高中数学公式百问百答

升学咨询杨老师18167992085

一、集合与简易逻辑

1.集合

（1）元素 a 属于（不属于）集合 A，记为 $a\in A(a\notin A)$

（2）空集是任意集合的子集，即 $\Phi\subseteq A$ （A 为任意集合）；空集是任意非空集合的真子集.

（3）含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集，有 2^n-1 个真子集，有 2^n-2 个非空真子集.

（4） $A\cap B=\{x\mid x\in A,且x\in B\}$ （交集取公共）

（5） $A\cup B=\{x\mid x\in A,或x\in B\}$ （并集求所有）

（6） $C_U A=\{x\mid x\in U,且x\notin A\}$ （补集似减法）

（7） $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A; A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$

（8）特殊数集的记法

实数	有理数	整数	自然数	正整数	空集
R	Q	Z	N	N_+/N^*	Φ

2.简易逻辑

（1）充分与必要条件（**小充分，大必要，小推大**）

若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件

若 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件（充分必要条件）

（2）含有量词的命题的否定：改量词，否结论

二、不等式

3 不等式的性质

（1） $a>b\Leftrightarrow b<a$； （2） $a>b,b>c\Rightarrow a>c$；

（3） $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$； （4） $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

（5） $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$； （6） $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$；

（7） $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in N,n\geq 2)$；

（8） $a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in N,n\geq 2)$

4.常见不等式的解法

（1）一元二次不等式及其解法（化正求根写解集）

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1,或x>x_2\}$ $(x_1<x_2)$	$\{x\mid x\neq -\frac{b}{2a}\}$	R
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$ $(x_1<x_2)$	Φ	Φ

备注：不等式恒成立与能成立问题（∀ 小 ∃ 大，见等取等）

① $\forall x\in R,ax^2+bx+c>0\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$ （注意讨论 $a=0$ 情况）

② $\exists x\in R,ax^2+bx+c\geq 0\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\geq 0\end{cases}$ （注意讨论 $a=0$ 情况）

（2）分式不等式的解法（归零通分除化乘）

① $\frac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0(<0)$;

② $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0(\leq 0)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\neq 0\\ f(x)\cdot g(x)\geq 0(\leq 0)\end{cases}$.

（3）绝对值不等式的解法（大于找两边，小于取中间）

① $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$;

② $|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)<-g(x),或f(x)>g(x)$;

③ $|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow[f(x)]^2>[g(x)]^2$;

④ 形如 $|x-a|+|x-b|<c$ 的不等式可利用零点分段讨论求解

5.重要不等式（以下不等式当且仅当 $a=b$ 时等号成立）

（1） $a^2+b^2\geq 2ab$.当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

（2）基本不等式： $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

（3）重要不等式： $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

（4） $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2\geq ab+ac+bc$

6.极值定理（已知 $x,y>0$ ）

（1）和定积最大：若 $x+y=s$ (其中 s 为定值)，则当 $x=y$ 时，积 xy 取得最大值 $\frac{s^2}{4}$（备注：$xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{s^2}{4}$）.

（2）积定和最小：若 $xy=p$ (其中 p 为定值)，则当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 取得最小值 $2\sqrt{p}$（备注：$x+y\geq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{p}$）

7.柯西不等式（子母同现加数乘，高次在前低次后）

（1）二维柯西： $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

（2）三维柯西： $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$

8.绝对值三角不等式： $||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

三、函数的定义及其性质

9.定义域的求法：

（1）分母不为零： $y=\frac{1}{x}(x\neq 0)$；

（2）偶次被开方数非负： $y=\sqrt{x}(x\geq 0)$；

（3）不能出现 0^0 ： $y=x^0(x\neq 0)$；

（4）对数式中，真数大于零： $y=\log_a x(x>0)$

10.值域的求法：

（1）图像法：二次函数： $y=2x^2-4x-3,x\in[-2,3]$；

（2）分离常数：分式函数： $y=\frac{4x-3}{2x-1}$；

（3）换元法：出现根式： $y=x-\sqrt{1-2x}$；

11.解析式的求法：

（1）待定系数法：已知函数类型，用待定系数法；

（2）换元法： $f(\ )$ 括号内不是 x；

（3）方程组法：出现 $f(x),f(-x),f(\frac{1}{x}),f(-\frac{1}{x})$

12.函数的单调性：

（1） $\forall x_1<x_2,f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow\forall x_1,x_2,\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow$ 函数递增

（2） $\forall x_1<x_2,f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow\forall x_1,x_2,\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow$ 函数递减

（3）复合函数单调性判断：同增异减.

备注：① 增＋增＝增； ② 减＋减＝减；

③ 增－减＝增； ④ 减－增＝减；

⑤负号和倒数改变单调性，根号维持单调性.

