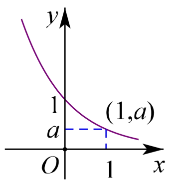
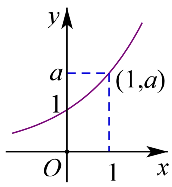
高一上学期 数学　必修一第四章
指数函数及性质八大题型总结

【考点分析】

考点一：指数函数的定义及图像

$y=a^x$		
	$0<a<1$	$a>1$
图象		
性质	①定义域 R，值域 $(0，+\infty)$	
	② $a^0=1$，即时 $x=0$， $y=1$，图象都经过 $(0，1)$ 点	
	③ $a^x=a$，即 $x=1$ 时，y 等于底数 a	
	④在定义域上是单调减函数	在定义域上是单调增函数
	⑤ $x<0$ 时，$a^x>1$；$x>0$ 时，$0<a^x<1$	$x<0$ 时，$0<a^x<1$；$x>0$ 时，$a^x>1$
	⑥ 既不是奇函数，也不是偶函数	

考点二：指数函数底数大小与图象的关系

1.函数① $y=a^x$；② $y=b^x$；③ $y=c^x$；④ $y=d^x$ 的图象如图 2-3-1 所示，则 $0<b<a<1<d<c$；

即 $x\in(0，+\infty)$，$b^x<a^x<d^x<c^x$ (底大幂大)；$x\in(-\infty，0)$ 时，$b^x>a^x>d^x>c^x$．

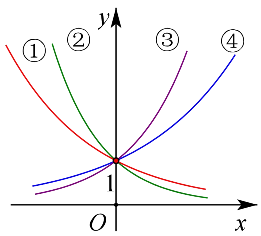


图 1

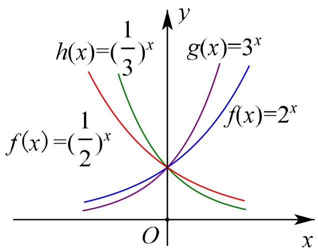


图 2

2.特殊函数：函数 $y=2^x$，$y=3^x$，$y=(\frac{1}{2})^x$，$y=(\frac{1}{3})^x$ 的图象如图 2-3-2 所示．

考点三：指数式大小比较方法

①单调性法：化为同底数指数式，利用指数函数的单调性进行比较．

②中间量法：当指数式的底数和指数各不相同时，需要借助中间量“0”和“1”作比较．

③分类讨论法：指数式的底数不定时，需要分类讨论底数的情况，在利用指数函数的单调性进行比较．

【题型目录】

题型一：指数函数的概念

题型二：指数函数的图像

题型三：指数函数的定点

题型四： 指数函数的奇偶性、单调性

题型五：利用指数函数性质比较大小

题型六：解指数函数不等式

题型七：指数函数的值域问题

题型八：指数函数的解答题

【典型例题】

题型一：指数函数的概念

【例 1】函数 $y=(a^2-3a+3)a^x$ 是指数函数，求 a 的值.

【例 2】指出下列函数哪些是指数函数？

（1） $y=4^x$；（2） $y=x^4$；（3） $y=-4^x$；（4） $y=(-4)^x$；

（5） $y=(2a-1)^x(a>\frac{1}{2}且a\neq1)$；（6） $y=4^{-x}$.

【例 3】下列函数式中，满足 $f\left(x+1\right)=\frac{1}{2}f\left(x\right)$的是(　　　)

A、 $\frac{1}{2}(x+1)$　　B、$x+\frac{1}{4}$　　C、2^x　　D、2^{-x}

【题型专练】

1.（2023·全国·高三专题练习）下列函数是指数函数的有（　　）

A． $y=x^4$　　B． $y=(\frac{1}{2})^x$　　C． $y=2^{2x}$　　D． $y=-3^x$

2.（2022·全国·高一专题练习）下列函数中是指数函数的是__________(填序号).

①$y=2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x$；②$y=2^{x-1}$；③$y=\left(\frac{\pi}{2}\right)^x$；④$y=x^x$；⑤$y=3^{-\frac{1}{x}}$；⑥$y=x^{\frac{1}{3}}$.

3.（2023·全国·高三专题练习）若函数 $y=\left(m^2-m-1\right)\cdot m^x$ 是指数函数，则 m 等于（　　）

A． -1或2　　B． -1

C． 2　　D． $\frac{1}{2}$

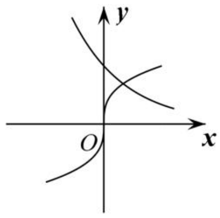
4.（2021·全国高一专题练习）若函数 $y=\left(k+2\right)a^x+2-b$（$a>0$，且 $a\neq1$）是指数函数，则 $k=$______，$b=$______.

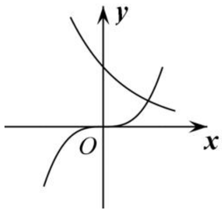
题型二：指数函数的图像

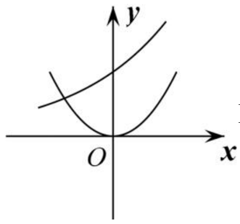
【例 1】已知 $0<a<1,b<-1$,则函数 $y=a^x+b$ 的图像必定不经过（　　　）

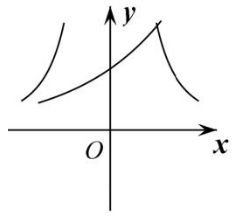
A、第一象限　　B、第二象限　　C、第三象限　　D、第四象限

【例 2】（2022·浙江·绍兴市教育教学研究院高二期末）在同一直角坐标系中，函数 $y=a^{-x}, y=x^{a}(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象可能是（　　）

A. 

B. 

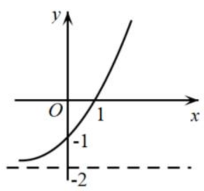
C. 

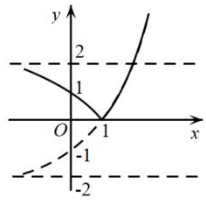
D. 

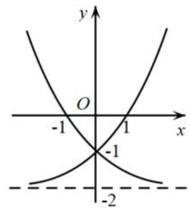
【例 3】（2022·山东青岛·高二期末）函数 $y=3^{-x}$ 与函数 $y=-3^{x}$ 的图象（　　）

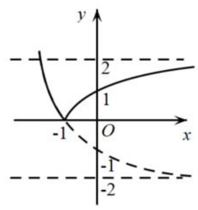
A．关于 x 轴对称　　B．关于 y 轴对称　　C．关于原点对称　　D．关于直线 $y=x$ 对称

【例 4】（2022·全国·高一专题练习）如图所示，函数 $y=\left|2^{x}-2\right|$ 的图像是（　　）

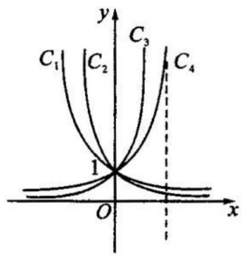
A. 

B. 

C. 

D. 

【例 5】如图的曲线 C₁、C₂、C₃、C₄ 是指数函数 $y=a^{x}$ 的图象，而 $a\in\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3},\pi\right\}$，则图象 C_1、C_2、C_3、C_4 对应的函数的底数依次是________、________、________、________.



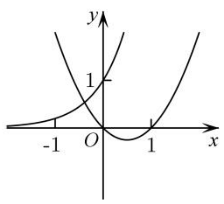
【例 6】（2022·全国·高一）已知函数 $f(x)=\left|2^{x}-1\right|$，实数 a，b 满足 $f(a)=f(b)\ (a<b)$，则（　）

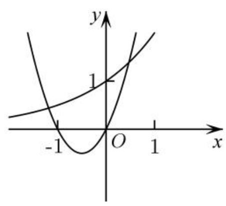
A． $2^{a}+2^{b}>2$　　　　B． $\exists a$，$b\in\mathbf{R}$，使得 $0<a+b<1$

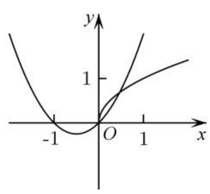
C． $2^{a}+2^{b}=2$　　　　D． $a+b<0$

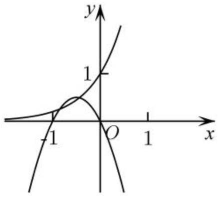
【题型专练】

1．（2021·上海交大附中高一期中）在同一坐标系中，函数 $y=ax^{2}+bx$ 与函数 $y=b^{x}$ 的图象可能为（　）

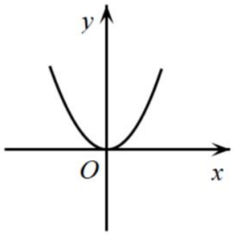
A. 

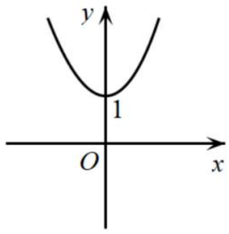
B. 

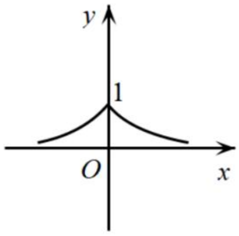
C. 

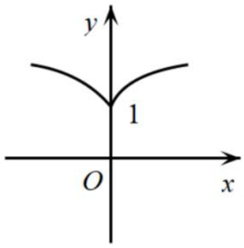
D．

2.（2022·全国·高一专题练习）函数 $y=\mathrm{e}^{-|x|}$（e是自然底数)的大致图像是（　　）

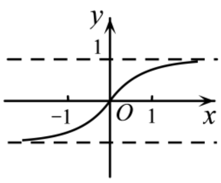
A．

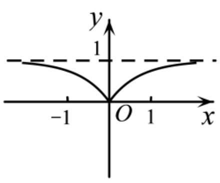
B．

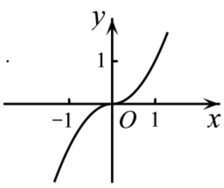
C．

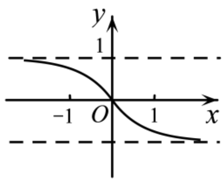
D．

3.（2022·浙江衢州·高二阶段练习）函数 $y=\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{2^{|x|}}$ 的部分图象大致为（　　）

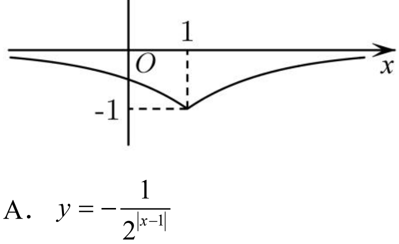
A．

B．

C．

D．

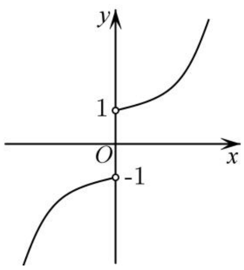
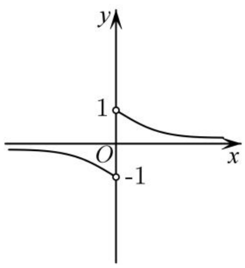
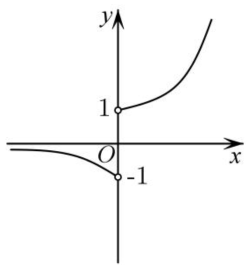
4.（2023·全国·高三专题练习）下图中的函数图象所对应的解析式可能是（　　）

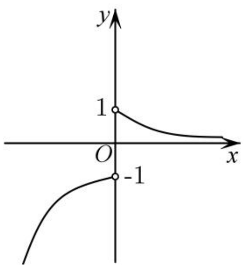


A．$y=-\dfrac{1}{2^{|x-1|}}$　　　　B．$y=-\left|\dfrac{1}{2^{x}}-1\right|$

C．$y=-2^{|x-1|}$　　　　D．$y=-\left|2^{x}-1\right|$

5．（2022·江西·南城县第二中学高二阶段练习（文））函数 $f(x)=\frac{x}{|x|}\cdot a^x(a>1)$ 的图象的大致形状是（　　）

A.  B.  C. 

D. 

题型三：　指数函数的定点

【例 1】 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，函数 $f\left(x\right)=a^{x-2}-3$ 必过定点______________.

【例 2】（2021 • 高邮市临泽中学高一月考）已知函数 $f(x)=a^{x+2}-3$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图象恒过定点 A，若点 A 在一次函数 $y=mx-n$ 的图象上，其中实数 m，n 满足 $mn>0$，则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为______.

【题型专练】

1.（2021·上海高一专题练习）函数 $y=a^{x+2020}+2022(a>0,a\neq 1)$ 的图像恒过定点______.

2.（2022·江西省铜鼓中学高一期末）函数 $y=a^{x-1}+1$，（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图象必经过一个定点，则这个定点的坐标是（　　）

A．$\left(0,1\right)$　　　　B．$\left(1,2\right)$　　　　C．$\left(2,3\right)$　　　　D．$\left(3,4\right)$

题型四：　指数函数的奇偶性、单调性

【例 1】 判断函数 $f\left(x\right)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>0且a\neq 1)$ 的奇偶性

【例 2】 设函数 $f\left(x\right)=x\left(e^x+ae^{-x}\right)\left(x\in R\right)$ 是偶函数，则实数 a 的值为________.

