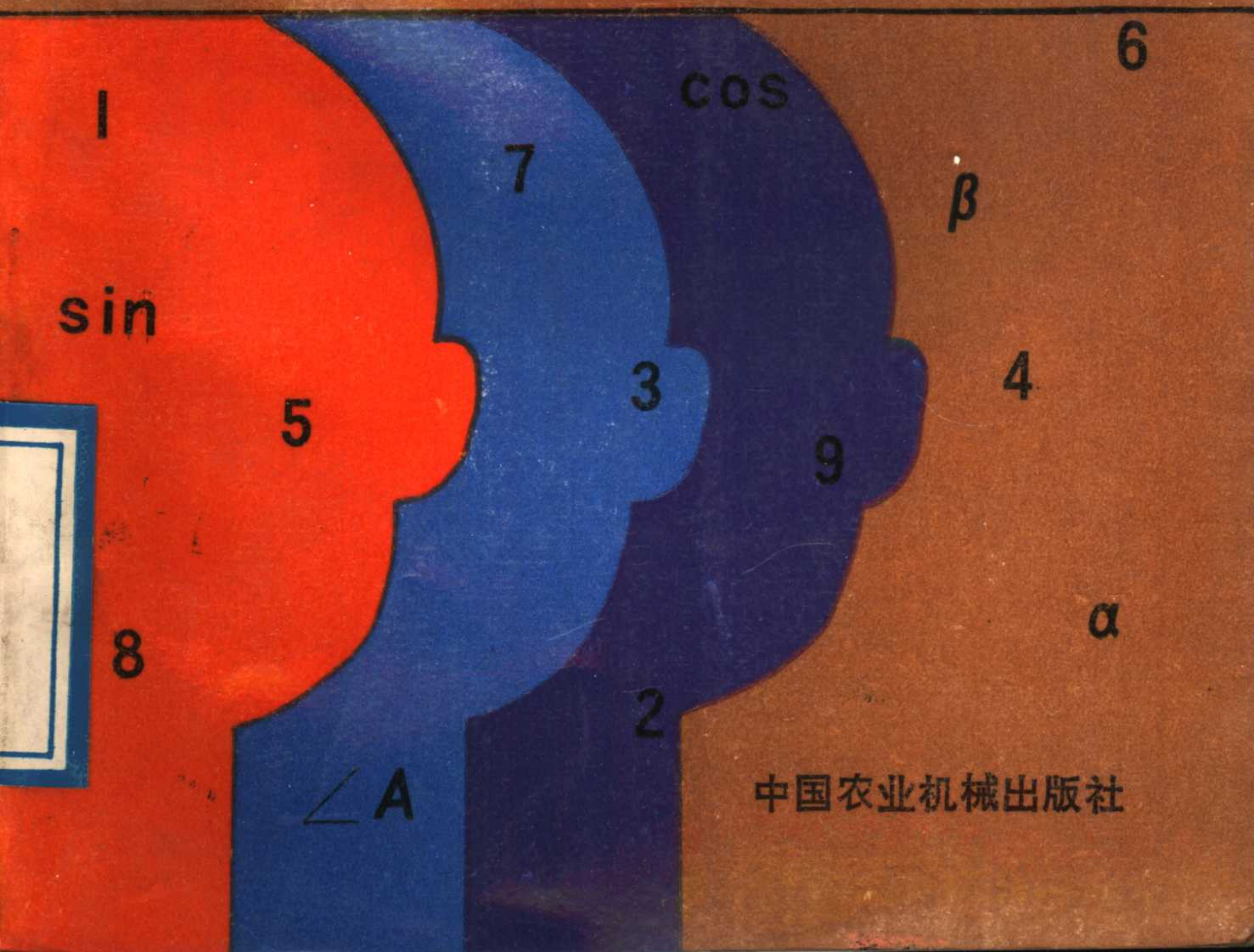
初中数学的科学学习方法

〔日〕近藤利一　著



中国农业机械出版社

初中数学的科学学习方法

〔日〕近藤利一　著
符春英　译
韩启仁　校

中国农业机械出版社

中学数学の科学的勉强法

近藤利一　著

評論社

1981年3月31日　発行

*　　*　　*

初中数学的科学学习方法

〔日〕近藤利一　著

符春英　译

韩启仁　校

*

责任编辑：　冯　铁

封面设计：　刘　代

*

中国农业机械出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

石家庄华勘五一七印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32·印张5 5/8·　字数115千字

1989年1月河北第一版·1989年1月河北第一次印刷

印数　0,001—3,750　·定价：2.40元

*

ISBN 7-80032-012-X/G·9

各年级间有联系的单元（1）

数

一年级

整数 $\begin{cases} \text{正整数（自然数）} 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots \\ 0 \\ \text{负整数} \end{cases}$

约数、倍数→最大公约数，最小公倍数

素　　数→因式分解

三年级　平方根→无理数

整式的计算

一年级　代数式的规则　$2\times a=2a,\ a+2a=3a$

$a\times a=a^2,\ 2ab\times 3b=6ab^2$

同类项合并　$(3a+2b)+(a-3b)$

$=(3a+a)+(2b-3b)$

$=4a-b$

二年级　单项式（$2a,\ -x$）和多项式（a^2+a-b）

单项式和多项式间的四则运算

三年级　多项式×多项式（乘法公式，因式分解）

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

方程式·不等式

一年级　等式的性质→方程的解法

$A=B$时，（1）$A+C=B+C$

（2）$A-C=B-C$

（3）$A\times C=B\times C$

（4）$A\div C=B\div C$

二年级　不等式的性质→不等式的解法

$A>B$时，（1）$A+C>B+C$

（2）$A-C>B-C$

$C>0$时，（3）$A\times C>B\times C$

（4）$A\div C>B\div C$

$C<0$时，（3′）$A\times C<B\times C$

（4′）$A\div C<B\div C$

方程组的解法（只限于有两个未知数的二元一次方程组）

加减法、代入法

三年级　二次方程的解法

利用完全平方式→利用求根的公式

利用因式分解

学习数量单元的要点

◎　小学里，在整数、分数、小数的四则运算方面打下了良好的基础，以后学习代数时就与学习算术时一样，可熟练地进行四则运算。

◎　关于方程式和不等式方面的应用题，能按正确的步骤列式、解题和思考，解题也就不难了。

各年级间有联系的单元（2）

函　数

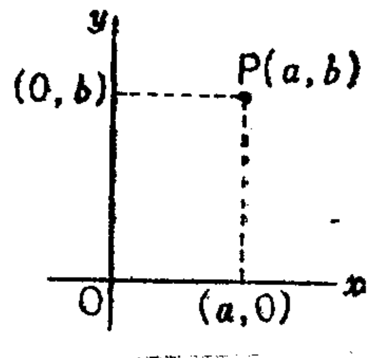
一年级　$y=ax$　y与x成正比例　} a是比例常数

$y=\dfrac{a}{x}$　y与x成反比例

· 坐标轴，坐标

P点的坐标（a，b）

$\begin{cases} a\cdots x\text{坐标} \\ b\cdots y\text{坐标} \end{cases}$



正比例函数图象是

　过原点的直线

反比例函数图象是

　关于原点的对称双曲线

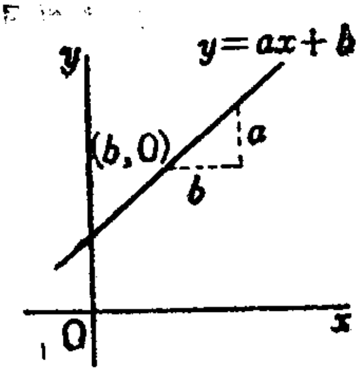
二年级　一次函数$y=ax+b$

（ax是正比例部分，b是常数）

一次函数图象是直线，

a是直线的倾斜度

b是截距（与y轴的交点）



· 由图象解方程组的方法

三年级　$y=ax\rightarrow y=ax^2\rightarrow y=ax^3$

y与x、x^2、x^3成正比例

· 二次函数，三次函数

定义域和值域

图　形

一年级・要习惯于使用直尺和圆规

求图形的面积和体积

立体图的表示方法（示意图、展开图、投影图）

二年级・平面图形的基本性质

（平行线的性质，三角形的全等条件）

・平行四边形的性质（长方形、菱形、正方形的条件）

・相似形，三角形的重心

三年级・圆的性质（圆周角和圆心角，切线）

・勾股弦定理（正三角形、等腰直角三角形）

・求图形的面积和体积（利用相似形和勾股弦定理）

统计・概率

二年级・资料的整理

频数分布、相对频数、累积频数

直方图、代表值（平均值、中位数最频值）

三年级・样本调查（母体、总数调查）

・概率（排列、组合、树形图）

学习图形单元的要点

要能够很快地作出正确的图形。

掌握了图形的基本性质后，就可逐步深入理解复杂图形的性质。

要熟练地掌握面积和体积的计算方法。

写给初中学生

编写本书的目的

学习数学要花很多时间。遇到难题，花费半小时甚至一小时解一道题是常有的事。

由于学习方法不当，尽管努力学也不见效果，于是对自己丧失了信心，这样的例子屡见不鲜。

那么，学习数学时应该注意些什么呢？这就是本书编写的目的。

树立学习的自信心

树立学习的自信心并不是一件难事。

首先要弄清楚，自己对哪些问题已经理解，对哪些问题尚未理解。

用不着因为考试未得满分而灰心丧气。

如果能得50分，就应满怀50分信心。但是，如果各次考试分数相差悬殊，这说明对自己的努力方向不清楚。大多数情况是由于出现粗心大意的错误而得不到满意的成绩。用什么方法避免这种因疏忽而造成的差错呢？本书将加以说明。

如何提高学习成绩

所谓成绩，就是考试的分数。

当然，个人的能力仅仅通过考试是不能全面地反映出来的。但是，在校的学习成绩，尤其是数学成绩，主要还是要看考试的分数。

那么，如何提高考试成绩呢？本书将不厌其烦地介绍无论什么考试目的的出题倾向、如何参加考试以及考试的对策等等。

效率高的学习方法

在学习语文、社会（日本中学的地理、历史等学科）或其他科目时，也都要花足够的时间，所以总不能把时间都花费在学习数学上吧。

因此，本书将介绍用时少、见效快的学习方法。

过分地注重习题集和参考书不能说是高明的方法。而且，随便地向难题挑战，只能是越来越使自己丧失信心。

锻炼思维能力

中学一、二年级的学习没有这部分内容。从三年级开始到考高中的阶段，如何锻炼思维能力，就显得特别重要。

为了提高思维能力，应当把努力的重点放在哪里呢？方向搞错了，所作的种种努力只能收到事倍功半的效果。

本书的着眼点放在锻炼思维能力的方法和努力的目标上。

著者

补记：如果家长看了本书1、2章和6、7几章，就可以了解现在中学数学课的教学方针。

目　　录

1．要培养学生爱好数学

着急不行

倘若问小学一年级的学生，回答“喜欢算术”的人占大多数。可是越到高年级，越多的孩子觉得“算术讨厌”、“数学最讨厌”。

刚刚入学的小学生喜欢算术，而之所以越学越讨厌它，是由于学到半路弄不懂了的缘故。主要原因是，学生们在“快！快！”的催促下，还未来得及理解真正的含义，便被迫做大量的习题。不论学习还是吃东西，道理都一样，硬塞只会引起消化不良，没有什么营养可言，只能促使学生更加感到“数学最讨厌”。

学习数学，重要的是积累。所谓积累，就是系统的学习。基础打不牢，急于求成，反而学不好。即使一再催促，也不会指望有什么真正的提高。这样做，似乎学得很快，但不久学生们就会招架不住，为自己无力解题而犯愁。

当水流受到了阻力而要加大水量使水畅流时，水将溢出来；当学生们正在苦于理解不了时，增加学习量不是解决问题的好方法，反而倒是浪费时间。如能找出造成障碍的原因并加以克服，水也就畅流了。

“开始小火，中间大火，”这是从前人们总结出来的煮饭窍门。只有充分理解了为什么要用这种计算方法，才说明开始领会了这种方法。基础知识学得扎实些比什么都重要。

“欲速则不达”、“急则出错“等等自古以来告诫人们的谚语很多。如用现代的话来说，就是要“返回原点”。所说的原点，指的是检查至今为止的学习内容，看一看什么地方还未透彻理解，继而精心琢磨、质疑问难，直到弄懂为

止。最好完全理解后再行动，切不可着急。

尽管答案相同 求从1到10十个自然数的和，这是极其简单的问题。

要是没有“快！快！”的催促，这个问题连小学一年级的学生也会算出来。也许已知其和是55的人为数不少。

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$
$$=(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)$$
$$=11\times5=55$$

用上面的方法计算就非常容易。加法，从方便处开始计算或变化顺序计算都可以。这部分已在小学五、六年级里学过，尽管答案相同，但方法却不同。只有下功夫去考虑运算的方法，才是“学习数学”。

那么，让我们按下面的方法来考虑。如果从1到10的和是S，反过来从10到1相加之和与前面一样也是S。

$$S=1+2+3+\cdots\cdots+8+9+10$$
$$S=10+9+8+\cdots\cdots+3+2+1\ (+$$

$$2S=(1+10)+(2+9)+(3+8)+\cdots\cdots+(8+3)+(9+2)+(10+1)$$
$$=(1+10)\times10$$

所以$S=(1+10)\times10\div2$

计算步骤稍微复杂些，但利用这个方法可以很快算出从1到100的和。

$S=1+2+3+\cdots\cdots100$，改变顺序相加则

$S=100+99+98+\cdots\cdots1$。仿前上下行相加

得 $S=(1+100)\times100\div2=5050$

50到500自然数的和按下式计算也能求出。

$$S=(50+500)\times(500-50+1)\div 2$$

想一想500－50＋1中为什么后面要加上1呢？计算式中的每一项都有一定的意义，不仅要会计算，更重要的是理解“式子的意义”。从理解入手，独自解题的能力也就有了。

走得慢决不意味着落后。由于找到了思考的方法，兴趣倍增，从而走上了通往爱好数学的道路。

数学是有条理的一门学问

现行中学数学课本里开头有下面这样的几句话：“数学是有条理的学问。按照这个条理，一步一步循序渐进地刻苦学习，学习数学就会成为一件愉快的事。数学的思维方法，任何人都能掌握。”

解题的方法尽管有多种多样，然而最重要的是要有“条理性”。所谓“条理性”，就是遵从法则和定律的思考方法。

至今中、小学里所学的都是有关种种规则。但规则却令人生厌，有人因此觉得“数学讨厌”。希望这些人改变考虑问题的方法。

即使在日常生活中，我们也受到各种各样规则的约束。有时规则的确束缚了人们的行动，所以有些人感到不自由、不舒畅。可是，尽管如此，有规则比没有规则生活要方便、要愉快得多。

尤其是象数学这样“有条理性”的学问，以感情和权力任意制订的规则一个也没有，所订的规则是最少的、必要的，与其他方面的规则相比，数学的规则还是极少的。

知识与智力

我们可以说知识面宽或窄，但不能说知识高或低。相反，可以说智力高或低，但不能说智力宽或窄。

扩大知识面，在不断地积累知识的基础上提高智力。

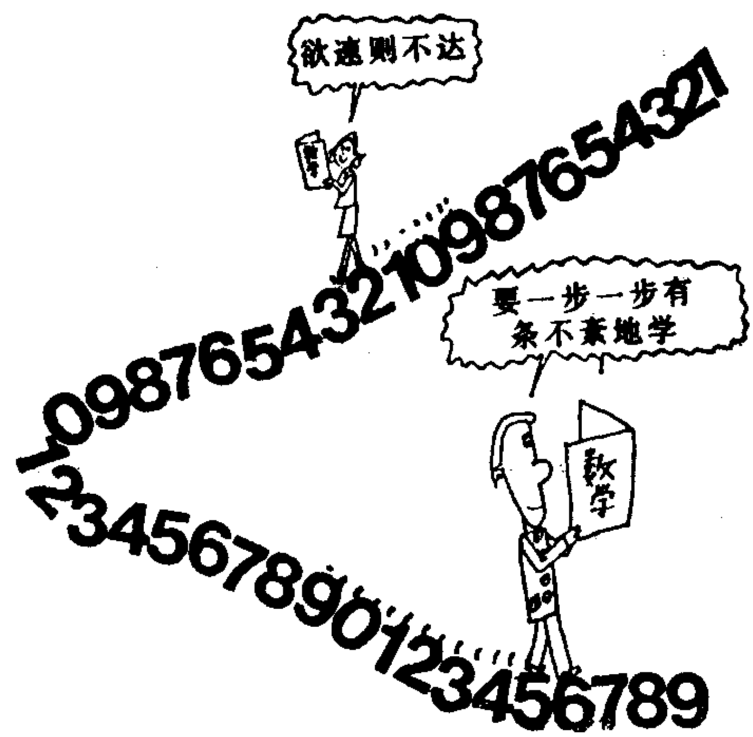
平常所说的知识渊博，实际是指知识面广。在某种情况下，知识面并不是衡量脑筋好与差的标准。脑筋好与不好，多半与智力的高低有关。

当今的时代是信息爆炸的时代。知识的各个领域，正以惊人之势日新月异地向前发展。光是捕捉正在发展的知识，就令人神经越来越紧张。所以，处于信息纷繁的现在，一味地捕捉知识不是有效的方法。有效的方法是提高对知识的活用能力。

活用知识的关键是必须依靠智慧力量。为了提高智力，首先应培养分析问题的能力，通过思考分析而提高自己遇事解决问题的能力。

小结 学习数学的首要目标是提高分析问题的能力。计算、画图、解题都能提高分析问题的能力。

解题时，通过已经学过的规则(知识)间的联系，列出步骤，找出最佳的方法，一步一步地做，不可着急。只要按照这个顺序，自己就能发现解题的方法。下面谈谈这些具体的做法。



2．怎样学好数学

思维训练 让低年级学生做应用题时，他们就会问解题的方法“是加法呢，乘法呢，还是减法？”等等，即使是对解计算题自鸣得意的学生来说，遇到应用题时也觉得困难重重。这是因为所进行的思维训练比计算方面的练习简单的缘故。

渐渐地，孩子们变得懒得动脑筋，从此埋下了讨厌算术、讨厌数学的种子。

数学，应通过计算或解应用题进行思维训练。只有训练思维，才是学习数学的目的。解题与计算，只不过是提高思维能力的一种手段。

为了提高思维能力，应当怎样做？有什么方法？这是下面要谈的内容，没有什么特别难以理解的地方。

最重要的是要“爱好数学”。为此，应当做到“不讨厌数学”。

为了“不讨厌数学”，就要弄懂它。自已能独立解出习题时的心情是多么高兴啊！我们可以想象，当灰姑娘乘坐仙女的马车，穿着水晶鞋，急忙向皇宫驶去时的心情。这种心情，就是你独立解出习题时的心情。

（1）学习数学必备的算术知识

从小学一进入中学，算术就变成了数学。这不仅仅是名字的改变，而是重点已从单纯的计算题转移到对计算定律的理解和解题步骤的探索。

另外，数量和几何图形的内容一般分成两个独立的部

分。它们之间虽有区别，但也有联系，因此还是有足够的理由把它们分开讲解。本书将在“各个年级的学习要点”中详细说明它们的各自内容。

首先请准备纸和笔做下面的题。数学题倘若不亲自做就毫无意义。

问 题 1

对（1）～（4）四组题的计算，不只是简单的加减乘除，而是要求（　）中的两个数经过某种特别的运算后等于右边的数。

（1）组的5道题，用同一运算规律计算。先从前4道题的计算结果找出运算规律，然后根据这个规律计算最后一道题，并将结果填入□中。（2）～（4）组与此相同。

（1）	（2）	（3）	（4）
（2，1）＝7	（3，1）＝1	（2，1）＝3	（1，2）＝2
（1，2）＝5	（5，2）＝1	（4，2）＝6	（2，2）＝3
（3，2）＝11	（6，2）＝2	（5，2）＝9	（3，2）＝4
（3，4）＝13	（7，1）＝5	（6，5）＝3	（5，4）＝7
（4，2）＝□	（6，3）＝□	（8，5）＝□	（4，6）＝□

数量运算所需要的算术知识

数量运算所需要的基础知识并不那么多。这些基础知识是四则运算（加、减、乘、除）和简单的比例关系。

重要的是有关运算顺序的法则。还记得交换律、结合律、分配律吗？这部分大概是在小学五、六年级时学的。特别要紧的是应该知道这些法则在什么情况下用以及怎样用。

分清这些法则在什么情况下可以用，在什么情况下不可以用，这一点对以后的学习特别重要。学习数学，凭死记硬

背法则和定律那是学不好的。

解问题1不需要特别的知识，但需动脑筋找出（　）中计算两个数的结果等于右边的数的运算规律。

象这样通过两个数之间有规律的运算相应地得到一个值的计算方法，叫做“二项运算”。所谓“运算”，并不单指四则运算，而是各种运算的总称。

只要冷静地反复理解题意，琢磨道理，谁都可以解出。

在看题的解法之前，请自己先试着解答。

问题1的解法：

（1）2＋1并不等于7

2×3＋1才等于7　对于下面题：

（1，2）＝1×3＋2＝5

（3，2）＝3×3＋2＝11　再试一试：

（3，4）＝3×3＋4＝13　从而找到了运算的规律。所以（4，2）＝4×3＋2＝14

（2）　（3，1）＝3－1×2＝1　用同一方法计算下题：

（5，2）＝5－2×2＝1　接着算：

（6，2）＝6－2×2＝2

（7，1）＝7－1×2＝5。这就是本题的运算规律。所以：

（6，3）＝6－3×2＝0

（3）　（2，1）＝2＋1＝3，（4，2）＝4＋2＝6，到此计算顺利，但往下算：（5，2）＝5＋2＝7，并不等于9。因此必须改变原来的思路，考虑其他的方法：

（2，1）＝（2－1）×3＝3

（4，2）＝（4－2）×3＝6

（5，2）＝（5－2）×3＝9　计算顺利。用这个规律计

算下一题：

（6，5）＝（6－5）×3＝3　因此：

（8，5）＝（8－5）×3＝9

（4）　（1，2）＝1×2＝2，而（2，2）＝2×2＝4，此法行不通。

（1，2）＝（1×2＋2）÷2＝2

（2，2）＝（2×2＋2）÷2＝3　计算顺利。

（3，2）＝（（3×2＋2）÷2＝4

（5，4）＝（（5×2＋4）÷2＝7　按照这个规律计算都对，所以：

（4，6）＝（4×2＋6）÷2＝7

到这里，解答完毕。

推测和验证

为了找到正确的运算规律，首先推测开始的思路是正确的。设想出某一种计算方法后，再推测如照这个方法做可得到正确的答案，然后加以验证。如果答案对，再看看是否也适用于下一道题。这种方法与小学进行的验算是相同的。

得到的结果不对时，还返回到开始的题，重新考虑其他方法。同样先推测所设想的方法是正确的，然后验证。这样反复几次，直到正确为止。

在推测和设想计算方法时，用到了过去在小学里学到的算术知识。根据不同的题，灵活地运用已学过的知识，既掌握了应用知识的能力，又训练了思维方法。

一般说来，提高分析问题的能力，就能使计算能力倍增。

图形判断所需要的知识

在小学进行实际画图练习时，大家已经发现了各种各样图形的性质。例如知道了三角形的三个角之和是180°。另外，还学

习了长方形是平行四边形的特例，长方形在什么情况下变成正方形。

在实际画图的基础上，可从图形分类整理的结果中努力掌握对称图形等各种图形的性质。

继以上的学习之后，在中学里进行边变动图形，边思考满足条件的练习，借以加深理解图形的性质。另外，如果能“有条理”地思考，注意各图形之间的联系，那么学习的效果就会提高。

从图形分类整理的结果中推导出的一般性质，要验证其是否正确，只靠画图是不能确定的，应以图形的基本性质（平行线的性质和三角形全等的条件等）为基础，经过“有条理”的分析，才能确定图形的性质。这方面的训练要重复进行下去。

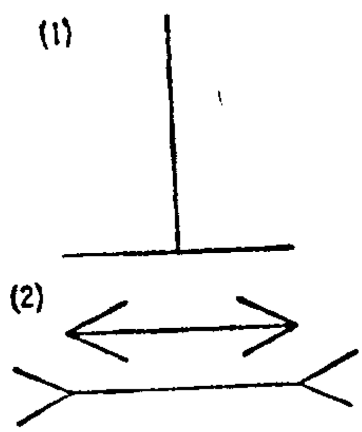
仅凭直观判断图形，有时很不可靠，这里存在视觉差错问题。

请看下面的问题。

问题 2

（1）图中的横线和竖线哪一条长？请你自己量一量。

（2）上、下两条横线中哪一条长？



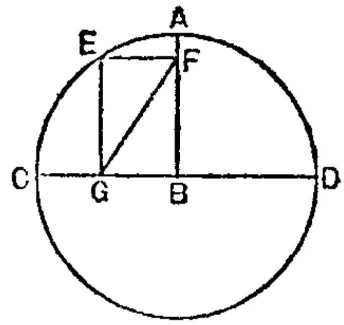
类似上面的问题，大多登载在智力测验一类书上。它生动地说明，靠直观判断是很不可靠的。

下面的问题表明利用图形的性质后给解题带来极大的

方便。

问题3

右图中B是圆心，AB是长3cm的半径。E、G、B、F 4个点组成一个长方形。求GF的长度。



在小学四、五年级学过长方形的对角线相等。

连接E、B点。由图看出，EB是长方形的对角线，也是圆的半径。

通过以上两个例子，大家一定会体会到，考虑问题时不能凭直观感觉，而要利用图形的性质，这样才能得出正确的答案。

（2）怎样上好课

为什么上课听不懂

上课听不懂，而你认为自己并不糊涂，说明课程的进度对你来说太快了。那是因为前面的内容还没有完全理解，下一个内容又接着来了的缘故。以前学过的已全然忘记也是个原因。上课当中，一时想不起来的问题，正当你在思索是什么意思时，课又往下进行了，这样就耽误了听课，所以感到很吃力。像这样的情况重复几次，当然就渐渐地跟不上了。能否想个办法呢？

一般教课是按照课本进行的。所以只要预先认真阅读课本就行。这叫做预习。如果上课毫无思想准备，突如其来地被问这个那个，自然会答不上来。预先阅读要讲的内容，是

最好的学习方法。特别是预先查阅过去与此有关的内容，即使上课时或多或少有听不懂的地方，也不会跟不上。如果老师讲的内容基本领会了，尽管其中稍有不明白的地方，但从整体看还是掌握了。

预习的重要性

课前预习极为重要。在一个小时的上课时间里，正课的内容约占40分钟或50分钟。准备充分能省下20分钟的时间，可见有准备就胸有成竹。

现在的课本编写得非常好，一般都有说明、例题及详细的解法。但是有关过去学过的内容的说明则寥寥数语，所以一旦忘记了的话，上课就听不懂。因而预习时，必须将过去与现在有关的内容回忆一下，上课时，有不理解的地方也好提问。正因为有预习，所以才能提问。

阅读课本时，如果也能理解书中例题的解法，那么严格按照例题解法步骤，试解其他题时，只要计算上没有差错，就能获得正确的结果。下面谈谈讲课的特点。

特别重要内容的前后联系、重要事项、容易出错的地方，这些都是上课重点讲解的内容。凡是老师讲解声音大的地方、反复讲解的地方，不用说，一定是特别重要之点。

课堂提问题是提高学习成绩的好方法

不论学数学还是别的学科，学力的增长，主要取决于你有提高成绩的欲望而采取的积极学习的态度。这一点比什么都重要。常言说，一个孩子就可以领马过河滩，但强迫马喝水怎么也办不到。你想从课堂上吸取知识的积极态度，比老师讲课好与差要重要得多。

积极的态度表现在上课时不时地提问。家里也常有这样的叮嘱："假如不懂就要提问"。但是，没有事先预习，似乎

也提不出问题。对此你自己多少也有体会吧！实际上，什么地方不明白，不从你嘴里说出来，别人谁也不会知道。为了弄懂，只有向讲课人讲明你的疑难之点才行。提出你所不明白的地方在哪里，这就是提问。

老师了解了你的难点后，只要讲解得明白，有条不紊，你是会理解的。

不明白的地方不去把它弄懂，就这么的以为下面的内容照样可以弄懂，且不说其他科目，就数学来说，绝不会有这样的事。提问是你积极参加课堂学习的表现。

上课是有效的学习途径

常常有些人在家里或在私塾里学习很努力，但却轻视学校里的课堂学习。特别是，这种倾向多出现在成绩比较好的学生当中，实在令人遗憾。之所以这样，是因为厌烦老师罗罗嗦嗦反复解释早已明白了的地方的缘故。也许有人不同意这种看法。其实，越反复讲解的内容越说明重要，也是越容易出错的地方。

实际上，在教室里上课的不是你自己一个人，讲课的对象是全班的学生，所以必须照顾到所有的学生都能听懂。可是班上学生的学力不一样。一般上课时，老师总是根据所设想的具有中等学力的学生能接受的进度进行讲课的，所以有时成绩好的学生对上课感到不满足。与此相反，对于学力差的学生来说，这又是成为他们跟不上课的原因。因此，为了搞懂自己不明白的地方而积极提问，自然要靠你自身努力，把上课作为自己的事。

（3）家庭学习

课前的准备

为了把上课作为自己份内的事，就必须有适当的准备。没有充分的准备，如同赤

膊上阵，被敌人的枪弹吓得胆战心惊，回顾战况，无有战绩。课前做准备就是家庭学习的目的。应该根据自己的学力安排家庭学习。其方法细分的话，可以说十人有十个法。

一般提高学力的学习环节包括预习——上课——复习，其中预习和复习是家庭学习的任务。

预习和复习 预习的目的，好比是事先侦察即将进行战斗的战地情况；复习的目的，好比是力争把战后的占领地归为己有。1小时的课即使顺利地上完了，如果不能确保战绩，明天的仗（上课）也就打不好。所以预习和复习对每天的学习是不可缺少的。

预习的方法 因为预习是为明天的战斗作准备，所以首先必须从阅读课本的说明开始。这与看小说之类的书不同，需要一字一句认真领会。特别是文中的粗体字部分或用框圈起来的地方，更要格外注意。术语的意义（定义）和使用，要比日常生活用语要求严谨。话虽如此，其实并不难。教科书编写通俗，在术语说明之后，一定跟着例子。有了问题，只要用心阅读，人人都能理解。此外，预习时务必回忆一下与此有关的已学过的内容。

按照以上的要求去做，学习会有进步。预习时有不理解的地方，不要见难而退，一定要刨根问底，直到消除疑点。这样的态度叫做自觉学习的态度。

复习的方法 课后必须立即复习。一般是完成课外作业。课外作业是复习的具体对象。做作业，可以将刚刚学过的知识确实定影而成为自己的东西。复习相当于通过药液对底片进行显影。

根据心理学家所做的试验结果证明，即使记得很牢的事，经过24小时以后，也会忘掉其中的70%左右。学习数学

比学其他科目更加要求努力做到牢记不忘。这是因为学习数学必须循序渐近、不断地积累才行。

那种认为只要完成了作业就是做好了复习的认识是不对的。完成课外作业只不过是完成复习内容的一小部分。而且随着年级的升高，一般就不再留课外作业。积累的知识多了，就难免不忘。忘记了的学生，希望有更多的时间复习。另外，同班学生的学力也参差不齐，因此给全班学生留同样的作业也就没有什么意义。

总之，复习是为了确保掌握当天所学知识的措施，因而应根据学力的差别、记性的好坏，因人而异地安排复习量。

（4）如何做笔记

中学的数学课不应以培养数学家为目的，而应通过数学学习提高学生处理日常生活问题的能力。碰到困难时，为了能够有条不紊地思考，找出更好地解决问题的方法，培养正确的思维能力，可以说是数学学习的根本。不仅仅只是能解决问题，重要的是如何解决得更好。为此，要摆出条件，分类整理出哪些是必要条件，哪些是不必要条件，从整理的结果中得出结论，从而找出最佳的方法，这就是数学学习的目的。

记住结论并不那么重要，最重要的是要记住这个结论是在什么条件下推导出来的。所以记笔记一定不要忘记这一点。没有正确地表示结论推导过程的笔记，不能说是好的笔记。

笔记的主要内容

根据以上要求，笔记应记载以下的内容。具体记笔记的方法，上课时已分别详细说明，只要严格照着去做就可以。

（1）应当记下课本、习题集、参考书等有关的页数。

（2）预习时事先记下已注意到的问题及参考事项。

（3）有错的地方不要用橡皮擦掉，应该用红笔改正，为日后学习时提醒勿犯同样的错误。

（4）对比记下自己的解题方法和老师的解题方法，可以作为以后学习的借鉴。为此，预习时在自己解完题的旁边，要留出上课时记笔记的地方。

这样通过比较解法和思考方法的不同，可望提高学习的成绩。

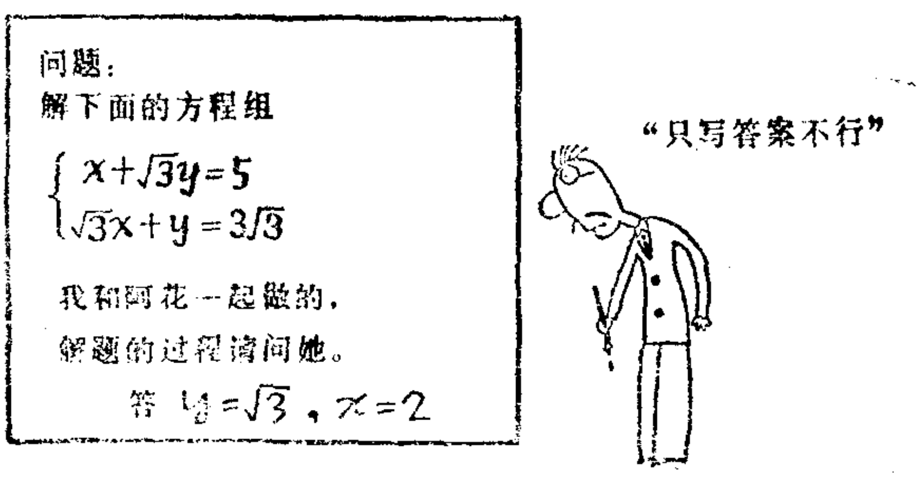
（5）记下预习时的疑难点，随后补记上课后已解决了的难点。不懂不可耻，不懂装懂才可耻。在老师上课后仍有疑问，应当积极提问，一直把它弄懂为止。

以上是为掌握新的知识在学习中必须做到的事项。

复习笔记

接着在学习上必须做的事是，将课堂上已掌握的知识进行消化，使之成为自己的知识。这个工作就是完成家庭作业和复习。无疑，在做家庭作业和复习时，必须把解题过程的步骤一一列清楚，不应只写最后的结果和答案。

最后必须检查答案是否正确。如果有错，想一想为什么会出现错误，找出原因并改正，而且要用红笔改正，以提醒以后不再出现同样的错误。



3．中学一年级数学的学习要点

从1981年4月开始，所实施的数学教材的教学目标是"随着加深对有关数量、图形等基础概念、原理和法则的理解，数学的表达能力和处理方法的提高，逐渐培养学生灵活运用这些知识的能力。"

这个目标的前半部分要求努力理解概念、原理和法则，后半部分要求提高对数学的表达能力和处理能力。前后关系紧密，不可分割。

从一年级逐步升入三年级，对数学处理能力的要求是多方面的。

一年级开始以理解基础概念、原理和法则为主。

另外，特别是课本中的粗体字和用框围起来的部分，希望大家用心阅读。

（1）整　数

数的种类　小学阶段学过数的种类有整数、自然数、分数和小数。

整数：0，1，2，3……

自然数：除0以外的整数，1，2，3……

分数：两个整数之间相除所得的数。但是除数限于零以外的自然数。分数和小数相同，可以把分数化为小数，或者把小数化为分数相互计算。

约　数　作为约数的考虑对象限于整数，一般不考虑分数。能除尽某个特定整数的自然数叫约数。考虑问题时，对于所考虑对象的数的要求范围应当

清楚，这点很重要。

6的约数有1，2，3，6，共4个。

9的约数有1，3，9，共3个。约数虽多，但是有限个，不是无限个。

最大公约数

6和9共同的约数是1和3。共同的约数叫公约数，其中最大的一个叫做最大公约数（G．C．M．）。

素　　数

只有两个约数的自然数是素数。1不是素数，因为它只有一个约数。25以前的素数是2、3、5、7、11、13、17、19、23。除此以外的素数有无穷多个。

素数以外的自然数叫做合数。合数都可以分解为几个素数相乘的形式。1不是合数。

$30=2\times3\times5$　$105=3\times5\times7$　$150=2\times3\times5\times5$

把一个合数用素数相乘的形式表示出来，叫做分解质因数。

乘　　方

$2\times3\times5\times5$往往写成$2\times3\times5^2$。把2个5写成5^2，读作5的二次方。写在5的右上方的小字称为指数。相同的几个数连乘叫做乘方。

$2\times2\times2=2^3$　$3\times3=3^2$　$6\times6\times6\times6=6^4$等等均是乘方的例子。质因数分解也可以用乘方的形式表示：$36=2^2\times3^2$　$72=2^3\times3^2$　$81=3^4$。

倍　　数

与约数一样，可以做倍数的数限于整数。但是要注意零也包括在内。从除法考虑零不能做除数，所以约数不应包括零。但倍数则不然，是做乘法运算，所以包括零。

2的倍数，从0开始是0、2、4、6……，2的倍数叫做偶

数。一个数的倍数有无限个。

3的倍数，有0、3、6、9、12……等无限个。

最小公倍数　0、6、12……是2和3共同的倍数，叫做公倍数。公倍数中0后面的数是最小公倍数（L. C. M.）。6是2和3的L. C. M.