13.函数的周期性（一减没）：

（1） $f(x+a)=f(x)\Rightarrow T=a$ （2） $f(x+a)=-f(x)\Leftrightarrow T=2a$

（3） $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow T=2a$ （4） $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow T=2a$

14.函数的对称性（一加没）：

（1） $f(-x)=f(x)\Rightarrow f(x)$ 为偶函数（关于 y 轴对称）

（2） $f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(x)$ 为奇函数（关于原点中心对称）

（3） $f(a-x)=f(x+b)\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 轴对称

（4） $f(x)=2b-f(2a-x)\Rightarrow f(x)$ 关于 (a,b) 中心对称

备注：奇偶函数的运算性质：① 奇函数 $\Rightarrow f(0)=0$；

② 奇＋奇＝奇；偶＋偶＝偶；奇×奇=偶；奇×偶=奇；偶×偶＝偶

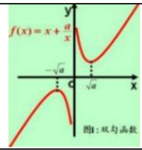
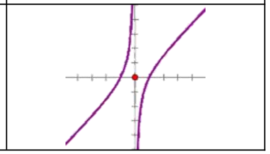
15.常见奇偶函数：

（1） $f(x)=a^x+a^{-x}$ 偶； （2） $f(x)=a^x-a^{-x}$ 奇；

（3） $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 奇； （4） $f(x)=\log_a\frac{b+x}{b-x}$ 奇；

（5） $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}\pm x)$ 奇；

16.对勾函数与飘带函数图像：

$y=x+\frac{a}{x}$	
对勾函数（ $a>0$ ）	飘带函数（ $a<0$ ）
	

四、基本初等函数

17.指数

（1）根式

$(\sqrt[n]{a})^n=a(n\in N^*,且n>1)$; $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & (n为大于1的奇数)\\ |a| & (n为大于0的偶数)\end{cases}$

（2）分数指数幂

正分数指数幂： $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in N^*,且n>1)$

负分数指数幂： $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in N^*,且n>1)$

备注： $\frac{1}{a}=a^{-1};\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$

（3）有理数指数幂的运算性质

① $a^r a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in Q)$ ② $(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in Q)$

③ $(ab)^r=a^r b^r(a>0,b>0,r\in Q)$

18.对数

（1）指数式与对数式的互化公式： $a^x=N\Leftrightarrow\log_a N=x$

（2）基本性质

①负数和零没有对数；

② $\log_a 1=0;\ \log_a a=1(a>0,a\neq 1)$

（3）常用对数 $\log_{10}N$ 记为 $\lg N$；自然对数 $\log_e N$ 记为 $\ln N$

（4）运算性质

设 $M>0,N>0,a>0,a\neq 1$，则有

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$；

② $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

③ $\log_a M^n=n\log_a M(n\in R)$；

④ $\log_{a^m}M^n=\frac{n}{m}\log_a M(m,n\in R)$.

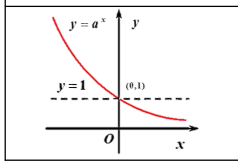
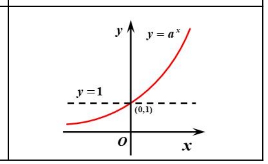
（5）公式

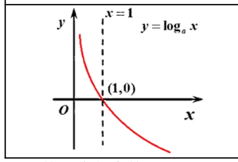
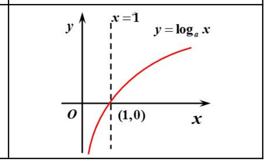
对数恒等式： $a^{\log_a N}=N(N>0,a>0,a\neq 1)$；

换底公式： $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}(a>0,且a\neq 1,c>0,且c\neq 1,b>0)$；

特别地： $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}(a>0,b>0,a\neq 1,b\neq 1)$.

19.指数函数与对数函数图像：

指数函数 $y=a^x$ 的图像	
$0<a<1$	$a>1$
	

对数函数 $y=\log_a x$ 的图像	
$0<a<1$	$a>1$
	

20.函数图像的变换

（1） $y=f(x)\xrightarrow{去下翻上}y=|f(x)|$

（2） $y=f(x)\xrightarrow{去左翻右}y=f(|x|)$

五、三角函数

21.角度和弧度的换算

① $1^\circ=\frac{\pi}{180}rad$ ② $1rad=(\frac{180}{\pi})^\circ=57.3^\circ=57^\circ18'$

22.弧度制下扇形的弧长和面积公式

（1）弧长公式： $l=|\alpha|r$

（2）扇形面积公式： $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

其中：l 为弧长，r 为圆的半径，α 为圆心角的弧度数.

23.三角函数定义：

① $\sin\alpha=\frac{y}{r}$； ② $\cos=\frac{x}{r}$； ③ $\tan=\frac{y}{x}(其中r=\sqrt{x^2+y^2})$

备注：三角函数符号：一全正，二正弦，三正切，四余弦

24.特殊角三角函数值

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

备注： $\sin 15^\circ=\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

25.同角三角函数基本关系式

（1）平方关系： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

（2）商数关系： $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\cos\alpha\neq 0)$ （弦切互化）

（3） $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$

（4） $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=1-\sin 2x$

26.三角函数的诱导公式（奇变偶不变，符号看象限）

$\sin(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\sin\alpha$ $\quad\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\tan\alpha$ $\quad\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\sin(90^\circ\pm\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\sin(180^\circ\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$

$\cos(90^\circ\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$ $\quad\cos(180^\circ\pm\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(90^\circ\pm\alpha)=\mp\cot\alpha$ $\quad\tan(180^\circ\pm\alpha)=\pm\tan\alpha$