【例 3】若函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别是 R 上的奇函数、偶函数，且满足 $f(x)-g(x)=2^x$，则有(　　)

A．$f(2)<f(3)<g(0)$　　B．$g(0)<f(3)<f(2)$

C．$f(2)<g(0)<f(3)$　　D．$g(0)<f(2)<f(3)$

【例 4】已知 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，则下列正确的是（　　）

A．奇函数，在 R 上为增函数　B．偶函数，在 R 上为增函数
C．奇函数，在 R 上为减函数　D．偶函数，在 R 上为减函数

【例 5】函数 $y=(\frac{1}{2})^{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的单调递增区间是（　　）

A．$[-1,\frac{1}{2}]$　B．$(-\infty,-1]$　C．$[2,+\infty)$　D．$[\frac{1}{2},2]$

【例 6】若函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} a^x, x>1 \\ \left(4-\dfrac{a}{2}\right)x+2, x\le 1 \end{cases}$ 是 **R** 上的增函数，则实数 a 的取值范围为

A．(1，＋∞)　B．(1,8)　C．(4,8)　D．[4,8)

【例 7】已知函数 $f(x)=\dfrac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}$，如果对任意 $t\in R$，$f(3t^2+2t)+f(k^2-2t^2)<0$ 恒成立，则满足条件的 k 的取值范围是____________.

【例 8】已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}$，则不等式 $f(x+1-x^2)+f(x+2)+x^2-2x-3<0$ 的解集是__________.

【题型专练】

1.（2021 新高考 1 卷）已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 是偶函数，则 $a=$__________.

2.函数 $f(x)=\left(a^2-1\right)^x$ 在 R 上是减函数，则 a 的取值范围是（　　）

A、$|a|>1$　B、$|a|<2$　C、$a<\sqrt{2}$　D、$1<|a|<\sqrt{2}$

3.（2023·全国·高三专题练习）已知定义域为 **R** 的函数 $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$ 则关于 t 的不等式 $f\left(t^2-2t\right)+f\left(2t^2-1\right)<0$ 的解集为________.

4.函数 $y=3^{2-3x^2}$ 的单调递减区间是__________.

5.（2022·全国·高一单元测试）已知函数 $f(x)=\frac{m}{3^{-x}+1}(m>0)$，且 $f\left(a+2\right)+f\left(b\right)-m<0$，则（　　）

A．$a+b<0$　　　　B．$a+b+2<0$

C．$a-b+1>0$　　　　D．$a+b>0$

6.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=\frac{3^x-1}{3^x+1}$，下面说法正确的有（　　）

A．$f\left(x\right)$的图象关于原点对称

B．$f\left(x\right)$的图象关于 y 轴对称

C．$f\left(x\right)$的值域为$(-1,1)$

D．$\forall x_1,x_2\in \mathrm{R}$，且 $x_1\neq x_2$，$\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$

7.已知函数 $f(x)=e^{|x-1|}+x^2-2x+1$,则使得不等式 $f(2m)<f(m+1)$ 成立的实数 m 的取值范围是(　　)

A. $\left(\frac{1}{3},1\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{3},1\right)$　　C. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\bigcup(1,+\infty)$

题型五：利用指数函数性质比较大小

【例 1】判断下列各数的大小关系：

(1)1.8^a 与 1.8^{a+1}；　　(2) $(\frac{1}{3})^{\frac{2}{3}},3^4,(\frac{1}{3})^{-2}$　　(3) $2^{0.2}$，$(2.5)^0$，$(\frac{1}{3})^{0.3}$

【例 2】设$\frac{1}{3}<(\frac{1}{3})^b<(\frac{1}{3})^a<1$，则(　　)

A．$a^a<a^b<b^a$　　B．$a^a<b^a<a^b$　　C．$a^b<a^a<b^a$　　D．$a^b<b^a<a^a$

【例 3】已知 $a=0.8^{0.7}$,$b=0.8^{0.9}$,$c=1.2^{0.8}$，则 a、b、c 的大小关系是

【例 4】【2016 高考新课标 3 理数】已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，则（　　）

（A）$b<a<c$　（B）$a<b<c$　（C）$b<c<a$　（D）$c<a<b$

【例 5】（2021·江西高安中学高一月考）已知 $a=3^{1.1}$，$b=4^{1.1}$，$c=3^{0.9}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A．$c<a<b$　B．$c<b<a$　C．$b<a<c$　D．$b<c<a$

【例 6】（2022·全国·高一单元测试）若实数 x，y 满足 $2022^{x}+2023^{-y}<2022^{y}+2023^{-x}$，则（　　）

A．$\frac{x}{y}>1$　B．$\frac{x}{y}<1$

C．$x-y<0$　D．$x-y>0$

【题型专练】

1.（2021·全国高一课时练习）已知 $a=\sqrt{2}$，$b=2^{0.8}$，$c=4^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A．$c<b<a$　B．$c<a<b$　C．$b<a<c$　D．$b<c<a$

2.（2021·全国高一课时练习）下列判断正确的是（　　）

A．$2.5^{2.5}>2.5^{3}$　B．$0.8^{2}<0.8^{3}$

C．$4^{\sqrt{2}}<\pi^{\sqrt{2}}$　D．$0.9^{0.3}>0.9^{0.5}$

3.（2022·全国·高一课时练习）已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，$d=6^{\frac{2}{3}}$，则（　　）

A．$b<a<d<c$　B．$b<c<a<d$

C．$c<d<b<a$　D．$b<a<c<d$

题型六：解指数函数不等式

【例 1】若 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2a+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2a}$，则实数 a 的取值范围是_________.

【例 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x},x\le 0\\-x^{3},x>0\end{cases}$，若 $f(a-1)\ge f(-a)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

【题型专练】

1.解不等式 $2^{x^2-3x}<1$

2.（2021·新疆维吾尔自治区阿克苏地区第二中学高一期末）若 x 满足不等式 $2^{x^2+1}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$，则函数 $y=2^x$ 的值域是（　　）

A. $\left[\frac{1}{8},2\right)$　　B. $\left[\frac{1}{8},2\right]$　　C. $\left(-\infty,\frac{1}{8}\right]$　　D. $[2,+\infty)$

3.（2021·全国高一课时练习）函数 $f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}+2$，若有 $f(a)+f(a-2)>4$，则 a 的取值范围是________.

题型七：指数函数的值域问题

【例 1】 已知 $x\in[-3,2]$，求 $f(x)=\frac{1}{4^x}-\frac{1}{2^x}+1$ 的最小值与最大值。

【例 2】 若关于 x 的不等式 $2^{x+1}-2^{-x}-a>0$ 在区间 $(0,1)$ 上恒成立，则 a 的取值范围为____________

【例 3】 已知实数 $a>0$ 且 $a\ne1$,若函数 $f(x)=\begin{cases}6-x, & x\le2\\ a^x, & x>2\end{cases}$ 的值域为 $[4,+\infty)$,则 a 的取值范围是(　　)

A. $(1,2)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(0,1)\cup(1,2]$　　D. $[2,+\infty)$

【例 4】（2022 河南高一期末）函数 $y=4^x+4^{-x}+2^x-2^{-x}$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{7}{4}$

【例 5】（2022·浙江省义乌中学高一期末）高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的美誉，用其名字命名的“高斯函数": 设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y=[x]$ 称为高斯函数，也称取整函数，例如: $[-1.3]=-2,[3.4]=3$，已知 $f(x)=\frac{1}{3^x+1}-\frac{1}{3}$，则函数 $y=[f(x)]$ 的值域为（　　）

A．$\{0\}$　　B．$\{-1,0\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{-1,0,1\}$

【题型专练】

1.函数 $y=a^x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值的和为 3，则 a=(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.2　　C.4　　D.$\frac{1}{4}$

2.（2022·全国·高一专题练习）函数 $y=4^x+2^{x+1}+3$ 的值域为____.

3.（2022·全国·高一专题练习）设不等式 $4^x-m\left(4^x+2^x+1\right)\geq 0$ 对于任意的 $x\in[0,1]$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_______.

4.（2022·全国·高一课时练习）（多选）已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x+3}$，则（　　）

A．函数 $f(x)$ 的定义域为 R　　B．函数 $f(x)$ 的值域为 $(0,2]$

C．函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增　　D．函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递减

5.（2021·江苏·矿大附中高三阶段练习多选题）函数 $f(x)=2^{2x}-2^{x+1}+2$ 的定义域为 M，值域为 $[1,2]$，下列结论中一定成立的结论的序号是（　　）

A．$M\subseteq(-\infty,1]$　　B．$M\supseteq[-2,1]$　　C．$1\in M$　　D．$0\in M$

题型八：指数函数解答题

【例 1】（重庆巴蜀中学高一期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{a-2^x}{2^x+1}$ 是 R 上的奇函数

（1）求实数 a 的值

（2）解不等式 $f(x)<1-2^{x-1}$

【例 2】(重庆巴川中学高一期中) 已知定义域为 R 的函数 $f(x)=\dfrac{b-2^x}{2^x+a}$ 是奇函数.

（1）求实数 a，b；

（2）定义证明 f（x）在(-∞，+∞)上的单调性，

（3）若不等式 $f(tx)+f(x^2+4)>0$ 对 $x>0$ 有解，求 t 的范围.

【例 3】（重庆八中高一半期）已知函数 $f\left(x\right)=a\cdot 4^{x}-a\cdot 2^{x+1}+1-b\left(a>0\right)$ 在区间 $\left[1,2\right]$ 上的最大值为 9，最小值为 1

（1）求实数 a，b 的值

（2）若方程 $f\left(x\right)-k\cdot 2^{x}=0$ 在 $\left[-1,2\right]$ 上有两个不同的实数解，求 k 的取值范围

【例 4】（2022·广东韶关·高一期末）双曲函数是一类与常见的三角函数类似的函数，最基本的双曲函数是双曲正弦函数和双曲余弦函数（历史上著名的“悬链线问题”与之相关）．记双曲正弦函数为 $f\left(x\right)$，双曲余弦函数为 $g\left(x\right)$，已知这两个最基本的双曲函数具有如下性质：

①定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

② $f\left(x\right)$ 为奇函数，$g\left(x\right)$ 为偶函数；

③ $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}$（常数 e 是自然对数的底数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$）．

利用上述性质，解决以下问题：

(1)求双曲正弦函数和双曲余弦函数的解析式；

(2)证明：对任意实数 x，$\left[f\left(x\right)\right]^{2}-\left[g\left(x\right)\right]^{2}$ 为定值；

(3)已知 $m\in\mathbf{R}$，记函数 $y=2m\cdot g\left(2x\right)-4f\left(x\right)$，$x\in\left[0,\ln 2\right]$ 的最小值为 $\varphi\left(m\right)$，求 $\varphi\left(m\right)$．

【例 5】（2022·河南洛阳·高一期末（文））设函数 $f\left(x\right)=a^{x}-\left(k+2\right)a^{-x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数．

(1)求实数 k 的值；

(2)若 $f(1)=\dfrac{3}{2}$，$g\left(x\right)=a^{2x}+a^{-2x}-2mf\left(x\right)$，且当 $x\in\left[1,+\infty\right)$ 时，$g\left(x\right)\geq 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

【题型专练】

1.（2022·天津南开·高一期末）已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1+a\cdot 2^{x}}{2^{x}+b}$ 是奇函数，并且函数 $f\left(x\right)$ 的图像经过点 $\left(1,3\right)$．

(1)求实数 a，b 的值；

(2)求函数 $f\left(x\right)$ 在 $x<0$ 时的值域．

2．（2018·湖南·华容县教育科学研究室高一期末）已知定义在实数集R上的奇函数$f\left(x\right)$有最小正周期2，且当$x\in\left(0,1\right)$时，$f(x)=\dfrac{2^x}{4^x+1}$.

(1)求函数$f\left(x\right)$在$(-1,1)$上的解析式；

(2)判断$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上的单调性，并证明；

(3)当λ取何值时，方程$f\left(x\right)=\lambda$在$\left(0,1\right)$上有实数解.

3.（2022·辽宁营口·高二期末）已知函数$f(x)=\dfrac{9^x+m\cdot 3^x+1}{9^x+3^x+1}$.

(1)若对任意的$x\in\mathrm{R}$，$f(x)>0$恒成立，求实数m的取值范围；

(2)若$f(x)$的最大值为2，求实数m的值；

(3)若对任意的x_1，x_2，$x_3\in\mathrm{R}$，均存在以$f\left(x_1\right)$，$f\left(x_2\right)$，$f\left(x_3\right)$为三边长的三角形，求实数m的取值范围.

4．（2022·河南洛阳·高一期末（理））设函数$f\left(x\right)=a^x-\left(k+2\right)a^{-x}$（$a>0$且$a\neq 1$）是定义域为**R**的奇函数.

(1)求实数k的值；

(2)若$f(1)=\dfrac{3}{2}$，$g\left(x\right)=a^{2x}+a^{-2x}-2mf\left(x\right)$，且$g\left(x\right)$在$\left[1,+\infty\right)$上的最小值为$2$，求实数$m$的值.

5．（2022·辽宁·辽阳市第一高级中学高二期末）已知定义在R上的函数$f\left(x\right)=\dfrac{2^x}{4^x+a}$是偶函数.

(1)求a的值；

(2)判断函数$f\left(x\right)$在$\left[0,+\infty\right)$上的单调性并证明；

(3)解不等式：$f\left(-x^2+4x-7\right)<f\left(x^2-x+1\right)$.

