2019年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(初级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 在利用导数定义证明$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$的过程中用到的极限是(　　)。

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}q^{x}=0,0<q<1$

2. 设$\boldsymbol{M},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$为$n$阶方阵,则下列命题一定正确的是(　　)。

A. $\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{YX}$

B. $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{MX}+\boldsymbol{MY}$

C. 若$\boldsymbol{XY}=\boldsymbol{O}$且$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{O}$,则$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{O}$

D. 若$\boldsymbol{MX}=\boldsymbol{MY}$且$\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{O}$,则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$

3. 下列定积分计算结果正确的是(　　)。

A. $\int_{-1}^{1}(x^2+x^3)\mathrm{d}x=0$　　B. $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x=0$

C. $\int_{-1}^{1}\ln(x+2)\mathrm{d}x=0$　　D. $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x=0$

4. 将椭圆$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,a>b>0,\\ z=0\end{cases}$绕长轴旋转一周,所得旋转曲面的方程为(　　)。

A. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$

C. $x^2+y^2+z^2=a^2$　　D. $x^2+y^2+z^2=b^2$

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的两个不同的基础解系,则下列结论正确的是(　　)。

A. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$的秩小于向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$的秩

B. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$的秩大于向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$的秩

C. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$的秩等于向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$的秩

D. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$的秩与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$的秩无关

6. 三个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,则下列结论不一定成立的是(　　)。

A. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$

B. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$

C. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关

D. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=0$

7. 在平面直角坐标系中,将一个多边形依次沿两个坐标轴方向分别平移2个单位和3个单位后,得到的图形与原来的图形的关系不一定正确的是(　　)。

A. 全等　　B. 平移

C. 相似　　D. 对称

8. “学生是数学学习的主体”是数学教学的重要理念。下列关于教师角色的概述不正确的是(　　)。

A. 组织者　　B. 引导者

C. 合作者　　D. 指挥者

二、简答题(本大题共5小题,每小题7分,共35分)

9. 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$,变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$,其中变换矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$。

(1) 写出椭圆 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}=1$ 在该变换下 $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ 满足的曲线方程;(5分)

(2) 举例说明在该变换下什么性质保持不变,什么性质发生变化(例如距离、斜率等)。(2分)

10. 利用一元函数积分计算下列问题:

(1) 求曲线 $y = \sin x$ 与 $y = x^2 - \pi x$ 所围成的平面图形的面积;(4 分)

(2) 求曲线 $y = \sin x, x \in [0,\pi]$ 绕 x 轴旋转一周所围成的几何体体积。(3 分)

11. 一个袋子里有 8 个黑球,8 个白球,随机不放回地连续取球五次,每次取出 1 个球,求最多取到 3 个白球的概率。

12. 简述研究中学几何问题的三种主要方法。

13. 简述数学教学活动中调动学生学习积极性应遵循哪些原则。

三、解答题(本大题共 1 小题,10 分)

14. 对于问题:“已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$f(0)=0$,且对于任何 $x\in[0,1]$,有 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$,求证 $f(x)=0,x\in[0,1]$。”有人是这样做的:

$|f(x)-f(0)|=|f'(\xi_1)|x(0<\xi_1<x)$①,

$|f'(\xi_1)|x\leqslant|f(\xi_1)|x$②,

$|f(\xi_1)-f(0)|x=|f'(\xi_2)|\xi_1x\leqslant|f'(\xi_2)|x^2\leqslant|f(\xi_2)|x^2(0<\xi_2<\xi_1<x)$③,

$|f(\xi_2)-f(0)|x^2=|f'(\xi_3)|\xi_2x^2\leqslant|f'(\xi_3)|x^3\leqslant|f(\xi_3)|x^3(0<\xi_3<\xi_2<\xi_1<x)$④。

请你解答下列问题:

(1) 写出步骤 ① 的证明依据;(1 分)

(2) 写出步骤 ② 的证明依据;(1 分)

(3) 指出步骤 ③ 与步骤 ① 的关系;(1 分)

