

# 2022年上半年初中《数学学科知识与教学能力》 教师资格证笔试真题及答案解析

一、单项选择题。单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1

极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$  的值是（ ）。

- A、0
- B、1
- C、2
- D、 $\infty$

2

已知向量  $a$  和  $b$ ， $|a| = 3$ ， $|b| = 2$ ， $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则  $(a + 2b)(a - b)$  的值是（ ）。

- A、-7
- B、-1
- C、1
- D、7

3

行列式  $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 2x \end{vmatrix}$  表示的系数中，一次的系数是（ ）。

- A、-3
- B、-2
- C、2
- D、3

4

同时投掷一枚硬币和骰子，硬币正面朝上且骰子点数大于 4 的概率是（ ）。

- A、1/6
- B、1/3
- C、1/2
- D、2/3

5

对于定义在  $\mathbf{R}$  上的函数，下列结论一定正确的是（ ）。

- A、奇函数与偶函数的和为偶函数
- B、奇函数与偶函数的和为奇函数

- C、奇函数与偶函数的积为偶函数  
D、奇函数与偶函数的复合函数为偶函数

6

已知矩阵  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则求得  $PQ$  是 ( )。

A、 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

B、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

C、 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D、 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7

下列数学概念中，用“属概念加和差”方式定义的是 ( )。

- A、正方形  
B、平行四边形  
C、有理数  
D、集合

8

下列数学成就是中国著名数学成就是 ( )。

- ①勾股定理  
②对数  
③割圆术  
④更相减提术

- A、①②③  
B、①②④  
C、①③④  
D、②③④

二、简答题。简答题（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

9

某支舞蹈队有 4 男 6 女，从中选 3 人参加比赛，如选到 1 名男，2 名女的概率？

10

已知函数  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + e^x$ ，求  $f'(x)$  在  $x=0$  的二阶导数  $f''(0)$ 。

11

已知  $A^2 - 3A - E = 0$ ，设  $A$  为  $n$  阶矩阵， $E$  为  $n$  阶单位矩阵，若  $A$  可逆，试用  $A$  表示  $A^{-1}$ ；若  $A$  不可逆，说明理由。

12

简述研究二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  单调性的两种方法。

13

画出数轴并指出解释  $|x+1| + |x+2| = 1$  有无穷多个。

### 三、解答题。解答题（本大题 1 小题，10 分）

14

对平面上的任意三点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ， $M(A, B, C) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 。

给出如下定义：

- (1) 若  $A(-1, 0), B(1, 0), C(0, 1)$ ，求  $M(A, B, C)$  与  $M(A, C, B)$  的值。（4 分）
- (2) 判断  $M(A, C, B)$  与三角形  $ABC$  的面积  $S$  的关系，只写出来结果。（3 分）
- (3) 在 (1) 的条件下，若点  $P(x, y)$  是以  $(1, 2)$  为圆心的单位圆上的动点，求  $M(A, B, P)$  的最大值。（3 分）

### 四、论述题。论述题（本大题 1 小题，15 分）

15

论述数学史在教育教学各阶段（导入、探索、应用）的作用。

### 五、案例分析题。案例分析题（本大题 1 小题，20 分）阅读案例，并回答问题。

(一)

在一元二次方程概念教学导入环节中，甲乙两位教师设计了如下问题：

(甲) 问题 1：同学们知道哪些方程(组)？

问题 2：你能类比一元一次方程的定义给出一元二次方程的定义吗？

问题 3：请每位同学各自写出两个一元次方程，若用一个式子表示所有一元二次方程，你会用什么来表示呢？

(乙) 问题 1：根据下列问题思考：

- ①圆的面积为 16，求其半径 $r$ ；
- ②要组织一场篮球赛，参赛任意两个队之间都要比赛一场，赛程计划 7 天，每天 4 场，要邀请 $x$ 个队参加，求 $x$ ；
- ③用一条长 40cm 的绳子围成一个面积为 75 平方厘米的矩形，求矩形的长 $x$ 。

