Analysis II

Tobias Lamm

Sommersemester 20

Skript von Moritz Bär

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Differentiation im $\mathbb{R}^n$

Notation:

$e_1, ..., e_n$ bilden die Standartbasis des $\mathbb{R}^n$, wobei für $1 \leq j \leq n$ gilt: $\quad e_j = (0, ..., \underbrace{1}_{j-te\ Stelle}, ...0)$

Definition I.1

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, so heißt der Grenzwert

$$\partial_i f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle $x \in \Omega$, falls er existiert.
Alternativ wird dafür auch $\frac{df}{dx_i}(x)$ oder $D_i f(x)$ geschrieben.

Bemerkung:

$\partial_i f(x)$ ist einfach die Ableitung der Funktion $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^m, t \mapsto f(x + te_i)$ oder alternativ die Ableitung der reellen Funktion $h : (x_i - \delta, x_i + \delta) \to \mathbb{R}^m, y \mapsto f(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_n)$ an der Stelle $y = x_i$.

Satz I.2

Die Ableitungsregeln
Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega$ und es existieren die partiellen Ableitungen $\partial_i f(x)$ und $\partial_i g(x)$. Dann gelten:

1. Für $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\quad \partial_i(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \partial_i f(x) + \beta \partial_i g(x)$
2. Für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ gilt $\partial_i f(x) = \sum_{j=1}^m \partial_i f_j(x) e_j$, sofern eine Seite der Gleichung existiert. f_j bezeichnet hier den j-ten Eintrag von $f(x)$
3. Für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m, g : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt $\partial_i(fg)(x) = (\partial_i f)(x) g(x) + f(x) \partial_i g(x)$
4. Für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m, g : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt $\partial_i(\frac{f}{g})(x) = \frac{(\partial_i f)(x) g(x) - f(x) \partial_i g(x)}{g^2(x)}$

5. Für $f : \Omega \to I \subset \mathbb{R}, \varphi I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $f(x)$ gilt $\partial_i(\varphi \circ f)(x) = \varphi'(f(x))\partial_i f(x)$

Beispiel

Betrachte $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, r(x) = ||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

- Für $x \neq 0$ gilt $\partial_i r(x) = \frac{2x_j}{2\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} = \frac{x_j}{r(x)}$
- Für $x = 0$ sind die partiellen Ableitungen nicht definiert, da $r(0 + te_j) = |t|$
  $\Rightarrow \partial_i r(x) = \lim_{t\to 0} \frac{r(0+te_j)-r(0)}{t} = \frac{|t|}{t}$
  $\Rightarrow$ Der Grenzwert existiert nicht.

Die Funktion $\partial_j r$ ist in $x \neq 0$ partiell differenzierbar: $\partial_i(\partial_j r)(x) = \frac{(\partial_i x_j)r - x_j \partial_i r}{r^2} = \frac{1}{r}(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2(x)})$, wobei $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$ Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir im Folgenden statt $r(x)$ nur r.
Ist $\varphi : (o, \infty) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so gilt für $f = \varphi \circ r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$partial_j f(x) = \varphi'(r)\partial_j r = \varphi'(r)\frac{x_j}{r}$
$\partial_i(\partial_j f)(x) = \varphi''(r)\partial_i(x)\partial_j r + \varphi'(r)\partial_i(\partial_j r)$
$= \varphi''(r)\frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{\varphi'(r)}{r}(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}$

Laplace-Operator

$\Delta := \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ heißt Laplace-Operator.

Lösungen von $\Delta f = 0$ heißen *harmonische Funktionen.*

Mit $f = \varphi \circ r$ heißen diese Lösungen *rotationssymmetrisch.*
Wie sehen diese Lösungen aus?

$$0 = \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n (\varphi''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{\varphi'(r)}{r}(1 - \frac{x_i^2}{r^2} = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = \boxed{r^{1-n}(r^{n-1}\varphi'(r))'} \tag{I.1}$$

Lösungen mit Integrationskonstanten $a, b \in \mathbb{R}$:
$\varphi(r) = \begin{cases} a\frac{r^{s-n}}{2-n} + b & , n \geq 3 \\ a \log r + b & , n = 2 \end{cases}$

Bemerkung:

Ist für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ die Funktion definiert und ihrerseits nach x_i partiell differenzierbar, so setzen wir $\partial_i \partial_j f(x) := \partial_i(\partial_j f)(x)$.
(Alternativ $D_{ij}^2 f(x), \frac{d^2 f}{dx_i dx_j}(x)$)
Entsprechend:
Ist für $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ die Funktion $\partial_{i_1}...\partial_{i_k} f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ definiert und in $x \in \Omega$ nach x_i partiell differenzierbar, so setzen wir $\partial_i \partial_{i_1}...\partial_{i_k} f(x) := \partial_i(\partial_{i_1}...\partial_{i_k} f(x)$

Definition I.3

C^k-Räume
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Wir bezeichnen mit $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω mit Werten im $\mathbb{R}^m$, das heißt alle partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} ... \partial_{i_j} f$ der Ordnung $j \leq k$ (Bzw. $j < k$ im Fall $k = \infty$) sind definiert und stetig auf Ω. Im Fall $m = 1$ setzen wir $C^k(\Omega, \mathbb{R}) =: C^k(\Omega)$.

Problem:

Wann sind ∂_i und ∂_j vertauschbar?

Beispiel:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wir zeigen:

1. f ist zweimal partiell differenzierbar
2. Es gilt: $d_x d_y f(0,0) \neq \partial_y \partial_x f(0,0)$
3. f ist im Ursprung stetig

Beweis:
Wir definieren $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \Phi(x,y) := \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Damit gilt $f(x,y) = xy\Phi(x,y)$.

1. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt dann nach der Produktregel:
$$\partial_x(x,y) = y\Phi(x,y) + xy\partial_x\Phi(x,y)$$
$$\partial_y(x,y) = x\Phi(x,y) + xy\partial_y\Phi(x,y)$$
mit $\partial_x\Phi(x,y) = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \partial_y\Phi(x,y) = -\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.
Daraus folgt für $h \neq 0 \partial_x f(0,h) = -h, \partial_y f(h,0) = h$.
Da f auf den x- und y-Achsen 0 ist, gilt außerdem $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$.

2. Wir berechnen die Ableitungen in beiden Reihenfolgen:
$$\partial_x\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\partial_x f(0,h) - \partial_x f(0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot (-h) = -1$$
$$\partial_y\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\partial_y f(h,0) - \partial_y f(0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h = 1$$
$\Rightarrow\ \partial_x\partial_y f(0,0) \neq \partial_y\partial_x f(0,0)$

3. Es gilt $|x^2-y^2| \leq |x^2+y^2|$ und damit $|\Phi(x,y) \leq 1\ \forall (x,y) \neq (0,0)$. Damit folgt dann $|f(x,y)| \leq |xy|\ \forall (x,y) \neq (0,0)$
$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0 = f(0,0) \Rightarrow\ f$ ist im Ursprung stetig.

$\Rightarrow$ Die partiellen Ableitungen vertauschen nicht in jedem Fall!

Satz I.4

Satz von Schwarz
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in \mathbb{C}^2(\Omega)$, so vertauschen für $1 \leq i,j \leq n$ die Ableitungen nach x_i bzw. x_j; also gilt $\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f$ auf Ω

Beweis:

Nach Definition ist $\partial_j f(x)$ Grenzwert des Differentenquotienten $\Delta_j^t f(x) = \frac{f(x+te_j)-f(x)}{t}$ für $t \to 0$.

F ür $\Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) = \frac{1}{s}(\Delta_j^t f(x+se_i) - \Delta_j^t f(x)$ folgt $\lim_{s\to 0}(\lim_{t\to 0} \Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x)) = \partial_i(\partial_j f)(x)$

Der Differenzenquotient vertauscht mit der partiellen Ableitung: $\partial_i(\Delta_j^t f)(x) = \frac{1}{t}(\partial_i f(x+te_j) - \partial_i f(x)) = \Delta_j^t(\partial_i f)(x)$

Der Mittelwertsatz besagt: Ist g nach x_i partiell differenzierbar, so gilt für ein $\alpha \in [0,1]$: $\Delta_i^s g(x) = \frac{g(x+se_i)-g(x)}{s} = \partial_i g(x+\alpha s e_i)$
Wir wenden dies an für $g = \Delta_j^t f$ und $g = \partial_i f$, wobei $\alpha, \beta \in [0,1]$ von s,t abhängen:

$$\Delta_i^s g(\Delta_j^t f)(x) = \partial_i(\Delta_j^t f)(x+\alpha s e_i) \qquad = \Delta_j^t(\partial_i f)(x+\alpha s e_i) \qquad = \partial_j(\partial_i f)(x+\alpha s e_i + \beta t e_j$$

Nach Voraussetzung ist $\partial_j \partial_i$ stetig in x, damit folgt die Behauptung, indem wir erst t und dann s gegen 0 gehen lassen.

■

Bemerkung:

Tatsächlich gezeigt haben wir sogar:
Existieren $\partial_i f, \partial_j f, \partial_j \partial_i f$ und ist $\partial_j \partial_i f$ stetig in x, so existiert auch $\partial_i \partial_j f(x)$ und es gilt $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$.

Lemma I.5

Für eine Funktion $f \in \mathbb{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ vertauschen die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k, das heißt für jede Permutation $\sigma \in S_k$ gilt: $\partial_{i_{\sigma(1)}} ... \partial_{i_{\sigma(k)}} f = \partial_{i_1} ... \partial_{i_k} f$

Beweis:

Nach Satz I.4 können benachbarte Operatoren ∂_i, ∂_j vertauscht werden. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die symmetrische Gruppe durch Vertauschungen erzeugt wird.

■

Problem:

Aus der Existenz von $\partial_1 f, ..., \partial_n f$ in $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ folgt nicht die Stetigkeit von f!

Beispiel:

Seien $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
Dann gilt: $f(x,0) = 0 = f(0,y)\ \forall x,y$, insbesondere $\partial_1 f(0,0) = 0 = \partial_2 f(0,0)$, aber für $c(t) := (t,t)$ gilt $f(c(t)) = \frac{1}{2}\ \forall t \neq 0$
$\Rightarrow f$ ist nicht stetig in $(0,0)$

Definition I.6

Die Richtungsableitung

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Für $x \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^n$ heißt der Grenzwert $\partial_v f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$, falls existent, *Richtungsableitung* von f an der Stelle x in Richtung v. Dies ist die gewöhnliche Ableitung der Funktion $t \to f(x+tv)$ in $t=0$.

Beispiel 1:

Betrachte erneut $r(x) = ||x||$. Die Richtungsableitung in $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\partial_v r(x) = \frac{d}{dt}\sqrt{||x||^2 + 2t\langle x, v\rangle + t^2||v||^2}|_{t=0} = \frac{1}{2||x||}2\langle x, v\rangle = \langle \frac{x}{||x||}, v\rangle$

Beispiel 2:

Seien $\Omega = \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

In $(0,0)$ existieren alle Richtungsableitungen von f, denn für $v = (a,b) \neq (0,0)$ ist $\partial_v f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{2t^3ab^2}{t(t^2a^2+t^4b^4)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{2ab^2}{a^2+t^2b^2} = \begin{cases} \frac{2b^2}{a} & a \neq 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$

Dennoch ist f im Nullpunkt unstetig, denn für $c(t) = (t^2, t)$ gilt: $f \circ c)(t) = \frac{2t^2t^2}{t^4+t^4} = 1 \; \forall t \neq 0$.

Definition I.7

Die Ableitung

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *Ableitung* von f im Punkt $x_0 \in \Omega$, falls gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))}{||x - x_0||} = 0 \tag{I.2}$$

f heißt dann differenzierbar in x_0 mit Ableitung $Df(x_0) = A$ (vgl. Satz IX.6 Analysis I)

Bemerkung:

Definieren wir $h := x - x_0$, so kommen wir auf die vertrautere Form $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)+A(h)}{||h||} = 0$ für die Ableitung.

Satz I.8

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann besitzt f in x_0 die Richtungsableitung $\partial_v f(x_0) = Df(x_0)v \; \forall v \in \mathbb{R}^n$. $Df(x_0)$ hat bezüglich der Standartbasen die Matrixdarstellung $(\partial_j f_i(x_0)) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \ldots & \partial_n f_1(x_0) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \partial_1 f_m(x_0) & \ldots & \partial_n f_n(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (*Jacobimatrix*). Insbesondere ist die Ableitung durch (I.2) eindeutig bestimmt.

Beweis:

Für $v = 0$ ist nichts zu zeigen, da zu beiden Seiten der Gleichung 0 steht.

Für $v \neq 0$ setzen wir $Df(x_0) = a$ und erhalten aus (I.2)

$$\left\| \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} - Av \right\| = \frac{||f(x_0+tv) - f(x_0) + A(tv)||}{|t|}$$
$$= \underbrace{\frac{||f(x_0+tv) - f(x_0) + A(tv)||}{||tv||}}_{\to\ 0 \text{ für } t \to 0 \text{ nach (I.2)}} ||v|| \to 0 \text{ für } t \to 0$$

Setze $v = e_j$ und berechne Komponentenweise, siehe Satz I.2, so ergibt sich

$$Df(x_0)e_j = \partial_j f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \partial_j f_i(x_0)e_1)$$

■

Beispiel:

1. Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine *symmetrische Bilinearform*, das heißt $b(v,w) = b(w,v)\ \forall v, w \in \mathbb{R}^n$ und b ist linear in beiden Komponenten. Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = b(x,x)$ die dazugehörige *quadratische Form*.

   Behauptung: f ist in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit Ableitung $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, Df(x_0)v = 2b(v, x_0)\ \forall v \in \mathbb{R}^n$

   Beweis: $f(x_0+h) = b(x_0+h, x_0+h) = b(x_0,x_0)+2b(x_0,h)+b(h,h) = f(x_0)+2b(x_0,h)+b(h,h)$
   Es gilt: $|b(h,h)| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |b(e_i,e_j)||h_i||h_j| \leq C||h||^2$ mit $C := \sum_{i,j=1}^{n} |b(e_i,e_j)|$
   (Notation: $\sum_{i,j=m}^{n} X := \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n} X$*)*

   $$\Rightarrow \frac{f(x_0+h) - (f(x_0) + 2b(h,x_0))}{||h||} = \frac{b(h,h)}{||h||} \to 0 \text{ für } h \to 0$$

   □

2. Die Funktion $f : I = (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ habe in $x_0 \in I$ die Ableitung $f'(x_0) \in \mathbb{R}^m$ im Sinne von Analysis I.

   Behauptung: f ist differenzierbar in x_0 im Sinne von Definition I.7 mit $Df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, Df(x_0)h = f'(x_0)h$.

   Beweis: Es gilt für $h \to 0, h \neq 0$:

   $$\frac{||f(x_0+h) - (f(x_0) + f'(x_0)h)||}{|h|} = \left\| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right\| \to 0 \text{ für } h \to 0$$

   □

3. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung.

Behauptung: $f : \Omega \to \mathbb{R}^m, f(x) = Ax \; \forall x \in \Omega$ ist $\forall x_0 \in \Omega$ differenzierbar mit $Df(x_0) = A$.

Beweis: Folgt aus $f(x_0 + h) = A(x_0 + h) = Ax_0 + Ah = f(x_0) + Ah$

Definition I.9

Der Gradient
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in \Omega$. Der Gradient von f in x ist der Vektor

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x) e_j = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ . \\ . \\ . \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Bemerkung:

Der Gradient ist der eindeutig bestimmte Vektor mit $\langle \nabla f(x), v \rangle = Df(x)v \; \forall v \in \mathbb{R}^n$.

ist $\nabla f(x) = 0$, so heißt x *kritischer Punkt* von f. Ist x nicht kritisch, so ist die Richtung von $\nabla f(x)$ diejenige, in der f am stärksten ansteigt.

Begründung: Für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| = 1$ gilt:

$$\partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle \overset{\text{Satz von Cauchy-Schwarz}}{\leq} ||\nabla f(x)||$$

mit Gleichheit genau dann, wenn gilt $v = \frac{\nabla f(x)}{||\nabla f(x)||}$

Beispiel:

1. $f(x) = \varphi(r)$ mit $r(x) = ||x|| \;\Rightarrow\; \nabla f(x) = \varphi'(r)\frac{x}{r}$ für $x \neq 0$

2. Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und sei B eine lineare Abbildung mit $b(x, y) = \langle x, By \rangle \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (Siehe lineare Algebra bzw. $B_{ij} = b(e_i, e_j)$)
   Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = b(x, x)$. Damit folgt $\nabla f(x) = 2Bx \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, denn:

   $$\langle \nabla f(x), v >= Df(x)v = 2b(v, x) = 2\langle v, Bx \rangle \; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3. Wir betrachten die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

   Behauptung: $||A(x)|| \leq |A| \cdot ||x|| \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, wobei $|A|^2 = \sum_{j=1}^{n} ||A(e_j)||^2$

   Beweis: $A(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j A(e_j)$ mit $A(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$

   $$||A(x)|| \leq (\sum_{j=1}^{n} |x_j| ||A(e_j)||)^2 \overset{C-S}{\leq} (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)(\sum_{j=1}^{n} ||A(e_j)||) = ||x||^2 |A|^2$$

$\square$

Folgerung: Ist $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, so ist A auch lipschitzstetig, denn
$||A(x) - A(y)|| = ||A(x-y)|| \leq |A| \cdot ||x-y||$

Satz I.10

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in \Omega$, so ist f auch stetig in x_0

Beweis:

Es genügt, zu zeigen, dass:

$$\varphi(x) = f(x) - \underbrace{(f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)}_{\text{stetig}}$$

in x_0 stetig ist. Aber $\varphi(x_0) = 0$ und nach Definition I.7 gilt
$\varphi(x) = ||x - x_0|| \frac{\varphi(x)}{||x-x_0||} \;\to\; 0$ mit $x \;\to\; x_0$

■

Satz I.11

Die Kettenregel
Es seien $f : U \to \mathbb{R}^m, g : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f(U) \subset V$.
Sind f in $x_0 \in U$ und g in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist ihre Verkettung $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0)$$

Für die Jacobimatrizen bedeutet das mit $y_0 = f(x_0)$:

$$\frac{d(g \circ f)_i}{\partial_{x_k}}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{dg_i}{\partial_{y_j}}(y_0)\frac{df_j}{\partial_{x_k}}(x_0), 1 \leq i, k \leq n$$

Beweis:

Sei $y = f(x_0), Df(x_0) = A, Dg(y_0) = B.$
Für $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \eta \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ hinreichend klein seien

$$\varepsilon_f(\xi) = \frac{f(x_0 + \xi) - (f(x_0) + A\xi)}{||\xi||}$$
$$\varepsilon_g(\eta) = \frac{f(x_0 + \eta) - (f(x_0) + B\eta)}{||\eta||}$$

Mit $\eta_f(0) = \eta_g(0) = 0$ sind beide Funktionen stetig in 0.
Berechne

$$\begin{aligned}
\frac{(g \circ f)(x_0 + \xi) - ((g \circ f)(x_0) + BA\xi)}{||\xi||} &= \frac{g(y_0 + \overbrace{A\xi + ||\xi||\varepsilon_f(\xi)}^{=:\eta}) - (g(y_0) + BA\xi)}{||\xi||} \\
&= \frac{g(y_0) + B\eta + ||\eta||\varepsilon_g(\eta) - (g(y_0) + BA\xi)}{||\xi||} \\
&= \underbrace{B\varepsilon_f(\xi)}_{\to\ 0 \text{ mit } \xi \to 0} + \frac{||\eta||}{||\xi||}\varepsilon_g(\eta)
\end{aligned}$$

Wegen $||B\varepsilon_f(\xi)|| \leq |B| \cdot ||e_f(\xi)||$ und
$\eta = A\xi + ||\xi||\varepsilon_f(\xi) \;\Rightarrow\; ||\eta|| \leq |A| \cdot ||\xi|| + ||\xi|| \cdot ||\varepsilon_f(\xi)|| \leq (|A| + ||\varepsilon_f(\xi)||)||\xi||$
konvergiert die rechte Seite mit $\xi \;\to\; 0$ gegen 0.

■

Bemerkung:

Wir betrachten $f \circ c$ mit Kurve $c : (a, b) \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Ist c differenzierbar in $t \in (a, b)$ und f in $c(t)$, so gilt $\frac{d(f \circ c)t}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{df}{\partial_{x_j}}(c(t))\frac{dc_j}{dt}(t)$ beziehungsweise $(f \circ c)'(t) = Df(x)c'(t) = \langle \nabla f(x), c'(t) \rangle$, wobei $x = c(t)$.
Ist $(f \circ c)$ konstant, so gilt $\nabla f(x) \perp c'(t)$, das heißt $\nabla f(x)$ steht senkrecht auf den Höhenlinien $\{x \in \Omega : f(x) \text{ konstant}\}$

Satz I.12

Es sei Ω offen, $x \in \Omega$. Die Existenz der Ableitungen $Df(x), Dg(x)$ sei vorausgesetzt. Dann gelten

1. Für $f, g : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\alpha\beta \in \mathbb{R}$:
   $D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x)$
2. Für $f : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}^m, g : \Omega \to \mathbb{R}$:
   $D(fg)(x) = Df(x)g(x) + f(x)Dg(x)$
3. Für $f : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}^m, g : \Omega \to \mathbb{R}$:
   $D(\frac{f}{g})(x) = \frac{Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)}{g^2(x)}$

Beweis:

Wir definieren $Df(x) = A, Dg(x) = B$ und für $h \neq 0$,

$$\varepsilon_f(h) = \frac{f(x + h) - (f(x) + Ah)}{||h||}$$
$$\varepsilon_g(h) = \frac{g(x + h) - (g(x) + Bh)}{||h||}$$

gilt: $\varepsilon_f(h), \varepsilon_g(h) \to 0$ für $h \to 0$.

1.

$$\frac{(\alpha f+\beta g)(x+h)-((\alpha f+\beta g)(x)+(\alpha A+\beta B)h)}{||h||}=\alpha\varepsilon_f(h)+\beta\varepsilon_g(h)\ \to\ 0 \text{ mit } h\ \to\ 0$$

2.

$$\begin{aligned}
&\frac{(fg)(x+h)-((fg)(x)+(Ag(x)+f(x)B)(h))}{||h||}\\
&=\frac{(f(x)+Ah+\varepsilon_f(h)||h||)(g(x)+Bh+\varepsilon_g(h)||h||)}{||h||}-\frac{(fg)(x)+(Ag(x)+f(x)B)(h)}{||h||}\\
&=\frac{1}{||h||}(Ah)(Bh)+\underbrace{\varepsilon_f(h)(g(x)+Bh+\varepsilon_g(h)||h||+\varepsilon_g(h)(f(x)+Ah)}_{\to 0}\\
&||Ah||\leq|A|\cdot||h||,||Bh||\leq|B|\cdot||h||\ \Rightarrow\ \left\|\frac{(Ah)(Bh)}{||h||}\right\|\leq|A|\cdot|B|\cdot||h||
\end{aligned}$$

3. Ohne Einschränkung seien $m=1, f=1$, da wir $\frac{f}{g}$ schreiben können als $f(\frac{1}{g})$ und der allgemeine Fall dann aus der Produktregel folgt.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{||h||}(\frac{1}{g(x+h)}-(\frac{1}{g(x)}-\frac{Bh}{g^2(x)}))\\
&=\frac{1}{||h||}\frac{1}{g(x+h)g(x)}(g(x)-(g(x)+Bh+\varepsilon_g(h)||h||)+\frac{g(x+h)}{g(x)}Bh\\
&=\frac{1}{g(x)g(x+h)}((\frac{g(x+h)}{g(x)}-1)\frac{Bh}{||h||}-\varepsilon_g(h))\ \to\ 0
\end{aligned}$$

■

Satz I.13

Es sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ ist genau dann in $x_0\in\Omega$ differenzierbar, wenn alle Komponenten $f_i:\Omega\to\mathbb{R}, 1\leq i\leq n$ in x_0 differenzierbar sind. Ist $P_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Koordinate, so gilt $Df_i(x_0)=P_iDf(x_0)$.

Beweis:

Nach Definition I.7 gilt

$$\begin{aligned}
Df(x_0)=A\Leftrightarrow&\lim_{x\to x_0}\frac{f_i(x)-(f_i(x_0)+A(x-x_0))}{||x-x_0||}=0\\
\Leftrightarrow&\lim_{x\to x_0}\frac{f_i(x)-(f_i(x_0)+P_i(A(x-x_0)))}{||x-x_0||}=0\ \forall 1\leq i\leq m
\end{aligned}$$

$Df(x_0)=A\ \Rightarrow\ Df_i(x_0)=P_iA$. Umgekehrt sei $Df_i(x_0)=A_i$ für $1\leq i\leq m$. Definiere nun $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, A(x)=\sum_{i=1}^m A_i(x)e_i\ \Rightarrow\ P_iA=A_i\ \Rightarrow\ Df(x_0)=A$

■

Satz I.14

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sei in allen $x \in \Omega$ nach x_i differentierbar $\forall 1 \leq i \leq n$. Sind $\partial_i f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in \Omega$ stetig, so ist f in x_0 differenzierbar.

Beweis:

Satz I.13 sagt uns, dass wir ohne Einschränkung mit $m = 1$ rechnen können. Aus Satz I.8 wissen wir:

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, Ah = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x_0) h_k$$

ist der einzig mögliche Kandidat.

Zu $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset \Omega$, sodass

$$|\partial_k f(x) - \partial_k f(x_0)| < \varepsilon \; \forall x \in B_\delta(x_0), 1 \leq k \leq n$$

Für $||h|| < \delta$ betrachte die Punkte $x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{k} k_i e_i$ mit $1 \leq k \leq n$. Aus dem Mittelwertsatz folgt:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f(x_{k-1} + h_k e_k) - f(x_{k-1}) = \partial_k f(x_{k-1} + s_k h_k e_k) h_k$$

für geeignete $s_k \in [0, 1]$. Aus

$$||x_{k-1} + s_k h_k e_k - x_0|| = ||x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} h_i e_i + s_k h_k e_k - x_0 \leq ||h|| < \delta \text{ mit } 1 \leq k \leq n$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x_0 + h) - (f(x_0) + Ah)|}{||h||} &= \frac{1}{||h||} |\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}) \partial_k f(x_0) h_k)| \\
&= |\sum_{k=1}^{n} (\partial_k f(x_{k-1} + s_k h_k e_k) - \partial_k f(x_0)) \underbrace{\frac{h_k}{||h||}}_{\leq 1}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\partial_h f(x_{k-1} + s_k h_k e_k) - \partial_k f(x_0)| \\
&< n\varepsilon
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Kapitel II

Anwendungen der Differentialrechnung

Erinnerung:

Das Ziel ist, aus Informationen über Df Informationen über f zu gewinnen.

Analysis I:

1. Mittelwertsatz: $f(b) - f(a) = f'(\tau)(b-a)$ für ein $\tau \in (a,b)$
2. Hauptsatz: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$

Bemerkung:

1. Der Mittelwertsatz verlangt weniger Voraussetzungen: Die Voraussetzung ist lediglich, dass f auf (a,b) differenzierbar und in den Endpunkten stetig ist.

   Der Hauptsatz verlangt, dass f auf $[a,b]$ stetig differenzierbar ist.
   Tatsächlich reicht die Bedingung $f \in C^0 \cap PC^1([a,b],\mathbb{R})$, wobei
   $PC^1([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \exists a < t_0 < ... < t_N < b, f|_{t_{k-1},t_k} \in C^1([t_{k-1},t_k],\mathbb{R})\}$, da
   $\sum_{k=1}^N (f(t_k) - f(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(t)dt = \int_a^b f'(t)dt$
2. Der Mittelwertsatz lässt sich nicht auf $\mathbb{R}^m, m > 1$ ausweiten:
   $f(t) = e^{it} \Rightarrow f(2\pi) - f(0) = 0, f'(\tau) = ie^{i\tau} \neq 0 \;\forall \tau \in (0, 2\pi)$

Problem: Wie können wir der Hauptsatz auf Funktionen der Form $f : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ anwenden?

Idee: werte f längs Kurven aus.
Betrachte dazu die Verkettung von f mit einer Abbildung $\gamma : [a,b] \to \Omega, \gamma = \gamma(t)$.

Lemma II.1

Sei $\gamma : I = [a,b] \to \Omega$ stetig und $\gamma \in PC^1$. Dann gilt für alle Funktionen $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$:

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b Df(\gamma(t)\gamma'(t)dt$$

Beweis:

$f \circ \gamma \in PC^1$ folgt aus der Kettenregel.

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))dt = \int_a^b Df(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

■

Bemerkung:

Im Beweis tritt das Integral einer Vektorwertigen Funktion auf. Es sei $v \in C^0([a,b], \mathbb{R}^m)$. Damit definieren wir

$$\int_a^b v(t)dt = \int_a^b (\sum_{i=1}^m v_i(t)e_i)dt = \sum_{i=1}^m (\int_a^b v_i(t)dt)e_i$$

Definition II.2

Ein metrischer Raum X heißt *wegweise zusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$ eine stetige Abbildung $c : [0,1] \to X$ gibt mit $c(0) = x_0, c(1) = x_1$.

Lemma II.3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Dann existiert ein stetiger, stückweise affiner Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$, das heißt ein Polygonzug, mit $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$).

Beweis:

Sei $c \in C^0([0,1], \Omega)$ mit $c(0) = x_0, c(1) = x_1$ gegeben.
Betrachte die Zerlegung $t_k = \frac{k}{N}$ für $0 \leq k \leq N$ des Intervalls $[0,1]$. Definiere $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t_k) = c(t_k)\ \forall k$ durch $\gamma(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} c(t_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} c(t_k)$ für $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Behauptung: $\gamma(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,1]$, falls N groß genug ist.
$c([0,1]) \subset \Omega$ ist kompakt und $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ ist abgeschlossen. Daraus folgt:
$\exists \rho > 0$ mit $||x - c(t)|| \geq \rho\ \forall t \in [0,1], x \in \mathbb{R}^n \Omega$.

Wäre dem nicht so, müssten Folgen $x_j \in c([0,1]), y_j \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ existieren mit $||x_j - y_j|| \to 0$ nach Wahl einer Teilfolge $x_j \to x \in c([0,1])$
$\Longrightarrow y_j \to x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ ↯

Da c auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gilt

$$\operatorname{osc}(c,\delta) = \sup ||c(1) - c(s)|| : 0 \leq 1s, t \leq 1, |t-s| < \delta \to 0 \text{ mit } \delta \to 0$$

$\Longrightarrow$ γ konvergiert gleichmäßig gegen c mit $N \to \infty$, denn für $t \in [0,1]$ wähle $1 \leq k \leq N$ mit $t \in [t_{k-1}, t_k$ und schätze ab:

$$||\gamma(t) - c(t)|| \leq \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} ||c(t_{k-1}) - c(t)|| + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} ||c(t_k) - c(t)|| \leq \operatorname{osc}(c, \frac{1}{N}) \to 0 \text{ mit } N \to \infty$$

Für N groß ist also $||\gamma(t) - c(t)|| < \rho \; \forall t \in [0,1]$
$\Rightarrow \gamma(t) \in \Omega \; \forall t \in [0,1]$

■

Satz II.4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Dann gilt
$Df(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ ist konstant.

Beweis:

Zu $x_0, x_1 \in \Omega$ existiert nach Lemma II.3 ein Polygonzug $\gamma : [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$.
γ ist stetig und in $PC^1 \overset{\text{Lemma II.1}}{\Longrightarrow} f(x_1) - f(x_0) = \int_0^1 \underbrace{Df(\gamma(t))}_{=0} \gamma'(t) dt = 0$

■

Satz II.5

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m$. Es gebe ein $L < \infty$ mit $|Df(x)| \leq L \; \forall x \in \Omega$. Dann folgt:
$||f(x_1) - f(x_0)|| \leq L ||x_1 - x_0|| \; \forall x_0, x_1 \in \Omega$

Beweis:

Für jede stetige Funktion $\varphi : I = [a,b] \to \mathbb{R}^m$ gilt $\left\| \int_a^b \varphi \right\| \leq \int_a^b ||\varphi||$, denn

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b \varphi(x) dx \right\|^2 &= \langle \int_a^b \varphi(x) dx, \int_a^b \varphi(y) dy \rangle = \int_a^b \langle \varphi(x), \int_a^b \varphi(y) dy \rangle dx \\ &\overset{C-S}{\leq} \int_a^b ||\varphi(x)|| \cdot \left\| \int_a^b \varphi(y) dy \right\| dx \end{aligned}$$

Sei nun $\gamma(t) = (1-t)x_0 + t x_1, 0 \leq t \leq 1$. Aus Lemma II.1 und $\gamma'(t) = x_1 - x_0$ folgt:

$$\begin{aligned} ||f(x_1) - f(x_2)|| &= \left\| \int_0^1 Df(\gamma(t))(x_1 - x_0) dt \right\| \leq \int_0^1 ||Df(\gamma(t))(x_1 - x_0)|| dt \\ &\overset{||Ah|| \leq |A| \cdot ||h||}{\leq} \int_0^1 |Df(\gamma(t))| \cdot ||x_1 - x_0|| \leq L ||x_1 - x_0|| \end{aligned}$$

■

Lemma II.6

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dann gibt es zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ eine Konstante $L < \infty$ mit $||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y|| \; \forall x, y \in K$

Beweis:

Angenommen, die Behauptung stimme nicht.
Dann existieren zu jedem $k \in N$ Punkte $x_k, y_k \in K$ mit $||f(x_k) - f(y_k)|| > k||x_k - y_k|| \; \forall k \in \mathbb{N}$.

f, Df sind beide stetig auf $K \overset{\text{Ana I}}{\Rightarrow} \exists M < \infty : ||f(x)|| + |Df(x)| \leq M \; \forall x \in K$.
Nach Wahl einer Teilfolge gilt:
$x_k \to x \in K$, aber $||x_k - y_k|| \leq \frac{1}{k}||f(x_k) - f(y_k)|| \leq \frac{2M}{k} \to 0$ mit $k \to \infty$
$\Longrightarrow y_k \to x$ mit $k \to \infty$

Wähle $r > 0$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$.
Für hinreichend große k gilt $x_k, y_k \in B_r(x)$, also folgt aus Satz II.5:
$k||k_k - y_k|| < ||f(x_k) - f(y_k)|| \leq M||x_k - y_k||$ ↯ für k groß genug.

