高中数学常用二级结论---帮你节约做题时间

1. 立方差公式： $a^3-b^3=(a-b)(a^2-ab+b^2)$；

立方和公式： $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

2. 任意的简单 n 面体内切球半径为 $\dfrac{3V}{S_{表}}$（V 是简单 n 面体的体积，$S_{表}$ 是简单 n 面体的表面积）.

3. 在 Rt△ABC 中，C 为直角，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，则△ABC 的内切圆半径为 $\dfrac{a+b-c}{2}$.

4. 斜二测画法直观图面积为原图形面积的 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 倍.

5. 平行四边形对角线平方之和等于四条边平方之和.

6. 函数 $f(x)$ 具有对称轴 $x=a$，$x=b\ (a\neq b)$，则 $f(x)$ 为周期函数且一个正周期为 $2|a-b|$.

7. 导数题常用放缩 $e^x\geq x+1$，$-\dfrac{1}{x}<\dfrac{x-1}{x}\leq \underline{\ln x}\leq x-1$，$e^x>ex(x>1)$.

8. 点 $(x,\ y)$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ 的对称点坐标为 $\left(x-\dfrac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2},y-\dfrac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right)$.

9. 已知三角形三边 x，y，z，求面积可用下述方法(一些情况下比海伦公式更实用，如 $\sqrt{27}$，$\sqrt{28}$，$\sqrt{29}$)：

$$\begin{cases}A+B=x^2,\\B+C=y^2,\\C+A=z^2,\end{cases}\quad S=\frac{\sqrt{A\cdot B+B\cdot C+C\cdot A}}{2}.$$

二、圆锥曲线相关结论

10. 若圆的直径端点 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则圆的方程为 $\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)+\left(y-y_1\right)\left(y-y_2\right)=0$.

11. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的面积 S 为 $S=\pi ab$.

12. 过椭圆准线上一点作椭圆的两条切线，两切点连线所在直线必经过椭圆相应的焦点.

13. 圆锥曲线的切线方程求法：隐函数求导.

推论：

①过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上任意一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$；

②过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上任意一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b_2}=1$；

③过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上任意一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b_2}=1$.

15. 切点弦方程：平面内一点引曲线的两条切线，两切点所在直线的方程叫做曲线的切点弦方程.

①过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 外一点 $P(x_0,\ y_0)$ 的切点弦方程为 $x_0x+y_0y+\dfrac{x_0+x}{2}D+\dfrac{y_0+y}{2}E+F=0$；

②过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 外一点 $P(x_0,\ y_0)$ 的切点弦方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；

③过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 外一点 $P(x_0,\ y_0)$ 的切点弦方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$；

④过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 外一点 $P(x_0,\ y_0)$ 的切点弦方程为 $y_0y=p(x_0+x)$；

⑤二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 外一点 $P(x_0,\ y_0)$ 的切点弦方程为 $Ax_0x+B\frac{x_0y+y_0x}{2}+Cy_0y+D\frac{x_0+x}{2}+E\frac{y_0+y}{2}+F=0$.

16. ①椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ $(A\cdot B\neq 0)$ 相切的条件是 $A^2a^2+B^2b^2=C^2$；

②双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ $(A\cdot B\neq 0)$ 相切的条件是 $A^2a^2-B^2b^2=C^2$.

17. 若 A、B、C、D 是圆锥曲线(二次曲线)上顺次的四点,则四点共圆(常用相交弦定理)的一个充要条件是：直线 AC、BD 的斜率存在且不等于零，并有 $k_{AC}+k_{BD}=0$ (k_{AC}，k_{BD}分别表示 AC 和 BD 的斜率).

18. 已知椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，两焦点分别为$F_1$，$F_2$，设焦点三角形$PF_1F_2$中$\angle PF_1F_2=\theta$，则$\cos\theta\ge 1-2e^2$（$\cos\theta_{\min}=1-2e^2$）.

19. 椭圆的焦半径(椭圆的一个焦点到椭圆上一点横坐标为x_0的点P的距离)公式$r_{1,2}=a\pm ex_0$.

20. 已知k_1，k_2，k_3为过原点的直线l_1，l_2，l_3的斜率，其中l_2是l_1和l_3的角平分线，则k_1，k_2，k_3满足下述转化关系：

$$k_1=\frac{2k_2-k_3+k_3k_2^2}{1-k_2^2+2k_2k_3},$$

$$k_2=\frac{k_1k_3-1\pm\sqrt{(1-k_1k_3)^2+(k_1+k_3)^2}}{k_1+k_3},$$

$$k_3=\frac{2k_2-k_1+k_1k_2^2}{1-k_2^2+2k_1k_2}.$$

21. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$绕 Ox 坐标轴旋转所得的旋转体的体积为$V=\frac{4}{3}\pi ab$.

22. 过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上任意一点作两条渐近线的平行线，与渐近线围成的四边形面积为$\frac{ab}{2}$.

23. 过椭圆上一点做斜率互为相反数的两条直线交椭圆于A、B两点，则直线AB的斜率为定值.