问题 2：观察列出的 3 个方程，它们有什么共同特征？

16

(1) 写出教师乙提出问题中的三个方程；(6 分)

(2) 分别指出各自的优点，并谈谈问题情境在教学中的作用。(14 分)

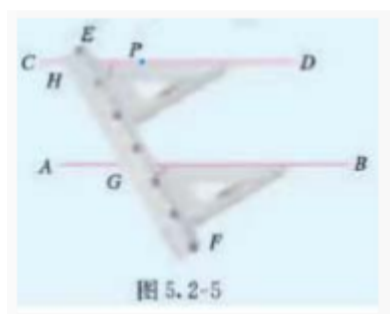
## 六、教学设计。教学设计题（本大题 1 小题，30 分）

(二)

平行线的判定

根据平行线的定义，如果平面内的两条直线不相交，就可以判断这两条直线平行但是，由于直线无限延伸，检验它们是否相交有困难，所以难以直接根据定义来判断两条直线是否平行，那么，有没有其他判定方法呢？

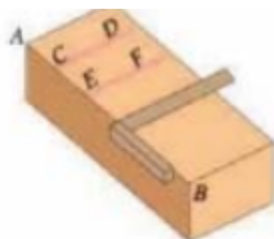
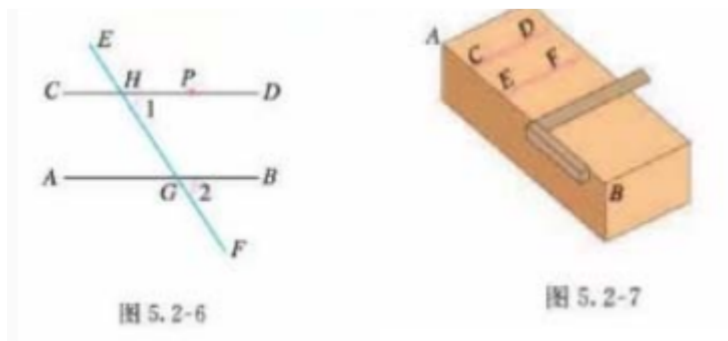
思考：我们以前已学过用直尺和三角尺画平行线(图 5.2-5)，在这一过程中，三角尺起着什么样的作用？



简化图 5.2-5 得到图 5.2-6，可以看出，画直线 $AB$ 的平行线 $CD$ ，实际上就是过点 $P$ 画与 $\angle 2$ 相等的 $\angle 1$ ，而 $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 正是直线 $AB$ 、 $CD$ 被直线 $EF$ 截得的同位角，这说明，如果同位角相等，那么 $AB \parallel CD$ 。

一般地，有如下利用同位角判定两条直线平行的方法：

判定方法 1 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行。简单说成：同位角相等，两直线平行。



17

- (1) 说出其它判定方法，并使用判定方法 1 证明；（8 分）
- (2) 写教学设计，包含教学目标、重难点、教学过程。（指导教学的活动及设计意图）（22 分）

公众号：教资资料站

## 2022 年上半年教师资格证考试《初中数学》题（解析）

1

本题主要考查极限的相关知识。由题  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin 2x$ ，根据无穷小的性质可得，无穷小乘以有界量，结果还是无穷小，因此  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin 2x = 0$ 。A 项正确。

B、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 A。

2

本题主要考查向量的相关知识。由题  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，所以  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则  $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 9 + 0 - 8 = 1$ 。C 项正确。

A、B、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 C。

3

本题主要考查行列式的相关知识。由题  $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^3 - 3x + 1$ ，因此一次性的系数为  $-3$ 。A 项正确。

