証明　$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で絶対積分可能、$a_1,\cdots\cdots,a_n$ を $f(x)$ の不連続点とする。各 a_i に関して、

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_i>0\quad s.t.\quad |\alpha-a_i|<\delta_i\Longrightarrow\left|\int_{a_i}^{\alpha}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$$

$$(\text{ただし、}\alpha\in[a,b],\quad a\le\alpha\le b,\quad a_i<\alpha,\quad \alpha\text{で } f(x)\text{ は連続})$$

ところで、

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_i>0\quad s.t.\quad |\alpha-a_i|<\delta_i\Longrightarrow\left|\int_{a_i}^{\alpha}f(x)dx\right|\le\left|\int_{a_i}^{\alpha}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$$

この式は、$f(x)$ の不連続点のみにおける積分を限りなく 0 に近づけられる (0 でおさえられることを示す。) ことを指している。このことは、命題の**不連続点の数が高々有限個であれば、絶対積分可能ならば、積分可能であること**を示す。

参考　不連続点を含む積分は広義積分を次のように定義する。

$$\lim_{t\to\beta+0}\int_t^{\alpha}f(x)dx=\int_{\beta}^{\alpha}f(x)dx$$

(ただし、この場合 $\alpha\in[a,b],\quad a\le\alpha\le b,\beta<t\le\alpha,\quad \alpha$ では $f(x)$ は連続,β で $f(x)$ は不連続)

本題の命題の証明　先ほどの定理から、関数 f(x) が閉区間 $[a,b]$ で絶対積分可能ならば、

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_i>0\quad s.t.\quad |\alpha-a_i|<\delta_i\Longrightarrow\left|\int_{a_i}^{\alpha}|f(x)|dx\right|<\varepsilon_1$$

$\varphi(x)$ が $[a,b]$ で有界な積分可能な関数ならば、先ほどの補題より、$|\varphi(x)|$ も積分可能で

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_i>0\quad s.t.\quad |\alpha-a_i|<\delta_i\Longrightarrow\left|\int_{a_i}^{\alpha}\varphi(x)dx\right|\le\left|\int_{a_i}^{\alpha}|\varphi(x)|dx\right|<\varepsilon_2$$

(なお、$a_1,\cdots\cdots,a_n$ は $f(x)$ の有限個の不連続点) よって、このとき、

$$\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2>0,\exists\delta_i>0\quad s.t.$$
$$|\alpha-a_i|<\delta_i\Longrightarrow\left|\int_{a_i}^{\alpha}|f(x)\varphi(x)|dx\right|\le\left|\int_{a_i}^{\alpha}|f(x)|dx\right|\left|\int_{a_i}^{\alpha}|\varphi(x)|dx\right|<\varepsilon_1\times\varepsilon_2$$

よって、このとき、 $f(x)$ の不連続点が高々有限個ならば、それらの点における絶対積分の値を限りなく 0 に近づけられる。(0 でおさえられることを示す。) 有界、連続な関数が絶対積分可能なことは明らかなので、不連続な点が高々有限個であれば、命題が成り立つと分かる。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ **が収束することの確認**

自然数 k に対して、$k\le x\le k+1$ すなわち、$\dfrac{1}{(k+1)^2}\le\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{1}{k^2}$ のとき、すべての辺を閉区

間 $[k, k+1]$ において、x で積分すると、常に $\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{x}$ または $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{k}$ ではないから、

$$\begin{aligned}
&\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dx \\
&\Longrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx < \frac{1}{k^2} \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} < \int_1^{n} \frac{1}{x^2} dx < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1}^{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

よって、それぞれ

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} &< 1 - \frac{1}{n} \\
1 - \frac{1}{n} &< \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

よって、それぞれの両辺に順に 1、$\dfrac{1}{n^2}$ を加えて、

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

よって、

$$1 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots\cdots < 2$$

であり、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ は収束すると分かる。

第1章　フーリエがフーリエ解析の理論を考えるに至った経緯

1.1　The thermal conduction equation, 熱伝導方程式

まず、いくつかの補題を示す。

補題, 積分の平均値の定理

f(x) が閉区間 $[a, b]$ で連続なとき、

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{1.1}$$

となるような実数 c が (a, b) に存在する。

証明　閉区間 $[a, b]$ の範囲で f(x) の最大値を M、最小値を m とすると、定積分の定義から

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$$
$$\Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

よって、

$$m(b-a) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

となる。ここで、$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ とおくと、$m \leq \mu \leq M$ より、中間値の定理 (証明略) から、

$$f(c) = \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

となる c が (a, b) に存在する。

補題　$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数、$g(t)$ を閉区間 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ で連続な関数とする。

