序論

研究を通して

フーリエ解析は、その内容を主に「フーリエ級数」、「フーリエ変換・逆変換」の二つに大別できる。そして、この論文は主に前者のフーリエ級数を中心としたε論法の証明に代表されるような理論的側面の強い内容となっている。それで、例えば現代の実生活の側面のどのような所に使われているかといった話は少なくなっているかもしれない。しかし実際には、熱力学だけでなく、光学や力学など他にも多くフーリエ解析の理論が使われており、これが非常に汎用性の高い内容であることが研究の過程で分かったので、その内容を少しでも理解、イメージするためにも、実際に理論的内容を学ぶことも大切だと考えてこれに取り組んだ。

また、この論文を書きすすめる中でフーリエ級数の理論について知っていくにつれて、この理論の発案者ジョセフ・フーリエが動乱の時代のなかで、どのように今日における数学で広く使われている理論の礎を築くに至ったかが気になった。そして、数学史の本などを使って学習した結果、「数学を教えるときには、ただ数学的な内容やその応用を理解できるようにするだけでなく、その背景となる歴史や人物、社会情勢等についても教える」というアプローチの仕方もあることに気づいた。実生活でどのようなところで使われているのかといったことを教えたり、理論を作った人の生きた時代背景にふれるなどのアプローチをしたりすれば、数学そのものの内容には興味を持ちにくいと思っている人にも、少しは興味をもってもらえるのではないかと考える。

研究の背景

4 年間の大学生活において、授業を受けてから、興味が湧いたことを参考書等により学ぶ中で、大学数学の分野には実に様々な分野があることを知った。また、それら大学数学が直接的に実生活に姿を見せることは、あまり無いように見えても、実は多くの面で複雑な現代社会を支える高度な科学技術の礎となっていることを知った。特に、熱伝導方程式、音声解析、光学、波動方程式と実に様々なところに応用されている「フーリエ解析」なるものがあると知ったときには、非常に興味を持った。そして、フーリエ解析についていくらか調べたり、先輩方の卒論発表を聞いたりする中で「様々な (周期) 関数は、周期の異なる三角関数の無限級数 (フーリエ級数) で表わせる」という、非常に斬新な概念を含んでいることを知り、より一層興味をもった。また、大学でもう少し数学の勉強をしたいとの思いから、このゼミを志望した。特にフーリエ解析の根本となっているフーリエ級数の理論的な内容について学習する機会を私に与えていただいたと思っている。

研究の目的

フーリエ解析の根本となっているフーリエ級数の理論的な内容について理解し、また、それを理解するための過程を通して、大学数学において重要とされる数学分野の一つの微分積分、特に積分についての理解を少しでも深める。

研究の方法

まずは、参考文献『Fourier Series (Georgi P. Tolstov 著, Richard A. Silverman 翻訳)』の第 1〜3 章の読解・要約、及び参考書マセマシリーズ「スバラシク実力がつくと評判のキャンパス・ゼミ,(馬場敬之他. 著)」、「弱点克服　大学生のフーリエ解析,(矢崎成俊 著)」、インターネットによるフーリエ解析の大まかな内容の把握から始めた。次に本文献の内容を熟読し、初見でもわかりやすいようにところどころ本文では省かれている証明や簡単な補助的な説明文をいくつか付け加えた。(そのため、本論の内容は参考文献の解説に近いものになっている。)　そして、教授に貴重な時間をいただき、それらの内容を毎週のゼミで添削していただくことにより一層内容に理解に努めた。また、研究する過程の中で Joseph Fourier, ジョセフ・フーリエがどのような経緯で熱伝導方程式を中心としたフーリエ級数の理論を構築するに至ったかが気になり、それについては「数学史、数学の流れ 30 講,」及び「弱点克服　大学生のフーリエ解析, 江川博康 著」を参考に調べ勉強した。

本論文の構成

まず、本論の構成に入る前にフーリエ解析というものがどのようなものなのかを述べる。フーリエ解析とは、簡単に言えば「食品の成分表示のように様々な関数がどのような関数から構成されているかを主に直交関数系と積分を利用して調べる学問」であり、「角ばった、もしくは不連続なグラフの関数、つまりはデジタル的な関数で表わされるものを連続で滑らかなグラフの関数、つまりはアナログ関数で近似して表わす学問」である。具体的な応用分野として、熱伝導方程式で有名な熱力学以外にも音声解析や光学などへの利用が挙げられる。

このフーリエ解析はその内容を主に「フーリエ級数」と「フーリエ変換・逆変換」という二つの枠に大別できるが、本論文では前者の「フーリエ級数」を扱っている。なお、「フーリエ変換・逆変換」の考えは「フーリエ級数」の延長線上に成り立っているので、「フーリエ級数」を学ぶことは「フーリエ変換・逆変換」を学ぶことにも大きくつながる。