27.两角和差公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

28.二倍角公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

29.降幂公式

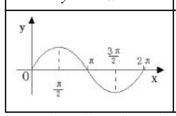
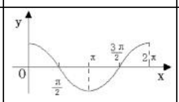
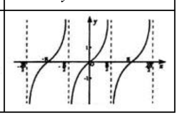
$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$ ； $\quad\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ ；

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

30.辅助角公式

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$(其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a},a>0$)

31.三角函数图像：

$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
		

32.三角函数图像的伸缩与平移变换：

（1） $y=\sin x\xrightarrow{\text{横坐标}\frac{1}{\omega}}y=\sin\omega x\xrightarrow{\text{左移}\varphi}y=\sin[\omega(x+\varphi)]$

（2） $y=\sin x\xrightarrow{\text{左移}\varphi}y=\sin(x+\varphi)\xrightarrow{\text{横坐标}\frac{1}{\omega}}y=\sin(\omega x+\varphi)$

33 三角函数的奇偶性：

（1） $y=A\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow{\text{奇函数}}\varphi=k\pi$(余弦也成立)；

（2） $y=A\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow{\text{偶函数}}\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$(余弦也成立)

34. 三角函数题型拆分：

（1）三角函数化简问题：

例：①化简 $f(x)=\sin x\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$ （先拆后合 $\rightarrow$ 降幂化同）

②化简 $f(x)=2\sin x\sin(x+\dfrac{\pi}{2})+2\sqrt{3}\cos^2 x$ （诱导 $\rightarrow$ 降幂化同）

备注：先拆后合用诱导；降幂化同辅助角

（2）三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+c\ (A>0,\omega>0)$ 图像性质：

①最小正周期： $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

②单调区间：

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x+\varphi\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow m\le x\le n\Rightarrow[m,n]$ 为增区间

令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x+\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow m\le x\le n\Rightarrow[m,n]$ 为减区间

③对称轴方程

令 $\omega x+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x=m\Rightarrow x=m$ 为对称轴方程

④对称中心

令 $\omega x+\varphi=k\pi\Rightarrow x=n\Rightarrow(n,c)$ 为对称中心

⑤已知定义域求最值：

令 $a\le x\le b\Rightarrow m\le\omega x+\varphi\le n\Rightarrow f(x)$ 在 $[m,n]$ 的值域

备注：以上式子出现 k 时，必须标注 $k\in Z$.

六、平面向量

35.特殊向量

（1）零向量: $\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{a}|=0$ ；

（2）单位向量: $\vec{a}$为单位向量 $\Leftrightarrow|\vec{a}|=1$ ；

（3）相等向量:长度相等且方向相同的向量

设 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$,则 $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2$.

36.向量的模长： 若 $\vec{a}=(x,y)$ ，则 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

37.向量的运算

（1）向量的加减法

坐标运算:设 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$,则 $\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$

备注：距离公式:设 $A=(x_1,y_1),B=(x_2,y_2)$,则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

且 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

（2）实数与向量的数乘运算

定义: $\lambda\vec{a}$ 是一个向量:①当 $\lambda>0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向;②当 $\lambda<0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向;③当 $\lambda=0$ 时， $\lambda\vec{a}=\vec{0}$. $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$

坐标运算: $\lambda\vec{a}=\lambda(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$.

38.平面向量基本定理: $\vec{a}=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2$,其中$e_1,e_2$为基底(不共线)

39.非零向量共线(平行)的充要条件: $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$

备注: A,B,P共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AP}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$且$\lambda+\mu=1$

40.非零向量垂直的充要条件: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

41.数量积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2$.

42.夹角: $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

备注: $\vec{a}\cdot\vec{b}>0\Rightarrow\theta$为锐角或$0^\circ$; $\vec{a}\cdot\vec{b}<0\Rightarrow\theta$为钝角或$180^\circ$

43.投影: $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

七、复数

44.复数的一般形式： $z=a+bi$ （其中 a 为实部， b 为虚部）

45.复数的化简： $i^{4n+1}=i;i^{4n+2}=-1;i^{4n+3}=-i;i^{4n}=1$

46.复数的分类：

（1）当 $z=a+bi$ 为实数时 $\Rightarrow b=0$

（2）当 $z=a+bi$ 为虚数时 $\Rightarrow b\neq 0$

（3）当 $z=a+bi$ 为纯虚数时 $\Rightarrow a=0,b\neq 0$

（4）当 $z=a+bi$ 为一般虚数时 $\Rightarrow a\neq 0,b\neq 0$

47.复平面的对应： 复数 $z=a+bi$ 与复平面上的点 (a,b) 一一对应

备注：实轴即 x 轴，虚轴即 y 轴

48.复数相等： $z_1=a+bi,z_2=c+di,z_1=z_2\Rightarrow a=c,b=d$

49.复数的模： $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

50.共轭复数： $\bar{z}=a-bi$

51.复数的运算性质： $|\dfrac{z_1}{z_2}|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

八、解三角形

52.角关系式

$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\cos A=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$

$\cos B=-\cos(A+C)=\sin A\sin C-\cos A\cos C$

$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B$

$\sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B+C}{2};\cos\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{B+C}{2}$

53.正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$(其中$R$为$\Delta ABC$外接圆的半径)

54.余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

推论: $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac};\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

55.面积公式

（1） $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

（2）海伦公式： $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$(其中$p=\dfrac{a+b+c}{2}$)