24. 过原点的直线与椭圆交于 A，B 两点，椭圆上不与左右顶点重合的任一点与点 A，B 构成的直线的斜率乘积为定值 $-\dfrac{a^2}{b^2}(a>b>0)$.

推论：椭圆上不与左右顶点重合的任一点与左右顶点构成的直线斜率乘积为定值 $-\dfrac{a^2}{b^2}(a>b>0)$.

25. 抛物线焦点弦的中点，在准线上的射影与焦点 F 的连线垂直于该焦点弦.

26. 双曲线焦点三角形的内切圆圆心的横坐标为定值 a(长半轴长).

27. 对任意圆锥曲线，过其上任意一点作两直线，若两直线斜率之积为定值，两直线交曲线于 A，B 两点，则直线 AB 恒过定点.

28. $y=kx+m$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于两点，则纵坐标之和为 $\dfrac{2mb^2}{a^2k^2+b^2}$.

29. 圆锥曲线的第二定义：

椭圆的第二定义：平面上到定点 F 距离与到定直线间距离之比为常数 e（即椭圆的偏心率，$e=\dfrac{c}{a}$）的点的集合(定点 F 不在定直线上，该常数为小于 1 的正数).

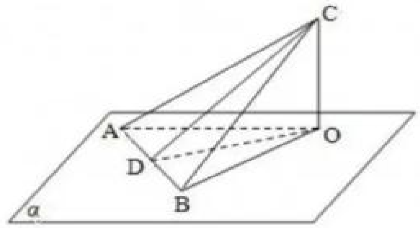
双曲线第二定义：平面内，到给定一点及一直线的距离之比大于 1 且为常数 e 的点的轨迹称为双曲线.

30. 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k>0)$ 为双曲线，其焦点为 $(\sqrt{2k},\sqrt{2k})$ 和 $(-\sqrt{2k},-\sqrt{2k})$，$k<0$.

三、与角相关结论

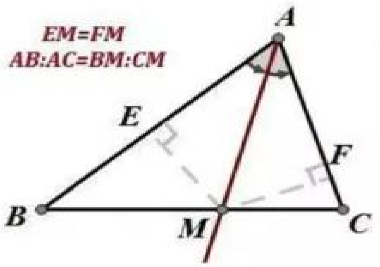
31. 到角公式：若把直线 l_1 依逆时针方向旋转到与 l_2 第一次重合时所转的角是 θ，则 $\tan\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$（$k_1$，$k_2$ 分别为 l_1，l_2 的斜率）.

32. 面积射影定理：如图，设平面 α 外的△ABC 在平面 α 内的射影为△ABO，分别记△ABC 的面积和△ABO 的面积为 S 和 S'，记△ABC 所在平面和平面 α 所成的二面角为 θ，则 $\cos\theta=S':S$.



33. 角平分线定理：三角形一个角的平分线分其对边所成的两条线段与这个角的两边对应成比例

角平分线定理逆定理：如果三角形一边上的某个点分这条边所成的两条线段与这条边的对角的两边对应成比例，那么该点与对角顶点的连线是三角形的一条角平分线.



四、数列相关结论

34. $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=a_n\cdot b_n$，则数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 为 $S_n=\dfrac{c_{n+1}-q^2c_n+c_1}{(q-1)^2}$.

35. 数列不动点：

定义：方程 $f(x)=x$ 的根称为函数 $f(x)$ 的不动点.

利用递推数列 $f(x)$ 的不动点，可将某些递推关系 $a_n=f(a_{n-1})$ 所确定的数列化为等比数列或较易求通项的数列，这种方法称为不动点法.

定理 1：若 $f(x)=ax+b(a\neq 0,a\neq 1)$, p 是 $f(x)$ 的不动点， a_n 满足递推关系 $a_n=f(a_{n-1}),(n>1)$，则 $a_n-p=a(a_{n-1}-p)$，即 $\{a_n-p\}$ 是公比为 a 的等比数列.

定理 2：设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0,ad-bc\neq 0)$，$\{a_n\}$ 满足递推关系 $a_n=f(a_{n-1}),n>1$，初值条件 $a_1\neq f(a_1\ )$.

(1) 若 $f(x)$ 有两个相异的不动点 p,q，则

$$\frac{a_n-p}{a_n-q}=k\cdot\frac{a_{n-1}-p}{a_{n-1}-q}\text{（这里}k=\frac{a-pc}{a-qc}\text{）；}$$

(2)若 $f(x)$ 只有唯一不动点 p，则

$$\frac{1}{a_n-p}=\frac{1}{a_{n-1}-p}+k\text{（这里}k=\frac{2c}{a+d}\text{）.}$$

定理 3：设函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{ex+f}(a\neq 0,e\neq 0)$ 有两个不同的不动点 x_1,x_2，且由 $u_{n+1}=f(u_n)$ 确定着数列 $\{u_n\}$，那么当且仅当 $b=0,e=2a$ 时，$\dfrac{u_{n+1}-x_1}{u_{n+1}-x_2}=(\dfrac{u_n-x_1}{u_n-x_2})^2$.