问　　题

从10到100的自然数中，设x为素数的积，相乘的素数中2的个数为y。

例如　$40=2\times2\times2\times5$　　$x=40$　$y=3$

回答下面的问题：

（1）$x=48$时，求y值。

（2）$y=3$的x值中，求最大的x。

（3）在所给范围内的数中求最大的y。

（4）$y=2$的x值总共有几个？

解这个题，有以上的说明也就足够了，这是一年级范围的问题。但是让一年级学生正确地解出则有些勉强，原因是他们尚未熟悉数学的思考方法。

解：

（1）首先把$x=48$分解质因数

$48=2\times2\times2\times2\times3=2^4\times3$

2的指数是y　　$y=4$

（2）从$x=2^3\times3$开始考虑100以下的数：$2^3\times5$　$2^3\times7$…直到$2^3\times11$

所以　$x=2^3\times11=88$

（3）$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$……，$2^6=64$，在100以内；而$2^7=128$，已大于100，

所以$y=6$

（4）$2^2\times3$，$2^2\times5$，$2^2\times7$，$2^2\times9$，$2^2\times11$，$2^2\times13$，$^2\times15$，$2^2\times17$，$2^2\times19$，$2^2\times21$，$2^2\times23$，$2^2\times25$，所以$y=2$的x值共有12个。

考试时，只答（1）$y=4$，（2）88，（3）$y=6$，（4）12也就可以了。但在平时的学习中，一定要解释清楚为什么会得出这样的答案。思考方法上的错误要比计算疏忽造成的差错更妨碍以后的学习。

不管学什么，首先必须领会术语的明确的具体意义。数学中术语的意义叫做定义。

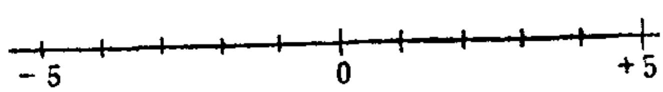
术语的定义 关于整数、自然数、约数、倍数、素数、最大公约数、最小公倍数、乘方等的术语定义，教科书中有详细的说明，希望大家精心阅读。

（2）正数·负数

负　　数 四则运算（加、减、乘、除）从对自然数的计算扩大到对整数、分数范围的运算。为了满足在任何情况下都能够进行减法运算的要求，产生了负数。比5少10的数是$5-10=-5$。-5是负整数，它的意义是比0少5。

相对于负数，我们把过去学过的比0大的数叫做正数。希望特别强调正数时可写＋（正）号。

数　　轴 在一条直线上取一点0作为原点并画上刻度，规定原点的右边是正数，左边是负数，像这样的直线叫做数轴。



比5小10的数是从+5向左数10个刻度的数，读作－5个刻度。

某点与原点的距离叫做这个点的绝对值。－5和+5的绝对值都一样是5，表达的形式是$|-5|$、$|+5|$，应写上－号和+号。

正负数的加法

所谓计算，就是根据法则要求而得出结果。首先要正确地掌握法则，计算时要小心，不可违反法则。

加法法则

同号时：$(+5)+(+3)=+(5+3)=+8$

$(-5)+(-3)=-(5+3)=-8$

异号时：$(+5)+(-3)=+(5-3)=+2$

$(-5)+(+3)=-(5-3)=-$

带正、负号的数相加，同号的取原来的符号，并把绝对值相加；异号的取绝对值大的符号，并把绝对值相减。

以上是加法法则。减法法则是从加法法则推导出来的。在数学里，有了第一个法则，以后的法则大多是从头一个法则依次推导出来的，所以第一个基本法则是头等重要的法则。

正负数的减法

减去一个正数与加上一个负数是相同的；减去一个负数与加上一个正数是相同的。

$(-3)-(+4)=(-3)+(-4)=-(3+4)=-7$

$(-5)-(-8)=(-5)+(+8)=+(8-5)=+3$

减去带正、负号的数时，只要改变减数的符号相加即

可，然后按照加法法则运算。注意：被减数符号不变。

乘法和除法 产生下面法则的原因，不论哪一本教材都有详尽的说明，希望大家仔细阅读，深刻理解。一味死记硬背法则，不仅只是一知半解，而且也不能灵活运用。

	乘法法则	除法法则
同号	(+) × (+) = (+)	(+) ÷ (+) = (+)
	(−) × (−) = (+)	(−) ÷ (−) = (+)
异号	(+) × (−) = (−)	(+) ÷ (−) = (−)
	(−) × (+) = (−)	(−) ÷ (+) = (−)

$$(+5)\times(-4)=-(5\times4)=-20$$

$$(-20)\div(-5)=+(20\div5)=+4$$

绝对值的计算与小学所学的是一样的，没有改变。但应记住符号的法则。

从这个法则出发考虑几个数之间相乘或相除的运算法则时：

$$(+5)\times(+2)=+10,\quad(-3)\times(+2)=-6$$

上述的题中用（＋2）乘，原来的符号不变。

$$(+5)\times(-2)=-10\quad(-3)\times(-2)=+6$$

上述的题中用（－2）乘，原来的符号改变。如果注意到这一点，就会发现引起符号改变的是带（－）号的数。

$$(+2)\times(-4)\div(-3)\times(+6)\div(-2)$$
$$=-8$$

（－）号是3个（奇数）时，结果为（－）；

（－）号是偶数时，结果为（＋）。

问　题

右表列出了（A～H）8名学生的数学成绩，他们的平均分数是65分。已知每个学生的分数与平均分数之差，正数表示高于平均分，负数表示低于平均分。根据表，回答下面的问题：

A	B	C	D	E	F	G	H
5	−4	15	−8	−9	8	5	−12

（　）求E学生的分数。（2）最高分和最低分之差。（3）求A、B、C、D平均分数与E、F、G、H的平均分数之差。

解　（1）　$65+(-9)=56$

（2）　$15-(-12)=15+(+12)=27$

（3）　$[5+(-4)+15+(-8)]\div 4-[(-9)+8+5+(-12)]\div 4=4$

（3）代　数　式

开始的法则是有约束的。后来在原有的规定上又扩展出各种各样的性质。这就是数学的思维方法。因此，只有严格遵守计算的规则，才能从一开始就导出正确的结果。

代　数　战前，把现行中学里学习的数量篇的内容总括起来叫做代数。用字母代替数，有计算上的意义。为了避免在使用中出现混乱，用字母表示数时，必须有个规定。

使用字母的规定

（1）数和字母相乘时，省略乘号。

（2）字母和数的积，应当把数写在字母的前面。

（3）字母和数相除时不用÷号，要写成分数的形式。

（4）几个字母的乘积，按字母表的顺序排列。
（5）相同字母的积写成乘方的形式。

例如 ①②④ $4\times a\times b=4ab$

$z\times 3\times y\times x=3xyz$

③ $3\div m=\frac{3}{m}$， $4\div a\times b=\frac{4}{a}\times b=\frac{4b}{a}$

⑤ $a\times a\times a=a^3$， $6\div b\times a\times a\div b=\frac{6a^2}{b^2}$

再者，$1\times a=a$，$1\times a\times b\times a=a^2b$只乘1的情况下，习惯上不写1。以上的规定，从对今后思维的发展来看，也带来了帮助，所以极为重要。

规则便利于运算

往往认为“数学讨厌”的原因之一，在于麻烦的规则太多了。然而规则带来很多的方便。如果没有规则，就必须规定出来。

定规则是为了方便，不会引起思想上的混乱。尽管那样，数学中只制定了那些少量的、非定不可的规则。定规则的原则，虽有但并不复杂。

交换律和结合律

四则运算是运算的规则，特别是加法和乘法是这四种计算中基础的基础。

交换律	结合律
加法 $a+b=b+a$	加法 $(a+b)+c=a+(b+c)$
乘法 $ab=ba$	乘法 $(ab)c=a(bc)$

在小学里学过的加法和乘法之所以容易计算，开始都觉得算术好学，多亏有了这个法则。使用字母表达算式，可以简明地表示复杂的关系。这是代数的用途之一。

对于减法和除法，交换律和结合律则不成立。

分配律　　$a(b+c)=ab+ac$

这个定律只适用于加法和乘法。利用这个定律可以巧算，便于归纳。

$6.23\times1.25+3.77\times1.25=(6.23+3.77)\times1.25=10\times1.25=12.5$

平时做题，不要盲目计算，要动脑筋钻研简便的计算方法，并努力避免粗心大意引起的差错。

从1到10自然数的和：

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

$=(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5+10$

$=10\times5+5=55$

将以上的思路扩大到100以内自然数的和：

$1+2+3+\cdots\cdots+97+98+99+100$

$=(1+99)+(2+98)+(3+97)+\cdots\cdots50+100$

$=100\times50+50=5050$

另外还可以想出各种各样计算窍门。可以说开动脑筋、勤思索，是学习数学的正确态度。

代数式　数学的表达式一般力求简明。复杂的表达式是由于一开始就没有抓住问题的实质。代数式，以字母表达的式子，不仅要严格遵守字母的使用规定，而且不能同时使用不同的单位，必须在式子的后面化成同一单位，整个代数式的单位必须统一。

5m和4cm，5m＋4cm＝5.04m或504cm

同样

am和$b$cm，　　$a+0.01b$（m）或$100a+b$（cm）

x小时和y分钟，$x+\frac{y}{60}$（小时）或$60x+y$（分）

（4）方　程　式

等式的性质　等式的性质类似天平左右两个秤盘之间相互平衡的性质。

$A=B$

（1）在两边的秤盘里加上重量相等的砝码，天平仍然平衡。

$A+C=B+C$

（2）在两边的秤盘里取下重量相等的砝码，天平依然平衡。$A-C=B-C$

同样，如果把秤盘里砝码的重量都加大2倍、3倍、4倍……，或者都缩小到原来的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$……，不用说，天平还是平衡的。

另外调换两边秤盘的砝码，天平也平衡。

解方程式的基本方法，就是利用等式的这些性质。

等式的性质

（1）$A=B\longrightarrow A+C=B+C$

（2）$A=B\longrightarrow A-C=B-C$

（3）$A=B\longrightarrow A\times C=B\times C$

（4）$A=B\longrightarrow A\div C=B\div C$

但是　$C\neq 0$　　自小学以来禁止用0除

（5）$A=B\longrightarrow B=A$

方程式　在$5x+x=6x$的等式中，两边的x无论代入什么数，等式均成立。这种等式不是方程式。

在$x+5=8$的等式中，只有取$x=3$代入等式才成立。取

3以外的值代入等式不成立。像这样的等式才是方程式。$x=3$叫做这个方程式的解。

解方程实例

$$3x-\frac{5(2-x)}{4}-\frac{3(2x-7)}{5}-\frac{4x+9}{2}=0$$

利用等式性质③，在方程的两边都乘以20。带分数计算容易出错，应尽量避开：

$$60x-25(2-x)-12(2x-7)-10(4x+9)=0$$

在方程式的两边都乘以20，把方程里各分母4、5、2都约去。这样的计算过程用心算也不会出错。平时必须进行这方面的训练。括号前面有负号（－）的情况下，去掉括号时也容易出错。在去掉括号时，必须把括号中每一项的符号一律换成相反的符号：

$$60x-50+25x-24x+84-40x-90=0$$

合并同类项：

$$(60+25-24-40)x+(-50+84-90)=0$$

$$21x+(-56)=0$$

利用等式的性质②，方程的两边都减去（－56）：

$$21x+(-56)-(-56)=0-(-56)$$

$$21x=56$$

利用等式的性质④，方程两边都除以21：

$$x=\frac{56}{21}=\frac{8}{3}$$

总之，解方程时，利用等式的性质①～④，逐渐将给出的方程式化成简单的形式。化简时必须百分之百地防止出现计算上的差错。如果最后的部分有错，同前面部分有错一

样，也不会得到正确的答案。数学难就难在这个地方。99%正确也不算正确。

下面我们把容易出错的地方依次列出：①分数计算；②去括号；③负数处理。

解题后检查答案，如果有误而做法都对时，应当查哪一步的计算出了差错。上面列出的是一般容易出错的地方。但每个人容易出错的地方往往不同。发现自己弄错了的地方，只要克服了，无论多么难的方程式，按下面的步骤解，就会得到正确的答案。

解方程的步骤 给出的方程式，不可能没有特殊的形式。但一般按照下面的步骤将方程式变形，不容易出现计算差错。

（1）去分母。根据等式的性质③，在方程的两边都乘以各分母的最小公倍数。

（2）去括号。括号前有负号时必须格外小心。

（3）合并方程左边、右边的同类项。不论什么方程，都化成$Ax+B=Cx+D$的形式。

（4）根据等式的性质①、②，把x项移到方程的左边，常数项移到右边。合并同类项后得 $Ax=B$。

（5）根据等式的性质④，将方程的两边都除以x的系数，得$x=\frac{B}{A}$，解完方程。

（5）平面图形

根据最近修订的教材，图形理论的大部分改在二年级学习。一年级必须学习的内容只有圆规、直尺的正确使用，图形的基本性质，图形的定义，以及面积、体积的计算等。

作　图

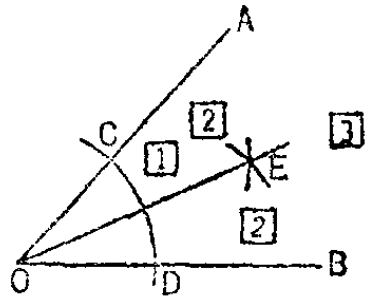
除了特别许可以外，一般不许使用量角器。三角尺只许用来画直线和平行线，在许可时才能用来画30°、45°、60°和90°角。圆规限于画圆。

遵守以上使用规定，利用三角尺、圆规正确地画出所需图形，叫做作图。另外，画图的步骤也应分条写出。

角的平分线

作∠AOB的平分线

（1）以∠AOB的顶点为圆心，以适当的半径画圆，交OA于C，交OB于D。



（2）分别以C、D为圆心，以相等的半径作弧，两条弧相交于E点，如图所示。

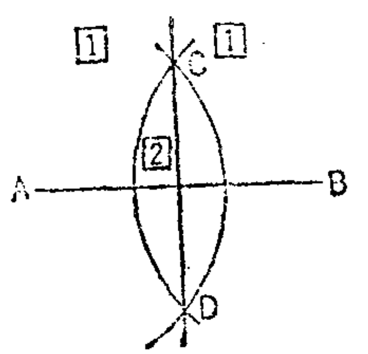
（3）连接OE，OE就是∠AOB的平分线。

按照①～③画图的顺序画图叫做作图。为什么这样作图就能得到正确的角平分线呢？一年级可以不考虑这个问题，因为升入二年级学习三角形全等单元后可以证明。

垂直平分线

过线段AB上的中点作一条垂直于AB的直线。

（1）分别以A、B为圆心，以相等的半径作两条弧相交于C和D。



（2）连接CD。

直线CD就是线段AB的垂直平分线。设AB和CD的交点为M，则下面的两个式子表示垂直平分线：

$AM = MB$，$CD \perp AB$

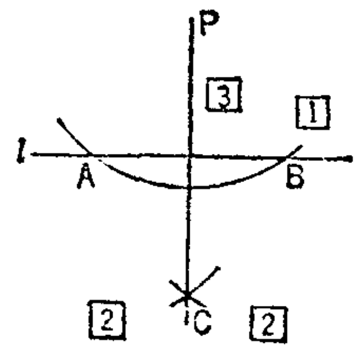
过直线外的一点作垂线

P点是直线l外的一点，过P点作l的垂线。

（1）以P为圆心作弧交直线l于A和B。

（2）分别以A、B为圆心，以相同的半径作弧，相交于C点。

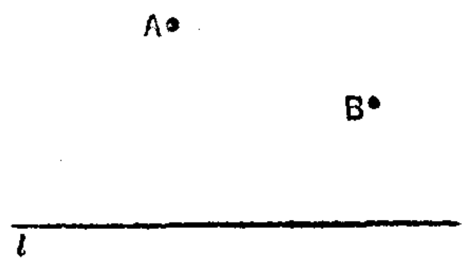
（3）连接PC，PC⊥l。



正确掌握以上三个基本作图方法后，可以用来做其他复杂的图。

问　题

如右图所示，有一直线l和l外的点A、B，求在直线l上与A、B两点等距的点。



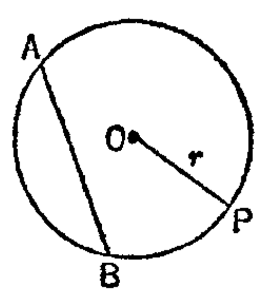
解　（1）连接AB　（2）作线段AB的垂直平分线，交直线l于P点，PA＝PB。

垂直平分线上的任意一点与线段两端的距离相等。

圆

用圆规画圆。

到定点（中心）的距离（半径）相等的点的集合成为圆。



{ P/OP＝r }

上式表示任一点P与定点O的距离等于r。实际上成了圆＝圆周。

上式确切的表达应是｛P/OP≤r｝。

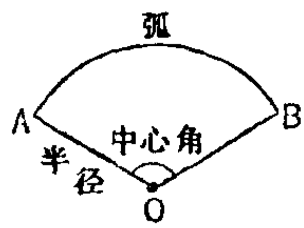
连接圆周上两点的线段叫弦。圆周上任意两点间的部分叫圆弧。弦和弧围成的图形叫弓形。

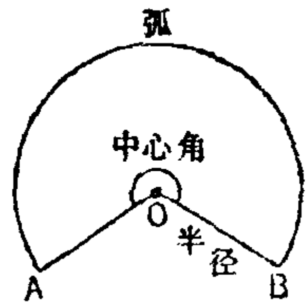
最长的弦是直径，此时的弓形就是半圆。

如果r表示半径的长度，S表示圆的面积，l表示圆周，π表示圆周率，则：

$$S=\pi r^2, \qquad l=2\pi r$$

扇　　形　通过弧两端的两条半径及其所夹的弧围成的图形为扇形。这两条半径所夹的角叫扇形的中心角。扇形的弧长和面积与中心角成正比。





中心角是120°、90°、60°时，扇形的弧长分别是圆周的$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$；扇形的面积分别是圆面积的$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$。

中心角是a°时，弧＝圆周×$\frac{a}{360}$，面积＝圆的面积×$\frac{a}{360}$。

半径是r的圆面积为πr^2，圆周长为$2\pi r$。

半径是r，中心角是a°的扇形弧长l和面积S分别为：

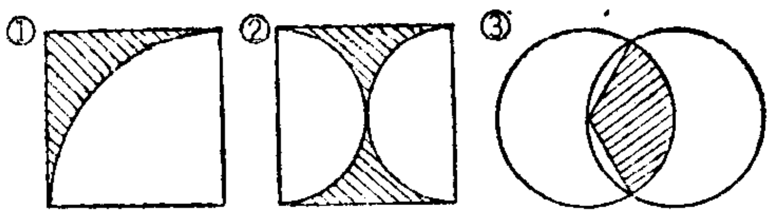
$$l=2\pi r\times\frac{a}{360}=\frac{\pi ra}{180}$$

$$S=\pi r^2\times\frac{a}{360}=\frac{\pi r^2 a}{360}=\frac{\pi ra}{180}\cdot\frac{r}{2}=\frac{lr}{2}$$

$S=\frac{lr}{2}$是弧的长度×半径÷2，正好与三角形面

积公式一样，非常好记。

求右图中有斜线部分的面积。



图①、②正方形的边长为$a$cm。图③圆的半径为$r$cm，两个圆周相互通过对方的圆心。

解　没有特别的说明，就用中学里的圆周率π。取$\pi=3.14$计算的几乎没有。

应严格遵守使用字母的规定，最后结果的表达力求简明。

①正方形面积一圆的1/4面积$=a^2-\pi a^2\div 4$

$=a^2-\frac{1}{4}\pi a^2=\frac{1}{4}a^2(4-\pi)\text{cm}^2$

②正方形面积一半径1/2a的圆的面积$=a^2-\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2$

$=\frac{1}{4}a^2(4-\pi)\text{cm}^2$

③中心角120°的扇形面积$=\pi r^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2\text{cm}^2$

（6）空　间　图　形

立体图是空间图形，它不像平面图那样能正确地画图表示，因此必须正确地理解图形的性质。

为了掌握图形的性质，需从认识基本图形的性质开始逐渐扩大到认识复杂图形的性质。立体图形的性质是由平面图形的性质推导出的。

直线和平面 直线没有长度的限制。根据需要，要多长都可以。平面也和直线一样，无宽度的限制。根据需要，要多宽都可以。

基于以上情况，直线和平面间只有以下三种位置关系：

（1）直线与平面互相平行；

（2）直线与平面相交；

（3）直线在平面上。

直线和平面之间公共点数，在（1）情况为0，（2）情况为1个，（3）情况为无数个。

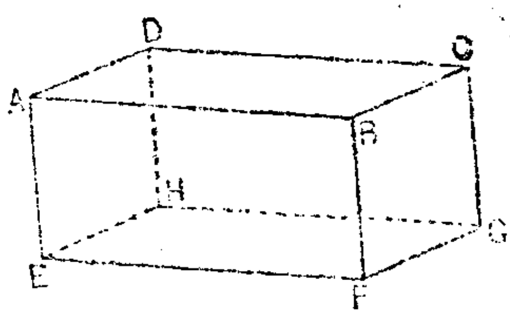
对数学来说无例外的情况。必须对所有的问题进行分类，对所有的情况作推测判断。

直线与直线 直线和直线的位置关系分为平面和空间两种情况。

平面的情况：

（1）相交；

（2）不相交（平行）。

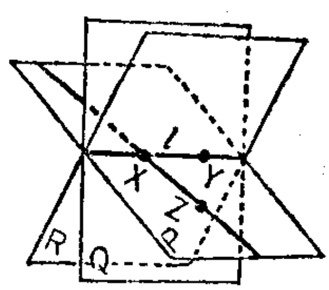


空间的情况：

（1）相交（AB边与AE边）；

（2）不相交 $\begin{cases} \text{①平行（AB边与EF边）} \\ \text{②不相交也不平行（AB边与DH边）。} \end{cases}$

平面的确定 过平面上一点的直线有无数条，过两点的直线只有一条。这就叫做两点决定一条直线。



那末，几个点可以决定一个平面呢？从右图来看，经过X、Y、Z三个点的平面只有

P平面。由此可见，确定一个平面必须满足下列条件之一：

（1）过不在同一直线上的三个点；

（2）过一直线及直线外一点；

（3）过两条相交直线；

（4）过两条平行的直线。

平面与平面

首先要想到平面无边界，因此平面间只有下面两种位置关系：

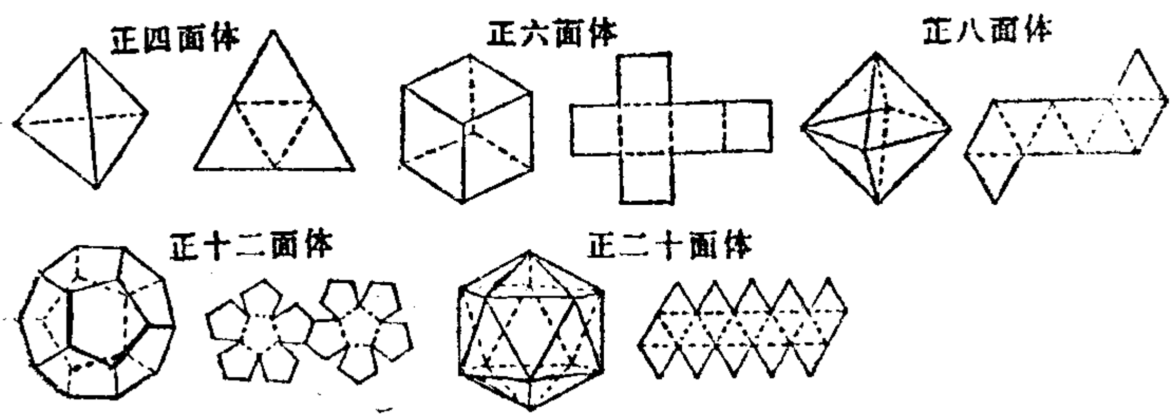
（1）相交（二平面的交线是直线）；

（2）不相交，平行。

正多面体

平面图形按角的数目分，有三角形、四角形、五角形……。同样，空间图形按面的数目分，有四面体、五面体、六面体……。

我们把每个面的大小都相同的正多边形组成的多面体叫做正多面体。正多面体只有下面的五种：

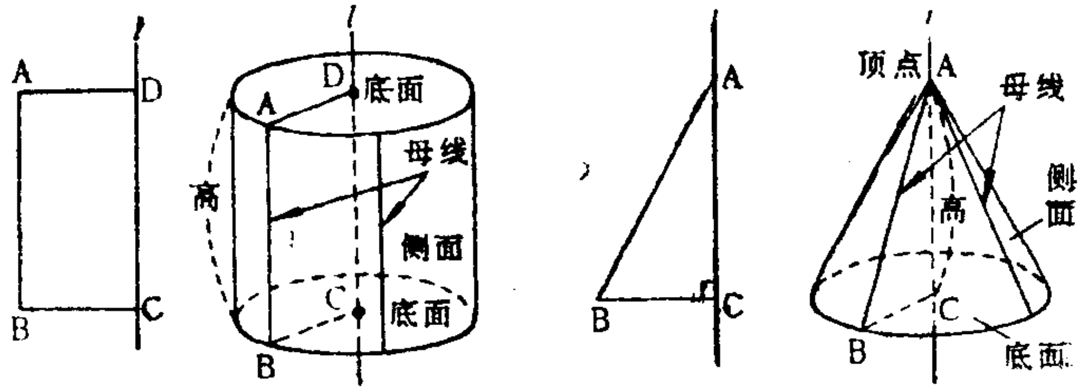


旋转体

线，可以判断是点运动的结果。空间图形则由一个面运动而成的。将正方形垂直向上运动，则形成正四棱柱。

四边形ABCD以CD边为轴旋转一周时形成圆柱体；三

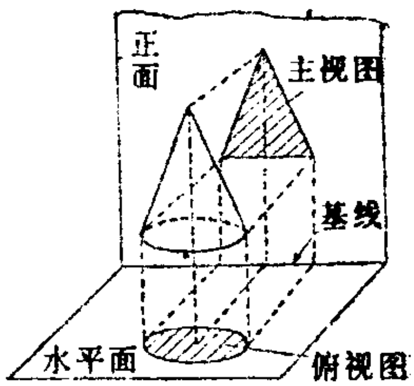
角形ABC以AC边为轴旋转一周时形成圆锥体。这样的图形称为旋转体。一个垂直于轴的平面与旋转体相交所得的截面是圆。

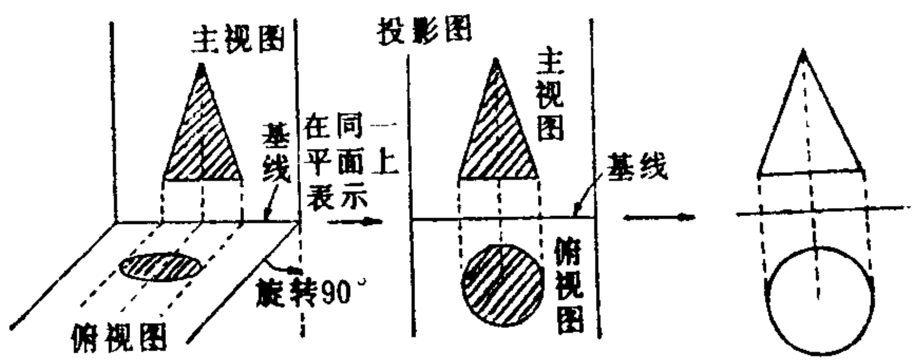


投影图

在纸上表示立体图的方法有草图、展开图和投影图，其中可以正确地表示尺寸关系的是投影图。

另外，复杂的空间图形有时还必须画出侧视图。投影图属于技术类学科等制图学习的基本内容，因为比较深，一年级的数学没有必要深入学习，只知道简单的原理也就足够了。





空间图形的表面积和体积　空间图形的表面积和体积公式如熟记的话，使用起来就不那么费力气了。数学与其他学科相比，强调死记的东西很少，这里是少数当中的一个。

①正方体　设正方体的边长为a，则：

表面积　$S=6a^2$

体　积　$V=a^3$

②长方体　设长方体的长、宽、高分别为a、b、c，则：

表面积　$S=2(ab+bc+ca)$

体　积　$V=abc$

③棱柱　设棱柱的底面周长为l，高为h，则：

侧面积　$S=lh$

体　积　$V=$（底面积）×（高）

表面积　$S=2\times$（底面积）+（侧面积）

④圆柱　设圆柱的底面半径为r，高为h，则：

侧面积　$S=2\pi rh$

体　积　$V=\pi r^2h$

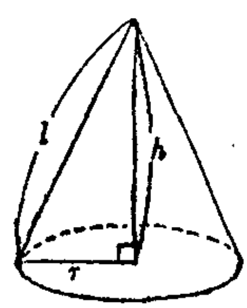
表面积　$S=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r(h+r)$

⑤棱锥

表面积　$S=$（底面积）+（侧面积）

体　积　$V=\frac{1}{3}\times$（底面积）×（高）

⑥圆锥　设圆锥底面半径为r，高为h，母线为l，则：



侧面积　$S=\pi rl$

体　积　$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

表面积　$S=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$

⑦ 球　　设球的半径为r，则：

表面积　$S=4\pi r^2$

体　积　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

（7）函数和比例

函数的主要内容将分别在中学一年级到三年级学习。各个年级所学的内容没有紧密的联系，所以难理解。准备应考时，很有必要再复习已学过的部分。

变量和变域　方程式中的x称为未知数，可以求出具体的x值。

对函数来说，使x值变化，就有随着x值变化的函数值，因而这里的x不称为未知数，而称为变量。实际上，通常x值的变化是有一定范围的，这个范围叫做变量x的变域。

习惯上取字母x表示变量，y表示函数。

函　　数　点燃一根长20cm的蜡烛，每燃烧一分钟，蜡烛缩短0.5cm。设x分钟后蜡烛的长度为$y$cm。由于x分钟后蜡烛短了$0.5x$cm，所以$y=20-0.5x$（cm）。