B、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 A。

4

本题主要考查概率的相关知识。由题硬币正面朝上的概率为  $\frac{1}{2}$ ，骰子点数大于 4 的情况有 5、6，因此骰子点数大于 3 的概率为  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，因此硬币正面朝上，且骰子点数大于 4 的概率  $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 。A 项正确。

B、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 A。

5

本题主要考查函数基本性质的相关知识。由题，对于 A 选项，奇函数与偶函数的和是非奇非偶函数，与题干不符，排除；

同理，B 选项排除；

对于 C 选项，奇函数与偶函数的积是奇函数，与题干不符，排除；

对于 D 选项，奇函数与偶函数的复合函数是偶函数，正确；

故正确答案为 D。

6

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

本题主要考查矩阵的相关知识。由题。B 项正确。

A、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 B。

7

本题主要考查教学知识的相关知识。由题，“两组对边分别平行的四边形是平行四边形”，因此平行四边形的概念采用的是“属概念加种差”方式。B 项正确。

A、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 B。

8

本题主要考查数学史的相关知识。由题勾股定理、割圆术以及更相减损术都属于中国古代数学成就，而②中提到的对数是苏格兰数学家约翰纳皮尔发明的。C 项正确。

A、B、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 C。

9

由题，从 4 男 6 女中选出 1 男 2 女有  $C_4^1 C_6^2 = 60$  种方法，而从 4 男 6 女中选出 3 人一共有  $C_{10}^3 = 120$  种方法，记事件 A 为从 4 男 6 女中选出 1 男 2 女，则事件 A 的概念为  $P(A) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$ 。

10

由题， $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + e^x$ ，则  $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 + e^x$ ， $f''(x) = 6x - 8 + e^x$ ，当  $x = 0$  时， $f''(0) = -7$ 。

11

由题  $A^2 - 3A - E = 0$ ，则  $A^2 - 3A = E$ ， $A(A - 3E) = E$  根据逆矩阵的定义可知矩阵 A 与矩阵  $A - 3E$  互为逆矩阵，故矩阵 A 可逆，且矩阵 A 的逆矩阵为  $A - 3E$ 。

12

研究二次函数单调性的方法：

方法一：定义法

对于定义域中任意的 $x_1$ 、 $x_2$ ，假设 $x_1 > x_2$ 时，若有 $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ，则称函数 $f(x)$ 在定义域上单调递增；假设 $x_1 > x_2$ 时，若有 $f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，则称函数 $f(x)$ 在定义域上单调递减。

方法二：图像法

根据二次函数的开口方向以及对称轴的位置直接观察二次函数的单调性，若开口向上，则二次函数在对称轴左右两侧先减后增；若开口向下，则二次函数在对称轴左右两侧先增后减。

方法三：导数法

先确定函数的定义域，然后求出原函数的导数 $f'(x)$ ，若导数 $f'(x) > 0$ ，则函数在定义域内单调递增；若导数 $f'(x) < 0$ ，则函数在定义域内单调递减。

注：以上方法任意选取两种即可。

13

根据绝对值的几何意义可知， $|x+1| + |x+2| = 1$ 表示数轴上的点 $x$ 与 $-1$ 、 $-2$ 在数轴上所对应的点的距离之和等于1，所以点 $x$ 可以在数轴上表示为 $[-2, 1]$ 内的任意一点，如图所示：



所以该方程的解有无数多个。

14

$$(1) \text{ 由题 } M(A, B, C) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; M(A, C, B) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{2} \times 1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

(2)  $M(A, C, B)$ 和三角形 $ABC$ 的面积 $S$ 的关系是 $S = |M(A, C, B)|$ 。

$$(3) \text{ 由题, } M(A, B, P) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times y \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y, \text{ 又因为点 } P \text{ 在以 } (1, 2) \text{ 为} \\ \text{圆心的单位圆上, 因此 } M(A, B, P) \text{ 的最大值即点 } P \text{ 的纵坐标的最大值。故 } M(A, B, P) \text{ 的最大值为 } 3.$$