(4) 完成步骤 ④ 以后的证明。(7 分)

四、论述题（本大题共 1 小题，15 分）

15. 学生的数学学习应当是一个生动活泼，积极主动和富有个性的过程，认真听讲，积极思考，动手实践，自主探索，合作交流等都是学习数学的主要方式，请谈谈教师如何在教学中帮助学生养成良好的数学学习习惯。

五、案例分析题（本大题共 1 小题，20 分）阅读案例，并回答问题。

16. 案例：

下面是某个学生的作业：

解方程：$\dfrac{1-x}{x-2}=\dfrac{1}{2-x}+3$

①移项得$\dfrac{1-x}{x-2}-\dfrac{1}{2-x}=3$，②通分得$\dfrac{1-x+1}{x-2}=3$，③化简得$-1=3$，④矛盾。原方程是不是无解啊？

问题：

(1) 指出该学生解此方程时出现的错误，并分析其原因；(7 分)

(2) 给出上述方程的一般解法，帮助学生解除疑惑；(7 分)

(3) 简述中学阶段解方程常用的数学思想方法。(6 分)

六、教学设计题(本大题共 1 小题,30 分)

17. 针对“角平分线的性质定理”的内容,请你完成下列任务:

(1) 叙述角平分线的性质定理;(5 分)

(2) 设计“角平分线的性质定理”的教学过程(只要求写出新课导入、定理形成与证明过程),并说明设计意图;(20 分)

(3) 借助“角平分线的性质定理”,简述如何帮助学生积累认识几何图形的数学活动经验。(5 分)

2019年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(初级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】B。解析:令 $f(x)=\ln x$,根据导数的定义可知,$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$,令 $t=\dfrac{x}{\Delta x}$,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{x}\ln\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}\right]=\dfrac{1}{x}\ln e=\dfrac{1}{x}$。

2.【答案】B。解析:矩阵乘法运算满足结合律和左、右分配律,即 $\boldsymbol{MXY}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{XY})$,$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{MX}+\boldsymbol{MY}$,$(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{M}=\boldsymbol{XM}+\boldsymbol{YM}$,B项正确。矩阵乘法一般不满足交换律和消去律,A,C,D三项错误。故本题选B。

3.【答案】D。解析:若可积函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是偶函数,则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$;若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是奇函数,则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$。因此,$\int_{-1}^{1}(x^2+x^3)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x+0=2\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x>0$,$\int_{-1}^{1}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\mathrm{d}x>0$,$\int_{-1}^{1}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\mathrm{d}x=0$。函数 $y=\ln(x+2)$ 在 $(-1,1)$ 上恒大于零,所以 $\int_{-1}^{1}\ln(x+2)\mathrm{d}x>0$。故本题选D。

4.【答案】A。解析:$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,a>b>0,\\ z=0\end{cases}$ 表示坐标平面 xOy 内长轴在 x 轴上的椭圆,将该椭圆绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的方程,即将方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中的 x 保持不变,y 替换成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$,即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$。故本题选A。

5.【答案】C。解析:因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的基础解系,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是方程组解空间的两个不同的基,从而这两组向量等价,于是有 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=2$,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=2$。故本题选C。

6.【答案】B。解析:三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,则它们的混合积为0,即 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以A,D两项结论正确;共面的三个向量一定线性相关,C项结论正确。对于B项,不妨取 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个同向的非零向量,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 一定不是零向量。故本题选B。

7.【答案】D。解析:图形的平移不改变图形的形状和大小,因此平移后的图形与平移前的图形全等,而全等是相似比为1的相似,所以A,B,C三项中所述的图形的关系都是正确的。平移后得到的图形和原来的图形不一定对称,只有一些特殊的图形平移后和原来的图形是对称的,如中心对称图形在平移后得到的图形和原来的图形是中心对称的。故本题选D。

8.【答案】D。解析:《义务教育数学课程标准(2011年版)》指出,教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一,学生是学习的主体,教师是学习的组织者、引导者与合作者。故本题选D。