■

Definition II.7

Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}^n$ hat in $x \in M$ ein lokales $\left\{ \begin{array}{c} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right\}$, falls ein $\delta > 0$ existiert mit $f(y) \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \right\} f(x) \; \forall y \in B_\delta(x) \cap M$. Ist sogar $f(y) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} f(x) \; \forall y \in (B_\delta(x) \cap M) \backslash \{x\}$, so heißt das $\left\{ \begin{array}{c} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right\}$ *isoliert*.

Satz II.8

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ habe in $x \in \Omega$ ein lokales Extremum.
Ist f in diesem Punkt differenzierbar, so folgt $Df(x) = 0$.

Beweis:

Für $v \in \mathbb{R}^n$ hat die Funktion $t \mapsto f(x + tv)$ ein lokales Extremum bei $t = 0$, also folgt
$0 = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0} = \partial_v f(x) \overset{\text{Satz I.8}}{=} Df(x)v \; \forall v \in \mathbb{R}^n$

■

Definition II.9

Ein Punkt $x \in \Omega$ mit $Df(x) = 0$ heißt kritischer Punkt von f.

Definition II.10

Sei $f \in C^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Die zweite Ableitung von f im Punkt $x \in \Omega$ ist die Bilinearform

$$D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, D^2 f(x)(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) v_i w_j$$

Die zugehörige Matrix $(\partial_i \partial_j f(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ heißt *Hesse-Matrix* von f an x und die zugehörige quadratische Form $v \mapsto D^2 f(x)(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) v_i w_j$ heißt *Hesse-Form* von f in x.

Bemerkung:

Die Hesse-Matrix ist symmetrisch:
Satz I.4 $\Rightarrow \partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$
$\Rightarrow D^2 f(x)(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) v_i w_j = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x) w_j v_i = D^2 f(x)(w,v)$

Lemma II.11

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$ und $\gamma \in C^2(I, \Omega)$.
Dann gilt $(f \circ \gamma)''(t) = D^2 f(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t)) + Df(\gamma(t))\gamma''(t)$

Beweis:

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(\gamma(t)) \gamma_j'(t) \\ \Rightarrow (f \circ \gamma)''(t) &= \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(\gamma(t)) \gamma'(t) \gamma'(t) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(\gamma(t)) \gamma_j''(t) \end{aligned}$$

■

Lemma II.12

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$.
Dann gilt $\frac{f(x+h) - (f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2} D^2 f(x)(h,h))}{||h||^2} \to 0$ mit $h \to 0$

Beweis:

$\varphi(t) := f(x+th) \Rightarrow \varphi(1) - \varphi(0) + \varphi'(0) = \int_0^1 (\varphi'(t) - \varphi'(0)) dt = \int_0^1 (1-t) \varphi''(t) dt$,
denn $\int_0^1 (1-t)\varphi''(t) dt = [(1-t)\varphi'(t)]_0^1 + \int_0^1 \varphi'(t) dt = -\varphi'(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt$

Aus Lemma II.11 folgt nun $f(x+h)-(f(x)+Df(x)h)=\int_0^1(1-t)D^2f(x+th)(h,h)dt$

$$\Rightarrow f(x+h)-(f(x)+Df(x)h+\frac{1}{2}D^2f(x)(h,h))=\int_0^1(1-t)(D^2f(x+th)(h,h)-D^2(f(x)(h,h))dt$$

denn $\displaystyle\int_0^1(1-t)dt=\frac{1}{2}$

Zu $\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ mit $|\partial_i\partial_j f(y)-\partial_i\partial_j f(x)|<\varepsilon\ \forall||x-y||<\delta$.
F ür $||h||<\delta$ folgt

$$\sum_{i,j=1}^n|(\partial_i\partial_j f(x+th)-\partial_i\partial_j f(x))h_ih_j|<n^2||h||^2\varepsilon\Rightarrow \text{Behauptung}$$

■

Lemma II.13

Sei $b:V\times V\to\mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V mit Norm $||\cdot||'=\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Setze $\lambda:=\inf\{b(x,x):x\in V,||x||'=1\}$
Dann existiert $v\in V$ mit $||v||'=1$ und $b(v,v)=\lambda$.

Beweis:

1. $V=\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist das Standartskalarprodukt.
   $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},f(x)=b(x,x)=\sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_ix_j$, wobei $b_{ij}=b(e_i,e_j)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$ und $\{x\in\mathbb{R}^n:||x||=1\}=S^{n-1}$ ist kompakt. Die Existenz von v folgt aus Satz VIII.9 in Analysis I.

2. $V,\langle\cdot,\cdot\rangle$ beliebig.
   Wähle Orthonormalbasis $v_1,...,v_n$ von V. Mit $T:\mathbb{R}^n\to V,T(x)=\sum_{i=1}^n x_iv_i$ gilt dann $||T(x)||'=||x||$.
   Wir können also 1. anwenden auf die Bilinearform $\tilde{b}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\tilde{b}(x,y)=b(Tx,Ty)$.

■

Definition II.14

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform heißt *positiv definit* bzw. *positiv semidefinit*, falls gilt: $b(v,v)>0$ bzw. $b(v,v)\geq 0\ \forall v\in V\backslash\{0\}$.

Notation: $b>0$ bzw. $b\geq 0$.
Entsprechend sind auch negative (Semi-)Definitheit definiert.

Bemerkung:

Eine Bilinearform, für die es $v,w\in V$ gibt mit $b(v,v)>0,b(w,w)<0$ heißt *indefinit*.

Beispiel:

Wir definieren $b(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$ auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist $b(e_1,e_1)=1,b(e_2e_2)=-1$

Satz II.15

Sei $f \in C^2(\Omega), \Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $x \in \Omega$.

1. Wenn f in x ein lokales Minimum (Maximum) hat, so ist $D^2 f(x)$ positiv (negativ) semidefinit.
2. Ist $Df(x) = 0$ und $D^2 f(x)$ positiv (negativ) definit, so hat f in x ein isoliertes lokales Minimum (Maximum).

Beweis:

Wir beweisen nur die Aussage für das Minimum, der Beweis für das Maximum folgt äquivalent.

1. Es gilt $Df(x) = 0$ nach Satz II.8:
   F ür $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig hat $t \mapsto f(t+v)$ bei $t = 0$ ein lokales Minimum, also folgt aus Analysis I und Lemma II.12 $0 \leq \frac{d^2}{dt^2} f(x+tV)|_{t=0} = D^2 f(x)(v,v)$.
2. Setze $\lambda := \inf_{||v||=1} D^2 f(x)(v,v)$.
   Lemma II.13 $\implies \exists v \in \mathbb{R}^n : ||v|| = 1$ mit $D^2 f(x)(v,v) = \lambda$. $D^2 f(x)$ positiv definit $\Rightarrow \lambda > 0$.
   Sei nun für $h \neq 0$
   $$R(h) = \frac{f(x+h) - (f(x) + \frac{1}{2} D^2 d(x)(h,h)}{||h||^2}$$
   . Lemma II.12 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ mit $|R(h)| < \varepsilon$ für $||h|| < \delta$
   $\implies \frac{f(x+h)-f(x)}{||h||^2} = \frac{1}{2} D^2 f(x)(\frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||}) + R(h) > \frac{lambda}{2} - \varepsilon$. Wähle $\varepsilon = \frac{\lambda}{4}$.

■

Satz II.16

Die Hauptachsentransformation
Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V. Dann existiert eine Orthonormalbasis $v_1, ..., v_n$ von V mit $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \; \forall 1 \leq i,j \leq n$, so dass gilt: $b(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij} \; \forall 1 \leq i,j \leq n$

Beweis:

Wir zeigen zuerst: Für $v \in V$ mit $||v|| = 1$ und $b(v,v) = \inf\{b(x,x) : ||x|| = 1\} = \lambda$ gilt: $(*) \quad b(v,w) = \lambda \langle v, w \rangle \; \forall w \in V$

Die Menge der $w \in V$, die $(*)$ erfüllen, ist ein Untervektorraum U von V und es gilt $v \in U$, deshalb können wir $\langle v, w \rangle = 0, ||w|| = 1$ annehmen. (Begründung: $\tilde{w} = \underbrace{\langle \tilde{w}, v \rangle v}_{||v} + \underbrace{\tilde{w} - \langle \tilde{w}, v \rangle v}_{\perp v}$)

Dann ist $||(\cos t)v + (\sin t)w||^2 = 1 \; \forall t$. Damit ist
$b(v,w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} b((\cos t)v + (\sin t)w, (\cos t)v + (\sin t)w)|_{t=0} = 0 = \lambda \langle v, w \rangle$

Jetzt konstruieren wir induktiv v_1, v_n orthonormal und $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $b(v_i, w) = \lambda_i \langle v_i, w \rangle \; \forall w \in V$.
F ür $k = n$ folgt die Aussage des Satzes, indem wir $w = v_j$ einsetzen.

Seien dazu $v_1, ..., v_{k-1}$ und $\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}$ schon gefunden, wobei $1 \leq k < n$. Setze $V_k := \{v_1, ..., v_{k-1}\}^\perp$ und $\lambda_K := \inf\{b(x,x) : x \in V_k, ||x|| = 1\}$. Lemma II.13 $\Rightarrow$ $\exists v_k \in V_k$ mit $||v_k|| = 1$ und $b(v_k, v_k = \lambda_k$, also gilt $b(v_k, w) = \lambda_k \langle v_k, w \rangle \; \forall w \in V_k$ nach $(*)$. Aber für $1 \leq i \leq k$ liefern die Symmetrie von b und die Induktionsannahme $b(v_k, v_i) = b(v_i, v_k) = \lambda_i \langle v_i, v_k \rangle = 0 = \lambda_k \langle v_k, v_i \rangle$
$\Longrightarrow b(v_k, w) = \lambda_k \langle v_k, w \rangle \; \forall w \in V$

■

Bemerkung:

Ein Endomorphismus $B : V \to V$ in einem euklidischen Vektorraum heißt symmetrisch, falls $b(v, w) = \langle Bv, w \rangle$ symmetrisch ist. Dann ist $(*) \Leftrightarrow Bv = \lambda v$, das heißt die v_k aus dem Satz sind Eigenvektoren von B zu den Eigenwerten λ_k. Symmetrische Endomorphismen sind also diagonalisierbar in einer Orthonormalbasis.

In den Koordinaten $x = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$ bezüglich der Eigenvektorbasis von b hat die quadratische Form die Darstellung $b(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ mit $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$

F ür $n = 2$ wolen wir $M_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : b(x, x) = c\}$ beschreiben. Ohne Einschränkung sie $\lambda_2 > 0$, sonst gehen wir über zu $-b$.

$\lambda_1 > 0$: $b(x, x)$ hat in 0 ein globales, isoliertes Minimum und für $c > 0$ ist M_c eine achsensymmetrische Ellipse mit Scheiteln in $(\pm\sqrt{\frac{c}{\lambda_1}}, 0)$ und $(0, \pm\sqrt{\frac{c}{\lambda_2}})$.

$\lambda_1 = 0$: Auch hier ist 0 ein globales Minimum, aber es ist nicht mehr isoliert, da m_0 die gesamte x-Achse enthält. Für $c > 0$ besteht M_c aus den parallelen Geraden $x_2 = \pm\sqrt{\frac{c}{\frac{\lambda}{2}}}$.

$\lambda_1 < 0$: M_0 ist die Vereinigung der beiden Ursprungsgeraden $x_2 = \pm\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}} x_1$. Für $c > 0$ ist M_c eine nach oben und unten geöffnete Hyperbel mit Scheiteln $(0, \pm\sqrt{\frac{c}{\lambda_2}})$ und M_0 als Asymptotenlinien. Für $c < 0$ erhalten wir ebenfalls eine Hyperbel mit Asymptoten M_0, die aber nach links und rechts geöffnet ist und die Scheitel $(\pm\sqrt{\frac{c}{\lambda_1}}, 0)$ hat.

(Graphische Darstellung in Königsberger, Analysis II Seite 68*, s. Literaturliste)*

Bemerkung:

Ein kritischer Punkt x einer Funktion f heißt *nicht degeneriert*, wenn die Eigenwerte λ_i von $D^2 f(x)$ alle ungleich 0 sind. In diesem Fall bezeichnet man die Anzahl der negativen Eigenwerte als den *Index* des kritischen Punktes. Für $f(x) = b(x, x)$ sind die drei gerade diskutierten Fälle der Reihe nach *Index null, degeneriert, Index eins.*

Definition II.17

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Dann heißt $f : K \to \mathbb{R}$ *konvex*, falls $\forall x, y \in K$ gilt:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \; \forall t \in [0,1]$$

f heißt *strikt konvex*, falls die strikte Ungleichung erfüllt ist für $x \neq y, t \notin \{0,1\}$

Bemerkung:

Äquivalent sind die Begriffe *konkav* und *strikt konkav* definiert.

Satz II.18

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in C^1(\Omega)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. f ist konvex
2. $f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x) \; \forall x, y \in \Omega$
3. $(Df(y) - Df(x))(y-x) \geq 0 \; \forall x, y \in \Omega$

Ist sogar $f \in C^2(\Omega)$, so ist außerdem äquivalent:

4. $D^2 f(x) \geq 0 \; \forall x \in \Omega$

Beweis:

Für $x, y \in \Omega$ betrachte $\varphi(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty)$

1. ⇒ 2.: 1. $\Rightarrow \varphi$ hat in $t = 0$ ein Minimum $\Rightarrow 0 \leq \varphi'(0) = f(y) - f(x) - Df(x)(y-x) \Rightarrow$ 2.

2. ⇒ 3.: Vertausche x, y in 2. und addiere die beiden Gleichungen.

3. ⇒ 1.: Annahme: $\varphi(t)$ hat in $\tau \in (0,1)$ ein Minimum $\varphi(\tau) < 0$.

F ür $t_1 < t_2$ gilt nach 3. mit $x(t) = (1-t)x + ty$:

$$\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}(Df(x(t_2)) - Df(x(t_1)))(x(t_2) - x(t_1)) \geq 0$$

Für $t < \tau$ folgt $\varphi'(t) \geq \varphi'(\tau) = 0 \Rightarrow 0 = \varphi(0) \leq \varphi(\tau) < 0$ ↯

Sei nun $f \in C^2(\Omega)$. Im Beweis von Lemma II.12 wurde gezeigt, dass

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \int_0^1 (1-t) D^2 f(x+th)(h,h)dt$$

Mit $h = y - x$ folgt 4. $\Rightarrow$ 2.

Umgekehrt folgt 4. aus 2. mit Satz II.15, denn die Funktion $g(y) = f(y) - (f(x) + Df(x)(y-x))$ hat in x ein Minimum.

■

Taylor-Entwicklung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Für $f \in C^k(\Omega)$ definiere die $k-te$ Ableitung $D^k f(x)$ im Punkt $x \in \Omega$ als k-Linearform $D^k f(x) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ mal}} \Rightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$D^k f(x)(v_1, .., v_k) = \sum_{i_1,...,i_k=1}^{n} (\partial^k_{i_1...i_k} f)(x) \cdot (v_1)_{i_1} \cdot ... \cdot (v_k)_{i_k}$$

Für $x_0, x \in \Omega$ betrachte die C^k-Funktion $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(x_0 + th)$ mit $h = x - x_0$. Wir zeigen durch Induktion:

$$\varphi^{(k)}(t) = D^k f(x_0 + th)(h, ..., h) \tag{II.1}$$

Für $k = 1$ folgt dies aus der Kettenregel und Satz I.8, $\varphi'(t) = Df(x_0 + th)h = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0 th) h_i$.
Für $k \geq 2$ folgt aus Satz I.4

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k)}(t) = \frac{d}{dt}\varphi^{(k-1)}(t) &\overset{\text{IV}}{=} \frac{d}{dt} \sum_{i_1,...,i_{k-1}=1}^{n} (\partial^{k-1}_{i_1...i_{k-1}} f)(x_0 + th) \cdot h_{i_1} \cdot ... \cdot h_{i_{k-1}} \\
&= \sum_{i_1,...,i_{k-1}=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ((\partial^k_{i_1...i_{k-1}i} f)(x_0 + th) \cdot h_{i_1} \cdot ... \cdot h_{i_{k-1}} h_i \\
&= \sum_{i_1,...,i_k=1}^{n} (\partial^k_{i_1...i_k} f)(x_0 + th) \cdot h_{i_1} \cdot ... \cdot h_{i_k} \\
&= D^k f(x_0 + th)(h, ..., h)
\end{aligned}$$

Lemma II.19

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in C^{k+1}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert zu $x, x_0 \in \Omega$ ein $\xi = (1-\tau)x_0 + \tau x,\ \tau \in [0,1]$, so dass mit $H = x - x_0$ gilt:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j f(x_0)(h, ..., h)}{j!} + \frac{D^{k+1} f(\xi)(h, ..., h)}{(k+1)!}$$

Beweis:

Betrachte $\varphi(t) := f(x_0 + th)$. Als Verkettung einer C^∞-Funktion mit einer C^{k+1}-Funktion ist φ in C^{k+1}. Aus Analysis I wissen wir: $\exists \tau \in [0,1]$:

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}$$

Setzen wir II.1 ein, so folgt die Behauptung.

■

Notation:

$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ heißt *Multiindex*, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ heißt *Ordnung* von α und $\alpha! = \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!$ ist die *α-Fakultät.* Weiter schreiben wir $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$ und $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$. D^0 entspricht damit der Identität.

Satz II.20

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in C^{k+1}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu $x_0, x \in \Omega$ ein $\xi = (1-\tau)x_0 + \tau x$ mit $\tau \in [0,1]$, so dass gilt:

$$\boxed{f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha}(x-x_0)^\alpha}$$

Beweis:

Sei α ein Multiindex der Ordnung $|\alpha| = k$. Wie viele Tupel $(i_i, ..., i_k)$ gibt es, in denen jedes $i \in \{1, ..., n\}$ genau α_i-mal vorkommt?

Lösung: $\binom{k}{\alpha_1} \cdot \binom{k-\alpha_1}{\alpha_2} \cdot ... \cdot \binom{k-(\alpha_1+...+\alpha_{n-1})}{\alpha_n} = \frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!} \cdot \frac{(k-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdot ... = \frac{k!}{\alpha!(k-|\alpha|)!} = \frac{k!}{\alpha!}$
Die Entwicklung folgt nun aus Lemma II.19 und Satz I.4.

■

Eine Funktion $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $k \geq 0$, wenn es $a_\alpha \in \mathbb{R}$, $< \alpha| \leq k$ gibt mit $a_\alpha \neq 0$ für mindestens ein $|\alpha| = k$, so dass gilt $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \alpha^\alpha \; \forall x \in \mathbb{R}^n$

F ür $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bilden die Funktionen $(x-x_0)^\alpha$ mit $0 \leq |\alpha| \leq k$ eine Basis des Raumes $\mathbb{P}_k$ der Polynome von Grad kleiner gleich k:

$$P(x) = \sum_{|\beta| \leq k} a_\beta (x-x_0)^\beta \;\Rightarrow\; D^\alpha P(x_0) = \alpha! a_\alpha \; \forall |\alpha| \leq k$$

Das k-te Taylorpolynom $P_k(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$ ist das eindeutige Polynom vom Grad höchstens k mit der Eigenschaft $D^\alpha P(x_0) = D^\alpha f(x_0) \; \forall |\alpha| \leq k$

Bemerkung:

Das k-te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt x_0 eines Polynoms f vom Grad höchstens k ist f selbst.

Beispiel:

$f(x) = (x_1 + ... + x_n)^k$ ist ein Polynom vom Grad k. $D^\alpha f(0) = \begin{cases} k! & \text{falls } |\alpha| = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$(x_1 + ... +_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$

Satz II.21

Sei $f \in C^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und P_k das $k-te$ Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt x_0. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{||x - x_0||^k} = 0$$

Beweis:

Satz II.20 mit k statt $k+1$ gibt zu $x \in \Omega$ ein ξ zwischen x_0 und x mit
$f(x) - P_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(x_0)}{\alpha}(x - x_0)^\alpha$

$D^\alpha f$ stetig und $|(x - x_0)^\alpha| \leq ||x - x_0||^k$

■

Beispiel:

Es sei $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$, $x_0 = (1,1)$. Wir bestimmen das Taylorpolynom 1. Ordnung.

$f(x_0) = 0$, $D^{(1,0)}f(x,y) = \partial_1 f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $D^{(0,1)}f(x,y) = \partial_2 f(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2}$
$D^{(2,0)}f(x,y) = -\frac{4y}{(x+y)^3}$, $D^{(1,1)}f(x,y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$, $D^{(0,2)}f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3}$

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(1,1) + D^{(1,0)}f(1,1)((x,y)-(1,1))^{(1,0)} + D^{(0,1)}f(1,1)((x,y)-(1,1))^{(0,1)} \\ &= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}(x-y) \end{aligned}$$

Restglied: Zwischenpunkt (ξ, η)

$$\begin{aligned} R_1(x,y) = & \frac{D^{(2,0)}f(\xi,\eta)}{2!0!}((x,y)-(1,1))^{(2,0)} + \frac{D^{(1,1)}f(\xi,\eta)}{1!1!}((x,y)-(1,1))^{(1,1)} \\ & + \frac{D^{(0,2)}f(\xi,\eta)}{0!2!}((x,y)-(1,1))^{(0,2)} \\ = & \frac{2}{(\xi+\eta)^3}(-\eta(x-1)^2 + (\xi-\eta)(x-1)(y-1) + \xi(y-1)^2) \end{aligned}$$

Parameterabhängige Integrale

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}, f : \Omega \times I \to \mathbb{R}, f = f(x,y)$.

Betrachte damit $\phi : \Omega \to \mathbb{R}, \phi(x) = \int_I f(x,y)dy$ mit dem Parameter $x = x_1, ..., x_n) \in \Omega$. Für jedes $x \in \Omega$ sei $f(x,\cdot) : I \to \mathbb{R}, y \mapsto f(x,y)$ Riemann-integrierbar.

Erinnerung:
Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so gilt $\operatorname{osc}(f,\delta) := \sup\{|f(x) - f(x')| : x, x' \in \Omega, ||x - x'|| < \delta\}$, außerdem gilt die Äquivalenz f gleichmäßig stetig $\Leftrightarrow \lim_{\delta \to 0} \operatorname{osc}(f,\delta) = 0$

Satz II.22

Sei f wie oben beschrieben. Ist $f \in C^0(\Omega \times I)$, so ist $\phi : \Omega \to \mathbb{R}, \phi(x) = \int_I f(x,y)dy$ wohldefiniert und stetig.

Beweis:

ϕ ist wohldefiniert, da f stetig ist (Daraus folgt Riemann-Integrierbarkeit). Für $x, x' \in \Omega$ berechne $|\phi(x) - \phi(x'| \leq \int_I |f(x,y) - f(x',y)|dy \leq |I| \sup\limits_{y \in I} |f(x,y) - f(x',y)|$. Wähle $R > 0$ mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$. Dann ist $f(x,y)$ gleichmäßig stetig auf $\overline{B_R(x)} \times I$

$\Rightarrow$ Für $||x - x'|| < \delta \leq R$ ist $\sup\limits_{y \in I} |f(x,y) - f(x',y)| \leq \operatorname{osc}(f|_{\overline{B_R(x)} \times I}, \delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$

■

Satz II.23

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a,b]$ kompakt, $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}, f = f(x,y)$. Es gelte:

1. $f(x, \cdot)$ ist Riemann-integrierbar für jedes $x \in \Omega$
2. $\frac{df}{dx_j}$ existiert und ist stetig auf $\Omega \times I$

Dann ist $\phi : \Omega \to \mathbb{R}, \phi(x) = \int_I f(x,y)dy$ nach x_j partiell differenzierbar und es gilt $\frac{d\phi}{dx_j}(x) = \int_i \frac{df}{\partial xj}(x,y)dy \; \forall x \in \Omega$

Sind f und $\frac{df}{dx_1}, ..., \frac{df}{dx_n} \in C^0(\Omega \times I)$, so gilt außerdem $\phi \in C^1(\Omega)$.

Beweis:

Aus Lemma II.1 und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\frac{f(x + he_j, y) - f(x,y)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + she_j, y)ds = \int_0^1 \frac{df}{dx_j}(x + she_j, y)ds$$

$\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ und $|h| < \delta \leq R$:

$$\left| \frac{\phi(x + he_j) - \phi(x)}{h} - \int_I \frac{df}{dx_j}(x,y)dy \right| = \left| \int_I \frac{f(x + he_j, y) - f(x,y)}{h} - \frac{df}{dx_j}(x,y))dy \right|$$
$$= \left| \int_I \int_0^1 (\frac{df}{dx_j}(x + she_j, y) - \frac{df}{dx_j}(x,y))dsdy \right| \leq \int_I \int_0^1 \left| \frac{df}{dx_j}(x + she_j, y) - \frac{df}{dx_j}(x,y) \right| dsdy$$
$$\leq |I| \operatorname{osc}(\frac{df}{dx_j} \Big|_{\overline{B_R(x) \times I}}, \delta) \to 0 \text{ mit } \delta \to 0$$

$\Rightarrow \; \frac{d\phi}{dx_j}(x) = \int_I \frac{df}{dx_j}(x,y)dy$ und Satz II.22 impliziert die Stetigkeit von $\frac{d\phi}{dx_j}$.

$f, \frac{df}{dx_1}, ..., \frac{df}{dx_n}$ stetig $\overset{\text{Satz II.22}}{\Longrightarrow} \phi \in C^1(\Omega)$

■

Beispiel: Gauss'sche Dichtefunktion

Behauptung: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Beweis: Setze $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = (\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi)^2$. Berechne dann

$$F'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi \overset{\xi=xy}{=} \int_0^1 2xe^{-(1+y^2)x^2}dy = \int_0^1 \frac{df}{dx}(x,y)dy$$

mit $f(x,y) = -\frac{e^{-(1+y^2)x^2}}{1+y^2}$. f ist damit glatt auf $(0,\infty) \times [0,1]$ und aus Satz II.23 zusammen mit der Gleichung $\phi(x) = \int_0^1 f(x,y)dy$ folgt $\phi'(x) = \int_0^1 \frac{df}{dx}(x,y)dy = F'(x)$.
$F(0) - \phi(0) = -\phi(0) = \int_0^1 f(0,y)dy = \int \frac{1}{1+y^2}dy = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow F(x) = \phi(x) + \frac{\pi}{4}\ \forall x \in [0,\infty)$
aber $|\phi(x)| \leq e^{-x^2} \to 0$ mit $x \to \infty \Longrightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{F(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \overset{\text{Symmetrie}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

Satz II.24

Satz von Fubini
Seien $I = [a,b], J = [\alpha,\beta]$ kompakt, $f \in C^0(I \times J)$. Dann gilt:

$$\int_\alpha^\beta (\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b (\int_\alpha^\beta f(x,y)dy)dx$$

Beweis:

Wir betrachten $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}, \phi(x) = \int_\alpha^\beta(\int_a^x f(\xi,y)d\xi)dy, \psi(x) = \int_a^x(\int_\alpha^\beta f(\xi,y)dy)d\xi$
Ziel: $\psi(b) = \phi(b)$. Wir wissen bereits, dass $\psi(a) = \phi(a)$, müssen also lediglich zeigen, dass $\psi'(x) = \phi'(x)\ \forall x \in I$

$\psi'(x) = \int_\alpha^\beta f(x,y)dy$. Wir definieren $F(x,y) = \int_a^x f(\xi,y)d\xi$, $\quad \frac{dF(x,y)}{dx} = f(x,y) \in C^0$
Satz II.23 $\Rightarrow \phi'(x) = \int_\alpha^\beta \frac{dF}{dx}(x,y)dy = \int_\alpha^\beta f(x,y)dy \Longrightarrow \psi'(x) = \phi'(x)$

■

Variationsrechnung

Wir nennen $\mathfrak{F} : C^1(I,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \mathfrak{F}(u) = \int_a^b f(t,u(t),u'(t))dt$ *funktional*, $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(t,x,v)$ *Lagrangefunktion*.

Beispiel:

Es sei im Folgenden $I = [a,b]$

1) Bogenlänge

Wir betrachten $\mathfrak{F}(u) = \int_a^b ||u'(t)||dt \quad u \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$. Dann ist also $f(t,x,v) = ||v||$.

2) Wirkungsintegral

$u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ beschreibt die Bahn eines Teilchens der Masse m in einem Kraftfeld mit Potential $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann ist

- $\frac{m}{2}||u'(t)||^2$ die kinetische,
- $V(u(t))$ die potentielle Energie des Teilchens zum Zeitpunkt t

Wir betrachten nun das *Wirkungsintegral* $\mathfrak{F}(u) = \int_a^b (\frac{m}{2}||u'(t)||^2 - V(u(t)))dt$. Damit ist $f(t, x, v) = \frac{m}{2}||v||^2 - V(x)$.

Gesucht: Funktionen, die $\mathfrak{F}$ maximieren bzw. minimieren. (*Euler-Lagrange-Gleichung*)

Ansatz: Betrachte Variationen $u(\varepsilon, t)$ der extremalen Funktion, die von einem Parameter abhängt. $u : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times I \to \mathbb{R}^n, u = u(\varepsilon, t)$ wobei $u(0, t) = u(t)$. Die Ableitung bzgl. ε ist dann ein Vektorfeld: $\varphi : I \to \mathbb{R}^n, \varphi(t) := \frac{du}{d\varepsilon}(0, t)$. Dieses Feld heißt *Variationsvektorfeld*.

Lemma II.25

Sei $f = f(t, x, v)$ eine Lagrangefunktion mit $f, Dvf \in C^1(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Für $u \in C^2((-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times I, \mathbb{R}^n)$ betrachte $\phi(\varepsilon) = \mathfrak{F}(u(\varepsilon, \cdot)) = \int_a^b f(t, u(\varepsilon, t))\frac{du}{dt}(\varepsilon, t)dt$. Dann gilt mit $\phi = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, \cdot) : I \to \mathbb{R}^n$ die Formel

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon}(0) = \int_a^b \langle L_f(u), \varphi\rangle dt + [\langle \partial_v f(t, u, u'), \varphi\rangle]_{t=a}^{t=b} \tag{II.2}$$

wobei $L_f(u) : I \to \mathbb{R}^n$ gegeben ist durch $L_f(u) = D_x f(t, u, u') - \frac{d}{dt}[D_v f(t, u, u')]$

Beweis:

Die Verkettung $(\varepsilon, t) \mapsto f(t, u(\varepsilon, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\varepsilon, t))$ ist von der Klasse C^1.
Satz II.23 $\Rightarrow \phi'(0) = \int_a^b \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u')\frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon}(o, t) + \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u')\frac{\partial^2 u_i}{\partial \varepsilon \partial t}(0, t))dt$. Mit $\varphi(t) = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, t)$ folgt

$$\phi'(0) = \int_a^b \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u')\varphi_i(t) + \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u')\varphi_i'(t))dt$$

Partielle Integration liefert dann

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n (\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u') - \frac{d}{dt}[\frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u')]}^{L_f(u)_i})\varphi_i(t))dt + \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u')\varphi_i\right]_{t=a}^{t=b}$$

■

Lemma II.26

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $I = (a, b)$. Für $f \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ gelte $\int_a^b \langle f, \varphi\rangle = 0 \ \forall \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n)$. Hierbei ist

$C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n) = \{\psi \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n) : \overbrace{\{x \in I : \psi(x) \neq 0\}}^{\operatorname{spt}(\psi)} \subset\subset I\}$. Dann ist f die Nullfunktion.

Beweis:

$n=1$: Betrachte die Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}), \eta(s) = 0$ für $|s| \geq 1, \eta \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \eta = 1$.

Beispiel: $\eta(s) = \begin{cases} a\exp(\frac{1}{s^2-1}) & \text{für } |s|<1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Angenommen, es ist $\varepsilon := f(t_0) > 0$ für ein $t_0 \in I$. Aus der stetigkeit von f folgt die Existenz eines $\delta > 0$ mit $f(t) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall t \in [t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}] \subset I$. Betrachte die reskalierte Funktion $\eta_{t_0,\delta}(t) := \frac{1}{\delta}\eta(\frac{t-t_0}{\delta})$. Dann gelten:

- $\eta_{t_0,\delta}(t) = 0$ für $|t-t_0| \geq \delta$,
- $\int_{\mathbb{R}} \eta_{t_0,\delta} = 1$

Nach Voraussetzung folgt:

$0 = \int_a^b f(t)\eta_{t_0,\delta}(t)dt = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \underbrace{f(t)}_{\geq\frac{\varepsilon}{2}}\eta_{t_0,\delta}(t)dt \geq \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\int_a^b \eta_{t_0,\delta}(t)dt}_{=1} = \frac{va}{2} > 0$ ↯

n beliebig: $f: I \to \mathbb{R}^n$. Die Voraussetzung liefert:

$\forall \varphi \in C_c^\infty(I): 0 = \int_a^b \langle f, \varphi e_i\rangle = \int_a^b f_i\varphi \overset{n=1}{\Rightarrow} f_i = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n$

■

Satz II.27

Die Euler-Lagrange Gleichungen

Sei $\mathfrak{F}(u) = \int_a^b f(t,u,u')$ ein Variationsintegral mit $f \in C^2(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), f = f(t,x,v)$.
Sei $u \in C^2(I,\mathbb{R}^n)$ *stationärer Punkt*, das heißt $\frac{d}{d\varepsilon}\mathfrak{F}(u+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = 0 \ \forall \varphi \in C_c^\infty(I,\mathbb{R}^n)$. Dann gelten die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\boxed{L_f(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,u,u') - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v_i}(t,u,u') = 0} \quad \text{für } i = 1,...,n$$

Bemerkung: Diese sind n Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Beweis:

Folgt vollständig aus Lemma II.25 mit Sonderfall $\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \Rightarrow$ Randterm verschwindet und Lemma II.26

■

Beispiel:

Jetzt können wir die Beispiele von vorher berechnen:

1) Bogenlänge:

Erinnerung:
$\mathfrak{F}(u) = \int_a^b ||u'(t)||dt$ für $u \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$, $f(t,x,v) = ||v||, D_v f(t,x,v) = \frac{v}{||v||}$, falls $||v|| \neq 0$

Die dazugehörige Euler-Lagrange-Gleichungen (ELG) sind somit $L_f(u) = -\frac{d}{dt}\frac{u'}{||u'||} = 0$, also muss der *Einheitstangentenvektor* $\frac{u'}{||u'||}$ konstant sein. Somit ist $u(t)$ die Strecke von $u(a)$ nach $u(b)$.