蜡烛点燃后的长度（$y$cm）由点燃的时间（x分钟）决定，像这样的情况，y就叫做x的函数。因为x是蜡烛点燃以后至蜡烛烧完这一段时间，所以$0\leqq x\leqq 40$分钟（0分钟以上40分钟以下），这就是x的变域。而y的变域则是蜡烛的长度，所以$0\leqq y\leqq 20$（cm），即y大于0cm小于20cm。

$x=0$时，$y=20$，$x=40$时$y=0$，x和y值一一对应。

比例函数　y是x的函数时有各种各样的情形。当x、

y有这样的关系，$x \xrightarrow{\text{扩大2倍，减去4}} y(y=2x-4)$时，$x=3$，则$y$有一个对应的值，$y=2\times3-4=2$。如果$x$和$y$只有$x \xrightarrow{\text{扩大2倍}} y$（$y=2x$）这样的对应关系，我们说$y$与$x$是正比例关系。

关于正比例，在小学里我们学过，某个值（x）扩大到原来的2倍、3倍……，另外一个值（y）也随之扩大到2倍、3倍时，y与x成正比例（简称正比）。当$x \xrightarrow{\text{4被}x\text{除}} y$ （$y=\frac{4}{x}$）时，我们说y与x是反比例函数，这部分与小学学过的x值扩大到原来的2倍、3倍……时随之变化的y值缩小到原来的$\frac{1}{2}$倍，$\frac{1}{3}$倍相对应。

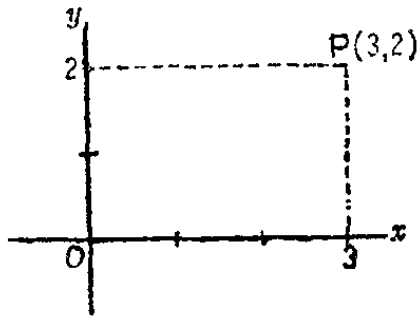
像这样的比例关系（正比例和反比例）是函数关系中的一个例子。

正比（正比例）函数 以代数式表示正比函数，重要的一点是可以从代数式判断类似的关系。正比函数$x \xrightarrow{\text{扩大}a\text{倍}} y$（$y=ax$），$a$是比例系数。$y=3x$时，$y$与$x$成正比，比例系数是3。$x=4$时，对应值$y=3\times4=12$。如果用$x$除式子的两边，$\frac{y}{x}=a$，在这个正比函数中，商是比例系数。

反比例函数 $x \xrightarrow{a\text{被}x\text{除}} y$（$y=\frac{a}{x}$），$a$叫做比例系数。当$y=\frac{4}{x}$时，$y$与$x$成反比，比例系数是4。$x=2$时，

对应值$y=4\div2=2$。如果用x乘式子的两边，$xy=a$，我们就会发现，反比例函数中x、y的积是个常数，等于比例系数。

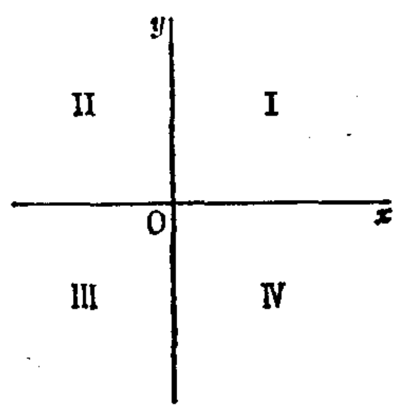
坐标轴　为了正确地表示平面上点的位置，首先要规定原点。只要给出某点与原点的距离，就可以表示该点的位置。



我们取两条垂直线（x轴、y轴）相交的点为原点。在横向x轴上距原点0为3、在纵向y轴上距原点0为2的点P用（3，2）的形式表示，（3，2）叫做P点的坐标，3叫做x的坐标，2叫做y的坐标。

象　限　x和y坐标轴把平面分成4个部分，如下图所示，依次叫做第1象限（Ⅰ），第2象限（Ⅱ），……。

点的位置	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
x坐标	＋	－	－	＋
y坐标	＋	＋	－	－



根据x和y的坐标值，可以判断出某点在哪一个象限。

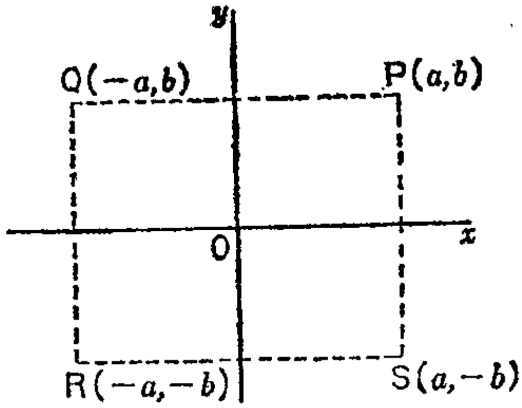
$x=0$时　表示在y轴上的点，

$y=0$时　表示在x轴上的点。

对称点的坐标

点P（a，b）是点Q（$-a$，b）相对于y轴的对称点。这两个点在x坐标上的绝对值相等，符号相反，而在y坐标上的值相同。

如果沿着y轴将图面折叠，那末点P和点Q就会完全重合在一起。



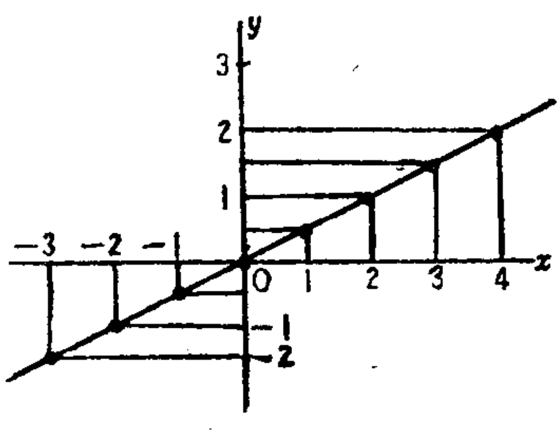
点P（a，b）是点S（a；$-b$）相对于x轴的对称点；点P（a、b）是点R（$-a$；$-b$）相对于原点O的对称点，如果注意到对称点的各个绝对值和符号，就不会出现差错。

正比例函数的图象

下面的对应表表示$y=\frac{1}{2}x$，$x\xrightarrow{\text{扩大}\frac{1}{2}\text{倍}}$y的关系（$y$与$x$成正比，比例常数是$\frac{1}{2}$）：

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
y	……	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	……

如果把表格中x和y的对应关系用坐标平面上的点表示，便得到右边的图象。



可见，用平面图象可以表示函数关系。

正比例函数（$y=ax$）的图象类似右图，是通过原点O的一条直线。随着比例系数的变化，直线与x轴相交的角度也变化。

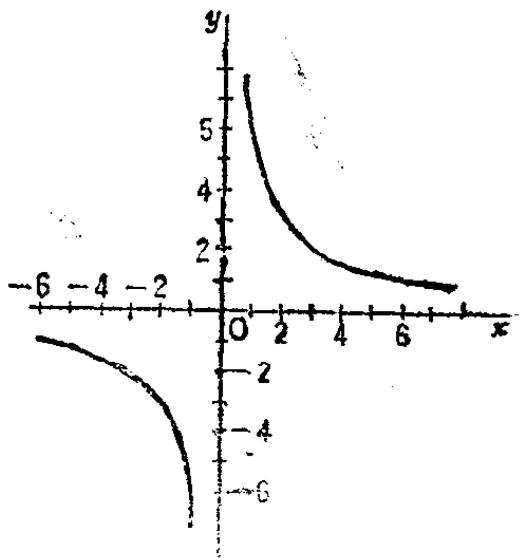
反比例函数的图象 $y=\frac{6}{x}$，y与x成反比，比例系数是6。

x和y的关系用对应表表示如下：

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
y	……	-2	-3	-6	无	6	3	2	1.5	……

$x=0$时无对应的y值，这是唯一的一个例外，因为0不能作除数

把这个对应关系用坐标平面上的点表示，则得到右边的图象。



反比例函数（$y=\frac{a}{x}$）的图象类似右图那样，是关于原点的对称图象。

反比例函数的图象统称为双曲线图象。

函数的表示方法 一般表示正比例函数和反比例函数的方法有三种：

（1）用算式表示，$y=\frac{1}{2}x$，$y=\frac{6}{x}$，……；

（2）用对应表表示；

（3）用图象表示。

上述三种表示方法各有各的特点，不能说哪一种方法更重要。不论哪一种，都是表示函数关系的重要方法。随着升入高年级，就会逐渐理解各种方法的特点。另外，由图象变成式子或者由式子变成图象表示方法的改变，也是重要的学

习内容之一。

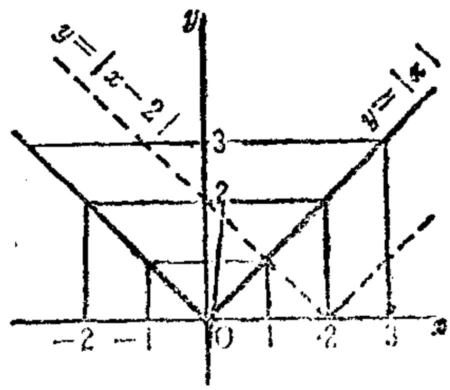
$y=|x|$的图象

$|-2|=2$，$|+3|=3$

符号“||”表示数的绝对值。$y=|x|$的函数关系用对应表表示为：

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	………
y	……	3	2	1	0	1	2	3	………

用图象表示则得右图那样的折线图象。



$y=|x-2|$图象的作法与$y=|x|$图象的作法相同，先列表，然后将x、y的对应关系用坐标平面上的点表示。

作函数图象的步骤是：

（1）首先列表表示x和y的对应关系；

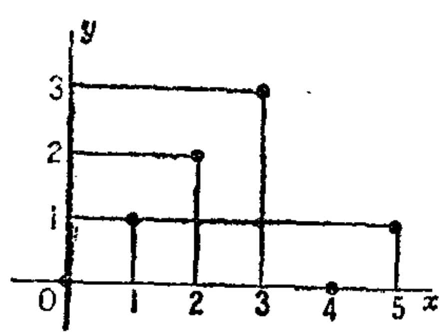
（2）将表中x和y的对应关系用坐标点表示。

其他函数的例子

$y=$（x除以4的余数）

x的变域是0、1、2、3、4、5。下面是x和y的对应表：

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	2	3	0	1



类似这样的函数，其坐标点不能连接。它的图象是零散的点。

4．中学二年级数学的学习要点

（1）整式的计算

这部分是中学一年级学习要点（3）代数和整式部分学习的继续。

这里再次证明在式子中使用字母的规定带来很大的方便。

单项式和多项式 $5\times a=5a$，$a+3a=4a$，$-2a\times b=-2ab$，这些都是单项式。

$4a+3b$，$6x^2+x-5$ 等都是多项式。

使用＋或－号将几个单项式合并在一起的式子叫多项式。

$\frac{3}{x}$ 或 $\frac{2}{a+b}$ 等分母中含有字母的式子，在中学阶段除例外的情况外，不是学习的范围。

单项式的乘法和除法 $5a\times 3ab=(5\times 3)a\times ab=15a^2b$ 进行数字之间的计算时，字母应按顺序排列，相同的字母要写成乘方的形式，这是使用字母的规定。

还有指数间的运算法则。

（1）$a^m\times a^n=a^{m+n}$	（3）$(a^m)^n=a^{m\times n}$
（2）$a^m\div a^n$	
$m>n$时　a^{m-n}	
$m=n$时　1	
$m<n$时　$\frac{1}{a^{n-m}}$	

(1) $a^3 \times a = a^{3+1} = a^4$

(2) $a^4 \div a^2 = a^{4-2} = a^2$

$a^3 \div a^3 = 1$

$a^2 \div a^5 = \dfrac{1}{a^{5-2}} = \dfrac{1}{a^3}$

(3) $(a^2)^3 = a^{2\times 3} = a^6$

$(a^4)^2 = a^{4\times 2} = a^8$

单项式的除法，把被除数乘以除数的倒数，然后按乘法运算。在运算之前先约分，这一点很重要。

$3xy \div 2y = 3xy \times \dfrac{1}{2y} = \dfrac{3xy\times 1}{2y} = \dfrac{3}{2}x$

$4a^2b \div (-2ab^2) = 4a^2b \times \left(-\dfrac{1}{2ab^2}\right) = -\dfrac{2a}{b}$

另外，$\dfrac{3}{2}x$写成$\dfrac{3x}{2}$是一样的。

多项式的同类项

在多项式$2a+b-3a+4b$中，$2a$和$-3a$叫做同类项，b和$4b$也是同类项。同类项可以合并成一项。

$2a+b-3a+4b = (2a-3a)+(b+4b) = -a+5b$

多项式与单项式相乘和相除

$3(x+2) = 3x+6$

$(4x-3)\div 6 = (4x-3)\times\dfrac{1}{6}$

$= 4x\times -3\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}$

根据一年级学过的分配律，可以求积。多项式与单项式相乘或相除的结果是多项式。

$-4\left(\dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{4x-1}{3}\right)+8x-11$

$$=-2(3x-1)+\frac{4}{3}(4x-1)+8x-11$$

$$=-6x+2+\frac{16}{3}x-\frac{4}{3}+8x-11$$

$$=\left(-6x+\frac{16}{3}x+8x\right)+\left(2-\frac{4}{3}-11\right)$$

$$=\frac{22}{3}x-\frac{31}{3}$$

提取公因子

$$ax+bx=x(a+b)$$
$$4a^2b-2ab^2=2ab(2a-b)$$

提取公因子是分配律的逆运用。验算时要利用分配律。若得出原来的多项式，就说明是做对了。

$6m^2n+4mn^2+2mn=mn(6m+4n+2)$式中没有把全部公因子提出来。不要忘记提取数字，最后的结果必须是$2mn(3m+2n+1)$才行。

练 习 要 点

熟练掌握运算法则是整式计算的要点。平时应反复练习，直到又快又百分之百正确地得出结果。

同样的练习题，除了反复做几遍外，没有特别高明的练习方法。

以后的学习项目是处理方程式、不等式、函数整式等的基础，因此要充分地进行计算练习，这一点很重要。

开始慢些也不妨，最重要的是要做得正确。像要求小学生那样注意字的书写方法、式子的排列。必须绝对避免因疏忽而造成的差错。接着反复练习加快做题的速度。

问题

$a=-\frac{2}{3}$时，在$2a$，a，a^2，$\frac{1}{a^2}$，$-a$，$-\frac{1}{a^2}$，$-2a$中

（1）得到结果最大的数是哪一个？

（2）得到结果最小的数是哪一个？

解　（1）当$-1<a<0$时，平方后其绝对值更小。

$$\frac{1}{a^2}=1\div\left(-\frac{2}{3}\right)^2=1\times\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$$

（2）对负数来说，绝对值越大其值越小。

$$-\frac{1}{a^2}=-\frac{9}{4}$$

（2）不　等　式

不等式的性质　为了便于理解不等式的性质，下面我们将不等式的性质与一年级学过的等式作比较。

等式的性质	不等式的性质
$A=B$时	$A>B$时
①$A+C=B+C$	①$A+C>B+C$
②$A-C=B-C$	②$A-C>B-C$
③$A\times C=B\times C$	③$C>0$时 $A\times C>B\times C$ ③′$C<0$时 $A\times C<B\times C$
④$A\div C=B\div C$ 但$C\neq0$	④$C>0$时 $A\div C>B\div C$ ④′$C<0$时

	$A+C<B+C$
⑤$B=A$	⑤$B<A$

不等式性质中的（3）′和（4）′项与等式的性质不同，应予以注意。不等式的两边乘以负数或除以负数，不等号改变方向。

例如 $3>2$，两边同乘以（-3）后，得$-9<-6$

$6<12$，两边同除以（-6）后，得

$$\frac{6}{-6}>\frac{12}{-6}\rightarrow -1>-2$$

对于负数，绝对值小的数值大。

不等式的解法 这部分只要掌握利用不等式的性质，简明地表示出未知数的范围就可以了。

问 题

解下面的式子

（1）$2x<3+4x$ （2）$-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}>\frac{1}{4}x+\frac{5}{6}$

解：（1）不等式的两边同减去$4x$（不等式的性质②）

$2x-4x<3$

$-2x<3$

两边同除以（-2）（不等式的性质④′）

$$x>-\frac{3}{2}$$

（2）首先去分母，两边同乘以12（不等式的性质③）

$-8x-6>3x+10$

两边同加上6（①）

$-x8x>3x+16$

两边同减去$3x$（②）

$-11x>16$

两边同除以-11（④′）

$$x<-\frac{6}{11}$$

对于负数，除了乘和除外，不等式的解法与方程式的解法相同。

一元一次不等式组 使两个不等式同时成立，求未知数的范围。

问 题

①解下面的式子

$$\begin{cases} 5x+3>2x-3 & (a) \\ 3x-2<-4x+12 & (b) \end{cases}$$

解 (a) $5x+3>2x-3$

$5x-2x>-3-3$

$3x>-6$

$x>-2$

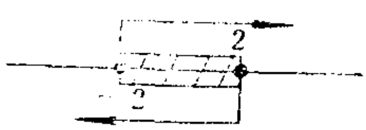
(b) $3x-2<-4x+12$

$3x+4x<12+2$

$7x<14$

$x<2$

因此 $-2<x<2$



解方程式、不等式时，不仅仅是求出结果，而且还要合理、简明地表示演算的过程，所以必须注意演算过程的书写方法。

如上例所示，解方程组时，需将两个不等式的演算过程对照写出，就不会出现因疏忽而引起的差错。

问题①有时也写成下面那样的集中形式：

$\{x \mid 5x+3>2x-3\} \cap \{x \mid 3x-2<-4x+12\}$

以这样的形式书写时，正式答案应写成：

$\{x \mid -2<x<2\}$

问 题

② 解 $x+1<5x-3<9-x$

解（a）$x+1<5x-3$

$x-5x<-3-1$

$-4x<-4$

$x>1$

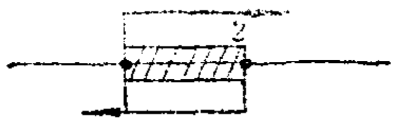
（b）$5x-3<9-x$

$5x+x<9+3$

$6x<12$

$x<2$

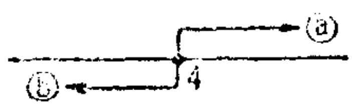
$\therefore 1<x<2$

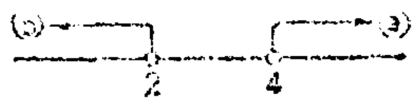


从所给的两个不等式的条件决定x的一个范围也可 以。

例如（a）$x\geqslant 4$，（b）$x\leqslant 4$　或（a）$x>4$，（b）$x<2$

那么只能$x=4$　　　　　　无解





问　题

③每个15元和20元的桔子共买20个，总金额不超过320元，问如何买才行。

解：设15元一个的桔子共买x个，则20元一个的桔子共买$20-x$个。

根据所给的金额列不等式：

$$15x+20(20-x)\leqslant 320$$

解不等式，得　　$x\geqslant 16$

即15元一个的桔子可以买16个以上。

问　题

④将总共22辆15吨和20吨的装载货车联结在一起，运送360吨以上400吨以下的货物，问需要20吨的货车几辆以上几辆以下。

解：设需要20吨货车x辆，15吨货车$22-x$辆。根据货物的总重量列不等式：

$$360 \leqslant 15(22-x)+20x \leqslant 400$$

像这样的不等式，不用问题②的解法，可以按下面的方法解。但x项必须在式子的中间：

$$360 \leqslant 330-15x+20x \leqslant 400$$

$$360 \leqslant 330+5x \leqslant 400$$

$$360-330 \leqslant 5x \leqslant 400-330$$

$$30 \leqslant 5x \leqslant 70$$

$$6 \leqslant x \leqslant 14$$

所以需要20吨货车6辆以上14辆以下

（3）方　程　组

二元一次方程组　所谓元就是未知数。二元就是两个未知数x和y。为了确定两个未知数，必须有关于x和y的两个方程。三元方程组有三个未知数。

二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

二元一次方程组的解法　解二元一次方程组的方法有（a）代入法和（b）加减法。不论用（a）方法还是用(b)方法解，都是为了消去一个未知数，使二元方程转化成一元方程(有一个未知数的方程)然后再解。

（a）用代入法

$$\begin{cases} 7y+2=4x \cdots\cdots ① \\ 4x-5y=-2 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

把①的条件代入②式：

（b）用加减法

$$\begin{cases} 4x+7y=29 \cdots\cdots ① \\ 5x+2y=16 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

为了消去x项，首先得使x的系数相等：

$(7y+2)-5y=-2$	①×5　$20x+35y=145$
$2y=-4$	②×4　$20x+8y=64$（－
$y=-2$……③	$27y=81$
将③式代入①式，得：	$y=3$……③
$4x=7(-2)+2=-12$	将③式代入②式，得：
$x=-3$	$5x+2\times3=16$
	$x=2$
$\therefore(x,y)=(-3,-2)$	$\therefore(x,y)=(2,3)$

如果没有特别指定解方程的方法，用代入法或加减法都可以。根据给出的方程组判断用什么方法解更简单，这就需要开动脑筋。

问　题

解　$x+2y+21=6x-y=4x+6y+20$

解：由题给出的方程式，列二元一次方程组。

$$\begin{cases}x+2y+21=6x-y\cdots\cdots①\\4x+6y+20=6x-y\cdots\cdots②\end{cases}$$

先整理①，②式：

整理①式得：$-5x+3y=-21$……①′

整理②式得：$-2x+7y=-20$……②′

方程式号由①写成①′，②写成②′，表示①和①′是完全相同的式子。

①′×2得　$-10x+6y=-42$

②′×5得　$-10x+35y=-100$（－

$-29y=58$

$y=-2$……③

把③式代入②′式，得：

$$-2x+7(-2)=-20,\ x=3$$

$$\therefore (x, y)=(3, -2)$$

与不等式的解法一节中的要求一样，解方程组的目的，重要的是能合理地、简明地解出方程。

通过正确地表达演算过程中方程的变形，可以检查是否能以合理、简单的方法完成解。因此，重要的是平时就要注意按顺序写出解题过程的步骤，不得省略。

不可以在式子上只写出计算的结果，还要写出方程的变形，实际上这样做还是加快了计算的速度，可以减少由于粗心而引起的计算上的错误。

每逢查阅考卷时，发现由于疏忽造成的差错总是如此之多，令人吃惊！

（4）一次函数

一次函数是一年级学习内容（7）函数部分的继续。与函数有关的内容，到了三年级甚至高中以后也还要学习。

一次函数　$x \xrightarrow{\text{扩大2倍加5}} y\ (y=2x+5)$，像这样，$x$的函数$y$是一次函数。

一般地把函数$y=ax+b$叫做一次函数，这里a、b都是常数，并且$a\neq 0$。$ax+b$是一次式。$b=0$时　$y=ax$，y与x成正比，所以正比例函数是一次函数的特殊情形。

到了三年级，开始学习二次函数。

“在深1m的圆柱形水池中，蓄有距底15cm深的水。若用水泵向池内泵水，平均每分钟可泵入5cm深的水，设泵水x分钟后水距底面的高度为$y$cm，则y可用x式表示”。在考虑几分钟后的水面高度时，应当看到，这个高度只有一个而不是好几个。于是可以写出y和x的函数关系。这是依题

意列函数的一个例子。

开始泵入水x分钟后，水面比原来的高度15cm仅高出$5x$cm。

所以整个水面的高度为$y=5x+15$。y是x的函数，因为x的次数是1，所以y是一次函数。

$$y=f(x)=5x+15$$

$5x$叫做与x成正比的部分，15叫做常数部分。x的变域是到池子充满水为止：

$(100-15)\div 5=17$　所以$\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 17\}$

y的变域　$\{y \mid 15\leqslant y\leqslant 100\}$

$f(5)$表示当$x=5$时的函数值，即泵水5分钟后水池水面的高度。

$$f(5)=5\times 5+15=40(\text{cm})$$

另外　$f(10)=5\times 10\times 15=65(\text{cm})$

定义域、值域　x的变域叫做定义域，y的变域叫做值域。

顶点数为x的多边形的内角和y°也是一次函数的例子。

$y=f(x)=180(x-2)=180x-360$（度）

x的变域$\{x \mid x$是大于3的整数$\}$　　定义域

y的变域$\{y \mid y$是大于180的倍数$\}$　　值域

在实际做题时，不仅要表示函数的关系，而且还要同时写上这个关系式的定义域和值域。

定义域、值域表示函数关系在什么范围内成立。

药盒上均说明该药的有效期限和药效。函数的定义域、值域与药盒上的说明相类似。忽视了定义域和值域，有时会做出无意义的函数。

如果没有写出该函数的定义域和值域，则可以认为所有

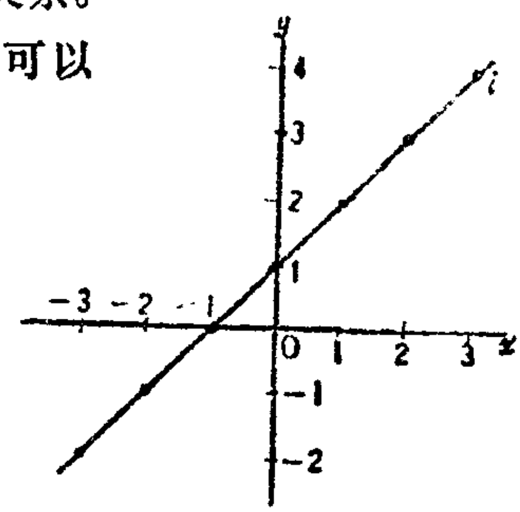
的数都在适用范围内。

一次函数的图象 为了用图象表示函数关系，先列出x和y的对应表，然后用表中的对应值为坐标，作出图象上的点。

例如，一次函数$y=x+1$，当$x=1$时，$y=1+1=2$列表如下

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……
y	……	-2	-1	0	1	2	3	4	……

直线l上的点都是表示这个函数的$x\to y$对应关系的点，直线l以外的点就没有这个对应关系。



由图象上的点组成的集合，可以表示为：

$$\{(x,y)\mid y=x+1\}$$

我们把x的系数1叫做直线l的倾斜度，把常数项1叫做y轴上的截距（与y轴的交点）。

总的来说，一次函数$y=f(x)=ax+b$的图象是一条直线。

正比例部分ax中x的系数a是直线的倾斜度；

常数项b表示y轴的截距。

$y=ax$（y与x成正比）时，因为y的截距$=0$，所以其图象是经过原点O的一条直线。可见，正比例函数是一次函数的特殊情形。

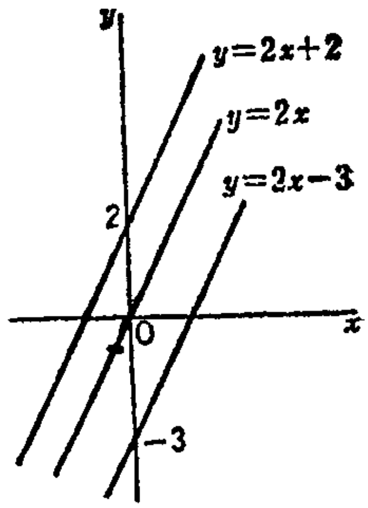
函数的变化率 y值的变化量与x值变化量的比值叫做函数的变化率。对于一次函数，正比例部分

x的系数表示变化率，所以变化率是常数。

在$y=3x+5$中，$x=1\rightarrow y=8$，$x=2\rightarrow y=11$

$$\text{变化率}=\frac{y\text{的增加量}}{x\text{的增加量}}=\frac{11-8}{2-1}=3$$

该函数的变化率等于x的系数3。



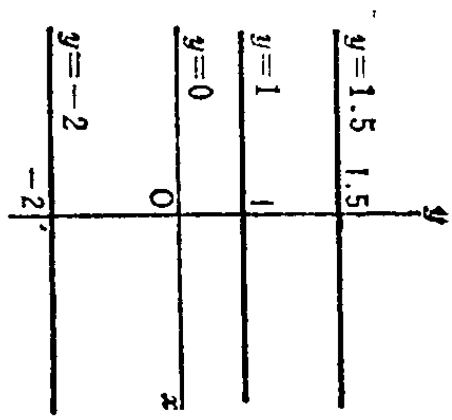
平行线图象

平行直线的倾斜度相等。x的系数相等的一次函数，是相互平行的直线。

$y=2x+3$，　　$y=2x+2$

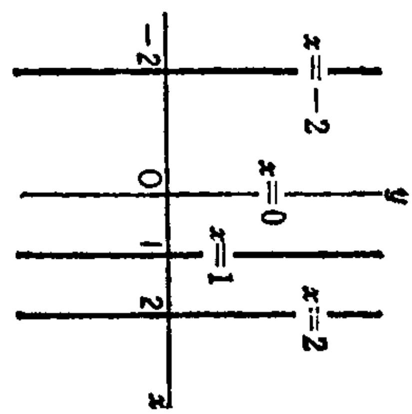
$y=2x+1$，　　$y=2x$

$y=2x-1$，……



与x轴平行的直线

与x轴平行的直线上的点其y值都相等。特别是$y=0$时，表示x轴。



与y轴平行的直线

特别是$x=0$时，表示y轴。

有定义域的一次函数

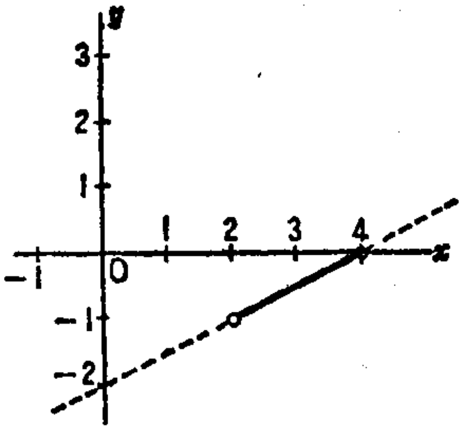
一次函数$y=\frac{1}{2}x-2\ \{x\mid 2<x<4\}$

$x=2\rightarrow y=\frac{1}{2}\times 2-2=-1$

$x=4\rightarrow y=\frac{1}{2}\times 4-2=0$

所以直线l上只有实线部分是满足给出条件的图象，实

线的两端不包括在内。



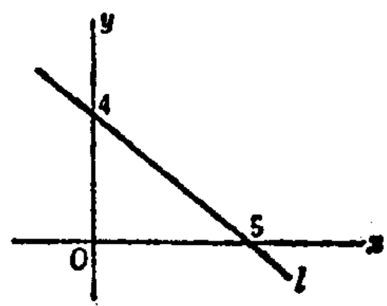
把实线和虚线部分合在一起组成的全部直线，是不受定义域限制的一次函数$y=f(x)=\frac{1}{2}x-2$的图象。

此外，这个函数的值域是$\{y \mid -1<y<0\}$。像这样给出了函数及其定义域，就可以通过计算求出值域。

由图象求函数 由图象可以求出直线l的截距y和倾斜度。直线公式是y的一次函数　$y=f(x)=ax+b$（a、b是常数）。

$a<0$时　l是向右下倾斜的直线；

$a>0$时　l是向右上倾斜的直线。



因此，右图直线l上的点组成的集合的表达式是：

$$\{(x,y) \mid y=-\frac{4}{5}+4\}$$

或简单地写成　$y=-\frac{4}{5}x+4$。

过两点的直线表达式 过两点的直线式只有一个。表示函数关系的公式也只有一个。

例如设过（2,5）、（5,8）两点的直线式为$y=ax+b$，根据所给的条件，只要求出倾斜度a和y轴的截距b就可以了。

因为　通过（2,5）点，所以　$5=2a+b$

因为　通过（5,8）点，所以　$8=5a+b$

建立满足这两个条件的方程组并求解，得$(a,b)=(1,3)$，所以所求的直线式是$y=x+3$

$ax+by=c$
直线表达式

解方程$2x+y=4$中的y，得$y=-2x+4$，表示它的图象是直线（倾斜度为-2，y轴的截距为4）。

$2x+y=4$方程的x和y的解，是直线上所有的点，因此有无数个解。

$$\begin{cases}3x-y=2\\2x-y=3\end{cases}$$

由图象解方程组，首先作出表示各个方程（二元一次方程）的图象，其交点的坐标就是所求方程组的解。

求已知方程组的解，需使未知数x和y同时满足两个方程的条件才行。

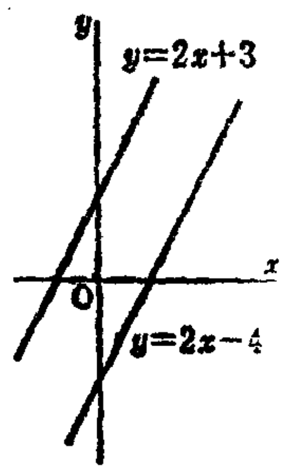
下面以集合的形式列方程组：

$$\{(x,y)\mid 3x+y=2\}\cap\{(x,y)\mid 2x-y=3\}$$

对于图象来说，满足条件的点就是两个图象的交点。求该图象交点的坐标，得$(x,y)=(1,-1)$。

无解的情况

相互平行的直线没有交点。因此图象是平行线的二元方程组没有解。



$$\begin{cases}y=2x+3\\y=2x-4\end{cases}$$

方程组表示相互平行的直线。因为x的系数都是2，倾斜度相等。像这样的方程组没有解，叫做无解。

无数解的情况

$$\begin{cases}4x+10y=2\\2x+5y=1\end{cases}$$

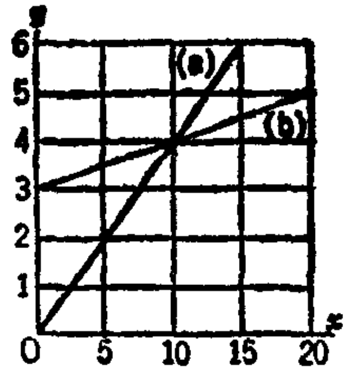
这个方程组表示两个方程是相同的。因为用2除上面的方程便得到下面的方程（用相同的数除等式的两边，等式不变）。