6．（2022·全国·高一专题练习）已知定义在$(-1,1)$上的奇函数$f\left(x\right)$．在$x\in\left(-1,0\right)$时，$f\left(x\right)=2^{x}+2^{-x}$．

(1)试求$f\left(x\right)$的表达式；

(2)若对于$x\in\left(0,1\right)$上的每一个值，不等式$t\cdot 2^{x}\cdot f\left(x\right)<4^{x}-1$恒成立，求实数$t$的取值范围．

7．（2022·福建福州·高二期末）已知$y=f\left(x\right)$是定义在R上的奇函数，当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=3^{x}+a\left(a\in \mathrm{R}\right)$．

(1)求函数$f\left(x\right)$在R上的解析式；

(2)若$\forall x\in \mathrm{R}$，$f\left(x^{2}-x\right)+f\left(4-mx\right)>0$恒成立，求实数$m$的取值范围．

8．（2022·重庆九龙坡·高二期末）已知函数$f\left(x\right)=2^{x}+\dfrac{a}{2^{x}}$为奇函数．

(1)求实数a的值；

(2)判断并证明$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上的单调性；

(3)若对任意$t\in\mathbf{R}$，不等式$f\left(kt^{2}-kt\right)+f\left(2-kt\right)>0$恒成立，求实数$k$的取值范围

指数函数及性质八大题型总结 解析

【典型例题】

题型一：指数函数的概念

【例 1】函数 $y=(a^2-3a+3)a^x$ 是指数函数，求 a 的值.

【答案】 $a=2$

【解析】因为函数 $y=(a^2-3a+3)a^x$ 是指数函数，所以 $\begin{cases}a^2-3a+3=1\\ a>0且a\neq 1\end{cases}$，解得 $a=2$

【例 2】指出下列函数哪些是指数函数？

（1） $y=4^x$；（2） $y=x^4$；（3） $y=-4^x$；（4） $y=(-4)^x$；

（5） $y=(2a-1)^x(a>\frac{1}{2}且a\neq 1)$；（6） $y=4^{-x}$.

【答案】（1）（5）（6）

【解析】由指数函数的定义可知

【例 3】下列函数式中，满足 $f(x+1)=\frac{1}{2}f(x)$ 的是(　　)

A、 $\frac{1}{2}(x+1)$　　B、 $x+\frac{1}{4}$　　C、 2^x　　D、 2^{-x}

【答案】D

【解析】因为 $f(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，所以 $f(x+1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x)$

【题型专练】

1.（2023·全国·高三专题练习）下列函数是指数函数的有（　　）

A． $y=x^4$　　B． $y=(\frac{1}{2})^x$　　C． $y=2^{2x}$　　D． $y=-3^x$

【答案】BC

【分析】根据指数函数的定义逐一判断即可.

【详解】解：对于 A，函数 $y=x^4$ 不是指数函数，

对于 B，函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 是指数函数；

对于 C，函数 $y=2^{2x}=4^x$ 是指数函数；

对于 D，函数 $y=-3^x$ 不是指数函数.

故选：BC.

2.（2022·全国·高一专题练习）下列函数中是指数函数的是__________(填序号).

① $y=2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x$；② $y=2^{x-1}$；③ $y=\left(\frac{\pi}{2}\right)^x$；④ $y=x^x$；⑤ $y=3^{-\frac{1}{x}}$；⑥ $y=x^{\frac{1}{3}}$.

【答案】③

【分析】利用指数函数的定义逐个分析判断即可

【详解】① $y=2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x}$ 的系数不是1，不是指数函数；

② $y=2^{x-1}$ 的指数不是自变量 x，不是指数函数；

③ $y=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x}$ 是指数函数；

④ $y=x^{x}$ 的底数是 x 不是常数，不是指数函数；

⑤ $y=3^{-\frac{1}{x}}$ 的指数不是自变量 x，不是指数函数；

⑥ $y=x^{\frac{1}{3}}$ 是幂函数.

故答案为：③

3.（2023·全国·高三专题练习）若函数 $y=\left(m^{2}-m-1\right)\cdot m^{x}$ 是指数函数，则 m 等于（　　）

A. -1 或 2　　B. -1

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【分析】根据题意可得出关于实数 m 的等式与不等式，即可解得实数 m 的值.

【详解】由题意可得 $\begin{cases}m^{2}-m-1=1\\ m>0\\ m\neq 1\end{cases}$，解得 $m=2$.

故选：C.

4.（2021·全国高一专题练习）若函数 $y=\left(k+2\right)a^{x}+2-b\left(a>0\right.$，且 $\left.a\neq 1\right)$是指数函数，则 $k=$______，$b=$______.

【答案】-1；2.

【详解】根据指数函数的定义，得 $\begin{cases}k+2=1,\\ 2-b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\ b=2.\end{cases}$ 故答案为：-1；2.

题型二：指数函数的图像

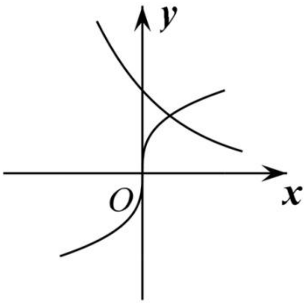
【例 1】已知 $0<a<1, b<-1$,则函数 $y=a^{x}+b$ 的图像必定不经过（　　）

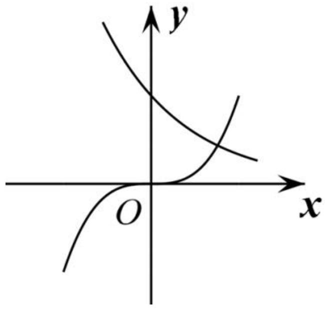
A、第一象限　　B、第二象限　　C、第三象限　　D、第四象限

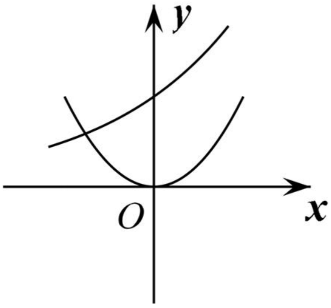
【答案】A

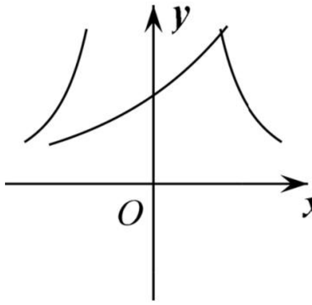
【详解】由图象可知函数向下平移超过 1 个单位，所以必不经过第一象限

【例 2】（2022·浙江·绍兴市教育教学研究院高二期末）在同一直角坐标系中，函数 $y=a^{-x}, y=x^{a}(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象可能是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【分析】讨论 $a>1$ 时和 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^{-x},y=x^{a}$ 的图象增减即可判断出可能的图象，即得答案.

【详解】当 $a>1$ 时， $y=a^{-x}$ 为指数函数，且递减，

$y=x^{a}$ 为幂函数，且在 $x>0$ 时递增，递增的幅度随 x 的增大而增加的更快，故 A 错误，B 正确；

当 $0<a<1$ 时， $y=a^{-x}$ 为指数函数，且递增，

$y=x^{a}$ 为幂函数，且在 $x>0$ 时递增，递增的幅度越往后越平缓，故 C,D 错误,

故选：B

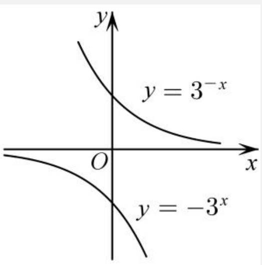
【例 3】（2022·山东青岛·高二期末）函数 $y=3^{-x}$ 与函数 $y=-3^{x}$ 的图象（　　）

A．关于 x 轴对称　　B．关于 y 轴对称　　C．关于原点对称　　D．关于直线 $y=x$ 对称

【答案】C

【分析】在同一坐标系中，作出两个函数的图象判断.

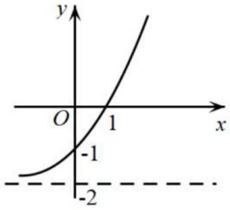
【详解】解：在同一坐标系中，作出函数 $y=3^{-x}$ 与函数 $y=-3^{x}$ 的图象，如图所示：

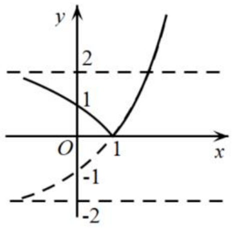


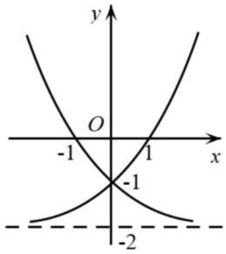
由图象知：函数 $y=3^{-x}$ 与函数 $y=-3^{x}$ 的图象关于原点对称，

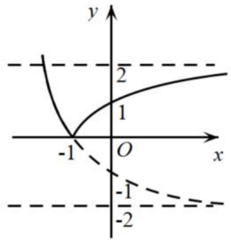
故选：C

【例 4】（2022·全国·高一专题练习）如图所示，函数 $y=\left|2^{x}-2\right|$ 的图像是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【分析】将原函数变形为分段函数，根据 $x=1$ 及 $x\neq 1$ 时的函数值即可得解.

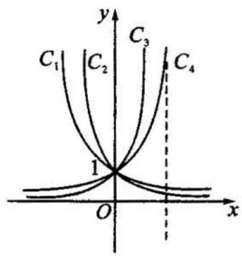
【详解】$\because y=\left|2^{x}-2\right|=\begin{cases}2^{x}-2, x\geq 1\\ 2-2^{x}, x<1\end{cases}$,

$\therefore x=1$ 时， $y=0, x\neq 1$ 时， $y>0$.

故选：B.

【例 5】如图的曲线 C1、C2、C3、C4 是指数函数 $y=a^{x}$ 的图象，而 $a\in\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3},\pi\right\}$，

则图象 C1、C2、C3、C4 对应的函数的底数依次是________、________、________、________.



【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\pi,\sqrt{3}$

【详解】指数函数在第一象限内的图象底大图高可知

【例 6】(2022·全国·高一) 已知函数 $f(x)=\left|2^{x}-1\right|$，实数 a，b 满足 $f(a)=f(b)\ (a<b)$，

则（　）

A．$2^{a}+2^{b}>2$

B．$\exists a$，$b\in\mathbf{R}$，使得 $0<a+b<1$

C．$2^{a}+2^{b}=2$

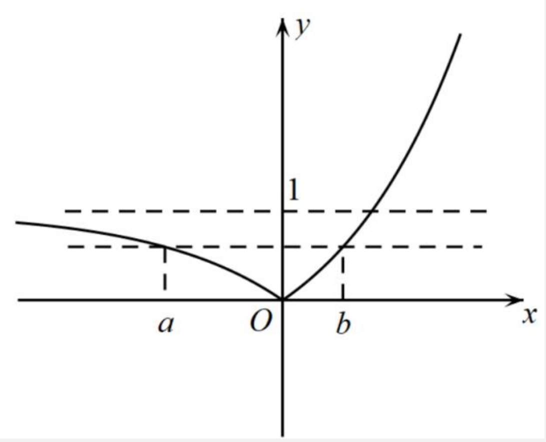
D．$a+b<0$

【答案】CD

【分析】根据函数解析式，作函数的图象，根据图象的特征，可得选项 A、C 的正误，根据基本不等式，可得选项 B、D 的正误.

【详解】画出函数 $f(x)=\left|2^{x}-1\right|$ 的图象，如图所示．由图知 $1-2^{a}=2^{b}-1$，则 $2^{a}+2^{b}=2$，故 A 错，C 对．

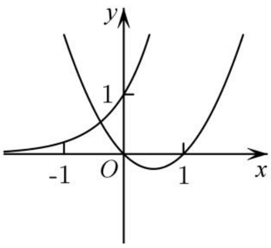
由基本不等式可得 $2=2^a+2^b>2\sqrt{2^a\cdot 2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}$，所以 $2^{a+b}<1$，则 $a+b<0$，故 B 错，D 对.

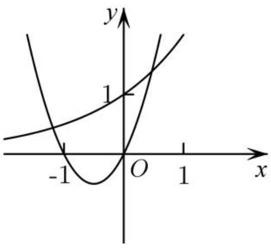


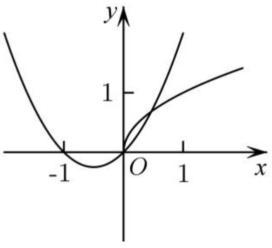
故选：CD.

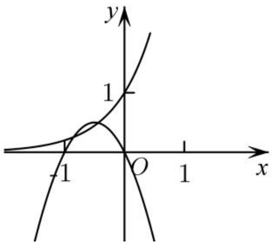
【题型专练】

1．（2021·上海交大附中高一期中）在同一坐标系中，函数 $y=ax^2+bx$ 与函数 $y=b^x$ 的图象可能为（　　）

A． 

B． 

C． 

D． 

【答案】B

【分析】判断 b 的范围，结合二次函数的开口方向，判断函数的图象即可.

【详解】解：函数 $y=b^x$ 的是指数函数，$b>0$ 且 $b\neq 1$，排除选项 C，

如果 $a>0$，二次函数的开口方向向上，二次函数的图象经过原点，并且有另一个零点：

$x=-\dfrac{b}{a}$，

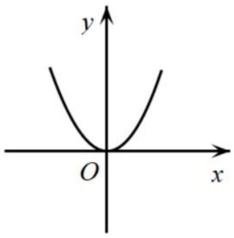
所以 B 正确；

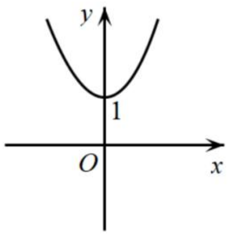
对称轴在 x 轴左侧，C 不正确；

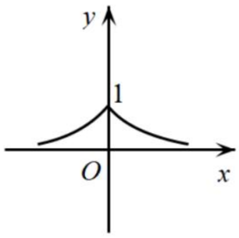
如果 $a<0$，二次函数有一个零点 $x=-\dfrac{b}{a}>0$，所以 D 不正确.