2) Wirkungsintegral:

Erinnerung:
$\mathfrak{F}(u) = \int_a^b (\frac{m}{2}||u'||^2 - V(u(t)))dt, f(t,x,v) = \frac{m}{2}||v||^2 - V(x), F(x) = -\nabla V(x),$
also $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x,v) = F_i(x), \frac{\partial f}{\partial v_i}(t,x,v) = mv_i$

Somit sind die ELG $F(u) - mu'' = 0$. Wir haben soeben die (vielleicht) aus der Schulphysik bekannten *Newton'schen Bewegungsgleichungen* hergeleitet.

Kapitel III

Lokale Auflösung von Gleichungen

Motivation:

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der lokalen Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und es sei schon eine Lösung von $f(x_0) = y_0$ gegeben. Wir stellen uns nun die folgenden Fragen:

1. Hat die Gleichung $f(x) = y$ zu jedem y in einer kleinen Umgebung um y_0 eine Lösung in einer kleinen Umgebung um x_0?
2. Ist x_0 die einzige Lösung von $f(x) = y_0$, zumindest in einer Umgebung um x_0?
3. Falls dem nicht so ist, wie sieht dann die Lösungsmenge $f^{-1}(y_0)$ nahe bei x_0 aus?

Der einfachste Fall: f ist *affinlinear*. Wegen $f(x_0) = y_0$ gilt $f(x) = y_0 + A(x - x_0)$ mit $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Dann gilt $f(x) = y \Leftrightarrow A(x - x_0) = y - y_0$.
Die Lineare Algebra liefert:

1. Es existiert eine Lösung für alle $y \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \mathrm{rk}(A) = m$
2. Es gibt höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \ker(A) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{rk}(A) = n$
3. $f^{-1}(y_0)$ ist ein affiner Unterraum der Dimension $n - \mathrm{rk}(A)$

Sei nun $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ beliebig und $R_f(\xi) = f(x_0 + \xi) - (f(x_0) + Df(x_0)\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ hinreichend klein. Ist $f(x_0) = y_0$, so folgt mit $A = Df(x_0)$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow A(x - x_0) + R_f(x - x_0) = y - y_0 \quad (\text{Da } R_f(x - x_0) = f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0)))$$

Definition III.1

Eine Abbildung $f : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Diffeomorphismus* der Klasse C^r mit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls sowohl f als auch die Umkehrabbildung f^{-1} r-mal stetig differenzierbar sind.

Beispiel:

1. Ist $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f \in C^1(I)$ mit $f' > 0$ (bzw. $f' < 0$) auf ganz I, so ist $J := f(I)$ ein offenes Intervall (s. Analysis I) und $f : I \to J$ ist ein C^1-Diffeomorphismus ($g = f^{-1}$ ist differenzierbar mit $g' = \frac{1}{f' \circ g} \in C^0$).
   Umgekehrt: Ist $f : I \to f(I)$ ein C^1-Diffeomorphismus, so folgt
   $g(f(x)) = x \Rightarrow g'(f(x))f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) \neq 0 \overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow}$ entweder $f' > 0$ oder $f' < 0$ auf ganz I.

Somit ist zum Beispiel $f : (-1,1) \to (-1,1), f(x) = x^3$ kein C^1-Diffeomorphismus, obwohl f bijektiv und in C^1 ist:
$f'(0) = 0$, die Umkehrabbildung $g : (-1,1) \to (-1,1), g(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \\ sqrt[3]y, & y < 0 \end{cases}$ ist in $y = 0$ nicht differenzierbar.

2. Sei $U := \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) : x \geq 0\}$.
$f : U \to V, f(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ ist ein Diffeomorphismus der Klasse C^∞ mit Umkehrabbildung
$g : V \to U, g(x,y) = \begin{cases} (\sqrt{x^2+y^2}, \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), & y \geq 0 \\ (\sqrt{x^2+y^2}, 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), & y < 0 \end{cases}$ $\in C^\infty$ für $(x,y) \in V$ mit $y \neq 0$ (arccos ist C^∞ auf $(-1,1)$).
F ür $x < 0$ gilt alternativ $g(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \Rightarrow g \in C^\infty(V,U)$.

3. Inversion an der Standartsphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$: Die Funktion
$f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, f(x) = \frac{x}{||x||^2}$ ist ein C^∞-Diffeomorphismus mit $f^{-1} = f \in C^\infty$.
$U = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < ||x|| < 1\}$ wird auf $V = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y|| > 1\}$ abgebildet.

Lemma III.2

Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V$ bijektiv mit Umkehrabbildung $g : V \to U$.
Sind f in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, so ist $Df(x_0) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ invertierbar, insbesondere ist also $n = m$, und es gilt $Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1}$.

Beweis:

Aus $g(f(x)) = x, f(g(y)) = y$ folgt $Dg(y_0)Df(x_0) = Id_{\mathbb{R}^n}, Df(x_0)Dg(y_0) = Id_{\mathbb{R}^m}$
$\Rightarrow$ $Df(x_0)$ ist injektiv und surjektiv, also invertierbar und $m = n$ folgt mit der Dimensionsformel aus der linearen Algebra.

■

Bemerkung 1:

In Definition III.1 hätten wir $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ zulassen können, da das eben bewiesene Lemma sofort $m = n$ impliziert.

Bemerkung 2:

Die Determinante $\det Df(x_0)$ heißt *Jacobideterminante* von f in x_0. Weiter ist
$\det Dg(y_0) \det Df(x_0) = 1$ für $y_0 = f(x_0)$.

Lemma III.3

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ bijektiv. Ist $f \in C^r(U,V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und ist die Umkehrabbildung $g : V \to U$ differenzierbar, so ist auch $g \in C^r(V,U)$.

Beweis:

Lemma III.2 $\Rightarrow Dg = (Df)^{-1} \circ g$. Die Cramersche Regel (s.LA) impliziert:

$$(+) \quad \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = (-1)^{i+j} \frac{M_{ij}(Df)}{\det Df} \circ g.$$

$M_{ij}(Df)$ ist die Determinante der Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus Df hervorgeht.

Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über r:
IA: $f \in C^1 \Rightarrow$ die rechte Seite in $(+)$ ist in $C^0 \Rightarrow g \in C^1$
IS: Ist $f \in C^r$ und induktiv $g \in C^{r-1}$, so ist die rechte Seite von $(+)$ in $C^{r-1} \Rightarrow g \in C^r$

■

Definition: III.4

Eine Folge $x_k, k \in \mathbb{N}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(x_k, x_l) < \varepsilon \ \forall k, l > N$.

(X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge $x_k \in X$ konvergiert, das heißt es existiert ein $x \in X : \lim\limits_{n \to \infty} x_k = x$.

Satz III.5

Fixpunktsatz von Banach
Sei $X, d)$ ein vollständiger, metrischer Raum und $F : X \to X$ sei eine *Kontraktion*, das heißt es gibt ein $\theta \in [0, 1)$ mit $d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y) \ \forall x, y \in X$. Dann gibt es genau einen Fixpunkt $x \in X$ mit $F(x) = x$.

Beweis:

Eindeutigkeit:
Sei $F(x) = x, F(y) = y \Rightarrow d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq \underset{<1}{\theta} d(x, y) \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Existenz:
Betrachte die Folge $x_k \in X : x_{n+1} = F(x_n)$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in X$. Für $n \geq 1$ folgt $d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1}) \leq \theta d(x_n, x_{n-1})$.
Induktiv erhalten wir $d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n d(x_1, x_0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow d(x_n, x_0) \leq \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \theta^j d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{1-\theta} d(x_1, x_0)$$

Indem wir x_n statt x_0 als Startwert auffassen, haben wir für $m > n$

$$(*) \quad d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-\theta} d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1, x_0)$$

$\Rightarrow x_n$ ist Cauchy-Folge und konvergiert gegen $x \in X$. F ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\theta \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$

■

Bemerkung:

Lassen wir in $(*)$ m gegen ∞ gehen, so erhalten wir $d(x,x_n) \le \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1,x_0)$

Satz III.6

Satz über inverse Funktionen
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x_0) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ invertierbar in $x_0 \in \Omega$, so gibt es eine offene Umgebung U von x_0, so dass gilt

1. $V := f(U)$ ist eine offene Umgebung von $y_0 = F(x_0)$
2. $f : U \to V$ ist ein Diffeomorphismus der Klasse C^1

Zusatz: Ist sogar $f \in C^r(\Omega,\mathbb{R}^n)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist auch $g = (f|_u)^{-1} \in C^r(V,\mathbb{R}^n)$

Beweis:

Wir können $x_0 = y_0 = 0$ annehmen, sonst betrachte
$\tilde{f} : \tilde{\Omega} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : x_0 + \xi \in \Omega\} \to \mathbb{R}^n, \tilde{f}(\xi) = f(x_0+\xi) - f(x_0)$

Schritt 1: Formulierung als Fixpunktproblem
Setze $A := Df(0), R_f(x) = f(x) - Ax$. Damit gilt $f(x) = y \Leftrightarrow Ax + R_f(x) = y \Leftrightarrow x = A^{-1}(y - R_f(x))$.
F ür $y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $\phi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n, \phi_y(x) = A^{-1}(y - R_f(x))$. Damit gilt $f(x) = y \Leftrightarrow \phi_y(x) = x$.

Schritt 2: Konstruktion der Lösung
Wir bestimmen $\varepsilon > 0, \delta > 0$ so, dass für jedes $y \in B_\varepsilon(0)$ die Abbildung $\phi_y : \overline{B_\delta(0)} \to \overline{B_\delta(0)}$ eine Kontraktion ist.
Definiere $\Lambda := |A^{-1}| \in (0,\infty))$. Aus der Voraussetzung folgt, dass $DR_f(x) = Df(x) - A$ stetig ist mit $DR_f(0) = 0$. Damit folgt: $\exists \delta_0 > 0$ mit $\overline{B_{\delta_0}} \subset \Omega$ und $|DR_f(x)| \le \frac{1}{2\Lambda}$ für $||x|| \le \delta_0$.

Satz II.5 $\Rightarrow (||x_1||, ||x_2|| \le \delta_0 \Rightarrow ||R_f(x_1) - R_f(x_2)|| \le \frac{1}{2\Lambda}||x_1 - x_2||)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow ||\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)|| =& ||A^{-1}(y - R_f(x_1)) - A^{-1}(y - R_f(x_2))|| = ||A^{-1}(R_f(x_1) - R_f(x_2))|| \\ \le& \Lambda ||R_f(x_1) - R_f(x_2)||\end{aligned}$$

Somit haben wir die Kontraktionseigenschaft nachgewiesen:

$$||x_1||, ||x_2|| \le \delta_0 \Rightarrow ||\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)|| \le \frac{1}{2}||x_1 - x_2||$$

Anmerkung: Bisher ist y noch beliebig.
$||\phi_y(x)|| = ||A^{-1}(y - R_f(x))|| \le |A^{-1}|(||y|| + ||R_f(x)||) = \Lambda(||y|| + ||R_f(x) - \underbrace{R_f(0)}_{=0}|| \le \Lambda||y|| + \frac{1}{2}||x||$

für $||x|| \le \delta_0$. Für $\delta \in (0,\delta_0]$ wähle $\varepsilon = \frac{\delta}{2\Lambda} > 0 : ||x|| \le \delta, ||y|| < \varepsilon \Rightarrow ||\phi_y(x)|| < \Lambda\varepsilon + \frac{1}{2}\delta = \delta$.
$\Rightarrow \phi_y : \overline{B_\delta(0)} \to \overline{B_\delta(0)}$ ist eine wohldefinierte Kontraktion.

Satz III.5 $\Rightarrow \forall y \in B_\varepsilon(0) \exists! x \in \overline{B_\delta(0)}$ mit $\phi_y(x) = x$, also $f(x) = y$.
Tatsächlich ist $x \in B_\delta(0)$, denn $||x|| = ||\phi_y(x)|| < \delta$.

Die Mengen $V := B_\varepsilon(0)$ und $U := f^{-1}(V) \cap B_\delta(0)$ sind offen und $0 \in U \cap V$. Wir haben gezeigt: $f : u \to V$ ist bijektiv $\Rightarrow$ 1.

Schritt 3: Differenzierbarkeit der inversen Abbildung
Sei $g : V \to U$ die Umkehrabbildung von $f|_U$. Dann gilt $||g(y)|| = ||\phi_y(g(y))|| \leq \Lambda ||y|| + \frac{1}{2}||g(y)||$
$\Rightarrow ||g(y) \leq 2\Lambda ||y|| \Rightarrow g$ ist stetig mit $g(0) = 0$.

Wir zeigen $Dg(0) = A^{-1}$.
F ür $y \neq 0$ ist $g(y) \neq 0$ und es gilt:

$$\frac{||g(y) - A^{-1}y}{||y||} = \frac{||\phi_y(g(y)) - A^{-1}y}{||y||} = \frac{A^{-1}R_f(g(y))||}{||y||} \leq \Lambda \frac{||R_f(g(y))||}{||g(y)||} \cdot \frac{||g(y)||}{||y||}$$

Mit $y \to 0$ geht die Rechte Seite gegen 0, denn $\frac{||g(y)||}{||y||} \leq 2\Lambda$, $\frac{||R_f(x)||}{||x||} \to 0$ mit $x = g(y) \to 0$
$\Rightarrow Dg(0) = A^{-1}$.

Um die Differenzierbarkeit für alle $y \in V$ zu zeigen, wähle $\delta > 0$ so klein,
dass $\det Df(x) \neq 0 \; \forall x \in B_\delta(0)$. Ist $y \in V$, so sind die Voraussetzungen des Satzes im Punkt $x = g(y)$ erfüllt und es folgt aus dem bisherigen Beweis: $Dg(y) = Df(x)^{-1}$.
Lemma III.3 $\Rightarrow g \in C^1(V, U)$.

Ist $f \in C^r(U, V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist auch $g \in C^r(V, U)$ nach Lemma III.3.

■

Lemma III.7

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x)$ invertierbar $\forall x \in \Omega$, so ist auch $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beweis:

Satz III.6 $\Rightarrow$ Jeder Punkt $y \in f(\Omega)$ hat eine offene Umgebung $V \subset f(\Omega)$.

■

Beispiel:

Sei $f(a, b) \to \mathbb{R}$ mit $f' \neq 0$ auf ganz (a, b). Dann ist $f : (a, b) \to f((a, b))$ ein Diffeomorphismus.

Betrachte $\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \exp(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ mit $\exp(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.
$D\exp(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$, $\det D\exp(x, y) = e^{2x}\cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} \neq 0 \; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Die Abbildung ist nicht injektiv, da $\exp(x, y + 2k\pi) = \exp(x, y) \; \forall k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel:

Übergang von Lagrange- zur Hamiltonfunktion in der klassischen Mechanik.
Sei $L \in C^1(U),\ U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten die Gradientenabbildung
$f : U \to V, f(x) = DL(x), V = f(U) \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f : U \to V$ injektiv, $g : V \to U$ die Umkehrfunktion von f, so erklären wir die *Legendre-Transformierte* von L wie folgt:

$$H : V \to \mathbb{R}, H(y) = (\sum_{i=1}^n y_i x_i - L(x))\Big|_{x=g(y)}$$

Beispiel 1: $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, L(x) = \sqrt{1 + ||x||^2}$.
Dann ist $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+||x||^2}}$, $V = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y|| < 1\}$, $g(y) = \frac{y}{\sqrt{1-||y||^2}}$ und
$H(y) = (\sum_{i=1}^n y_i x_i - \sqrt{1 + ||x||^2})\Big|_{x=g(y)} = -\sqrt{1 - ||y||^2}$

Beispiel 2: Wir betrachten die Lagrange-Funktion $L = L(t, x, v)$ in einem elektromagnetischen Feld mit Skalarpotential ϕ und Vektorpotential A über einem Teilchen mit Ladung q und Masse m.
Dann gilt (s. Physik):
$L(A, x, v) = \frac{m}{2}||v||^2 - q(\phi(x) - \langle A(x), x\rangle)$. $p := \partial v L(A, x, v) = mv + qA(x) =: f(v)$
$\Rightarrow v = \frac{1}{m}(p - qt(x)) = g(p)$

$\Rightarrow H(t, x, p) = \{\langle p, v\rangle - L(t, x, v)\}|_{v=f^{-1}(A,x,p)} =$
$\frac{1}{m}(||p||^2 - q(\langle A(x), p\rangle) - \frac{m}{2}\frac{1}{m^2}||p - qA(x)||^2 + q\phi(x) - q\langle A(x), \frac{1}{m}(p - qA(x))\rangle = \frac{1}{2m}||p - qA(x)||^2 + q\phi(x)$

Satz III.8

Sei für $L \in C^2(U), U \subset \mathbb{R}^n$ offen die Gradientenabbildung $f : U \to V, f(x) = DL(x)$ diffeomorph und sei H die Legendre-Transformierte von L.
Dann folgt $DH = g$ mit $g = f^{-1} \in C^1(V, U)$, insbesondere $H \in C^2(V)$, und die Legendre-Transformierte von H ist L :

$$L(x) = (\sum_{i=1}^n y_i x_i - H(y))\Big|_{y=f(x)} \qquad \forall x \in U$$

Beweis:

$\frac{\partial L}{\partial x_i}(g(y)) = f_i(g(y)) = y_i \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_j}(\sum_{i=1}^n y_i g_i(y) - L \circ g) = g_j + \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial g_i}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} \circ g \frac{\partial g_i}{\partial y_i} = g_j$
$\Rightarrow DH = g$.
$H(y) = \sum_{i=1}^n y_i g_i(y) - L(g(y))$. Setze $y = f(x) \Rightarrow H(f(x)) = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i - L(x) \Rightarrow$ Behauptung.

$\blacksquare$

Satz III.9

Young'sche Ungleichung
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $L \in C^2(U)$ mit $D^2L(x) > 0\ \forall x \in U$. Dann ist die Legendre-Transformierte $H \in C^2(V)$ definiert, wobei $V = DL(U)$, und es gilt $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq L(x) + H(y)\ \forall x \in U, y \in V$ mit Gleichheit für $y = DL(x) \Leftrightarrow x = DH(y)$.

Beweis:

Die Abbildung $f \in C^1(U, V), f(x) = DL(x)$ ist injektiv, denn $Df(x) = DrL(x) > 0 \Rightarrow$ für $x_0, x_1 \in U$ mit $x_0 \neq x_1$ gilt $\langle f(x_1) - f(x_0), x_1 - x_0 \rangle = \int_0^1 \langle Df((1-t)x_1 + tx_0)(x_1 - x_0), x_1 - x_0 \rangle dt > 0$.

Da Außerdem $Df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in U$, ist f ein C^1-Diffeomorphismus nach Satz III.6.
Betrachte nun für ein festes $y \in V$ die Funktion $\varphi \in C^2(U)$ mit $\varphi(x) = L(x) + H(x) - \sum_{i=1}^n y_i x_i$
$\Rightarrow \varphi(g(y)) = 0$ nach Definition von H,
$D\varphi(g(y)) = DL(g(y)) - y = 0$ nach Definition von $g = f^{-1}$ und
$D^2\varphi(x) = D^2 L(x) > 0 \; \forall x \in U$.

Satz II.18 $\Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(d(y)) + D\varphi(g(y))(x - g(y)) = 0 \; \forall x \in U$

■

Implizite Funktionen

Ausgangssituation: Wir haben weniger Gleichungen als Unbekannte.
Betrachte $f : \Omega \to \mathbb{R}^k,\; f = f(x, y)$ mit $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$, also $n = m + k$. Gegeben sei eine Lösung (x_0, y_0) der Gleichung $f(x_0, y_0) = z_0$. Wie sieht die Lösungsmenge nahe bei (x_0, y_0) aus?
Ziel: Bestimme den Graphen $y = g(x)$.

Beispiel:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Sei eine Lösung $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, also $(x_0, y_0) \in S^1$. Ist $y > 0$, so können wir die Lösungsmenge nahe bei $x_0.y_0)$ als Graph der Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$ angeben. Ist $y < 0$, nehmen wir den Graph von $y = -\sqrt{1 - x^2}$.
   In $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ können wir die Lösungsmenge nicht als Graph über der x-Achse darstellen, dafür aber als Graph über der y-Achse.

2. Sei $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ linear. Wir unterteilen die darstellende $(k \times (m + k)$-Matrix von f in eine $k \times m$-Matrix A und eine $k \times k$-Matrix B, das heißt $f(x, y) = Ax + By$ mit
   $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k), B \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$

   Wir betrachten damit die Gleichung $Ax + By = f(x, y) = z_0$, die zu festem $x \in \mathbb{R}^m$ genau dann eine eindeutige Auflösung nach y hat, wenn B invertierbar ist. Dann gilt $y = B^{-1}(z_0 - Ax)$.

Wir betrachten jetzt allgemein die Jacobimatrix zu
$f = f(x, y)\; Df(x, y) = (D_x f, D_y f) \in \mathbb{R}^{k \times m} \times \mathbb{R}^{k \times k}$

Satz III.10

Satz über implizite Funktionen
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Ist $f(x_0, y_0) = z_0$ und $D_y f(x_0, y_0) \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$ invertierbar, so gibt es offene Umgebungen U von x_0 beziehungsweise V von y_0 sowie $g \in C^1(U, V)$ mit $\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = z_0\} = \{(x, g(x)) : x \in U)\}$. Insbesondere gelten damit

- $g(x_0) = y_0$,
- g hat die Ableitung $Dg(x_0) = -D_y f(x_0, y_0)^{-1} D_x f(x_0, y_0)$

Zusatz: Für jedes $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gilt $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k) \Rightarrow g \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Bemerkung: Die Voraussetzung bezieht sich auf die Ableitung nach den letzten k Komponenten. In der Anwendung müssen daher zuweilen die Achsen umbenannt werden.

Beweis:

Wir betrachten $F : \Omega \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, F(x,y) = (x, f(x,y))$. Damit berechnen wir
$$DF = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} & 0 \\ D_x f & D_y f \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{m\times m} & \mathbb{R}^{m\times k} \\ \mathbb{R}^{k\times m} & \mathbb{R}^{k\times k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+k)\times(m+k)}$$

$$\Rightarrow \det DF(x_0, y_0) = \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0$$

Satz III.6 $\Rightarrow$ Es existieren offene Umgebungen $U_0 \times V$ von (x_0, y_0) sowie W von (x_0, z_0), so dass $F : U_0 \times V \to W$ ein Diffeomorphismus ist. Sei G die zugehörige Umkehrabbildung $G \in C^1(W, U_0 \times V)$.

Ist $(x,z) \in W$, also $x, z) = (x, f(x,y))$ mit $(x,y) \in U_0 \times V$, gilt
$G(x,z) = G(x, f(x,y)) = G(F(x,y)) = (x,y) \Rightarrow G(x,z) = (x, g_0(x,z))$ mit $g_0 \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$.

$U = \{x \in U_0 : (x, z_0) in W\}$. Da $W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ offen ist, folgt, dass auch $U \subset \mathbb{R}^m$ offen ist und für $(x,y) \in U \times V$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x,y) = z_0 &\Leftrightarrow F(x,y) = (x, z_0) \\ &\Leftrightarrow (x,y) = G(x, z_0) \text{ (da } (x, z_0) \in W) \\ &\Leftrightarrow y = g_0(x, z_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Behauptung gilt mit $g(x) = g_0(x, z_0)$.

$f(x, g(x)) = z_0 \Rightarrow D_x f(x_0, y_0) + D_y f(x_0, y_0) Dg(x_0) = 0 \Leftrightarrow Dg(x_0) = -(D_y f(x_0, y_0))^{-1} D_x f(x_0, y_0)$

■

Beispiel:

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(p,q,\lambda) = \lambda^2 + 2p\lambda + q = (\lambda + p)^2 - (p^2 - q)$.
   $N = \{(p,q,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : f(p,q,\lambda) = 0\}$ ist die Vereinigung der beiden disjunkten Graphen $G^\pm = \{(p,q,\lambda^\pm(p,q)) : p^2 > q\}$ (wobei $\lambda^\pm(p,q) = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$) und
   $\overline{G}^+ \cap \overline{G}^- = \{(p,q,\lambda) : p^2 = q, \lambda = -p\}$.

   Im Fall $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2(\lambda_0 + p_0) \neq 0 \Leftrightarrow p_0^2 - q_0 > 0$ liegt (p_0, q_0, λ_0) in einem der Graphen G^+ oder G^- und N ist in einer Umgebung $U \times V$ als Graph von λ^+ oder λ^- darstellbar.

   Ist stattdessen $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2(\lambda_0 + p_0) = 0 \Leftrightarrow p_0^2 = q_0$, so macht Satz III.10 keine Aussage.
   Tatsächlich lässt sich N in keiner Umgebung von (p_0, q_0, λ_0) als Graph darstellen, denn für $p^2 < q$ hat die Gleichung keine, für $p^2 = q$ genau eine und für $p^2 > q$ zwei Lösungen $\lambda^\pm(p,q)$.

2. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(b,\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + b_0$. λ_0 sei eine einfache Nullstelle von $f(a,\lambda)$ für ein festes $a \in \mathbb{R}^n$, das heißt $f(a,\lambda) = (\lambda - \lambda_0)q(\lambda)$ mit Polynom $q(\lambda)$ und $q(\lambda_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0) = q(\lambda_0) \neq 0$.

Satz III.10 $\Rightarrow$ Es existieren Umgebungen $U \times V$ von (a, λ_0), so dass zu jedem $b \in U$ genau eine Nullstelle $\lambda(b) \in V$ von $f(b, \cdot)$ existiert. Diese hängt unendlich oft differenzierbar von b ab und es gilt für $0 \leq i \leq n-1$:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_i}(a) = -(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0))^{-1} \frac{\partial f}{\partial b_i}(a, \lambda_0) = \frac{\lambda_0^i}{n\lambda_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\lambda_0^{n-2} + ... + a_1}$$

Untermannigfaltigkeiten

Motivation: Aus der linearen Algebra wissen wir, dass $V \subset \mathbb{R}^n$ ein m-dimensionaler Unterraum ist, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Es existiert ein Isomorphismus $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \phi(V) = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$
2. Es existiert eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ mit vollem Rang $n - m$, so dass $V = f^{-1}(\{0\})$.
3. Es existiert eine lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^m \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{rk} \psi = m$ und $V = \psi(\mathbb{R}^m)$.

Definition III.11

Untermannigfaltigkeit

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *m-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$ der Klasse $C^r : r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls gilt: $\forall p \in M \exists \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sodass $p \in \Omega$ und es gibt einen C^r-Diffeomorphismus $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ mit $\phi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(\Omega)$. ϕ heißt dann *lokale Plättung* von M.

Satz III.12

Sei $M \subset \mathbb{R}^n, m + k = n$. Dann sind äquivalent:

1. M ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^r
2. $\forall p \in M$ $\exists$offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von p und $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ mit $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ und $\operatorname{rk} Df = k$ auf Ω
3. $\forall p \in M$ existieren offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^k$ und $g \in C^r(U, V)$, so dass nach geeigneter Permutation der Koordinaten gilt: $M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}$
4. $\forall p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ und $\varphi \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(x_0) = p$ für ein $x_0 \in U$ und $\operatorname{rk} D\varphi(x) = m$ $\forall x \in U$ sodass φ offene Teilmengen von U in relativ offene Teilmengen von M abbildet. φ heißt dann *lokale Parametrisierung*.

Beweis:

1\. $\Rightarrow$ 2. Für alle $p \in M$ existiert eine Lokale Plättung $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ der Klasse C^r mit $p \in \Omega$.
Sei $\pi^\perp : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine Projektion auf die zweite Komponente. Definiere dazu
$f := \pi^\perp \circ \phi, f : \Omega \to \mathbb{R}^k$.

F ür $q \in \Omega$ gilt: $f(q) = 0 \Leftrightarrow \phi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \Leftrightarrow q \in \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = M \cap \Omega$.
Weiter gilt $\operatorname{rk} Df = \operatorname{rk}(\pi^\perp \circ D\phi) = k$, denn $\operatorname{rk} D\phi = n$.

2. $\Rightarrow$ 3. k der Vektoren $\partial_1 f(p), ..., \partial_n f(p)$ sind linear unabhängig. Ohne Einschränkung seien dies $\partial_{m+1} f(p), ..., \partial_n f(p)$. Dann ist für $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ $D_y f(p)$ invertierbar. Aussage 3 folgt dann aus Satz III.10.

3. $\Rightarrow$ 4. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ und $\varphi : U \to M \cap \Omega, x \mapsto (x, g(x))$. Dann ist offenbar $\operatorname{rk} D\varphi(x) = m \ \forall x \in U$. Sei $\tilde{U} \subset U$ offen und V wie in 3. Daraus folgt: $\varphi(\tilde{U}) = M \cap (\tilde{U} \times V)$ ist relativ offen in M.

4. $\Rightarrow$ 1. Ohne Einschränkung seien $x_0 = 0, \varphi(0) = p$ und die ersten m Zeilen von $D\varphi(x)$ linear unabhängig.

Definiere $\varphi' := (\varphi_1, ..., \varphi_m) : U \to \mathbb{R}^m$. $D\varphi'(x)$ ist invertierbar, das heißt es gibt eine Umgebung $U' \subset \mathbb{R}^m$ von 0 und $V' \subset \mathbb{R}^m$, sodass $\varphi' : U' \to V'$ ein C^r-Diffeomorphismus ist. (Satz III.6)

$\psi : U' \times \mathbb{R}^k \to V' \times \mathbb{R}^k, \psi(\xi, \eta) := \varphi(\xi) + (0, \eta)$ ist bijektiv:

- $\psi(\xi,\eta) = \psi(\xi',\eta') \Rightarrow \varphi'(\xi) = \varphi'(\xi') \Rightarrow \xi = \xi' \Rightarrow \eta = \eta'$
- Sei $(\xi', \eta') \in V' \times \mathbb{R}^k$. Setze $\xi := (\varphi')^{-1}(\xi') \in U' \Rightarrow \psi(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + (0,\eta) = (\xi',\eta')$ mit $(0,\eta) = (0,\eta') + ((\varphi'(\xi),0) - \varphi(\xi))$

Weiter ist $D\psi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} D\varphi'(\xi) & 0 \\ \star & \mathbb{1}_{\mathbb{R}^k} \end{pmatrix}$ invertierbar $\Rightarrow \psi$ ist ein C^r-Diffeomorphismus auf sein Bild.

Da φ offene Teilmengen in relativ offene Teilmengen von M abbildet, ist $\varphi(U') \subset M$ relativ offen ist, das heißt es gibt ein offenes $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U') = \tilde{V} \cap M$. Setze $\hat{V} := (V' \times \mathbb{R}^k) \cap \tilde{V}$ und $\hat{U} := \psi^{-1}(\hat{V})$.
Daraus folgt: $\psi^{-1} : \hat{V} \to \hat{U}$ ist ein C^r-Diffeomorphismus mit

$$\begin{aligned}\psi(\hat{U} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})) &= \psi(\hat{U} \cap (U' \times \mathbb{R}^k) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})), \text{ da } \hat{U} \subset \psi^{-1}(V' \times \mathbb{R}^k) = U' \times \mathbb{R}^k \\ &= \psi(\hat{U} \cap (U' \times \{0\})) = \psi(\hat{U}) \cap \psi(U' \times \{0\}) = \hat{V} \cap (\tilde{V} \cap M) = \hat{V} \cap M\end{aligned}$$

$\Rightarrow \hat{U} \cap \mathbb{R}^m \times \{0\} = \psi^{-1}(\hat{V} \cap M)$

■

Beispiele:

1. Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$
2. Affine Unterräume
3. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x||^2 = 1\}$ ist eine n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$
Dazu definiere $f : \mathbb{R}^n + 1 \to \mathbb{R}, f(x) = ||x||^2 - 1$ und erhalte $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\}$,
$\nabla f(x) = 2x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \Rightarrow \operatorname{rk} Df(x) = 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$
4. Notation: $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$.
$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = \mathbb{1}\}$ ist eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt: $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : f(A) = 0\}$, wobei $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}, f(A) = A^T A - \mathbb{1}$.

Nun lässt sich leicht erkennen, dass $f \in C^\infty$ und $\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ ein $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

$$\begin{aligned} Df(A)H &= \lim_{t\to 0} \frac{f(A+tH)-f(A)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(A+tH)^T(A+tH) - \mathbb{1} - (A^TA - \mathbb{1})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{tH^TA + tA^TH + t^2H^TH}{t} = H^TA + A^TH \end{aligned}$$

Behauptung: $Df(A)$ ist surjektiv $\forall A \in O(n)$.
Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$. Wähle dazu $H := \frac{1}{2}AB \Rightarrow Df(A)H = \frac{1}{2}((AB)^TA + A^TAB) = B$
Damit ist $\operatorname{rk} Df(A) = \frac{n(n-1)}{2}$ und das zweite Kriterium aus Satz III.12 greift.

Tangential- und Normalraum

Sei im Folgenden stets $r \geq 1$.

Definition III.13

$M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine m-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M in p, wenn es ein $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ in C^1 gibt mit $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$.
Die Menge $T_pM := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ ist Tangentialvektor}\}$ heißt *Tangentialraum.*

Satz III.14

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann gelten:

1. T_pM ist ein m-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$,
2. Ist $\varphi : U \to V$ eine lokale Parametrisierung von M mit $p \in V$ und $a := \varphi^{-1}(p) \in U$, so gilt $T_pM = \operatorname{Bild} D\varphi(a) \Rightarrow \partial_1\varphi(a), ..., \partial_m\varphi(a)$ bilden eine Basis von T_pM,
3. Ist $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von p, $f \in C^1(\tilde{V}, \mathbb{R}^{n-m}), \operatorname{rk} Df = n - m$ mit $M \cap \tilde{V} = \{x \in \tilde{V} : f(x) = 0\}$, so ist $T_pM = \ker Df(p)$.

Beweis:

Wir zeigen $\operatorname{Bild} D\varphi(a) \subset T_pM \subset \ker Df(p)$. Aus $\dim \operatorname{Bild} D\varphi(a) = m = n - \operatorname{rk} Df(p) = \dim \ker Df(p)$ folgt dann sogar Gleichheit für die obigen Mengen.