二、简答题

9.【参考答案】

(1)由题意得,$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}&0\\0&\dfrac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}x_1+3\\\dfrac{1}{3}x_2+5\end{bmatrix}$,即 $\begin{cases}y_1=\dfrac{1}{2}x_1+3,\\y_2=\dfrac{1}{3}x_2+5,\end{cases}$ 则有

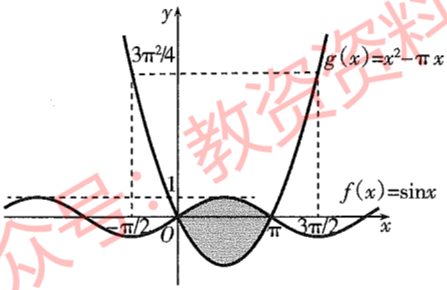
$\begin{cases} x_1 = 2(y_1 - 3), \\ x_2 = 3(y_2 - 5), \end{cases}$代入椭圆方程得$(y_1 - 3)^2 + (y_2 - 5)^2 = 1$。

(2) 平面内任意两点的距离都可通过平移转化为原点到对应点(x,y)的距离，不妨取原点$(0,0)$与点$(2,3)$。由(1)可得，$(0,0)$在题中变换下的像为$(3,5)$，$(2,3)$在题中变换下的像为$(4,6)$，记两点在变换前的距离为d，变换后的距离为d'，则$d = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$，$d' = \sqrt{(4-3)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{2}$，显然在该变换下平面内两点的距离发生变化。

平面内任意直线(斜率存在)都可以通过平移转化为过原点的直线$y = kx$。若$k = 0$，由(1)可得，直线$y = 0$在题中变换下的方程为$3(y' - 5) = 0$，即$y = 5$，斜率仍为0；若$k \neq 0$，不妨令$k = \frac{3}{2}$，直线$y = \frac{3}{2}x$在题中变换下的方程为$3(y' - 5) = \frac{3}{2} \times 2(x' - 3)$，即$y = x + 2$，斜率为1。综上，在题中变换下斜率为0的直线的斜率不发生变化，斜率不为0的直线的斜率发生变化。

10.【参考答案】

(1) 如图所示，画出$f(x) = \sin x$和$g(x) = x^2 - \pi x$的大致图像，根据图像易知两函数图像有且仅有$(0,0)$，$(\pi,0)$两个交点，两函数所围平面图形如图中阴影部分所示，故所求面积$S = \int_0^{\pi}[\sin x - (x^2 - \pi x)]\mathrm{d}x = \left(-\cos x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi}{2}x^2\right)\Big|_0^{\pi} = 2 + \frac{\pi^3}{6}$。



(2) 由旋转体体积公式可得，$V = \int_0^{\pi}\pi \sin^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\pi\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$。

11.【参考答案】

取5次球，最多取到3个白球的对立事件是取到4个白球或5个白球。设取到白球的数量为X，则$P(X = 4) = \frac{C_8^4 C_8^1}{C_{16}^5} = \frac{5}{39}$，$P(X = 5) = \frac{C_8^5}{C_{16}^5} = \frac{1}{78}$，故所求概率$P(X \leqslant 3) = 1 - \frac{5}{39} - \frac{1}{78} = \frac{67}{78}$。

12.【参考答案】

研究中学几何问题主要有以下三种方法。

① 结合数形结合思想，借助代数知识来解决几何问题。

中学数学中，在研究几何图形的性质(或位置关系)时，经常需要将其抽象成适当的数量关系，使抽象思维和形象思维结合起来，从而实现抽象的数量关系与直观的具体形象的联系和转化。例如，在研究点、线、面三者之间的关系时，运用数形结合思想将代数公式与几何图形联系在一起，结合代数语言通过代数方程将问题简化。

② 运用化归思想，将几何问题进行简化研究。

中学数学中新知识的学习，是一个在已有知识的基础上发展未知知识的过程，而这一过程是化归思想的体现。在研究中学几何图形问题时，经常借助已学几何知识，将复杂的几何图形转化为简单图形来解决。例如，在学习圆锥的侧面积公式时，将其转化为扇形的面积公式来研究。