本論文の構成だが、第 1〜3 章の 3 章により構成した。第 1 章ではフーリエ級数とはどのようなものなのか、その理論の概要をとらえ、第 2〜3 章ではどのような定理や条件のもとに、前者で述べられたようなフーリエ級数の理論が成り立っているのか学習したことを述べた。より詳しく説明すると次の通りである。

まず最初の第 1 章では、フーリエ級数 (展開) というのは一体どのようなものなのか、また、どのような条件の下でどのような関数がフーリエ級数に展開されうるのかを見ていく。また併せて、それらフーリエ級数の概要をここでつかむのに、さらには第 2,3 章で 1 章の内容を裏付けている諸定理を理解するのに必要不可欠ないくつかの事柄を取り上げていく。具体的に挙げると、周期関数、高調波 ($y = A\sin(\omega x + \varphi)$ の形で表わされうる関数)、積分、関数項級数、右側 (左側) 極限、第一種不連続点、滑らかな関数、区分的に滑らか関数、偶 (奇) 関数、といった内容について述べられている。なお、この章で後の内容に関連して最も重要になってくるのは第 10 節の冒頭の以下の部分である。

周期 2π の区分的に滑らかな (連続または、不連続) 関数 $f(x)$ のフーリエ級数はすべての x の値で収束する。その級数の和はすべての連続な点で $f(x)$ に等しく、すべての不連続な点で右側極限と左側極限の算術平均 (相加平均)、

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

に等しくなる。さらにもし、 $f(x)$ がすべての点で連続ならば、その級数は絶対収束、一様収束をする。

次の第 2 章では、まず直交関数系や正規直交系、ノルムの定義をし、それらを利用して第 1 章 6 節の考察 (周期 2π の積分可能な周期関数がある一定の条件を満たすのならば、三角級数展開、つまりはフーリエ級数展開されうる、という考察) を再度行っていく。その後、いくつかの直交関数系に関するフーリエ級数がどのようなものになるか考察した後、3 章の諸定理を証明していくための準備を 1 章の内容に加えて行っていく。具体的に挙げると、二乗可積分関数 (二乗積分可能な関数)、平均二乗誤差、最良近似問題 (平均二乗誤差がどのようなときに最小値をとるか考える問題)、ベッセルの不等式、平均収束、完備条件 (パーシヴァルの等式) といった内容について述べられている。また、その後ではフーリエ級数とベクトルにおける概念の類似点について述べられている。

そして、この卒業論文における最後の章となっている第 3 章では、リーマン・ルベーグの補助定理を利用して、いわゆるフーリエの定理 (または、フーリエの積分定理) にあたる内容を証明していき、その後、ある一定の条件を満たす周期関数のフーリエ級数の収束性について考え、第 1〜2 章で取り上げた内容の裏付けをしていく。また、その後「局所化の原理」を取り上げ、有界でない周期関数のフーリエ級数についても考えていく。

本論文中の表記について

次に本論文で使われている表記について紹介する。

まず、実数直線上の閉区間、開区間について述べる。共通表記として、閉区間は、[　,　]、開区間は、(　,　) として表わす。以下に参照として示す。(本論ではほとんどないが、どちらか一方がもう片方と違うという場合もある。)

$$[a,b]=x;a\leq x\leq b$$
$$(a,b)=x;a<x<b$$

また、実数, 複素数, 自然数の集合をそれぞれ $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{N}$ と表わし、それらが n 個の元からなる直積であるとき、それぞれ $\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n,\mathbb{N}^n$ と表す。

次にフーリエ解析に多く出てくる記号「〜」について述べる。これは、本論にも記してあるが左辺の式が右辺の式で「ほぼ近似できている」ことを表わす。左辺と右辺が完全に等しいものと証明できた場合、この「〜」は「＝」と取りかえることが出来る。以下に参照として記す。

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\cdots\cdots(6.1)$$

この式は左辺の関数 $f(x)$ が右辺の三角無限級数でほぼ近似できていることを表わす。

次に微分についていくつかのことを記す。

区間 I 上で定義された実 1 変数関数の関数 f に対して、区間 I 上で導関数 $f',f'',\cdots\cdots,f^{(n)}$ が存在し、それらが区間 I 上で連続であるならば、関数 f は $C^{(n)}$級 であると言われる。さらに、その関数がすべての階数で I 上で連続かつ微分可能であるならば、関数 f は $C^{(\infty)}$級 であると言われる。なお、$y=f(x)$ としたとき、導関数 $f',f'',\cdots\cdots,f^{(n)}$ はそれぞれ $y',y'',\cdots\cdots,y^{(n)}$ や

$$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\cdots\cdots,\frac{d^ny}{dx^2},$$ とも表わす。