1. Sei $v \in \operatorname{Bild} D\varphi(a), v = D\varphi(a)w$ mit $w \in \mathbb{R}^m$.
F ür ε klein genug ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \gamma(t) = \varphi(a + tw)$ stetig differenzierbar. Nach Definition folgt $p(0) = \varphi(a) = p, \gamma'(0) = D\varphi(a)w = v \Rightarrow v \in T_pM$.
2. Wähle $v \in T_pM$ und γ wie in Definition III.13.
F ür $|t|$ klein genug ist $\gamma(t) \in \tilde{V} \Rightarrow \gamma(t) \in M \cap \tilde{V} \Rightarrow f(\gamma(t)) = 0$
$\Rightarrow Df(p)v = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = 0 \Rightarrow v \in \ker Df(p)$

■

Beispiele:

1. $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : f(A) = 0\}, f(A) = A^TA - \mathbb{1} \Rightarrow Df(A)H = A^TH + H^TA$
$\overset{\text{Satz III.14}}{\Longrightarrow} T_{\mathbb{1}}O(n) = \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} : H^T = -H\} =: \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{anti}}$. Für $A \in= (n)$ beliebig gilt
$T_AO(n) = \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} : (A^TH)^T = -A^TH\} = \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^TH \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{anti}}\} = A \cdot \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{anti}}$

2. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\}, f(x) = ||x||^2 - 1 \Rightarrow \nabla f(x) = 2x \Rightarrow Df(x) = 2x^T$. Damit ist
$T_pS^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0\}$

Definition III.15

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, $p \in M$. $N_pM := (T_pM)^\perp$ ist der Normalraum an M in p.

Satz III.16

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, $p \in M$.
Ist $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in \tilde{V}, f \in C^1(\tilde{V}, \mathbb{R}^{n-m})$ mit $\operatorname{rk} Df = n - m$ in $\tilde{V}$ und
$M \cap \tilde{V} = \{x \in \tilde{V} : f(x) = 0\}$, so bilden die Vektoren $\nabla f_1(p), ..., \nabla f_{n-m}(p)$ eine Basis von N_pM.

Beweis:

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v \Rightarrow$ für ε klein genug ist $f(\gamma(t)) = 0 \forall t \in (-va, \varepsilon)$
$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} f_j(\gamma(t))|_{t=0} = \langle \nabla f_j(p), v\rangle \Rightarrow \nabla f_j(p) \in (T_pM)^\perp = N_pM$, $\dim N_pM = n - \dim T_pM = n - m$.

Da $\operatorname{rk} Df(p) = n - m$ folgt $\nabla f_1(p), ..., \nabla f_{n-m}(p)$ sind linear unabhängig.

■

Beispiel:

$N_{\mathbb{1}}O(n) = (\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{anti}})^\perp = \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$

Satz III.17

Extrema mit Nebenbedingungen Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ und $\varphi \in C^1(\Omega)$. Gilt dann für ein $p \in f^{-1}(0)$

- $\varphi(q) \geq \varphi(p)\ \forall q \in \Omega$ mit $f(q) = 0$,
- $\operatorname{rk} Df(p) = k$,

so gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\nabla\varphi(p) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla f_i(p)}$$

Beweis:

Nach eventueller Verkleinerung von Ω ist $\operatorname{rk} Df = k$ auf ganz Ω und $M := f^{-1}(0)$ ist eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, wobei $m = n - k$. Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$, so hat $\varphi \circ \gamma$ in $t = 0$ ein lokales Minimum, also $0 = \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))|_{t=0} = \langle \nabla\varphi(p), v\rangle$
$\Rightarrow \nabla\varphi(p) \in (T_p(M))^\perp = N_pM = \langle \nabla f_1(p), ..., \nabla f_k(p)\rangle$

∎

Beispiel:

Wir betrachten die Symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \varphi(x) = \langle Bx, x\rangle$. Ziel ist nun, φ zu minimieren unter der Nebenbedingung $f(x) = ||x||^2 - 1 = 0$.

Da $S^{n-1} = f^{-1}(0)$ kompakt und φ stetig ist, wird das Infimum in $x_0 \in S^{n-1}$ angenommen.
Satz III.17 $\Rightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} : \nabla\varphi(x_0) = \lambda\nabla f(x_0) \Rightarrow Bx_0 = \lambda x_0 \Rightarrow$ jede symmetrische Matrix besitzt mindestens einen Eigenvektor.

Kapitel IV

Kurven und Kurvenintegrale

Definition IV.1

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $c \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \infty$ heißt *parametrisierte Kurve* der Klasse C^k im $\mathbb{R}^n$.

Beispiele:

1. $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, c(t) = p + tv$ mit $p, v \in \mathbb{R}^n$ ist die Gerade in Richtung v durch den Punkt p. Zugelassen ist auch $v = 0$, in diesem Fall ist $c(t) = p$.

2. $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, c(t) = r(\cos t, \sin t)$ ist ein Kreis mit Radius $r > 0$ um den Ursprung.

3. $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, c(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$ ist eine Schraubenlinie mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe $2\pi a$.

Zur Veranschaulichung bietet sich ein 3D-Rechner (z.B. GeoGebra) an.

Wiederholung:

Eine *Zerlegung* Z von $I = [a, b]$ ist ein Tupel $(t_0, ..., t_N)$ mit $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$. Für $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ setzen wir $L_Z = \sum_{i=1}^N ||c(t_i) - c(t_{i-1})||$

Definition IV.2

Für $I = [a, b]$ ist die *Länge* der parametrisierten Kurve $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ $L(c) := \sup\limits_Z L_Z(c) \in [0, \infty]$.
Ist $L(c) < \infty$, so heißt c *rektifizierbar*.

Lemma IV.3

Sei $c : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig mit Konstante $LIP(c)$. Dann ist c rektifizierbar und es gilt $L(c) \leq LIP(c) \cdot |I|$.

Beweis:

Sei Z eine beliebige Zerlegung von I.

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} ||c(t_i) - c(t_{i-1})|| \leq LIP(c) \underbrace{\sum_{i=1}^{N} |t_i - t_{i-1}|}_{=|I|} = LIP(c) \cdot |I|$$

■

Lemma IV.4

Sei $\tau \in I = [a,b]$. Dann gilt für $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n) : L(c) = L(c|_{[a,\tau]}) + L(c|_{[\tau,b]})$

Beweis:

Setze $I_1 := [a,\tau], I_2 := [\tau, b]$ Sind Z_1, Z_2 Zerlegungen von I_1, I_2,so ist (Z_1, Z_2) eine Zerlegung von I. Damit folgt $L_{Z_1}(c|_{I_1}) + L_{Z_2}(c|_{I_2}) = L_{(Z_1,Z_2)}(c) \leq L(c)$. Bilden wir die Suprema über Z_1, Z_2, so folgt $L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2}) \leq L(c)$

Sei $Z(t_0, ..., t_N)$ eine Zerlugung von ganz I. Dann existiert ein $r \in \{1, ..., N\}$ mit $\tau \in [t_{r-1}, t_r]$. Dann ist $Z_1 = (t_0, ..., t_{r-1}, \tau)$ eine Zerlegung von I_1, $Z_2 = (\tau, t_r, ..., t_N)$ von I_2.

$$\begin{aligned}
L_Z(c) &= \sum_{i=1}^{N} ||c(t_i) - c(t_{i-1})|| \\
&\leq \sum_{i=1}^{r-1} ||c(t_i) - c(t_{i-1})|| + ||c(\tau) - c(t_{r-1})|| + ||c(t_r) - c(\tau)|| + \sum_{i=r+1}^{N} ||c(t_i) - c(t_{i-1})|| \\
&= L_{Z_1}(c|_{I_1}) + L_{Z_2}(c|_{I_2}) \leq L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2})
\end{aligned}$$

Bilden wir wieder das Supremum über Z, so folgt $L(c) \leq L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2})$. Aus beiden Ungleichungen folgt dann Gleichheit.

■

Satz IV.5

Sei $I = [a,b]$ und $c \in C^0 \cap PC^1(I, \mathbb{R}^n)$. Dann ist c rektifizierbar und es gilt:

$$\boxed{L(c) = \int_a^b ||c'(t)|| dt}$$

Beweis:

Ohne Einschränkung sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, sonst verwende Lemma IV.4 auf den Teilintervallen.
F ür jede Zerlegung $Z = (t_0, .., t_N)$ von I gilt

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} ||c(t_i) - c(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^{N} || \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t)dt|| \leq \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} ||c'(t)||dt = \int_a^b ||c'(t)||dt$$

Bilde das Supremum, es folgt $L(c) \leq \int_a^b ||c'(t)||dt$.

Wir definieren die *Bogenlängenfunktion* von c als $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}, \sigma(t) = L(c|_{[a,t]})$

Behauptung: $\sigma'(t) = ||c'(t)|| \ \forall t \in [a,b]$

Dann gilt $L(c) = \sigma(b) = \underbrace{\sigma(a)}_{=0} + \int_a^b \underbrace{\sigma'(t)}_{=||c'(t)||} dt = \int_a^b ||c'(t)||dt$.

$$\frac{||c(t_2) - c(t_1)||}{t_2 - t_1} \leq \frac{L(c|_{[t_1,t_2]})}{t_2 - t_1} \overset{\text{Lemma IV.4}}{=} \frac{\sigma(t_2) - \sigma(t_1}{t_2 - t_1} \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} ||c'(t)||dt$$

Für $t_2 \searrow t_1$ beziehungsweise $t_1 \nearrow t_2$ folgt die Behauptung.

■

Lemma IV.6

Sei $c \in C^0(I_1, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C^0(I_2, I_1)$ bijektiv. Dann gilt $L(c \circ \varphi) = L(c)$.

Beweis:

Seien $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 1, 2$. Aus Analysis I, Blatt 9, Aufgabe 4 folgt, dass φ entweder streng monoton wachsend oder fallend ist.
Ist $Z = s_0, ..., s_N)$ eine Zerlegung von I_2 und $t_i = \varphi(s_i)$, so ist im ersten Fall $(t_0, ..., t_N)$ eine Zerlegung von I_1, im zweiten Fall $(t_N, ..., t_0)$. In beiden Fällen gilt

$$L_Z(c \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{N} ||c(\varphi(s_i)) - c(\varphi(s_{i-1}))|| = \sum_{i=1}^{N} ||c(t_i) - c(t_{i-1})||$$

Über das Supremum erhalten wir wieder $L(c \circ \varphi) \leq L(c)$, aber $c = (c \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \Rightarrow L(c) \leq L(c \circ \varphi)$
$\Rightarrow L(c) = L(c \circ \varphi)$

■

Bemerkung:

Bilder einer Kurve müssen nicht lokal eine Untermannigfaltigkeit sein, selbst wenn $c \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$:

Neil'sche Parabel: $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, c(t) = (t^2, t^3), c'(0) = 0$.

Definition IV.7

Eine Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt *regulär*, falls $c'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

Definition IV.8

Seien $c_k : I_k \to \mathbb{R}^n k = 1,2$ zwei Kurven. Dann heißt c_2 *Umparametrisierung* von c_1, falls es ein $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ gibt mit $\varphi' \neq 0$, sodass $c_2 = c_1 \circ \varphi$.

Bemerkung:

1. φ muss in diesem Kontext ein Diffeomorphismus sein.
2. Regularität bleibt bei Umparametrisierung erhalten, denn $(c_1 \circ \varphi)' = (c_1' \circ \varphi)\varphi' \neq 0$, falls $c_1', \varphi' \neq 0$
3. φ heißt *richtungstreu*, falls $\varphi' > 0$ und *richtungsumkehrend*, falls $\varphi' < 0$ ist.
4. Invariant unter Umparametrisierung sind zudem
   - Das Bild $c(J)$
   - Die Menge $\{c(a), c(b)\}$
   - Die Tangente $\mathbb{R}c'(t)$ von c in t; genauer hat $c_2 = c_1 \circ \varphi$ im Punkt s mit $\varphi(s) = t$ dieselbe Tangente.

Lemma IV.9

Auf der Menge aller parametrisierten Kurven c im $\mathbb{R}^n$ ist durch $c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow c_2$ ist Umparametrisierung von c eine Äquivalenzrelation definiert.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\text{Reflexivität: } & c : I \to \mathbb{R}^n \text{ Kurve} \Rightarrow c = c \circ Id_I \ (c \sim c) \\
\text{Symmtrie: } & c_2 = c_1 \circ \varphi \Rightarrow c_1 = c_2 \circ \varphi^{-1} \ (c_1 \sim c_2 \Rightarrow c_2 \sim c_1) \\
\text{Transitivität: } & c_2 = c_1 \circ \varphi, c_3 = c_2 \circ \psi \Rightarrow c_3 = c_1 \circ (\varphi \circ \psi) \ (c_1 \sim c_2, c_2 \sim c_3 \Rightarrow c_1 \sim c_3)
\end{aligned}$$

■

Definition IV.10

$c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt *nach Bogenlänge parametrisiert*, falls gilt: $||c'(t)|| = 1 \ \forall t \in I$.
F ür $[s_1, s_2] \subset I$ folgt dann aus Satz IV.5 $L(c|_{[s_1,s_2]}) = \int_{s_1}^{s_2} ||c'(t)||dt = s_2 - s_1$.

Satz IV.11

Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve der Klasse C^k mit $k \geq 1$.
Dann gibt es $\varphi \in C^k(J, I)$ bijektiv mit $\varphi' > 0$, sodass $c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis:

Betrachte für $t_0 \in I$ die Bogenlängenfunktion $\sigma : I \to \mathbb{R}, \sigma(t) = \int_{t_0}^{t} ||c'(\tau)||d\tau$. Für jede Bijektion $\varphi \in C^1(J, I)$ mit $\varphi' > 0$ gilt:

$$||(c \circ \varphi)'|| = (||c'|| \circ \varphi)\varphi' = (\sigma' \circ \varphi)\varphi' = (\sigma \circ \varphi)'$$

Die Aussage des Satzes folgt, falls φ als Umkehrfunktion von σ gewählt werden kann.
Nach Voraussetzung ist $\sigma'(t) = ||c'(t)|| > 0$ und mit $J = \sigma(I)$ ist sogar $\sigma \in C^k(I, J)$ umkehrbar.

■

Definition IV.12

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend*, wenn gilt:
Ist $A \subset M \neq \emptyset$ und sowohl relativ offen als auch relativ abgeschlossen, so ist schon $A = M$.

Beispiel:

$M := \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) : x = 0\}$ ist nicht zusammenhängend, denn $A \neq 0$, A ist relativ offen und abgeschlossen ($A = M \backslash \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$) aber $A \neq M$

Lemma IV.13

Für $M \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:
1. M ist zusammenhängend,
2. Jede lokal konstante funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist konstant.

Beweis:

Ohne Einschränkung ist $M \neq \emptyset$.

$1 \Rightarrow 2$ Wähle $x_0 \in M$ und setze $A := \{x \in M : f(x) = f(x_0)\} \neq \emptyset$ ($x_0 \in A$). Da f lokal konstant ist, existiert zu jedem Punkt $x \in A$ eine Umgebung U_x mit $f(y) = f(x) = f(x_0)\ \forall y \in U_x \cap M$
$\Rightarrow U_x \cap M \subset A \Rightarrow A$ relativ offen.
f stetig $\Rightarrow \{x \in M : f(x) \neq f(x_0)\} = f^{-1}(\mathbb{R} \backslash \{f(x_0)\})$ ist relativ offen
$\Rightarrow A$ ist relativ abgeschlossen $\Rightarrow A = M$

$2 \Rightarrow 1$ Für $A \subset M$ wie in der Definition sei $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$. $A, M \backslash A$ relativ offen

$\Rightarrow \chi_A$ ist lokal konstant $\overset{2., A\neq\emptyset}{\Rightarrow} M \backslash A = \emptyset \Rightarrow A = M$

■

Satz IV.14

$M \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn M ein (verallgemeinertes) Intervall ist.

Beweis:

Ist M ein Intervall, so folgt aus dem Mittelwertsatz, dass jede lokal konstante Funktion f, also $f' \equiv 0$, konstant ist.

Umgekehrt sei M zusammenhängend und $a = \inf M, b = \sup M$. Es genügt, zu zeigen
$x_0 \in M \; \forall a < x_0 < b$.
Andernfalls wäre $A = \{x \in M : x < x_0\}$ nichtleer, relativ offen und $M \backslash A = \{x \in M : x > M_0\}$ auch relativ offen $\Rightarrow A = M \lightning b = \sup M$.

■

Lemma IV.15

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $f \in C^0(M, \mathbb{R}^p)$, so ist auch $f(M)$ zusammenhängend.

Beweis:

Sei $g : f(M) \to \mathbb{R}$ lokal konstant. Damit ist $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ auch lokal konstant, denn g ist auf $f(U_x)$ konstant für U_x geeignet. Mit Lemma IV.13 folgt: $g \circ f$ ist konstant.

■

Lemma IV.16

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, $f \in C^0(M)$. Dann ist $f(M)$ ein Intervall.

Beweis:

Wende zuerst Lemma IV.15, dann Satz IV.14 an.

Definition IV.17

Eine offene und zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet*.

Lemma IV.18

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : M \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $Df(x) = 0 \forall x \in M \Rightarrow f$ ist konstant.

Beweis:

Satz II.5 $\Rightarrow f$ ist lokal konstant. Lemma IV.13 $\Rightarrow f$ ist konstant

■

Beispiel:

Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$. $M := F(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ mit $F(x) = (x, f(x))$.

M ist zusammenhängend

Sei $g : M \to \mathbb{R}$ lokal konstant und $G := g \circ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. F ist in $x_0 \neq 0$ stetig $\Rightarrow G$ ist konstant auf einer offenen Umgebung von x_0.
Da $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ beide zusammenhängend sind, existieren $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ mit
$G(x) = t_0$ für $x \leq 0, G(x) = t_1$ für $x > 0$.
Weiter existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$, auf der g konstant ist. Für große n ist $(\frac{1}{n\pi}, 0) \in M \cap U \Rightarrow t_0 = G(0) = g(0,0) = g(\frac{1}{n\pi}, 0) = G(\frac{1}{n\pi}) = t_1 \Rightarrow G$ ist konstant $\Rightarrow g$ ist konstant.

M ist nicht wegweise zusammenhängend

Annahme: $c \in C^0([0,1], M)$ erfüllt die Bedingung $c(0) = (0,0), c(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$.
Mit $c(t) = (x(t), y(t))$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x(t) > 0$ für $t > 0$
(sonst betrachte $T_* = \sup\{t : x(t) \leq 0\}$)

Es gibt $\delta > 0$ mit $|y(t)| < 1$ für $t < \delta$. $x(0, \delta))$ ist zusammenhängend und damit ist es in einem der Intervalle $(\frac{1}{k\pi}, \frac{1}{(k-1)\pi}$ enthalten für ein $k \in \mathbb{N}$. Damit gilt $\lim\limits_{t \searrow 0} x(t) \geq \frac{1}{k\pi} > 0 \lightning x(0) = 0$

Satz IV.19

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann gelten

1. M ist wegweise zusammenhängend $\Rightarrow M$ ist zusammenhängend.
2. Ist M offen oder eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, so gilt sogar
   M zusammenhängend $\Leftrightarrow M$ wegweise zusammenhängend.

Beweis:

- Sei $f : M \to \mathbb{R}$ lokal konstant, $p_0 \in M$ fest. Zu $p \in M$ existiert ein Weg $c \in C^0([0,1], M)$ mit $c(0) = p_0, c(1) = p \Rightarrow f \circ c$ ist lokal konstant auf $[0,1] \Rightarrow f \circ c$ ist konstant
  $\Rightarrow f(p) = f(c(1)) = f(c(0)) = f(p_0)$

- M **offen**

  Zu $x_0 \in M$ definiere $A := \{x \in M : \exists c_x \in PC^1([0,1], M) : c_x(0) = x_0, c_x(1) = x\}$. Damit ist auf jeden Fall $x_0 \in A$, also $A \neq \emptyset$.
  Zu $x \in A \, \exists r > 0$ mit $B_r(x) \subset M$. Für $y \in B_r(x)$ setze $c_y := \begin{cases} c_x(2t) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)x + (2t-1)y & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$
  Damit ist ein vollständig in M enthaltener Weg $c_y \in PC^1$ von x_0 nach y gefunden, also ist $y \in A$ und somit A relativ offen.

  Sei $x = \lim\limits_{k \to \infty} x_k \in M$ mit $x_k \in A$. Zu zeigen ist nun $x \in A$. Für k groß genug ist $x_k \in B_r(x)$ und wir erhalten $c_x(t) := \begin{cases} c_{x_k}(2t) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)x_k + (2t-1)x & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ Somit ist wieder ein PC^1-Weg von x_0 nach x gefunden, also $x \in A$ und A ist relativ abgeschlossen.

  Damit ist $A = M$, also M zusammenhängend.

M ist m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit

Nach Verschiebung und Drehung sei $x = 0 \in M$, eine offene Kugel $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^m \cong T_xM$, eine Umgebung V von $0 \in \mathbb{R}^k \cong (T_xM) \perp = N_xM$ (wobei wieder gilt $n = m + k, \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$) und $f \in C^1(B_\rho(0), \mathbb{R}^k)$ mit $M \cap (B_\rho(0) \times V) = \{(\xi, f(\xi)) : \xi \in B_\rho(0)\}$.

Im Argument für M offen ersetzen wir nun die Kugel $B_r(x)$ durch die Menge $U_x = M \cap (B_\rho(0) \times V)$ und für $y = (\xi, f(\xi)) \in U$ die Konvexkombination durch

$$c_y(t) = ((2t-1)\xi, f((2t-1)\xi)) \text{ für } \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1$$

■

Lemma IV.20

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen oder eine C^1-Untermannigfaltigkeit und zusammenhängend, so können je zwei Punkte in M durch einen PC^1-Weg in M verbunden werden. Insbesondere hat dieser Weg endliche Länge.

Beweis:

Folgt direkt aus dem Beweis für Satz IV.19

Frage:

Wir wissen nun, dass zwischen je zwei Punkten in $M \subset \mathbb{R}^n$ unter bestimmten Bedingungen ein PC^1-Weg existiert. Die weiterführende Überlegung ist jetzt: Existiert auch eine kürzeste Verbindung zwischen diesen Punkten?

Strategie:

Wir betrachten die Minimalfolgen auf $\mathfrak{C} := \{c : c \text{ ist rektifizierbarer Weg in } M \text{ von } p_0 \text{ nach } p_1\}$:
$c_k \in \mathfrak{C}, L(c_k) \to L := \inf\limits_{c \in \mathfrak{C}} L(c)$. c_k heißt dann *Minimalfolge.*

Satz IV.21

Satz von Arzela-Ascoli (Spezialfall)
Sei $I = [a, b]$ und $c_k \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit

1. $\forall t \in I$ ist $||c_k(t)||$ beschränkt,
2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall |t_1 - t_2| < \delta, \; \forall k \in \mathbb{N} : ||c_k(t_1) - c_k(t_2)|| < \varepsilon$ (*Gleichgradige Stetigkeit*).

Dann existieren $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ und eine Teilfolge (c_{k_j}), so dass c_{k_j} gleichmäßig gegen c konvergiert, das heißt $\lim\limits_{j \to \infty} ||c_{k_j} - c||_\infty = 0$

Beweis:

Schritt 1:

Sei $Q := \{t_1, t_2, ...\}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von I (z.B. $Q = I \cap \mathbb{Q}$). Wegen 1. können wir induktiv Teilfolgen wählen mit $k_1 = (k_1(l)) \supset k_2 = (k_2(l)) \supset ...$, sodass $(c_k(t_j))_{k \in k_j} \cong (c_{k_j(l)}(t_j))$

konvergiert $\forall j \in \mathbb{N}$.
Die Diagonalfolge $(c_{k_j}(j))$ ist dann Teilfolge von allen c_{k_j} und somit konvergiert $c_{k_j(j)}$ punktweise in allen $t_j \in \mathbb{Q}$.

Schritt 2:

Ohne Einschränkung konvergiert c_k in ganz Q. Wir zeigen: c_k ist Cauchy-Folge bezüglich $||\cdot||_\infty$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert wegen 2. ein $\delta > 0$ mit $||c(t) - (t')|| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $|t - t'| < \delta$ und alle k. Die Mengen $B_\delta(t), t \in \mathbb{Q}$ bilden eine offene Überdeckung von I. Nach Heine-Borel (Analysis I) existiert eine endliche Teilmenge $Q_\delta \subset Q$ mit $I \subset \bigcup_{t' \in Q_\delta} B_\delta(t')$.

Sei weiter $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_{t' \in Q_\delta} ||c_k(t') - c_l(t')|| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ \forall k_l \geq k_0$. Für $k_l \geq k_0, t \in I$ beliebig mit $t' \in Q_\delta$ geeignet folgt:

$$||c_k(t) - c_l(t)|| \leq \underbrace{||c_k(t) - c_k(t')||}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{||c_l(t) - c_l(t')||}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{||c_k(t') - c_l(t')||}_{\leq\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow ||c_k - c_l||_\infty < \varepsilon\ \forall l, k \geq k_0 \overset{Satz IV.22}{\Rightarrow} c_k$konvergiert gleichmäßig gegen ein $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$

■

Beispiel:

Ist $c_k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ gleichmäßig lipschitzstetig, das heißt
$||c_k(t_1) - c_k(t_2)|| \leq K|t_1 - t_2|\ \forall t_1, t_2 \in I,\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow c_k$ ist gleichgradig stetig (Zu ε gegeben wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$).

Satz IV.22

$C^0(I, \mathbb{R}^n)$ ist mit $||\cdot||_\infty$ vollständig, das heißt jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beweis:

$||c_k - c_l||_\infty < \varepsilon$ für alle $k, \geq k(\varepsilon) \Rightarrow ||c_k(t) - c_l(t)|| < \varepsilon$ für $k, l \geq k(\varepsilon)\ \forall t \in I$
$\Rightarrow c(t) := \lim\limits_{k\to\infty} c_k(t)$ existiert $\overset{l\to\infty}{\Rightarrow} ||c_k(t) - c(t)|| \leq \varepsilon\ \forall k \geq k(\varepsilon)\ \forall t \in I \Rightarrow ||c_k - c||_\infty \leq \varepsilon\ \forall k \geq k(\varepsilon)$
$\Rightarrow c_k$ konvergiert gleichmäßig gegen $c \Rightarrow c \in C^0$

■

Satz IV.23

Seien $c_k, c \in C^0(I, \mathbb{R}^n), k \in \mathbb{N}$ und es gelte $c(t) = \lim\limits_{k\to\infty} c_k(t) \forall t \in I$. Sind die c_k rektifizierbar mit gleichmäßig beschränkter Länge, so ist auch c rektifizierbar und $L(c) \leq \liminf\limits_{k\to\infty} L(c_k)$.

Beweis:

Sei Z eine Zerlegung von I. Dann ist $L_Z(c) = \lim\limits_{k\to\infty} L_Z(c_k) \leq \liminf\limits_{k\to\infty} L(c_k) < \infty$. Bilden wir das Supremum über alle Zerlegungen, so folgt die Behauptung.

■

Beispiel:

$f(t) = \text{dist}(t, \mathbb{Z})$ und $c_k \in C^0([0,1], \mathbb{R}^2, c_k(t) = (t, \frac{1}{k} f(kt)), c(t) = (t,0) : ||c_k(t) - c(t)|| = \frac{1}{2k} \to 0$
$\Rightarrow L(c) = 1$ aber $L(c_k) = \int_0^1 \sqrt{1 + |\underbrace{f'(kt)}_{\pm 1 \text{ bis auf endlich viele Punkte}}|} \, dt = \sqrt{2} > 1 \; \forall k$

Satz IV.24

Existenz kürzester Verbindungen, Hilbert 1899
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $\mathfrak{C} := \{c : c$ ist rektifizierbarer Weg in M von p_0 nach $p_1\} \neq \emptyset$. Dann gibt es einen kürzesten Weg in $\mathfrak{C}$.

Bemerkung:

Satz IV.19 $\Rightarrow$ Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, zusammenhängend und m-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Beweis:

Wähle eine Minimalfolge $c_k \in \mathfrak{C} : L(c_k) \to L = \inf\limits_{c \in \mathfrak{C}} L(c) \in (0, \infty)$. Durch Umparametrisierung von c_k nach Bogenlänge (Satz IV.11[1]) können wir annehmen, dass $c_k : [0, L_k] \to M$ mit
$||c_k(s_1) - c_k(s_2)|| \leq L(c_k|_{[s_1,s_2]}) = |s_1 - s_2|$. Gehe über zu $\tilde{c}_k(s) := c_k(\frac{L_k}{L} s), s \in [0, L]$. $\tilde{c}_k$ ist also lipschitzstetig mit Konstante $\frac{L_k}{L} \to 1 \Rightarrow \tilde{c}_k$ ist gleichgradig stetig.

$||\tilde{c}_k(s) - p_0|| \leq L(\tilde{c}_k|_{[0,s]}) \leq L(\tilde{c}_k) = L_k \to L < \infty \Rightarrow \tilde{c}_k$ ist gleichmäßig beschränkt.

Satz IV.21 $\Rightarrow$ $\tilde{c}_k$ konvergiert nach Wahl einer Teilfolge gleichmäßig gegen $c \in C^0([0,1], M)$, da M abgeschlossen ist.
Speziell ist auch $c(0) = p_0, c(1) = p_1$, Satz IV.23 $\Rightarrow c$ ist rektifizierbar, $L(c) \leq \liminf L(\tilde{c}_k) = L$
$\Rightarrow c \in \mathfrak{C} \Rightarrow$ aus Definition von L folgt $L(c) \geq L$, also insgesamt $L(c) = L \Rightarrow c$ ist der gesuchte Weg.

■

Krümmung von Kurven

Definition IV.25

Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine reguläre Kurve. Eine *Einheitsnormale* längs c ist eine Abbildung $\nu \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit $|\nu(t)|| = 1, \langle c'(t), \nu(t) \rangle = 0 \; \forall t \in I$.

Wir betrachten nun den Fall $n = 2$:

[1] Tatsächlich wurde hier lediglich bewiesen, dass C^1-Kurven umparametrisiert werden können. Ein tatsächlicher Beweis folgt im Anhang

$J \in SO(2)$ ist eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$, also $Je_1 = e_2, Je_2 = -e_1, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Identifiziere $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C} \Rightarrow Jz = iZ$.

Lemma IV.26

Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ regulär. Dann gibt es genau zwei Einheitsnormalen längs c, nämlich $\nu = \pm J\tau$ mit $\tau := \frac{c'}{||c'||}$

Beweis:

Es gilt $||J\tau|| = ||\tau|| = 1$ und $\langle \tau, J\tau \rangle = 0 \Rightarrow \pm J\tau$ sind Einheitsnormalen längs c. Für jede beliebige Einheitsnormale ν längs c gilt $\langle \nu(t), J\tau(t) \rangle = \pm 1 \ \forall t \in I$, da $(c'(t))^\perp$ eindimensional ist. Aus der Stetigkeit folgt genau $\nu = \pm J\tau$ auf ganz I.

Bemerkung:

$c \in C^k(I, \mathbb{R}^2) \Rightarrow \nu \in C^{k-1}(I, \mathbb{R}^2) \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Definition IV.27

Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach Bogenlänge parametrisiert und ν sei eine Normale längs c. Die *Krümmung* von c bezüglich ν ist $\varkappa : I \to \mathbb{R}, \varkappa(s) = \langle c''(s), \nu(s) \rangle$.

Beispiel:

$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, c(s) = r(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r})$ ist der nach Bogenlänge parametrisierte Kreis mit Radius r um den Ursprung.
$\tau(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}), \nu(s) = -(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}) \Rightarrow \varkappa(s) = \langle c''(s), \nu(s) \rangle = \frac{1}{r} \ \forall s \in \mathbb{R}$.

Lemma IV.28

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert und $\nu : I \to \mathbb{R}^2$ eine Normale längs c. Weiter sei $F(z) = Sz + a$ eine euklidische Bewegung, also $S \in O(2)$ und $a \in \mathbb{R}^2$.
Dann ist $n\nu$ eine Normale längs $S \circ c$ und bezüglich dieser Normalen haben beide Kurven dieselbe Krümmung.

Beweis:

Übung auf Blatt 7.

Lemma IV.29

Die Frenet-Gleichungen
Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert und ν eine Einheitsnormale längs c. Dann

gelten mit $\tau = c'$ die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \nu \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa \\ \varkappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau' = \varkappa\nu \\ \nu' = -\varkappa\tau \end{cases}$$

Beweis:

Nach Voraussetzung: $||\nu||^2 = ||\tau||^2 = 1$
$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\langle\tau,\tau\rangle' = \langle\tau',\tau\rangle$ und analog $0 = \langle\nu',\nu\rangle \Rightarrow \tau' = \langle\tau',\nu\rangle\nu = \langle c'',\nu\rangle\nu = \varkappa\nu$ und
$\langle\nu',\tau\rangle = \underbrace{\langle\nu,\tau\rangle'}_{=0} - \langle\nu,\tau'\rangle = -\varkappa$

■

Beispiel:

$c \in C^2(I,\mathbb{R}^2)$ sei nach der Bogenlänge parametrisiert und $\varkappa \equiv 0 \Rightarrow \tau' = 0 \Leftrightarrow c'' = 0 \Rightarrow c(s) = p + sv$ mit $p, v \in \mathbb{R}^2, ||v|| = 1$.

Satz IV.30

Hauptsatz für ebene Kurven
Zu jeder Funktion $k \in C^0(I)$ gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^2(I,\mathbb{R}^2)$, die bezüglich einer Normalen ν die Krümmung $\varkappa = k$ hat. Diese Kurve ist bis auf euklidische Bewegungen eindeutig bestimmt.

Beweis:

Eindeutigkeit: Seien $c_1, c_2 \in C^2(I,\mathbb{R}^2)$ nach Bogenlänge parametrisiert mit Krümmung $\varkappa_1, \varkappa_2 = k$ bezüglich der Normalen ν_1, ν_2.
Wir wählen $s_0 \in I$ und können nach euklidischer Bewegung annehmen, dass $c_1(s_0) = c_2(s_0)$ (eventuelle Verschiebung), $c_1'(s_0) = c_2'(s_0)$ (eventuelle Rotation) und $\nu_1(s_0) = \nu_2(s_0)$ (eventuelle Spiegelung an einer Ursprungsgeraden).

Damit gilt: $\tau_1 = c_1', \nu_1$ beziehungsweise $\tau_2 = c_2', \nu_2$ lösen die Frenet-Gleichung mit demselben Koeffizienten $\varkappa_1, \varkappa_2 = k$ und denselben Anfangswerten (in $s - 0$).