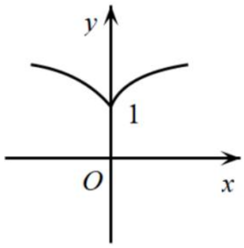
故选：B.

2.（2022·全国·高一专题练习）函数 $y=\mathrm{e}^{-|x|}$（e 是自然底数)的大致图像是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【分析】根据指数函数的图像与性质即可得出答案.

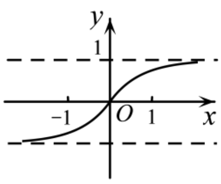
【详解】解析 $\because y=\mathrm{e}^{-|x|}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{x}, & x\ge 0\\ \mathrm{e}^{x}, & x<0\end{cases}$，

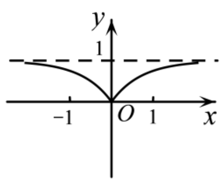
函数 $y=\mathrm{e}^{-|x|}$ 为偶函数，且过 $(0,1)$， $y=\mathrm{e}^{-|x|}>0$，

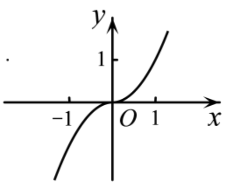
函数在 $(-\infty,0)$ 上递增，在 $(0,+\infty)$ 上递减，故 C 符合.

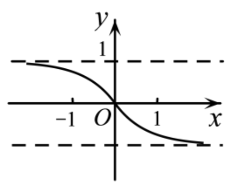
故选：C.

3.（2022·浙江衢州·高二阶段练习）函数 $y=\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{2^{|x|}}$ 的部分图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【分析】首先判断函数的奇偶性，再对 $x<0$ 和 $x>0$ 时函数值的情况讨论，利用排除法即可

判断；

【详解】解：因为 $y=f\left(x\right)=\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{2^{|x|}}$ 定义域为R，又 $f\left(-x\right)=\dfrac{2^{-x}-2^{x}}{2^{|-x|}}=\dfrac{-\left(2^{x}-2^{-x}\right)}{2^{|x|}}=-f\left(x\right)$，

所以 $y=f\left(x\right)=\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{2^{|x|}}$ 为奇函数，函数图象关于原点对称，故排除 B；

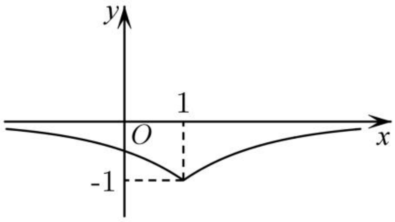
当 $x<0$ 时 $0<2^{x}<1$，$2^{-x}>1$，$2^{|x|}>1$，所以 $2^{x}-2^{-x}<0$，所以 $f\left(x\right)<0$，故排除 D；

当 $x>0$ 时 $f\left(x\right)=\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{2^{|x|}}=\dfrac{2^{x}-\frac{1}{2^{x}}}{2^{x}}=1-\dfrac{1}{4^{x}}$，因为 $0<\dfrac{1}{4^{x}}<1$，所以 $0<1-\dfrac{1}{4^{x}}<1$，即

$0<f\left(x\right)<1$，故排除 C；

故选：A

4．（2023·全国·高三专题练习）下图中的函数图象所对应的解析式可能是（　　）



A．$y=-\dfrac{1}{2^{|x-1|}}$　　　　B．$y=-\left|\dfrac{1}{2^{x}}-1\right|$

C．$y=-2^{|x-1|}$　　　　D．$y=-\left|2^{x}-1\right|$

【答案】A

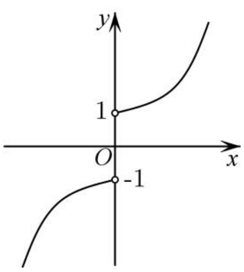
【分析】根据函数图象的对称性、奇偶性、单调性以及特殊点，利用排除法即可求解.

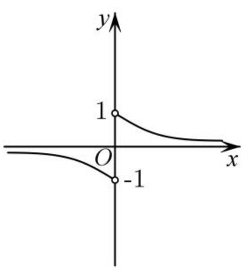
【详解】解：根据图象可知，函数关于 $x=1$ 对称，且当 $x=1$ 时，$y=-1$，故排除 B、D 两项；

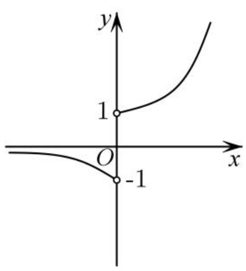
当 $x>1$ 时，函数图象单调递增，无限接近于 0，对于 C 项，当 $x>1$ 时，$y=-2^{|x-1|}$ 单调递减，故排除 C 项.

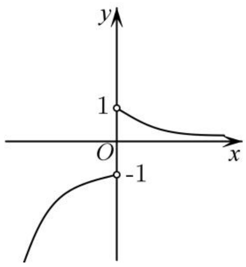
故选：A.

5．（2022·江西·南城县第二中学高二阶段练习（文））函数 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}\cdot a^{x}(a>1)$ 的图象的大致形状是（　　）

A．

B．

C．

D. 

【答案】C

【分析】分 $x>0$ 和 $x<0$ 去掉绝对值化简函数解析式，即可判断函数图像.

【详解】∵ $f(x)=\frac{x}{|x|}\cdot a^{x}=\begin{cases}a^{x},x>0\\-a^{x},x<0\end{cases}$，又 $a>1$，

∴根据指数函数图像即可判断选项 C 符合.

故选：C.

题型三： 指数函数的定点

【例 1】当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，函数 $f\left(x\right)=a^{x-2}-3$ 必过定点______________.

【答案】$\left(2,-2\right)$

【详解】法一：$y=a^{x}$ 必过定点 $\left(0,1\right)$，将 $y=a^{x}$ 向右平移 2 个单位得到 $y=a^{x-2}$，所以 $y=a^{x-2}$ 必过定点 $\left(2,1\right)$，将 $y=a^{x-2}$ 向下平移 3 个单位得到 $f\left(x\right)=a^{x-2}-3$，所以函数 $f\left(x\right)=a^{x-2}-3$ 必过定点 $\left(2,-2\right)$

法二：令 $x-2=0$，得到 $x=2$，所以 $f\left(2\right)=a^{0}-3=1-3=-2$，所以函数 $f\left(x\right)=a^{x-2}-3$ 必过定点 $\left(2,-2\right)$

【例 2】（2021·高邮市临泽中学高一月考）已知函数 $f(x)=a^{x+2}-3$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图象恒过定点 A，若点 A 在一次函数 $y=mx-n$ 的图象上，其中实数 m，n 满足 $mn>0$，则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为______.

【答案】4

【详解】∵函数 $y=a^{x+2}-3(a>0,$ 且 $a\neq 1)$ 的图象恒过定点 A，可得 $A\left(-2,-2\right)$，∵点 A 在一次函数 $y=mx-n$ 的图象上，∴ $2m+n=2$，∵ m，$n>0$，所以

$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{m}+\frac{2}{n})\left(2m+n\right)=\frac{1}{2}(4+\frac{n}{m}+\frac{4m}{n})\geq\frac{1}{2}(4+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{4m}{n}})=4$，当且仅当 $m=\frac{1}{2},n=1$ 时取得等号；

【题型专练】

1.（2021·上海高一专题练习）函数 $y=a^{x+2020}+2022(a>0,a\neq 1)$ 的图像恒过定点______.

【答案】$\left(-2020,2023\right)$

【详解】∵ $a^{0}=1(a>0,a\neq 1)$，令 $x+2020=0$，得 $x=-2020$，$y=a^{0}+2022=2023$，

$\therefore$ 函数 $y=a^{x+2020}+2022(a>0,a\neq 1)$ 的图象恒过定点 $(-2020,2023)$，

故答案为：$(-2020,2023)$.

2.（2022·江西省铜鼓中学高一期末）函数 $y=a^{x-1}+1$，（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图象必经过一个定点，则这个定点的坐标是（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

【答案】B

【分析】令指数为 0，求出 x，再代入计算可得；

【详解】解：令 $x-1=0$，解得 $x=1$，

所以当 $x=1$ 时，$y=a^{x-1}+1=a^0+1=2$，

所以函数 $y=a^{x-1}+1$ 过定点 $(1,2)$.

故选：B

题型四：指数函数的奇偶性、单调性

【例 1】判断函数 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>0且a\neq 1)$ 的奇偶性

【答案】奇函数

【详解】$f(x)$ 的定义域为 R，因 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{(a^{-x}-1)a^x}{(a^{-x}+1)a^x}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数

【例 2】设函数 $f(x)=x(e^x+ae^{-x})(x\in R)$ 是偶函数，则实数 a 的值为________.

【答案】$a=-1$

【详解】因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $g(x)=e^x+ae^{-x}$ 为奇函数，所以 $g(0)=e^0+ae^0=0$，解得 $a=-1$

【例 3】若函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别是 R 上的奇函数、偶函数，且满足 $f(x)-g(x)=2^x$，则有（　　）

A．$f(2)<f(3)<g(0)$　　B．$g(0)<f(3)<f(2)$

C．$f(2)<g(0)<f(3)$　　D．$g(0)<f(2)<f(3)$

【答案】D

【详解】令 $x=-x$，则 $f(-x)-g(-x)=2^{-x}$，因 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是定义域上的奇函数与偶函数，所以 $-f(x)-g(x)=2^{-x}$①，又因 $f(x)-g(x)=2^x$②，由①②解得 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$，所以 $f(x)$ 为增函数，所以 $f(3)>f(2)=f(0)=0>g(0)=-1$

【例 4】已知 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，则下列正确的是（　　）

A．奇函数，在 R 上为增函数　　B．偶函数，在 R 上为增函数
C．奇函数，在 R 上为减函数　　D．偶函数，在 R 上为减函数

【答案】A

【详解】因 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}=-f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 为奇函数，因 e^x 为增函数，e^{-x} 为减函数，所以 $-e^{-x}$ 为增函数，所以 $f\left(x\right)$ 在 R 上为增函数

【例 5】函数 $y=(\frac{1}{2})^{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的单调递增区间是（　　）

A．$[-1,\frac{1}{2}]$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$[\frac{1}{2},2]$

【答案】D

【详解】函数的定义域为 $-x^2+x+2\geq 0$，解得 $\{x|-1\leq x\leq 2\}$，设 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^u$，此函数为减函数，$u=\sqrt{-x^2+x+2}$，对称轴为 $x=\dfrac{1}{2}$，所以 $u=\sqrt{-x^2+x+2}$ 在 $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$ 为增函数，在 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 为减函数，所以原函数在 $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$ 为减函数，在 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 为增函数（符合函数单调性：同增异减）

【例 6】若函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} a^x,x>1 \\ \left(4-\dfrac{a}{2}\right)x+2,x\leq 1 \end{cases}$ 是 **R** 上的增函数，则实数 a 的取值范围为

A．(1，＋∞)　　B．(1,8)　　C．(4,8)　　D．[4,8)

【答案】D

【详解】当 $x>1$ 时，$y=a^x$ 为增函数，所以 $a>1$，当 $x\leq 1$ 时，$y=\left(4-\dfrac{a}{2}\right)x+2$ 为增函数，所以 $4-\dfrac{a}{2}>0$，解得 $a<8$，因为 $f\left(x\right)$ 在 R 上为增函数，所以 $\left(4-\dfrac{a}{2}\right)\times 1+2\leq a^1$，解得 $a\geq 4$，综上可知 $4\leq a<8$。

【例 7】已知函数 $f(x)=\dfrac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}$，如果对任意 $t\in R$，$f(3t^2+2t)+f(k^2-2t^2)<0$ 恒成立，则满足条件的 k 的取值范围是____________.

【答案】$k<-1$或$k>1$

【详解】因 $f\left(x\right)=\dfrac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}=\dfrac{-\left(2^x+1\right)+2}{2\left(2^x+1\right)}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$ 所以 $f\left(x\right)$ 在 R 上为奇函数，并且为减函数，所以

$f(3t^2+2t)+f(k^2-2t^2)<0 \Rightarrow f\left(3t^2+2t\right)<-f\left(k^2-2t^2\right) \Rightarrow f\left(3t^2+2t\right)<f\left(2t^2-k^2\right)$，所以 $3t^2+2t>2t^2-k^2$，所以 $k^2>-t^2-2t$ 在 R 上恒成立，所以 $k^2 \geq \left(-t^2-2t\right)_{\max}$，当 $t=-1$ 时，$\left(-t^2-2t\right)_{\max}=1$，所以 $k^2>1$，解得 $k<-1$ 或 $k>1$。

【例 8】 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}$，则不等式 $f(x+1-x^2)+f(x+2)+x^2-2x-3<0$ 的解集是__________.

【答案】$-1<x<3$

【详解】因 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}$ 所以 $f(x)$ 在 R 上为奇函数，并且为减函数，因

$f(x+1-x^2)+f(x+2)+x^2-2x-3<0$

$\Rightarrow f\left(x+1-x^2\right)-\left(x+1-x^2\right)<f\left(-x-2\right)-\left(-x-2\right)$，设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在 R 上为奇函数，并且为减函数，所以 $f\left(x+1-x^2\right)-\left(x+1-x^2\right)<f\left(-x-2\right)-\left(-x-2\right) \Leftrightarrow g\left(x+1-x^2\right)<g\left(-x-2\right)$，所以，$x+1-x^2>-x-2$，即 $x^2-2x-3<0$，解得 $-1<x<3$。

【题型专练】

1.（2021 新高考 1 卷）已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 是偶函数，则 $a=$__________.

