验的两种活动。

三、解答题

(本大题共1小题，共10分)

已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

【教研题型】解答题

14. (单一主观题)求行列式 $|A|$ 的值；(5分)

15. (单一主观题)求方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

的解。(5分)

四、论述题

(本大题共1小题，共15分)

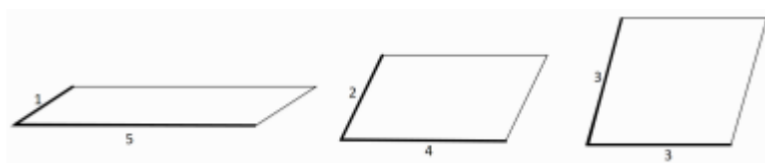
16. (论述题)以等腰三角形和轴对称为例，论述你对“图形的性质”与“图形的变化”含义及相互关系的理解。

五、案例分析题

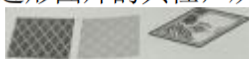
(本大题共1小题，共20分)

17. (单一主观题)现实生活中，教师有不同引出菱形概念的方法：

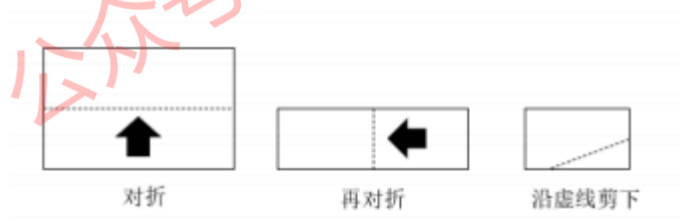
【教师甲】让学生画出周长为12的平行四边形，要求各个边长为整数。学生在教师引导下，画出了边长分别是1和5、2和4、3和3的平行四边形，将第3个平行四边形与前面2个平行四边形进行对比，从而引出菱形的概念。



【教师乙】让学生观察以下生活中平行四边形图片的共性，从而引出菱形的概念。



【教师丙】引导学生回顾小学学习的平行四边形、矩形等图形，请学生用一张B5的纸按下列步骤得到一个平行四边形，发现该平行四边形的特殊之处，由此引出菱形的概念。



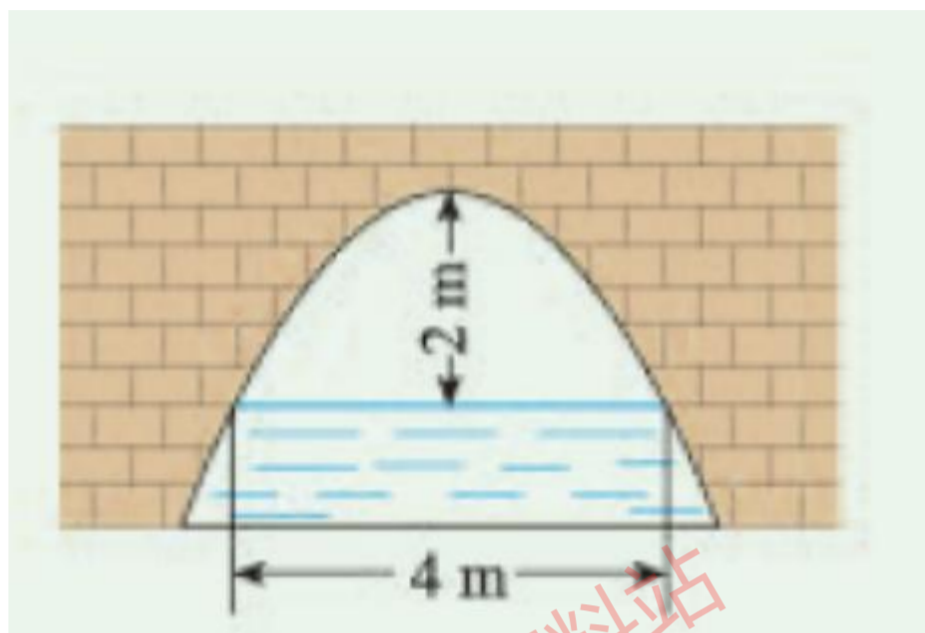
【教师丁】在学生学习了三角形、特殊三角形和平行四边形的基础之上，类比三角形到特殊三角形的研究过程，将平行四边形的边长间的关系特殊化，从而得到特殊的平行四边形，由此引出菱形的概念。分析上述各位老师关于菱形教学各自的优点。

六、教学设计题

(本大题共1小题，共30分)

材料：下面是某版九年级上册教材“实际问题与二次函数”单元的一道例题。

例题 右图是抛物线形拱桥，当拱顶离水面2 m时，水面宽4 m，水面下降1 m，水面宽度增加了多少？



根据上面的内容完成下列任务

【教研题型】教学设计题

18. (单一主观题) 给出该例题的解答；(8分)
19. (单一主观题) 基于该例题的教学，设计两个引导性的问题和解题的小结，并分别给出设计意图。(22分)