虽然给的是两个方程，实际上是一个方程，所以它的解

不止一个，是无数个。这样的解叫不定解。

问 题

两个水池A、B，设同时加水x秒钟后水池的水量为y升。右图中的（a）、（b）直线分别表示A、B水池x与y的函数关系。加水的速度都一定。



看图后在下面的$\boxed{}$空格内填上正确的数字或公式：

（1）开始加水时水池B已存蓄$\boxed{}$升的水。

（2）开始加入水$\boxed{}$秒钟后，A、B两个水池的水量相等，此时，A水池的水量为$\boxed{}$升。

（3）图象（b）所表示的函数$y=\boxed{}$。

解：（1）直线（b）与y轴的交点是$x=0$时水池B的水量，由图示可知为3升。

（2）读出直线（a）和直线（b）交点的坐标

x坐标＝开始加水后的时间（秒）；

y坐标＝相等时的水量（升）；

10秒钟后两个水池的水量相等，为4升。

（3）$y=ax+b$

a是直线的倾斜度

b是y的截距

所以$y=\frac{1}{10}x+3$

（5）角和平行线、多边形

三 角 形　三条直线互交所包围的平面图形叫三角形。这就是三角形的定义。

现将小学里学过的三角形进行分类整理如下。

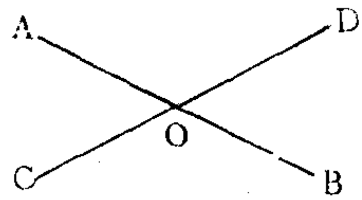
按角分类、按边分类 锐角三角形、直角三角形、钝角三角形、一般三角形（不等边三角形）、等腰三角形、等边三角形，此外还有等腰直角三角形。

如果把知识一个个割裂开，就不可能积累和发展知识并有新的理解。只有通过各种各样的方式进行分类、整理，知识才有发展的可能。

课本中的分类方法并不是唯一的方法。应当养成习惯，根据自己学习的需要，考虑分类整理的方法，这是提高对数学兴趣的最好方法。

随时随地进行分类整理、加深理解，对以后的学习很有必要。这不只限于数学，对理科、社科等其他学科的学习，也是极为重要的学习方法。

对顶角 两条直线相交形成四个角，$\angle AOC$、$\angle COB$、$\angle BOD$、$\angle AOD$。



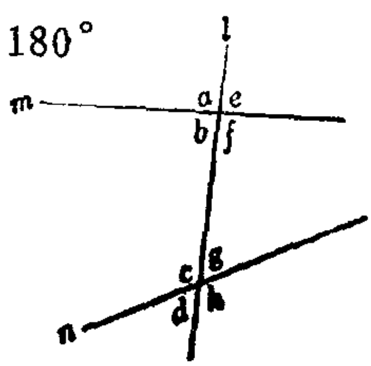
$\angle AOC+\angle COB=180°$

$\angle AOC=\angle BOD$（对顶角）

（对顶角相等）

$\because$（因为）$\begin{cases}\angle AOC+\angle COB=180° \\ \angle BOD+\angle COB=180°\end{cases}$

$\therefore$（所以）$\angle AOC=\angle BOD$



同位角、内错角 如右图所示，三条直线l、m、n相交形成$a\sim h$ 8个角，其中

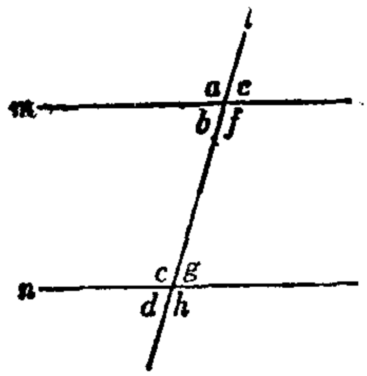
（1）a和c、b和d、e和g、f和h是同位角；

（2）b和g、c和f是内错角；

（a和h不叫内错角）

（3）b和c、f和g是同旁内角；

必须注意各个角间的相互位置。



如果m和n平行（$m \parallel n$），那么

①同位角相等，$a=c$，$b=d$；

②内错角相等，$b=g$，$f=c$；

③同旁内角的和等于$2\angle R$：

$b+c=2\angle R$，$f+g=2\angle R$

因此，根据①～③中的任一项，可以判断直线m和n是否平行。

一般地说，平行线的定义如下：

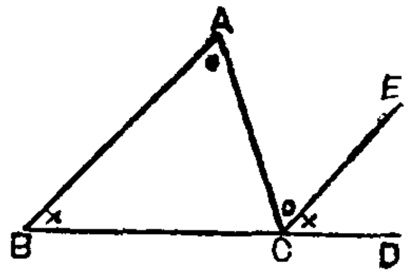
向左右两边延长永远不相交的直线叫做平行线（在同一平面内）。

但是，在实际做题中，要证明两条平行直线无论延长到哪里都不会相交是不可能的。

因此，我们通过证明①～③中的任一项来代替证明直线不相交，从而判定直线平行。这种“以……代替……”的思考方法，是学习几何的基本思考方法，必须牢牢记住。

三角形的内角定理

在△ABC中，$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$（三角形的内角和等于两个直角）。



延长右图中△ABC的BC边，并在延长线上取一点D，过C点作BA的平行线CE，

因为BA∥CE，所以$\begin{cases}\angle B=\angle ECD\text{（同位角）}\\ \angle A=\angle ACE\text{（内错角）}\end{cases}$

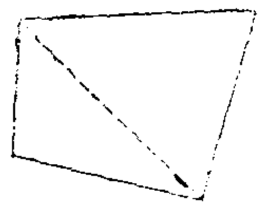
$$\therefore \angle A+\angle B+\angle C=\angle ACE+\angle ECD+\angle ACB$$
$$=\angle BCD=2\angle R$$

因此得出三角形的内角和等于2个直角。从这个性质，可以理解下面的另一个性质，即三角形的外角等于和它不相邻的两个内角的和：

$$\angle ACD=\angle A+\angle B$$

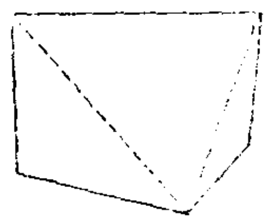
我们从平行线性质中的同位角、内错角的关系，发现了三角形的内角定理，进而可以求出下面的多边形的内角和。通过对知识的总结，可能发现新的图形的性质。可见，只单纯地记住知识是远远不够的。

多边形的内角和



作多边形的对角线，把它分成几个三角形。

四边形可以分成两个三角形，所以它的内角和是 $2\angle R\times 2=4\angle R$。



五边形可以分成三个三角形，所以它的内角和是 $2\angle R\times 3=6\angle R$。

对角线是从一个顶点引出的。因为这个顶点不能向相邻的顶点引线，所以从一个顶点引出的对角线条数比顶点总数少3个。因此，从 n 边形的一个顶点可以引出 $(n-3)$ 条对角线。$(n-3)$ 条对角线把 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形。

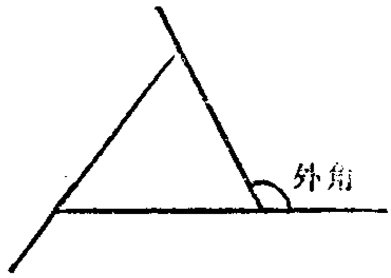
n边形	3	4	5	6	7	8	……	n
从一个顶点引出的对角线条数	0	1	2	3	4	5	……	$n-3$
可分成三角形数	1	2	3	4	5	6	……	$n-2$
内角和	$2\angle R$	$4\angle R$	$6\angle R$	$8\angle R$	$10\angle R$	$12\angle R$		$2(n-2)\angle R$

n 边形的内角和等于 $2\angle R\times(n-2)$。

由上表所见，表中的数字是按自然数排列的，这个规律令人出乎意料。

多边形的外角和

如右图所示，把三角形的边沿一个方向延长，在三角形外侧形成的角，这个角叫外角。



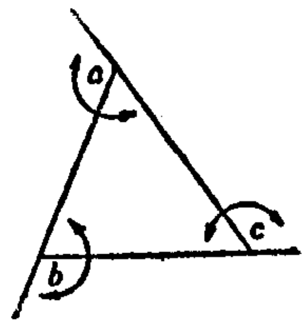
三角形有三个外角，这三个外角的和等于$4\angle R$，即360°

四边形有四个外角；

五边形有五个外角；

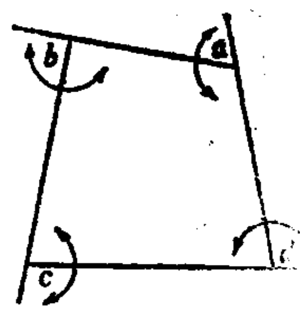
六边形有六个外角；

……



这样依次类推，可以得到正确的答案。但是，对于下面的性质，只靠类推是不行的：

多边形的外角和等于$4\angle R$。



在右图中，三角形上箭头所指的$2\angle R$部分共有三处，$2\angle R\times3=6R$，其中还包括三角形的内角和$2\angle R$，因此所求的外角和是：

$$6\angle R-2\angle R=4\angle R$$

对于四边形，箭头所指的$2\angle R$部分共有四处，$2\angle R\times4=8\angle R$，减去内角和得：

$$8\angle R-4\angle R=4\angle R$$

$$\therefore a+b+c+d=4\angle R$$

同三角形一样，四边形的外角和也是$4\angle R$。

因此，n边形的$2\angle R$部分共有n个，$2\angle R\times n$，内角和是$2\angle R\times(n-2)$

$$\therefore 2\angle R\times n-2\angle R\times(n-2)$$

$=2\angle R\times n-2\angle R\times n+2\angle R\times 2$

$=4\angle R$

下面我们来求正九边形一个内角的大小。

①首先用9等分正九边形的内角和的方法求，即：

$2\angle R\times(9-2)\div 9=2\times 90\times 7\div 9=140°$

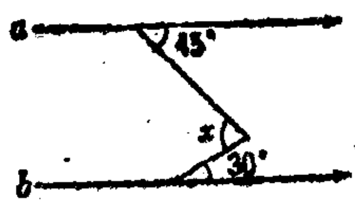
②利用外角和等于$4\angle R$这个性质求，即：

$2\angle R-4\angle R\div 9=180-360\div 9=140°$

可见，解题的方法不止一个。一般复杂的题有几种解法。而且，做题不只是为了求得答案，还要寻求其他的解题方法。这是提高数学学力的最好途径。

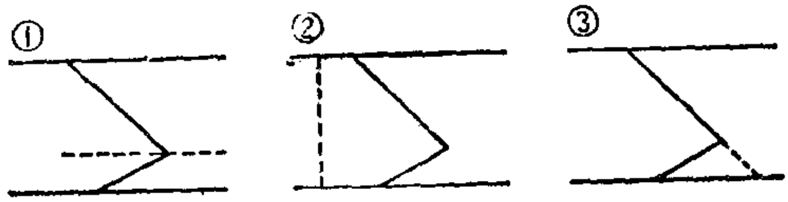
问 题

右图中的$a\parallel b$，求x的大小。用三种方法求x值。



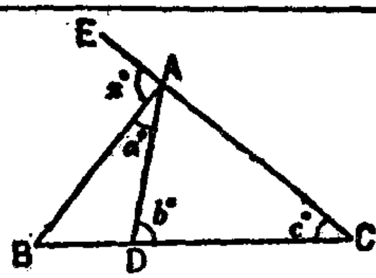
解：解题不能只是对照答案会做就行了，而应试着用不同的方法来解，这样，你对数学的兴趣就会油然而生。

如下图的①～③所示，先试作虚线。为了解题而引的虚线叫做辅助线。除上面的几种方法外，希望再考虑其他恰当的方法。解数学题恰似解迷之类。



问 题

在右图中，E点在CA的延长线上，设$\angle BAE=x°$，$\angle BAD=a°$，$\angle ADC=b°$，$\angle ACD=c°$，用a、b、c表示x。



解：利用"三角形的外角等于和它不相邻的两个内角的和"的性质：

在△ADC中，外角$\angle EAD=b+c$

$$即\quad x+a=b+c$$

$$\therefore x=b+c-a$$

（6）全等图形、全等三角形

全等的含义 为了证明平面图形全等，需把图形重叠放在一起。

如果重叠后正好重合，可以证明两个图形全等。

我们把形状和大小完全相同的图形叫做全等形。

三角形全等的条件 在实际当中并不把图形重叠放在一起证明全等，而是根据某些条件来判断，这个条件叫做全等条件。另外，在实际问题中，即使要把图形重叠放，有时简直不可能，所以想出全等条件，不仅使考虑方法简单，而且有实现的可能性。从获得新的知识的角度来看也很重要。

对于多边形的角，用对角线把多边形分成几个三角形后再考虑。多边形是由若干个三角形组合而成，所以思考多边形性质的基础是根据三角形的性质而来。复杂的图形也以简单的三角形的性质为基础考虑，就能开扩思路。

如果满足下面①～③中的任一条时，即可判定三角形全等。

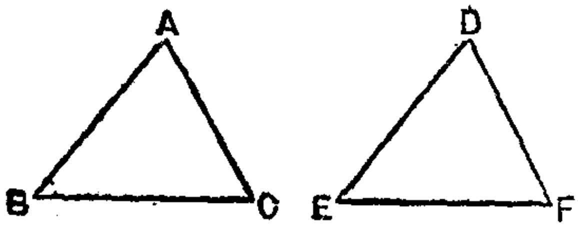
三角形全等条件：

①三边分别相等；

②两边及其夹角分别相等；

③两角及其夹边分别相等。

在战前的中学里，把有关图形的学习内容叫做几何。在几何里，三角形的全等条件是学习的第一步。从基本的部分开始逐渐深入学习复杂内容的过程中，离不开三角形的全等条件。下面用符号和公式表示右图三角形的全等条件。



符号和公式使用起来既简单又易懂，便于理解，是很好的表达手段。

在△ABC和△DEF中：

（1）AB＝DE，BC＝EF，AC＝DF（三边相等）；

（2）AB＝DE，∠B＝∠E，BC＝EF（两边夹角相等）；

（3）∠B＝∠E，BC＝EF，∠C＝∠F（两角夹边相等）。

两个三角形，实际上虽未使其重叠放在一起，但可视为是重叠的。“以……代替……”的一个例子，是“以全等条件，代替证明重合”。

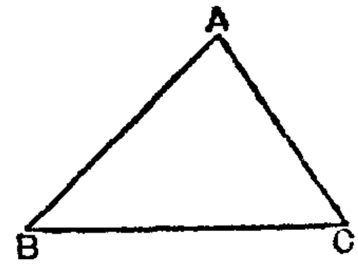
如果可以证明满足①～③中的任一条，那么就写成△ABC≡△DEF，其中“≡”符号表示图形全等。

把△ABC和△DEF重叠时，使A、B、C分别落在D、E、F上，这两个图形就会重合。A→D，B→E，C→F叫做对应点，所以ABC、DEF的顺序不能改变，△ABC和△EFD不重合。

△ABC＝△DEF，表示三角形的面积（大小）相等但形状不同。

等腰三角形的性质 两边长度相等的三角形叫等腰三角形。普通的三角形，三边的长度都不相等。

三角形的两边若相等，就产生三边不相等的普通三角形所没有的性质。



首先说明一般三角形共同的性质：

①内角和等于两个直角

$$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$$

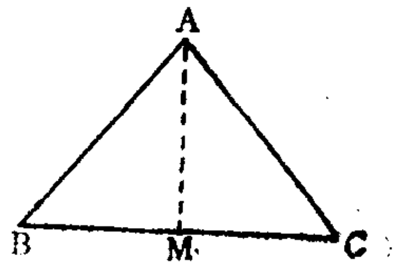
（内角定理）

②两边的和大于第三边

$$AB+AC>BC$$

③两边的差小于第三边

$$AB-AC<BC$$



等腰三角形 在△ABC中，AB＝AC，连接A和BC的中点M。

把△ABC对折，折痕是AM，AB就和AC重合，所以△ABM≡△ACM。

可以认为，等腰三角形是关于AM的对称图形。

从关于顶点到底边中点连线的对称图形性质中，可以证明如下的性质：

①$\angle B=\angle C$（底角相等）；

②$\angle BAM=\angle CAM$；

顶角A的顶点和底边中点的连线平分顶角。

③$AM\perp BC$，$BM=CM$

顶角的平分线平分底边并垂直于底边。

正三角形 在△ABC中，AB＝BC＝AC时，△ABC就叫做正三角形。正三角形是等腰三角形的特殊情形。

因此，正三角形可以重新引出下面的性质：$\angle A=\angle B$

$=\angle C$，所有的角都相等，都等于60°。

把三个角加起来，即$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$，由此知道，每个角的大小都是60°。

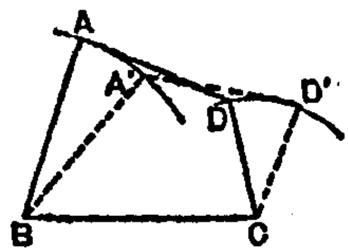
用图形表示普通三角形、等腰三角形、正三角形它们之间的相互关系时，就成了右图那样；另外，如以集合的包含关系式表示时，则是下面的式子：正三角形⊂等腰三角形⊂一般三角形。

对照条件，分类整理新增加的有关性质，对深入理解是很有必要的。

四边形的全等条件

三角形只要边长不变，它的形状就不会改变。我们知道，四边形即使每个边长都相等，它还是可以变成各种各样的形状。

因此，四边形不像三角形那样有特别的全等条件。

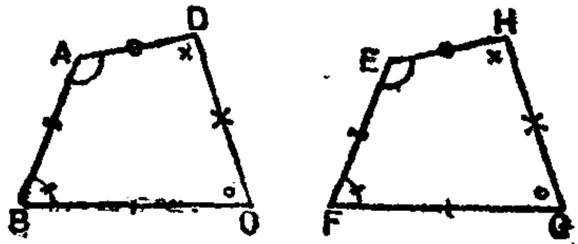


需利用对角线把四边形分成两个三角形，然后再考虑每一个三角形的全等条件。

或者回到开始的重叠方法，但必须考虑可能重叠的条件。

五边形、六边形……也同样，即使各个角都相等的五边形，也不能认为是正五边形。

右图中，四边形ABCD≡四边形EFGH，则$AB=EF$，$BC=FG$，……$\angle A=\angle E$，$\angle B=\angle F$……对应的部分都相等。



（7）命题、定理、证明

在图形学习方面，说明为什么可以说这样的性质是真实的，比记住图形的性质本身还要重要。特别是，几何学习的叙述方法具有一定的形式，最重要的是要熟悉这种叙述形式。

命　题　判断正确或不正确的句子叫做命题。可以把命题写成“如果A…，那么B…”文章的形式。如果用对应的关系表示，可以写成“A→B”的形式。

A是题设部分，B是结论部分。

所谓证明，就是以题设A为出发点，有条有理、有根据地推导出结论B。

有条有理、有根据的推导所利用的基础知识，就是以往学过的基本性质。

图形的基本性质　在利用图形性质时，要事先列出没有必要特别说明或证明的基本性质。以后的图形性质的证明，需利用这些基本性质：

①对顶角相等；

②平行线和角的关系：

（a）平行线被另外一条线所截，同位角、内错角相等；

同侧内角的和等于两个直角；

（b）同位角、内错角相等，或同侧内角的和等于两个直角时，则直线平行；

③平行于同一直线的直线相互平行；

④三角形的内角和等于两个直角；

三角形的外角等于和它不相邻的两个内角之和；

⑤三角形全等的条件：

（a）三边分别相等；

（b）两边及其夹角分别相等；

（c）两角及其夹边分别相等。

定　理

我们把在证明其他性质时常用的图形性质作为定理记住。不同的课本，作为定理而列出的图形性质多少有些差别，而且学习的先后顺序也有所不同。

一般地说，不论什么教材，开始列举的定理均有下面几个：

（1）等腰三角形的底角相等；

（2）正三角形的三个角相等；

（3）等腰三角形的顶角平分线垂直并平分底边。

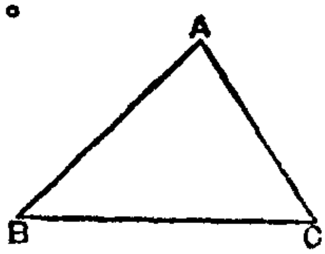
逆 定 理

定理是命题。因为它属于“如果A，那么B”这种内容形式的句子。

现在，把题设A和结论B调换，变成“如果B，那么A”形式的命题，这种命题叫做原命题的逆命题。

用具体的符号表示定理时，就能进一步明了这种相反关系。

（定理）“等腰三角形的底角相等”。



在△ABC中　　　　在△ABC中

（题设）AB＝AC→（题设）∠B＝∠C

（结论）∠B＝∠C　（结论）AB＝AC

所以逆定理是：

“两个角相等的三角形是等腰三角形”。

逆定理不一定正确

再举一个逆定理的例子。

“正方形的四个角相等”。

在四边形ABCD中
(题设)正方形ABCD
(结论)$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$

在四边形ABCD中
(题设)$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$
(结论)ABCD是正方形

可见，原来的定理是正确的，而它的逆定理是错误的。

因为$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$的四边形不仅是正方形，长方形的四个角也相等。

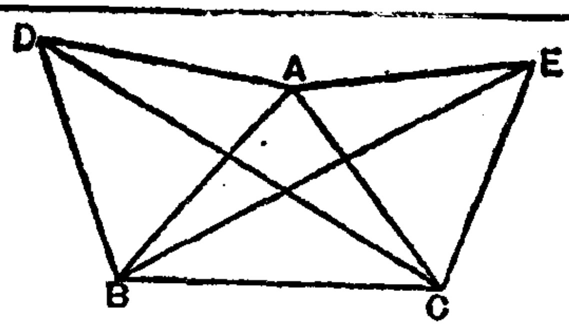
因此，逆定理有时是正确的，有时是不正确的。不能因原来的定理是正确的而推断它的逆定理也是正确的。经过证明是正确的以后，才能判断是正确的。

证　明　从题设出发，按正确的步骤，阐述理由、推导出结论的过程叫证明。

证明需要表明认为正确的理由，因而一定要写下判断的依据。

——问　题——

在△ABC中，分别以AB和AC为一边向△ABC的外侧作正三角形DAB和EAC，求证BE=CD。



解：

(题设)△ABC
正三角形DAB、EAC

(结论)BE=CD

(之所以就这样地使用符号和式子写出题设和结论，是为了明确所证明的出发点和整理已知的条件)

(证明的方法)

根据图求以BE和CD为对应边的全等三角形。

(证明)

在△ABE和△ADC中，

AB=AD(正三角形DAB的

如果图画得正确，求证并不难。为此，必须正确作图

边）

AC＝AE（正三角形EAC的边）

∠DAC＝∠BAE（∠BAC＋60°）

两边及其夹角分别相等

（三角形全等条件②）

∴△ABE≡△ADC

因此

BE＝DC（对应边）

所谓全等，就是证实了图形重合，所以必须注意对应点的顺序。

△ABE和△ACD不重合，必须写成△ADC才行。

直角三角形的全等条件

除了一般三角形的全等条件以外，还有直角三角形的全等条件：

①斜边和一个锐角分别相等的两个直角三角形全等；

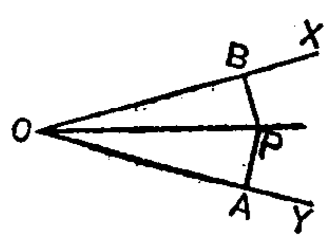
②斜边和另外一边分别相等的两个直角三角形全等。

（不论什么课本，都有这方面的证明，弄清它们的证明步骤，对加深理解很有必要。）

在课本里所做的证明，都是最基本的和特别重要的证明，所以不仅要理解，而且要熟读到几乎能背诵的程度。

（8）三角形的内心和外心

角的平分线



定理 “在角的平分线上的点，到这个角的两边的距离相等”。（题设）P是∠XOY平

分线上的点，$PA\perp OY$，$PB\perp OX$。

（结论）$PA=PB$

（证明的方法）

从图中求出以PA和PB为对应边的全等三角形。

这个定理相应于在“中学一年级数学的学习要点”中学过的“角的平分线”（28页）

（证明）

在$\triangle OPA$和$\triangle OPB$中，

$\angle POA=\angle POB$（题设）

$OP=OP$（公共边）

$\angle PAO=\angle PBO=\angle R$（题设）

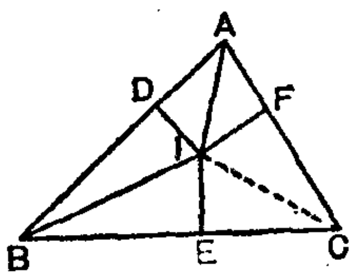
因为是斜边和一个锐角相等的直角三角形

$\therefore \triangle OPA\equiv\triangle OPB$

$\therefore PA=PB$（对应边）

三角形的内心

（定理）“三角形三个内角的平分线相交于一点（内心），这一点到各边的距离相等”。



（题设）在$\triangle ABC$中，I是$\angle A$、$\angle B$平分线上的交点。

（结论）CI是$\angle C$的平分线。

$$ID=IE=IF$$

因为AI、BI分别是$\angle A$、$\angle B$的平分线，根据上面的定理，$ID=IE=IF$。

连接IC，在$\triangle CIE$和$\triangle CIF$中：

$IE=IF$

CI是公共边

$\angle IEC=\angle IFC=\angle R$

（直角三角形的全等条件①）

$$\therefore \triangle CIE\equiv\triangle CIF$$

$$\therefore \angle ICE=\angle ICF$$

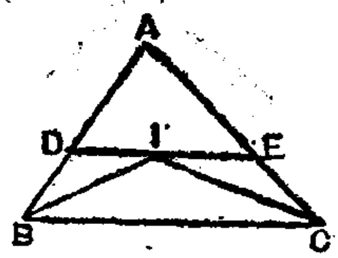
因此，CI是$\angle C$的平分线。

以I为圆心，ID为半径作圆，可以得到和$\triangle ABC$的三个

边相切的圆。这个圆叫做内切圆，I叫做△ABC的内心。

关于三角形内心的问题

"通过△ABC的内心I并平行于BC的直线，与AB、AC分别相交于D、E点，则DE＝BD＋CE。"



（题设）I是△ABC的内心，BC∥DIE

（结论）DE＝BD＋CE

（证明）$\begin{cases}\angle DBI=\angle CBI\text{（BI是}\angle B\text{的平分线）}\\ \angle CBI=\angle DIB\text{（DE}\parallel\text{BC，内错角相等）}\end{cases}$

$\therefore \angle DBI=\angle DIB$

因为在△DBI中两个角相等，所以DI＝DB……（1）

同样，在△ECI中，∠EIC＝∠ECI

$\therefore$EI＝EC……………………………（2）

由（1）式和（2）式得：DI＋EI＝DB＋EC

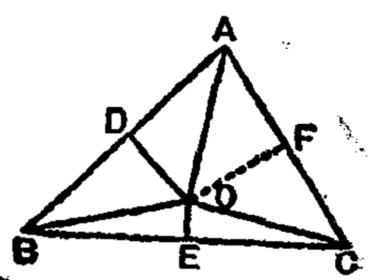
$\therefore$DE＝BD＋CE

三角形的外心

（定理） "三角形三条边的垂直平分线相交于一点（外心），这一点到三个顶点的距离相等"。

首先，设AB、BC边的垂直平分线相交于O点，在△OAB中，因为O是AB垂直平分线上的点，所以OA＝OB……………………………（1）

（等腰三角形的性质，基本性质）



在△OBC中，同理

OB＝OC………（2）

其次，在△OAC中，由（1）和（2）得OB＝OC，从顶角的顶点向底边AC作的垂线平分底边：

$\therefore AF=CF$ ……………………………………（3）

由（1）、（2）、（3）得出：

△ABC三条边的垂直平分线相交于一点O，从O点到A、B、C三个顶点的距离相等。

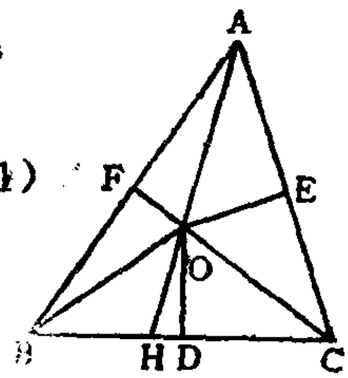
以O为圆心，OA为半径作圆，可以得到△ABC的外接圆，O叫做△ABC的外心。

问　题

在下面的$\boxed{}$空格内填入适当的文字。设O为△ABC的外心，$2\angle A=\angle BOC$

（**证明**）因为O是△ABC的外心，所以

$$OA=OB$$



因而$\angle OAB=\angle$① $\boxed{}$ …（1）

若延长AO与BC相交于H

则由（1）得

$2\angle OAB=\angle$② $\boxed{}$ ……（2）

因为O是△ABC的外心，所以$OA=OC$

因而$\angle OAC=\angle$③ $\boxed{}$ ……（3）

由（3）得

$2\angle OAC=\angle$④ $\boxed{}$ ……（4）

由（2），（4）得

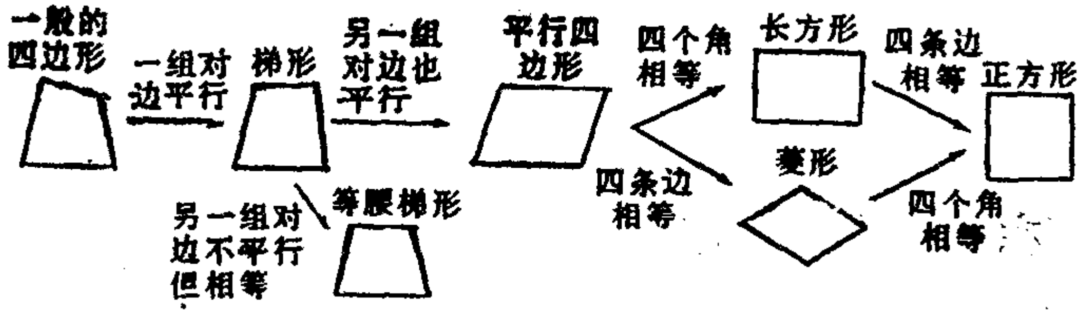
$2(\angle OAB+\angle OAC)=\angle$⑤ $\boxed{}+\angle$⑥ $\boxed{}$

因而　$2\angle A=\angle BOC$

解：①OBA　②BOH　③OCA　④COH　⑤BOH　⑥COH

（9）四　边　形

四边形的种类 一般的四边形加上特定的条件后，逐渐形成为规整的四边形。



平行四边形的性质 平行四边形是什么样的四边形，下面的①是平行四边形的定义。定义没有必要证明。②—④由定义①可以证明。

①两组对边分别平行；

②两组对边分别相等；

③两组对角分别相等；

④对角线互相平分。

平行四边形的判定条件 根据什么性质来判定是否是平行四边形呢？只要符合①～④中的任一条，即可判断是平行四边形。

①两组对边分别相等；

②两组对角分别相等；

③对角线互相平分；

④一组对边平行而且相等。

平行四边形的性质和判定条件互为定理和逆定理的关系。

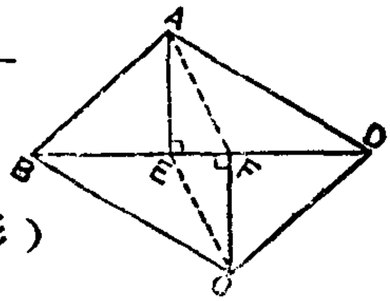
平行四边形的证明 “从平行四边形ABCD的顶点A、C作对角线的垂直线AE和CF，则四边