【答案】$a=1$

【详解】因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $g(x)=a\cdot 2^x-2^{-x}$ 为奇函数，所以 $g(0)=a\cdot 2^0-2^0=0$，解得 $a=1$

2.函数 $f(x)=\left(a^2-1\right)^x$ 在 R 上是减函数，则 a 的取值范围是（　　）

A、$|a|>1$　　B、$|a|<2$　　C、$a<\sqrt{2}$　　D、$1<|a|<\sqrt{2}$

【答案】D

【详解】因函数 $f(x)=\left(a^2-1\right)^x$ 在 R 上是减函数，所以 $0<a^2-1<1$，所以 $1<a^2<2$，所以 $1<|a|<\sqrt{2}$

3.（2023·全国·高三专题练习）已知定义域为 **R** 的函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$ 则关于 t 的不等式 $f\left(t^2-2t\right)+f\left(2t^2-1\right)<0$ 的解集为________.

【答案】$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

【分析】先判断出 $f(x)$ 是奇函数且在 **R** 上为减函数，利用单调性解不等式.

【详解】函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$ 的定义域为 **R.**

因为 $f(-x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{-x}+1}=-\frac{1}{2}+\frac{2^{x}}{2^{x}+1}$，所以

$f(-x)+f(x)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{-x}+1}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{x}+1}\right)=-1+1=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$，

即 $f(x)$ 是奇函数.

因为 $y=2^{x}$ 为增函数，所以 $y=\frac{1}{2^{x}+1}$ 为减函数，所以 $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{x}+1}$ 在 **R** 上为减函数.

所以 $f(t^2-2t)+f(2t^2-1)<0$ 可化为 $f(t^2-2t)<-f(2t^2-1)=f(1-2t^2)$.

所以 $t^2-2t>1-2t^2$，解得：$t>1$ 或 $t<-\frac{1}{3}$.

故答案为：$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

4.函数 $y=3^{2-3x^2}$ 的单调递减区间是__________.

【答案】$(0,+\infty)$

【详解】设 $y=3^{u}$，此函数为增函数，$u=2-3x^2$，对称轴为 $x=0$，所以 $u=2-3x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 为增函数，在 $(0,+\infty)$ 为减函数，所以原函数在 $(0,+\infty)$ 为减函数（符合函数单调性：同增异减）

5.（2022·全国·高一单元测试）已知函数 $f(x)=\frac{m}{3^{-x}+1}(m>0)$，且 $f(a+2)+f(b)-m<0$，则（　　）

A．$a+b<0$　　B．$a+b+2<0$

C．$a-b+1>0$　　D．$a+b>0$

【答案】B

【分析】构造函数 $g(x)=f(x)-\frac{m}{2}$，判断 $g(x)$ 的单调性和奇偶性，由此化简不等式 $f(a+2)-\frac{m}{2}+f(b)-\frac{m}{2}<0$，即 $g(a+2)+g(b)<0$ 可得选项.

【详解】由题意知函数 $f(x)=\frac{m}{3^{-x}+1}$，

令 $g(x)=f(x)-\frac{m}{2}$，则 $g(x)=\frac{m}{3^{-x}+1}-\frac{m}{2}=\frac{m(1-3^{-x})}{2(3^{-x}+1)}=\frac{m}{2}\cdot\frac{3^{x}-1}{3^{x}+1}$，

$\therefore g(x)$ 的定义域为 R，$g(-x)=\frac{m}{2}\cdot\frac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1}=-\frac{m}{2}\cdot\frac{3^{x}-1}{3^{x}+1}=-g(x)$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 为奇函数.

又 $m>0$，$\therefore g(x)$ 在 R 上单调递增.

由 $f(a+2)+f(b)-m<0$，得 $f(a+2)-\frac{m}{2}+f(b)-\frac{m}{2}<0$，即 $g(a+2)+g(b)<0$，

$\therefore g(a+2)<-g(b)=g(-b)$，

$\therefore a+2<-b$，即 $a+b+2<0$.

故选：B.

6.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$，下面说法正确的有（　　）

A．$f(x)$ 的图象关于原点对称

B．$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

C．$f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$

D．$\forall x_1,x_2\in\mathrm{R}$，且 $x_1\neq x_2$，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$

【答案】AC

【分析】根据函数奇偶性的定义和判定方法，可判定 A 正确，B 不正确；化简函数为 $3^x=\dfrac{1+y}{1-y}$，结合 $\dfrac{1+y}{1-y}>0$，求得 y 的取值范围，可判定 C 正确；结合函数 $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}=1-\dfrac{2}{3^x+1}$ 的单调性，可判定 D 错误.

【详解】对于 A 中，由 $f(-x)=\dfrac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1}=-\dfrac{3^x-1}{3^x+1}=f(x)$，可得函数 $f(x)$ 为奇函数，函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，故选项 A 正确，选项 B 错误；

对于 C 中，设 $y=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$，可得 $3^x=\dfrac{1+y}{1-y}$，所以 $\dfrac{1+y}{1-y}>0$，即 $\dfrac{1+y}{y-1}<0$，解得 $-1<y<1$，即函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$，所以 C 正确；

对于 D 中，对 $\forall x_1,x_2\in\mathrm{R}$，且 $x_1\neq x_2$，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，可得函数 $f(x)$ 为减函数，

而 $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}=1-\dfrac{2}{3^x+1}$ 为单调递增函数，所以 D 错误.

故选：AC.

7.已知函数 $f(x)=e^{|x-1|}+x^2-2x+1$,则使得不等式 $f(2m)<f(m+1)$ 成立的实数 m 的取值范围是(　　)

A. $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$　　B. $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$　　C. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\bigcup(1,+\infty)$

【答案】A

【详解】因 $f(x)=e^{|x-1|}+x^2-2x+1$，设 $g(x)=f(x+1)=e^{|x|}+x^2$，则 $g(x)$ 在 R 上为偶函数，并且 $[0,+\infty)$ 为增函数，所以

$f(2m)<f(m+1)\Leftrightarrow g(2m-1)<g(m)\Leftrightarrow g(|2m-1|)<g(|m|)$，因为 $g(x)$ $[0,+\infty)$ 为增函数，所以，$|2m-1|<|m|\Leftrightarrow(2m-1)^2<m^2\Leftrightarrow 4m^2-4m+1<m^2$，即 $3m^2-4m+1<0$，解得 $\frac{1}{3}<x<1$。

题型五：利用指数函数性质比较大小

【例 1】判断下列各数的大小关系：

(1)1.8^a 与 1.8^{a+1}； (2) $(\frac{1}{3})^{\frac{2}{3}},3^4,(\frac{1}{3})^{-2}$ (3) $2^{0.2}$，$(2.5)^0$，$(\frac{1}{3})^{0.3}$

【详解】

（1）因为 $y=1.8^x$ 在 R 上为增函数，且 $a+1>a$，所以 $1.8^{a+1}>1.8^a$

（2）因为 $3^4=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$，且 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 R 上为减函数，且 $\frac{2}{3}>-2>-4$，所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}<3^4$

（3）因为 $2^{0.2}>2^0=1$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}<\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$，$2.5^0=1$，所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}<(2.5)^0<2^{0.2}$

【例 2】设 $\frac{1}{3}<(\frac{1}{3})^b<(\frac{1}{3})^a<1$，则(　　)

A．$a^a<a^b<b^a$　　B．$a^a<b^a<a^b$　　C．$a^b<a^a<b^a$　　D．$a^b<b^a<a^a$

【答案】C

【详解】因为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 R 上为减函数，且 $\left(\frac{1}{3}\right)^1<\left(\frac{1}{3}\right)^b<\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^0$，所以 $1>b>a>0$，所以 $y=a^x$ 在 R 上为减函数，所以 $a^a>a^b$，又因 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $b^a>a^a$，所以 $b^a>a^a>a^b$

【例 3】已知 $a=0.8^{0.7}$,$b=0.8^{0.9}$,$c=1.2^{0.8}$，则 a、b、c 的大小关系是

【答案】C

【详解】因为 $y=(0.8)^x$ 在 R 上为减函数，且 $0.7>0.9$，所以 $0.8^{0.7}>0.8^{0.9}$，又因 $1.2^{0.8}>1.2^0=1$，$0.8^{0.7}<0.8^0=1$，所以 $c>a>b$

【例 4】【2016 高考新课标 3 理数】已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，则（　　）

（A）$b<a<c$　　（B）$a<b<c$　　（C）$b<c<a$　　（D）$c<a<b$

【答案】A

【详解】因为 $a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$，且 $y=2^x$ 在 R 上为增函数，且 $\frac{2}{3}>\frac{2}{5}$，所以 $a>b$，又因 $c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$，且 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $c>a>b$

【例 5】（2021·江西高安中学高一月考）已知$a=3^{1.1}$，$b=4^{1.1}$，$c=3^{0.9}$，则a，b，c的大小关系为（　　）

A．$c<a<b$　　B．$c<b<a$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

【答案】A

【解析】由题意，构造函数$y=3^x,y=x^{1.1}$，由指数函数和幂函数的性质，

可知两个函数在$(0,+\infty)$单调递增；由于$0.9<1.1\therefore 3^{0.9}<3^{1.1}\therefore c<a$；由于

$3<4\therefore 3^{1.1}<4^{1.1}\therefore a<b$；

综上：$c<a<b$故选：A

【例 6】（2022·全国·高一单元测试）若实数x，y满足$2022^x+2023^{-y}<2022^y+2023^{-x}$，则（　　）

A．$\frac{x}{y}>1$　　B．$\frac{x}{y}<1$

C．$x-y<0$　　D．$x-y>0$

【答案】C

【分析】由指数函数的性质可知$f(x)=2022^x-2023^{-x}$是$\mathbf{R}$上的增函数；根据题意可知$2022^x-2023^{-x}<2022^y-2023^{-y}$，即$f(x)<f(y)$，再根据函数的单调性，可得$x<y$，由此即可得到结果．

【详解】令$f(x)=2022^x-2023^{-x}$，由于$y=2022^x$，$y=-2023^{-x}$均为R上的增函数，所以$f(x)=2022^x-2023^{-x}$是R上的增函数．

因为$2022^x+2023^{-y}<2022^y+2023^{-x}$，所以$2022^x-2023^{-x}<2022^y-2023^{-y}$，即$f(x)<f(y)$，

所以$x<y$，所以$x-y<0$．

故选：C．

【题型专练】

1．（2021·全国高一课时练习）已知$a=\sqrt{2}$，$b=2^{0.8}$，$c=4^{0.2}$，则a,b,c的大小关系为（　　）

A．$c<b<a$　　B．$c<a<b$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

【答案】B

【解析】$a=\sqrt{2}=2^{0.5}$，$c=4^{0.2}=2^{0.4}$，$\because y=2^x$递增，且$0.4<0.5<0.8$，$\therefore 2^{0.4}<2^{0.5}<2^{0.8}$，

即$c<a<b$．

故选：B．

2．（2021·全国高一课时练习）下列判断正确的是（　　）

A．$2.5^{2.5}>2.5^3$　　B．$0.8^2<0.8^3$

C．$4^{\sqrt{2}}<\pi^{\sqrt{2}}$　　D．$0.9^{0.3}>0.9^{0.5}$

【答案】D

【解析】对于 A 项，∵$y=2.5^x$是增函数，且 2.5<3，∴$2.5^{2.5}<2.5^3$,

对于 B 项，∵$y=0.8^x$是减函数，且 2<3，∴$0.8^2>0.8^3$,

对于 C 项，∵$y=x^{\sqrt{2}}$是增函数，且$4>\pi$，∴$4^{\sqrt{2}}>\pi^{\sqrt{2}}$，

对于 D 项，∵$y=0.9^x$是减函数，且 0.3<0.5，∴$0.9^{0.3}>0.9^{0.5}$．故选：D．

3.（2022·全国·高一课时练习）已知$a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，$d=6^{\frac{2}{3}}$，则（　　）

A．$b<a<d<c$　　B．$b<c<a<d$

C．$c<d<b<a$　　D．$b<a<c<d$

【答案】D

【分析】根据幂函数$y=x^{\frac{1}{3}}$以及指数函数$y=16^x$的单调性即可比较大小.