15



在导入阶段，通过介绍历史上相关数学家的故事的形式，例如在课堂上讲解勾股定理时借助毕达哥拉斯的故事可以激发学生学习数学的兴趣，认识到伟大的发现都是来源于生活的，只要善于观察，勇于提问，每一个人都有可能成为数学家。进一步强化教学的有效性。

在探索阶段，应用数学史进行互动，可以将原本比较枯燥的数学概念和抽象的定义形式在一定程度商转化为比较简单易懂的事例，进而帮助学生概念进行学习，促进对知识的掌握，启迪同学们的思维。比如，借助故事的启迪，同学们可能会从等腰三角形到一般的直角三角形的探索过程中都发现了两条直角边与斜边的关系，此时学生可以理解数学史导入中所遗留的困惑，同时也会深入体会毕达哥拉斯所用到的数形结合的研究方法。另外利用斜边为边长的正方形的面积的求解方法进行补全与分割，也是古代数学家常用的转化的方法。这样的方式使得数学史与教学内容的联系更加紧密。

在应用阶段：学生感受数学发展历史的神奇与伟大，感受古人的聪明才智，同时也对从特殊到一般及数形结合的思想有更深入的认识。

16

(1) ①  $\pi r^2 = 16$  ; ②  $\frac{x(x-1)}{2} = 28$  ; ③  $x - (20 - x) = 75$ 。

(2) 甲老师在课堂中通过引导学生复习、回忆提问，使新旧知识相互连贯，强化所学知识，检查学生复习情况。案例中甲老师以学生学习过的方程与方程组为题，检验学生对于旧知的掌握程度，并且引出新知的学习。

按照学生对知识的理解程度进行合理的提问。案例中甲老师组织学生类比一元一次方程的定义给出一元二次方程的定义，检验学生是否理解了方程的定义。

在学生能够在理解新知识的基础上应用新知识和旧知识来解决问题。案例中甲老师以一元二次方程为题，在学生理解定义的基础上，应用新的定义给出一元二次方程，并得到一元二次方程的符号表示。

乙老师的课堂提问充分考虑学生的认知能力与生活经验，从学生熟悉的几何图形与实际情境出发进行提问，一方面具有引导、启迪学生的思维的作用；另一方面能够使学生集中注意力，能够对所学知识更好地感知、记忆、思考和想象。

问题情境的作用在于问题是教学过程的重要组成部分，通过问题情境的创设搭建学生自主探究、小组讨论的平台，吸引学生的注意力，激发学生的学习兴趣，启发学生的数学思维，有利于学生更好的理解知识，使数学课堂达到更好的教学效果。

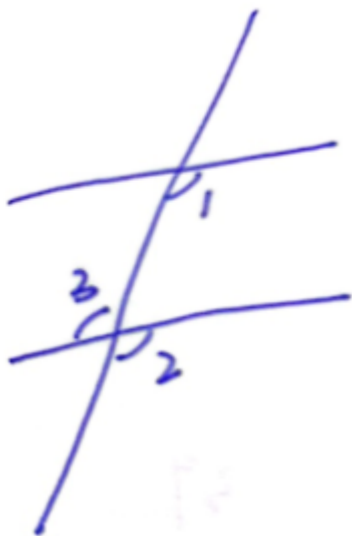
17

(1) ① 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么两直线平行；

② 两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么两直线平行；

证明如下：

证明①：如图



如果  $\angle 1 < \angle 3$ ，由对顶角相等可得  $\angle 3 = \angle 2$ ，因此  $\angle 1 = \angle 2$ ，同位角相等，所以两直线平行。

证明②：如图，



如果  $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ ，由邻补角可得  $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ ，因此  $\angle 1 = \angle 2$ ，同位角相等，所以两直线平行。