形AECF是平行四边形”。

（题设）ABCD是平行四边形

AE⊥BD　CF⊥BD

（结论）四边形AECF是平行四边形



（证明）△ABE≌△CDF

（斜边和一锐角相等的直角三角形）

∴AE＝CF………（1）

另外　AE∥CF（内错角相等）………（2）

由（1）、（2）式可知，由于一组对边平行并且长度相等，所以四边形AECF是平行四边形。

矩形的性质　矩形除了具有平行四边形的性质①～④外，还有以下⑤、⑥两个性质。

⑤有一个角是直角；

⑥对角线的长度相等。

菱形的性质　菱形除了平行四边形①～④的性质外，还有以下⑦～⑧的性质。

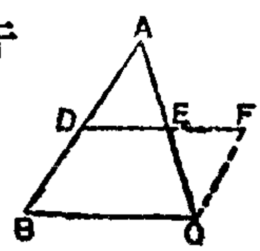
⑦四条边的长度相等；

⑧对角线互相垂直。

正方形的性质　矩形、菱形的特殊情形是正方形，因此它具有①～⑦的性质。每增加新的条件，就会出现特殊的性质。如果以集合的形式表示，即是：

｛矩形的集合｝⋂｛菱形的集合｝＝｛正方形的集合｝

中位线定理　“三角形两边中点的连接线平行于第三边，并且等于它的一半”。



（题设）△ABC中

AD＝DB，AE＝EC

（结论）DE∥BC，$DE=\frac{1}{2}BC$

（证明）延长DE至F，使DE＝EF，连接FC

$\triangle ADE \cong \triangle CFE$

∵ AE＝CE（题设）
DE＝FE
∠AED＝∠CEF（对顶角）
两边及其夹角相等

∴AD＝CF……（1）

∠ADE＝∠CFE……（2）

在四边形DBCF中，

由（1）得　AD＝DB＝FC

由（2）得　DB∥FC（内错角相等）

因为一组对边平行并且长度相等，四边形DBCF是平行四边形。

∴DF∥BC，DF＝BC＝2DE

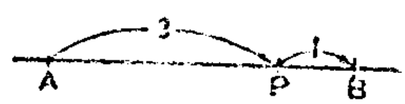
因此　DE∥BC，$DE=\frac{1}{2}BC$

辅助线　以上的证明是以“延长DF…连接FC”开始的，像这样为了证明的需要而增加的连接线，叫做辅助线。

证明之所以难，是因为不知道怎样引辅助线。在中学课本里的证明，大都给出了做辅助线的方法，这部分很重要，应当记住。要求通过自己的思考做辅助线的情况几乎没有。

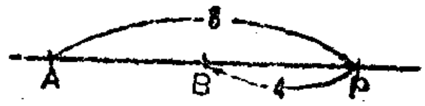
（10）　平行线和比例、相似形

内　分　在右图中，AP∶PB＝3∶1，P点把线段AB内分成3∶1。



外　分　在右图中，AP∶PB＝8∶4＝2∶1

P点把线段AB外分成2∶1。



内分点在AB线段上。

外分点在AB线段的延长线上。

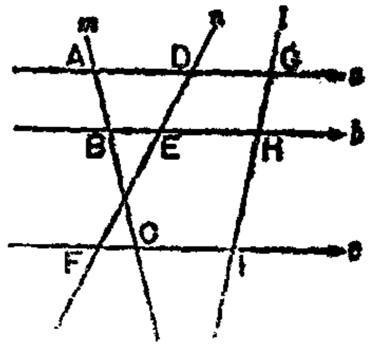
P点是把AB线段内分成2:1的点；

Q点是把AB线段外分成7:1的点；

R点是把AB线段外分成3∶9＝1∶3的点。

（必须以最简单的整数比表示比例线段）

平行线分直线成等比例　在右图中，$a \parallel b \parallel c$。设平行线$a$、$b$、$c$分别截直线$m$、$n$、$l$于点A～I，则：



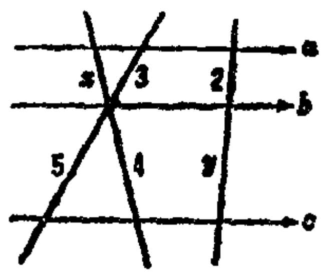
AB∶DE∶GH＝BC∶EF∶HI

（对应部分的比相等）

因此　$x:3:2=4:5:y$

$\therefore x:3=4:5 \to x=\dfrac{12}{5}$

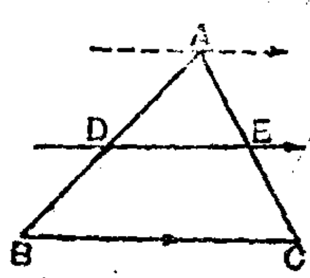
$3:2=5:y \to y=\dfrac{10}{3}$



（从对应部分的比可以求出未知部分的长度）

"平行于三角形一边的直线，分其他两边成等比。"

若过点A作平行于BC的辅助线（虚线），这样就和平行线与两条直线AB、AC相交的情形是一样的。在△ABC中，DE∥BC，所以AD∶DB＝AE∶EC。



相似形 图形相等包括①形状相同；②面积（大小）相等两个含义。

①和②都满足时，我们说两个图形全等；只满足①，两个图形相似；只满足②，两个图形面积相等。

用符号表示三角形的关系：

满足①、②全等时：$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

只满足①相似时：$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

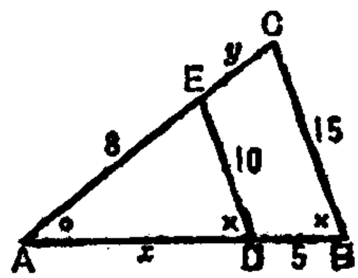
只满足②面积相等时：$\triangle ABC = \triangle DEF$

三角形的相似条件 把三角形相似条件和三角形全等条件对比学习好掌握。不能将全等条件和相似条件混同起来。

下面的相似条件③不仅简单，而且应用的场合也多。

全等条件	相似条件
①三边分别相等；	①三边的比分别相等；
②两边及其夹角分别相等；	②两边的比及其夹角分别相等；
③两角及其夹边分别相等	③两角分别相等。

如同确定符合全等条件后可判定图形全等那样，由已知的条件和图形的性质确定符合相似条件后，则可判定三角形相似。



证明相似后，就能够求出对应部分的长度。

右图中，BC∥DE时，

$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$

∵（因为）｜$\angle A$是公共角，$\angle B = \angle ADE$（平行线，内错角）

两角分别相等

因为对应边的比相等，所以：

$AB:AD=BC:DE=AC:AE$

$x+5:x=15:10=8+y:8$

$\therefore x+5:x=15:10 \rightarrow x=10$

$15:10=8+y:8 \rightarrow y=4$

中位线定理的另一个证明方法

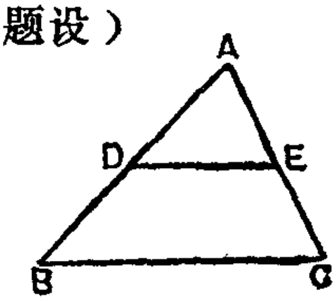
（题设）在$\triangle ABC$中：

$AD=DB$，$AE=EC$

（结论）$DE \parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$

（证明）在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中：

$$\begin{cases} AB:AD=AC:AE=2:1\text{（题设）} \\ \angle A\text{是公共角} \end{cases}$$



由于两边的比及其夹角分别相等，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$

$\therefore \angle ABC=\angle ADE$（对应角）

→因为DE和BC的同位角相等，所以$DE \parallel BC$。另外，$BC:DE=AB:AD=2:1$（对应边的比）

$\rightarrow 2DE=BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$

这里中位线定理的证明方法比前面76页上的证明方法简单得多，而且也容易理解。在解数学题和考虑证明方法时，要培养积极思考寻求更简单方法的习惯。这可以说是提高学力的好方法。

三角形的重心

定理　“三角形的三条中线相交于一点（重心），这点分别把三条中线内分成2∶1。”

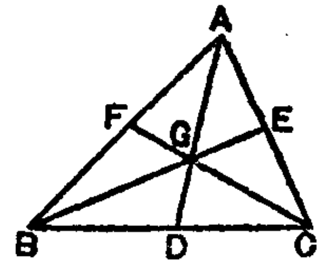
（中线是三角形的顶点和对边中点的连线）

（题设）在$\triangle ABC$中：

$BD=DC$，$CE=EA$，$AF=FB$

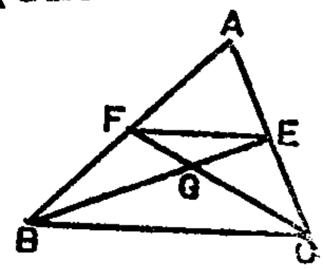
（结论）AD，BE，CF相交于一点G，

$AG:GD=BG:GE=CG:GF=2:1$



（证明）如图2，连接E和F，$\triangle GBC\backsim\triangle GEF$

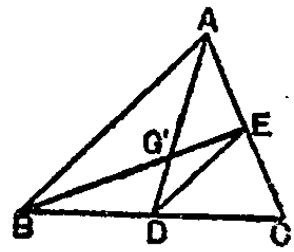
（根据中位线定理，$FE\parallel BC$，内错角相等，所以两个角相等。）



$\therefore BC:EF=GB:GE=GC:GF=2:1$

G点是把中线BE、CF内分成2：1的点。

在右图中，设中线AD和BE相交于G′点。同理，



$\triangle G'AB\backsim\triangle G'DE$

$\therefore AB:DE=G'A:G'D=G'B:G'E=2:1$

（G和G′是把同一中线BE内分成相同的比的点，所以G和G′是一个点。）

因此G和G′是同一个点。

（11）资料的整理

本单元的学习，如果对术语的意义不清楚，就很难学下去。所以必须认真阅读课本，习惯于使用术语，这点很重要。

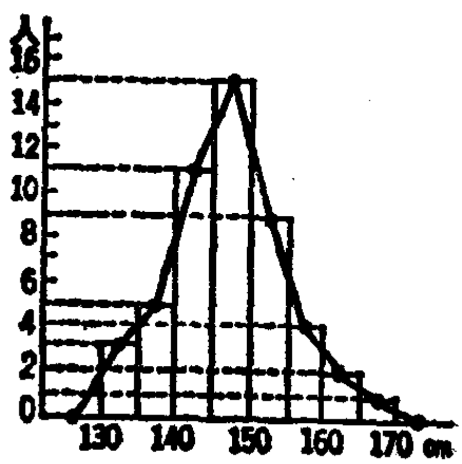
资料 所谓统计资料，是指可以数值化和分类的资料。对于资料数据较少的情况，不怎么需要整理，根据这些数据即可概略地推测总体；但对于数据繁多的情况，则必须对数据进行分类整理。

务必正确地理解频数分布表、组区间、频数、直方图、频数折线等这些术语的具体含义。

频数分布表、直方图 如下表所示，包含组区间及其频数的表叫频数分布表。表示频数分布状态的矩形图叫做直方图（下图）。

（身长）组区间（cm）	频数（人）	累积频数	相对频数
以上 不足 130.0～135.0		3	0.06
135.0～140.0	5	8	0.10
140.0～145.0	11	19	0.22
145.0～150.0	15	34	0.30
150.0～155.0	9	43	0.18
155.0～160.0	4	47	0.08
160.0～165.0	2	49	0.04
165.0～170.0	1	50	0.02
合 计	50		1.00

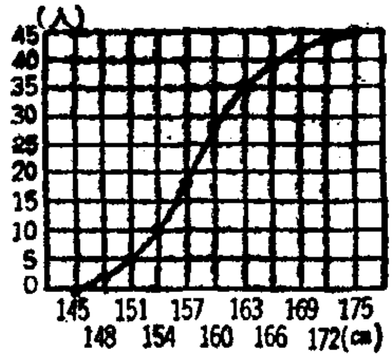
组区间、频数 如上表所示，按每隔5cm划分身长的各个小区间，叫做组区间；在相应的组区间内的身高出现的次数，叫做频数。



频数折线图 依次连接直方图中每个矩形上端中点而形成的图，叫做频

数折线图。

相对频数、累积频数 某个组区间内的频数与它前一个组区间内的频数的累计，就是累积频数。某个组区间内的频数与总频数之比，叫做相对频数（一般以百分比表示）。



$$相对频数=\frac{某组区间内的频数}{总频数}（以百分比表示时\times100）$$

右图是累积频数分布折线。

代表值 我们往往用一个值来描述总体的概貌。常使用的有平均值、中位数和最频值三种，其中广泛应用的是平均值。

数据较少时，可以采用小学里学过的用全部数据的和除以数据的个数的方法求取平均值。数据繁多时，则可以利用频数分布表中的假平均求取平均值。

把下表中数据的总和②除以总频数①就是平均③。

组区间（cm）（身长）	组中点值	（f）频数	组中点值×频数	（d）与假平均之差	$d\times f$
以上 不足 130～135	132.5	2	265.0	-15	-30
135～140	137.5	5	687.5	-10	-50
140～145	142.5	10	1425.0	-5	-50
145～150	147.5	14	2065.0	0	0
150～155	152.5	8	1220.0	5	40
155～160	157.5	6	945.0	10	60
160～165	162.5	4	650.0	15	60
165～170	167.5	1	167.5	20	20
合 计	／	① 50	② 7425.0	／	③ 50

下面是利用假平均求平均值的方法：

总体平均＝（假平均）＋超过与不足的平均）

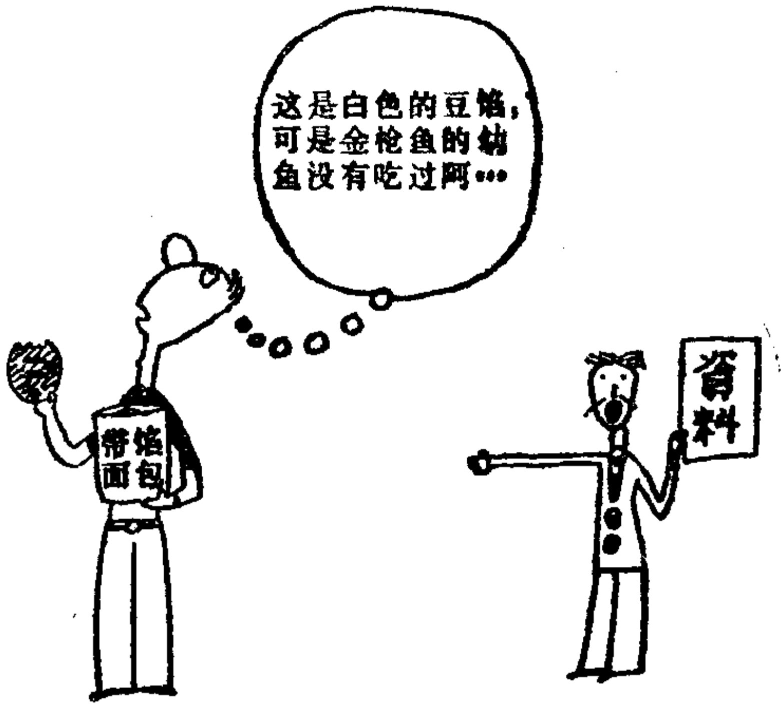
于是，由上表得出：

$$M=147.5+③\div 50=147.5+1=148.5$$

中位数 将数据按大小的顺序排列，位于中间的数是中位数。有偶数个数据时，因为居中的数据有两个，所以取这两个数之和除以2的平均值作为中位数㊀。

最频值 在频数分布表中，频数最高的组中点值为最频值。

本单元的知识广泛应用于社会科、保健科等，所以应当深刻理解术语的具体意义。



“不懂得术语的具体意义，真叫人无可奈何”

㊀日语里“中位数”和“金枪鱼的幼鱼”是一个词——译者注。

5．中学三年级数学的学习要点

（1）乘法公式

多项式的乘法

乘法公式计算的基础法则是以前学过的分配律、交换律和结合律。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(c+d)\\
&=A(c+d)\\
&=Ac+Ad\text{（分配律）}\\
&=(a+b)c+(a+b)d\\
&=ac+bc+ad+bd\text{（分配律）}
\end{aligned}
$$

	$c+d$	
a	ac	ad
b	bc	

$$(a+b)(c+d)=\underset{①}{ac}+\underset{②}{bc}+\underset{③}{ad}+\underset{④}{bd}$$

注意①～④的计算顺序，有次序地相乘即可以将括号展开。

在多项式与多项式相乘中，如果把常见的形式作为公式记住，那么以后就可以快而正确地求出展开式。

公式 1　$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab$

$$=x^2+(a+b)x+ab$$

（注意：第二项x的系数是a和b的和；
第三项是a和b的积。）

（例）　$(x+2)(x+4)=x^2+(2+4)x+2\times4$

$$=x^2+6x+8$$

$$(x-3)(x+5)=x^2+(-3+5)x+(-3)\times5$$

$$=x^2+2x-15$$

公式2 $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$
$=a^2+(b+b)a+b\times b$
$=a^2+2ab+b^2$

（注意：第2项是a和b的积的二倍。）

（例）$(x+3y)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2$
$=x^2+6xy+9y^2$

$(4a-3b)^2=(4a^2)+2\cdot 4a\cdot(-3b)+(-3b)^2$
$=16a^2-24ab+9b^2$

$$\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}a\cdot b+b^2$$

$$=\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$$

$99^2=(100-1)^2=100^2-200+1=9801$

公式3 $(a+b)(a-b)$
$=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$

（注意：第2项没有ab。）

（例）$(x+2y)(x-2y)=x^2-4y^2$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=x^2-\frac{1}{4}$$

$(2a-3b)(2a+3b)=(2a)^2-(3b)^2$
$=4a^2-9b^2$

$(49\times 51)=(50-1)\times(50+1)=50^2-1^2$
$=2499$

公式的应用 $(a+b+c)^2=(A+c)^2$
$=A^2+2Ac+c^2$ （公式2）

$$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
（公式2）
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

（多项式相乘，展开后仿上面那样进行整理，则便于记忆。）

$$(a+b-c)(a-b+c)$$
$$=[a+(b-c)][a-(b-c)]$$
$$=a^2-(b-c)^2$$
$$=a^2-(b^2-2ab+c^2)$$
$$=a^2-b^2+2bc-c^2$$
$$=a^2-b^2-c^2+2bc\text{（注意符号，易出错）。}$$

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$$
$$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$$
$$=(a^2)^2-(b^2)^2=a^4-b^4$$
（公式3）

利用乘法公式计算数字 对于乘法公式，只单纯地作为知识记住没有什么用。在各种各样的情况下都会利用，方算充分地领会了。

问　题

计算$363\times363-362\times364+365\times366-364\times367$

当然，一开始就做乘法并不是出题者的意图。特别是在升学考试时，如果能推测出出题者的用意，就能朝着正确的答案迈出有把握的第一步。

解：设$363=x$，则上式可写成

$$x^2-(x-1)(x+1)+(x+2)(x+3)-(x+1)(x+4)$$

$=x^2-(x^2-1)+(x^2+5x+6)-(x^2+5x+4)$

$=1+6-4=3$

计算的结果是3，与x值无关。

同类性质的练习题，应尽量做几个。

（2）因式分解

公因子 最简单的因式分解是提取公因子。

①$ax+bx=x(a+b)$

②$2a^2b-4ab^2=2ab(a-2b)$

③$20a^2b-16ab+12ab^2=4ab(5a-4+3b)$

必须提取全部的公因子，不能剩下。第③题的结果如是$4a(5ab-4b+3b^2)$，那么括号内还遗下公因子b没有提出。

公式1 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

因式分解公式只不过是反过来利用乘法公式而已。这个公式的特点是，一次项系数和常数项分别是和与积的形式。

例如，要把x^2+5x+6分解因式，需求和为5、积为6的两个数。

$$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3$$
$$=(x+2)(x+3)$$
$$x^2+2x-35=x^2-(7-5)x+7\times(-5)$$
$$=(x+7)(x-5)$$

（常数项是负数时，应求差为2，积为5的两个数，如一次项是正数，则取较大的数为正。）

$$x^2-4x-45=x^2+(-9+5)x-(-9)\times5$$
$$=(x-9)(x+5)$$

（第二项是负数时，只要取较大的数为负即可。）

公式 2　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

对于这个公式，研究中间项与第一项和第二项的关系也就可以了。分解因式的结果是$(a+b)^2$、$(a-b)^2$这样的形式时，叫做完全平方公式。

（例）　$x^2+6x+9=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=(x+3)^2$

$$4a^2-12ab+9b^2$$
$$=(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2$$
$$=(2a-3b)^2$$

（中间项是负数时，则是差的平方。）

$$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$$

公式3　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

注意：上式与前面的公式不同，是平方差的形式。

（例）　$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

$$4a^2-25b^2=(2a)^2-(5b)^2$$
$$=(2a+5b)(2a-5b)$$

复杂的因式分解例题

①如果式中有公因子，首先提取公因子。

$$2x^2+4x-30=2(x^2+2x-15)$$

接着看一看括号内的式子是否能进行因式分解：

$$x^2+2x-15=x^2+(5-3)x+5\cdot(-3)$$
$$=(x+5)(x-3)$$

因此　$2x^2+4x-30=2(x+5)(x-3)$

$5a^2-40a+80=5(a^2-8a+16)=5(a-4)^2$

② $(a-b)^2-4=A^2-2^2=(A+2)(A-2)$

（公式3）

$=(a-b+2)(a-b-2)$

$x^2+2xy+y^2-z^2=(x+y)^2-z^2$

$=(x+y+z)(x+y-z)$

$x^2-a^2+2a-1=x^2-(a^2-2a+1)$

$=x^2-(a-1)^2$

$=[x+(a-1)][x-(a-1)]$

$=(x+a-1)(x-a+1)$（注意符号）

（3）平　方　根

平方　4的平方（二次方）$4^2=4\times4=16$，$\frac{1}{2}$的平方（二次方）$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$-2a$的平方（二次方）$(-2a)^2=(-2a)\times(-2a)$

$=4a^2$。课本的最后部分有平方表，由表可查得平方值。

平方数都是正数，不会是负数。因为平方可视为是符号相同的数的积。

平方根　如果某数x的平方为a，$x^2=a$，那么，x就叫做a的平方根。

因为$3^2=9$，$(-3)^2=9$，所以9的平方根有两个，3和-3，写成±3。

16的平方根是4和-4。

关于平方根：

①正数的平方根有两个，它们的绝对值相等，符号相反；

②负数没有平方根；

③零的平方根是零。

根号$\sqrt{\ }$ 像16或9这类整数的平方根，用心算即可。可是5的平方根就不那么容易算出来了。在这种情况下，需使用$\sqrt{\ }$（根号）符号。5的平方根写做$\sqrt{5}$和$-\sqrt{5}$（也可写成$\pm\sqrt{5}$）。

6的平方根是$\pm\sqrt{6}$，7的平方根是$\pm\sqrt{7}$，8的平方根是$\pm\sqrt{8}$，9的平方根是$\pm\sqrt{9}=\pm3$……。

$a>0$时，a的平方根是$\pm\sqrt{a}$。

平方根表 课本的最后有1.00～99.9的平方根表。

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1.25}=1.1180\triangle\\ \sqrt{12.5}=3.5355\triangle\end{array}\right\}$$

△表示在小数点后第五位四舍五入，查得的结果是近似值。

（有的表在小数点后第四位四舍五入。）

1.00～9.99和10.0～99.9虽然数字的排列相同，但它们的平方根却不同，必须注意。

表中没有的部分（小于1、大于100的数），按照下面的方法查表则可得出。

$$\sqrt{0\vdots.25}=0\vdots.5\qquad \sqrt{0\vdots.12\vdots5}=0\vdots.3\vdots5355\qquad \sqrt{0\vdots.08\vdots2}=0\vdots.2\vdots8636$$

把被开平方的小数，从小数点向右每隔两位用线分开。

$$\sqrt{45\vdots30\vdots.}=6\vdots7\vdots.305\qquad \sqrt{7\vdots00\vdots00\vdots.}=2\vdots6\vdots4\vdots.58$$

$$\begin{array}{l} \;\;3\,\vdots\;5\,\vdots\;0\,\vdots\,.71 \\ \sqrt{12\,\vdots\,30\,\vdots\,00\,\vdots\,.} \end{array}$$

100以上的数的开平方，从小数点向左每隔两位用线分开后再查表。

以上的例子，自己查表做一做，很快就会弄懂。

（4）带$\sqrt{\ }$（根号）的数的计算

无理数的计算 $\sqrt{\ }$内的a、b必须大于0（$a>0$，$b>0$）不能是负数，这点很重要。

①$(\sqrt{a})^2=a$　　　$\sqrt{a^2}=a$

（例）$(\sqrt{2})^2=2$　　　$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$

② $m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}$

$m\sqrt{a}-n\sqrt{a}=(m-n)\sqrt{a}$

（例）$4\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(4+3)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

$5\sqrt{3}-6\sqrt{3}=(5-6)\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

③$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　　　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$　　　$\dfrac{\sqrt{b}}{a}=\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$

（例）$\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$

$\dfrac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{\dfrac{8}{2^2}}=\sqrt{\dfrac{8}{4}}=\sqrt{2}$

（计算的结果，$\sqrt{\ }$内的数必须是开不尽方的最小的数。）

分母有理化 ①$\dfrac{b}{\sqrt{a}}=\dfrac{b\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

（例）$\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

（分母、分子都乘以相同的数，分数值不变）。

带根号的式子的计算例子

——问　题——

①计算：$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$

解： $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2=[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$　　☆$(a-b)^2$

$=2+2\sqrt{6}+3-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}+5$　$=a^2-2ab+b$

$=10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$（按$\sqrt{\ }$内的数由小到大的顺序排列）

——问　题——

② 计算：$\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$

解： $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$

☆利用因式分解公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$来计算。

$$=\left[\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\right]\left[\frac{\sqrt{2}+1}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\right]=\left[\frac{2\sqrt{2}}{2}\right]\left[\frac{2}{2}\right]$$

$$=[\sqrt{2}][1]=\sqrt{2}$$

—问　题—

③ 计算　$(\sqrt{5}+\sqrt{3}):2=x:(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

解：$2x=(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ ☆比例内项的积等于外项的积

$2x=5-3=2$　　$\therefore x=1$

—问　题—

④解下面的方程组：$\begin{cases} x+\sqrt{3}\,y=5 \\ \sqrt{3}\,x+y=3\sqrt{3} \end{cases}$

解：使x的系数相等可以消去x。

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{3}\,x+3y=5\sqrt{3} \\ -) & \sqrt{3}\,x+y=3\sqrt{3} \\ \hline & 2y=2\sqrt{3} \end{array}$$

$\therefore y=\sqrt{3}$

使y的系数相等可以消去y。

$$\begin{array}{rl} & x+\sqrt{3}\,y=5 \\ -) & 3x+\sqrt{3}\,y=9 \\ \hline & -2x=-4 \end{array}$$

$\therefore x=2$

—问　题—

⑤当 $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$，　$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$时，求下式的值。(A)$x+y$ (B)xy (C)x^2+y^2(D) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

解(A) $\left(\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\dfrac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

(B) $\left(\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=\frac{7-3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

(C) $x^2+y^2=x^2+2xy+y^2-2xy$

$$=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{7})^2-2\times1=5$$

(D) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{\sqrt{7}}{1}=\sqrt{7}$

——问　题

⑥当　$x=1-\sqrt{2}$ 时，求x^2-2x+4的值。

解： $(1-\sqrt{2})^2-2(1-\sqrt{2})+4=1-2\sqrt{2}$

$$+2-2+2\sqrt{2}+4=5$$

另外，按下面的方法计算就会简单些。

$x=1-\sqrt{2}\rightarrow x-1=-\sqrt{2}$

$$x^2-2x+4=x^2-2x+1+3=(x-1)^2+3$$

$$=(-\sqrt{2})^2+3=2+3=5$$

（开动脑筋寻求各种各样的解法，是提高学力极为有效的措施。）

——问　题

⑦　当 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 时，

求$\frac{x^2-xy+y^2}{2x^2+3xy+2y^2}$的值。

解：（一开始就将x和y值代入计算，不仅计算复杂，而且容易出错。再说，出题者也不要求这样计算。）

分子$=x^2-2xy+y^2+xy=(x-y)^2+xy$

$$=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$=8+(3-2)=9$$

分母$=2x^2+4xy+2y^2-xy=2(x+y)^2-xy$

$=2(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=2\times12-(3-2)=24-1=23$

因此，求得的值是$\frac{9}{23}$。

问　题

⑧当　$x=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$时，求下式的解。

（1）$x+\frac{1}{x}$　　　　（2）$x^2+\frac{1}{x^2}$

解：（这是个如果捉摸到要领，计算起来就很容易的好例子。）

（1）因为$\frac{1}{x}$是x的倒数，所以$x=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\to\frac{1}{x}$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\quad x+\frac{1}{x}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(4+3+4\sqrt{3})+(4+3-4\sqrt{3})}{4-3}$$

$=14$

（2）$x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=14^2-2=194$

（5）　二次方程式的解法

$ax^2=b$　的解法

首先用a除等式的两边，得

$x^2=\frac{b}{a}$，$\left(求\frac{b}{a}的平方根\right)x=\ \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

① $x^2=4$ ② $2x^2=18$ ③ $4x^2-25=0$

$x=\pm\sqrt{4}$ $x^2=9$ $4x^2=25$

$x=\pm 2$ $x^2=\pm 3$ $x^2=\pm\frac{25}{4}$

$x=\pm\frac{5}{2}$

（没有一次项x的二次方程式按这个步骤解）。

特别是$x^2=-4$时，这个二次方程没有解。因为任何数的平方都不会是负数。二次方程式有的无解，有的不能解，必须了解这一点。

配方法 分解因式时，我们把$(a+b)^2$、$(a-b)^2$这种形式的式子叫做完全平方式。

$$x^2+10x+25=x^2+2\times5\times x+5^2=(x+5)^2$$

完全平方式的特点是常数项平方根的两倍等于x项的系数。利用完全平方式的性质，可以解二次方程式。

$$x^2+2x-3=0$$

首先移常数项，得： $x^2+2x=3$

在方程两边各加上x项系数一半的平方： $x^2+2x+1^2=3+1^2$

因为左边成为完全平方式，所以 $(x+1)^2=4$

求平方根： $x+1=\pm2$

$x=\pm2-1$ $\therefore x=1和-3$

$$x^2-3x=10$$

在方程的两边各加上x系数一半的平方，得：

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=10+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$$

求平方根，得：

$$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{7}{2}$$

$$\therefore x=\pm\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=\frac{10}{2}\text{和}-\frac{4}{2}=5\text{和}-2$$

（利用完全平方式解二次方程，只要方程有解，那么不论什么样的方程都可以解出，但计算起来稍微麻烦。）

因式分解法

$$x^2-5x+4=0$$

这个方程的左边可以分解成两个因式的积（公式1）即：

$$(x-1)(x-4)=0$$

两个数相乘的积等于零，那么其中必有一个数是零或者两者都是零。

因此，$x-1=0$或$x-4=0$　$\therefore x=1$和4

利用因式分解的方法解二次方程比利用完全平方公式的方法计算起来简单。但要注意有的方程不能进行因式分解。

① $5x^2-7x=0$

$x(5x-7)=0$

$x=0$

$5x-7=0$

$\therefore x=0,\ \frac{7}{5}$

② $3x=x^2-10$

$x^2-3x-10=0$

首先把各项都移到左边，使右边是零，然后分解因式。这种解法的重要之点是要使右边为零。

$(x-5)(x+2)=0$

$$x-5=0$$
$$x+2=0$$
$$\therefore x=5和-2$$

求根公式法 推导出求根公式法的基础是配方法。

一般形式的二次方程是$ax^2+bx+c=0$。其中a、b、c是常数。首先把常数项c移到右边，得：$ax^2+bx=-c$；用x^2的系数a除方程的各项，得：$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$；接着在方程的两边加上$x$系数一半的平方，使方程的左边配成完全平方公式；

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

求平方根，得： $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

把左边的常数项移到右边，得：$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

这就叫做 $ax^2+bx+c=0$的求根公式。

$$2x^2+3x-4=0$$

利用求根公式解这个（$a=2$，$b=3$，$c=-4$）的方程，

得： $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$

（这个二次方程式不能用因式分解法来解。）

要解$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}=0$的方程，需用6乘方程的两边，去掉分母：

$$6x^2+9x+2=0\ (a=6,\ b=9,\ c=2)$$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\times6\times2}}{2\times6}=\frac{-9\pm\sqrt{33}}{12}$$

无解的二次方程式 负数没有平方根。因此求根公式中的根号（$\sqrt{\ }$）内计算的结果是负数的话，说明方程无解。

$$x^2-4x+2=0$$

$$(a=1,\ b=-4,\ c=2)$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times2}}{2\times1}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}$$

$$=2\pm\sqrt{2}$$

在这个例子里，$\sqrt{\ }$ 内是$16-8>0$。

与此相反，在$x^2-4x+6=0$中，

$$(a=1,\ b=-4,\ c=6)$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times6}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2}$$

$\sqrt{\ }$ 内是$16-24<0$，所以方程$x^2-4x+6=0$无解。

重　解 如果求根公式中$\sqrt{\ }$ 内的数是零，说明方程只有一个解。一般的二次方程式有两个解。

$$x^2-4x+4=0$$

$$(a=1,\ b=-4,\ c=4)$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

像这样的方程式叫做重解二次方程式。

复杂的二次方程式

问　题

① 解下列方程

$$(x+2)(x+6)+4=2(x+5)$$

解： $(x+2)(x+6)+4=2(x+5)$

首先把括号展开：

$$x^2+8x+12+4=2x+10$$

把各项移到左边，然后合并同类项，得：

$$x^2+6x+6=0$$

$$(a=1,\ b=6,\ c=6)$$

能分解因式则分解，不能分解则利用求根公式。本题不能进行因式分解，所以：

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\frac{-6\pm\sqrt{12}}{2}$$

$$=\frac{-6\pm2\sqrt{3}}{2}=-3\pm\sqrt{3}$$

问　题

② 求 $(z-1)^2-3(z-1)+2=0$

解： 注意（ ），设 $z-1=x$，那末原来的二次方程式就变成：

$$x^2-3x+2=0$$

这个方程式可以进行因式分解，得：

$$(x-2)(x-1)=0$$

$$\therefore x-2=0,\ x-1=0$$

由于 $z-1=2$ 和 1　所以 $z=3$ 和 2

问题

③ 求 $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-2=\frac{x}{2}$

解： $\frac{x^2+2x+1}{4}-2=\frac{x}{2}$

计算时应尽量避开分数。用4乘方程的两边，消去分母，得：

$x^2+2x+1-8=2x$　　$x^2=7$　$\therefore x=\pm\sqrt{7}$

（6）函　数

初中一年级以学习正比例函数和反比例函数为主；

二年级以学习一次函数为主；

三年级以学习二次函数为主。

比例函数　y与x成正比例时，则$y=ax$；

y与x成反比例时，则$y=\frac{a}{x}$；

它们都是函数的例子。因为给出一个x值，对应这个值只能求出一个y值，x和y是对应关系，所以可视为函数。

正比例和反比例函数是所有函数关系中的特殊情形。

下面是这种函数的例子：

与x的平方成正比的函数　　$y=ax^2$

与x的立方成正比的函数　　$y=ax^3$

与x的平方成反比的函数　　$y=\frac{a}{x^2}$

与积成正比的函数　　$z=axy$；

与x成正比而与y成反比的函数（与商成正比的函数）　$z=a\left(\frac{x}{y}\right)$ 等等。从等式

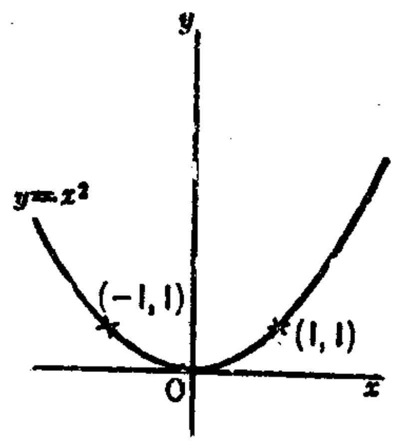
的形式上看，正比例函数和反比例函数可认为是同一类型函数。由于等式的形式相类似，所以要求随着学年的增长，学会对各种各样形式的函数具体地判断它们的关系。