【详解】由题得$a=2^{\frac{4}{3}}=16^{\frac{1}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}=16^{\frac{1}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，$d=6^{\frac{2}{3}}=36^{\frac{1}{3}}$，因为函数$y=x^{\frac{1}{3}}$在**R**上单调递增，所以$a<c<d$．又因为指数函数$y=16^x$在**R**上单调递增，所以$b<a$．

故选:D．

题型六：解指数函数不等式

【例 1】若$\left(\frac{1}{2}\right)^{2a+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2a}$，则实数 a 的取值范围是_________．

【答案】$a>\frac{1}{2}$

【详解】因为$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在 R 上为减函数，且$\left(\frac{1}{2}\right)^{2a+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2a}$，所以$2a+1>3-2a$，解得$a>\frac{1}{2}$

【例 2】已知函数$f(x)=\begin{cases}e^{-x},x\le 0\\-x^3,x>0\end{cases}$，若$f(a-1)\ge f(-a)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　B．$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C．$\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　D．$\left[\frac{1}{2},1\right]$

【答案】A

【详解】因为$f(x)=\begin{cases}e^{-x},x\le 0\\-x^3,x>0\end{cases}$，当$x\le 0$时$f(x)=e^{-x}$单调递减，且$f(x)\ge 1$，当$x>0$时，$f(x)=-x^3$单调递减，且$f(x)<0$，所以函数$f(x)=\begin{cases}e^{-x},x\le 0\\-x^3,x>0\end{cases}$在定义域上单调递减，因为$f(a-1)\ge f(-a)$，所以$a-1\le -a$，解得$a\le\frac{1}{2}$，即不等式的解集为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$故选：A

【题型专练】

1.解不等式 $2^{x^2-3x}<1$

【答案】$0<x<3$

【详解】因为 $y=2^x$ 在 R 上为增函数，且 $2^{x^2-3x}<1=2^0$，所以 $x^2-3x<0$，解得 $0<x<3$

2.（2021·新疆维吾尔自治区阿克苏地区第二中学高一期末）若 x 满足不等式 $2^{x^2+1}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$，

则函数 $y=2^x$ 的值域是（　　）

A. $\left[\frac{1}{8},2\right)$　　B. $\left[\frac{1}{8},2\right]$　　C. $\left(-\infty,\frac{1}{8}\right]$　　D. $[2,+\infty)$

【答案】B

【详解】由 $2^{x^2+1}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$ 可得 $2^{x^2+1}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}=2^{-2(x-2)}$，

因为 $y=2^x$ 在 R 上单调递增，所以 $x^2+1\le-2x+4$ 即 $x^2+2x-3\le0$，解得：$-3\le x\le1$，

所以 $2^{-3}\le y=2^x\le2^1$，即函数 $y=2^x$ 的值域是 $\left[\frac{1}{8},2\right]$，故选：B.

3.（2021·全国高一课时练习）函数 $f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}+2$，若有 $f(a)+f(a-2)>4$，则 a 的取值范围是________.

【答案】$(1,+\infty)$

【详解】设 $F(x)=f(x)-2$，则 $F(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$，易知 $F(x)$ 是奇函数，

$F(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}=1-\frac{2}{3^{2x}+1}$ 在 R 上是增函数，由 $f(a)+f(a-2)>4$ 得

$F(a)+F(a-2)>0$，于是可得 $F(a)>F(2-a)$，即 $a>2-a$，解得 $a>1$.答案：$(1,+\infty)$

题型七：指数函数的值域问题

【例 1】已知 $x\in[-3,2]$，求 $f(x)=\frac{1}{4^x}-\frac{1}{2^x}+1$ 的最小值与最大值。

【答案】$\frac{3}{4}$,57

【详解】设 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\in\left[\frac{1}{4},8\right]$，则原题即化为 $y=t^2-t+1$ 在 $\left[\frac{1}{4},8\right]$ 上的最大值与最小值，

对称轴 $t=\frac{1}{2}$，所以当 $t=\frac{1}{2}$，$y_{\min}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$，当 $t=8$，$y_{\max}=8^2-8+1=57$。

【例 2】若关于 x 的不等式 $2^{x+1}-2^{-x}-a>0$ 在区间 $(0,1)$ 上恒成立，则 a 的取值范围为________

【答案】$a<1$

【详解】$2^{x+1}-2^{-x}-a>0\Rightarrow a<2^{x+1}-2^{-x}=2\cdot 2^{x}-\frac{1}{2^{x}}$，设 $2^{x}=t\left(t\in(1,2)\right)$，则原题即化为 $a<2t-\frac{1}{t}$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，所以 $a<\left(2t-\frac{1}{t}\right)_{\min}$，因 $u=2t-\frac{1}{t}$ 在 $(1,2)$ 上为增函数，所以 $\left(2t-\frac{1}{t}\right)_{\min}=2-1=1$，所以 $a<1$

【例 3】已知实数 $a>0$ 且 $a\neq 1$,若函数 $f(x)=\begin{cases}6-x, & x\leq 2\\ a^{x}, & x>2\end{cases}$ 的值域为 $[4,+\infty)$,则 a 的取值范围是(　　)

A. $(1,2)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(0,1)\cup(1,2]$　　D. $[2,+\infty)$

【答案】D

【详解】当 $x\leq 2$ 时，$f(x)=6-x$ 为减函数，可得 $f(x)\geq 4$，由函数 $f(x)$ 的值域为 $[4,+\infty)$ 可知，当 $x>2$ 时，$f(x)=a^{x}$ 为增函数，即 $a>1$，且 $a^{2}\geq 4$，解得 $a\geq 2$

【例 4】（2022 河南高一期末）函数 $y=4^{x}+4^{-x}+2^{x}-2^{-x}$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{7}{4}$

【答案】D

【解析】令 $2^{x}-2^{-x}=t$，则 $t^{2}=4^{x}+4^{-x}-2$，

故原函数化为 $y=t^{2}+t+2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{7}{4}$，

当 $t=-\frac{1}{2}$ 时，可得最小值为 $\frac{7}{4}$.

故选：D.

【例 5】(2022·浙江省义乌中学高一期末）高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的美誉，用其名字命名的“高斯函数"：设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y=[x]$ 称为高斯函数，也称取整函数，例如：$[-1.3]=-2,[3.4]=3$，已知 $f(x)=\frac{1}{3^{x}+1}-\frac{1}{3}$，则函数 $y=[f(x)]$ 的值域为（　　）

A. $\{0\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

【答案】B

【分析】先求解函数 $f(x)=\frac{1}{3^{x}+1}-\frac{1}{3}$ 的值域，在根据高斯函数的定义确定 $y=[f(x)]$ 的值域.

【详解】解：因为 $3^{x}+1>1$，所以 $0<\frac{1}{3^{x}+1}<1$，则 $-\frac{1}{3}<\frac{1}{3^{x}+1}-\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$，所以函数 $f(x)$ 的值域

为$\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，故$y=[f(x)]$的值域为-1 或 0.

故选：B

【题型专练】

1.函数$y=a^x$在$[0,1]$上的最大值与最小值的和为 3，则a=(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.2　　C.4　　D.$\frac{1}{4}$

【答案】B

【详解】当$0<a<1$时，$y=a^x$在R上为减函数，所以当$x=0$时，$y_{\max}=a^0=1$，当$x=1$时，$y_{\min}=a^1=a$，所以$1+a=3$，解得$a=2$，舍去；

当$a>1$时，$y=a^x$在R上为增函数，所以当$x=0$时，$y_{\min}=a^0=1$，当$x=1$时，$y_{\max}=a^1=a$，所以$1+a=3$，解得$a=2$，符合题意，综上可知$a=2$

2.（2022·全国·高一专题练习）函数$y=4^x+2^{x+1}+3$的值域为____.

【答案】$(3,+\infty)$

【分析】函数是复合二次函数，换元转化为二次函数值域问题.

【详解】解：令$t=2^x(t>0)$，

$\therefore$函数$y=4^x+2^{x+1}+3(x\in R)$化为$f(t)=t^2+2t+3=(t+1)^2+2(t>0)$,

$\therefore f(t)>3$，即函数$y=4^x+2^{x+1}+3$的值域为$(3,+\infty)$.

故答案为：$(3,+\infty)$

3.（2022·全国·高一专题练习）设不等式$4^x-m(4^x+2^x+1)\geq 0$对于任意的$x\in[0,1]$恒成立，则实数m的取值范围是_______.

【答案】$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$

【分析】参变分离可得$m\leq\frac{1}{1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}}$，再根据指数函数的性质及二次函数的性质求出$\frac{1}{1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}}$的取值范围，即可得解.

【详解】解：由$4^x-m(4^x+2^x+1)\geq 0$，得$m(4^x+2^x+1)\leq 4^x$，

即$m\leq\frac{4^x}{4^x+2^x+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}}$，

$\because x\in[0,1]$，$\therefore\frac{1}{2^x}\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，

则 $\left(\frac{1}{2^x}\right)^2+\frac{1}{2^x}+1=\left(\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\in\left[\frac{7}{4},3\right]$，

$\therefore \frac{1}{1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}}\in\left[\frac{1}{3},\frac{4}{7}\right]$，则 $m\le\frac{1}{3}$，即 $m\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$.

故答案为：$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$

4.（2022·全国·高一课时练习）（多选）已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x+3}$，则（　　）

A．函数 $f(x)$ 的定义域为 R　　B．函数 $f(x)$ 的值域为 $(0,2]$

C．函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增　　D．函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递减

【答案】ABD

【分析】由函数的表达式可得函数的定义域可判断 A；令 $u=x^2+4x+3$，则 $u\in[-1,+\infty)$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$，结合指数函数的单调性得到函数的值域，可判断 B；根据复合函数单调性的判断方法可得函数的单调性可判断 C、D.

【详解】令 $u=x^2+4x+3$，则 $u\in[-1,+\infty)$.

对于 A，$f(x)$ 的定义域与 $u=x^2+4x+3$ 的定义域相同，为 **R**，故 A 正确；

对于 B，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$，$u\in[-1,+\infty)$ 的值域为 $(0,2]$，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(0,2]$，故 B 正确；

对于 C、D，因为 $u=x^2+4x+3$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增，且 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$，$u\in[-1,+\infty)$ 在定义域上单调递减，所以根据复合函数单调性法则，得函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递减，所以 C 不正确，D 正确.

故选：ABD.

5.（2021·江苏·矿大附中高三阶段练习多选题）函数 $f(x)=2^{2x}-2^{x+1}+2$ 的定义域为 M，值域为 $[1,2]$，下列结论中一定成立的结论的序号是（　　）

A．$M\subseteq(-\infty,1]$　　B．$M\supseteq[-2,1]$　　C．$1\in M$　　D．$0\in M$

【答案】ACD

【分析】先研究值域为 $[1,2]$ 时函数的定义域，再研究使得值域为 $[1,2]$ 得函数的最小值的自变量的取值集合，研究函数值取 1，2 时对应的自变量的取值，由此可判断各个选项.

【详解】由于 $f(x)=2^{2x}-2^{x+1}+2=(2^x-1)^2+1\in[1,2]$，

$\therefore (2^x-1)^2\in[0,1]$，$\therefore 2^x-1\in[-1,1]$，$\therefore 2^x\in[0,2]$，$\therefore x\in(-\infty,1]$，

即函数 $f(x)=2^{2x}-2^{x+1}+2$ 的定义域为 $(-\infty,1]$

当函数的最小值为 1 时，仅有 $x=0$ 满足，所以 $0\in M$，故 D 正确；

当函数的最大值为 2 时，仅有 $x=1$ 满足，所以 $1\in M$，故 C 正确；

即当 $M=[0,1]$ 时，函数的值域为 $[1,2]$，故 $M\subseteq(-\infty,1]$，故 $M\supseteq[-2,1]$ 不一定正确，故 A 正确，B 错误；

故选：ACD

【点睛】关键点睛：本题考查函数的定义域及其求法，解题的关键是通过函数的值域求出函数的定义域，再利用元素与集合关系的判断，集合的包含关系判断，考查了学生的逻辑推理与转化能力，属于基础题.

题型八：指数函数解答题

【例 1】（重庆巴蜀中学高一期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{a-2^x}{2^x+1}$ 是 R 上的奇函数

（1）求实数 a 的值

（2）解不等式 $f(x)<1-2^{x-1}$

解析：（1）因为函数 $f(x)=\dfrac{a-2^x}{2^x+1}$ 是 R 上的奇函数，所以 $f(0)=\dfrac{a-2^0}{2^0+1}=0$，解得 $a=1$

（2） $f(x)<1-2^{x-1}\Leftrightarrow\dfrac{1-2^x}{2^x+1}<1-2^{x-1}$，所以 $\dfrac{1-2^x}{2^x+1}<1-\dfrac{2^x}{2}$，即 $\dfrac{1-2^x}{2^x+1}<\dfrac{2-2^x}{2}$，所以 $2(1-2^x)<(2-2^x)(2^x+1)$

即 $2-2\cdot2^x<2\cdot2^x+2-(2^x)^2-2^x$，所以 $(2^x)^2-3\cdot2^x<0$，设 $2^x=t$，则 $t^2-3t<0$，解得 $0<t<3$，即 $0<2^x<3$，所以 $x<\log_2 3$

【例 2】(重庆巴川中学高一期中) 已知定义域为 R 的函数 $f(x)=\dfrac{b-2^x}{2^x+a}$ 是奇函数.

（1）求实数 a，b：

（2）定义证明 f（x）在(-∞，+∞)上的单调性，

（3）若不等式 $f(tx)+f(x^2+4)>0$ 对 $x>0$ 有解，求 t 的范围.