Hilfssatz:

Sei $A \in C^0(I, \mathrm{End}(\mathbb{R}^n))$ und $t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert genau eine C^1-Abbildung $y : I \to \mathbb{R}^n$, sodass $\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \ \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

In unserem Fall sind $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & k(t) \\ -k(t) & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2$

Existenz: Sei $c'(s) = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$ mit $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(\sigma)d\sigma$.
Bezüglich $\nu(s) = -(\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ hat c die Krümmung

$$\varkappa(s) = \langle c''(s), \nu(s)\rangle = \langle -\theta'(s)\cos\theta(s), -\theta'(s)\sin\theta(s), -(\cos\theta(s)\sin\theta(s))\rangle = \theta'(s) = k(s)$$

■

Definition IV.31

Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ eine reguläre Kurve. Bezüglich der Einheitsnormalen ν längs c ist die Krümmung

definiert durch $\boxed{\varkappa : I \to \mathbb{R}, \varkappa(t) = \frac{\langle c''(t), \nu(t)\rangle}{||c'(t)||^2}}$

Lemma IV.32

Sei $c_1 \in C^2(I_1, \mathbb{R}^2)$ eine reguläre Kurve mit Einheitsnormale ν_1 längs c_1. Ist $c_2 = c_1 \circ \varphi \in C^2(I_2, \mathbb{R}^2)$ eine Umparametrisierung, so ist $\nu_1 \circ \varphi$ eine Normale längs c_2 und es gilt $\varkappa_2 = \varkappa_1 \circ \varphi$.

Beweis:

$c_2' = (\underbrace{c_1' \circ \varphi}_{\neq 0})\varphi'$. $\varphi : I_2 \to I_1$ ist eine C^2-Funktion $\Rightarrow c_2'' = (c_1'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (c_1' \circ \varphi)\varphi''$

$\Rightarrow \nu_2 = \nu_1 \circ \varphi$ ist Normale längs c_2 und $\varkappa = \frac{\langle c_2'', \nu_1 \circ \varphi\rangle}{||c_2'||^2} = \frac{\langle (c_1'' \circ \varphi)(\varphi')^2, \nu_1 \circ \varphi\rangle}{(\varphi')^2 ||c_1' \circ \varphi||^2} = \varkappa_1 \circ \varphi$

■

Beispiel:

$c : I \to \mathbb{R}^2, c(x) = (x, u(x)), \nu(x) = \frac{(-u'(x), 1)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} \Rightarrow \kappa(x) = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

Definition IV.33

Die Krümmung einer regulären Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ ist die Funktion $\varkappa(t) = \frac{||c''(t)^\perp||}{||c'(t)||^2}$, wobei $(c'')^\perp = c'' - \langle c'', \tau\rangle\tau$ und $\tau = \frac{c'}{||c'||}$.

Bemerkung:

1. Dazu äquivalent ist die Formel $\varkappa = \frac{\sqrt{||c'||^2 \cdot ||c''||^2 - \langle c', c''\rangle^2)}}{||c'||^3}$
2. Ist c nach Bogenlänge parametrisiert, so ist $\varkappa(s) = ||c''(s)||$

Beispiel:

Wir betrachten wieder die Schraubenlinie $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, c(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$:
$c'(t) = (-r\sin t, r\cos t, a), c''(t) = (-r\cos t, -r\sin t, 0) \Rightarrow ||c'(t)||^2 = r^2 + a^2, ||c''(t)||^2 = r^2,$
$\langle c''(t), c'(t)\rangle = 0 \Rightarrow \varkappa = \frac{r}{r^2 + a^2}\ \forall t \in \mathbb{R}$

Das Kurvenintegral

Definition IV.34

Ist $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$, so heißt

$$\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{dx} := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \text{ das } \textit{Kurvenintegral} \text{ von } F \text{ längs } \gamma.$$

Beispiel:

1. Für das Gravitationsfeld gilt die Formel $F : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3, F(x) = -C \frac{x}{||x||^3}$ für $C > 0$.
2. Das Winkelvektorfeld wird beschrieben durch $W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2, W(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}, \gamma(t) = r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ mit $r, \theta \in C^1(I)$.

   Damit ergibt sich für das Kurvenintegral

$$\int_\gamma W \cdot \overrightarrow{dx} = \int_a^b \langle \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, r' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\theta' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \rangle dt = \int_a^b \theta' dt = \theta(b) - \theta(a)$$

Lemma IV.35

Das Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:

1. Sind $F_{1,2} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n), \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$, so gilt

$$\int_\gamma (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \cdot \overrightarrow{dx} = \lambda_1 \int_\gamma F_1 \cdot \overrightarrow{dx} + \lambda_2 \int_\gamma F_2 \cdot \overrightarrow{dx}$$

2. Sind $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega), F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$, so folgt mit $\gamma_i = \gamma|_{[t_i-1, t_i]}$:

$$\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{dx} = \sum_{i=1}^N \int_\gamma F \cdot \overrightarrow{dx}$$

3. Sind $\gamma \in PC^1([a,b] = I_1, \Omega)$ und $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ eine Parametertransformation, so folgt für $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot \overrightarrow{dx} = \pm \int_\gamma F \cdot \overrightarrow{dx}$$

   Dabei gilt für das Vorzeichen: $+ \Leftrightarrow \varphi' > 0$, $- \Leftrightarrow \varphi' < 0$.

Beweis:

1. Folgt direkt aus Linearität von Skalarprodukt und Riemann-Integral

2. Folgt direkt aus dem Verhalten von Riemann-Integralen über Zerlegungen

3. Seien $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2]$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\varphi\circ\gamma} F \cdot \overrightarrow{dx} &= \int_{a_2}^{b_2} \langle (F\circ\gamma\circ\varphi)(t), (\gamma\circ\varphi)'\rangle dt = \int_{a_2}^{b_2} \langle F\circ\gamma(\varphi(t)), \gamma'(\varphi(t))\rangle \varphi'(t) dt \\ &\overset{s=\varphi(t)}{=} \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} \langle (F\circ\gamma)(s), \gamma'(s)\rangle ds\end{aligned}$$

   Mit $\varphi' > 0 \Rightarrow \varphi(a_2) = a_1, \varphi(b_2) = b_1$ und $\varphi' < 0 \Rightarrow \varphi(a_2) = b_1, \varphi(b_2) = a_1$ folgt die Behauptung.

■

Lemma IV.36

Sei $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma \in PC^1(I = [a,b], \Omega)$. Dann gilt mit $||F\circ\gamma||_\infty := \sup\limits_{t\in I} ||F(\gamma(t))||$:

$$\left|\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{dx}\right| \leq ||F\circ\gamma||_\infty \cdot L(\gamma)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt\right| &\leq \int_a^b |\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle| dt \overset{\text{C-S}}{\leq} \int_a^b ||F(\gamma(t))|| \cdot ||\gamma'(t)|| dt \\ &\leq ||F\circ\gamma||_\infty \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt = ||F\circ\gamma||_\infty \cdot L(\gamma)\end{aligned}$$

■

Definition IV.37

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ heißt *Gradientenfeld* beziehungsweise *konservativ*, wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt mit $\nabla\varphi = F$. Die Funktion φ heißt dann *Stammfunktion* beziehungsweise *Potential* von F.

Lemma IV.38

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wegweise zusammenhängend, so ist eine Stammfunktion von $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien φ_1, φ_2 Stammfunktionen von F. Dann gilt:
$\nabla(\varphi_2 - \varphi_1) = \nabla\varphi_2 - \nabla\varphi_1 = F - F = 0 \overset{\text{Satz II.4}}{\Rightarrow} \varphi_2 - \varphi_1$ ist konstant.

■

Definition IV.39

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Bemerkung:

Gleichheit der Werte impliziert hier **nicht** Gleichheit der Ableitungen, betrachte zum Beispiel eine Kurve, die ein Dreieck bildet und in einem Eckpunkt beginnt und endet.

Satz IV.40

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Für $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:

1. F ist Gradientenfeld
2. $\forall \gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$ geschlossen gilt $\int_\gamma F \cdot \overrightarrow{dx} = 0$
3. Für je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ gilt $\int_{\gamma_0} F \circ \overrightarrow{dx} = \int_{\gamma_1} F \circ \overrightarrow{dx}$

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$: $F = \nabla\varphi$ mit $\varphi \in C^1(\Omega) \Rightarrow \int_\gamma F \cdot \overrightarrow{dx} = \int_a^b \overbrace{\langle \nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle}^{(\varphi(\gamma(t)))'} dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0$, da γ geschlossen ist.

$2 \Rightarrow 3$: γ_1, γ_2 wie in 2. $\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_0(t), & a \leq t \leq b \\ \gamma_1(2b - t), & b \leq t \leq 2b - a \end{cases} \Rightarrow \gamma$ ist geschlossen.
Aus 2. erhalten wir

$$0 = \int_\gamma F \cdot \overrightarrow{dx} \overset{\text{Lemma IV.35}}{=} \int_{\gamma_0} F \cdot \overrightarrow{dx} - \int_{\gamma_1} F \cdot \overrightarrow{dx} \Rightarrow \int_{\gamma_0} F \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \overrightarrow{dx}$$

$3 \Rightarrow 1$: Sei $x_0 \in \Omega$ fest. Zu $x \in \Omega$ wählen wir eine Kurve $\gamma_1 \in PC^1([0, 1], \Omega)$ mit $\gamma_x(0) = x_0, \gamma_x(1) = x$. Lemma II.3 garantiert hierbei uns die Existenz von γ_x. Setze $\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \overrightarrow{dx}$. Nach 3. ist φ unabhängig von der Wahl der Kurve, die x mit x_0 verbindet, also wohldefiniert und $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Sei $x \in \Omega$. für $|h|$ klein erhalten wir eine Kurve von x_0 nach $x + he_j$, indem wir γ_x mit der Kurve $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, c(t) = x + the_j$ zusammensetzen. Zu zeigen: $\partial_j\varphi = F_j$.

Also: $\dfrac{\varphi(x + he_j) - \varphi(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_c F \cdot \overrightarrow{dx} = \dfrac{1}{h}\int_0^1 \langle F(x + the_j), he_j\rangle dt = \int_0^1 \langle F(x + the_j, e_j\rangle dt \overset{h \to 0}{\to} F_j(x)$

$\Rightarrow \partial_j\varphi(x) = F_j(x)$

■

Zentrale Frage: Wie können wir entscheiden, ob F ein Gradientenfeld ist?

Notwendige Bedingung für $F \in C^1$:

Satz IV.41

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld, so gilt $\forall 1 \leq i, j \leq n : \partial_i F_j = \partial_j F_i$ in ganz Ω.

Beweis:

Sei $F = \nabla\varphi \Rightarrow \varphi \in C^2(\Omega)$. Satz I.4 $\Rightarrow \partial_i F_j = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_j F_i$

■

Bemerkung:

Für $n = 3$ lässt sich die Bedingung äquivalent schreiben als

$$\operatorname{rot} F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = 0$$

Beispiel:

- $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(x, y) = (-y, x)$ hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^2$, denn $\partial_1 F_2 = 1 \neq -1 = \partial_2 F_1$.
- Für $W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2, W(x, y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ ist zwar $\partial_1 W_2 = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_2 W_1$, dennoch ist das Kurvenintegral nicht wegunabhängig: Für $k \in \mathbb{Z}, r > 0$ betrachten wir $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}, \gamma_k(t) = r(\cos kt, \sin kt)$. Wir haben hier bereits gesehen, dass in diesem Fall gilt: $\int_{\gamma_k} W \cdot \overrightarrow{dx} = 2k\pi \neq 0$ für $k \neq 0 \Rightarrow W$ ist kein Gradientenfeld!

  Allerdings besitzt W lokal eine Stammfunktion:

  $$\varphi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \to \mathbb{R}, \varphi(x, y) := \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ erfüllt } \nabla\varphi = F$$

Definition IV.42

Homotopie

Eine *Homotopie* in Ω zwischen zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([a, b], \Omega)$ ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([a, b] \times [0, 1], \Omega)$ mit $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0, \gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$.

Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p, \gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$ und gibt es eine Homotopie mit $\gamma(a, t) = p, \gamma(b, t) = q$ $\forall t \in [0, 1]$, so heißen γ_0, γ_1 *homotop* mit festen Endpunkten.

Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ und gibt es eine Homotopie mit $\gamma(a, t) = \gamma(b, t)$ $\forall t \in [0, 1]$, so heißen γ_0, γ_1 in Ω *geschlossen homotop.*

Lemma IV.43

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $\gamma \in C^1([a,b] \times [0,1], \Omega), \gamma = \gamma(s,t)$ mit $\partial_s \partial_b \gamma \in C^0([a,b],[0,1],\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\gamma(\cdot,1)} F \cdot \overrightarrow{dx} - \int_{\gamma(\cdot,0)} F \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\gamma(b,\cdot)} F \cdot \overrightarrow{dx} - \int_{\gamma(a,\cdot)} F \cdot \overrightarrow{dx} + \int_0^1 \int_a^b (\langle Df \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle - \langle Df \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle) ds dt$$

Gilt $\partial_i F_j = \partial_j F_i \ \forall 1 \leq i, j \leq n$ und hat die Homotopie feste Endpunkte oder ist geschlossen, so ist die rechte Seite der Gleichung gleich 0!

Beweis:

Zusatz zu Satz I.4: Unter den Voraussetzungen an γ gilt $\partial_t \partial_s \gamma = \partial_s \partial_t \gamma$. Mit Satz II.23 erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma(\cdot,t)} F \cdot \overrightarrow{dx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \langle F(\gamma(s,t)), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s,t) \rangle ds = \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} ds + \int_a^b \langle F \circ \gamma, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} \rangle ds$$

$$= \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle ds + \langle F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle \Big|_{s=a}^{s=b} - \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle ds$$

Integration dieser Formel bezüglich t von 0 bis 1 liefert die Behauptung.

Der Zusatz folgt aus $Df \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle = \langle Df \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle$ und $\int_{\gamma(b,\cdot)} F \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\gamma(a,\cdot)} F \cdot \overrightarrow{dx} = 0$. Letzteres geht aus den Eigenschaften von Kurvenintegralen hervor.

∎

Satz IV.44

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beweis:

Wir betrachten das Winkelvektorfeld $W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2, W(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$. Wir haben bereits gesehen, dass $\partial_1 W_2 = \partial_2 W_1$.

Sei $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}, n \geq 1$. Schreibe $p(z) = p_n(z) + q(z)$ mit $p_n(z) = z^n$. q hat dann höchstens den Grad $n-1 \Rightarrow z^{-n} q(z) \to 0$ mit $|z| \to \infty$, also ist für z hinreichend groß $|q(Re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2} R^n$ für $\theta \in [0, 2\pi]$.

Betrachte damit die geschlossene Kurve $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma_0(\theta) = p(Re^{i\theta})$ und die Homotopie $\gamma : [0, 2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(\theta, t) = p_n(Re^{i\theta}) + (1-t) q(Re^{i\theta})$ mit $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$

Es gilt: $|\gamma(\theta,t)| \geq |p_n(Re^{i\theta})| - |q(Re^{i\theta})| \geq R^n - \frac{1}{2} R^n = \frac{1}{2} R^n > 0$

Da $\gamma(\theta, 1) = p_n(Re^{i\theta}) = R^n e^{in\theta}$, folgt aus Lemma IV.43 und dem Beispiel zum Winkelvektorfeld:

$$\int_{\gamma_0} W \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\gamma(\cdot,1)} W \cdot \overrightarrow{dx} = 2\pi n$$

Jetzt betrachen wir eine zweite Homotopie $\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \times [0, R] \to \mathbb{R}^2, \tilde{\gamma}(\theta, \rho) = p(\rho e^{i\theta})$
$\Rightarrow \tilde{\gamma}(\theta, 0) = p(0) = a_0$ (konstant), $\tilde{\gamma}(\theta, R) = p(Re^{i\theta}) = \gamma_0$.

Hat p keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so ist auch dies eine geschlossene Homotopie in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Mit Lemma IV.43 folgt $\int_{\gamma_0} W \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,0)} W \cdot \overrightarrow{dx} = 0 \Rightarrow 2\pi n = 0$ ↯
$\Rightarrow p$ muss eine Nullstelle haben!

■

Lemma IV.45

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i \ \forall 1 \leq ij \leq n$. Für Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ betrachte die *affine Homotopie* $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \gamma(s, t) = (1 - t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s)$.

Haben γ_0, γ_1 gleiche Endpunkte oder sind geschlossen und gilt $\gamma([a, b] \times [0, 1]) \subset \Omega$, so folgt
$\int_{\gamma_0} F \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \overrightarrow{dx}$

Beweis:

Sind $\gamma_0, \gamma_1 \in C^1([a, b], \Omega)$, so haben wir die Aussage in Lemma IV.43 bereits bewiesen.

Andernfalls zerlegen wir $[a, b]$ in Teilintervalle, auf denen γ_0, γ_1 C^1-Kurven sind und addiere die Integrale. Die entstehenden Randintegrale heben sich bei der Addition gegenseitig auf.

■

Satz IV.46

Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf $\Omega \ \forall 1 \leq i, j \leq n$. Sind $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ geschlossen homotop oder homotop mit festen Endpunkten in Ω, so gilt $\int_{\gamma_0} F \circ \overrightarrow{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \overrightarrow{dx}$.

Beweis:

Wir betrachten die Homotopie $\gamma \in C^0([a, b] \times [0, 1], \Omega)$.
Erinnerung: Ist sogar $\gamma \in C^1$, so haben wir die Aussage in Lemma IV.43 bereits bewiesen.

Wir wissen: $\gamma \in C^0, [a, b] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ kompakt $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $B_{2\varepsilon}(p) \subset \Omega \ \forall p \in \gamma([a, b] \times [0, 1])$
γ ist gleichmäßig stetig auf $[a, b] \times [0, 1]$ (Analysis I)
$\Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $||\gamma(s_0, t) - \gamma(s_1, t)||, ||\gamma(s, t_0) - \gamma(s, t_1)|| < \varepsilon \ \forall |s_0 - s_1|, |t_0 - t_1| < \delta$

Damit ersetzen wir $\gamma(\cdot, t)$ durch stückweise lineare Kurven für $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{N} < \delta$ und
$s_k = a + k\frac{b-a}{N}, \ 1 \leq k \leq n$.
Definiere dazu $\tilde{\gamma} : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ durch $\tilde{\gamma}(s, t) = \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}}\gamma(s_{k-1}, t) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}\gamma(s_k, t)$ für $s \in [s_{k-1}, s_k]$

Es gilt $\tilde{\gamma}(a,t) = \gamma(a,t), \tilde{\gamma}(b,t) = \gamma(b,t)\ \forall t \in [0,1]$. Für $s \in [s_{k-1}, s_k]$ gilt:

$$\begin{aligned}||\tilde{\gamma}(s,t) - \gamma(s,t)|| =& \left\| \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}}(\gamma(s_{k-1},t) - \gamma(s,t)) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}(\gamma(s_k,t) - \gamma(s,t) \right\| \\ <& \left\| \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} \cdot \varepsilon + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \cdot \varepsilon \right\| = \varepsilon\end{aligned}$$

Für $\lambda \in [0,1]$ folgt damit $||((1-\lambda)\gamma(s,t) + \lambda\tilde{\gamma}(s,t)) - \gamma(s,t)|| \leq ||\tilde{\gamma}(s,t) - \gamma(s,t)|| < \varepsilon$
$\Rightarrow$ die affine Homotopie zwischen $\gamma(\cdot,t)$ und $\tilde{\gamma}(\cdot,t)$ liegt in Ω

$$\overset{\text{Lemma IV.45}}{\Longrightarrow} \int_{\gamma_0} F \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,0)} F \cdot \overrightarrow{dx}, \int_{\gamma_1} F \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,1)} F \cdot \overrightarrow{dx}$$

Weiter gilt für $|t_0 - t_1| < \delta$ und $s \in [s_[k-1], s_k]$:

$$\begin{aligned}&||\tilde{\gamma}(s,t_0) - \tilde{\gamma}(s,t_1)|| = \left\| \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}}(\gamma(s_{k-1},t_0) - \gamma(s_{k-1},t_1)) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}(\gamma(s,t_0) - \gamma(s,t_1)) \right\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \forall \lambda \in [0,1]: \\ &||((1-\lambda)\tilde{\gamma}(s,t_0) + \lambda\tilde{\gamma}(s,t_1)) - \gamma(s,t_0)|| \leq \underbrace{||\tilde{\gamma}(s,t_1) - \tilde{\gamma}(s,t_0)||}_{<\varepsilon} + \underbrace{||\tilde{\gamma}(s,t_0) - \gamma(s,t_0)||}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon\end{aligned}$$

Damit ist auch die affine Homotopie $((1-\lambda)\tilde{\gamma}(s,t_0) + \lambda\tilde{\gamma}(s,t_1))$ in Ω enthalten und mit $\frac{1}{N} < \delta$ folgt mit $t_l = \frac{l}{N}, 0 \leq l \leq N$ aus Lemma IV.45 $\int_{\tilde{\gamma}(\cdot,t_l)} F \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,t_{l-1})} F \cdot \overrightarrow{dx}\ \forall 1 \leq l \leq N \Rightarrow \int_{\gamma_0} F \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \overrightarrow{dx}$

■

Definition IV.47

Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\Omega)$ in Ω geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve ist.

Beispiel:

Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es $x_0 \in \Omega$ gibt mit $(1-t)x + tx_0 \in \Omega\ \forall x \in \Omega, t \in [0,1]$.

Behauptung: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist Ω auch einfach zusammenhängend

Beweis: Sei $\gamma_0 \in C^0([a,b],\Omega)$ geschlossen.
$\gamma : [a,b] \times [0,1] \to \Omega, \gamma(s,t) = (1-t)\gamma_0(s) + tx_0$

Satz IV.48

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhängend. Dann sind für $F \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ äquivalent:

1. $\partial_i F_j = \partial_j F_i\ \forall 1 \leq i,j \leq n$
2. F hat eine Stammfunktion.

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$: Satz IV.46 $\Rightarrow \int_\gamma F \cdot \overrightarrow{dx} = 0 \; \forall \gamma \in PC^1([a,b],\Omega)$ geschlossen.
Satz IV.40 $\Rightarrow F$ hat eine Stammfunktion.

$2 \Rightarrow 1$: Folgt direkt aus Satz IV.41

■

Beispiel:

Ein Spezialfall zu diesem Satz ist das *Lemma von Poincarré*:

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ rotationsfrei mit Stammfunktion φ und $\gamma_x(t) = (1-t)x_0 + tx, t \in [0,1]$, so ist

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \overrightarrow{dx} = \int_0^1 \langle F((1-t)x_0 + tx), x - x_0 \rangle dt$$

Zusammenfassung:

$$\begin{array}{ccc} F \text{ Gradientenfeld} & \overset{\text{Satz IV.40}}{\Longleftrightarrow} & \int F \cdot \overrightarrow{dx} \text{ wegunabhängig} \\ \Downarrow\Uparrow & \begin{array}{c}\text{Satz IV.41}\\ \text{Für } \Omega \text{ einfach zusammenhängend, Satz IV.48}\\ \text{offensichtlich}\end{array} & \Uparrow\Downarrow \\ \partial_i F_j = \partial_j F_i & \begin{array}{c}\Longleftarrow \\ \underset{\text{Satz IV.46}}{\Longrightarrow}\end{array} & \int F \cdot \overrightarrow{dx} \text{ ist homotopieinvariant} \end{array}$$

Wir wollen nun noch die letzte fehlende Implikation beweisen:

Beweis von " $\Leftarrow$ ":

$\int F \cdot \overrightarrow{dx}$ homotopieinvariant $\Rightarrow$ auf $B_\rho(x)$ ist $\int F \cdot \overrightarrow{dx}$ sogar wegunabhängig $\Rightarrow F$ hat eine Stammfunktion auf $B_\rho(x) \Rightarrow \partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf $B_\rho(x)$

■

Kurvenintegral von 1-Formen

Notation:

$\mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n)^*$ ist die Menge aller Linearformen auf dem $\mathbb{R}^n$.

Definition IV.49

Eine Abbildung $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ heißt *Differentialform* vom Grad 1 beziehungsweise *1-Form* oder *Kovektorfeld* auf Ω.

Für $f \in C^1(\Omega)$ ist die Ableitung df[2] eine 1-Form, das sogenannte *Differential* von f:

$$df : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*, df(x)v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)v_j$$

Speziell: Für alle Abbildungen der Form $x \mapsto x_i$ auf $\mathbb{R}^n$ werden deren Differentiale mit $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ bezeichnet. Es gilt $dx_i(x)v = v_i$, insbesondere $dx_i(x)e_j = \delta_{ij}$.

Jede 1-Form hat also die eindeutige Darstellung $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ mit $\alpha_i : \Omega \to \mathbb{R}, \alpha_i(x) = \alpha(x)e_i$. Für das Differential gilt $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Eine 1-Form $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ auf Ω ist von der Klasse $C^k, k \in \mathbb{N}_0$, falls $\alpha_i \in C^k(\Omega)\ \forall 1 \leq i \leq n$.

Definition IV.50

Sei α eine stetige 1-Form auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $\gamma \in PC^1([a,b],\Omega)$ setzen wir $\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

Ist $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, so ist durch $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*, \alpha(x)v := \langle A(x), v\rangle\ \forall x \in \Omega$ eine 1-Form definiert. Es gilt $\alpha_i(x) = \alpha(x)e_i = \langle A(x), e_i\rangle = A_i(x)$.

Damit gilt $A = \nabla\varphi \Leftrightarrow \alpha = d\varphi$ oder abstrakter:

$$A = \nabla\varphi \Leftrightarrow \langle A(x), v\rangle = d\varphi(x)v\ \forall x \in \Omega, v \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \alpha = d\varphi$$

(s. Kapitel 1)

Weiter gilt $\alpha(\gamma(t))\gamma'(t) = \langle(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \Rightarrow \int_\gamma \alpha = \int_\gamma A \cdot \overrightarrow{dx}$.

Definition IV.51

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine 1-Form α auf Ω heißt

- *exakt*, falls ein $\varphi \in C^1(\Omega)$ mit $\alpha = d\varphi$ existiert,
- *geschlossen*, falls $\alpha \in C^1$ und $\partial_i\alpha_j = \partial_j\alpha_i$ auf $\Omega\ \forall 1 \leq i, j \leq n$

Ist α dem Vektorfeld A zugeordnet, so gilt äquivalent:
α exakt $\Leftrightarrow$ A Gradientenfeld,
α geschlossen $\Leftrightarrow$ A rotationsfrei.

[2] Es gibt keinen semantischen Unterschied zwischen df und Df, im Kontext von Formen wird allerdings üblicherweise das kleine d verwendet. Wir schließen uns dieser Konvention an.

Bisherige Resultate umformuliert:

- α exakt $\Leftrightarrow$ Das Kurvenintegral ist wegunabhängig
- α exakt $\Rightarrow$ α geschlossen
- α geschlossen $\Rightarrow$ Das Kurvenintegral ist Homotopieinvariant
- Ω einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ Jede geschlossene 1-Form ist exakt

Transformationsverhalten

Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\phi \in Cq(U,V), \omega$ eine 1-Form auf V.
$\phi^*\omega$ ist dann eine 1-Form auf U, der sogenannte *Pullback*:

$$(\phi^*\omega)(x)v = \omega(\phi(x))D\phi(x)v \;\forall x \in U, v \in \mathbb{R}^n$$

Sind dy_i Koordinatendifferentiale auf $\mathbb{R}^m$, so ist $(\phi^* dy_i)(x)v = dy_i D\phi(x)v = d\phi_i(x)v$, das heißt $\phi^* dy_i = d\phi_i$ für $1 \leq i \leq m$, allgemeiner:

$$\phi^*\omega = \sum_{i=1}^{m} (\omega_i \circ \phi) d\phi_i \text{ mit } d_phi_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} dx_j$$

Bemerkung:

Ist $\phi \in C^{k+1}, \omega \in C^k$ für $k \in \mathbb{N}$, so ist $\phi^*\omega \in C^k$.

Satz IV.52

Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\phi \in Cq(U,V)$.
F ür eine stetige 1-Form ω auf V und $\gamma \in PC^1([a,b],U)$ gilt $\int_{\phi\circ\gamma} \omega = \int_\gamma \phi^*\omega$.

Beweis:

$$\int_{\phi\circ\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\phi(\gamma(t)))D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (\phi^*\omega)(\gamma(t))\gamma'(t) = \int_\gamma \phi^*\omega$$

■

Komplexe Analysis

Ab jetzt sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

Definition IV.53

Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* in $z \in \Omega$ mit Ableitung $f'(z) = c \in \mathbb{C}$, falls gilt $\lim\limits_{w \to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = c$.

f heißt komplex differenzierbar oder *holomorph* auf Ω, wenn f in allen $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist.

Bemerkung

Alle Rechenregeln aus den reellen Zahlen übertragen sich direkt:

- f komplex differenzierbar in $z \in \Omega \Rightarrow f$ stetig in z
- $f, g : \Omega \to \mathbb{C},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} : (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
- $f, g : \Omega \to \mathbb{C} : (fg)' = f'g + fg'$
- $f, g : \Omega \to \mathbb{C},\ g \neq 0 : \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $f : \Omega \to \mathbb{C}, g : U \subset \mathbb{C} \to \Omega : (f \circ g)' = (f' \circ g)g'$

Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad 1 = (1,0), \quad i = (0,1), \quad f : \Omega \to \mathbb{C} \leftrightarrow f : \Omega \to \mathbb{R}^2$,
$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ mit $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$.

Satz IV.54

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen
Für $f : \Omega \to \mathbb{C}, f = u + iv$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist auf Ω komplex differenzierbar
2. $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist reell[3] differenzierbar auf Ω mit $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

Beweis:

Multiplikation mit einer komplexen Zahl c ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, genauer gilt für $c = a + ib$: $cz = Cz$ mit $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Auf der linken Seite ist hier $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, auf der rechten $z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$cz = (a+ib)(\alpha + i\beta) = (a\alpha - b\beta) + i(b\alpha + a\beta) \equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = Cz$$

[3] Also im Sinne von Kapitel I

$1 \Rightarrow 2$: Ist f in $z \in \Omega$ komplex differenzierbar mit $f'(z) = c$, so gilt mit dieser Wahl von C:

$$\frac{f(w) - f(z) - C(w-z)}{|w-z|} = \frac{f(w) - f(z) - c(w-z)}{w-z} \cdot \frac{w-z}{|w-z|} \to 0 \text{ mit } w \to z \Rightarrow Df(z) = C$$

Weiter gilt mit $f = u + iv$ im Punkt z:

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \Rightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x$$

$2 \Rightarrow 1$: Sei f reell differenzierbar in $z = (x, y)$ und die Cauchy-Riemann-Gleichungen seien erfüllt. Dann gilt für $a = u_x, b = -u_y : Df(z) = \begin{pmatrix} u_y & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Mit $c = a + ib$ folgt für $w \to z$:

$$\frac{f(w) - f(z) - c(w-z)}{w-z} = \frac{f(w) - f(z) - Df(z)(w-z)}{|w-z|} \cdot \frac{|w-z|}{w-z} \to 0$$

$\Rightarrow f$ komplex differenzierbar.

$\blacksquare$

Erinnerung:

Für $f = u + iv : i \to \mathbb{C}$ gilt $\int_I f = \int_I u + i \int_I v \in \mathbb{C}$

Definition IV.55

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in C^0(\Omega, \mathbb{C})$. Für $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$ definieren wir $\int_\gamma f dz := \int_a^b ((f \circ \gamma)\gamma')(t) dt$. Schreiben wir $f = u + iv$ mit $u, v \in C^1(\Omega)$ und $\gamma = x + iy$ mit $x, y \in PC^1(I)$, so gilt ebenfalls

$$\int_I (f \circ \gamma)\gamma' = \int_I ((u + iv) \circ \gamma)(x' + iy') = \int_I ((u \circ \gamma)x' - (v \circ \gamma)y') + i \int_I (u \circ \gamma)y' + (v \circ \gamma)x')$$

$\Rightarrow \int_\gamma f dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (udy + vdx)$

Bemerkung:

Als Merkregel kann man $dz = dx + idy$ einsetzen und dann ausmultiplizieren.

Beispiel:

γ sei der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis mit radius $r > 0$ um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, das heißt $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, \gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$. Es gilt $\gamma'(\theta) = ire^{i\theta}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\int_\gamma (z - z_0)^k dz = \int_0^{2\pi} \left(re^{i\theta}\right)^k ire^{i\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i, & k = -1 \\ 0, & k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \end{cases}$$

Explizites Ausrechnen im Fall $k \neq -1$:
$\int_0^{2\pi} ir^{k+1} e^{i\theta(k+1)} d\theta = \frac{ir^{k+1}}{i(k+1)} \left[e^{i\theta(k+1)}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$

Satz IV.56

Cauchy-Integralsatz
Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig partiell differenzierbar und holomorph. Ist dann $\gamma \in PC^1(I, \Omega)$ geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve, so folgt $\int_\gamma f dz = 0$.

Beweis:

$\int_\gamma f dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (udy + vdx)$. Mit Satz IV.46 müssen wir nur prüfen, ob $udx - vdy$ und $udy + vdx$ geschlossen sind. Das gilt genau dann, wenn $u_y = -v_x, \ u_x = v_y$, also die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt sind. Laut Voraussetzung ist f holomorph, erfüllt also die Gleichungen

■

Bemerkung:

Allgemeiner besagt Satz IV.46, dass das Kurvenintegral von fdz für holomorphes f den gleichen Wert ergibt für zwei Kurven, die homotop mit festen Endpunkten oder geschlossen homotop sind.

Man kann auf die Stetigkeit der partiellen Ableitungen verzichten, siehe Analysis IV.

Definition IV.57

Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so heißt $F : \Omega \to \mathbb{C}$ *(komplexe) Stammfunktion* von f auf Ω, falls gilt $F'(z) = f(z) \ \forall z \in \Omega$.

Lemma IV.58

$\Omega \subset \mathbb{C}$ sei offen und einfach zusammenhängend. Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C}), f = u + iv$ sind äquivalent:

1. f besitzt auf Ω eine komplexe Stammfunktion
2. f ist auf Ω komplex differenzierbar

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$ Sei $F = U + iV$ Stammfunktion von f, also $u + iv = U_x - iU_y = V_y + iV_x$ (s. Beweis zu Satz IV.54) $\Rightarrow U, V \in C^2(\Omega)$ und mit Satz I.4 gilt $u_x - v_y = V_{yx} - V_{xy} = 0, \ u_y + v_x = U_{xy} - U_{yx} = 0$ $\Rightarrow$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind erfüllt $\Rightarrow f$ holomorph.