函数单值对应 对于x的一个值只有一个y值和它对应时，则称y是x的函数。这样的对应关系，叫做单值对应。

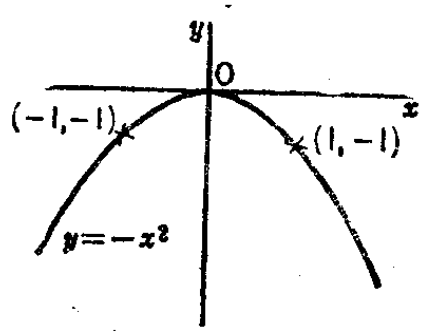
二次函数 “底面一个边长是$x$cm的正方形的四棱锥，其高度为12cm、体积为y”时，当底边的长度确定以后，体积y的大小就有唯一确定的值，那么y叫做x的函数。因为这里的x是二次方（x^2），所以y叫做x的二次函数。

$y=x^2$的图象 函数$y=x^2$的图象，是以原点（0，0）作为顶点、以y轴为对称轴的抛物线。

$y=ax^2$的图象与$y=x^2$的图象有联系，所以必须记住$y=x^2$的图象。

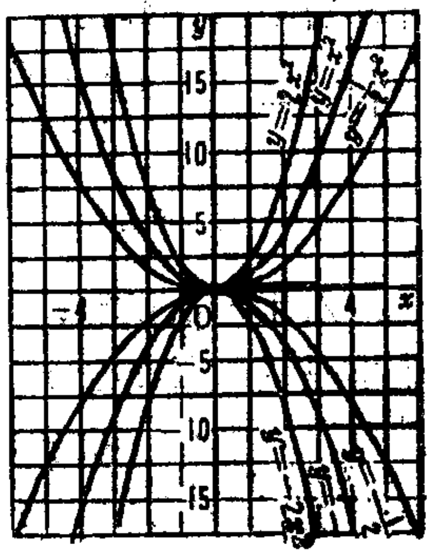


$y=-x^2$的图象 $y=x^2$的图象和$y=-x^2$的图象都是关于x轴的对称图象。



$y=ax^2$的图象 当$a>0$时，抛物线$y=ax^2$的开口向上；$a<0$时，抛物线$y=ax^2$的开口向下；当$a=0$时，不是二次函数。a的绝对值越大，抛物线的开口越小。

$y=f(x)$ 符号的意义 这个符号，过去曾是学习的范围，现在由于学习内容的变更，没有安排学习。但考虑到使用起它来会带来诸多的方便，所以在这里加以说明。



当y是x的函数且为x^2+3x+4时，那么，y可以表示成$y=f(x)=x^2+3x+4$。$x=-2$时的y值是

$$y=f(-2)=(-2)^2+3(-2)+4=4-6+4=2$$

把-2代入x，则可得y值。

（7） 函数的变化率

变化率 为了研究函数$y=f(x)$当x值变化时函数y值的变化情况，我们做如下的计算：

$x=a$时　　$y=f(a)$

$x=b$时　　$y=f(b)$

因此当x值从a变化到b时，函数y的值从$f(a)$变化到$f(b)$，所以可由下式求出变化率，即：

$$变化率=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

一次函数的变化率 对于$y=f(x)=2x+3$

$$f(0)=2\times0+3=3$$

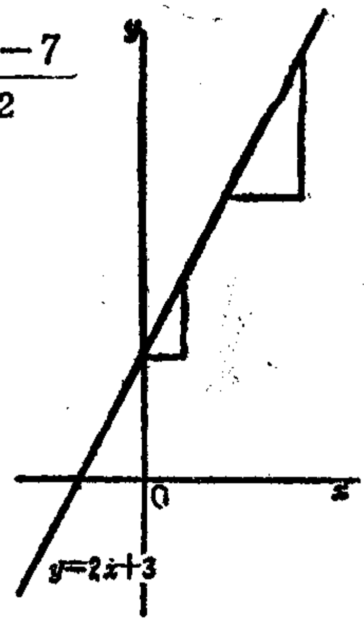
$$f(1)=2\times1+3=5$$

所以

$$变化率=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$=\frac{5-3}{1}=2$$

另外，当$x=2\sim4$时：



$$变化率=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{11-7}{2}$$

$$=\frac{4}{2}=2$$

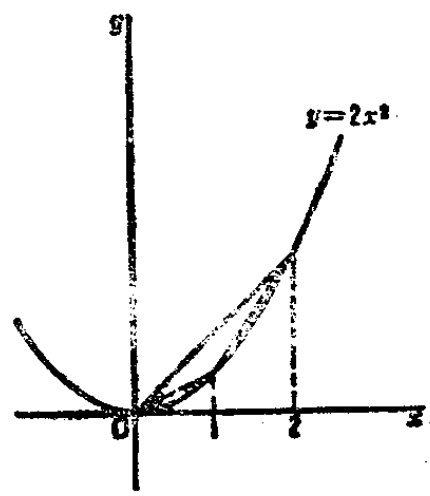
可见，对于一次函数，一般说来，变化率是常数并等于x的系数。由图可见，它等于一次函数直线图象的倾斜度。

二次函数的变化率

对于$y=f(x)=2x^2$

$$f(0)=2\times0^2=0$$

$$f(1)=2\times1^2=2$$



当$x=0\sim1$时，

$$变化率=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$=\frac{2}{1}=2$$

当$x=0\sim2$时：

$$变化率=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$$=\frac{8}{2}=4$$

对于二次函数，其变化率不是常数。

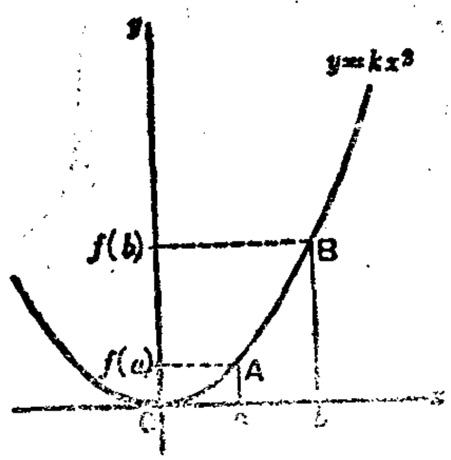
再看，当$x=1\sim2$和$x=2\sim3$时：

$$变化率=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=6,$$

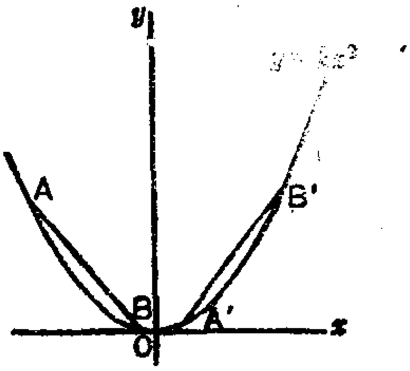
$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=10$$

可见，变化率不是常数。

由图象求变化率 下面我们来考虑图象上的A、B两点。设A、B 的x坐标分别是a和b，则A、B间的变化率可通过计算得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。显然，这就是A、B两点连线的倾斜度。

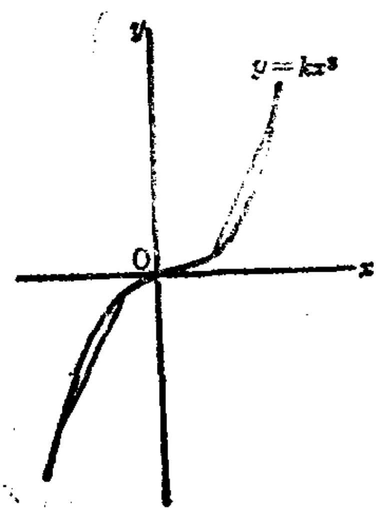


对于函数$y=kx^2$的图象（$k>0$），当$x<0$时，变化率是负数，线段AB向右下倾斜，y值随x值的增加（靠近原点）而减少。



当$x>0$时，变化率是正数，线段AB向右上倾斜，y值随x值的增加（远离原点）而增加。

对于函数$y=kx^3$（$k>0$）的图象，y值随x值的增加（从左向右变化）而增加。变化率常是正数，连接图象上两点的线段向右上倾斜。



（8）定义域和值域

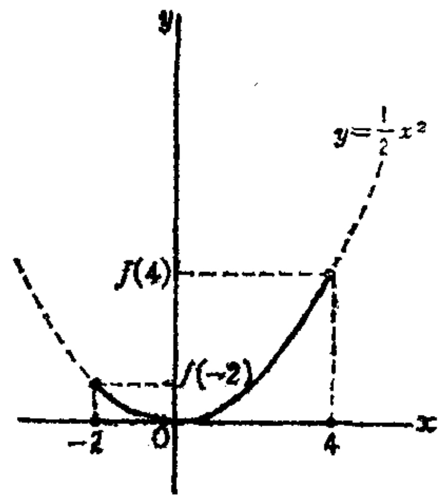
定义域 二年级所学的函数部分，把x的变域叫做函数的定义域。函数关系成立的范围，受所规定的x的范围的限制。

用弹簧秤称物体的重量时，并不是无限制地无论多重的

物体都可以吊得起来的。函数定义域的概念正好与此相似。

作函数图象时，只有在定义域也就是所规定的x的范围内，图形才可存在。

$$y=\frac{1}{2}x^2\ \{x|-2\leqslant x\leqslant 4\}$$



右图中的实线部分表示这个函数的图象。

值 域

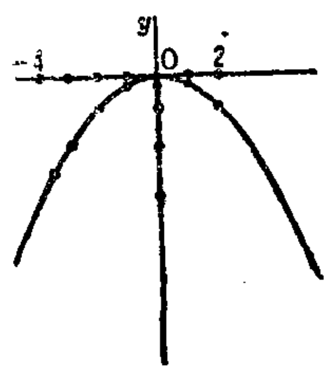
随着x值从-2变化到4，函数y的值从$f(-2)=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$开始向原点O方向下降，当$x=0$时，下降到最小，然后开始增加到$f(4)=\frac{1}{2}\times4^2=8$为止。

y的变化范围，即y的变域叫做值域

函数的值域 可以通过定义域计算而得。上述函数的值域是$\{y|0\leqslant y\leqslant 8\}$。

对于这个函数，x的范围是从-2到4的所有的值，所以在这个范围内图上的全部点，都表示这个函数的值域。但有时也只有图上的几个点表示函数的值域。

$$y=-\frac{1}{2}x^2\ \{x|-4\leqslant 2, x\text{是整数}\}$$



它表示从-4到2不是所有的值都是定义域。以要素表示定义域，可以写成$\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$。这个定义域，从图上来看，仅是x轴上的7个点。

图上和定义域要素对应的点也只有7个，它们是这个函数的图象。

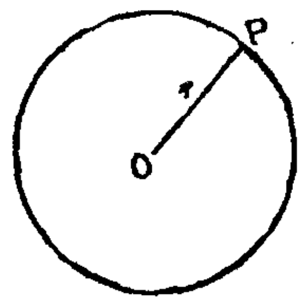
和x值对应的函数y值是

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-8	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

值域就是y值。在这种情况的y值要一一列出。

值域$\{-8, -\frac{9}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 0\}$

（9） 圆



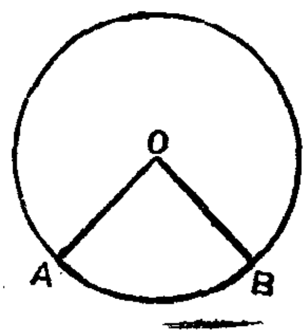
圆的基本性质 在平面内，距定点都等于定长的所有点的集合就是圆。定点叫做圆心（O）；定长叫做圆的半径（OP）。

同样，在空间，距定点等于定长的点的集合就是球。从平面图形的性质，类推出空间图形的性质，比较容易掌握。

组成圆的点的集合，以集合的方式表示，记作

$\{p \mid |OP| = r\}$

①圆心角∠AOB的大小，由AB弧（$\overset{\frown}{AB}$）的长度决定。



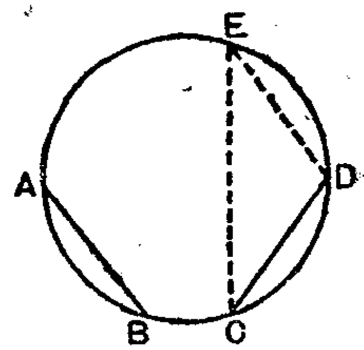
相等的圆心角所对的弧长相等；

等弧所对的圆心角相等。

②等弧所对的弦也相等。$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD} \rightarrow$ 弦AB＝弦CD等弦所对的弧也相等。

☆注意：弧长增加一倍，圆心角也增加一倍，但弦长并

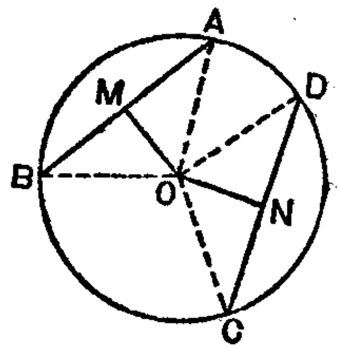
不增加一倍。



中心角和弧长成正比，和弦长不成正比。

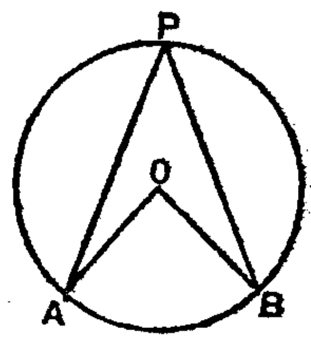
③到圆心的距离相等的弦，其长度相等；反之亦然。

④从圆心向弦作的垂线平分弦。



三角形的这个性质是由等腰三角形（△OAB、△OCD的两边相等，均为圆的半径）的性质推导出来的。

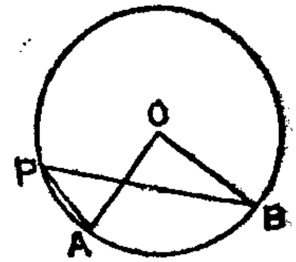
圆和角的关系 不论哪一种课本，关于圆的性质的证明都相当详细。必须借助图认真阅读，一直到弄清证明的步骤和思路为止。



①圆心角等于圆周角的两倍

圆心角∠AOB和圆周角∠APB所对的弧都是$\overset{\frown}{AB}$，那么：

$$\angle AOB = \angle APB \times 2$$
$$= 2\angle APB$$

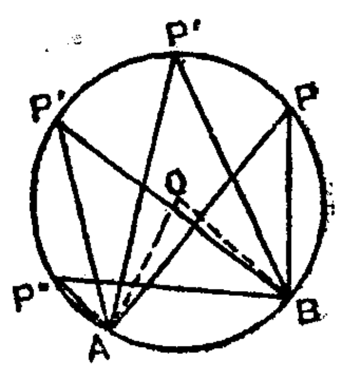


把圆周角的位置移动一下，像上图不容易证明的题，通过弧的关系，很容易发现圆心角和圆周角的关系。

$\overset{\frown}{AB} \to \angle \dot{A}O\dot{B}$，$\angle \dot{A}P\dot{B}$

②等弧所对的圆周角都相等

$\angle \dot{A}P\dot{B} = \angle \dot{A}P'\dot{B} = \angle \dot{A}P''\dot{B} = \cdots$

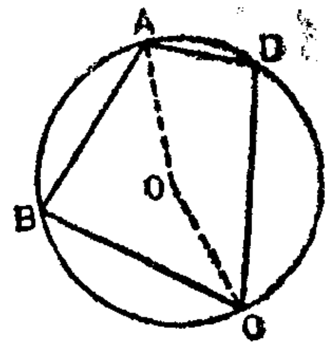


很清楚，它们都等于$\overset{\frown}{AB}$的圆心角∠AOB的一半。

另外，在特殊情况下，$\overset{\frown}{AB}$是半圆周

时，$\angle APB=90°$

③圆的内接四边形的对角和等于180°



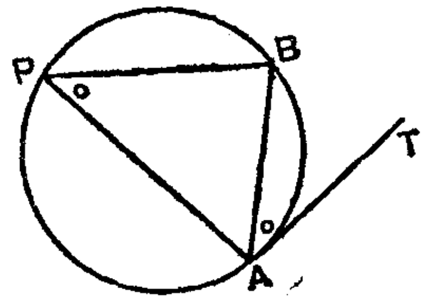
$\angle B+\angle D=2\angle R$

$\left.\begin{array}{l}\angle B\text{是}\overset{\frown}{ADC}\text{的圆周角}\\ \angle D\text{是}\overset{\frown}{ABC}\text{的圆周角}\end{array}\right\}$从圆心角

的和的关系，很快就能证明。

它的逆定理也成立，即对角的和等于180°的四边形内接于圆，也就是，四边形的四个顶点在同一圆周上（共圆点）。

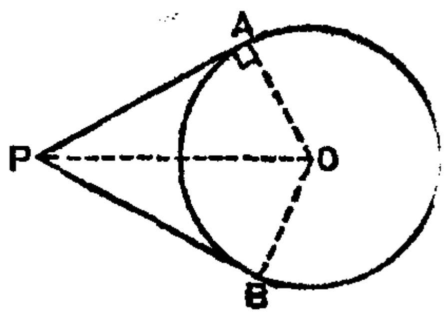
④弦切角定理



切线（AT）和弦（AB）形成的角（$\angle BAT$），等于弧（$\overset{\frown}{AB}$）所对的圆周角（$\angle \dot{A}P\dot{B}$）。

①～④是圆的各种角的基本性质。

圆和切线 圆的切线（PA）垂直于半径（OA）。



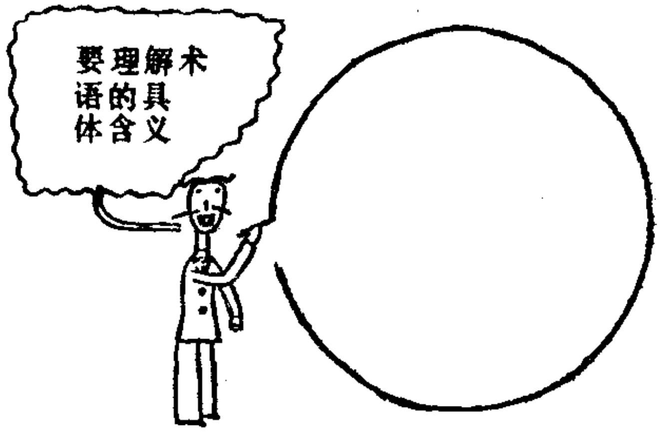
学习几何，最重要的是要明确术语的具体意义。

从圆外一点（P）引圆的两条切线（PA和PB）的长度相等。

$$PA\perp OA,\ PB\perp OB\rightarrow PA=PB$$

（∵$\triangle PAO\equiv\triangle PBO$，是斜边和另外一边相等的直角三角形。）

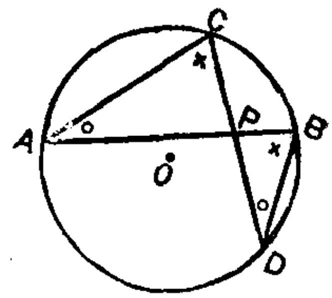
与圆有关的问题，大多是要在充分理解圆的性质后，根据需要推导出角、弦、弧等的关系。



（10） 关于圆的证明问题

圆和相似形

① 弦AB和弦CD相交于圆内的一点P，则：



$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

判定三角形的相似条件是：

两个角分别相等；
两条边的比及其夹角分别相等；
三条边的比相等。

可是对于和圆有关的三角形，往往利用其中的两角相等的条件来判定它们是否相似。

在△PAC和△PDB中：

$$\left.\begin{array}{l}\angle C=\angle B\text{（}\overset{\frown}{AB}\text{的圆周角）}\\ \angle A=\angle D\text{（}\overset{\frown}{CD}\text{的圆周角）}\end{array}\right\}\text{两角相等}$$

$\therefore \triangle PAC \backsim \triangle PDB$

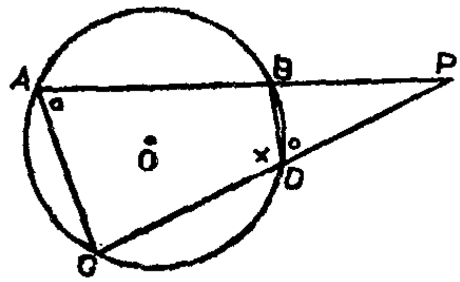
由相似关系，可得出对应边的比相等，即：

$$AP:DP=CP:BP=AC:DB$$

（必须注意对应顺序）

② 把①中的弦CD改变一下位置，使其与弦AB相交于圆外一点P，此时△PAC也与△PDB相似，即：

$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$



因为，$\angle A = \angle BDP$（在内接四边形ACDB中，

$\angle A + \angle CDB = 180°$；另外

$\angle CDB + \angle BDP = 180°$）

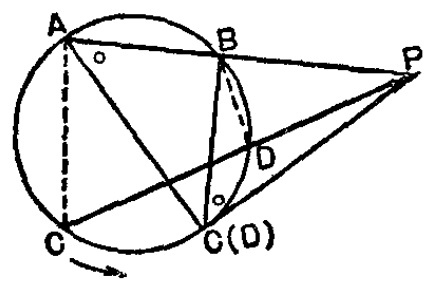
$\angle P$是公共角，两角分别相等，所以相似。与①一样，对应边之间的比也相等：

$PA : PD = PC : PB = AC : DB$

利用移动图形的方法推导出新的性质

在已经证明了的图形性质的基础上，把原来的图移动一下，往往可以推导出新图形的性质。

③ 把②中的弦AB固定，以P为中心，将弦CD按箭头指示的方向移动，使它和圆周的交点C、D逐渐靠近，当C、D成为圆周上的一点时，PC就是圆的切线，此时，$\triangle PAC \backsim \triangle PCB$。



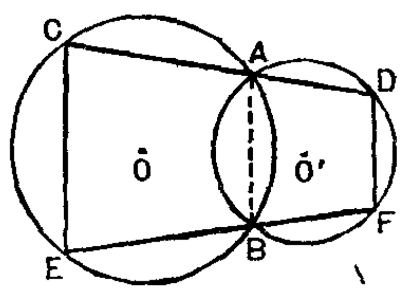
因为 $\begin{cases} \angle P\text{是公共角} \\ \angle PAC = \angle PCB\text{（弦切角定理）} \end{cases}$

又由于对应边之间的比相等，所以：

$PA : PC = PC : PB \to PC^2 = PA \times PB$

两个圆

① 两圆O，O′相交于A、B两点。如图所示，通过交点A、B的直线是弦CAD和弦EBF，则CE∥DF。



连接A、B，因为四边形ACEB

是圆O的内接四边形，所以：

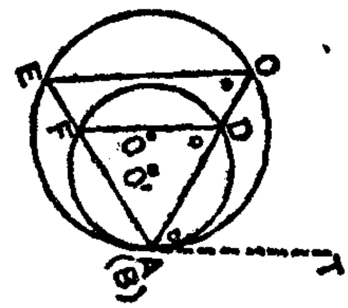
$$\angle C+\angle ABE=180°$$

四边形ABFD是圆O′的内接四边形，所以：

$$\angle D+\angle ABF=180°$$

又$\angle ABE+\angle ABF=180°$

所以$\angle C+\angle D=180°$



因为直线CD和直线CE、DF相截所形成的同侧内角和等于180°，所以CE∥DF。

② 接着，向左移动圆O′，使它逐渐与圆O加大相交的部分，如图所示，当交点A、B重合时，这两个圆内切。与①的情况一样，CE∥DF。

过A点引圆O的切线AT，AT也是圆O′的切线。

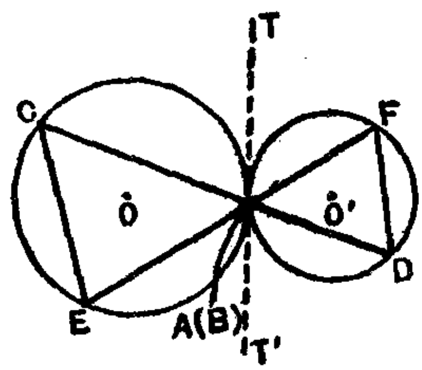
证明图形时，像这样找出引辅助线的方法是证明的关键。作辅助线的方法一般是连接点或作平行线或作切线。

圆O中，$\angle$CAT㊀=CEA㊀（弦切角定理）

圆O′中，$\angle$DAT㊀=DFA㊀（弦切角定理）

所以$\angle$CEA㊀=DFA㊀

因为同位角相等，所以CE∥DF。



③ 与②的情况相反，向右移动圆O′，当两圆的距离越来越远、交点A、B重合时，这两个圆外切。

两圆外切时，如右图所示，过交点作弦，则CE∥FD。

过切点A作切线TAT′，然后自己试着证明。

㊀原文有误——译注。

由以上可见，把图形动一动，就可以推导出有关的性质。另外，这种证明方法也可由前面的题类推出。

现在入学考试所出的题，对于记述式类，有时要求按顺序写出推导出答案的步骤。但是，对于图形的证明题，在大多数情况下，自始至终都不要记述。之所以这样，原因很多。最大的原因是必须在短时间内做完大部分的题，另外在评分的时候，希望尽量避免掺杂主观意见也是一个原因。

因此，在学习中，对于证明相等的原理、定理等要牢牢掌握；课本中的证明只要做到理解了，也就可以了。即使做不出严谨的证明，也没有悲观的必要。

（11） 勾股弦定理

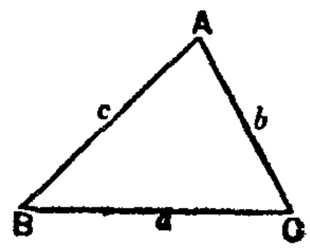
三角形边长的乘方关系

三角的内角中，引人注目的是最大的角，根据这个角可以把三角形分为三种：

①锐角三角形；

②直角三角形；

③钝角三角形。



设a、b、c分别表示三角形BC、CA、AB三边的长度（考虑到角的对应边，$\angle A$的对应边是BC，所以以a表示BC边）。那么

①锐角三角形（设最大的角是C，$\angle C<90°$时）

$$c^2<a^2+b^2$$

②直角三角形（$\angle C=90°$）

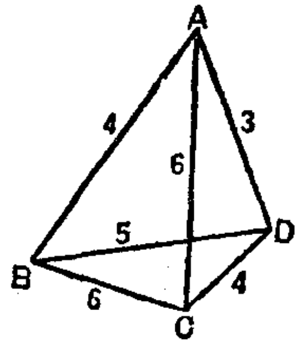
$$c^2=a^2+b^2$$

③钝角三角形（$\angle C>90°$）

$$c^2>a^2+b^2$$

我们特别把第②种情况直角三角形的公式叫做勾股弦定理。

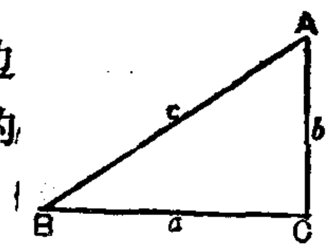
三角形的判定 右图是四面体A－BCD。组成四个面的三角形是锐角三角形、直角三角形和钝角三角形。



△ABC的边长（4、6、6），注意最长的边是$6^2=36$，将它和其他两边的平方和$4^2+6^2=52$相比，可见$c^2<a^2+b^2$，所以△ABC是锐角三角形。

△ACD的边长（6、4、3），最长边的平方是 $6^2=36$，其他两边平方和是$4^2+3^2=25$，因为$36>25$，$c^2>a^2+b^2$，所以△ACD是钝角三角形。其余的，△ABD是直角三角形，△BCD是锐角三角形，判定的根据是三角形边长的平方关系。

求直角三角形的边长 直角三角形的勾股弦定理最早是从丈量土地发现的。要测量难于丈量的土地，就需要利用图形的性质。



勾股弦定理表示直角三角形的三条边长之间的关系，所以知道了其中两条边的长，即可求出第三边的边长。

a	1	1	z
b	2	y	2
c	x	5	3

左表中的a、b、c分别为上图直角三角形的各边，求x、y、z的值。

首先要注意所求的是否是斜边。

因为x是斜边，所以$x^2=1^2+2^2=5$ $\therefore x=\sqrt{5}$

y不是斜边，$y^2=5^2-1^2=24$ $y=2\sqrt{6}$

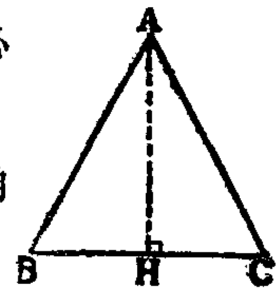
z不是斜边，$z^2=3^2-2^2=5$　$z=\sqrt{5}$

可见，当有三个量，而且它们之间存在某种关系并可用公式表示时，如果知道了其中的两个量，那么，其余的可通过计算求出。

三角形内角定理等也存在这样的关系。

正三角形的面积和高

求正三角形ABC（$AB=a$cm）的面积。



求三角形的面积当然必须知道底边长和高。

过顶点作底边的垂线AH，根据等腰三角形的性质，得知BH＝HC。

进入三年级到现在，我们已经学了不少各种图形的性质。根据需要，必须尽量利用这些性质，能用一个就用一个。

在△ABH中，$\angle AHB=90°$，AB是斜边，所以

$$AB^2=BH^2+AH^2 \qquad a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+AH^2$$

$$AH^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2 \qquad \therefore AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a\text{cm}$$

求△ABC的面积

$$\triangle ABC=BC\times AH\times\frac{1}{2}=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{1}{2}$$

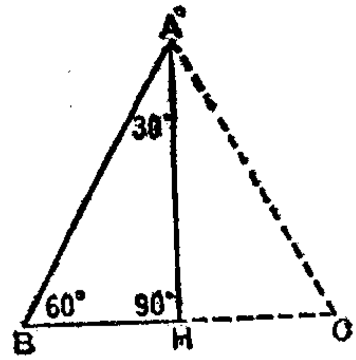
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\text{cm}^2$$

含30°、60°、90°角的三角形的边长

含30°、60°、90°角的△ABH可视为正三角形的一半，如果各个边都按下面所给的关系计算，即使不用勾股弦定理，也能很快地求出。

$$AB \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} BH$$

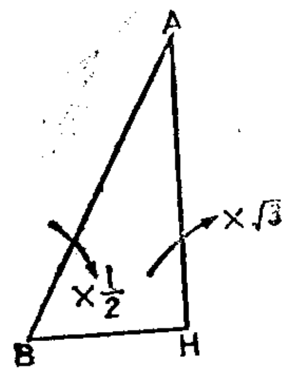
$$BH \xrightarrow{\times \sqrt{3}} AH$$



例如，$AB=5cm$

$$BH=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}cm$$

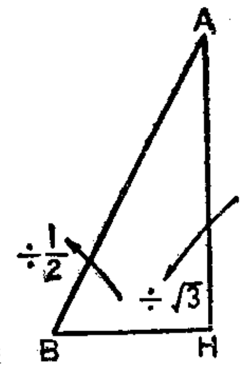
$$AH=\frac{5}{2}\times\sqrt{3}=\frac{5}{2}\sqrt{3}\ cm$$



或　$AH=3cm$

$$BH=3\div\sqrt{3}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ ㊀cm$$

$$AB=\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}\ cm$$



圆的切线　求与圆O相切的切线PA的长度。圆O的半径是4cm，OP是10cm。

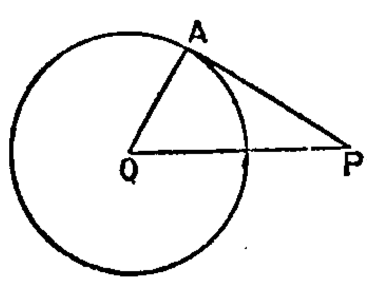
由切线的定义知，$PA\perp OA$

在$\triangle OPA$中，OP是斜边，所以

$$PA^2=OP^2-OA^2=10^2-4^2$$

$$=100-16=84$$

$$\therefore PA=\sqrt{84}=2\sqrt{21}\ cm$$

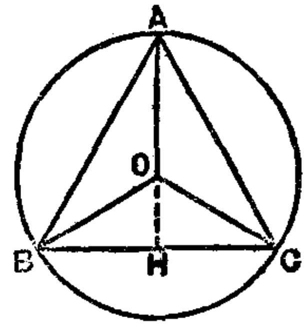


利用勾股弦定理时，首先需要作直角三角形并弄清斜边的位置。

㊀原文有误——译注。

圆的内接正三角形

求与圆O（半径为$a$cm）内接的正三角形的边长及其面积。



这里必须用二年级学过的内心、重心的知识。对于正三角形，内心、重心、外心都是同一个点。

三角形的内心是角平分线的交点；重心是中线的交点，中线被重心内分成2∶1。由图形的这些性质，得知AO∶OH＝2∶1，所以

$$AH=\frac{3}{2}a\ (\mathrm{cm})$$

$$AH\div\sqrt{3}=\frac{3}{2}a\div\sqrt{3}=\frac{3}{2\sqrt{3}}a$$

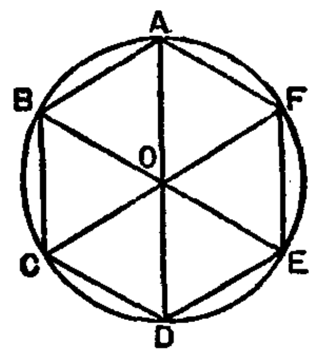
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a\ (BH)$$

$$BH\times 2=\sqrt{3}\,a\ (AB)$$

$$\triangle ABC=AB\times AH\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}\,a\times\frac{3}{2}a\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\ (\mathrm{cm}^2)$$