五、三角形与三角函数相关结论

36. 在锐角三角形中，

$$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C.$$

37. 在任意△ABC 内，都有

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C.$$

推论：在△ABC 内，若 $\tan A+\tan B+\tan C<0$，则△ABC 为钝角三角形.

38. 正弦平方差公式：

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta).$$

39.(1)

$$\sin(nA)+\sin(nB)+\sin(nC)=\begin{cases}-4\sin\dfrac{nA}{2}\sin\dfrac{nB}{2}\sin\dfrac{nC}{2},\ n=4k\\ 4\cos\dfrac{nA}{2}\cos\dfrac{nB}{2}\cos\dfrac{nC}{2},\ n=4k+1\\ 4\sin\dfrac{nA}{2}\sin\dfrac{nB}{2}\sin\dfrac{nC}{2},\ n=4k+2\\ -4\cos\dfrac{nA}{2}\cos\dfrac{nB}{2}\cos\dfrac{nC}{2},\ n=4k+3\end{cases}$$

（$k\in\mathbf{N}^*$）

(2)若 $A+B+C=\pi$，则：

①$\dfrac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$；

②$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$；

③$\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$；

④$\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}=1+4\sin\dfrac{\pi-A}{4}\sin\dfrac{\pi-B}{4}\sin\dfrac{\pi-C}{4}$；

⑤$\sin A+\sin B+\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$；

⑥$\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$；

⑦$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$；

⑧$\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$

$=4\sin A\sin B\sin C$.

（3）在任意$\triangle ABC$中，有：

①$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$；

②$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$；

③$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$；

④$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$；

⑤$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$；

⑥$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\le\frac{1}{8}$；

⑦$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$；

⑧$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$；

⑨$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$；

⑩$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge 1$；

⑪$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$；

⑫$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$；

⑬$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$；

(4)在任意锐角△ABC 中，有：

①$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geq 3\sqrt{3}$；

②$\cot A\cdot\cot B\cdot\cot C\leq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$；

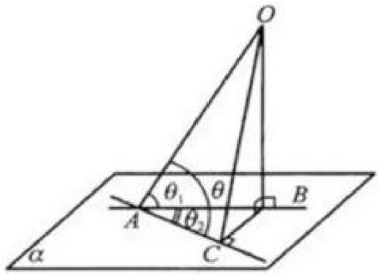
③$\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\geq 9$；

④$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C\geq 1$.

40. 帕斯卡定理：如果一个六边形内接于一条二次曲线(椭圆、双曲线、抛物线)，那么它的三对对边的交点在同一条直线上.

41. 三余弦定理：设 A 为面上一点，过 A 的斜线 AO 在面上的射影为 AB, AC 为面上的一条直线，那么△OAC, △BAC, △OAB 三角的余弦关系为：

$\cos\angle OAC=\cos\angle BAC\cdot\cos\angle OAB$（$\angle BAC$ 和 $\angle OAB$ 只能是锐角).



六、三角形与向量

42. A、B、C 三点共线 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OD}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{m+n}\overrightarrow{OD}$ (同时除以 $m+n$).

43. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

44. 已知△ABC，O 为其外心，H 为其垂心，则 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

45. 向量与三角形四心：

在△ABC中，角A，B，C所对的边分别是a，b，c，

(1)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Leftrightarrow O$是$\Delta ABC$的重心；

(2)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow O$为$\Delta ABC$的垂心；

(3)$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Leftrightarrow O$为$\Delta ABC$的内心；

(4)$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}| \Leftrightarrow O$为$\Delta ABC$的外心；

46. 三角形五心的一些性质：

(1)三角形的重心与三顶点的连线所构成的三个三角形面积相等；

(2)三角形的垂心与三顶点这四点中，任一点是其余三点所构成的三角形的垂心；

(3)三角形的垂心是它垂足三角形的内心；或者说，三角形的内心是它旁心三角形的垂心；

(4)三角形的外心是它的中点三角形的垂心；

(5)三角形的重心也是它的中点三角形的重心；

(6)三角形的中点三角形的外心也是其垂足三角形的外心；

(7)三角形的任一顶点到垂心的距离，等于外心到对边的距离的二倍.

七、其他

47. 超几何分布的期望：若 $X\sim H(n,N,M)$，则

$E(X)=\dfrac{nM}{N}$（其中$\dfrac{M}{N}$为符合要求元素的频率），

$D(X)=n\dfrac{M}{N}(1-\dfrac{M}{N})(1-\dfrac{n-1}{N-1})$

48. 二项式定理的计算中不定系数变为定系数的公式：

$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$.

49. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$.

推论：$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

50. $e^{x}-e^{-x}\ge ax(a\le 2)$.

推论：①$t-\frac{1}{t}\ge 2\ln t(t>0)$；

②$\ln x\ge \frac{ax}{x+a}(x>0,0\le a\le 2)$.

51. $m>n$ 时，$\frac{e^{m}+e^{n}}{2}>\frac{e^{m}-e^{n}}{m-n}>e^{\frac{m+n}{2}}$.