$2 \Rightarrow 1$ f holomorph $\Rightarrow udx - vdy$ und $udy + vdx$ sind geschlossen, besitzen also nach Satz IV.48 Stammfunktionen $U, V : \Omega \to \mathbb{R}$. Weiter erfüllen U, V die Cauchy-Riemann-Gleichungen $\Rightarrow F = U + iV$ ist komplex differenzierbar und $F' = f$, s. Satz IV.54

■

Notation

Im Folgenden schreiben wir $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ und setzen $\int_{\partial D_r(z_0)} f(z)dz := \int_\gamma f(z)dz$ für $\gamma : [0, 2\pi] \to \partial D_r(z_0), \gamma(t) = z_0 + re^{it}$

Satz IV.59

Cauchy-Integralformel
Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ holomorph und $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann gilt $\forall z \in D_r(z_0) : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

Beweis:

In $\Omega \backslash \{z\}$ ist $\partial D_r(z_0)$ homotop zu $\partial D_\varepsilon(z)$ jeweils mit der mathematisch positiven $0 < \varepsilon < r - |z - z_0|$

Betrachte dazu $\xi \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}$. Diese Funktion ist auf $\Omega \backslash \{z\}$ nach der Quotientenregel komplex differenzierbar, also ist ihr Kurvenintegral homotopieinvariant, s. Bemerkung zu Satz IV.56.

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =& \frac{1}{2\pi i} \int : \partial D_\varepsilon(z) \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \overset{\xi = z + \varepsilon e^i}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it}) dt\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ geht $f(z + \varepsilon e^{it}) \to f(z)$

■

Satz IV.60

Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ komplex differenzierbar und $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann gilt $\forall z \in D_r(z_0)$ die Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k (z - z_0)^k$ mit $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$.
Insbesondere folgt $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$.

Beweis:

Satz IV.59 besagt: Für $z \in D_r(z_0)$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}}}_{= \frac{\xi - z_0}{\xi - z}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k d\xi$$

Es gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^n \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^n (z - z_0)^k \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)$$

Mit $M := \max_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|$ gilt für $|z - z_0| < r$:

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k d\xi \right|$$

$$\overset{\text{Lemma IV.36}}{\leq} \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{M}{r} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^k = \frac{M}{1 - \frac{|z-z_0|}{r}} \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^{n+1} \to 0 \text{ mit } n \to \infty$$

Sei nun $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine beliebige Potenzreihe, die auf $D_r(z_0)$ konvergiert. Die Polynome $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k$ sind komplex differenzierbar $\overset{\text{Satz IV.54}}{\Longrightarrow}$ Auf $D_r(z_0)$ gilt $Df_n = \begin{pmatrix} c_n & -d_n \\ d_n & c_n \end{pmatrix}$, wobei $c_n + id_n = f_n'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (z-z_0)^{k-1}$.

Die gliedweise differenzierte Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ konvergiert lokal gleichmäßig auf $D_r(z_0)$ (s. Analysis I). Aus Analysis I wissen wir außerdem, dass wir die Ableitung mit der gleichmäßigen Konvergenz vertauschen dürfen, damit folgt $Df = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ mit $c + id = g$.
Satz IV.54 $\Rightarrow$ f ist komplex differenzierbar mit $f' = g$. Induktiv folgt f unendlich oft komplex differenzierbar.

■

Lemma IV.61

Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ holomorph. Für $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$ gilt:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n! r^{-n} \sup_{z \in D_r(z_0)} |f(z)| \leq n! r^{-n} \sup_{z \in \partial D_r(z_0)}$$

Beweis:

Satz IV.60 $\Rightarrow$ $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ \forall z \in D_r(z_0)$ $\Rightarrow$ die Potenzreihe ist eine Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt $z_0 \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \Rightarrow \left| f^{(n)}(z_0) \right| = n! |a_n| \leq n! r^{-n} \sup_{z \in D_r(z_0)} |f(z)|$

■

Satz IV.62

Satz von Liouville
Eine beschränkte, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ist konstant.

Beweis:

Lemma IV.61 $\Rightarrow$ für $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt: $|f'(z_0)| \leq R^{-1} \sup_{z \in B_R(z_0)} |f(z)| \leq R^{-1} \underbrace{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|}_{<+\infty} \ \forall R < \infty$.

Mit $R \nearrow +\infty$ folgt $f'(z_0) = 0 \ \forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ ist konstant.

■

Bemerkung:

Wir erhalten hiermit einen weiteren Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra:

Annahme: $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ mit $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ hat keine Nullstelle.
Daraus folgt, dass $\frac{1}{p}$ auf ganz $\mathbb{C}$ eine holomorphe C^1-Funktion darstellt. Da $|p(z)| \geq |z|^n(|a_n| - |z|^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|) \to \infty$ für $1 \leq |z| \to \infty$, gilt: $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{1}{p(z)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{p}$ ist beschränkt auf ganz $\mathbb{C} \overset{\text{Satz IV.62}}{\Rightarrow} \frac{1}{p}$ konstant $\lightning$

Kapitel V

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition V.1

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* hat die Gestalt $h(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(m)}) = 0 \ \forall J \subset \mathbb{R}$, wobei J ein Intervall ist, und einer gegebenen Funktion $h : J \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{(m+1)\text{-mal}} \to \mathbb{R}^n$.

Die Differentialgleichung hat die Ordnung m, falls h von $x^{(m)}$ abhängt. Eine Funktion $x : J \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung in J, falls $x \in C^m(J, \mathbb{R}^n)$ und $h(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(m)}(t)) = 0 \ \forall t \in J$

Beispiel:

1. $\dot{x} = \alpha x$ beschreibt Wachstum proportional zum Bestand. Bis auf Wahl einer Konstanten c ist $x(t) = ce^{\alpha t}$ die eindeutige Lösung.

2. Relativistisches Wachstum wird von der Gleichung $\dot{x} = \alpha x(1 - \frac{x}{\beta}),\ \alpha, \beta > 0,\ x(0) = x_0 > 0$ beschrieben. Die Lösung hierfür ist $x(t) = \frac{\beta x_0}{x_0 + e^{-\alpha t}(\beta - x_0)}$. Für $t \to \infty$ konvergiert $x(t)$ gegen β.

3. Der harmonische Oszillator wird von der Differentialgleichung $-\omega^2 x = \ddot{x},\ \omega > 0$ beschrieben und von $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ gelöst.

4. Zum mathematischen Pendel gehört die *nichtlineare* Differentialgleichung $ml\ddot{x} = -F_r = -mg \sin x \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ mit $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Eine explizite Lösung dafür können wir nicht angeben. Ziel dieses Kapitels ist, die Existenz und Eindeutigkeit solcher Lösungen zu beweisen, auch wenn wir keine Lösung finden.

5. Das Räuber-Beute-Modell von Volterra-Lotka beschreibt die parallele Entwicklung einer Räuber- und einer Beutepopulation:
   $x(t)$ beschreibe die Beutepopulation zum Zeitpunkt t, $y(t)$ die Räuber. Das Modell ist dann gegeben mit $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = ax - byx \\ \dot{y} = -cy + dyx \end{array} \right\}$, wobei $a, b, c, d > 0$

Definition V.2

Eine Differentialgleichung heißt linear, falls sie linear in allen abhängigen Variablen, also $x, \dot{x}, ..., x^{(m)}$, ist. Ist das nicht der Fall, so heißt die Differentialgleichung *nichtlinear*.

Beispiele 1-3 sind linear, 4-5 sind nichtlinear.

Systeme von Differentialgleichungen

Ein System 1. Ordnung $\begin{matrix} \dot{x_1} = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \dot{x_2} = f_2(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \dot{x_n} = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{matrix}$ ist mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}$ äquivalent zu $\dot{x} = f(t, x)$. Dann ist $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Das zugehörige Anfangswertproblem ist durch $\dot{x} = f(t, x), t \geq t_0, \; x(t_0) = x_0$ gegeben.

Sei eine Differentialgleichung $y^{(m)} = g(t, y, \dot{y}, ..., y^{(m-1)})$ gegeben. Definiere

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix}. \text{ Dann ist } \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ g(t, y, \dot{y}, ..., y^{(m-1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ g(t, x) \end{pmatrix} =: f(t, x)$$

Damit löst $y \in C^m(J)$ die Differenzialgleichung $y^{(m)} = g(t, y, \dot{y}, ..., y^{(m-1)})$ genau dann, wenn $x \in C^1(J, \mathbb{R}^m)$ die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ löst.

Spezielle Lösungsmethoden

Separation (Trennung) der Variablen: $\dot{x} = h(t)g(x), x(t_0) = x_0$ ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Satz V.3

Seien $h : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}, \; g : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in (\alpha, \beta), x_0 \in (a, b)$. Dann gelten:

1. Ist $g(x_0) = 0$, so ist $x(t) \equiv x_0$ eine (nicht notwendigerweise die einzige) Lösung auf ganz (α, β).
2. Ist $g(x_0) \neq 0$, so seien $G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(s)} ds$ und $H(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau$. Dann existiert $\delta > 0$, sodass die eindeutige Lösung $x(t)$ auf $J_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ mit $x(t_0) = x_0$ durch $x(t) = G^{-1}(H(t)), \; t \in J_\delta$ gegeben ist.

Beweis:

1. $0 = \frac{d}{dt} x_0 = h(t)g(x_0) = 0$

2. Sei $x(t)$ eine Lösung. Da g und x stetig sind, ist auch $g \circ x$ stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $g(x(t)) \neq 0\ \forall t \in J_\delta$. Aus der Voraussetzung folgt $\frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))} = h(t)\ \forall t \in J_\delta$
$\Rightarrow \frac{d}{dt} G(x(t)) = \dot{x}(t) G'(x(t)) = \frac{\dot{x}}{g(x(t))} = h(t)$
$\Rightarrow G(x(t)) = G(x(t)) - \underbrace{G(x(t_0))}_{=0} = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau = H(t)\ \forall t \in J_\delta$.
Wegen $G'(x(t)) = \frac{1}{g(x(t))} \neq 0\ \forall t \in J_\delta$ ist G streng monoton $\Rightarrow G^{-1}$ existiert und ist stetig $\Rightarrow x(t) = G^{-1}(H(t))\ \forall t \in J_\delta$

■

Beispiel:

- $\dot{x} = \cos t \cos^2 x, x(0) = 0 \Rightarrow h(t) = \cos t, g(x) = \cos^2 x, g(x(0)) = 1 \neq 0$

$$G(x) = \int_0^x \cos^2 s ds = \tan x,\ \ H(t) = \int_0^t \cos \tau d\tau = \sin t \Rightarrow x(t) = \arctan(\sin t)$$

- $\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}, x(0) = 0$. $x(t) = 0$ ist eine Lösung, aber es existiert zudem die Lösung $x(t) = t^3$.

Lineare Differentialgleichungen

Betrachte $\dot{x} = a(t)x + b(t),\ t \in (\alpha, \beta)$ mit $x(t_0) = x_0, t_0 \in (\alpha, \beta)$ und $a, b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ stetig.
Sei $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$.
Annahme: $x(t)$ ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung mit $x(t_0) = x_0$.
Setze $u(t) = e^{-A(t)} x(t) \Rightarrow \dot{u}(t) = e^{-A(t)} \dot{x}(t) - \dot{A}(t) e^{-A(t)} x(t) = e^{-A(t)} (\dot{x}(t) - a(t)x(t)) = e^{-A(t)} b(t)$
$\Rightarrow u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau$.
Wegen $u(t_0) = e^{-A(t_0)} x(t_0) = x(t_0) = x_0$ folgt

$$e^{-A(t)} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \Leftrightarrow x(t) = e^{A(t)} x_0 + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau$$

Variation der Konstanten

Sei x_h Lösung der homogenen Differentialgleichung $\dot{x}_h = a(t)x$ und x_p eine Lösung der inhomogenen Gleichung $\dot{x}_p = a(t)x_p + b(t)$, dann löst $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \dot{x}_h + \dot{x}_p = a(t)(x_h + x_p) + b(t) = a(t)x + b(t)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung ist gegeben durch $x_h(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} c = e^{A(t)} c$.
Problem: Wie finden wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung?

Ansatz: $x_p(t) = e^{A(t)}c(t)$. Dieser Ansatz, bei dem wir die Konstante der von oben durch eine Funktion ersetzen, heißt, äußerst kreativ, "Variation der Konstanten."

Damit folgt $\dot{x}_p(t) = e^{A(t)}\dot{c}(t) + e^{A(t)}a(t)c(t)$, andererseits soll gelten, dass $\dot{x}_p = a(t)e^{A(t)}c(t) + b(t) = a(t)x_p(t) + b(t) \Rightarrow \dot{c} = e^{-A(t)}b(t)$
$\Rightarrow c(t) = \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau$ beziehungsweise $x_p(t) = e^{A(t)}\int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau$. Insgesamt erhalten wir die Lösung $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{A(t)}c + e^{A(t)}\int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau$, wobei leicht ersichtlich ist, dass $c = x_0$ gelten muss.

Satz V.4

Man erhält alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung, indem man zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung addiert.

Beispiel:

$\dot{x} = 3t^2x + 2t^2, x(0) = 1 \Rightarrow a(t) = 3t^2, b(t) = 2t^2 \Rightarrow A(t) = \int_0^t 3s^2ds = t^3 \Rightarrow$ die eindeutige Lösung für $x(t)$ ist $x(t) = e^{t^3}(1 + 2\int_0^t e^{-\tau^3}2\tau^2d\tau) = e^{t^3}(1 + \left[-\frac{2}{3}e^{-\tau^3}\right]_0^t) = \frac{5}{3}e^{t^3} - \frac{2}{3}$

Phasenebene

Wir betrachten erneut das System $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ mit f_1, f_2 stetig.

Definition V.5

Eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \phi \neq 0$ heißt *erstes Integral*, falls $\phi(x(t), y(t))$ konstant ist für alle Lösungen $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Beispiel:

- Volterra-Lotka: $\begin{cases} \dot{u} = u - uv \\ \dot{v} = \varepsilon v + uv \end{cases}, \varepsilon > 0$

  Sei $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ eine Lösung dieses Systems in $J = (t_0, t_1)$ mit $0 \in J$ und $u(0) = u_0 > 0, v(0) > 0$. Ohne Einschränkung seien $u, v > 0$ in J.

  Aus $(1 - \frac{\varepsilon}{u})\dot{u} = u - \varepsilon - uv + \varepsilon v = (\frac{1}{v} - v)\dot{v}$ folgt $\frac{d}{dt}((u - \varepsilon\log(u)) + (v - \log(v))) = 0\ \forall t \in J$
  $\Rightarrow \phi(u,v) = u + v - \varepsilon\log(u) - log(v)$ ist ein erstes Integral der Volterra-Lotka-Funktion.

  Es gilt: $\nabla\phi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon}{u} \\ 1 - \frac{1}{v} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (u,v) = (\varepsilon, 1)$. Weiter ist $D^2\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{u^2} & o \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$ positiv definit in $(u,v) = (\varepsilon, 1) \Rightarrow (u,v) = (\varepsilon, 1)$ ist ein globales Minimum von ϕ in $(0,\infty)\times(0,\infty)$.

- Mathematisches Pendel: $\ddot{x} = \omega^2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = v & | \cdot \omega^2 \sin u \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin u & | \cdot v \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1-\cos u))) = v\dot{v} + \omega^2 \sin(u)\dot{u} = 0 \Rightarrow \phi(u,v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2(1-\cos u))$ ist ein erstes Integral für das mathematische Pendel.

  In der Physik ist der erste Summand ($\frac{1}{2}v^2$) die kinetische, der zweite ($\omega^2(1-\cos u)$) die potentielle Energie[1].

Differentialgleichungen 1. Ordnung

Differentialgleichungen 1. Ordnung haben die Form $\dot{x} = f(t,x),\ f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ mit $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Eine Differentialgleichung kann zu einem Anfangswertproblem erweitert werden, indem man die zusätzliche Bedingung $x(t_0) = x_0$ für gegebenes $(t_0, x_0) \in G$ stellt.

Fragen:

1. Ist eine Lösung für das Anfangswertproblem eindeutig bestimmt?
2. Existiert eine Lösung des Anfangswertproblems?
3. Wie hängt die Lösung vom Anfangswert x_0 und vom Vektorfeld f ab?

Beispiel:

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t,x) = 2\sqrt{|x|}, \dot{x} = f(\cdot, x), x(0) = 0$ hat unendlich viele verschiedene Lösungen in $C^1(\mathbb{R})$:

F ür $-\infty \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq \infty$ betrachten wir $x_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} -(t-\alpha)^2 & \text{für } t < \alpha \\ 0 & \text{für } \alpha \leq t \leq \beta \\ (t-\beta)^2 & \text{für } t > \beta \end{cases}$

$\Rightarrow$ Stetigkeit von f reicht nicht aus, um Eindeutigkeit zu garantieren!

Satz V.6

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in C^0(G)$ mit $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$, so hat $\dot{x} = f(\cdot, x), x(t_0) = x_0$ mit $(t_0, x_0) \in G$ höchstens eine Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Beweis:

Seien $x_1, x_2 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems.

Schritt 1: $x_1 = x_2$ auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$ für $\delta > 0$ geeignet.

Seien dazu $\varepsilon > 0, L < \infty$ wie in Lemma V.7. Wähle $\delta > 0$ mit $(t, x_1(t)), (t, x_2(t)) \in U_\varepsilon(t_0, x_0)$ für $|t - t_0| < \delta$. Die Existenz eines solchen δ folgt direkt aus der Stetigkeit von x_1, x_2.

[1]Natürlich fehlt in dieser Formel jeglicher Verweis auf die Masse des Pendels. Dieser Faktor würde in der Physik zu beiden Summanden dazumultipliziert, ändert deshalb aber nichts an der Lösung der DGL. Aus mathematischer Sicht kann die Masse zunächst also getrost vernachlässigt werden.

Für $u(t) := ||x_1(t) - x_2(t)||^2$ gilt:

$$\begin{aligned}|\dot{u}| &= 2|\langle x_1 - x_2, \dot{x}_1 - \dot{x}_2\rangle| = 2|\langle x_1 - x_2, f(\cdot, x_1) - f(\cdot, x_2)\rangle \\ &\leq 2||x_1 - x_2|| \cdot ||f(\cdot, x_1) - f(\cdot, x_2)|| \leq 2Lu\end{aligned}$$

Für $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ gelten $\frac{d}{dt}(e^{-2Lt}u(t)) = e^{-2Lt}(-2Ltu(t) + \dot{u}(t)) \leq 0$ und $\frac{d}{dt}(e^{2Lt}u(t)) = e^{2Lt}(2Ltu(t) + \dot{u}(t)) \geq 0$.

Integration von t_0 bis t liefert $u(t) \leq u(t_0)e^{2L|t-t_0|}$ und wegen $u(t_0) = ||x_1(t_0) - x_2(t_0)||^2 = ||x_0 - x_0||^2 = 0$ folgt $u(t) = 0\ \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Leftrightarrow x_1 = x_2\ \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Schritt 2: $x_1(t) = x_2(t)\ \forall t \in I$.

Wir definieren $M := \{t \in I : x_1(t) = x_2(t)\}$. Offensichtlich ist $t_0 \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$. M ist auch abgeschlossen, da $x_1, x_2 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.
Aus Schritt 1 folgt: Zu $t \in M\ \exists \delta > 0$ mit $(t - \delta, t + \delta) \subset M \Rightarrow M$ ist offen $\Rightarrow M = I$

■

Lemma V.7

Für $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n), f = f(t, x)$ mit $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n\times n})$ ist f lokal lipschitzstetig bezüglich der Variablen x, das heißt zu $(t_0, x_0) \in G$ existiert eine Umgebung $U_\varepsilon(t_0, x_0) := \{(t, x) : |t - t_0| < \varepsilon, ||x - x_0|| < \varepsilon\} \subset G$ und ein $L \in [0, \infty)$ mit $||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||\ \forall (t, x_1), (t, x_2) \in U_\varepsilon(t_0, x_0)$.

Beweis:

Folgt direkt aus Satz II.5 und Lemma II.6.

Beispiel:

$f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), f(t, x) = x^2 \Rightarrow \dot{x} = x^2, x(0) = 1$ hat die Lösung $x : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{1-t}$. Diese ist für $t = 1$ offensichtlich nicht definiert, weiter ist sie nicht nach rechts fortsetzbar, denn $\lim\limits_{t \searrow 1} x(t) = \infty$.

Lemma V.8

Seien $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ und $(t_0, x_0) \in G$. Für $x : I \to \mathbb{R}$ mit $\{(t, x(t)) : t \in I\} \subset I$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(t, x(t))\ \forall t \in I, x(t_0) = x_0$
2. $x \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ erfüllt die Gleichung $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds\ \forall t \in I$

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$: Folgt durch Integration von t_0 bis t mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$2 \Rightarrow 1$: Folgt aus der Stetigkeit von $t \mapsto f(t, x(t)) \Rightarrow x \in C^1$ und $\dot{x} = f(\cdot, x)$.

■

Satz V.9

Kurzzeitexistenzsatz von Picard-Lindelöf

Sei $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ mit $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n\times n})$ und $(t_0, x_0) \in G$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass $\dot{x} = f(\cdot, x), x(t_0) = x_0$ auf $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ eine Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ besitzt.

Beweis:

Zu $(t_0, x_0) \in G$ seien $\varepsilon > 0, L < \infty$ wie in Lemma V.7 gewählt und $\delta \in (0, \varepsilon]$ sei zunächst beliebig.

Betrachte den Banachraum $X = C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit $||\cdot||_\infty$[2], definiere weiter die abgeschlossene Menge $A := \{x \in X : ||x(t) - x_0|| \leq \varepsilon \ \forall t \in I\} \subset X$. Sei $F : A \to X, [Fx](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$.

Lemma V.8 impliziert, dass ein Fixpunkt von F, also $F(x) = x$, eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Wir zeigen nun für $\delta > 0$ hinreichend klein:

1. $F(A) \subset A$, die *Selbstabbildungseigenschaft*
2. $||F(x) - F(y)||_\infty \leq \frac{1}{2}||x - y|| \ \forall x, y \in A$

Aus Satz III.5 folgt damit die Existenz eines Fixpunktes $x \in A$.

Da $f : g \to \mathbb{R}^n$ stetig ist, folgt $M = \sup\{||f(t,x)|| : |t - t_0| \leq \varepsilon, ||x - x_0|| \leq \varepsilon\} < \infty$ und für $x \in A$ folgt $||[Fx](t) - x_0|| = \left\|\int_{t_0}^t f(s, x(s))ds\right\| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \Rightarrow 1$ gilt für $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$.

Weiter erhalten wir für $x, y \in A$ aus der Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} ||[Fx](t) - [Fy](t)|| &= \left\|\int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds\right\| \leq |t - t_0| \sup_{s\in I} ||f(s, x(s)) - f(s, y(s))|| \\ &\leq \delta L \sup_{s\in I} ||x(s) - y(s)|| \\ \Rightarrow ||Fx - Fy||_\infty &\leq L\delta ||x - y||_\infty \end{aligned}$$

Für $\delta \leq \min\{\frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{2L}\}$ sind sowohl 1 als auch 2 erfüllt.

■

[2] Dass dieser Raum ein Banachraum ist, haben wir in Satz IV.22 gezeigt

Lösbarkeit des Anfangswertproblems auf (α, β)

Für $D \subset \mathbb{R}^n$ offen betrachte $f : G = (\alpha, \beta) \times D \to \mathbb{R}^n$ mit $f, D_x f$ stetig, wobei $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq \infty$.
Zu gegebenen Anfangsdaten $x(0) = x_0 \in D$ liefert Satz V.9 eine C^1-Lösung $x : (-\delta, \delta \to D$.
Unter welchen Voraussetzungen kann das Anfangswertproblem auf ganz (α, β) gelöst werden?
Was muss gelten, damit die Lösung bereits innerhalb der Intervallgrenzen nicht mehr funktioniert?

Sei t^+ das Supremum aller $t > 0$, sodass $\dot{x} = f(t,x), x(0) = x_0$ auf $[0,t]$ lösbar ist. Dann ist $t^+ > 0$ und das Anfangswertproblem ist auf $[0, t^+)$ lösbar:

Wähle dazu eine Folge $t_k \nearrow t^+$ mit zugehöriger Lösung $x_k \in C^1([0,t_k), D)$ und definiere
$x : [0, t^+) \to D, x|_{[0,t_k)} = x_k$. Aus Satz V.6 wissen wir, dass für $t_k < t_l$ gilt: $x_k = x_l$ auf $[0, t_k)$. Somit ist x wohldefiniert.

Aus der Definition von t^+ folgt: Das Anfangswertproblem ist auf keinem Intervall $[0, t)$ mit $t > t^+$ lösbar. $t^+ \in [0, \infty]$ heißt maximale Lebensdauer der Lösung, das maximale Alter der Lösung $t^- < 0$ ist analog definiert. Damit existiert ein Intervall maximaler Länge, nämlich (t^-, t^+), auf dem das Anfangswertproblem eine Lösung hat.

Lemma V.10

Sei $f : (\alpha, \beta) \times D \to \mathbb{R}^n$ mit $f, D_x f$ stetig, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq \infty$.
Gilt für die maximale Lösung $x \in C^1((t^+, t^-), D)$ des Anfangswertproblems $t^+ < \beta$, so verlässt $x(t)$ für $t \nearrow t^+$ jedes *Kompaktum*, das heißt $\forall K \subset D$ kompakt gilt $x(t) \notin K$ für t hinreichend nahe bei t^+. Die analoge Aussage gilt für $t^- > \alpha$.

Bemerkung:

Im Fall $D = \mathbb{R}^n$ bedeutet dies $t^+ < \beta \Rightarrow \lim\limits_{t \nearrow t^+} |x(t)| = \infty, \; t^+ > \alpha \Rightarrow \lim\limits_{t \searrow t^-} |x(t)| = \infty$.

Beweis:

Wir werden die Aussage nur für t^+ beweisen, der Beweis für t^- läuft analog.

Sei $t^+ < \beta$ und $K \subset D$ kompakt.

Annahme: $\exists \tau < t^+ : x(t) \in K \; \forall t \in (\tau, t^+)$.

f stetig $\Rightarrow M = \sup\{||f(t,x)|| : t \in [0, t^+], x \in K\} < \infty$
$\Rightarrow ||x(t_2) - x(t_1)|| = ||\int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t))dt|| \leq M|t_2 - t_1| \; \forall t_1, t_2 \in [0, t^+)$
$\Rightarrow x^+ = \lim\limits_{t \nearrow t^+} x(t) \in K \overset{\text{Satz V.9}}{\Longrightarrow}$ auf $I = (t^+ - \tau, t^+ + \tau)$ existiert eine Lösung y des Anfangswertproblems $\dot{y} = f(\cdot, y)$ auf I mit $y(t^+) = x^+$. Die Eindeutigkeit der Lösung impliziert $y = x$ links von t^+. Durch Zusammensetzen der Lösungen erhalten wir eine Lösung $\tilde{x}$ der Differentialgleichung auf $[0, t^+ + \tau)$ mit $\tilde{x}(0) = x_0 \quad \lightning$ zur Definition von t^+

Problem: $x(t)$ könnte zwischen K und $D \backslash K$ oszillieren.

Annahme: $\exists$ Folge $t_k \nearrow t^+$ mit $x(t_k) \in K$

Wir definieren $\tilde{K} := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) \leq \rho\} \subset D$ für ρ klein genug sowie $\tilde{M} := \sup\{||F(t,x)|| : t \in [0, t^+], x \in \tilde{K}\} < \infty$. Wie gerade gezeigt, gilt $\tilde{t_k} = \sup\{t \geq t_k : x(t) \in \tilde{K}\} < t^+ \Rightarrow \rho \leq || \underbrace{x(\tilde{t_k}}_{\in \partial\tilde{K} \cup (D \setminus \tilde{K})} - \underbrace{x(t_k)}_{\in K}|| = || \int_{t_k}^{\tilde{t_k}} f(t, x(t))dt|| \leq \tilde{M}(\tilde{t_k} - t_k)$

Für k hinreichend groß ist $(\tilde{t_k} - t_k)$ beliebig klein $\lightning$

$\blacksquare$

Lemma V.11

Lemma von Gronwall

Sei $u \in C^0([t_0, t_1])$ und es gelte $u(t) \leq B(t) + \int_{t_0}^t a(s)u(s)ds \; \forall t \in [t_0, t_1]$, wobei $a \in C^0([t_0, t_1]), a \geq 0$ und $B \in C^1([t_0, t_1])$.

Dann folgt mit $A(t) := \int_{t_0}^t a(s)ds : u(t) \leq e^{A(t)}(B(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} \dot{B}(s)ds) \; \forall t \in [t_0, t_1]$

Beweis:

$g(t) := \int_{t_0}^t a(s)u(s)ds$, also $u(t) \leq B(t) + g(t)$. Wir betrachten damit

$$\frac{d}{dt}(e^{-A}g) = -e^{-A}ag + e^{-A}au = e^{-A}a(u - g) \leq e^{-A}aB = -\frac{d}{dt}(e^{-A}B) + e^{-A}\dot{B}$$

Integration von t_0 bis t liefert mit $g(t_0) = A(t_0) = 0$

$$e^{-A(t)}g(t) \leq B(t_0) - e^{-A(t)}B(t) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)}\dot{B}(s)ds$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $e^{A(t)}$ und einsetzen von $u(t) \leq B(t) + g(t)$ führen auf die Behauptung

$\blacksquare$

Lemma V.12

Seien $J = [t_0, t_1]$, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $D_x f$ stetig. $\rho \in C^1(J, \mathbb{R})$ erfülle die Differentialungleichung $\dot{\rho} < f(t, \rho(t)) \; \forall t \in (t_0, t_1)$ mit $\rho(t_0) < \varphi_0$. Weiter sei $\varphi \in C^1(J)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\varphi} = f(\cdot, \varphi) \; \forall t \in J, \varphi(t_0) = t_0$.

Dann ist $\rho(t) < \varphi(t) \; \forall t \in J$.

Beweis:

Annahme: $\exists t_* \in (t_0, t_1]$ mit $\rho(t) < \varphi(t) \forall t \in [t_0, t_*)$ und $\rho(t_*) = \varphi(t_*)$

$\Rightarrow$ Für $h > 0$ klein genug gilt

$$\frac{\rho(t_*) - \rho(t_* + h)}{h} > \frac{\varphi(t_*) - \varphi(t_* - h)}{h} \overset{h \searrow 0}{\Rightarrow} \dot{\rho}(t_*) \geq \dot{\varphi}(t_*) = f(t_*, \varphi(t_*)) = f(t_*, \rho(t_*)) \; \lightning$$

Widerspruch zu $\dot{\rho} < f(\cdot, \rho) \; \forall t$

■

Bemerkung:

Analog erhält man die umgekehrte Ungleichung.

Beispiel:

$\dot{x} = t^2 + x^2, x(0) = 0$, also ist $f(t,x) = t^2 + x^2)$ auf ganz $\mathbb{R}$ wohldefiniert. Dennoch hat das Anfangswertproblem keine analytische Lösung auf ganz $\mathbb{R}$:

Sei zunächst $t < 1 \Rightarrow t^2 + x^2 < 1 + x^2$ und betrachte dazu $\dot{y} = 1 + y^2, y(0) = \tan\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.
Lemma V.12 $\Rightarrow x(t) < y(t) = \tan(t+\varepsilon) \forall 0 \leq t \leq 1$. Weiter gilt $\dot{x} > t^2 \Rightarrow x(t) > \frac{1}{3}t^3 \; \forall t \in (0,1]$
$\Rightarrow x(1) < \frac{1}{3}$. Für $t > 1$ betrachte $\dot{y} = 1 + y^2, y(1) = \frac{1}{3}$. Lemma V.12 impliziert wieder
$x(t) > y(t) = \tan(t + \arctan\frac{1}{3} - 1)$ für $1 < t < \frac{\pi}{2} + 1 - \arctan\frac{1}{3} \Rightarrow 1 < t^+ < 1 + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{3}$

Satz V.13

Langzeitexistenz bei linearem Wachstum
Sei $f : (\alpha,\beta) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f, D_x f$ stetig und $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq \infty$. Es gebe $a, b \in C^0((\alpha,\beta)), a \geq 0$ sodass gilt:$||f(t,x)|| \leq a(t)||x|| + b(t) \; \forall t \in (\alpha,\beta), x \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(\cdot, x), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ auf ganz (α,β) lösbar und mit $A(t) = \int_0^t a(s)ds$ gilt:

$$(*) \quad ||x(t)|| \leq e^{A(t)} \left(||x_0|| + \int_0^t e^{-A(s)} b(s) ds \right) \; \forall t \in (\alpha,\beta)$$

Beweis:

Für $t \in [0, t^+)$ gilt $||x(t)|| \leq ||x_0|| + \int_0^t ||f(s,x(s))||ds \leq ||x_0|| + \int_0^t (a(s)||x(s)|| + b(s))ds$
$\Rightarrow ||x(t)|| \leq B(t) + \int_0^t a(s)||x(s)||ds$ mit $B(t) = ||x_0|| + \int_0^t b(s)ds$.
Lemma V.11 impliziert, dass $(*)$ auf ganz $[0, t^+)$ erfüllt ist. Wäre nun $t^+\beta$, so würde nach Lemma V.10 $||x(t)||$ mit $t \nearrow t^+$ gegen unendlich gehen, x wird aber als beschränkt vorausgesetzt.
Der Beweis zu $t^- = \alpha$ verläuft analog.

■

Beispiel:

Wir betrachten das gedämpfte Pendel:
Das Anfangswertproblem $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 \sin x = b(t)$[3], $\quad t \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, b \in C^0(\mathbb{R})$ ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\alpha v + \omega^2 \sin u + b(t) \end{cases}$

[3] Physikalisch ist dabei α die Dämpfung, $b(t)$ eine von außen auf das Pendel einwirkende Kraft.

Setze $f(t,u,v) = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha v - \omega^2 \sin u + b(t) \end{pmatrix}$. f ist dass in C^∞ bezüglich u und v und in C^0 bezüglich t, also existiert eine eindeutige lokale Lösung.
$||f(t,u,v)||^2 = v^2 + (-\alpha v - \omega^2 \sin u - b(t))^2 \leq v^2 + 3(\alpha^2 v^2 + \omega^2 u^2 + b(t)^2)$, da $|\sin x| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow ||f(t,u,v)||^2 \leq C(b(t)^2 + u^2 + v^2) \Rightarrow ||f(t,u,v)|| \leq c(|b(t)| + ||(u,v)||) \Rightarrow f$ wächst linear.