圆的内接正六边形



如右图所见，正六边形被对角线分成六个正三角形（△OAB、△OBC……）。

设圆O的半径为$a$cm

$$\triangle OAB=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\ (\mathrm{cm}^2)$$

$$正六边形\ ABCDEF=\triangle OAB\times 6=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 6$$

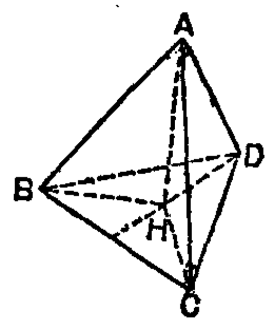
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\ (\mathrm{cm}^2)$$

通过巧妙地利用图形的性质和简单的计算，可求出面积、体积。如果计算起来复杂而且困难，那么必须再次考虑图形的性质，研究计算方法。

正三棱锥 正三棱锥A－BCD是由各面都是正三角形围成的立体图。对于边长为$a$cm的正三棱锥：

$$表面积=\triangle ABC\times 4=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 4$$

$$=\sqrt{3}\,a^2\ (\mathrm{cm})$$



要求体积，第一步必须求出高度AH。

过顶点A，作底面△BCD的垂线AH。因为H是△BCD的重心，所以在△ABH中：

$$AB=a,\quad BH=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$AH^2=AB^2-BH^2=\frac{6}{9}a^2\quad\therefore AH=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$体积=\triangle BCD\times AH\times\frac{1}{3}$$

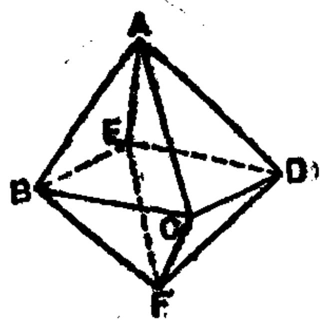
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\ (\mathrm{cm}^3)$$

正八面体 正八面体是由八个正三角形围成的立体图。

一年级时我们曾学过正多面体。

对于边长为$a$cm的正八面体;



表面积$=\triangle ABC\times 8=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 8$

$=2\sqrt{3}a^2$ (cm^2)

体积=四棱锥$A-BCD\times 2$

过顶点作底面正方形BCDE的垂线AH，AH通过正方形对角线的交点。

在$\triangle ABH$中　$AB=a$，$BH=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$AH^2=AB^2-BH^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

$$=a^2-\frac{2}{4}a^2=\frac{2}{4}a^2$$

$$AH=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

因此，体积$=\left(\text{正方形}BCDE\times AH\times\frac{1}{3}\right)\times 2$

$$=a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3\ (cm^3)$$

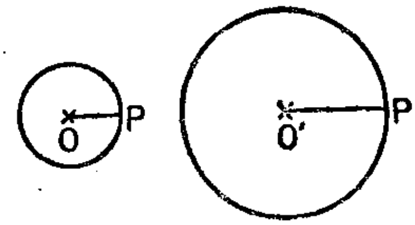
与圆和勾股弦定理有关的问题，虽然有各种各样，但只要会引辅助线，作出直角三角形，弄清斜边的位置，计算这类题并不那么困难。

（12）相似形的计量

这部分是二年级学过的相似形的继续。这里有必要再一次提出相似形的性质。

相似比 相似图形对应部分的长度比一般都相等。对应部分的长度比是相似比。

圆O∽圆O′，它们的相似比是半径、圆周等对应长度的比。



面积比 圆O∽圆O′，设半径 $OP=r$，$O'P'=2r$，则：

相似比是 $r:2r=1:2$

面积比是 $\pi r^2:\pi(2r)^2=\pi r^2:4\pi r^2=1:4$

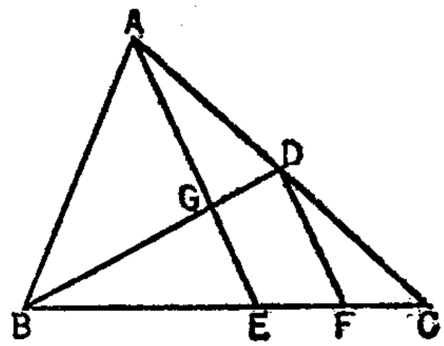
面积比等于相似比的平方 $1:2\to1^2:2^2=1:4$。

问 题

在右图所示的△ABC中，D、E分别为AC、BC的中点，F为EC的中点，G为AE和BD的交点。请回答下列问题。

（1）△CDF的面积是△ABC面积的几倍？

（2）△BEG的面积是△ABC面积的几倍？



解： 底边在同一直线上并有公共顶点的三角形的面积与底边的长度成正比。
△ABC与△AEC的面积比BC：EC＝2：1。
另外，如果利用相似形的面积比，解题就更简单。

（1）△CDF∽△CAE

相似比＝CD：CA＝1：2→面积比＝$1^2:2^2=1:4$

△CDF：△CAE：△ABC的面积比1：4：8

因此，$\triangle CDF=\triangle ABC\times\frac{1}{8}$

(2) $\triangle BEG \backsim \triangle BFD$

相似比BE：EF=2：3→面积比$2^2:3^2=4:9$

$\triangle BFD$和$\triangle BCD$的面积比=BF：BC=3：4

$\triangle BCD$和$\triangle ABC$的面积比=CD：AC=1：2

因此，$\triangle BEG:\triangle BFD:\triangle BCD:\triangle ABC$的面积比=4:9:12:24

$$\triangle BEG=\triangle ABC\times\frac{4}{24}=\triangle ABC\times\frac{1}{6}$$

体积比 一切立方体均是相似形。

边长分别为$a$cm和$3a$cm的立方体A和B是相似形，即立方体A∽立方体B。

相似比$a:3a=1:3$→面积比$1^2:3^2=1:9$

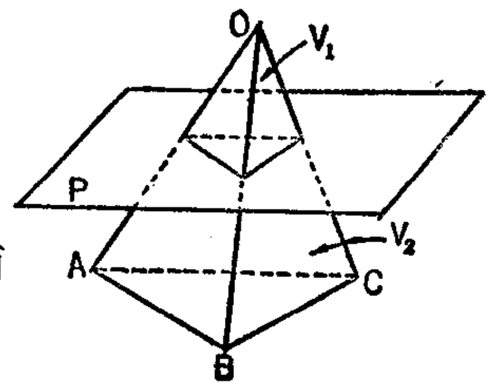
体积比$a^3:(3a)^3=a^3:27a^3=1:27$

体积比等于相似比的立方$1:3\rightarrow1^3:3^3=1:27$

问　题

右图中，平面P与三棱锥OABC的底面ABC平行并平分其高度。

设三棱锥被平面P截开成两部分的体积为V_1、V_2，问V_2是V_1的几倍？



解：三棱锥OABC∽三棱锥V_1，相似比1：2，

体积比$1^3:2^3=1:8=V_1:V_1+V_2$

因此，$V_1:V_2=1:8-1=1:7$，$V_2=V_1\times7$。

（13） 概 率

概 率 对未来的预测，在实际中，可以说相当难于明确提出。这里只涉及到在数量上能够进行处理的情况。

概率有两种：

①统计概率 根据在一定条件下进行试验的次数和观察而求得的相对频率。

可用（期待出现事件的次数）÷（进行实验的次数）求相对频数。

②数学概率 对于某次试验和观察可能出现的结果有几种，但出现的各个结果的可能性是相同的事件，用

（期待发生事件的次数）÷（可能出现的结果的总数）计算出这种概率。

随着试验次数的增加，用第①种概率统计的方法求得的概率逐渐接近用第②种方法求得的概率。

概率公式 $P=\dfrac{n}{N}$ $\begin{cases} n\text{期待发生事件的数；} \\ N\text{可能出现的结果的总数。} \end{cases}$

例如，掷一粒骰子，期待着出现1点的结果时的数n为1，因为掷一次骰子可能出现的结果的总数N为6，所以出现1点的概率是1/6。

从期待结果的角度来看 $n\leqslant N$。

因此有 $0\leqslant P=\dfrac{n}{N}\leqslant 1$的关系。

当$n=0$时，$P=0$。这是期待绝对不可能发生的结果。例如，掷骰子，出现7点的概率为0。当$n=N$时，$P=1$。期待的结果必然发生。例如掷一粒骰子，从1点到6点，随便出现

哪个点的概率是1。

余事件 我们把不出现1点的事件叫做出现1点的余事件。

一般，设期待的事件数为n，不期待出现的事件数为$N-n$，那么：

$$余事件的概率=\frac{N-n}{N}=\frac{N}{N}-\frac{n}{N}=1-\frac{n}{N}$$

设期待出现事件的概率是$P=\frac{n}{N}$，它的余事件的概率是$\overline{P}$，$\overline{P}=1-\frac{n}{N}=1-P$，可由最初的概率求出余事件概率。

（例）在抛三枚硬币时，全部出现正面的概率P是

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \\ N=2^3=8 \end{array}\right\} \qquad \therefore P=\frac{1}{8}$$

它的余事件$\overline{P}$（没有全部出现正面的概率）是：

$$\overline{P}=1-P=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

概率计算实例 “袋内放入红玉五颗、白玉三颗、黑玉四颗，一共十二颗玉”。

① 取出一颗是红玉的概率为$\frac{5}{12}$，

白玉的概率为$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$；

② 取出两颗，它们都是红玉的概率P是：

$$n={}_5C_2=\frac{5\times4}{1\times2}=10$$

$$N={}_{12}C_2=\frac{12\times11}{1\times2}=66$$

$$\therefore P=\frac{n}{N}=\frac{10}{66}=\frac{5}{33}$$

③ 连续取出两次，按红黑的顺序放回的概率是：

$$\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{5}{33}$$

④ 把第一次取出的放回袋内，然后再取第二次，是红黑顺序的概率是：

$$\frac{5}{12}\times\frac{4}{12}=\frac{5}{36}$$

"同时投掷大小两个骰子时，可能出现事件的总数是 $6^2=36$……。"

① 出现的点数的和是4以下的概率

期待出现的事件是（1,1），（1,2），（1,3），（2,1）（2,2），（3，1），$n=6$

因此 $$\frac{n}{N}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

② 出现点数的和大于4的概率，因为这个概率是①事件的余事件的概率，所以是

$$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

③ 出现相同点数的概率

由于（1，1），（2，2）……（6，6）$n=6$ $\therefore P=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$。

④ 出现不是相同点数的概率

$$P=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

（14）样 本 调 查

关于抽样统计，在二年级里我们学习了求代表值的方法。原本统计工作必须经过全面的调查为好。但是，在总体资料非常多的情况下，限于调查费用和时间的关系，往往采取通过局部调查来推断总体的方法，这种方法也能满足要求。

总 体 国情调查，是对全国情况的调查，像这样的调查叫做总数调查。对工厂产品质量的调查，是从全部产品中适当地挑出一些产品检查，这种挑出产品（样本）的工作就是做调查。这相对于总数调查，叫做样本调查。我们把选取对象的全体称为总体。

抽 样 从总体中抽出作为调查对象的样本时，如果有意地选取，那么，抽中的样本不能正确地代表总体。为此，抽样必须排除主观意识的影响。这种不受主观意识影响的抽样叫做随机抽样法。

总体的推断 抽中的样本能正确地代表总体时，可以判断全部样本的平均就是总体的平均。另外，根据样本的分类，可以判断总体的构成。

6. 考试对策

（1） 考试的目的

何谓学力 脑筋的好或不好，在学校里最终往往以成绩的好坏来判定。

“脑筋的确好，但成绩不太好……”我们常听到这样的话”。“脑筋的确好”这句话，只不过是辩解词，是想表白成绩不好是无可奈何的事。

因此，需要设法找到“使成绩好起来”的方法，并研究考试的对策，提高学习的成绩。

在学校里，所谓学力就是成绩。学生的家庭通知书中的“5、4、3、2、1”的评分，考试的分数，都是学力的表示形式。

考试的目的 检查通过上课学生对学习内容的理解和应用的能力，达到某种程度的手段，就是考试。

近来常听说“考试是排名次的手段”。由考试的成绩排名次，有一定的意义。即使对这样做的结果有赞成有批评，当前还是不能取消考试。

从通过考试可以划分出脑筋好和脑筋不好的想法来看，以此来提高学力，在实际上是相当不容易的。

考试的另一个目的 不用查词典便可知道，考试就是试试看的意思。试什么呢？试试是否能把自认为理解了的东西应用于实际中。人们对某个问题想错了、误解了是常有的事。知错而改反而是好事。害怕找出错误，成绩差怕考

试，背着这些思想负担实在没有必要。但是，抱着错误不放更可怕。要改正错误，首先得找出错误在什么地方。

对于有差错或不完善的地方，倘若不说明原因，仅批个“差”字，是无从改正的。无论谁有了错误，都希望具体知道错误的内容。

考试，可以说是具体地指出错误的唯一机会。

善于总结考试

总结考试的结果是理所应当做的工作。因为仅仅参加考试是不会提高学力的，即使参加几次也不会获得预期的好成绩。

考试的目的是发现问题，下一步如果没有得力的改正措施，那么，参加考试本身对于达到提高学力的目的就变得毫无意义。

这里举个汽车的例子。车子有了故障，虽然发现了，但不理它，照样开着跑，终究会酿成大的事故。

学习何尝不是如此呢？只是不大会引起事故罢了。有的人不管怎样努力学习，成绩却丝毫上不去，学力也没有提高，因而发出了“我是个笨蛋”的感叹。这是丧失自信心的表现。虽说是自己造成的结果，但说这样的话没有用。

克服缺点的方法

从考试的结果具体地发现了自己没有充分理解的地方后，按下面的方法学习。

① 打开课本，再次钻研没有十分理解的地方。照原来错误的概念解问题，有百害而无一利。

② 从习题集中找出同样性质的问题，然后至少亲自解4、5个题目并对照答案。如果答对了，说明理解了；答错了，应当彻底地查原因并克服。

（2）出题者的立场

考试的目标 应当有目的地行动，并牢牢地抓住行动的目的。不应当脱离目的、毫无意义地思考问题。这可以说是学习数学的根本。初、高中阶段，学习数学的目的并不是为了成为数学家，而是要养成把在数学中学到的思维方法应用到现实生活中的习惯。

当然，参加考试也有它的目的，平日学习效果如何，有多大程度的提高，不足之处在什么地方，作为学生个人希望了解，作为教师，为了把课进行下去，也希望做重点了解。

教师根据考试的结果检查以往的讲课效果、制定今后的教学计划和细节，以帮助学生更深入地理解。

期中考试和期末考试 现在中学里，一般每学期都定期集中考试（有时考五门）。不用说，数学是必考之列。

到了三年级情况稍有不同。期中考试的主要目的是检查通过一阶段上课后学生对教学内容理解的程度，因此，出题的范围限制在前期定期考试以后到本次考试之前的内容。期末的出题范围是整个学期的全部教学内容。然而，就一个单元内，有的内容重要，有的并不重要，有的则与其他单元有联系，所以一概死记硬背是最坏的学习方法。

根据授课的内容出题 个别学力和理解力都比其他学生强的学生，有时考试成绩竟然很差，连平均分都达不到。

这里面的原因固然很多，但最大的原因莫过于轻视课堂学习。

教师希望通过考试了解一下学生对教学内容掌握的程度，所以作为考试的对策，首先应把重点放在正确理解讲课

的内容上。

因为讲课和教科书说明问题透彻、易懂，所以要以上课和阅读课本为主，偏重难解的习题集和参考书，不是有效地提高学习成绩的好方法。特别是一、二年级学习数学基础知识的阶段。轻视课本和上课有百害而无一利，这样说绝不过分。

小测验

笔者屡次提到学习数学不是单凭记忆而是思考。然而，思考如果没有记忆作基础，解题时同样一筹莫展。

除了定期考试以外，有时在课堂上需要进行叫做小测验的考试。小测验的目的是，了解学生是否记住了最基本、最重要的概念。因而，平时注重复习的话，就没有预先特别准备的必要。

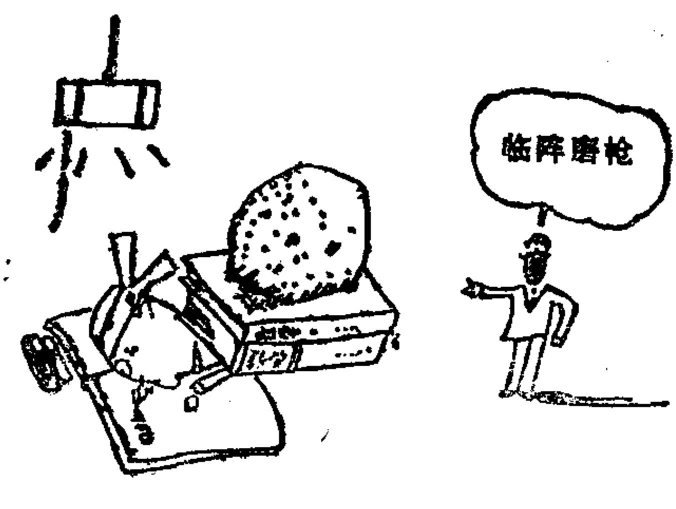
（3） 学 生 的 立 场

平日学习第一重要

“明天要考试，今天晚上得用功。”持这种学习态度参加数学考试是要不得的。

俗话说的“临阵磨枪”式的学习方法，不会带来好的数学考试成绩。

有位同学的母亲，在定期考试后约第10天焦虑地说：这次考数学从来没有这样用功过，满以为会得到好过以往的成绩，不料，反倒比哪一次都差。怎么办呢？”，流露出迷惑不解的神情。



这种迷惑不解之感，当然有一定的原因。这位学生在考

试时的表现与平日大不相同。平时，他对预习和复习无疑相当偷懒，由于平时学习不扎实，心里没有底，所以临考试时深感必须比平常加倍努力才行。因此，这位母亲见到了“从未有过的用功学数学”那样奋发的情景。

如果平时学习松松垮垮，靠临阵突击学一下，是不可能获得好成绩的。

平时认真进行预习和复习是最好的考试对策。

考试日期公布以后应注意的问题

一般，不论哪一所中学，大约提前一周公布定期考试的日程。

这是一种警告“只有一周的时间了，得加劲儿学习……。”

特别是考试日期公布以后，不要只顾准备考试，而忽略了对当前课程的学习。在这阶段，对语文、社会、数学……等需平时努力的功课尤其要努力学习。

对数学来说，考试之前临阵磨枪是无济于事的。即便提前一周努力，收效也不大。越往高年级越是这样。

考数学的前一天要早睡，而且考试的当天应比平时起得早。人脑的工作因人而异，一般在起床后3、4小时才开始活跃。

如果考试的头一天晚上学到深夜，早晨贪睡晚起，考试时就会处于半睡状态，本来会的东西也就不会了。

考试时应注意的问题

发给试卷考试即开始。记住了的东西，如果急急忙忙地写也会忘掉，所以一定要冷静。

事先记住答案一写就行的这类数学题是不会有的。经过一番计算、利用定理后方找出新的关系这类题居大多数。

而且，即便会做的题目，匆匆忙忙地答，也会由于不慎而出现差错。

从出题者的立场来说，预计考试的平均分大约达到50分到60分之间而出题；从应试者的立场考虑，要记住，首先要努力达到这个平均分数。

达到满分，恐怕全年级至多也不过2～3人，得80分可以说是很不错的成绩了。

每做完一题要验算

全部题目都做完后，有富裕时间才验算，这种方法不可取。做完一题后随即验算，然后再进行下一题，这比什么都关键。

特别是对于有几个提问且要利用最初的答案方能往下解的考题，如果第一问的答案错了，那么，第二问即便是做出来了也是白费。

“会做，可是算错了。”这样的表白没有什么用。由于粗心引起计算上的差错和错写答案，都属于能力问题。

考试的时间不够时

由于计算多花了时间，如若要把全部试题都做完而又没有时间验算时，就没有必要题题都做，只完成一半或三分之二的试题，验算的时间便绰绰有余了。

出题者是根据成绩最好的学生有时间完成验算的出题量而出题的。

加之由于考试时间不够，所以做题时应当考虑有没有另外更高明的思考方法和计算方法。费事的计算方法不仅花费时间，而且也容易引起差错。

（4）三年级的考试

升到三年级后

无论谁升到三年级后，不会不意识到，明年二月的高中入学考试迫在眉睫。

这对教师来说也不例外，自然表现在讲课上与一、二年

级时不同。

考试出题的内容也应当反映这个意识和发生变化。最早从第一学期开始，最晚自第二学期起，明显地形成了这种意识。

具体地说，出题的范围从目前课程的较窄范围扩大到一二年级学过的内容。而且，由于已掌握许多知识，所以不论解题的方法还是解题的窍门，都是多种多样的。

在解法上下功夫

学完了乘法公式接着学因式分解。对于这些知识，如果只停留在懂了的水平上那是不行的。不会利用理解了的知识，就等于有宝不用。

这里，请考虑下面的问题。

问　题

当$x=\sqrt{3}-1$时，求x^2+2x+4的值

解：首先将$\sqrt{3}-1$代入x

$(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)+4$　利用乘法公式

$=3-2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}-2+4=6$

用其他的解法，把　$x=\sqrt{3}-1$中的1移项，

$x+1=\sqrt{3}$　把等式的两边平方

$(x+1)^2=3$　所以$x^2+2x+1=3$

然后在等式的两边加3，得$x^2+2x+4=6$

哪一种方法好呢？单从计算难易的角度来看，后一种方法比较容易。但是，恐怕是相当不容易想出来的解法。

计算容易，自然出现的差错少，算得也快。

因此，下功夫寻找简单的计算方法，应该成为日常学习的任务。还是本书屡次提到的那句话，只有在解法上多动脑

筋，才是学数学。

下面的题，给我们生动地展示了解法上的窍门。实际上这些是考高中的试题。

问　题

当等式$x^2=x+1$（A）成立时，

1．求使（A）成立的x值。

2．当(A)成立时，假如x^3仿照下面的形式，则可以变形成x的一次式。

$$x^3=x\cdot x^2=x(x+1)=x^2+x$$
$$=(x+1)+x=2x+1$$

同样，请将x^4变形成x的一次式。

3．使（A）成立的x值为正数时，求$2x^4-x^3-3$的值。

解：　1．是简单的二次方程题，不能用因式分解法解。对于二次方程，如果可以用因式分解法解则优先利用，因为是再好没有的求解方法，计算简单。复杂的计算则是出差错的根源。

到了三年级，由于掌握的解题方法多了，所以仅满足于把结果做出来就行的学习态度是很难提高学力的。

能不能进行因式分解，只有认真地、大量地解题，方有判断能力。因此应多做练习题。

不能因式分解时则利用公式法。

移项　$x^2-x-1=0$　　$\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

2．如果理解了范例，本题就不难做出。

$$x^4=x\cdot x^3=x(2x+1)=2x^2+x$$

$$=2(x+1)+x=3x+2$$

或 $$x^4=(x^2)^2=(x+1)^2=x^2+2x+1$$
$$=(x+1)+2x+1=3x+2$$

上面的解法用哪一种都可以。肯开动脑筋思索不同的解法，就能尝到学数学的乐趣。

3. $2x^4-x^3-3=2(3x+2)-(2x+1)-3$

$$=6x+4-2x-1-3=4x=4\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$=2\pm2\sqrt{5}$$

以上每一题的计算都不怎么复杂。需进行复杂计算时，就要在计算方法上下一番功夫。参考书和习题集上的解题方法未必是最好的方法，你自己想出的方法，不正是向那些解法的挑战吗？

前后单元联系学

到了初三，学过的知识相当可观。以往知识的积累就是解题的实力。凭着这些积累的知识，才可能开扩思路、运用各种各样的方法解题。有了达到目的的几条通道是多么令人高兴！

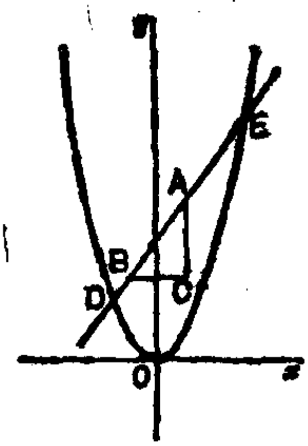
例如关于坐标、图象和函数，在一年级我们学习了坐标轴、坐标、正比例和反比例的图象；二年级学了一次函数的图象是一条直线、截距y和直线的倾斜度；三年级大致学完了二次函数、反函数、定义域和值域等。

以上都是高中学习的基础。因而，出试题必须考虑这些内容。

问 题

下图的曲线为$y=x^2$的抛物线。通过点（3,14）、倾斜度为2的直线与抛物线的交点是D和E。△ABC

是直角三角形，BC＝2.5，AC＝5，∠BCA＝90°。斜边AB在直线DE上，BC边与x轴平行移动，但不许△ABC越出直线DE和抛物线包围的部分。请在下面的$\boxed{\quad\quad}$中填写适当的数字和式子。



①求直线DE的函数式，$y=\boxed{\quad\quad}$

交点D、E的坐标是$\boxed{\quad\quad}$和$\boxed{\quad\quad}$。

②△ABC底边BC上的点的x坐标在$\boxed{\quad\quad}$到$\boxed{\quad\quad}$的范围。

③△ABC可以移动范围的面积是$\boxed{\quad\quad}$。

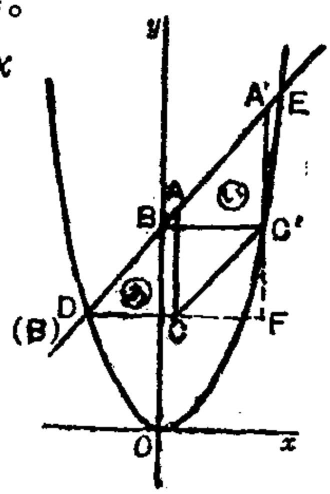
解：①　已知DE直线的倾斜度为2，由此得出$y=2x+h$。再求h。因为直线DE通过点（3,14），因而$14=2\times3+h$，得出$h=8$。所求直线DE的函数式是$y=2x+8$。

这是二年级的学习范围。

因为D、E是函数$y=x^2$的图象和直线$y=2x+8$的交点，所以解$y=x^2$和$y=2x+8$的方程组即可求出D、E的坐标。

解$x^2=2x+8$这个二次方程属于三年级的学习范围。把$2x+8$移项，得$x^2-2x-8=0$，可以分解因式：

$(x-4)(x+2)=0$，所以$x=-2$和4。



从图考虑D和E的位置关系。D和E的x坐标分别是－2和4，将各个值代入$y=x^2$中求y的坐标，得：

D（－2，4）　　E（4，16）

②△ABC的移动范围是从あ的位置到い的位置(如右图所示）。

必须注意顶点A不能移到E点。

上高中以后有的人还是和中学时一样，觉得数学画图麻烦，所以发生了不该发生的差错。

△ABC的顶点C的y坐标比顶点A的y坐标少5，所以$y=2x+8-5$；又因为C点最远可以移动到$y=x^2$的图象上，求得$2x+8-5=x^2$的正解，即是C点的x坐标：

$x^2-2x-3=0$　　$(x-3)(x+1)=0$　　$\therefore x=3$

因此$-2\leqslant x\leqslant 3$

③ 所求的面积是梯形DCC′A′的面积。

$$\triangle DFA'-\triangle CFC'=DF\times FA'\times\frac{1}{2}-CF\times FC'\times\frac{1}{2}$$

$$=5\times(14-4)\times\frac{1}{2}-(5-2.5)\times(9-4)\times\frac{1}{2}$$

$$=50\times10\times\frac{1}{2}-2.5\times5\times\frac{1}{2}=25-6.25$$

$$=18.75$$

求图形位置变化的面积，要多考虑几种方法。有时计算的过程比较复杂，即使在计算时格外小心，要想得到正确的答案也相当不容易。计算能力不仅体现在能迅速而又准确地进行四则运算，而且还体现在灵活运用图形性质的能力和所使用计算方法的巧妙。

高中入学考试与平日学习

日本的高中升学率几乎是100%。因此，到了三年级的第二学期，不论学生还是教师，在掌握什么内容方面都处处意识到入学考试的问题。

三年级的日常学习，不应只限于三年级的学习事项，还必须为入学考试做学习上的其他准备。由于考试的科目不单单是数学，学习时间的安排等不要以为那么简单。既要有充

足的睡眠时间，又要保证学习和运动的时间。然而，到了临近考试的日期，就很难坚持了，这里特别提起注意。

在学习三年级课程的同时，望留心查阅一、二年级已学过与现在有联系的内容。如果注意联系过去的内容进行学习，那么没有必要做特别的应试准备。

对中学生来说，学好中学的课程足够了。但是，每年的高中入学考试的竞争相当激烈，且不论这件事本身的好坏，为了在激烈的竞争中不落伍，必须着实地注意增长实力才行。要做到这一点实际上并不难。严格按照上面提到的注意点去做，坚持日常学习不断积累，定会取得满意的成绩。

（5）有关升学考试

考试时的选题技巧

纵观以往的高中入学试卷，出题量大部分在15～20题之间，每题的分数是5分或10分。与其他科目比较，分数相差大。

难题给的分数多，容易题给的分数少。一般做容易的。但不管做难题还是容易题，应掌握最后拿分大体上一样的原则。

慎重再慎重

题目越容易，出现粗心大意的错误也就越多。

不言而喻，先从容易题入手。关键的是，要一题一题慎重地做。因为觉得题目容易，不小心，结果出现差错，最终会不及格。

在学校里，这次考试失败，下次还可以努力弥补。但入学考试的情况就不同了，必须等待一年之后才有机会再考。

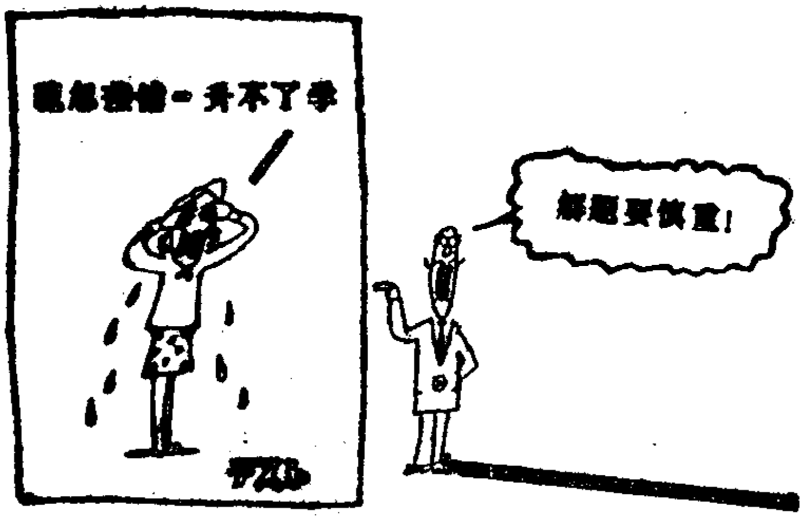
一定要避免看错题目、忽略或看漏条件以及抄错答案等等。要平心静气，慎重再慎重地解答。

一定要验算

禁止出现因不慎而造成的差错。为了避免这样的错误，除了小心地解题外，重要的是，每当做完一题后应随即验算。

特别是分成几个小问题的提问，而又利用第一个问的答案来解第二个问的这类题目，如果第一问的答案错了，那么就会产生以后的答案也都错了的连锁反应。

在入学考试题中，象这样分开几个问题提问的大题较多，希望注意。



验算方法要多样化

“分解因式$5-6x+x^2$”，解这样的题相当容易。

开始小心地把上式按x的降幂顺序整理成x^2-6x+5，然后利用因式分解公式。因为两数的积为5，和为-6，所以得出$(x-1)(x-5)$。

验算时，用同样的方法做出相同的结果，不如用乘法公式将$(x-1)(x-5)$展开，再把结果同原来的式子比较。后一种方法不仅验算的速度快，而且还可确实把握答案的正确性。

所以，与其用开始的解法再一次求解，莫如用另外的方法进行验算，既快又准确。

为此，应当牢固地掌握基础知识，并熟悉各种各样的解

题方法，

有的人解方程组唯一的招数是加减法。仅就这一点，可以说是不受赞许的学习态度。考高中前，对自己只满足于能做出正确的答案就行的要求，其学习效果反而差。

自己亲自画图 对于图形题，通常在题目的旁边都有图。但是，大部分画得不太正规。有的45°角画出的不是45°，有的中点不在线段的正中间。用量图的方法求线段的长度和角度大小的人不是没有。由于图画得不正确引起思路上的混乱的情况也不少。