解析：（1）因为函数 $f(x)=\dfrac{b-2^x}{2^x+a}$ 是 R 上的奇函数，所以 $f(0)=\dfrac{b-2^0}{2^0+a}=0$，解得 $b=1$，

所以 $f(x)=\dfrac{1-2^x}{2^x+a}$，又因 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)+f(x)=0$，即 $\dfrac{1-2^{-x}}{2^{-x}+a}+\dfrac{1-2^x}{2^x+a}=0$，

所以$\dfrac{1-\dfrac{1}{2^x}}{\dfrac{1}{2^x}+a}+\dfrac{1-2^x}{2^x+a}=0$，化简可得$\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2^x}\right)2^x}{\left(\dfrac{1}{2^x}+a\right)2^x}+\dfrac{1-2^x}{2^x+a}=0$，即$\dfrac{2^x-1}{1+a\cdot 2^x}+\dfrac{1-2^x}{2^x+a}=0$，

所以$1+a\cdot 2^x=\left(2^x+a\right)$，解得$a=1$，所以$a=b=1$

（2）由（1）知$f(x)=\dfrac{1-2^x}{2^x+1}=\dfrac{-\left(2^x+1\right)+2}{2^x+1}=-1+\dfrac{2}{2^x+1}$，所以$f(x)$在$R$上为减函数，证明略

（3）$f(tx)+f(x^2+4)>0\Leftrightarrow f(tx)>-f\left(x^2+4\right)=f\left(-x^2-4\right)$，由（2）知所以$f(x)$在$R$上为减函数，所以$tx<-x^2-4$对$x>0$有解，即$t<\dfrac{-x^2-4}{x}=-\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$对$x>0$有解，

所以$t<-\left(x+\dfrac{4}{x}\right)_{\max}$，因$x+\dfrac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$，所以$-\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\leq -4$，所以$t<-4$

【例 3】（重庆八中高一半期）已知函数$f(x)=a\cdot 4^x-a\cdot 2^{x+1}+1-b(a>0)$在区间$[1,2]$上的最大值为$9$，最小值为$1$

（1）求实数a，b的值

（2）若方程$f(x)-k\cdot 2^x=0$在$[-1,2]$上有两个不同的实数解，求k的取值范围

解析：（1）设$2^x=t\in[2,4]$，则原题即化为$y=at^2-2at+1-b$，因$a>0$，对称轴为$t=1$，所以当$t=2$，$y_{\min}=4a-4a+1-b=1-b=1$ ①，当$t=4$，$y_{\max}=16a-8a+1-b=8a+1-b=9$ ②，由①②解得$a=1$，$b=0$

（2）设$2^x=t\in\left[\dfrac{1}{2},4\right]$，则原题即化为$t^2-2t+1-kt=0$，即$k=t+\dfrac{1}{t}-2$，由于函数$y=t+\dfrac{1}{t}-2$在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$单调递减，在$[1,4]$上单调递增，当$t=1$时，$y_{\min}=0$，当$t=\dfrac{1}{2}$时，$y=\dfrac{1}{2}$，当$t=4$时，$y=\dfrac{9}{4}$，所以要使方程有两个不同的实数解，则$0<k\leq\dfrac{1}{2}$

【例 4】（2022·广东韶关·高一期末）双曲函数是一类与常见的三角函数类似的函数，最基本的双曲函数是双曲正弦函数和双曲余弦函数（历史上著名的“悬链线问题”与之相关）．记双曲正弦函数为$f(x)$，双曲余弦函数为$g(x)$，已知这两个最基本的双曲函数具有如下性质：

①定义域均为$\mathbf{R}$，且$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数；

②$f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数；

③$f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x$（常数e是自然对数的底数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$）．

利用上述性质，解决以下问题：

(1)求双曲正弦函数和双曲余弦函数的解析式；

(2)证明：对任意实数 x，$\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2$ 为定值；

(3)已知 $m\in\mathbf{R}$，记函数 $y=2m\cdot g(2x)-4f(x)$，$x\in[0,\ln 2]$ 的最小值为 $\varphi(m)$，求 $\varphi(m)$.

【答案】(1) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

(2)证明见解析

(3) $\varphi(m)=\begin{cases}\dfrac{17m}{4}-3,m\le\dfrac{2}{3}\\ 2m-\dfrac{1}{m},m>\dfrac{2}{3}\end{cases}$

【分析】（1）利用函数奇偶性的性质可得出关于 $f(x)$、$g(x)$ 的等式组，即可求得这两个函数的解析式；

（2）利用指数的运算性质可证得结论成立；

（3）设 $t=e^x-e^{-x}$，可得出 $t\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$，问题转化为求函数 $h(t)=mt^2-2t+2m$，$t\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$ 的最小值，对实数 m 的取值进行分类讨论，分析函数 $h(t)$ 在 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$ 上的单调性，即可求得 $\varphi(m)$ 的表达式.

(1)

解：由性质③知 $f(x)+g(x)=e^x$，所以 $f(-x)+g(-x)=e^{-x}$，

由性质②知，$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，所以 $-f(x)+g(x)=e^{-x}$，

即 $\begin{cases}f(x)+g(x)=e^x\\ -f(x)+g(x)=e^{-x}\end{cases}$，解得 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

因为函数 $y_1=e^x$、$y=-e^{-x}$ 均为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，故函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，合乎题意.

(2)

证明：由（1）可得：

$$\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}-\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}=-1.$$

(3)

解：函数 $y=2m\cdot g(2x)-4f(x)=m\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)-2\left(e^x-e^{-x}\right)$，设 $t=e^x-e^{-x}$，

由性质①，$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 在 $\mathbf{R}$ 是增函数知，当 $x\in[0,\ln 2]$ 时，$t\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$，

所以原函数即 $y=mt^2-2t+2m$，$t\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$，

设 $h(t)=mt^2-2t+2m$，$t\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$，

当 $m=0$ 时，$h(t)=-2t$ 在 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减，此时 $h(t)_{\min}=h\left(\frac{3}{2}\right)=-3$.

当 $m\neq 0$ 时，函数 $h(t)$ 的对称轴为 $t=\frac{1}{m}$，

当 $m<0$ 时，则 $\frac{1}{m}<0$，$h(t)$ 在 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减，此时 $h(t)_{\min}=h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{17m}{4}-3$，

当 $0<\frac{1}{m}<\frac{3}{2}$ 时，即 $m>\frac{2}{3}$ 时，$h(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{m}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{m},\frac{3}{2}\right)$ 上单调递增，

此时 $h(t)_{\min}=h\left(\frac{1}{m}\right)=2m-\frac{1}{m}$.

当 $\frac{1}{m}\geqslant\frac{3}{2}$ 时，即 $0<m\leq\frac{2}{3}$ 时，$h(t)$ 在 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减，此时 $h(t)_{\min}=h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{17m}{4}-3$.

综上所述，$\varphi(m)=\begin{cases}\frac{17m}{4}-3, m\leq\frac{2}{3}\\ 2m-\frac{1}{m}, m>\frac{2}{3}\end{cases}$.

【点睛】方法点睛："动轴定区间"型二次函数最值的方法：

（1）根据对称轴与区间的位置关系进行分类讨论；

（2）根据二次函数的单调性，分别讨论参数在不同取值下的最值，必要时需要结合区间端点对应的函数值进行分析；

（3）将分类讨论的结果整合得到最终结果.

【例 5】(2022·河南洛阳·高一期末（文））设函数 $f(x)=a^x-(k+2)a^{-x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）是定义域为 **R** 的奇函数.

(1)求实数 k 的值；

(2)若 $f(1)=\frac{3}{2}$，$g(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2mf(x)$，且当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$g(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) -1

(2) $m\leq\frac{17}{12}$

【分析】（1）利用奇函数的性质 $f(0)=0$ 得 $k=-1$；

（2）由若 $f(1)=\frac{3}{2}$ 得出 a，确定 $g(x)$ 表达式，参变量分离即可.

(1)

函数 $f(x)=a^x-(k+2)a^{-x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）是定义域为 **R** 的奇函数,则

$f(0)=a^0-(k+2)a^0=1-(k+2)=0$,

所以 $k=-1$,

又 $k=-1$ 时，$f(x)=a^x-a^{-x}$，对任意的 $x\in R$，都有 $f(-x)=a^{-x}-a^x=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$ 成立，满足题意，

所以 $k=-1$;

(2)

由（1）知，$f(x)=a^x-a^{-x}$，且 $f(1)=\frac{3}{2}$,

所以，$f(1)=a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$,

所以，$a=2$ 或 $a=-\frac{1}{2}$（舍），

$g(x)=2^{2x}+2^{-2x}-2m(2^x-2^{-x})=(2^x-2^{-x})^2-2m(2^x-2^{-x})+2$

令 $t=2^x-2^{-x}(x\geq 1)$，则 $t\geq\frac{3}{2}$,

由当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$g(x)\geq 0$ 恒成立，得 $t^2-2mt+2\geq 0$ 在 $t\geq\frac{3}{2}$ 时恒成立，

则 $2m\leq t+\frac{2}{t}$ 在时 $t\geq\frac{3}{2}$ 恒成立，

又 $y=t+\frac{2}{t}$ 在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以，$2m\leq\frac{17}{6}$,

所以，$m\leq\frac{17}{12}$.

【题型专练】

1.（2022·天津南开·高一期末）已知函数 $f(x)=\frac{1+a\cdot 2^x}{2^x+b}$ 是奇函数，并且函数 $f(x)$ 的图像经过点 $(1,3)$.

(1)求实数 a，b 的值；

(2)求函数 $f(x)$ 在 $x<0$ 时的值域.

【答案】(1) $a=1,b=-1$

(2) $(-\propto.-1)$

【分析】（1）利用奇函数的定义列出方程，即可求得 $a.b$.

（2）将函数 $f(x)$ 分离常数，即可求得其值域.

（1）

$\because f(x)$是奇函数，则$f(-x)=-f(x)$，

即$\dfrac{1+a\cdot 2^{-x}}{2^{-x}+b}=-\dfrac{1+a\cdot 2^{x}}{2^{x}+b}$，

化简可得$(ab+1)2^{2x}+2(a+b)2^{x}+ab+1=0$

所以$\begin{cases}ab+1=0\\a+b=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$.

又$f(1)=3$，所以$\dfrac{1+2a}{2+b}=3$，即$2a-3b=5$，

所以$a=1,b=-1$.

（2）

$\because f(x)=\dfrac{1+2^{x}}{2^{x}-1}=1+\dfrac{2}{2^{x}-1}$，且$x<0$

$\therefore 0<2^{x}<1$，可得$f(x)$的值域为$(-\infty,-1)$.

2．（2018·湖南·华容县教育科学研究室高一期末）已知定义在实数集R上的奇函数$f(x)$有最小正周期2，且当$x\in(0,1)$时，$f(x)=\dfrac{2^{x}}{4^{x}+1}$.

(1)求函数$f(x)$在$(-1,1)$上的解析式；

(2)判断$f(x)$在$(0,1)$上的单调性，并证明；

(3)当λ取何值时，方程$f(x)=\lambda$在$(0,1)$上有实数解.

【答案】(1)$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2^{x}}{4^{x}+1},x\in(-1,0)\\0,x=0\\\dfrac{2^{x}}{4^{x}+1},x\in(0,1)\end{cases}$

(2)$f(x)$在$(0,1)$上为减函数，证明见解析

(3)$\lambda\in\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$

【分析】（1）结合函数的奇偶性求得正确答案.

（2）结合函数单调性的定义进行证明.

（3）求得$f(x)$在区间$(0,1)$上的值域，从而求得正确答案.

（1）依题意，$f(x)$是定义在实数集R上的奇函数，所以$f(0)=0$，当$x\in(-1,0),-x\in(0,1)$，

$f(x)=-f(-x)=-\dfrac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=-\dfrac{2^x}{4^x+1}$，所以 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2^x}{4^x+1},x\in(-1,0)\\0,x=0\\\dfrac{2^x}{4^x+1},x\in(0,1)\end{cases}$.

（2）当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=\dfrac{2^x}{4^x+1}$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，证明如下：任取 $0<x_1<x_2<1$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_1}}{4^{x_1}+1}-\frac{2^{x_2}}{4^{x_2}+1}=\frac{2^{x_1}(4^{x_2}+1)-2^{x_2}(4^{x_1}+1)}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)}$$

$=\dfrac{2^{x_1+x_2}(2^{x_2}-2^{x_1})+2^{x_1}-2^{x_2}}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)}=\dfrac{(2^{x_1+x_2}-1)(2^{x_2}-2^{x_1})}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)}$.由于 $2^{x_1+x_2}-1>0,2^{x_2}-2^{x_1}>0$，所以

$f(x_1)-f(x_2)>0,f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数.

（3）由（2）可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，所以 $\dfrac{2^1}{4^1+1}<f(x)<\dfrac{2^0}{4^0+1}$，即 $f(x)\in\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$，由于 $f(x)=\lambda$ 在 $(0,1)$ 上有实数解，所以 $\lambda\in\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$.

3.（2022·辽宁营口·高二期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{9^x+m\cdot 3^x+1}{9^x+3^x+1}$.

(1)若对任意的 $x\in\mathrm{R}$，$f(x)>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $f(x)$ 的最大值为 2，求实数 m 的值；

(3)若对任意的 x_1，x_2，$x_3\in\mathrm{R}$，均存在以 $f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_3)$ 为三边长的三角形，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $m>-2$

(2)4

(3) $\left[-\dfrac{1}{2},4\right]$

【分析】（1）由对任意的 $x\in\mathrm{R}$，$f(x)>0$ 恒成立，利用参变分离可变形为 $-m<3^x+\dfrac{1}{3^x}$ 恒成立，再利用基本不等式，即可求出答案;

（2）由题意知 $f(x)=1+\dfrac{m-1}{3^x+3^{-x}+1}$，且 $3^x+3^{-x}+1\geq 3$，讨论 m 与1的大小关系，即可求出 $f(x)$ 的取值范围，则可求出 m 的值；

（3）由题意知条件可转化为 $f(x_1)+f(x_2)>f(x_3)$ 对任意的 x_1，x_2，$x_3\in\mathrm{R}$ 恒成立，讨论 m 与1的大小关系，分别写出 $f(x_1)+f(x_2)$ 与 $f(x_3)$ 的取值范围，利用恒成立，即可列出不等式，即可求出 m 的取之范围.