参考答案及解析

1. 本题考查零点的问题。令 $f(x) = (-1)(x-2) = (x+1)(x-1)(x-2) = 0$, 解得 $x_1=1, x_2=-1, x_3=2$, 共有3个零点。故本题选D。

2. 本题考察定积分的运算。 $\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 d(e^{2x}) = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$

3. 本题考查齐次线性方程组解的情况。当齐次线性方程组系数矩阵的秩小于未知数的个数时, 齐次线性方程组有非零解。所以系数矩阵的秩为1。又因为系数矩阵为方阵, 所以系数矩阵的行列式的值为0, 即 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, 所以 $-3\lambda - 2 = 0$, 所以 $\lambda = -\frac{2}{3}$ 故本题选B。

4. 本题考查空间向量的数量积的计算。 $\alpha + \beta = (2, 0, 1) + (1, 1, -1) = (3, 1, 0)$,
 $\alpha - \beta = (2, 0, 1) - (1, 1, -1) = (1, -1, 2)$

$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = 3 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 2 = 2$ 。故本题选D。

5. 平面的法向量为 $n = (3, -6, 0)$, z轴

的方向向量是 $s = (0, 0, 1)$, 且 $n \cdot s = 0$, 所以Z轴与平面法向量垂直, 即与平面 $3x - 6y - 4 = 0$ 平行。故本题选B。

6. 本题考查概率的计算。由题可知, 从这6个球里面随机取出来3个球有 $C_6^3 = 20$ (种), 编号为1、2、3有1种, 则 $P = \frac{1}{20}$, 故本题选A。

7. 本题考查数学史。吴文俊是中国数学界的泰山北斗, 他是首届国家最高科技奖的得主, 他开创了近代数学史上第一个由中国人原创的研究领域。“文华逾九章, 拓扑公式彪史册; 俊杰胜十书, 机器证明誉寰球。”是对先生的毕生成就的高度概括。故本题选A。

8. 本题考查命题的证明。两点之间线段最短是数学中的一个公理, 不用证明。故本题选C。

9. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 可导必连续, 在 $x=1$ 处对 $f(x) = 2x$, 求导得 $f'(x) = 2$, 此时 $f'(1) = 2$, 所以对 $f(x) = ax + b$, 求导得 $f'(x) = a$, 又因为 $f(1) = 1$, 所以 $a = 2, b = -1$ 。

10. 记事件A为“第一次取到的是合格品”。事件B为“第二次取到的是合格品”, 则AB表示

“第一次取到合格品, 第二次也取到合格品”。因为 $P(A) = \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2}$ 所以在第一次取到合格品的情况下, 第二次也取到合格品的概率为: $P(B|A) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

11. 两式联立, 得: $z^2 + 4z = 5, z = 1$ 或 -5 (舍), 所以 z 为常数1, 交线在一个平行于Oxy平面的面上, 代入原方程, $x^2 + y^2 = 4$ 是常数, 可以看出交线是一个圆。该曲线在Oxy平面上投影的方程为 $x^2 + y^2 = 4$ 。

12. 运算律包括加法交换律和结合律、乘法交换律和结合律、乘法对加法的分配律, 交换律: 加法 $a+b=b+a$, 乘法 $a \times b = b \times a$; 结合律: 加法 $(a+b)+c=a+(b+c)$, 乘法 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$; 分配律: $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ 。

13. (1)通过游戏,积累实践操作的数学活动经验。

许多数学问题答案的得出,离不开动手的实践与发现,教师可以充分挖掘教材内容,使学生产生“动”的愿望。例如:在学习数轴的时候,让学生们拿一根绳子,站成一排,指定一位学生为原点,请其他学生说出自己代表的有理数;接着可以改变代表原点的同学,继续让其他同学说出自己代表的数。在这个过程中,把学生的亲身经验与数学活动作了巧妙的结合。

(2)创设生动有趣的生活情境,积累数学活动经验。

创设生动有趣的情境,可以让学生身临其境,加强生活中的数学和课本中的数学的联系,使数学与生活融为一体。例如:在学习有理数时,把用正负数表示相反意义的量与生活中的质量标准结合起来,就可以创设有趣的生活情境;还可以把有理数的减法问题转化为水面下潜水艇的深度差的问题,这种情境很容易让学生理解有理数减法的意义。

14.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} \end{vmatrix} \\ &= -12. \end{aligned}$$

15.根据题意,对方程组的增广矩阵进行初等

$$\begin{aligned} \text{变换: } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{可得方程组的解为} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