③ 利用方程思想，研究几何图形未知元素的求解问题。

在研究几何图形相关边长、角度等问题时，经常需要利用已知量，根据图形边、角等的数量关系，设置未知量，建立方程(或方程组)、不等式(或不等式组) 来求解。而方程思想就是从问题的数量关系入手，应用数学语言将问题中的条件转化为数学模型(方程(组)、不等式(组))，然后通过解方程或不等式来解决问题。例如，在解三角形的问题中，已知直角三角形的周长和一边，求另外两边的边长，就要通过设未知量，结合周长和勾股定理建立一元二次方程进行求解。

13.【参考答案】

在整个教学过程中，教师调动学生学习的积极性，应遵循情意原则、过程原则和调控原则。具体分析如下。

① 情意原则

情意原则是发挥学生主体性必须坚持的原则，学生学习的情意性越浓，其主体性发挥得就越好。在数学教学活动中贯彻情意原则，可以通过创设问题情境，激发学生的兴趣，使学生具有强烈的求知欲，从而调动其参与数学教学活动的积极性。

② 过程原则

过程原则是指数学教学必须以知识的发生发展和认知形成的内在联系为线索，充分展现和经历其中的思维活动，使学生真正参与到发现的过程中来。在教学中贯彻过程原则，应采用多种教学方式相结合，以此来调动学生强烈的学习欲望，激发其学习动机和兴趣。

③ 调控原则

调控原则强调“反馈 - 调节”机制的应用，其实质是通过及时调控，采取有步骤地设置思维障碍等方法，铺设恰当的认知阶梯，呈现与学生“思维最近发展区” 相适应的学习任务，从而激发学生的学习热情。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 步骤 ① 的证明依据是拉格朗日中值定理。因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，所以由拉格朗日中值定理可知，$\exists \xi_1 \in (0,x) \subseteq (0,1)$，有 $|f(x)-f(0)| = |f'(\xi_1)|(x-0) = |f'(\xi_1)|x$。

(2) 步骤 ② 的证明依据是题中所给条件，$\forall x \in [0,1]$，有 $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$。

(3) 步骤 ①是在区间 $(0,x)$ 上使用拉格朗日中值定理，步骤 ③是在缩小的区间 $(0,\xi_1)$ 上继续使用拉格朗日中值定理。

(4) 将上述过程不断地进行下去，可得 $|f(\xi_{n-1})-f(0)|x^{n-1} = |f'(\xi_n)|\xi_{n-1}x^{n-1} \leqslant |f'(\xi_n)|x^n \leqslant |f(\xi_n)|x^n(0<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_2<\xi_1<x)$，于是 $|f(x)| = |f(x)-f(0)| \leqslant |f(\xi_1)|x \leqslant |f(\xi_2)|x^2 \leqslant \cdots \leqslant |f(\xi_n)|x^n(0<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_2<\xi_1<x)$。

因为函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，从而函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界，即 $\exists M \in \mathbf{R}$，对 $\forall x \in [0,1]$，有 $|f(x)| \leqslant M$。根据函数极限的保不等式性可得，当 $x \in [0,1)$ 时，$0 \leqslant |f(x)| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}|f(\xi_n)|x^n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}Mx^n = 0$，即 $f(x)=0$，再根据函数连续性可得，$f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-}f(x) = 0$，所以 $f(x)=0, x \in [0,1]$。

四、论述题

15.【参考答案】

《义务教育数学课程标准(2011 年版)》中指出，教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程；数学课堂教学应激发学生兴趣，调动学生积极性，引发学生数学思考，鼓励学生的创造性思维；注重培养学生良好的数学学习习惯，使学生掌握恰当的数学方法。因此，结合新课标对课程基本理念的阐述，教师在教学中帮助学生养成良好的数学学习习惯应该做到以下几点：