（1）

因为对任意的 $x\in R$， $f(x)>0$ 恒成立，

所以 $\frac{9^x+m\cdot 3^x+1}{9^x+3^x+1}>0\Rightarrow 9^x+m\cdot 3^x+1>0\Rightarrow -m<3^x+\frac{1}{3^x}$ 恒成立，

因为 $3^x>0$，所以 $3^x+\frac{1}{3^x}\geq 2$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，

所以 $-m<2$，

所以 $m>-2$.

（2）

$f(x)=\frac{9^x+m\cdot 3^x+1}{9^x+3^x+1}=1+\frac{(m-1)\cdot 3^x}{9^x+3^x+1}=1+\frac{m-1}{3^x+3^{-x}+1}$

因为 $3^x+3^{-x}\geq 2$，所以 $3^x+3^{-x}+1\geq 3$，

当 $m<1$ 时： $1>f(x)\geq 1+\frac{m-1}{3}$，不符合题意，

当 $m=1$ 时： $f(x)=1$，不符合题意，

当 $m>1$ 时： $1<f(x)\leq 1+\frac{m-1}{3}$，即 $1+\frac{m-1}{3}=2\Rightarrow m=4$，

所以 $m=4$.

（3）

由题意知： $f(x_1)+f(x_2)>f(x_3)$ 对任意的 x_1， x_2， $x_3\in R$ 恒成立，

当 $m>1$ 时， $2<f(x_1)+f(x_2)\leq\frac{2m+4}{3}$，且 $1<f(x_3)\leq\frac{m+2}{3}$，

所以 $\frac{m+2}{3}\leq 2\Rightarrow 1<m\leq 4$；

当 $m=1$ 时： $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=1$，符合题意；

当 $m<1$ 时： $\frac{2m+4}{3}\leq f(x_1)+f(x_2)<2$，且 $\frac{m+2}{3}\leq f(x_3)<1$，

所以 $\frac{2m+4}{3}\geq 1\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq m<1$；

综上所述：实数 m 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},4\right]$

4.（2022·河南洛阳·高一期末（理））设函数 $f(x)=a^x-(k+2)a^{-x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）是定义域为 **R** 的奇函数.

(1)求实数 k 的值；

(2)若 $f(1)=\frac{3}{2}$， $g(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2mf(x)$，且 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 2，求实数 m 的

值.

【答案】(1) $k=-1$

(2) $m=\frac{3}{4}$

【分析】(1)由奇函数的性质可得 $f(0)=0$，求出 k 的值，再利用函数奇偶性的定义验证函数 $f(x)$ 为奇函数，即可得解；

（2）由 $f(1)=\frac{3}{2}$ 可求得 $a=2$，设 $t=2^x-2^{-x}\geq\frac{3}{2}$，可得出 $y=t^2-2mt+2$，然后对 m 的取值进行分类讨论，分析二次函数 $y=t^2-2mt+2$ 在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上的单调性，结合 $y_{\min}=2$ 可求得实数 m 的值.

(1)

解：因为 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，所以 $f(0)=1-(k+2)=0$，即 $k=-1$，

当 $k=-1$ 时，$f(x)=a^x-a^{-x}$，$f(-x)=a^{-x}-a^x=-f(x)$，

此时函数 $f(x)$ 为奇函数，故 $k=-1$.

(2)

解：因为 $f(1)=a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$，所以 $2a^2-3a-2=0$，解得 $a=2$ 或 $a=-\frac{1}{2}$（舍）.

故 $g(x)=2^{2x}+2^{-2x}-2m(2^x-2^{-x})=(2^x-2^{-x})^2-2m(2^x-2^{-x})+2$，

令 $t=2^x-2^{-x}$，因为函数 $t_1=2^x$、$t_2=-2^{-x}$ 均为 $[1,+\infty)$ 上的增函数，

故函数 $t=2^x-2^{-x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，由 $x\geq1$，故 $t\geq2^1-2^{-1}=\frac{3}{2}$，

所以 $y=t^2-2mt+2$，$t\geq\frac{3}{2}$，函数 $y=t^2-2mt+2$ 图象的对称轴为 $t=m$，

①当 $m>\frac{3}{2}$ 时，$y_{\min}=m^2-2m^2+2=2$，解得 $m=0$（舍去）;

②当 $m\leq\frac{3}{2}$ 时，函数 $y=t^2-2mt+2$ 在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上为增函数，

则 $y_{\min}=\frac{9}{4}-3m+2=2$，解得 $m=\frac{3}{4}<\frac{3}{2}$，合乎题意.

综上所述，$m=\frac{3}{4}$.

5.（2022·辽宁·辽阳市第一高级中学高二期末）已知定义在R上的函数 $f(x)=\frac{2^x}{4^x+a}$ 是偶函数.

(1)求 a 的值；

(2)判断函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上的单调性并证明；

(3)解不等式：$f\left(-x^2+4x-7\right)<f\left(x^2-x+1\right)$.

【答案】(1)1；

(2)单调递减，理由见解析；

(3)$(-\infty,2)$.

【分析】（1）根据给定函数，利用函数奇偶性定义计算作答.

（2）利用单调函数的定义证明单调性的方法及步骤进行证明作答.

（3）利用（2）的结论，列出不等式并求解作答.

(1)

依题意，函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+a\cdot 2^{-x}}$，因 $f(x)$ 是 **R** 上的偶函数，即 $\forall x\in \mathrm{R}$，$f(-x)=f(x)$，

因此，$\forall x\in \mathrm{R}$，$2^x+a\cdot 2^{-x}=2^{-x}+a\cdot 2^x\Leftrightarrow (2^x-2^{-x})a=2^x-2^{-x}$，

而当 $x\neq 0$ 时，$2^x-2^{-x}\neq 0$，于是得 $a=1$，

所以 a 的值是 1.

(2)

由（1）知，$f(x)=\dfrac{2^x}{4^x+1}$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_1}}{4^{x_1}+1}-\frac{2^{x_2}}{4^{x_2}+1}=\frac{2^{x_1}(4^{x_2}+1)-2^{x_2}(4^{x_1}+1)}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)}=\frac{(2^{x_1+x_2}-1)(2^{x_2}-2^{x_1})}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)},$$

因 $0\le x_1<x_2$，则 $2^{x_1+x_2}>1$，$2^{x_2}>2^{x_1}$，$(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)>0$，因此，$f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

(3)

依题意，$f\left(-x^2+4x-7\right)<f\left(x^2-x+1\right)\Leftrightarrow f\left(x^2-4x+7\right)<f\left(x^2-x+1\right)$，

而 $x^2-4x+7=(x-2)^2+3>0$，$x^2-x+1=(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$，

由（2）知，$x^2-4x+7>x^2-x+1$，解得 $x<2$，

所以原不等式的解集是 $(-\infty,2)$.

6.（2022·全国·高一专题练习）已知定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数 $f\left(x\right)$. 在 $x\in\left(-1,0\right)$ 时，$f\left(x\right)=2^x+2^{-x}$.

(1)试求 $f\left(x\right)$ 的表达式；

(2)若对于 $x\in(0,1)$ 上的每一个值，不等式 $t\cdot 2^x\cdot f(x)<4^x-1$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

【答案】(1) $f(x)=\begin{cases}2^x+2^{-x} & x\in(-1,0)\\ 0 & x=0\\ -2^x-2^{-x} & x\in(0,1)\end{cases}$

(2) $t\geq 0$

【分析】(1) 依题意可得 $f(0)=0$，再设 $x\in(0,1)$，根据奇偶性及 $x\in(-1,0)$ 上的函数解析式，计算可得；

(2) 依题意参变分离可得 $t>\dfrac{-4^x+1}{4^x+1}$，令 $g(x)=\dfrac{-4^x+1}{4^x+1}$，$x\in(0,1)$，根据指数函数的性质求出函数的单调性，即可求出函数最小值，从而得解；

(1)

解：$\because f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，$\therefore f(0)=0$，

因为在 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)=2^x+2^{-x}$，

设 $x\in(0,1)$，则 $-x\in(-1,0)$，

则 $f(x)=-f(-x)=-(2^x+2^{-x})$，

故 $f(x)=\begin{cases}2^x+2^{-x} & x\in(-1,0)\\ 0 & x=0\\ -2^x-2^{-x} & x\in(0,1)\end{cases}$.

(2)

解：由题意，$t\cdot 2^x\cdot f(x)<4^x-1$ 可化为 $t\cdot 2^x\cdot(-2^x-2^{-x})<4^x-1$

化简可得 $t>\dfrac{-4^x+1}{4^x+1}$，

令 $g(x)=\dfrac{-4^x+1}{4^x+1}=-1+\dfrac{2}{4^x+1}$，$x\in(0,1)$，

因为 $y=4^x+1$ 在定义域 $(0,1)$ 上单调递增，$y=\dfrac{2}{x}$ 在 $(2,5)$ 上单调递减，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)<g(0)=-1+\dfrac{2}{4^0+1}=0$，

故 $t\geq 0$.

7.（2022·福建福州·高二期末）已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=3^x+a(a\in\mathrm{R})$.

(1)求函数 $f(x)$ 在 R 上的解析式；

(2)若 $\forall x\in R$，$f\left(x^2-x\right)+f\left(4-mx\right)>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $f\left(x\right)=\begin{cases}3^x-1\left(x\geq 0\right)\\ -3^{-x}+1\left(x<0\right)\end{cases}$

(2) $m\in\left(-5,3\right)$

【分析】(1) 根据奇函数的性质 $f\left(0\right)=0$，即可求出 a，再设 $x<0$，利用奇偶性求出 $x<0$ 时函数解析式，即可得解；

（2）首先判断函数的单调性，再结合函数的奇偶性可得 $\forall x\in R$，$x^2-\left(m+1\right)x+4>0$ 恒成立，则 $\varDelta<0$，即可得到不等式，解得即可.

(1)

解：由题意知 $f\left(0\right)=0$，解得 $a=-1$，所以当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)=3^x-1$，

当 $x<0$，则 $-x>0$，所以 $f\left(-x\right)=3^{-x}-1=-f\left(x\right)$.

又 $f\left(x\right)$ 为奇函数，所以 $f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$，

故当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=-3^{-x}+1$.

综上：$f\left(x\right)=\begin{cases}3^x-1\left(x\geq 0\right)\\ -3^{-x}+1\left(x<0\right)\end{cases}$.

(2)

解：由 $f\left(x^2-x\right)+f\left(4-mx\right)>0$，得 $f\left(x^2-x\right)>-f\left(4-mx\right)$，

因为 $y=f\left(x\right)$ 是奇函数，所以 $f\left(x^2-x\right)>f\left(mx-4\right)$.

当 $x\geq 0$ 时 $f\left(x\right)=3^x-1$，所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，又 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，

所以 $y=f\left(x\right)$ 在 R 上单调递增.

可得 $\forall x\in R$，$x^2-\left(m+1\right)x+4>0$ 恒成立，

故 $\Delta=\left[-\left(m+1\right)\right]^2-16<0$，解得 $-5<m<3$.

所以 $m\in\left(-5,3\right)$.

8.（2022·重庆九龙坡·高二期末）已知函数 $f\left(x\right)=2^x+\dfrac{a}{2^x}$ 为奇函数.

(1)求实数 a 的值；

(2)判断并证明 $f\left(x\right)$ 在 **R** 上的单调性；

(3)若对任意 $t\in\mathbf{R}$，不等式 $f\left(kt^2-kt\right)+f\left(2-kt\right)>0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

【答案】(1) $a=-1$

(2)增函数，证明见解析

(3) $[0,2)$

【分析】(1) 利用奇函数的定义可得出关于实数 a 的等式，即可求得实数 a 的值；

(2) 判断出函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，然后函数单调性定义证明函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数即可；

(3) 由已知可得 $f(kt^2-kt)>f(kt-2)$，可得出不等式 $kt^2-2kt+2>0$ 对任意的 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立，分 $k=0$、$k\neq0$ 两种情况，结合已知条件可的关于 k 的不等式组，由此可解得实数 k 的取值范围.

(1)

解：因为函数 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x)=2^x+\dfrac{a}{2^x}=2^x+a\cdot2^{-x}$，

则 $f(-x)=2^{-x}+a\cdot2^x$，由 $f(-x)=-f(x)$，则 $2^{-x}+a\cdot2^x=-2^x-a\cdot2^{-x}$，

所以，$(a+1)(2^x+2^{-x})=0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以，$a+1=0$，可得 $a=-1$.

(2)

证明：由（1）可知 $f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^x}$，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，证明如下：

任取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1>x_2$，则 $2^{x_1}>2^{x_2}>0$，

所以，$f(x_1)-f(x_2)=\left(2^{x_1}-\dfrac{1}{2^{x_1}}\right)-\left(2^{x_2}-\dfrac{1}{2^{x_2}}\right)=\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)+\dfrac{1}{2^{x_2}}-\dfrac{1}{2^{x_1}}$

$=\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)+\dfrac{2^{x_1}-2^{x_2}}{2^{x_1+x_2}}=\dfrac{\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)\left(2^{x_1+x_2}+1\right)}{2^{x_1+x_2}}>0$，

所以，$f(x_1)>f(x_2)$，故函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

(3)

解：由 $f(kt^2-kt)+f(2-kt)>0$ 可得 $f(kt^2-kt)>-f(2-kt)=f(kt-2)$，

所以，$kt^2-kt>kt-2$，即 $kt^2-2kt+2>0$ 对任意的 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立.

当 $k=0$ 时，则有 $2>0$，合乎题意；

当 $k\neq0$ 时，则有 $\begin{cases}k>0\\ \Delta=4k^2-8k<0\end{cases}$，解得 $0<k<2$.综上所述，实数 k 的取值范围是 $[0,2)$.