（3） $S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$(r为三角形内接圆半径)

备注： $S_{\text{正三角形}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ **（其中 a 为等边三角形边长）**

56.解三角形常见题型拆分：

（1） $\cos\begin{cases}\xrightarrow{\text{有}}\text{边化角}\begin{cases}\text{①拆分孤立角}\\\text{②合并相同角}\end{cases}\\\xrightarrow{\text{无}}\text{角化边}\xrightarrow{\text{角}}\text{余弦定理}\end{cases}$

备注：二次齐次式，把 $\cos^2 A=1-\sin^2 A$ 后，角化边用余弦定理

（2）求面积、周长、中线以及角平分线等问题

①边、角混合运算：正弦定理边化角（一角一函数）

②面积问题：正弦定理边化角、均值定理（公式： $a^2+b^2\ge 2ab$ ）

③周长问题：正弦定理边化角、均值定理（公式： $ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$ ）

④中线问题：双余弦定理（公式： $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$ ）

向量的中线定理（公式： $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ）

⑤角平分线：等面积法（公式： $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ADB}+S_{\Delta ADC}$ ）

备注：（1）三角形中，求解函数范围时，注意标明角的范围.

（2）锐角： $A=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2},\sqrt{3}a<l\le 3a,S\le\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$ ；

（3）任意： $A=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow 0<B<\dfrac{2\pi}{3},2a<l\le 3a,S\le\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$

九、立体几何

57.空间几何体的侧面积公式

（1） $S_{\text{圆柱侧}}=2\pi rl$ （2） $S_{\text{圆锥侧}}=\pi rl$

（3） $S_{\text{圆台侧}}=\pi(r+r')l$

58.空间几何体的表面积公式

（1） $S_{\text{圆柱表}}=2\pi r^2+2\pi rl$ （2） $S_{\text{圆锥表}}=\pi r^2+\pi rl$

（3） $S_{\text{圆台表}}=\pi r^2+\pi r'^2+\pi(r+r')l$ （4） $S_{\text{球表}}=4\pi R^2$

备注：①长方体： $2R_{\text{球}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ **；②正方体：** $2R_{\text{球}}=\sqrt{3}a$ **；**

③当出现三垂直或者对棱相等情况时注意还原成长方体

59.空间几何体的体积公式

（1） $V_{\text{柱}}=Sh$ （2） $V_{\text{锥}}=\dfrac{1}{3}Sh$

（3） $V_{\text{台}}=\dfrac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})h$ （4） $V_{\text{球}}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

备注：正四面体的内切球的半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$ **，外接球的半径为** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$

60.平面的基本性质

公理 1: $A\in l,B\in l$,且$A\in\alpha,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$

公理 2: $A,B,C\in\alpha,A,B,C\in\beta$,且$A,B,C$不共线$\Rightarrow\alpha$与$\beta$重合

公理 3: $P\in\alpha$,且$P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$,且$P\in l$

61.空间两直线平行的判定

（1） $\left.\begin{matrix}a//b\\b//c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//c$ （2） $\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\b\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$

（3） $\left.\begin{matrix}a//\alpha\\a\subset\beta\\\alpha\cap\beta=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$ （4） $\left.\begin{matrix}\alpha//\beta\\\alpha\cap\gamma=a\\\beta\cap\gamma=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$

62.空间两直线垂直的判定

（1） $\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\b//\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp b$ （2） $\left.\begin{matrix}a//b\\l\perp a\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp b$

（3）三垂线定理及其逆定理

63.直线与平面平行的判定

（1） $\left.\begin{matrix}a\not\subset\alpha\\b\subset\alpha\\a//b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//\alpha$ （2） $\left.\begin{matrix}\alpha//\beta\\a\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//\beta$

64.直线与平面平行的性质

（1） $\left.\begin{matrix}a//\beta\\a\subset\alpha\\\alpha\cap\beta=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$

65.平面与平面平行的判定

（1） $\left.\begin{matrix}a\subset\beta,b\subset\beta\\a\cap b=P\\a//\alpha,b//\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha//\beta$ （2） $\left.\begin{matrix}\alpha//\gamma\\\beta//\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha//\beta$

66.平面与平面平行的性质

（1） $\left.\begin{matrix}\alpha//\beta\\\alpha\cap\gamma=a\\\beta\cap\gamma=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$

67.直线与平面垂直的判定

（1） $\left.\begin{matrix}a\subset\alpha,b\subset\alpha\\a\cap b=A\\l\perp a,l\perp b\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$ （2） $\left.\begin{matrix}a//b\\a\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha$

68.直线与平面垂直的性质

（1） $\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\b\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp b$ （2） $\left.\begin{matrix}l\perp\alpha\\l\perp\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha//\beta$

69.平面与平面垂直的判定

（1） $\left.\begin{matrix}l\perp\alpha\\l\subset\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$ （2）二面角的平面角$\theta=90^\circ$

70.平面与平面垂直的性质（面面垂直找交线）

（1） $\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l\\a\subset\beta,a\perp l\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp\alpha$

71.空间直角坐标系*

（1）空间两点间的距离公式：

①空间中的任意一点 $P(x,y,z)$ 与原点的距离：

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

②空间中任意两点 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离：

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

（2）空间线段的中点坐标：

在空间直角坐标系中，若 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$，则线段 AB 的中点坐标是 $M=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$