16. “图形的性质”强调通过实验探究、直观发现、推理论证来研究图形,在用几何直观理解几何基本事实的基础上,从基本事实出发推导图形的几何性质和定理,理解和掌握尺规作图的基本原理和方法。在等腰三角形的学习中,需要理解等腰三角形的概念,探索并证明等腰三角形的性质定理和判定定理。

“图形的变化”强调从运动变化的观点来研究图形,理解图形在轴对称、旋转和平移时的变化规律和变化中的不变量。在轴对称的学习中,通过具体实例理解轴对称的概念,探索它的基本性质,能画出简单平面图形关于给定对称轴的对称图形,理解轴对称图形的概念,探索常见平面图形的轴对称性质,认识并欣赏自然界和现实生活中的轴对称图形。

“图形的性质”和“图形的变化”的关系:由图形的性质到图形的变化,从形象逐步到抽象;都体现了数形结合的思想;向学生渗透了“解析化”解题策略。等腰三角形的学习,是从最基本的概念和性质出发,然后到分析其轴对称的性质,是从具体的显而易见的方面到抽象的特殊对称性的分析在等腰三角形基本性质和轴对称性质的分析中,都涉及到了相关证明和计算,都涉及到了数形结合的思想;等腰三角形和轴对称性质的学习中,都有通过计算得出相应结论的过程,渗透了解析的思想解决数学问题的方法和策略。

17. (1)教师甲的优点:鼓励学生开动脑筋进行思考平行四边形周长和边长之间的关系,加强了对于平行四边形性质的回顾。通过对比三个平行四边形的不同之处,能够最本质的呈现出菱形和普通的平行四边形之间的联系和区别,通过数据的呈现,体现了数学的严谨性,加强了知识点之间的对比与联系,并且能够增强学生的观察对比,归纳总结能力。

(2)教师乙的优点:用生活中常见的实物图片导入,引导学生进行观察,能够迅速引学生的注意力,并且加强数学与实际生活的联系,教学更加生动形象,更加具体,能够增强几何直观。符合新课标的观念,在实际情境中教学,将数学生活化,实际化。

(3)教师丙的优点:通过学生自己动手操作来引出菱形的概念,能够增强学生的数学活动经验,并且“动”起来让数学的理论和实践进行了有机的结合,更能加强学生对于菱形概念的理解。并且能够增强学生自己动手操作的能力,充分体现了学生的主体性,教师的主导作用。

(4)教师丁的优点:从学生已有的知识经验出发,遵循学生的认知规律,能够加强新旧知识的联系,培养类比的数学思想,并且能够体现出菱形与平行四边形的特殊之处。能够培养学生的数学逻辑,加强整个几何图形体系的对比,对知识点记忆更加深刻。

18.(1)以抛物线的顶点为原点,以抛物线的对称轴为y轴建立直角坐标系,设这条抛物线表示的二次函数为 $y = ax^2$ 。由抛物线经过点(2, -2),可得 $-2 = a \times 2^2$, $a = -\frac{1}{2}$,这条抛物线表示的二次函数为 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 。当水面下降1m时,水面的纵坐标为-3,根据上面的函数解析式可得水面的横坐标为 $\pm\sqrt{6}$,据此可求出这时的水面宽度是 $2\sqrt{6}$,由此可得,水面下降1m,水面宽度增加 $(2\sqrt{6} - 4)$ m。

19. 2)①问题一:能否运用所学的知识解决拱桥问题?

设计意图:通过对实际问题的分析和问题的引导,让学生更好的理解二次函数是解决该问题的重要模型。

问题二:我们知道二次函数的图象是抛物线,如何建立适当的坐标系,从而求出该抛物线表示的二次函数?

设计意图:通过操作,让学生明白解决拱桥问题有多种建立平面直角坐标系的方法(例如以抛物线的顶点为原点,以抛物线的对称轴为轴建立直角坐标系;以抛物线和水面的两个交点的连线为轴,以抛物线的对称轴为轴建立直角坐标系;以抛物线和水面的两个交点的连线为轴,以其中的一个交点为原点,建立直角坐标系),体会解题方法的多样性和简捷性,加深对所学知识的理解和运用二次函数模型解决实际问题的能力。

②小结:利用二次函数解决实际问题的过程是什么?如何利用二次函数实际问题?

教师引导学生整理上面解决问题的思路步骤,分析利用二次函数实际问题的一般方法。学生思考后师生共同归纳总结:根据实际问题,建立适当的平面直角坐标系,列出二次函数的解析式,并根据自变量的实际意义,解决问题。

设计意图:对解决问题的思路方法进行反思,通过同学之间的合作与交流,让学生积累和总结经验,培养学生归纳概括能力,养成良好的数学思维习惯。