Lemma V.14

Sei $G = J \times \mathbb{R}^n$, wobei $J \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall ist, $f : G \to \mathbb{R}^n$ und $D_x f$ stetig und es existiere $\omega \geq 0 : \langle x, f(t,x) \rangle \leq \omega ||x||^2 \ \forall (t,x) \in G$. Dann existieren alle Lösungen von $\dot{x} = f(\cdot, x)$ global nach rechts.

Beweis:

Sei $x(t)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung und $\varphi(t) := ||x(t)||^2$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}(t) = 2\langle x(t), \dot{x}(t) \rangle = 2\langle x(t), f(t,x) \rangle \leq 2\omega ||x(t)||^2 = 2\omega\varphi(t)$$

Sei $\varphi(t_0) = \varphi_0$ für $t_0 \in J$, so folgt $\frac{d}{dt}\left(\varphi(t)e^{-2\omega(t-t_0)}\right) = (\dot{\varphi}(t) - 2\omega\varphi(t))e^{-2\omega(t-t_0)} \leq 0$
$\Rightarrow \varphi(t) \leq \varphi_0 e^{2\omega(t-t_0)} \Rightarrow ||x(t)|| \leq ||x_0|| e^{\omega(t-t_0)} \Rightarrow x$ ist auf jedem kompakten Intervall $[t_0, t_1] \subset J$ beschränkt. Mithilfe von Lemma V.10 folgt die Behauptung.

Beispiel:

$\begin{cases} \dot{u} = -uv \\ \dot{v} = uv - v \end{cases}$ mit $u(0) = u_0, v(0) = v_0,\ u_0, v_0 > 0$. Die Lösung $u(t), v(t)$ erfüllt auf dem maximalen Existenzintervall $[0, t^+)$ die Bedinung $u(t) > 0, v(t) > 0$, denn $u(t) = u_0 e^{-\int_0^t v(s)ds}$,
$v(t) = v_0 e^{-\int_0^t (u(s)-1)ds}$
$\Rightarrow \dot{u} + \dot{v} = -v \leq 0$ auf $[0, t^+) \Rightarrow u(t) + v(t) \leq u_0 + v_0 \Rightarrow u(t), v(t)$ sind beschränkt $\Rightarrow t^+ = \infty$

Stetige Abhängigkeit

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ und $D_x f : G \to \mathbb{R}^{n \times n}$ seien stetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem $(*) : \dot{x}(t) = f(t,x), x(t_0) = x_0$ für $(t_0, x_0) \in G$. Uns interessiert dabei die Abhängigkeit der Lösung von den Daten (t_0, x_0, f).

Gegeben sei eine Lösung $x(t)$ zum Anfangswertproblem $(*)$ auf dem maximalen Existenzintervall $(t-, t^+)$ und $GRAPH_J(x) := \{(t, x(t)) : t \in J\}$, wobei $J = [a,b] \subset (t^-, t^+)$ kompakt ist mit $t_0 \in (a,b)$.

Definition V.15

Die gegebene Lösung $x(t)$ heißt stetig abhängig von (t_0, x_0, f), falls es zu jedem kompakten Intervall $J \subset (t^-, t^+)$ eine kompakte Umgebung $K \subset G$ von $GRAPH_J(x)$ gibt, sodass gilt:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, sodass die Lösung $y(t)$ von $\dot{y} = g(\cdot, y), y(\tau_0) = y_0\ \forall t \in [a,b]$ existiert und der Ungleichung $||x(t) - y(t)|| < \varepsilon\ \forall t \in [a,b]$ genügt unter der Voraussetzung, dass $g : G \to \mathbb{R}^n$ und $D_x g : G \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig sind und $|\tau_0 - t_0| \leq \delta, ||x_0 - y_0|| \leq \delta, \sup\limits_{(s,z)\in K} ||f(s,z) - g(s,z)|| \leq \delta$ erfüllt sind.

Satz V.16

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ und $D_x f$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$.
Dann hängt die Lösung $x(t)$ von $(*)$ stetig von den Daten (t_0, x_0, f) ab.

Beweis:

Sei $y(t)$ die Lösung von $\dot{y}(t) = g(t, y(t)), y(\tau_0) = y_0$ auf dem maximalen Existenzintervall $(\tau^-, \tau^+) \ni t_0$. Lemma V.8 sagt dann aus: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds,\ y(t) = \int_{\tau_0}^t g(s, y(s))ds$. Damit betrachten wir

$$\begin{aligned}
x(t) - y(t) =& x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s))ds - \int_{\tau_0}^t g(s,y(s))ds \\
=& x_0 - y_0 - \int_{\tau_0}^{t_0} f(s,x(s))ds + \int_{\tau_0}^t (f(s,x(s)) - g(s,y(s)))ds \\
=& x_0 - y_0 - \int_{\tau_0}^{t_0} f(s,x(s))ds + \int_{\tau_0}^t (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))ds + \int_{\tau_0}^t (f(s,y(s)) - g(s,y(s)))ds
\end{aligned}$$

Wähle $\alpha, \eta > 0$, sodass die kompakte Menge $K := \{(t,y) : t \in [a-\eta, b+\eta], ||x(t) - y|| \leq \alpha\}$ die Inklusion $K \subset G$ erfüllt und η klein genug ist, dass außerdem die Inklusion $[a-\eta, b+\eta] \subset (t^-, t^+)$ gilt.
Die Existenz von einem solchen K (bzw. η) folgt dabei immer aus der Offenheit von G (bzw. (t^-, t^+).

Damit ist $f|_K$ global lipschitzstetig in x mit Konstate $L > 0$. Gilt $|\tau_0 - t_0| < \delta$,
$||y_0 - x_0|| \leq \delta < \min\{\alpha, \eta\}$, so ist $(\tau_0, y_0) \in K$.
Es sei $\sup\{||f(t,x) - g(t,x)|| : (t,x) \in K\} \leq \delta$ und wir setzen $M := \sup\{||f(t,x)|| : (t,x) \in K\} < \infty$.
Aus der obigen Abschätzung folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
(1) \quad ||x(t) - y(t)|| \leq& ||x_0 - y_0|| + M|t_0 - \tau_0| + \delta(b - a + 2\eta) + L\int_{\tau_0}^t ||x(s) - y(s)||ds \\
\leq& C\delta + L\int_{\tau_0}^t ||x(s) - y(s)||ds
\end{aligned}$$

mit $C = 1 + M + b - a + 2\eta$. Lemma V.11 $\Rightarrow ||x(t) - y(t)|| \leq \delta C e^{L(t-\tau_0)}$ solange $(t, y(t)) \in K$ erfüllt ist.

Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $\delta C e^{L(t-\tau_0)} < \alpha$ erfüllt ist.

Annahme: Es existiert ein erstes $t_* \in [\tau_0, \min\{b, t^+\})$ mit $||x(t_*) - y(t_*)|| = \alpha$.

Wegen $(t_*, y(t_*)) \in K$ folgt aus (1), dass $||x(t_*) - y(t_*)|| < \alpha$ ↯, ebenso argumentieren wir für eine Abschätzung nach links. Damit kann der Graph von $y(t)$ K nicht verlassen und Lemma V.10 impliziert, dass $y(t)$ für alle $t \in [a,b]$ existiert und $(t, y(t)) \in K$ liegt für alle $t \in [a,b]$.

Ist nun $0 < \varepsilon \leq \alpha$ gegeben, so wählen wir δ klein genug, dass die rechte Seite von (1) kleiner gleich ε ist.

■

Bemerkung:

Ist $x(t)$ eine Lösung von $(*)$ und stetig von den Daten abhängig, so ist sie auch eindeutig:

Sei dazu $t_0 = \tau_0, x_0 = y_0, f = g$ und $\tilde{x}(t)$ eine weitere Lösung, so ist $||x(t) - \tilde{x}(t)|| \leq \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = \tilde{x}$.

Lemma V.17

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f, f_n : G \to \mathbb{R}^n$ und $D_x f, D_x f_n$ stetig mit $(t_0, x_0) \in G$ und $x(t)$ sei eine Lösung von $(*)$ auf dem maximalen Existenzintervall (t^-, t^+). Es gelte $t_n \to t_0, x_{n_0} \to x_0$ und $f_n(t,x)$ konvergiere auf kompakten Teilmengen von G gleichmäßig gegen $f(t,x)$.
Ist damit $[a,b] \subset (t^-, t^+)$, so besitzt das Anfangswertproblem $\dot{x}_n = f_n(\cdot, x_n), x_n(t_n) = x_{n_0}, \; t \in [a,b]$ für hinreichend große n genau eine Lösung auf $[a,b]$ und $x_n(t)$ konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $x(t)$.

Beispiel:

Wir betrachten erneut das Anfanswertproblem von Volterra-Lotka:
Zu $\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, x(0) = x_0 \\ \dot{y} = -dy + cxy, y(0) = y_0 \end{cases}$ mit $x_0, y_0, a, b, c, d > 0$ existiert eine eindeutige lokale Lösung.
Satz V.16 impliziert stetige Abhängigkeit von den Daten.

Lemma V.18

$f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $D_x f$ stetig, $J = [t_0, t_1]$. $\rho \in C^1(J)$ erfülle $\dot{\rho}(t) \leq f(t, \rho(t)) \; \forall t \in J$ mit $\rho(t_0) \leq \rho_0$. Weiter sei $\varphi \in C^1(J)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \varphi(t_0) = \varphi_0$, die auf ganz J existiert. Dann ist $\rho(t) \leq \varphi(t) \; \forall t \in J$

Beweis:

Wir setzen $f_n(t,x) := f(t,x) + \frac{1}{n}$. $\varphi_n(t)$ sei eine Lösung von $\dot{\varphi}_n = f_n(\cdot, \varphi_n), \varphi_n(t_0) = \varphi_0 + \frac{1}{n}$. Damit ist $\dot{\rho}(t) \leq f(t, \rho(t)) < f(t, \varphi(t)) + \frac{1}{n} = f_n(t, \rho(t))$ und $\rho(t_0) \leq \varphi_0 < \varphi_0 + \frac{1}{n}$, mit Lemma V.12 folgt $\rho(t) < \varphi_n(t) \; \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in J$. Satz V.16 $\Rightarrow \varphi$ ist stetig von den Daten abhängig, Lemma V.17 impliziert, dass $\varphi_n(t)$ auf J gleichmäßig gegen $\varphi(t)$ konvergiert $\Rightarrow \rho(t) \leq \varphi(t) \; \forall t \in J$

■

Positivität von Lösungen

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $D_x f$ seien stetig, $x(t)$ sei eine Lösung von $(*)$.
Wann folgt aus $(x_0)_j \geq 0 \; \forall 1 \leq j \leq n$?

Bemerkung:

Existiert ein $k \in \{1, ..., n\}$ mit $(x_0)_k = 0$, so muss gelten $0 \leq \dot{x}_k(t_0) = f_k(t_0, x_0)$, sonst wäre $x_k(t) < 0$ für $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ für ausreichend kleines δ.

Positivitätsbedingung:

$$(P)\begin{cases} \text{Sei } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } x_j \geq 0 \text{ für } 1 \leq j \leq n \\ \forall k \in \{1, ..., n\}, t \geq t_0 \text{ und } x_k = 0 \text{ gilt } f_k(t, x) \geq 0 \end{cases}$$

f heißt dann "quasipositiv"

Beispiel:

Wir betrachten erneut das Anfanswertproblem von Volterra-Lotka:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, x(0) = x_0 \\ \dot{y} = -dy + cxy, y(0) = y_0 \end{cases} \text{mit } x_0, y_0, a, b, c, d \geq 0 \text{ ist quasipositiv:}$$

Seien $x, y \geq 0$. Für $x = 0$ bzw. $y = 0$ gilt: $f_1(0, y) = 0 = f_2(x, 0)$, somit ist f quasipositiv.

Satz V.19

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $D_x f$ seien stetig, f sei quasipositiv. Ist $x(t)$ eine Lösung von $(*)$ und gilt $(x_0)_j \geq 0 \; \forall 1 \leq j \leq n$, so folgt $x_j(t) \geq 0 \; \forall t \in [t_0, t^+)$.

Beweis:

Sei $e = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ und $x^m(t)$ sei eine Lösung von
$\dot{x}^m = f(t, x^m) + \frac{e}{m} =: f^m(t, x), x^m(t_0) = x_0 + \frac{e}{m} =: x_0^m$ mit $(x_0^m)_j > 0 \; \forall m \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n$.
$f^m(t, x)$ konvergiert auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen $f(t, x)$, $x_0^m \to x_0$.

Lemma V.17 $\Rightarrow x^m(t) \to x(t)$ auf kompakten Teilmengen von (t^-, t^+).
Sei $t_1 > t_0$ das erste t, für das eine Komponente von $x^m(t)$ verschwindet, z.B. $x_k^m(t_1) = 0$
$\Rightarrow \dot{x}_k^m(t_1) \leq 0$, aber auch $\dot{x}_k^m(t_1) = f_k(t_1, x^m(t_1)) + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m} > 0$ für m hinreichend groß $\lightning$
Damit ist $x_k^m(t) <= \; \forall k \in \{1, ..., n\}, m \in \mathbb{N}$ und $\forall t \geq t_0$, für die $x^m(t)$ existiert.

Mit $m \to \infty$ folgt $x_k(t) \geq 0 \forall 1 \leq k \leq n, t \in [t_0, t^+)$

∎

Lineare Systeme

Seien $\dot{x} = A(t)x + b(t), \; x(t_0) = x_0, t \in J := [t_0, t_1]$ und $A \in C^0(J, \mathbb{R}^{n \times n}), b \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$ gegeben.

- **Homogene Systeme**: $b \equiv 0$
  Seien u, v Lösungen des Systems $\dot{x} = A(t)x$. Dann ist auch $\lambda u + \mu v$ eine Lösung für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
  $(\lambda u \dot{+} \mu v) = \lambda \dot{u} + \mu \dot{v} = \lambda A(t)u + \mu A(t)v = A(t)(\lambda u + \mu v)$

Die Lösungsmenge des Homogenen Systems ist also ein Vektorraum $L \subset C^1(J, \mathbb{R}^n)$.

Sei $x = x(\cdot, x_0)$ die eindeutige Lösung von $\dot{x} = A(t)x, x(t_0) = x_0$, so definiert die Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to L, Tx_0 := x(\cdot, x_0)$ einen linearen Isomorphismus. Wegen $Tx_0(t_0) = x_0$ ist T injektiv. T ist auch surjektiv, denn jede Lösung des Anfangswertproblems hat einen Anfangswert. Damit gilt $\dim L = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Definition V.20

Eine Basis von L heißt *Fundamentalsystem* zu $\dot{x} = A(t)x$. n Lösungen $y \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ fasst man zu einer Lösungsmatrix $Y(t) = (y^1, ..., y^n)$ zusammen. Ist $\{y^1, ..., y^n\}$ ein Fundamentalsystem, so heißt $Y(t)$ *Fundamentalmatrix*. Gilt außerdem $Y(t_0) = \mathbb{1}_n$, so heißt $Y(t)$ *Hauptfundamentalmatrix* in t_0.

Bemerkung:

1. Es gilt $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$
2. Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so hat jede Lösung von $\dot{x} = A(t)x$ die Form $y(t) = Y(t)C$ mit $C \in \mathbb{R}^n$.
3. Ist $Z(t)$ eine Lösungsmatrix, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konstant, so ist auch $Y(t) = Z(t)C$ eine Lösungsmatrix, denn $\dot{Y}(t) = \dot{Z}(t)C = A(t)Z(t)C = A(t)Y(t)$
4. $Y(t), t \in J$ sei eine Lösungsmatrix. $W(t) := \det Y(t)$ heißt dann die *Wronski-Determinante.*

Satz V.21

Sei $Y(t)$ eine Lösungsmatrix von $\dot{x} = A(t)x$ und $W(t) = \det Y(t)$.
Dann gilt $\dot{W} = (\operatorname{tr} A(t))W(t)\ \forall t \in J$, also $W(t) = W(\tau)\exp\left(\int_\tau^t \operatorname{tr} A(s)ds\right)\ \forall t, \tau \in J$
$\Rightarrow W(t) \neq 0\ \forall t \in J$ falls $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix ist.

Beweis:

$\frac{d}{dt}\det X(t) = \det X(t)\operatorname{tr}(X(t)^{-1}\dot{X}(t))$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \dot{W}(t) &= \det Y(t)\operatorname{tr}(Y(t)^{-1}\dot{Y}(t)) = \det Y(t)\operatorname{tr}(Y^{-1}A(t)Y(t))\\ &= \operatorname{tr} A(t)\det Y(t) = \operatorname{tr} A(t)W(t)\end{aligned}$$

■

Bemerkung:

1. Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so existiert $Y(t)^{-1}$ und
$0 = \frac{d}{dt}\mathbb{1}_n = \frac{d}{dt}(Y(t)Y^{-1}(t)) = \dot{Y}(t)Y^{-1}(t) + Y(t)\frac{d}{dt}Y^{-1}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}Y^{-1}(t) = -Y^{-1}(t)A(t)$

2. Ist $X(t)$ eine Hauptfundamentalmatrix in t_0, so löst $x(t) = X(t)x_0$ das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = A(t)x(t),\ x(t_0) = x_0$.
   Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so ist stets $X(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$ eine Hauptfundamentalmatrix in t_0.

- **Inhomogene Systeme:**
  $Y(t)$ sei eine Fundamentalmatrix zu $\dot{x} = A(t)x$ und $z(t)$ sei eine spezielle Lösung von $\dot{x} = A(t)x + b(t)$. Dann sind alle Lösungen von $\dot{x} = A(t)x$ durch $y(t) = Y(t)c, c \in \mathbb{R}^n$ gegeben und der Ansatz $x(t) = y(t) + z(t)$ liefert alle Lösungen von $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, denn $x - z$ muss die homogene Gleichung lösen.

  Die spezielle Lösung findet man über "Variation der Konstanten":
  Sei dazu $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix von $\dot{x} = A(t)x$. Wir setzen an: $z(t) = Y(t)c(t)$ mit $c \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$, also ist $\dot{z}(t) = A(t)Y(t)c(t) + Y(t)\dot{c}(t) = A(t)z(t) + Y(t)\dot{c}(t)$. Wir suchen gerade eine Lösung z, die $A(t)z(t) + b(t) = \dot{z}(t)$ erfüllt, also setzen wir ein und erhalten
  $A(t)z(t) + b(t) = A(t)z(t) + Y(t)\dot{c}(t)$.
  Hieraus ist leicht ersichtlich, dass für c gelten muss: $\dot{c}(t) = Y^{-1}(t)b(t)$, also
  $c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^t y^{-1}(s)b(s)ds$. Setzen wir außerdem $c(t_0) = 0$, erhalten wir die spezielle Lösung
  $z(t) = Y(t)\int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s)ds$.

  Die allgemeine Lösung ist also gegeben durch $x(t) = Y(t)c + Y(t)\int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s)ds$.
  Mit $x(t_0) = x_0$ folgt $x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0 + Y(t)\int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s)ds$

- **Bestimmung des Fundamentalsystems (D'Alembert-Reduktion):**
  Sei $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ mit $y_1(t) \neq 0\ \forall t \in J$ und $y(t)$ löst $\dot{y} = A(t)y$. Die D'Alembert-Reduktion reduziert nun das $(n \times n)$-System, das eigentlich zur Bestimmung eines Fundamentalsystems gelöst werden müsste, auf ein $((n-1) \times (n-1))$-System. Durch erneutes Anwenden der Reduktion kann das System so auf ein (1×1)-System reduziert werden, was deutlich leichter zu bewältigen ist.

  Ansatz: $x(t) = c(t)y(t) + z(t)$ mit $c \in C^1(J)$ und $z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow Acy + Az = A(cy + z) = Ax = \dot{x} = \dot{c}y + c\dot{y} + \dot{z} = \dot{c}y + cAy + \dot{z}$
  $\Rightarrow \dot{z} = Az - \dot{c}y$. Wegen $z_1 = 0$ gilt $\dot{c}(t) = \frac{1}{y_1(t)}\sum_{l=2}^n A_{1l}(t)z_l(t)$. Das System $\dot{z} = Az - \dot{c}y$ ist dann ein $((n-1) \times (n-1))$-System.

  Behauptung: Ist $\{z^1(t), ..., z^{n-1}(t)\}$ ein Fundamentalsystem von $\dot{z} = A(t)z - \dot{c}y$, so ist $\{y, cy + z^1, ..., cy + z^{n-1}\}$ ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = A(t)x$

  Beweis: Nach Konstruktion sind $y, cy + z^1, ..., cy + z^{n-1}$ Lösungen von $\dot{x} = A(t)x$. Seien $\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $\lambda y(t) + \lambda_1(cy + z^1)(t) + ... + \lambda_{n-1}(cy + z^{n-1})(t) = 0$.

Da $z_1^i = 0 \; \forall i \in \{1, ..., n-1\}$ und somit $\lambda y_1 + \lambda_1 c y_1(t) + ... + \lambda_{n-1} c y_1 = 0$, muss gelten

$$\begin{aligned} &\lambda + \lambda_1 c + ... + \lambda_{n-1} c &&= 0 | \cdot y(t) \\ \Rightarrow &\lambda y(t) + \lambda_1 c y(t) + ... + \lambda_{n-1} c y(t) &&= 0 \\ \Rightarrow &\lambda_1 z^1(t) + ... + z^{n-1}(t) &&= 0 \end{aligned}$$

Da $\{z^1(t), ..., z^{n-1}(t)\}$ ein Fundamentalsystem, also unter anderem linear unabhängig, ist, müssen dann $\lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = 0$ sein. Da $y(t) \neq 0$ muss auch $\lambda = 0$ sein, also ist $\{y, cy + z^1, ..., cy + z^{n-1}\}$ linear unabhängig.

Beispiel:

$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} x,\; J = (0, \infty).\; y^1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ ist eine Lösung, denn $\dot{y^1}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$. Es gilt $y_1^1(t) \neq 0 \forall t \in J$, die D'Alembert-Reduktion kann also angewandt werden:

Ansatz: $x(t) = c(t) \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + z(t)$.

Einsetzen liefert $\dot{c} \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_2(t) \\ \frac{2}{t} z_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{c}(t) = -\frac{z_2(t)}{t^2} \Rightarrow \dot{z}_2(t) = \frac{z_2(t)}{t}$

$\Rightarrow z_2(t) = dt$. Wir wählen $d = 1$ und setzen ein: $\dot{c}(t) = \frac{1}{-t} \Rightarrow c(t) = -\log t$

$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} -t^2 \log t \\ t \log t + t \end{pmatrix}$

Als Fundamentalmatrix erhalten wir damit $Y(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \log t \\ -t & t \log t + t \end{pmatrix}$

- **Konstante Koeffizienten:** $A(t) = A$ ist von t unabhängig

Definition V.22

Die Matrix-Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}^{n \times n}$ ist definiert durch $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. Für $|A| \leq R$ gilt $|A^k| \leq |A|^k \leq R^k$. Es folgt: $\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} = e^R < \infty$ und die Reihe konvergiert gleichmäßig. Insbesondere ist exp stetig auf $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Satz V.23

Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n \times n}, X(t) = \exp(At)$ die Lösung von $\dot{X} = AX, X(0) = \mathbb{1}_n$, X ist also eine Hauptfundamentalmatrix.

Beweis:

Für $|t| \leq T$ und $k \geq 1$ gilt $\left| \frac{d}{dt} \frac{(At)^k}{k!} \right| \leq \left| \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} \right| \leq |A| \frac{T^{k-1} |A|^{k-1}}{(k-1)!}$. Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T|A|)^k}{k!} = e^{T|A|} < \infty$ konvergiert die formal differenzierte Reihe gleichmäßig und absolut für $|t| \leq T$

$\Rightarrow \dot{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)! = A\sum_{k=0}^{\infty}} \frac{(At)^k}{k!} = AX(t)$. $X(0) = A^0 = \mathbb{1}_n$

■

Lemma V.24

Es gilt:

1. $\exp : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
2. $\det \exp(A) = \exp(\operatorname{tr} A)$
3. $\exp(SAS^{-1}) = S\exp(a)S^{-1} \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}, S \in \mathrm{GL}(\mathbb{K})$
4. $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$, falls $AB = BA$

Beweis:

1. Folgt aus $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$, was wiederum aus 4. folgt, da A und $-A$ kommutieren.
2. Setze $X(t) := \exp(tA) \Rightarrow X$ löst $\dot{X} = AX$.
   Satz V.21 $\Rightarrow \det X(t) = \det X(0)\exp(\int_0^t \operatorname{tr} A(s)ds) = \exp(t \operatorname{tr} A)$. Die Behauptung folgt direkt aus Einsetzen von $t = 1$.
3. Für alle k gilt $\frac{(SAS^{-1})^k}{k!} = A\frac{A^k}{k!}S^{-1}$.
4. $X(t) := \exp(tA)B,\ Y(t) = B\exp(tA)$ lösen $\dot{X}(t) = A\exp(tA)B = AX(t)$ bzw. $\dot{Y}(t) = BA\exp(tA) = AB\exp(tA) = AY(t)$.
   Mit $X(0) = B = Y(0)$ folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung
   $X(t) = Y(t) \Leftrightarrow \exp(tA)B = B\exp(tA)$.

   Wir setzen $z(t) = \exp(tA)\exp(tB)$
   $\Rightarrow \dot{z}(t) = A\exp(tA)\exp(tB) + \exp tAB\exp tB = (A+B)\exp(tA)\exp(tB) = (A+B)z(t)$ mit $z(0) = \mathbb{1}_n$. Andererseits gilt auch $\frac{d}{dt}\exp((A+B)t) = (A+B)\exp((A+B)t)$ mit $\mathbb{1}_n$ als Anfangswert.
   Die Eindeutigkeit der Lösungen liefert wieder $z(t) = exp(A+B)t)$, also
   $\exp(tA)\exp(tB) = \exp((A+B)t)$. Für $t = 1$ folgt die Behauptung.

■

Lemma V.25

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *diagonalisierbar*, das heißt es existiert eine Basis $(v_1, ..., v_n)$ des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A zu Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Dann bilden die Funktionen $c_k : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n, c_k(t) = e^{\lambda_k t}v_k$ ein Fundamentalsystem von $\dot{X} = AX$.

Beweis:

Nach Voraussetzung existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) : SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Sei $S^{-1} = (v_1, ..., v_n)$.

$X(t)$ löst $\dot{X} = AX$ genau dann, wenn $Y(t) := SX(t)$ $\dot{Y} = (SAS^{-1}Y$ löst.

Die explizite Lösung des Y-Systems ist durch $Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$ gegeben

$\Rightarrow X(t) = S^{-1}Y(t) = (e^{\lambda_1 t}v_1, ..., e^{\lambda_n t}v_n)$

■

Im Allgemeinen kann A nur in Jordannormalform gebracht werden, das heißt längs der Diagonalen setzt sich A aus Jordan-Kästchen[4] zusammen:

$$J(\lambda) = \lambda \mathbb{1}_m + N \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun $\dot{y} = (\lambda \mathbb{1}_m + N)y, y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$ und setzen $y(t) = e^{\lambda t}z(t)$ an. Damit erhalten wir $\lambda y(t) + Ny(t) = \dot{y}(t) = \lambda e^{\lambda t}z(t) + e^{\lambda t}\dot{z}(t) = \lambda y(t) + e^{\lambda t}\dot{z}(t) \Leftrightarrow \dot{z}(t) = Nz(t)$. Somit erhalten wir ein deutlich einfacheres System, das uns über z eine Lösung für y liefert:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{m-1} = z_m \\ \dot{z}_m = 0 \end{cases},\ z(0) = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m \Leftrightarrow \begin{cases} z_m(t) = c_m \\ z_{m-1}(t) = c_{m-1} + c_m t \\ \vdots \\ z_1(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} + ... + c_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \end{cases}$$

$\Rightarrow y(t) = e^{\lambda t}z(t)$ ist eine Lösung von $\dot{y} = (\lambda \mathbb{1}_m + N)y$ mit $y(0) = c$. Die m Lösungen $y(0) = e_k$ mit $1 \leq k \leq m$ bilden ein Fundamentalsystem.

Satz V.26

[4] Jordan-Kästchen sind Quadrate der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

Ein Fundamentalsystem $Y : \mathbb{R} \to M(m \times m, \mathbb{C})$ des Systems $\dot{y} = (\lambda \mathbb{1}_m + N)y$ mit $Y(0) = \mathbb{1}_m$ ist gegeben durch $Y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beweis:

Folgt direkt aus den Überlegungen oben.

Bemerkung:

Ist A reellwertig und $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $c \in \mathbb{C}^n$, so ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{c}$, denn $A\overline{c} = \overline{Ac} = \overline{\lambda c} = \overline{\lambda}\overline{c}$.
Ist $x = u + iv$ eine komplexe Lösung von $\dot{x} = Ax$, so sind $u = \mathrm{Re}(x), v = \mathrm{Im}(x)$ reellwertige Lösungen, denn $\dot{x} = \dot{u} + i\dot{v}$ und $A(u + iv) = Au + iAv$.
Ist $\lambda = \mu + i\nu, c = c^1 + ic^2$, so ist $x(t) = e^{\lambda t}c = e^{\mu t}(c^1 \cos \nu t - c^2 \sin \nu t + i(c^2 \cos \nu t + c^1 \sin \nu t)))$
$\Rightarrow u(t) = \mathrm{Re}(x(t)) = e^{\mu t}(c^1 \cos \nu t - c^2 \sin \nu t), v(t) = \mathrm{Im}(x(t)) = ie^{\mu t}(c^2 \cos \nu t + c^1 \sin \nu t)$ sind zwei linear unabhängige reellwertige Lösungen.

Beispiel:

$\dot{x} = Ax$ mit $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$

1. Fall A besitzt zwei linear unabhängige reelle Eigenvektoren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_1(t) = a_1 e^{\lambda_1 t}, \varphi_2 = a_2 e^{\lambda_2 t}$ bilden ein Fundamentalsytem.
2. Fall A besitzt zwei komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dazu gehören die Eigenvektoren $c_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C}^2,\ a, b \in \mathbb{R}^2$. Da c_1, c_2 linear unabhängig sind, sind auch a, b linear unabhängig. Aus den komplexen Lösungen $\varphi_k(t) = c_k e^{\lambda_k t}, k = 1, 2$ lässt sich ein reelles Fundamentalsystem gewinnen:

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) = (a \cos \nu t - b \sin \nu t)e^{\mu t}$$
$$\psi_2(t) = \frac{1}{2i}(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = (a \sin \nu t + b \cos \nu t)e^{\mu t}$$

3. Fall A besitzt nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit eindimensionalem Eigenraum. Dann existiert $S \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ mit $B := SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Durch $z = Sx$ erhalten wir
$\dot{z} = Bz = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} z.$
Satz V.26 $\Rightarrow (\psi_1(t), \psi_2(t)) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$
$\Rightarrow \varphi_k(t) = S^{-1}\psi_k(t), k = 1, 2, S = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = (v, w)$
$\Rightarrow \varphi_1(t) = ve^{\lambda t}, \varphi_2(t) = (w + tv)e^{\lambda t}$

Lineare Gleichungen höherer Ordnung:

Betrachte

$$(*) \qquad x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) x^{(j)} = b(t)$$

mit $J = [t_0, t_1]; a, b \in C^0(J)$ und den Anfangswerten $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x_1, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$. Wir transformieren dieses System wie folgt:
$u_k = x^{(k-1)}, u_{k_0} = u_k(t_0) = x^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1}$ für $1 \leq k \leq n$. Dann gilt $\dot{u} = A(t)u + f(t)$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & -a_{n-1} \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Satz V.13 $\Rightarrow \dot{u} = A(t)u + f, u(t_0) = u_0$ besitzt genau eine globale Lösung auf J.
Ist $L := \{x \in C^1(J) : x \text{ löst } (*)\}$, so folgt $\dim L = n$. Sind $[x_1(t), ..., x_n(t)\}$ Lösungen von $(*)$ mit $b = 0$, so ist die Wronski-Determinante gegeben durch $C(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \cdots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$

Satz V.21 $\Rightarrow C(t) = C(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds} = C(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds} \; \forall t \in J$

- **D'Alembert-Reduktion:**
  Sei $v(t) \neq 0$ eine Lösung von $x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) x^{(j)} = 0$ mit $J = [t_0, t_1]; a, b \in C^0(J)$. Wähle als Ansatz $x(t) = C(t)v(t) \Rightarrow x^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} C^{(k)}(t) v^{(j-k)}(t) \; \forall j \in \{0, ..., n\}$ und setze $a_n := 1$

  $$\Rightarrow 0 = \sum_{j=0}^{n} a_j(t) \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} C^{(k)}(t) v^{(j-k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} C^{(k)}(t) \left(\sum_{j=k}^{n} a_j(t) \binom{j}{k} v^{(j-k)}(t) \right)$$

  Mit $c_k(t) := \sum_{j=k}^{n} a_j(t) \binom{j}{k} v^{(j-k)}(t)$ gilt $0 = \sum_{k=1}^{n} C^{(k)}(t) c_k(t)$. $c_0(t)$ kann aus der Summe genommen werden, da v eine Lösung der homogenen Gleichung ist und deshalb gilt $c_0(t) = 0$.

  Mit $\psi = \dot{C}$ geht die Gleichung für C in eine Gleichung der Ordnung $(n-1)$ für ψ über. Hat man $(n-1)$ linear unabhängige Lösungen $\psi_1(t), ..., \psi_{n-1}(t)$ dieser neuen Gleichung gefunden, so bilden $\{v(t), C_1(t)v(t), ..., C_{n-1}(t)v(t)\}$ ein Fundamentalsystem für $(*)$ mit $b = 0$. Hierbei sind $C_i(t) := \int_{t_0}^t \psi_i(s) ds$.