① 教师在教学过程中，应该将教学内容与实际生活相结合，使学生感受数学与生活的密切联系，从而使其意识到学习数学的重要性及实用性；

② 教师应通过布置复习相关旧知和预习相关新知的学习任务，来帮助学生养成课后巩固和课前预习的良好的数学学习习惯；

③ 教师在教学过程中，应通过创设问题情境等启发性环节，帮助学生养成自主思考的良好的数学学习习惯；

④ 教师在教学过程中，应设置与新课相关的探究活动，使学生在活动中积累基本的数学活动经验，并培养其合作交流的数学学习习惯；

⑤ 教师在教学过程中，要注重结合所授知识向学生渗透数学思想方法，注意培养学生准确地使用数学语言的习惯，进而提高学生思考问题、解决问题的能力；

⑥ 教师要注重对学生数学学习的评价，从而帮助学生全面了解自身的学习情况，帮助其养成定期对自己学习情况查漏补缺的学习习惯。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 错误：该学生在约分的过程中没有考虑约去的分式不能为 0 的情况。

该学生产生错误的原因：没有遵循分式方程的标准解法解此方程；对约分相关内容存在知识漏洞，且思考问题不够全面。

(2) 一般解法如下：

① 方程两边同时乘 $x-2$ 得，$1-x=-1+3(x-2)$；

② 去括号，化简得，$1-x=-7+3x$；

③ 移项得，$-4x=-8$；

④ 解得，$x=2$；

⑤ 将 $x=2$ 代入原方程验证增根，发现 $x-2=0$，即分式方程的分母为 0，不成立；

⑥ 得出结论，原方程无解。

(3) 中学阶段解方程常用的数学思想方法主要有以下几种。

① 化归思想

化归思想是在研究和解决某一数学问题时采用某种手段将问题通过变换使之转化，进而得以解决的一种思想方法，其实质是将复杂问题通过某种变换转化为简单问题。在解方程中实现这种转化的解题方法有配方法、因式分解法、待定系数法等。以因式分解法为例，如将一元二次方程 $x(x-3)+x-3=0$，转化为 $(x+1)(x-3)=0$，分别求解一元一次方程 $x+1=0$ 和 $x-3=0$，从而得到答案。

② 整体思想

整体思想是从问题的整体性质出发，突出对问题整体结构的分析和改造，发现问题的整体结构特征，用“集成”的眼光将某些式子看成一个整体，把握这些式子之间的关联，进行有目的、有意识的整体处理。这一思想在运用换元法解方程时得以体现：在解较为复杂的方程时，通过变量间的某种联系，将其中的某些部分看成一个整体用新的变量符号代替（换元），将复杂的方程进行化简求解，如分式方程 $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{5}{2}$，令 $y=\frac{x}{x+1}$，将上式化简为 $y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$，求出 y 的值，进而求出 x 的值。

③ 分类思想

分类思想是根据数学本质属性的相同点和不同点，将数学研究对象分为不同种类的一种数学思想。例如，在求解带有绝对值的方程 $|x-3|=5$ 时，要分别讨论 $x-3=5$ 和 $x-3=-5$ 这两种情况来求解。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 角平分线的性质定理：角平分线上的点到角两边的距离相等。

(2) 教学过程

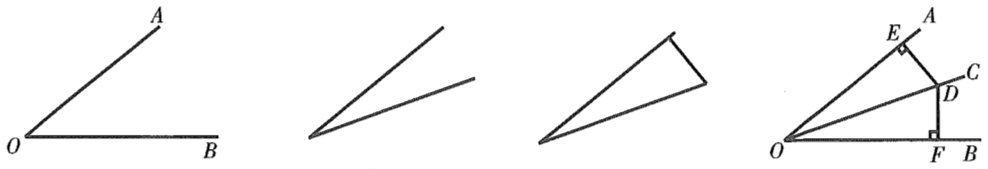
一、导入新课

1. 复习旧知

教师带领学生复习角平分线的概念及作法。

2. 情境导入

教师设置问题情境：如图(多媒体展示)，将 $\angle AOB$ 对折，再折出一个直角三角形(使第一条折痕为斜边)，然后展开，观察两次折叠形成的三条折痕，你能得出什么结论？