72.空间角的向量求法:

（1）线线角： $\cos\theta=|\cos<\vec m,\vec n>|=\frac{|\vec m\cdot\vec n|}{|\vec m|\cdot|\vec n|}$

（2）线面角： $\sin\theta=|\cos<\vec m,\vec n>|=\frac{|\vec m\cdot\vec n|}{|\vec m|\cdot|\vec n|}$

（3）面面角： $\cos\theta=?\cos<\vec m,\vec n>=?\frac{\vec m\cdot\vec n}{|\vec m|\cdot|\vec n|}$

（4）点 P 到平面的距离： $d=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec n|}{|\vec n|}$

73.立体几何题型拆分:

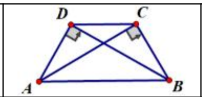
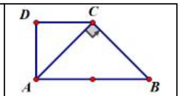
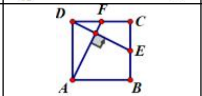
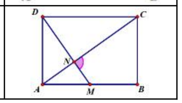
（1）线线平行证明方法：

①中位线； ②平四；

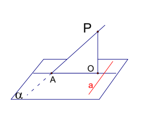
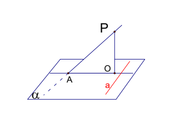
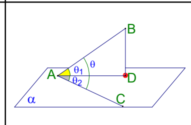
③对应成比例； ④线面平行的性质定理

（2）线线垂直证明方法：

共面直线	三角形	等腰三角形三线合一
		勾股定理逆定理
		全等
	四边形	正、矩邻边
		正、菱对角线
		特定四边形
	圆形	直径所对圆周角
异面直线	线面垂直性质定理	

特定四边形	特定梯形		
	特定矩形		

备注：（1）三垂线定理及其逆定理、三余弦定理

三垂线定理	三垂线定理逆定理	三余弦定理
		
$\left.\begin{array}{l}PO\perp\alpha,O\in\alpha\\PA\cap\alpha=A\\a\subset\alpha,a\perp OA\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp PA$	$\left.\begin{array}{l}PO\perp\alpha,O\in\alpha\\PA\cap\alpha=A\\a\subset\alpha,a\perp AP\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp AO$	$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$

（2）面积射影定理： $\cos\theta=\frac{S'}{S}=\frac{S_{射}}{S_{原}}$.

十、数列

74.数列的通项公式与前 n 项和的关系:

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\ge 2)\end{cases}$$

75.等差数列

（1）定义： $a_{n+1}-a_n=d(n\in N^*,d为常数)$

（2）通项公式： $a_n=a_1+(n-1)d$

（3）等差中项： $a,A,b成等差数列\Leftrightarrow 2A=a+b$

（4）前 n 项和： $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac12 n(n-1)d$

（5）性质：① $a_n=a_m+(n-m)d$

② $m+n=k+l\Leftrightarrow a_m+a_n=a_k+a_l$

③ $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 成等差数列

④ $a_n=An+B$，$S_n=an^2+bn$

⑤ $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$

76.等比数列

（1）定义： $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\in N^*,q为非零常数)$

（2）通项公式： $a_n=a_1\times q^{n-1}$

（3）等比中项： $a,A,b成等比数列\Leftrightarrow A^2=ab$

（4）前 n 项和： $S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\ne 1)\end{cases}$

（5）性质：① $a_n=a_m\times q^{n-m}$

② $m+n=k+l\Leftrightarrow a_m\cdot a_n=a_k\cdot a_l$

③ $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列

④ $S_n=A-Aq^n$

77.常用裂项公式

（1） $a_n=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac1n-\frac{1}{n+1}$

（2） $a_n=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac12(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

（3*） $a_n=\frac{1}{\sqrt n+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt n$

（4*） $a_n=\frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}}=\frac{1}{n2^n}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

（5*） $a_n=\frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$

78.常用求和公式

（1） $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ （2） $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

79.数列解答题常见题型拆分

（1）数列证明：

①等差数列： $a_n-a_{n-1}=d$ （两项）或 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$ （三项）

②等比数列： $\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$ 或 $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$

（2）通项求法：

①公式法：等差数列或者等比数列

②累和法： $a_n-a_{n-1}=f(n)$ 或 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ （ $n-1$项 ）

③累积法： $\frac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$ 或 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ （ $n-1$项 ）

④关系式法：题干同时出现 a_n 和 S_n： $4S_n=(a_n+1)^2\Rightarrow a_n$

⑤构造法*：

a）同取倒数： $a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}\Rightarrow a_n$

b）构造等比： $a_1=1,a_{n+1}=2a_n+1\Rightarrow a_n$ （不动点法）

c）构造等差： $a_1=1,a_{n+1}=2a_n+3^{n+}\Rightarrow a_n$ （同除 2^{n+1} ）

（3）求和方法（欲想求和，先求通项）：

①分组求和法： $a_n=等差+等比$

②裂项相消法： $a_n=\frac{1}{等差\times等差}$

③错位相减法： $a_n=等差\times等比$

备注：求和后，注意验证 $S_1=a_1$?