## (2) (一) 教学目标

知识与技能目标：知道平行线的判定方法，理解判定方法的探究过程，能够应用判定方法解决实际问题。

过程与方法目标：通过自主探究、小组讨论等活动，提高发现、提出、分析和解决问题的能力。

情感态度与价值观目标：在独立思考的基础上，积极参与对数学问题的探讨，享受运用知识解决问题的成功体验，增强学好数学的信心。

## （二）教学重难点

教学重点：平行线的判定方法以及应用；

教学难点：平行线的判定方法的探究过程。

## （三）教学过程

### 1.温故导入

教师活动：教师带领学生回顾旧知。接着引导学生认真回忆，提出问题：同学们还记得平面上两条直线之间有几中位置关系吗？

学生活动：就教师的提问展开独立思考，并给出结论：平面上两条直线的位置关系有平行与相交。

教师活动：针对学生表现，顺势引出课题——平行线的判定。

设计意图：由平面上直线间的位置关系进行引入，一方面可以帮助学生建立起知识前后联系，检验学生对于以往知识的掌握程度；另一方面通过提问的方式可以激发学生的学习兴趣，启发学生进行思考思考，让学生快速进入学习状态。

### 2.讲授新课

#### 环节一.初步感知

教师活动：教师提出问题：同学们还记得平行线的定义吗？大家觉得这种判定方法简便吗？给予一定的时间，组织学生自主探究再回答，教师针对学生的回答结果做相应评价。

学生活动：预设学生 1 回答出：如果平面内的两条直线不相交，那么这两条直线平行；

预设学生 2 回答：因为直线无限延伸的，所以难以利用定义法判定平行线。

#### 环节二.自主探究，得出结论

教师活动：教师再次抛出问题：我们以前学习过利用直尺与三角尺画平行线，在这一过程中，三角尺起到了什么作用？通过观察这个过程，你能总结出判定平行线的方法吗？教师组织学生根据目标问题四人一组进行讨论，教师进行巡视指导，交流讨论结束后，找学生代表回答讨论结果，教师评价。

学生活动：预设学生 3 回答：三角尺起到了保证同位角相等的作用；

预设学生 4 回答：两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行。

教师活动：教师进行总结归纳，并给出平行线的判定方法：同位角相等，两直线平行。

#### 环节三.总结归纳

教师活动：教师组织学生梳理和总结本节新课的重难点并展示相关例题，引导学生完成并展示。

学生活动：学生利用所学在练习册上完成例题。

设计意图：通过设置问题，层层提问，利用提问法和引导法引导学生思考问题并进行进一步的讨论，体现了教师的主导性作用；学生采用小组讨论和自主探究等多种学习方法进行问题的探究，增强了学生之间的合作交流、信息共享意识和语言表达能力，为提高解决问题的能力奠定基础，这也是体现学生主体性作用的重要学习方法。

### 3.巩固练习

教师通过多媒体展示有关平行线的判定不同类型、不同层次的练习题目，引导学生独立思考并作答，或者找学生代表在黑板上进行板演，完成后教师针对结果给予评价并总结。

设计意图：设置不同层次的练习题，不仅能使学生新学的知识得到及时巩固，也能使学生的思维能力得到有效提高，使其更好地学以致用。找学生代表在黑板上演示，也充分体现了学生的主体性地位。最后针对练习结果，进行统一订正，并及时对学生的表现做出评价，体现了教学评价在课堂中的合理应用。

### 4.课堂小结

教师引导学生从知识、能力或情感等方面畅谈本节课的收获，针对学生的回答，采用多种方式进行评价并总结。

设计意图：在小结环节先让学生自评，接着让学生互评，最后教师表扬全班学生，不仅可以检验学生对本节课重点内容的认知情况，更能进一步增强学生的自信心和荣誉感，使他们更加热爱数学。

### 5.布置作业

学生完成课后剩余练习题或者教师自主设计一道能用本节课所学知识解决的生活实际问题。

设计意图：对本节课知识进行再巩固、再认识。