  Sei $\lambda v(t) + \lambda_1 C_1(t) v(t) + ... + \lambda_{n-1} C_{n-1}(t) v(t) = 0 \; \forall t \in J$
  $\stackrel{v(t) \neq 0}{\Rightarrow} \lambda + \lambda_1 C_1(t) + ... + \lambda_{n-1} C_{n-1}(t) = 0 \; \forall t \in J$. Differenzieren wir beide Seiten dieser Gleichung, so erhalten wir $\lambda_1 \psi_1(t) + ... + \lambda_{n-1} \psi_{n-1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = 0$, da ψ_i linear unabhängig sind. $v(t) \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \{v(t), C_1(t)v(t), ..., C_{n-1}(t)v(t)\}$ sind linear unabhängig und bilden somit ein Fundamentalsystem.

- **Variation der Konstanten:**
Die allgemeine Lösung der Gleichung von $x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)x^{(j)} = b(t)$ ist gegeben durch die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)x^{(j)} = 0$ und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

Sei $\{x_1(t), ..., x_n(t)\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung. Dann ist $Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \cdots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem von $\dot{u} = A(t)u$. Aus dem Abschnitt wissen wir, dass $u_*(t) = Y(t)\int_{t_0}^t Y^{-1}(s)f(s)ds$ eine spezielle Lösung von $\dot{u} = A(t)u + f(t)$ ist.
Die Funktion $z(s) := Y^{-1}(s)f(s)$ löst das Lineare Gleichungssystem $Y(s)z = f(s)$. Nach der Cramerschen Regel gilt $z_i = \frac{\det Y_i(s)}{\det Y(s)}$ mit
$Y_i(s) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_{i-1}(s) & 0 & x_{i+1}(s) & \cdots & x_n(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_{i-1}^{(n-1)}(s) & b(s) & x_{i+1}^{(n-1)}(s) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \det Y_i(s) = (-1)^{n+i} b(s) \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_{i-1}(s) & x_{i+1}(s) & \cdots & x_n(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & \cdots & x_{i-1}^{(n-2)}(s) & x_{i+1}^{(n-2)}(s) & \cdots & x_n^{(n-2)}(t) \end{pmatrix} =: C_i(s)b(s).$
Mit $C(s) := \det Y(s) \neq 0$ gilt also $z(s) = \begin{pmatrix} c_1(s) \\ \vdots \\ C_n(s) \end{pmatrix} \frac{b(s)}{C(s)}$ und $u_*(t) = Y(t)\int_{t_0}^t z(s)ds$. Die erste Komponente von u_* ist dann die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$x_*(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \int_{t_0}^t b(s)\frac{C_i(s)}{C(s)}ds$$

- **Konstante Koeffizienten:**
Sei $a_j(t) \equiv a_j \in \mathbb{R}\ \forall 1 \leq j < n,\ a_n = 1$. Wir wollen nun wieder die Differentialgleichung $x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{(j)} = 0$ lösen.

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow x^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$, also ist $x(t) = e^{\lambda t}$ eine Lösung genau dann, wenn $e^{\lambda t}\left(\sum_{j=0}^n a_j\lambda^j\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist eine Nullstelle von $p(\lambda) = \sum_{j=0}^n a_j\lambda^j$

Satz V.27

Sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ paarweise verschiedene Nullstellen von $p(\lambda)$ mit Vielfachheit v_j, so bildet $\{e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, ..., t^{v_j-1}e^{\lambda_j t} : 1 \leq j \leq m\}$ ein Fundamentalsystem.

Beweis:

Es gilt $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_m)^{v_m}$. Die Differentialgleichung lässt sich damit schreiben als $p(\frac{d}{dt})x = ((\frac{d}{dt} - \lambda_1)^{v_1} \cdot ... \cdot (\frac{d}{dt} - \lambda_m)^{v_m} x = 0$, wobei die Differentialoperatoren $(\frac{d}{dt} - \lambda_k)$ alle vertauschbar sind.
Wir berechnen $(\frac{d}{dt} - \lambda)t^i e^{\lambda t} = it^{i-1}e^{\lambda t} + \lambda t^i e^{\lambda t} - \lambda t^i e^{\lambda t} = it^{i-1}e^{\lambda t}$. Induktiv folgt daraus
$(\frac{d}{dt} - \lambda_j)^{v_j} t^i e^{\lambda t} = \begin{cases} i(i-1) \cdot ... \cdot (i - v_j + 1) i^{i-v_j} e^{\lambda t} & \text{für } i \geq v_j \\ 0 & \text{für } v_j > i \end{cases}$
Für $i \in \{0, 1, ..., v_j - 1\}$ verschwindet dieser Term $\Rightarrow t^i e^{\lambda_j t}$ ist eine Lösung unserer Differentialgleichung.

Nun wollen wir noch die lineare Unabhängigkeit der Lösungen zeigen.
Sei dazu $q(t) = \sum_{j=1}^{m} q_j(t) e^{\lambda_j t}$, wobei q_j Polynome vom Grad $v_j - 1$ sind. Die lineare Unabhängigkeit ist dann äquivalent zur Aussage $q(t) \equiv 0 \Leftrightarrow q_j(t) \equiv 0 \ \forall 1 \leq j \leq m$, die wir induktiv beweisen wollen:

IA: Für $m = 1$ ist die Behauptung offensichtlich wahr.

IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges, festes $(m-1) \in \mathbb{N}$

IS: Sei $0 \equiv \left(\sum_{j=1}^{m-1} q_j(t) e^{\lambda_j t}\right) + q_m(t) e^{\lambda_m t}$. Durch Multiplikation mit $e^{-\lambda_m t}$ erhalten wir

$$0 \equiv \sum_{j=1}^{m-1} q_j(t) e^{\mu_j t} \quad + q_m(t) \text{ mit } \mu_j := \lambda_j - \lambda_m \neq 0$$

Durch v_m-faches Differenzieren dieser Gleichung folgt

$$0 \equiv \sum_{j=1}^{m-1} \left[(\frac{d}{dt} - \mu_j)^{v_m} q_j \right] e^{\mu_j t} =: \sum_{j=1}^{m-1} r_j(t) e^{\mu_j t}, \text{wobei } r_j \text{ ein Polynom vom Grad höchstens } v-1 \text{ ist.}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass $r_j(t) \equiv 0$ sein müssen $\forall 1 \leq j \leq m-1$
$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} + \mu_j\right)^{v_m} q_j = 0 \ \forall 1 \leq j \leq m-1$. Auf der Menge der Polynome ist $\frac{d}{dt} + \mu_j$ injektiv, denn $\left(\frac{d}{dt} + \mu_j\right) f(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\mu_j t} f(t)\right) = 0 \Rightarrow e^{\mu_j t} f(t)$ ist konstant gleich 0, da $\mu_j \neq 0$ und f ein Polynom ist.

Damit folgt $q_j(t) \equiv 0 \ \forall 1 \leq j < m \Rightarrow q_m(t) \equiv 0$

■

Bemerkung:

Sind a_j reell, so ignorieren wir alle λ_j mit $\operatorname{Im} \lambda_j < 0$ und bilde die Real- bzw. Imaginärteile der verbleibenden Lösungen.

Beispiel:

Das Doppelpendel wird von dem Folgenden Differentialsystem beschrieben[5]:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x + h(y-x) \\ m\ddot{y} = -\frac{mg}{l}y + h(x-y) \end{cases}$$

Wir betrachten nur den Spezialfall für $m = l = 1$[6], also $\begin{cases} \ddot{x} = -gx + h(x-y) \\ \ddot{y} = -gy + h(x-y) \end{cases}$

Ansatz: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \begin{cases} ((\lambda^2+g+h)a - hb)e^{\lambda t} = 0 \\ ((\lambda^2+g+h)b - ha)e^{\lambda t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2+g+h & -h \\ -h & \lambda^2+g+h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$\det \begin{pmatrix} \lambda^2+g+h & -h \\ -h & \lambda^2+g+h \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2+g+h)^2 - h^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 = -g - h \pm h = \begin{cases} -g \\ -g-2h \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{g}, \lambda_2 = i\sqrt{g+2h}, \lambda_3 - i\sqrt{g}, \lambda_4 = -i\sqrt{g+2h}$, die Eigenvektoren sind also $c_1 = c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Wir erhalten ein komplexes Fundamentalsystem in $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_3 t}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\lambda_4 t} \right\}$

Nach der Bemerkung von oben erhalten wir ein reelles Fundamentalsystem, indem wir λ_3, λ_4 ignorieren und die Real- und Imaginärteile zu λ_1, λ_2 bestimmen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t\sqrt{g}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t\sqrt{g+2h}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t\sqrt{g}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t\sqrt{g+2h} \right\}$$

[5] m bezeichnet die Gesamtmasse der beiden Schwingkörper, beide Verbindungsstücke haben dieselbe Länge l

[6] und vernachlässigen die Einheiten

Kapitel VI

Fourierreihen

In diesem Kapitel betrachten wir periodische Funktionen. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit *Periode* $T > 0$, falls $f(t+T) = f(t)\ \forall t \in [0,T)$.

Jede auf $[0,T)$ definierte Funktion kann durch $f(t+kT) := f(t)\ \forall k \in \mathbb{Z}\ \forall t \in [0,T)$ periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

Beispiel:

$f(t) = e^{it}$ hat die Periode 2π: $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}e^{2\pi i} = e^{it}\ \forall i \in [0,2\pi)$. $T = 2\pi$ ist die *Fundamentalperiode* von f, das heißt es existiert keine Periode $\tilde{T} \in \mathbb{R} : 0 < \tilde{T} < T$. Für $j \in \mathbb{Z}$ ist $f(t) = e^{ijt}$ auch periodisch mit Fundamentalperiode $\frac{2\pi}{|j|}$ für $j \neq 0$. $T = 2\pi$ ist auch eine Periode von e^{ijt}.
$\{e^{ijt} : j \in \mathbb{Z}\}$ ist eine unendliche Familie von 2π-periodischen Funktionen.

Lemma VI.1

Seien $j,k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ijx}dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beweis:

$e^{ikx}e^{-ijx} = e^{i(k-j)x} = \cos(k-j)x + i\sin(k-j)x$.
F ür $k \neq j$ gilt $\int_0^{2\pi} \cos(k-j)x\ dx = \frac{1}{k-j}[\sin(k-j)x]_0^{2\pi} = 0$,
$i\int_0^{2\pi} \sin(k-j)x\ dx = -i\frac{1}{k-j}[\cos(k-j)x]_0^{2\pi} = 0$.

F ür $j = k$ gilt $e^{i(k-j)x} = e^0 = 1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi$

■

Definition VI.2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und auf $[0,2\pi]$ integrierbar. Für $j \in \mathbb{Z}$ ist dann $e^{-ijx}f(x)$ auch 2π-periodisch und integrierbar auf $[0,2\pi]$.
Wir definieren den j-ten *Fourierkoeffizienten* von f durch $\hat{f}(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ijx}dx$. Weiter definieren wir für $N \in \mathbb{N}$ die N-te *Fourierpartialsumme* $(\mathfrak{F}_N f)(x) = \sum_{j=-N}^{N} \hat{f}(j)e^{ijx}$. Konvergiert die Folge

$(\mathfrak{F}_N f)(x)$ für $N \to \infty$, so wird der Grenzwert durch $(\mathfrak{F}f)(x)) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijx} = \lim_{N\to\infty}(\mathfrak{F}_N f)(x)$ bezeichnet. $(\mathfrak{F}f)$ heißt *Fourierreihe* von f.

Bemerkung:

Aufgrund der 2π-Periodizität gilt $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ijx}dx = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ijx}dx = \int_a^b f(x)e^{-ijx}dx$ für $b-a = 2\pi$:

$$\int_a^b f(x)e^{-ijx}dx = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ijx}dx - \int_{2\pi}^b f(x)e^{-ijx}dx + \int_0^a f(x)e^{-ijx}dx^1$$

Aus der 2π-Periodizität $(*)$ folgt aber $\int_b^{2\pi} f(x)e^{-ijx}dx + \int_0^a f(x)e^{-ijx}dx$, wie mit der Substitution $y = x - 2\pi$ leicht zu erkennen ist:

$$\int_{2\pi}^b f(x)e^{-ijx}dx = \int_0^{b-2\pi} f(y)e^{-ijy}dy, \text{ wobei } f(y)e^{-ijy} \overset{(*)}{=} f(x)e^{-ijx}, b - 2\pi = a$$

Damit gilt insbesondere $\hat{f}(j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ijx}dx$

Lemma VI.3

Lemma von Riemann-Lebesgue

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrierbar, so gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \int_a^b e^{\pm ikx} f(x)dx = 0$.

Beweis:

Ohne Einschränkung sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, sonst betrachten wir Real- und Imaginärteil von f getrennt und benutzen dieselbe Argumentation.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Satz XI.14 in Analysis I impliziert die Existenz einer Zerlegung $Z = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ von $[a,b]$ mit $\overline{S_z}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \overline{S_z}(f)$, das heißt mit $h_j = \sup\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$ gilt: $\sum_{j=1}^n h_j(x_j - x_{j-1}) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{j=1}^n h_j(x_j - x_{j-1})$

Damit definieren wir eine Treppenfunktion $g(x) := \sum_{j=1}^n h_j \chi_{[x_{j-1},x_j]}(x)$ auf $[a,b]$. Es gilt $g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$ und $\int_a^b |g(x) - f(x)|dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Jetzt gilt weiter $\int_a^b g(x)e^{ikx}dx = \sum_{j=1}^n h_j \int_a^b \chi_{[x_{j-1},x_j]}(x)e^{ikx}dx = \sum_{j=1}^n h_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} e^{ikx}dx = \sum_{j=1}^n h_j \frac{e^{ikx_j} - e^{ikx_{j-1}}}{ik}$
$\Rightarrow |\int_a^b g(x)e^{ikx}dx| \leq \frac{2}{|k|}\sum_{j=1}^n |h_j| \to 0$ mit $k \to \pm\infty$
$\Rightarrow \exists K > 0$ mit $\left|\int_a^b g(x)e^{ikx}dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall |k| > K$
$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)e^{ikx}dx\right| \leq \left|\int_a^b g(x)e^{ikx}dx\right| + \left|\int_a^b (g(x) - f(x))e^{ikx}dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall |k| > K$

■

Satz VI.4

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und differenzierbar, so gilt $\lim\limits_{N\to\infty} (\mathfrak{F}_N f)(x) = f(x)\ \forall x \in [0, 2\pi]$

Beweis:

Es gilt $(\mathfrak{F}_N f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-t)}dt$.
Lemma VI.1 $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-t)}dt$

$$\Rightarrow (\mathfrak{F}_N f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}(f(t)-f(x))\sum_{k=-N}^{N} e^{-ik(t-x)}dt \overset{t=x+s}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x}(f(x+s)-f(x))\sum_{k=-N}^{N} e^{-iks}ds$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+s)-f(x))\sum_{k=-N}^{N} e^{-ikx}ds$$
$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = e^{-iNs}(1(+e^{is}+...+e^{2iNs}) = e^{-iNs}\frac{e^{is(2N+1)}-1}{e^{is}-1} = \frac{e^{is(N+1)}-e^{-iNs}}{e^{i\frac{s}{2}}(e^{i\frac{s}{2}}-e^{-i\frac{s}{2}})}$$
$$= \frac{e^{is(N+\frac{1}{2}}-e^{-is(N+\frac{1}{2}}}{e^{i\frac{s}{2}}-e^{-i\frac{s}{2}}} = \frac{\sin(s(N+\frac{1}{2}))}{sin\frac{s}{2}}$$
$$\Rightarrow (\mathfrak{F}_N f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+s)-f(s)}{\sin\frac{s}{2}}\sin(s(N+\frac{1}{2}))ds$$

Wir definieren $g(s) := \begin{cases} \frac{f(x+s)-f(x)}{\sin\frac{s}{2}} & \text{für } s \neq 0 \\ 2f'(x) & \text{für } s = 0 \end{cases}$. Aus der Differenzierbarkeit von f folgt die Stetigkeit von g in $s=0$, denn $\lim_{s\to 0}\frac{f(x+s)-f(x)}{\sin\frac{s}{2}} = 2\lim_{s\to 0}\underbrace{\frac{f(x+s)-f(x)}{s}}_{\to f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}}_{\to 1} = 2f'(x)$.
F ür $s \neq 0$ folgt die Stetigkeit aus der Komposition stetiger Funktionen $\Rightarrow g$ ist stetig auf $[-\pi,\pi] \Rightarrow g$ ist integrierbar auf $[-\pi,\pi]$

$\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\sin(s(N+\frac{1}{2})) = \frac{1}{2i}\left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g(s)e^{is(N+\frac{1}{2})}ds}_{\to 0} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g(s)e^{-is(N+\frac{1}{2})}ds}_{\to 0}\right]$. Das Grenzverhalten folgt aus Lemma VI.3.

■

Lemma VI.5

$f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sei 2π-periodisch mit Fourierkoeffizient $\hat{f}(j)$ und $\hat{f}'(j)$ als Fourierkoeffizient von f'. Es gilt $\hat{f}'(j) = ij\hat{f}(j)\ \forall j \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

$\hat{f}'(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-ijx}dx = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[f(x)e^{-ijx}\right]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ (Periodizität)}} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(-ij)e^{-ijx}dx = \frac{ij}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(-ij)e^{-ijx}dx$

$= ij\hat{f}(j)$

■

Lemma VI.6

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch. Dann gelten

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} |f(x) - (\mathfrak{F}_N f)(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\hat{f}(k)|^2$$

und

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} |(\mathfrak{F}_N f)(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\hat{f}(k)|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Beweis:

(1): Wir berechnen $\int_0^{2\pi} |f(x) - (\mathfrak{F}_N f)(x)|^2 dx$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(x) - (\mathfrak{F}_N f)(x)|^2 dx &= \int_0^{2\pi} (f(x) - (\mathfrak{F}_N f)(x))(\overline{f(x)} - \overline{(\mathfrak{F}_N f)(x)}) dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(f(x) - \sum_{j=-N}^{N} \hat{f}(j) e^{ijx} \right) \left(\overline{f(x)} - \sum_{k=-N}^{N} \overline{\hat{f}(k)} e^{-ikx} \right) dx \\
&= \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx + \sum_{j,k=-N}^{N} \hat{f}(j)\overline{\hat{f}(k)} \int_0^{2\pi} e^{ix(j-k)} dx \\
&\quad - \sum_{j=-N}^{N} \hat{f}(j) \overline{\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx} dx} - \sum_{k=-N}^{N} \overline{\hat{f}(k)} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx} dx \\
&= \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx + \sum_{j=-N}^{N} |\hat{f}(j)|^2 - \sum_{j=-N}^{N} |\hat{f}(j)|^2 - 2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\hat{f}(k)|^2
\end{aligned}$$

(2): Wir berechnen $\int_0^{2\pi} |(\mathfrak{F}_N f)(x)|^2 dx$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |(\mathfrak{F}_N f)(x)|^2 dx &= \sum_{j,k=-N}^{N} \hat{f}(j)\overline{\hat{f}(k)} \int_0^{2\pi} e^{ix(j-k)} dx = 2\pi \sum_{j=-N}^{N} \hat{f}(j)\overline{\hat{f}(j)} = 2\pi \sum_{j=-N}^{N} |\hat{f}(j)|^2 \\
&\overset{(1)}{\leq} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

■

Satz VI.7

Für $f \in C^1(\mathbb{C})$ 2π-periodisch konvergiert $\mathfrak{F}_N(f)$ gleichmäßig gegen f für $N \to \infty$.

Beweis:

Satz VI.4 $\Rightarrow f(x) = \lim\limits_{N\to\infty} (\mathfrak{F}_N f)(x) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{j=-N}^{N} \hat{f}(j)e^{ijx} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijx}$

Es gilt $\sum_{k=-N}^{N} |k\hat{f}(k)|^2 \overset{\text{Lemma VI.5}}{=} \sum_{k=-N}^{N} |\hat{f}'(k)|^2 \overset{\text{Lemma VI.6}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx$

$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^2 |\hat{f}(k)|^2$ konvergiert absolut

$$\Rightarrow |(\mathfrak{F}_N f)(x) - f(x)| = |\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\hat{f}(k)e^{ikx} + \hat{f}(-k)e^{-ikx}\right)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(|\hat{f}(k)| + |\hat{f}(-k)|\right)$$
$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |k|^2 \left(|\hat{f}(k)|^2 + |\hat{f}(-k)|^2\right)^{2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{|k|^2} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

■

Konvergenz im quadratischen Mittel

In diesem Abschnitt wollen wir festhalten, welche Zusicherungen wir zu Fourierreihen ohne die Voraussetzung der Differenzierbarkeit treffen können.

Satz VI.8

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und über $[0, 2\pi]$ integrierbar. Dann gelten

$$(1) \qquad \lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - (\mathfrak{F}_N(f)(x)|^2 dx = 0$$

und die Parsevalsche Identität

$$(2) \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Bemerkung:

Ist f differenzierbar, so folgt (1) bereits aus der gleichmäßigen Konvergenz.

Beweis:

Für den Beweis fehlen uns noch einige Hilfsmittel:

Lemma VI.9

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und auf $[0, 2\pi]$ integrierbar, $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein 2π-periodisches $g \in C^1(\mathbb{C})$ mit $\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 \leq \varepsilon$

[2] An dieser Stelle haben wir ausgenutzt, dass $2|\hat{f}(k)| \leq |k|^{-2} + |k|^2|\hat{f}(k)|^2$ ist.

Beweis:

Ohne Einschränkung sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, andernfalls betrachte wieder Real- und Imaginärteil getrennt.
Sei $K := \sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| < \infty$. Wie im Beweis von Lemma VI.3 finden wir eine Zerlegung
$0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 2\pi$ und eine Treppenfunktion $h(x) = \sum_{j=1}^n h_j \chi_{[x_{j-1},x_j]}(x)$ mit
$h_j \leq K\ \forall 1 \leq j \leq n$, so dass $\int_0^{2\pi} |f(x) - h(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{8K}$.
Dann gilt: $|f(x) - h(x)| \leq |f(x)| + |h(x)| \leq 2K \Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(x) - h(x)|^2 \leq 2K \int_0^{2\pi} |f(x) - h(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Nun approximieren wir für $1 \leq j \leq n$ die charakteristische Funktion $\chi_{[x_{j-1},x_j}$ durch eine differenzierbare:
Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{4\sum_{j=1}^n h_j^2}$. Ist $|x_j - x_{j-1}| < \delta$, so setze $\theta_j(x) = 0\ \forall x \in [x_{j-1}, x_j)$, sonst setze

$$\theta_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{Für } x \in [0, x_{j-1}) \\ \sin^2((x - x_{j-1})\frac{\pi}{\delta} & \text{Für } x \in [x_{j-1}, x_{j-1} + \frac{\delta}{2}) \\ 1 & \text{Für } x \in [x_{j-1} + \frac{\delta}{2}, x_j - \frac{\delta}{2}) \\ \sin^2((x - x_j)\frac{\pi}{\delta} & \text{Für } x \in [x_j - \frac{\delta}{2}, x_j) \\ 0 & \text{Für } x \in [x_j, 2\pi] \end{cases}.$$

Wir setzen θ_j 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Damit ist $\theta_j \in C^1(\mathbb{R})$ mit

$$\int_0^{2\pi} |\theta_j(x) - \chi_{[x_{j-1},x_j]}(x)|^2 dx \leq \delta = \frac{\varepsilon}{4\sum_{j=1}^n h_j^2}$$

Abschließend definieren wir $g(x) = \sum_{j=1}^n h_j\theta_j(x) \Rightarrow g \in C^1(\mathbb{R})$, g ist 2π-periodisch und
$h(x) - g(x) = \sum_{j=1}^n h_j(\chi_{[x_{j-1},x_j]}(x) - \theta_j(x))$
$\Rightarrow |h(x) - g(x)|^2 = \sum_{j=1}^n h_j^2 |\chi_{[x_{j-1},x_j]}(x) - \theta_j(x)|^2$
$\Rightarrow \int_0^{2\pi} |h(x) - g(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^n h_j^2 \int_0^{2\pi} |\chi_{[x_{j-1},x_j]}(x) - \theta_j(x)|^2 dx \leq \delta \sum_{j=1}^n h_j^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \leq^{3} 2\int_0^{2\pi} |f(x) - h(x)|^2 dx + 2\int_0^{2\pi} |h(x) - g(x)|^2 dx \leq \varepsilon$$

■

Beweis zu Satz VI.8:

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Lemma VI.9 $\Rightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{C})$ 2π-periodisch mit $\int_0 2\pi |f(x) - g(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{9}$
$\Rightarrow \int_0^{2\pi} |(\mathfrak{F}_N f)(x) - (\mathfrak{F}_N g)(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |(\mathfrak{F}_N(f - g))(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{9}$

$g \in C^1 \Rightarrow \mathfrak{F}_N g \to g$ gleichmaßig mit $N \to \infty$ (nach Satz VI.7) $\overset{\text{Ana I}}{\Rightarrow} \int_0^{2\pi} |\mathfrak{F}_N g)(x) - g(x)|^2 dx \to 0$ mit

[3] Wir benutzen hier die Abschätzung
$|f(x) - g(x)|^2 \leq (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|)^2 \leq 2|f(x) - h(x)|^2 + 2|h(x) - g(x)|^2$

$N \to \infty$. Für N groß genug gilt $\int_0^{2\pi} |\mathfrak{F}_N g)(x) - g(x))^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{9}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_0^{2\pi} |\mathfrak{F}_N f)(x) - f(x)|^2 dx \leq & \int_0^{2\pi} (|\mathfrak{F}_N f)(x) - g(x)| + |g(x) - (\mathfrak{F}_N g)(x)| \\ & + |(\mathfrak{F}_N g)(x) - (\mathfrak{F}_N f)(x)|)^2 dx \\ \leq & 3 \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx + 3 \int_0^{2\pi} |g(x) - (\mathfrak{F}_N g)(x)|^2 \\ & + 3 \int_0^{2\pi} |(\mathfrak{F}_N g)(x) - (\mathfrak{F}_N f)(x)|^2 \\ < & \varepsilon \text{ für } N \text{ groß genug}\end{aligned}$$

Die Parsevalsche Identität folgt direkt aus dem hier Bewiesenen. Das Vorgehen ist wie im Beweis zu Lemma VI.6

■

Bemerkung:

$V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f \text{ } 2\pi\text{-periodisch, } f|_{[0,2\pi]} \text{ stetig}\}$ ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum. Für $f, g \in V$ definieren wir $\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$, also insbesondere $\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \geq 0$ und $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 \Rightarrow \langle\cdot, \cdot\rangle$ ist ein Skalarprodukt.

Lemma VI.1 impliziert, dass $\{e^{ijx}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem bilden $\Rightarrow \langle e^{ijx}, e^{ikx}\rangle = \delta_{jk}$. Aus Satz VI.8 folgt, dass $||f - \mathfrak{F}_N f|| \to 0$ mit $N \to \infty$, wobei $||f|| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$, das heißt jedes Element $f \in V$ kann beliebig gut durch die endliche Linearkombination $\mathfrak{F}_N f$ der Orthonormalen Funktionen $\{e^{ijx}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ angenähert werden. $\{e^{ijx}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ist also sogar eine Orthonormalbasis von V.
Die Fourierreihe $f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijx}$ ist die Darstellung von f als Grenzwert von endlichen Linearkombinationen der Basisfunktionen.

V ist nicht vollständig bezüglich $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot, \cdot\rangle}$, in Analysis III betrachten wir die Vervollständigung $\tilde{V} = L^2([0, 2\pi))$.

Anhang

Vervollständigung des Beweis zu Satz IV.24

Erinnerung: Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass *alle* rektifizierbaren Kurven umparametrisiert werden können. Die Länge einer Kurve $c \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ bezüglich einer Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ ist definiert durch $L_Z(c) := \sum_{i=1}^N ||c(t_i) - c(t_{i-1})||$, die Bogenlänge durch $L(c) := \sup\limits_Z L_Z(c) \in [0,\infty]$. c heißt rektifizierbar, genau dann, wenn $L(c) < \infty$.

Lemma A.1

$c \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ ist rektifizierbar genau dann, wenn $L_{Z_j}(c) \to L(c)$ für alle Zerlegungen Z_j von $[a,b]$ mit $\Delta(Z_j) := \max\limits_{1\le i\le N} |t_i - t_{i-1}| \to 0$.

Bemerkung:

Sind Z, Z' Zerlegungen von $[a,b]$, so erhalten wir eine neue Zerlegung $Z \cup Z'$, indem wir alle Unterteilungspunkte aus den beiden ursprünglichen Zerlegungen vereinen. Aus der Dreiecksungleichung folgt $\max\{L_Z(c), L_{Z'}(c)\} \le L_{Z\cup Z'}(c)$.

Beweis:

"$\Leftarrow$" Sei Z_j eine Folge von Zerlegungen mit $L_{Z_j}(c) \to \sup\limits_Z L_Z(c)$ und Z'_j eine Folge von Zerlegungen mit $\Delta(Z'_j) \to 0$. Es gilt:

$$L(c) \le \sup_Z L_Z(c) = \lim_{j\to\infty} L_{Z_j}(c) \le \lim_{j\to\infty} L_{Z_j \cup Z'_j}(c) = L(c), \text{ wobei } \Delta(Z_j \cup Z'_j) \to 0$$

"$\Rightarrow$" Sei nun $L := \sup\limits_Z L_Z(c) < \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle eine Zerlegung $\tilde{Z} : a = t_0 < ... < t_N = b$ mit $L_{\tilde{Z}}(c) > L - \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $||c(t) - c(t')|| \le \frac{\varepsilon}{3N}$ $\forall |t - t'| \le \delta$
Für eine Zerlegung Z' mit $\Delta(Z') < \delta$ gilt

$$L < L_{\tilde{Z}}(c) + \frac{\varepsilon}{3} \le L_{Z'\cup\tilde{Z}}(c) + \frac{\varepsilon}{3} \le L_{Z'}(c) + 2N\frac{\varepsilon}{3N} + \frac{\varepsilon}{3} \le L + \varepsilon$$

$\Rightarrow |L_{Z'}(c) - L| \le \varepsilon$

■

Lemma A.2

Sei $I = I_1 \cup ... \cup I_p$ eine Zerlegung von $I = [a,b]$ in Teilintervalle $I_j = [a_{j-1}, a_j]$. $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ ist genau dann rektifizierbar, wenn $c|_{I_j}$ für alle $1 \leq j \leq p$ rektifizierbar ist. Es gilt dann $L(c) = \sum_{j=1}^{p} L(c|_{I_j})$

Beweis:

Siehe Lemma IV.4 für $p = 2$, die allgemeine Aussage folgt induktiv.

Lemma A.3

Für jedes rektifizierbare $c \in C^0(I = [a,b], \mathbb{R}^n)$ existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $J \subset I$ mit $|J| < \delta$ gilt: $L(c|_J) < \varepsilon$.

Beweis:

Wähle $\delta > 0$ so, dass $L(c) - L_Z(c) < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle Zerlegungen Z von I mit $\delta(Z) < \delta$ und $||c(t) - c(t')|| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall |t - t'| < \delta$. Die Existenz eines solchen Z folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von c.

Zu gegebenem $J \subset I$ mit $|J| < \delta$ wähle eine Zerlegung Z von I mit $\Delta(Z) < \delta$, sodass J ein Teilintervall der Zerlegung ist. Ist Z' eine beliebige Zerlegung von J, so folgt mit $J = [\alpha, \beta]$:

$$L_{Z'}(c|_J) = \underbrace{L_{Z \cup Z'}(c) - L(c)}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{||c(\beta) - c(\alpha)||}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \frac{2\varepsilon}{3}$$

■

Aus Lemma A.2 und Lemma A.3 folgt nun, dass für $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ die Bogenlängenfunktion

$$\sigma : [a,b] \to [0, L(c)], \sigma(t :) = L(c|_{[a,t]})$$

stetig und monoton wachsend ist.

Satz A.4

Sei $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ rektifizierbar und $\tau : [0, L(c)] \to [a,b]$ sei rechtsinvers zu σ, das heißt $\tau(s) \in \sigma^{-1}(s)$ $\forall s \in [a,b]$. Dann ist $c \circ \tau$ stetig und längentreu: $L(c \circ \tau|_{[s_1,s_2]}) = |s_1 - s_2|$

Beweis:

Sei σ stetig und monoton wachsend $\Rightarrow$ σ ist surjektiv $\Rightarrow$ $\exists \tau$, zum Beispiel können wir τ wählen als $\tau(s) = \inf\limits_{\sigma(t)=s} t$. Damit ist τ streng monoton wachsend mit eventuellen Sprungstellen, die Konstanzintervallen von c entsprechend. Ist $\sigma(t_k) = s_k$ für $k = 1, 2$, so folgt:

$$(*) \qquad ||c(t_1) - c(t_2)|| \leq L(c|_{[t_1,t_2]}) = |\sigma(t_1) - \sigma(t_2)| = |s_1 - s_2|$$

Daraus folgen:

1. $c \circ \tau$ ist unabhängig von der Wahl der Rechtsinversen τ:
   $t_1 = \tau(s_1), t_2 = \tau'(s_1) \Rightarrow ||(c \circ \tau)(s_1) - (c \circ \tau')(s_1)|| \leq |\sigma \circ \tau(s_1) - \sigma \circ \tau'(s_1)| = |s_1 - s_1| = 0$

2. $c \circ \tau$ ist lipschitzstetig mit Konstante 1:
   $t_1 = \tau(s_1), t_2 = \tau(s_2) \Rightarrow ||(c \circ \tau)(s_1) - (c \circ \tau)(s_2)|| \leq |\sigma \circ \tau(s_1) - \sigma \circ \tau(s_2)| = |s_1 - s_2|$
   $\Rightarrow c \circ \tau$ ist rektifizierbar.

Wegen $\sigma(\tau(\sigma(t))) = \sigma(t)$ ist $c(\tau(\sigma(t))) = c(t)$, denn mit Einsetzen von $t_1 = \tau(\sigma(t)), t_2 = t$ in $(*)$ folgt $||c(\tau(\sigma(t))) - c(t)|| \leq |\sigma(\tau(\sigma(t))) - \sigma(t)|| = 0$.

Für eine Folge Z_j von Zerlegungen von $[t_1, t_2]$ mit $\Delta(Z_j) \to 0$, also auch $\Delta(\sigma(z_j)) \to 0$ gilt:

$$L(c \circ \tau|_{[s_1,s_2]}) \overset{\text{Lemma A.1}}{=} \lim_{j\to\infty} L_{\sigma(Z_j)}(c \circ \tau|_{[s_1,s_2]}) = \lim_{j\to\infty} L_{Z_j}(c|_{[t_1,t_2]}) = L(c|_{[t_1,t_2]}) \overset{(*)}{=} |s_1 - s_2|$$

■