十一、统计与概率

80.抽样方法

（1）简单随机抽样：①抽签法；②随机数表法

（2）系统抽样*：又叫等距抽样，第 n 组样本号： $l_n=l_1+(n-1)k$

（3）分层抽样：按比例抽样

81.样本数字特征

（1）平均数 $\bar x=\frac1n(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$

（2）方差： $s^2=\frac1n[(x_1-\bar x)^2+(x_2-\bar x)^2+\cdots+(x_n-\bar x)^2]$

$=p_1(x_1-\bar x)^2+p_2(x_2-\bar x)^2+\cdots+p_n(x_n-\bar x)^2$

（3）标准差： $s=\sqrt{\frac1n[(x_1-\bar x)^2+(x_2-\bar x)^2+\cdots+(x_n-\bar x)^2]}$

（4）极差=最大值 − 最小值

82.回归直线方程

（1）回归直线恒过样本点的中心 $(\bar x,\bar y)$

（2）相关系数 r :① $r>0\Rightarrow$ 正相关; $r<0\Rightarrow$ 负相关; $|r|\to1\Rightarrow$ 相关性强

83.概率公式

（1）概率的加法公式

如果事件 A 与事件 B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

若事件 A 与事件 B 为对立事件，则 $P(A)=1-P(B)$

（2）古典概型的概率公式: $P(A)=\frac{事件A包含的基本事件个数}{基本事件总数}=\frac mn$

（3）几何概型的概率公式: $P(A)=\frac{构成事件A的几何度量}{试验的全部结果所构成的几何度量}$

（4）条件概率*： $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{n(AB)}{n(A)},其中P(A)>0$

84.特殊分布的数学期望与方差

（1）超几何分布*： $P(X=k)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(k=0,1,2,\cdots,m)$

（2）二项分布*： $X\sim N(n,p)$ ，则 $E(X)=np$， $D(X)=np(1-p)$

且 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$

（3）正态分布*： $X\sim N(\mu,\delta^2)$ (其中μ为均值,δ为标准差)

（4）两点分布 $(0-1分布)$ *： $P(X=0)=1-p,P(X=1)=p$

且 $E(X)=p,D(X)=pq$ (其中$q=1-p$)

备注： ① $E(aX+b)=aE(x)+b$ (a,b为常数)；② $D(\xi)=E\xi^2-(E\xi)^2$

③分层抽样方差*： $D(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i[\sigma_i^2+(x_i-\bar x)^2]$

十二、直线、圆与方程

85.直线与方程

（1）直线方程

①点斜式： $y-y_0=k(x-x_0)$

②斜截式： $y=kx+b$

③两点式： $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\ne x_2,y_1\ne y_2)$

④截距式： $\frac xa+\frac yb=1$

⑤一般式： $Ax+By+C=0(A,B不同时为0)$

（2）直线的斜率公式

经过两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)(x_1\ne x_2)$ 的直线的斜率公式：

$$k=\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\ne x_2)$$

（3）两直线的位置关系

① $l_1:y=k_1x+b_1$与$l_2:y=k_2x+b_2$ 平行: $k_1=k_2,b_1\ne b_2$

② $l_1:y=k_1x+b_1$与$l_2:y=k_2x+b_2$ 垂直: $k_1\cdot k_2=-1$

③ $l_1:A_1x+B_1y+C_1z=0$与$l_2:A_2x+B_2y+C_2z=0$ 平行:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\ne\frac{C_1}{C_2}(A_2B_2C_2\ne0)$$

④ $l_1:A_1x+B_1y+C_1z=0$与$l_2:A_2x+B_2y+C_2z=0$ 垂直:

$$A_1A_2+B_1B_2=0$$

（4）距离公式

①两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 间的距离:

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

特别地,原点 O 与任意一点 $P(x,y)$ 的距离 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

②点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

③两平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 和 $l_2:Ax+By+C_2=0$ 间的距离:

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

86.圆与方程

（1）圆与方程

① 圆的标准方程: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,圆心为 (a,b) 半径为 r

② 圆的一般方程: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,其中 $D^2+E^2-4F>0$

圆心为 $(-\frac D2,-\frac E2)$，半径为 $r=\frac12\sqrt{D^2+E^2-4F}$

（2）直线与圆的位置关系

设直线 $l:Ax+By+C=0$,圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ，圆心 (a,b) 到直线的距离为 d ，则 $d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$；

① $d>r\Leftrightarrow$ 直线与圆相离;

② $d=r\Leftrightarrow$ 直线与圆相切;

③ $d<r\Leftrightarrow$ 直线与圆相交.

（3）过圆上一点的切线方程

①与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切于点 (x_0,y_0) 的切线方程:

$$xx_0+yy_0=r^2$$

②与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 相切于点 (x_0,y_0) 的切线方程:

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$$

（4）圆与圆的位置关系

设两圆 $C_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2,C_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ ，圆心距 $d=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$ ，则

① $d>r_1+r_2\Leftrightarrow$ 两圆相离;

② $d=r_1+r_2\Leftrightarrow$ 两圆外切;

③ $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2\Leftrightarrow$ 两圆相交;

④ $d=|r_1-r_2|\Leftrightarrow$两圆内切;

⑤ $d<|r_1-r_2|\Leftrightarrow$两圆内含;

（5）直线与圆所截弦的问题

设直线与圆相交于两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ ，则弦

$$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}(r\text{为圆的半径},d\text{为弦心距})$$