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

活动：教师让学生拿出纸剪成多媒体所示的图(a)，按照上述步骤依次折叠，最后形成图(d)，给学生分小组，预留时间供其进行合作探究，教师巡视指导。

【设计意图】新课之前复习旧知，可以帮助学生巩固旧知，同时在旧知的基础上发展新知，贯彻巩固与发展相结合的原则；教师创设问题情境，让学生自主探究新知，充分体现教学过程中以学生为主体的课标要求，同时可以培养学生发现问题的能力和合作交流的意识。

二、明确定理

学生汇报定理内容，教师做适当点评，并讲解：

①OC 为 $\angle AOB$ 的角平分线；

②DE 和 DF 分别为角平分线上一点 D 到角两边的距离；

③$DE = DF$(学生直观探究的结论)。

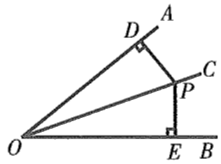
教师讲授定理：经探究可知，角平分线上的点到角两边的距离相等，我们称这一结论为角平分线的性质定理。

【设计意图】教师结合导入的问题，逐一介绍定理相关概念，并进一步明确定理内容，对定理进行了清晰详细的描述，可以使学生很好地理解定理，并对定理内容形成深刻记忆。

三、证明定理

教师引导学生分析要证定理的“已知”和“求证”：已知为“一个点在一个角的角平分线上”，要证结论为“这个点到这个角两边的距离相等”。

教师引导学生将定理内容符号化，并抽象成数学问题：如图，$\angle AOC = \angle BOC$，点 P 在 OC 上，$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为点 D，E，求证 $PD = PE$。



活动：教师预留时间供学生思考探究，学生自主解题，教师巡视，并做如下启发。

师：我们学过什么知识可以证明两条线段相等？

师：$\triangle ODP$ 和 $\triangle OEP$ 的关系是什么？

教师结合讲解，板书证明过程：

$\because PD \perp OA$，$PE \perp OB$，

$\therefore \angle PDO = \angle PEO = 90°$。

又 $\angle AOC = \angle BOC, OP = OP$,

$\therefore \triangle PDO \cong \triangle PEO(\text{AAS})$。

$\therefore PD = PE$。

【设计意图】教师引导学生将定理进行拆分,并引导其将定理内容符号化为数学问题,无形中向学生渗透符号化数学思想;教师启发学生思考,让学生自主证明定理,可以培养学生独立思考的意识,提升其分析问题的能力;教师板书证明过程,使学生与自己的证明过程形成对比,从而在展示科学严谨的证明过程中帮助学生完善证明的数学语言及证明的逻辑思路。

(3)以“角平分线的性质定理”为例,帮助学生积累几何图形的数学活动经验主要有以下几点。

①结合生活中的直观图形,将实际生活中的经验转化为数学活动经验。例如,在“角平分线的性质定理”的教学中,教师引入角平分线知识时,可以结合平分角仪器这一教具,向学生展示仪器的原理,从而引入角平分线性质定理的探究活动。

②丰富数学探究活动,通过实践帮助学生建立对几何图形的直观认识。例如,在教学“角平分线的性质定理”时,教师设计探究活动,即准备纸张,让学生按照课件步骤进行折纸操作,使其通过实践感知角平分线蕴含的奥秘,从而帮助其直观地发现结论。

③结合数学问题引导学生观察、思考、推理证明,培养学生相关的数学思维。例如,在探究“角平分线的性质定理”时,教师将定理内容抽象成数学问题,引导学生结合全等三角形的相关旧知证明定理的结论,即将角平分线上的点到角两边的距离转化为全等三角形对应边相等的证明问题。

④培养学生将数学知识与生活实际问题相结合,并运用数学知识解决实际问题的习惯。例如,在学完“角平分线的性质定理”这一内容时,教师可结合生活实际问题(如某地要在三条笔直的公路围成的空地处建一个度假村,使这个度假村到三条公路的距离相等,应如何确定其位置),让学生运用新知去思考解决生活实际问题的方法。