根据给出的条件，尽量自己现作正规的图。依靠这个图，往往可以发现被忽略了的条件和隐藏的关系，进而找到比较简单的解答和证明方法。

推测出题的倾向 学习大体上结束时，不妨考虑一下志愿学校的出题倾向。

出题的范围广，出题量又有限，所以应分析哪些地方是出题的范围，哪些地方不是。不同的学校出题的重点多少有些不同。

比较一下过去几年的高中入学试题就会发现，有的学校每年都有关于二次方程和相似形之类题。

在学习基本上结束的阶段，大约三年级的第二学期，查阅一下书店里出售的名校编著的过去五年高中入学试题集，也有所帮助。

从全国的情况看，一般说来，大部分从下面的单元出题。

①函数和图象； ②方程式、不等式及其应用；
③集合和逻辑； ④排列、组合、概率；
⑤数的性质和计算； ⑥圆和球；

⑦勾股弦定理；　　　　⑧全等和相似的计算，证明；
⑨运算法则；　　　　　⑩立体图形。

最近的出题倾向是，考察思维能力方面的题目多于只单纯要求计算的题目。

出题者的目的

上面已提到，近二、三年的入学考试题中，考察思维能力的题目顿时多起来。

出题者的目的，不仅要了解学生对中学里所学的基础知识记住了多少、理解到什么程度、会不会运用，而且还要了解遇见新问题时利用学过的基础知识处理问题、解决问题的能力。

那么，出题者会出什么样的题目？又应当采取什么对策呢？

难题的比重

为了应试，虽然钻研了书店出售的习题集，但考题中仍然还有4、5题在这些习题集中没有见到过。

其他试题，因为与习题集中的题相类似，所以，先从已熟悉的解法入手，一步一步慎重地解题直至得出答案，随后验算，然后解下一题。

高中老师出下一年的入学考试题，大约要花上半年到一年的时间，可见很费脑筋。这些题不是过去常见的老一套，而是翻新的、颇使应试者伤脑筋的题。这类题约占二成。

这种题解到什么程度，才算达到正确的答案，往往关系到能否合格。

其他容易的题占八成。如果在这类题上出现疏忽差错，特别是在竞争激烈的高中入学考试中，考取的希望就比较渺茫。

善于处理新遇到的符号

学会处理在形式上中学里没有见过的问题，也可以说是对付难题的有效对策之一。

为了考察考生灵活运用已学过的知识的能力和思维能力，包含新符号的题目和形式新的题目渐多起来。

例如，芝浦工大高中于1973年出了下面这样的入学考试题：

问　题

仿照 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 计算。

计算例题 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\times4-2\times1=10$

①求 $\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ 的值。

②满足 $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$ 时x的值是多少？

上高中，进入大学以后方正式学习这种计算符号。

它叫做行列式计算。

上面的“计算例题”是很普通的行列式运算，自己亲自作一作计算例子，很快就能理解计算的规则，计算起来并不难。

解： ① $\dfrac{7\times8-5\times6}{6\times5-7\times8} = \dfrac{56-30}{30-56} = \dfrac{26}{-26} = -1$

② $(x^2-2)+(6-x)=7$，是简单的二次方程。

$$x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

修道高中也出过同样形式的题目。关于符号，不论哪所学校出的题，均有详细的说明，认真读后便能掌握运算方法。

——问　题——

规定符号$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$的值，按$aei+dhc+gbf-afh-bdi-ceg$计算。

① 求 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的值。

② 求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix}$ 的值并分解因式。

解：① 注意严格遵守运算规则。

$1\times0\times1+5\times2\times2+5\times(-1)\times3-1\times3\times2-(-1)\times5\times1-2\times0\times5$

$=0+20-15-6+5-0=4$

② $b+ab^2+a^2-b^2-a-a^2b$

$=(ab^2-a^2b)+(a^2-b^2)-(a-b)$

$=-ab(a-b)+(a-b)(a+b)-(a-b)$

$=(a-b)[-ab+(a+b)-1]$

$=(a-b)(a+b-ab-1)$

有点复杂，但没有超出熟悉的因式分解范围。

遇到新符号的对策是看懂说明

出这类题不只是为了考察考生在学校学到的功课，还为了考察思维能力。对于没学过的东西，初次遇到谁都免不了有些困难。

初次见到的题目，如果没有详细的说明，谁也理解不了。对这类题的说明比针对中学课本里学过的内容而出的题更为详细。只要认真读说明，其内容是可以理解的，而且比起其他的题目反倒更容易做些。

例如，在大手前高中的入学考试题中有这样的题：

——问　题——

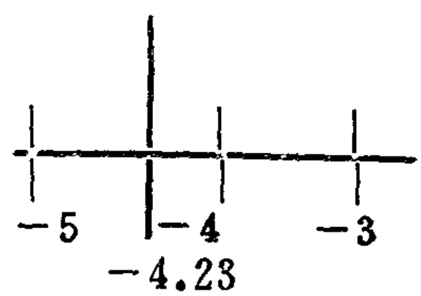
> 设〔x〕表示不大于x的最大整数。
>
> 例如 $\frac{10}{3}=3.33\cdots\cdots$所以不大于$\frac{10}{3}$的最大整数是3。
>
> 因此 $\left[\frac{10}{3}\right]=3$
>
> 在下面的$\boxed{\quad\quad}$中填入适当的整数：
>
> （1）$[\sqrt{5}]=\boxed{\quad\quad}$
>
> （2）$\left[-1\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\right]=\boxed{\quad}$

解：①$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$　　因此$2<\sqrt{5}<3$

$\therefore\ \sqrt{5}=2.\cdots\cdots$　　　　$\therefore[\sqrt{5}]=2$

② $\left[-1\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}-3\right]=\left[-1\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-3\right]$

$=[-4.23\cdots\cdots]$



遇到负数时注意，由右边的数轴知$[-4.23\cdots\cdots]=-5$

另外，大阪府立中专的考试题也与上题类似。

问　题

设某数为x并以〔x〕符号表示不大于x的最大整数。〔　　〕叫做高斯符号。

例如〔5.6〕=5　　〔4〕=4

请回答下列问题。

第1题　下面各个数的最大整数是什么?

①〔0.01〕　②〔−7.03〕　③〔$\sqrt{7}$〕④〔$-\sqrt{11}$〕

第2题　设$x=\sqrt{2}$，$y=-6.3$，$z=2.6$，求下面各式的值。

①〔$x+y^2-z$〕　②〔〔x〕y+〔z〕〕

③〔xy〔z〕〕　④〔$x-y$〔z〕〕

第3题　在下面的两个等式中，显然x和y是整数时等式成立。如果x和y不是整数等式也成立时，求每组的x和y值。

①〔x〕+〔y〕=〔$x+y$〕　②〔xy〕=〔x〕〔y〕

第4题　下面的等式成立时求一组x和y的值。

〔$x+y$〕=〔x〕+〔y〕+1

解：第1题　①〔0.01〕=0　②〔−7.03〕=−8

③〔$\sqrt{7}$〕=2 ④$\sqrt{9}<\sqrt{11}<\sqrt{16}$，$3<\sqrt{11}<4$，$\sqrt{11}=3.\cdots\cdots$

〔$-\sqrt{11}$〕=〔$-3.\cdots\cdots$〕=−4

第2题　①〔$\sqrt{2}+(-6.3)^2-2.6$〕=〔$\sqrt{2}+39.69-2.6$〕

=〔$\sqrt{2}+37.09$〕=〔$1\cdots\cdots+37.09$〕=38

即使37.09的小数部分加上$\sqrt{2}$的值的小数部分也不会向前进一位，所以所求的值为38。

②〔〔x〕y+〔z〕〕=〔〔$\sqrt{2}$〕×(−6.3)

$+[2.6]]$

$=[1\times(-6.3)+2=[-6.3+2]=[-4.3]$

$=-5$

严格遵守符号的规定是运算的关键。过于自信自己的计算能力用心算，有时导致出乎意料的粗心差错。

③ $[xy[z]]=[\sqrt{2}\times(-6.3)\times[2.6]]$

$=[1.41\times(-6.3)\times2]$

$=[1.41\times(-12.6)]$

$=[-17.766\cdots\cdots]=-18$

$\sqrt{2}$ 的值是1.41……，在中学阶段实际上不要求计算（叫做开方）。中学考试时，一般此时给出$\sqrt{2}=1.41$的值。因此，可以说本题不是中学的范围。严格地说，有时有的高中入学考试题超出了中学的学习范围。

④ $[x-[y]z]=[\sqrt{2}-[-6.3]\times2.6]$

$=[\sqrt{2}-(-7)\times2.6]$

$=[1.41+18.2]=[+19.6\cdots]=19$

如果不熟记$\sqrt{2}$ 的值，这个题也很难得出正确的答案。

第3题　①只要小数点以后的和不足1就可以。

所以　$x=1.1$，$y=2.1$

象这样举例给出答案的情况，数值尽量简单。

②小数点以后的积不是1就可以。

所以　$x=1.1$，$y=2.1$

第4题　小数点以下的和超过1，可以向前进一位，即满足此题要求。所以，$x=1.5$，$y=2.6$

也可以考虑其他的数值。关键是抓住条件，尽量用简单的数值回答。

有时出题超出范围 有的入学考试题有时稍微超出中学的学习范围。之所以出现这种现象，是因为高中教师对中学的教学不太了解造成的。了解一下现时中学的数学进度，也就不会出现超出中学学习范围的题目。

县立高中或府立都立高中的入学考试题，很少超出中学的学习范围。然而，竞争激烈而难考的、有名望的学校，出的题目有时则会稍许超出中学学习的范围。

因此，不论出的题目是否越出范围，都希望能合格的话，就需要掌握处理这类题的能力。当然，如果现时中学的课程学得很扎实，对付这种题还是绰绰有余的。

分式的计算 所出的题经常超越中学的范围的有分式计算。

分母中含有字母的式子的计算叫做分式计算。涉及分式的加、减、乘、除法的题目，现行的中学课本里连一道题也没有。

几年前，对中学数学的学习范围作了多方面的修改。在这之前，分式计算曾列入中学的学习范围。

下面是1974年2月桐荫高中出的入学考试题。

问　题

将 $\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} \div \dfrac{3x^2+7x+2}{6x^2+5x+1}$ 化简

解：首先将各式进行因式分解然后约分。

①$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

②$2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2)$

③$3x^2+7x+2=(3x+1)(x+2)$

④$6x^2+5x+1=(3x+1)(2x+1)$

②、③和④的因式分解，显然也不属于中学的因式分解范围。分解x^2的系数不是1的二次三项式，用普通叫做“斜交叉”的因式分解法。在修改之前，这种解法也列入中学的学习范围，现在则放在高中一年级学习。

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(2x+1)(x-2)}\times\frac{(3x+1)(2x+1)}{(3x+1)(x+2)}=\frac{x+1}{x+2}$$

让考生做超出学习范围的问题的确有困难。为此中学校方也可以提出意见和抗议。但相当不好解决。除了桐荫高中外，育英中专、青山学院高中部、国学院高中等也出过分式计算题。

由于这种因式分解和分式计算不属于中学的学习范围，要想学习，只有向高中一年级的数学课本和习题集求教，别无他法。现时的初中和高中的学习范围相互联系，也是造成超范围出题的原因。

初、高中的数学有联系

数学的一个一个单元之间不是孤立的，数学学习是一个单元一个单元地循序渐进地进行的。

现在中学课本里各个单元的学习内容仅是中学的部分，其余未学部分待上高中后继续学完。

上述的因式分解是其中的一例。除了因式分解外，还有下面的情况。

用公式法解二次方程，根号（$\sqrt{\ }$）内计算的结果为负数：

$$x^2+2x-3=0\text{解得}\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times3}}{2}$$

这种情况在中学里作为“无解”处理。在高中，由于引入了虚数（二次方为负数的情况）则可以解。

另外 关于二次函数的图象，中学的学习内容限于图象的顶点是原点或在y轴上，对称轴是y轴，因而，所处理的一般是$y=ax^2$或$y=ax^2+b$这种形式的函数。然而，顶点不在y轴上的情形也有。这是图象平行移动的问题，将在高中一年级学习。这部分内容在教材修改之前也是中学的学习范围。

因此，从出题者的立场或学校（高中）的立场来看，考虑试题时偶尔超出中学的学习范围也在所难免。

大部分考生的学习安排是不会超出范围的。对于范围内的题目，如果能够圆满地解题，合格的可能性就很大。

得分目标80分

超出中学数学范围的题和难题，不会做时，不要悲观。因为其他的题做对了也能达到要求。

努力的目标是，自己觉得有把握的题要沉着地解答；得分的目标是80分。

考场，无论对什么人都是令人生畏的地方，人人都有这方面的体验。无论是平时有把握的题还是难题，一到考场，一概都容易出现意想不到的、粗心大意的错误。

尽管胸有成竹，临场也不可能100％地发挥出平日的水平。

下面列举了最近考取东京都立高中的学生的平均分数。除了普通科目外还包括职业课。

考分提高的倾向，大约从1979、1980年开始明朗起来。经济增长速度下降的趋势，促进了学生纷纷投考公立高中。考生多，竞争自然激烈，因而增加了考取的困难性。

1980年报考东京都立高中普通科的考生人数比招生定额高出1.5倍。其他府县的考生同样也有增加的趋势。抱着强烈的愿望一定要考取志愿学校的学生，就得在激烈的竞争中夺

魁。

公立高中出题受到的约束比私立高中的多。私立学校的出题原则也是不超出中学的学习范围，但有时也免不了违背原则。这一点，公立学校不会发生，请大家放心。

东京都教育委员会每年发布高中入学考试的命题方针。这个方针几乎年年不变。下面是1980年度的命题方针，它是以中学教育课程为基础，以检查正常学习情况下所具备的学力为基本方针。

具体是：

（1）考察学力的命题范围，应根据现行中学的学习指导要领以及“现行中学学习指导要领特例的规定通知”（从1981年度开始在相当大的范围内对指导要领进行了修改，以后应严格遵守修改后的命题范围出题）中的要求，各学科的学习范围都按标准课时数定（数学，一年级大约一周3课时，二年级4课时，三年级4课时）。

（2）各个学科都要按照中学学习指导要领中提出的目标选择基本事项的内容，不得偏向某一方面的领域（不言而喻，每门出题的内容只不过占全部内容的一半，不可能无遗漏地包罗所有的内容。所以哪一部分是重点，哪一部分不是，应该心中有数。基本事项学习结束后，必须考虑出题倾向的对策）。

（3）应注重考察学生的思维能力、判断力、应用能力等，不得偏重于考察记忆力（要求学生临场思维敏捷。另外，上高中以后，单凭记忆提高学习成绩，是造成学习成绩每况愈下的原因）。

下面列出最近东京都立高中入学考试合格者的平均分数。这里只列举普通科目的成绩，职业科目的比这还低。

	77年		78年		79年		80年	
	男	女	男	女	男	女	男	女
语文	66	65	63	69	66	70	65	72
数学	52	46	56	51	49	42	62	60
英语	62	63	58	61	62	64	61	67
合计	189	174	177	181	177	176	188	198

显然，平均分的高低反映了问题的难易。数学的平均分比语文和英语的略低一些，从出题者出题的意图来看，是最大可能限度地使三门课的平均分大致相同。然而这个结果说明考生的数学没有满足出题者的要求。一般说来，思维能力、判断力和应用能力是学习中的薄弱环节。数学学习是培养思维能力最好的练习场所。

7. 参考书和习题集

一、二年级不需要

现在各个中学的数学课，都以按课本的内容顺序编排的习题集作为辅助教材。根据教学进度，查阅这种习题集就可以促进学习，所以不再需要其他特别的参考书。

一、二年级时期，主要学习基本事项。首先要牢固地掌握课堂上所学的知识。如果基础没有打好，只凭兴趣急于求成，不是正确的学习态度。

如何产生对数学的兴趣

日本有一句谚语："唯有爱好，才能擅长"。相反，还有另外一句："虽不擅长，但很爱好"。可见，只要对数学产生了爱好，学习数学就不会有过关之感。

爱好来自兴趣。怎样才能对数学产生兴趣呢？那就是要把心专扑在数学上，关心重视它。

然而必须具备一定的知识才能谈得上关心重视。什么都不懂，也就不会有兴趣或关心。

人类原本是好奇心很强的动物。人类就是从探索周围发生的形形色色光怪陆离的现象开始而创造出现代的发达的科学的。

为了满足对数学的兴趣和好奇心，当前出版了许多数学书。

（1）能诱发对数学兴趣的书

下面所介绍的书目不是教材的直接参考书，它涉及的是数学本身的思维方法和基本的内容。而且，内中选编了许多

智力游戏、课堂外读后使人受益非浅的知识。

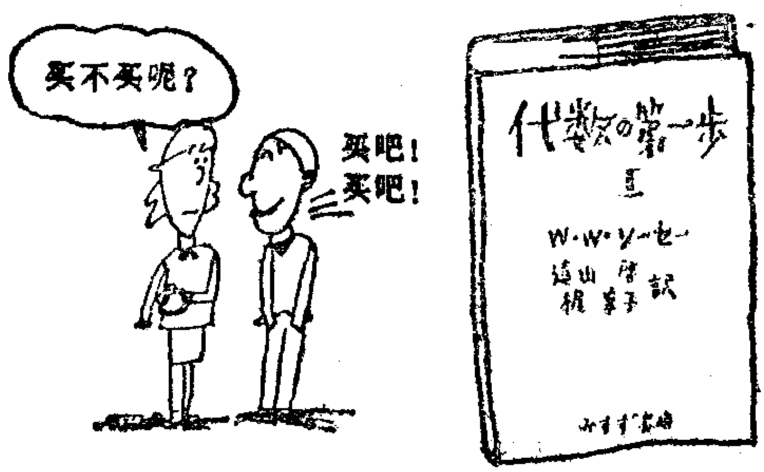
① 代数初步 Ⅰ，Ⅱ　　三铃书店

W·W·索泄/遠山啓，梶亮子译

（由于近来物价高涨，定价不详，故从略。以下同。）

译者在前言中说："……如果从小学早期学习代数，孩子们就不会因别扭的应用题而苦恼。如何从小学早期开始教授代数，对于这个问题，在索泄的《代数初步》中给予了解答"。

本书对未学会用方程解题前的问题，从式子的意义到列式的根据等教科书里所轻描淡写的部分，都作了详细的说明。



本书的作者是英国的数学家，非常关心初等教育。他的其他方面的许多著述，也正在日本翻译出版。因为英国和日本的国情不同，书中的内容令人耳目一新，说明和解法引人入胜。

内容包括小学五、六年级到中学三年级的数学。如果从一开始拿笔和纸演算每一道练习题，那么，相信都可以看懂。（有答案。）

② 代数的再发现 Ⅰ，Ⅱ　讲谈社　補曾书店

W·W·索泄/芦沢　正三泽

与前一本书出自同一作者。本书比前一本稍微深些。对数学兴趣浓厚的人，到了初中二年级第二学期以后方可读懂，因为书中的图比式子还要活跃。

修改以后的中学数学教科书，虽比过去更加重视函数和图象。但还不够。本书以图象为主，所以必须掌握直线图象（一次函数）和抛物线图象（二次函数）的基础知识。

书中涉及到一般课堂上几乎涉及不到的社会现象等，这也是本书特色。

③　百万人的数学　上、下　筑摩书店　筑摩丛书

L·侯古宾/今野　武雄译

本书于1939年出版。作为这一类书是头一次问世。现在已出版很多了，而在当时是畅销书。对中学生来说，有的章节较难懂，但只要从开始耐心坚持看下去，读懂它并不怎么费劲。尽管如此，仍需具备二年级第二学期的学力。

中学生们对迄今为止数学的发展感到突然。之所以产生这样的想法，是由于把数学的发展和社会生活的发展割裂开，而且对这些问题的说明也很简单，于是使得许多内容难于接受。因课时的限制，这种不足在当前似乎不好克服。

本书中的数学历史是穿插在社会发展史中加以说明，阐述问题解法的根据也与教科书和普通参考书不同，正因为如此，更加引起读者的兴趣和好奇心。

本书目录　

第七章　零的曙光

话题从古埃及、希腊时期开始一直到简单的三角比。

下册目录　第八章　周围的世界

第九章　宗教改革几何学

第十章　算术的社会化

第十一章　成长形态的算术

第十二章　国际象棋和扑克牌代数

第十三章　统计

每章的最后都有练习题，书末有答案，极为方便阅读。耐心坚持读下去，就一定会发现，许多人视为枯燥无味的数学是多么的有趣！

一～三章全面概括介绍本书的内容。由目录看，内容较深。尽管如此，读起来还是饶有趣味。

④　　数有活力　　岩波书店　岩波科教书

银林　浩，榊　忠男

分数作除法的时候，为何分子和分母要颠倒过来，有人懂得，但在课堂上并不多作说明。

负数和负数相乘的结果是正数也令人不可思议。

中学里也讲了记数法，书中这部分内容只占1、2课时，以后几乎不提了。

现在中学数学的学习内容相当零散，可以说很难系统地进行学习。

有时，对那样处理的内容有疑问，这就成为以后学习上的障碍。

本书中关于数的处理，讲解得极其详细。该书是以三郎和明子两位中学生同他们的叔叔——大学教授之间的对话形式编写的。与第③本书比，读起来不那么费劲。

极少数的内容属高中一年级范围，大部分是初中的数学内容。

⑤ 函数　　　　岩波书店　岩波科教书

远山　启

中学的数学与小学的算术的最大不同点是有了函数。

函数问题不是一项一项地进行计算，而是把有关的事项总括起来处理，解题方便，或许这就是有时一些人不喜欢数学的原因。

中学一年级学习正比例、反比例；二年级学习一次函数、直线图象；三年级学习二次函数、反函数；断断续续地学习。如要系统地学习函数，则不便于讲课。

同④一样，本书也是以对话的形式编写的。作者是大学的数学老师，希望通过这类书，在更多的人中传播数学起到积极的作用。该书对中学生来说也许稍微深些，但如也能认真读下面的书，相信是能看懂的。

远山　启著　　现代数学对话　岩波新书

无限和连续　　岩波新书

以上的书，紧密地配合中学数学的学习，与其说它们是以趣味为主，还不如说是在补充现在中学数学课的不足方面起很大的作用。

数学离实际生活很远，所以有时产生各种各样的误解，甚至笑话。这决不是数学方面的原因。原因在于缺乏日常常识，词义混淆，定义不明确。智力游戏和数学题往往在那些方面做文章。

⑥ 奇怪的数学　　　　三铃书店

奴斯罗普/松井　政太郎译

本书的副标题是“数学的奇论”。所谓奇论，就是反论

的意思。

反论，似乎当真说的是相反的观点。仔细考虑，实际上是阐明一种真理。

掌握数学的初步知识和数学的思维方法便能看懂这本书。它适于性情稍微乖僻、好捉弄人、好奇心强的人作为参考书。

随着往后翻阅，就会为它的严肃内容而感到吃惊。数学书，表面上似乎多少有些捉弄人。其实，真正的内容是很严肃的。

⑦ 数和图形的话　　岩波书店　岩波科教书

岩堀長慶・伊原信一郎

不喜好图形学习的人较多，这也许是现在中学数学进度方面的原因。

习惯于抽象的思维这是数学学习的特点。从我们周围环境的许多东西中发现共同的类似现象得出的定理所带来的喜悦，可以通过图形学习而获得。

本书的前言中写道：“作者在这本书里试图通过我们在现实当中接触到的事情，以那样便于接受的形式，提供‘使用数学’或‘从数学的角度思考’的好处的例子。”自己独立阅读，独立思考，独立发现，使好奇心得到最大的满足。

⑧ 续编・数学讲话——数和图形　日本广播协会

仲田纪夫　　儿童书籍

与《数和图形的话》比较，本书更接近中学图形的学习内容。

为什么必须证明？图形学习的基础概念，在什么时候、什么情况下形成的？等等，都联系各民族的特点和社会的时代背景加以说明，很有意思。象这样的内容，在学校的正课

时间里，几乎不涉及。

⑨　算得快的算术　　　　共立出版株式会社

阿西莫夫选集　数学编4

石川洋之介译

不管怎样，计算是件麻烦的事。即使简单的计算，也存在技巧问题。本书将教给大家各种各样的计算技巧。有的同学，不论做数学还是算术，光急于算出得数，对计算的方法考虑得不多。

作者阿西莫夫在前言中说："最初，也许读者感到这种方法算得慢。由于全部练习都没有做，所以用书中这些捷径可能比"牢靠"的方法花的时间更多。但希望读者不要气馁，坚持看下去。而且，如果稍有耐心，读者自己就会体会到，几乎无须花很多时间和动脑筋，便可以得出正确的结果"。

总之，由于与小说和漫画不同，阅读数学必须有毅力和耐心。

再者，作者阿西莫夫是美国科幻作家。

⑩　数学游戏箱　　　　　　　　三铃書店

B．A.科鲁德木斯基/物野道・長冲译

具备中学一年级水平就完全可以读懂这本书。也有一些多多少少愚弄人的这一类题，内容活泼。当然，书中的问题课堂上几乎不讲授。

适合的参考书还有很多，这里仅列举比较容易弄到手的而且限于具备现在中学二年级水平就完全可以读懂的书。与教科书不同，不那么枯燥无味。书的最后部分，大多是游戏的内容。这些书俗话叫做智力游戏书。

⑪　智力大王　　　　　　　　钻石社

H．E．铁多尼/藤村　幸三郎，林一译

本书编写的形式多样，有文字题、图形等等。它或许是课余老师出题的参考书。

（2）三年级的习题集

平日学习的习题集 作为每日学习、复习用的习题集，宁可容易些为好。这是因为，它是用来检查是否真正理解了当天上课的内容的。

如果根据难题多、页数多、铅字小的标准来挑选书，那么可以说这种选择的方法不太好。

一年、二年级甚至三年级以后，学校的授课老师都事先给学生准备好这类书。

希望获得课堂以外知识的学生，可以到书店去选择参考书。选择时，重要的是得挑选那些与自己的水平相当的书。

难题多的习题集无助于学力的提高。

近来，只写答案的书不多见了。常见到的则大多有详细的解题步骤和启发性的解法。为了掌握更多的课外知识而自学时，无论怎样努力，还是会遇到许多难点的，在无人指导和帮助的情况下，书中的详细解题步骤就能帮很大的忙。

为了学习更多的课外知识而需要挑选习题集和参考书时，应当选择有详细解法和说明的书。

除此以外，如果有时间，不妨从第七章（1）节介绍的书中，到书店去选择你喜欢的书。

以应试为目标的习题集 在考试对策部分，已提到高中入学的出题范围是中学三年的全部学习内容。因此，对于把一年级的函数基础、正比例、反比例；二年级的一次函数和图象；三年级的二次函数、反函数内容零零散散编排的书，可以说是十分不理想的书。

所以，必须参考那些系统地归纳初中三年的数学的习题集。中学数学习题集和参考书多半着重于应试的对策。

在选择作为应试对策的习题集时，首要的是要考虑自己目前的学习水平。正如同买毛衣或鞋子一样，首先要看是否合体，其次是样子。

同自己的水平比，选择过于容易的书则对学习的提高毫无帮助；选择过于难的书则每解一道题要花很多时间，而且屡解超出自己水平的题亦令人厌烦。

选择的基础是自己的水平。书店里参考书的种类相当多，其中哪些好，哪些不好，不能一概而论。自己拿不定主意选择哪一种时，最好的方法是向教课的老师求教。

有的人什么样的习题集和参考书都买，结果是，原先买的几乎没看，又去买新的。这是最坏的学习态度。

习题集好或不好，在于自己怎样利用它。

应试用习题集中的问题，一般按一、二、三年级学习单元的目录顺序编排。最好设法在三年级暑假结束时学完这种书。课程还没有进行到的部分，可以先不看。

第二学期以后进行模拟考试练习。可是，现在书店里出售模拟入学考试的习题集不太适用。旺文社的《全国高中入学试题解答》是唯一理想的一本。

按内容分类的习题集，内容分类本身就暗示了解题的方法。但在实际考试时，不会暗示这个题是综合题还是函数题。所以得在事先不知道是哪一类题的情况下，通过在50分钟内完成一个单元的练习题（习题集的每一个单元由20、25题组成），来检查到目前为止的应试准备是否充分。

解题过程中如果发现还有未掌握的地方，或准备不充分的地方，那么，需要再次复习该单元。不能因发现自己没有

记住或没有完全理解而悲观起来，因为你的长辈、同学同样也会有忘记了的时候。

为了复习未掌握的部分，应当使用按单元的目录顺序编排的入学试题集。同类的问题亲自解4、5题后，原来不擅长、生疏的问题反倒很快地变成拿手题。

下面是入学应试的准备要领：

①在面临高中入学考试阶段做模拟入学考试题。

②从不会做的题目中发现不足之处，然后利用按单元目录顺序编排的习题集弥补不足之点。

③随后再次做新的模拟考试题并找出问题。

如果反复按这个步骤去做，一直到第二学期结束，就可以说入学应试的准备工作大体上完成了。

志愿高中的应试习题集

怎样钻研针对希望考上高中的问题呢？我们常常听到这样的发问。

专门针对某一所高中的数学是根本没有的。学习成绩好的话，不论哪所高中的入学考试题都应会做。

一开始就埋头准备志愿学校的入学考试题，并不是好的学习方法。应当按照上面所说的方法，尽量在三年级的第二学期不断努力弥补不足之处。这样努力的结果，对自己现有的水平心中有数，对填写入学志愿书以及后来对志愿学校入学考试的出题倾向的分析都有很大的帮助。这时候，离入学考试的时间还有一个半月左右。

现在，书店里出售各个学校5年、10年间的入学考试习题集。题目内容稍有变化，但出题形式几乎相同，而且出题的倾向差不多，希望把它全部做完，并祝愿大家所做的一切努力不化为泡影，入学考试顺利。

8. 总　　结

跟不上课的原因 从全国来看，城市中90%以上的中学生（实际95%以上）进入高中。高中的授课，自然是在初中的基础上进行的。

近来在报纸上经常看到，约占高中生半数以上跟不上课的消息。

这里的原因很多，其中之一是随着科学文明的发展，渴望掌握的学习内容年年多起来了。高中和大学的入学考试题一年比一年难，去年的考题与4、5年前的考题比较，其难度之大实在令人大吃一惊。

另一个原因是，前一个单元的内容还未充分理解便转入下一个单元的学习。现在，一个班级的人数约30～40人，而数学的授课依然如故，仍以同一进度进行。从教师的角度看，尽管努力讲得使全体学生都能明白，但上课的进度却以具有中等程度水平的学生可以接受为目标的，因而如果有了疑难点，这个疑难点还没有解决，课又进入新的内容。

数学与其他学科不同，属于需要循序渐近地学习才能掌握的学科，一旦前面的听不懂，后面的也就听不懂，所以出现许多跟不上课的学生。

理解的速度因人而异，这是没有办法的事。如果上课按自己可以接受的进度进行，那么，至少目前高中的上课内容人人都可以理解。你的理解速度比班上的平均水平慢的话，应当花10分钟时间去预习尤其是过去那些与目前的课有关的内容，必须事先回顾一下。

克服疏忽差错的方法

数学考试题中，选择形式的题几乎没有。需要一步步计算，然后归纳计算的结果，最后得出答案的这类题，随着年级的高升逐渐增多起来。

小学和中学一年级的数学题，只需一、两步计算答案就出来了。到了高年级以后，必须通过几次计算方能得出答案。

好发生疏忽差错的人，成绩就渐渐地下降。

克服疏忽差错没有什么特殊的方法。除了冷静、小心不出差错外，别无他法。

但是，有的人经常发生习惯性差错。在计算时，认真地写出式子的变化过程，求出答案。对照答案后如有错，就要沿着解题的步骤顺藤摸瓜，找出错误发生在哪里，什么原因。经过几次这样的查找后，就会发现差错都在同样的地方发生，这就是习惯性差错。找到了习惯性差错以后，注意这个习惯，矫正这个习惯，这是克服习惯性差错的最好方法。

学习要点是掌握全面知识的基础

“只要抓住了要点，学习就会好。”这种说法不对。看要点时必须清晰地联想整个内容，并了解要点的来龙去脉。总之，学习是通过要点而掌握全部内容的。象数学这样的学科，即使有一个项目未十分理解，也不可能真正地积累起知识。

所以，学习要点实际上只不过起到学习上的引导作用而已。

本书的图形展开和证明部分，有许多地方说得不太详细，而且几乎没有涉及到近似值和统计单元。不是不重要，因为它只是其中的一小部分，所以没有包括进来。

认真听课是学习的关键

最后还要补充几句。最重要的事是认真听课，即使有一次放松，也会成为下一节课的障碍。为了能够充分理解讲课的内容，不要忘记要做充分的预习。

{
"filename": "MTE1MTUxODIuemlw",
"filename_decoded": "11515182.zip",
"filesize": 8624643,
"md5": "26f48d4a159323dcf9592401579b7375",
"header_md5": "17ce7b4d0281d9e871a1cc2b83db4d57",
"sha1": "13f64fc976a48e19d5ca6bacc2d58e7859d5b0d4",
"sha256": "7e92f418a7a8116a37baabfd0685d5cf604819fa8c370dd7c54c85cd4ab72693",
"crc32": 1080051732,
"zip_password": "",
"uncompressed_size": 8876823,
"pdg_dir_name": "\u2502\u2321\u2553\u2568\u2569\u00b2\u2564\u00ba\u2561\u2500\u2510\u255e\u2564\u00ba\u2564\u00ba\u2556\u255c\u2556\u00bf_11515182",
"pdg_main_pages_found": 163,
"pdg_main_pages_max": 163,
"total_pages": 178,
"total_pixels": 574111744,
"pdf_generation_missing_pages": false
}