十三、圆锥曲线方程

87.椭圆的标准方程及几何性质

标准方程： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$或$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$

顶点： $(\pm a,0),(0,\pm b)$ 或 $(\pm b,0),(0,\pm a)$

焦点： $(\pm c,0)$或$(0,\pm c)$ $(c^2=a^2-b^2)$

离心率： $e=\frac{c}{a}$(或者$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$)

通径： $|AB|=\frac{2b^2}{a}$

焦点三角形：①周长 $l=2a+2c$

②面积 $S=c|y_p|=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}=(a+c)r$

弦中点： $k_{AB}\cdot k_{OM}=k_{AB}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-\frac{b^2}{a^2}$

88.双曲线的标准方程及几何性质

标准方程： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$或$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

顶点： $(\pm a,0)$ 或 $(0,\pm a)$

焦点： $(\pm c,0)$或$(0,\pm c)$ $(c^2=a^2+b^2)$

渐近线： $y=\pm\frac{b}{a}x$或$y=\pm\frac{a}{b}x$

备注：焦点到渐近线的距离等于 b

离心率： $e=\frac{c}{a}$(或者$e^2=1+\frac{b^2}{a^2}$)

通径： $|AB|=\frac{2b^2}{a}$

焦点三角形：面积 $S=c|y_p|=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$

弦中点： $k_{AB}\cdot k_{OM}=k_{AB}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{b^2}{a^2}$

等轴双曲线： $a=b;e=\sqrt{2};$渐近线$y=\pm x$

89.抛物线的标准方程及几何性质

标准方程： $y^2=2px$或$x^2=2py$

焦点： $(\frac{p}{2},0)$或$(0,\frac{p}{2})$

准线方程： $x=-\frac{p}{2}$或$y=-\frac{p}{2}$

焦半径: $|PF|=x_0+\frac{p}{2}$

焦点弦：① $|AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha};|BF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$ ② $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$

备注： $x_1x_2=\frac{p^2}{4},y_1y_2=-p^2$

90.圆锥曲线中统一公式:

$$k^2=(\frac{\lambda+1}{\lambda-1})^2e^2-1(\text{其中}\lambda=\frac{|AF|}{|BF|})$$

91.直线截圆锥曲线的弦长

设弦 AB 的端点坐标为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 直线 AB 的斜率为 k,则

$$|AB|=\sqrt{k^2+1}|x_2-x_1|=\sqrt{k^2+1}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

十四、导数及其应用

92.几种常见函数的导数

（1） $C'=0$　　（2） $(x^n)'=nx^{n-1}$

（3） $(\sin x)'=\cos x$　　（4） $(\cos x)'=-\sin x$

（5） $(e^x)'=e^x$　　（6） $(a^x)'=a^x\ln a$

（7） $(\ln x)'=\frac{1}{x}$　　（8） $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

（9） $(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$　　（10） $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

93.导数四则运算法则

（1） $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

（2） $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

（3） $[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

94.复合函数求导

若函数 $u=g(x)$ 在 x 处可导， $y=f(u)$ 在 u 处可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 x 处可导，且 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

95.常见题型拆分

（1）曲线切线方程的求法（**欲求切线先求切点**）:

①函数 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程的求法:

第一步：求导；求 $f'(x)$；

第二步：求斜率： $k=f'(x_0)$；

第三步：写方程： $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$；

第四步：化简：写成一般式或者斜截式.

备注：切点在切线上，也在曲线上；导数值就是斜率

②函数 $y=f(x)$ 过点 (a,b) 处的切线方程的求法:

第一步：设切点：设切点坐标为 $(x_0,f(x_0))$；

第二步：求导；求 $f'(x)$；

第三步：求斜率： $k=f'(x_0)$；

第四步：写方程： $l:y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$；

第五步：求切点：将点 (a,b) 代入直线方程，并解 x_0；

第六步：化简：将 x_0 代入 l ，并化简.

（2）导数与单调性

①已知函数 $y=f(x)$ 解析式，求增减区间

第一步：求导 $f'(x)$ （**注意标明定义域，尤其注意** $\ln x$ ）

第二步：解不等式：令 $f'(x_0)>0\Rightarrow$ 增区间;

令 $f'(x_0)<0\Rightarrow$ 减区间

第三步：下结论

②已知函数 $f(x)$ 单调性，求参数的取值范围

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，则 $f'(x)\geq0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立;

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减，则 $f'(x)\leq0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立;

③若函数有增区间 $\Rightarrow$ $f'(x_0)>0$ 有解

④若函数有减区间 $\Rightarrow$ $f'(x_0)<0$ 有解

⑤若函数不单调 $\Rightarrow$ $f'(x_0)=0$ 有解

备注：参数二次函数讨论临界找寻规则：定次、定向、定量

a）二次项系数=0;　　b） $\Delta=0$；

c） $x_1=x_2$；　　d）根与定义域端点比较

（3）导数与极值、最值（**极值点双解问题注意验证**）

①求函数极值与最值的一般步骤:

第一步：求导 $f'(x)$ （注意标明定义域）

第二步：解方程：令 $f'(x)=0$ ，求根

第三步：列表

第四步：下结论

②若函数有极值 $\Rightarrow f'(x_0)=0$ 有解（**不可反推**）

（4）不等式证明常见思路

①将不等式证明转化为求函数最值问题

备注：a） $\forall x,f(x)\geq a\Rightarrow f(x)_{\min}\geq a$

b） $\exists x,f(x)\geq a\Rightarrow f(x)_{\max}\geq a$

c） $\forall x,f(x)\geq g(x)\Rightarrow[f(x)-g(x)]_{\min}\geq0$

d） $\exists x,f(x)\geq g(x)\Rightarrow[f(x)-g(x)]_{\max}\geq0$

e） $\forall x_1x_2,f(x_1)\geq g(x_2)\Rightarrow f(x)_{\min}\geq g(x)_{\max}$

f） $\forall x_1,\exists x_2,f(x_1)\geq g(x_2)\Rightarrow f(x)_{\min}\geq g(x)_{\min}$

g） $\exists x_1x_2,f(x_1)\geq g(x_2)\Rightarrow f(x)_{\max}\geq g(x)_{\min}$

h） $\forall x_1,\exists x_2,f(x_1)=g(x_2)\Rightarrow A\subseteq B(A:f(x)\text{值域};B:g(x)\text{值域})$

i） $\exists x_1x_2,f(x_1)=g(x_2)\Rightarrow A\cap B\neq\Phi(A:f(x)\text{值域};B:g(x)\text{值域})$

②参变分离，构造新函数

（5）洛必达法则： $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ （注意使用条件）

（6）常见泰勒展开式:

①对数放缩： $\ln x\leq x-1$ ； $\ln(x+1)\leq x$ ； $\ln x<x$

②指数放缩： $e^x\geq x+1$ ； $e^x\geq ex$ ； $e^x>x$

十五、极坐标与参数方程

96、直参代曲普

使用条件：已知定点 $P(x_0,y_0)$ ，求 $|PA|,|PB|$ 相关运算；

（1）常见消参方式:

①加减消元法； ② $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ； ③平方相加减

（2）直线的参数方程： $l:\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}(\alpha\text{为直线倾斜角},k=\tan\alpha)$

（3）直线参数方程的标准化： $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x_0+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}t\\y=y_0+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}t\end{cases}$

（4）直参代曲普的解题思路

①写出直线的参数方程或者将直线参数方程标准化;

②将直线参数方程代入到曲线的普通方程中并整理成如下形式

$$at^2+bt+c=0$$

③根据韦达定理求出 t_1+t_2,t_1t_2(注意正负)

④计算问题中表达式的值

备注： ①韦达定理： $t_1+t_2=-\frac{b}{a};t_1t_2=\frac{c}{a}$;

② $|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=\begin{cases}|t_1+t_2|,t_1t_2>0\\|t_1-t_2|,t_1t_2<0\end{cases}$

③线段 AB 中点 M 对应参数为 t_0 ，则 $|PM|=|t_0|=|\frac{t_1+t_2}{2}|$

④弦长 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$

97、曲参到直普

使用条件：已知点 $P(x,y)$ 为曲线 C 上一动点，求点 P 到直线、曲线等的距离或求 $mx+ny$ 的取值范围

（1）圆的参数方程： $l:\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$

（2）椭圆的参数方程： $C:\begin{cases}x=x_0+a\cos\theta\\y=y_0+b\sin\theta\end{cases}$

（3）题型拆分:

①写出曲线 C 的参数方程，并设点 P 坐标;

②根据问题，构造关于 θ 的三角函数;

③求解三角函数的取值范围.

98、原点用极径

使用条件：过原点的直线与曲线 C 交于两点，或求 $|OM|,|ON|$ 的混合运算问题

（1）直角坐标化成极坐标： $\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2\\\tan\vartheta=\frac{y}{x}\end{cases}$

（2）极坐标化成直角坐标： $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\vartheta\end{cases}$

（3）题型拆分

①设点 M,N 的极坐标分别为 $M(\rho_1,\theta_1),N(\rho_2,\theta_2)$ （**通常用一个 θ** ）

②将问题中的线段分别用 ρ_1,ρ_2 代换;

③构造关于 θ 的函数;

④求解三角函数的值或范围.

十六*、排列组合与二项展开式定理

99.排列组合

（1）计算公式

①排列数： $A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$

②组合数： $C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\times2\times\cdots\times m}$

③ $C_n^m=C_n^{n-m}$ ； $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^n$

（2）常见题型

①特殊元素、特殊位置：优先法

②相邻问题：捆绑法

③不相邻问题：插空法

④定序问题：除序法

⑤排列组合混合问题：先选后排

⑥元素相同问题：隔板法

⑦复杂问题：正难则反

⑧平均分组：除法策略（**平均分 m 组，除以 A_m^m** ）

100.二项展开式定理

（1）公式： $(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^na^0b^n$

（2）通项公式： $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$

（3）二项式系数:

①所有项： $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$

②奇数项： $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$

③偶数项： $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$

（4）项的系数：设 $(x+2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$

①首项：令 $x=0\Rightarrow a_0=A_0$

②所有项：令 $x=1\Rightarrow a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=A$

备注：令 $x=-1$ 将两式相加减可求奇、偶项的系数和

（5）换元法：设 $(x+2)^{10}=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_{10}(x+1)^{10}$

令 $t=x+1\Rightarrow(t+1)^{10}=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{10}t^{10}$