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I})a < x_0 < b \text{ とするとき、極限 } \lim_{\substack{a \to x_0 - 0 \\ b \to x_0 + 0}} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(x_0) \\ &(\mathrm{II}) \text{ 極限 } \lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} g(t)dt = g(t_0) \end{aligned} \tag{1.2}$$

(I) の証明　積分の平均値の定理より、

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(c)(\beta - \alpha)$$

を満たす $c \in (\alpha, \beta)$ をとることができる。よって、

$$\lim_{\substack{\alpha \to x_0 - 0 \\ \beta \to x_0 + 0}} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\substack{\alpha \to x_0 - 0 \\ \beta \to x_0 + 0}} f(c) = f(x_0)$$

となる。なお、最後の極限のところは、不等式

$$0 \leq |c - x_0| < |\alpha - \beta| = |\alpha - x_0 + x_0 - \beta| \leq |\alpha - x_0| + |x_0 - \beta|$$

及び、はさみうちの原理を用いている。

(II) の証明　先ほどと同様にして、積分の平均値の定理より、

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} g(t)dt = g(c)\Delta t$$

を満たす $c \in (0, t_0)$ をとることができるから、

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} g(t)dt = g(c)\Delta t = \lim_{\Delta t \to +0} g(c) = g(t_0)$$

なお、これも不等式 $0 < c - t_0 < \Delta t$ 及び、はさみうちの原理を用いている。

熱伝導方程式を導きだした過程

一様な針金を x 軸に横たわる線分 $[a, b]$ とし、点 x 、及び時刻 t における針金の温度を $u(x, t)$ とする。

温度 u がこの二つの変数によって刻々と変化していく様子を表わす式を考えていく。$x_0 \in (a, b)$ を任意に固定し、区間 $V = [\alpha, \beta]$ 　$(a < \alpha < x_0 < \beta < b)$ を定める。任意のある時刻 $t_0 > 0$ で V に蓄えられている熱量 $J(t_0)$ は $J(t_0) = \int_\alpha^\beta cu(x, t_0)dx$ である。ここで、c は針金単位当たりの熱容量で、いまは、針金を一様と仮定しているので正定数である。時間 Δt の間の J の増分 $\Delta J = J(t_0 + \Delta t) - J(t_0)$ は

$$\Delta J = \left(\int_\alpha^\beta c(u(x, t_0 + \Delta t) - u(x, t_0))dx \right) = \int_\alpha^\beta \left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} cu_t(x, t)dt \right) dx$$

である。

フーリエは熱流は温度勾配に比例するという法則 (フーリエの熱伝導の法則) を発見した。区間 V の左側における量 $-k \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} u_x(\alpha, t)dt$ は Δt の間に $x = \alpha$ より V に流入した熱量である。($-k$ が掛けられているのはそのため)

なお、 k は熱伝導率で、いまは針金を一様と仮定しているので正定数である。同様に、区間 V の右側における量 $k \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} u_x(\beta, t)dt$ は Δt の間に $x = \beta$ より、V に流入した熱量である。

熱量の増分 ΔJ は Δt の間に V に流入した熱量に等しいので (熱量 (エネルギー) 保存の法則)

$$\begin{aligned}
\Delta J &= k \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (u_x(\beta, t) - u_x(\alpha, t))dt \\
&= k \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left(\int_\alpha^\beta u_{xx}(x, t)dx \right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} ku_{xx}(x, t)dt \right) dx
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} cu_t(x,t)dt\right)dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} ku_{xx}(x,t)dt\right)dx$$

ここで、$\alpha \to x_0 - 0, \beta \to x_0 + 0, \Delta t \to +0$ のときの極限をとると、補題 (1.2) より、

$$cu_t(x_0,t_0) = ku_{xx}(x_0,t_0)$$

という式を得る。x_0 は (a,b) の任意の点、$t_0 > 0$ は任意の時刻なので、$\kappa = \dfrac{k}{c}$ とおいて、

$$u_t(x,t) = \kappa u_{xx}(x,t) \qquad (a < x < b, t > 0) \tag{1.3}$$

この偏微分方程式を**熱方程式**あるいは**熱伝導方程式**と呼ぶ。(初期時刻 $t = 0$, 及び針金の端 $(x = a, x = b)$ といった情報は与えられていない。)

1.2 二階線形常微分方程式について

1.3 The Solution for the thermal conduction equation which Fourier utilized, 熱伝導方程式を求めるのにフーリエが利用した方法

補題 微分方程式の境界値問題

$$v''(x) - \lambda v(x) = 0 \quad ※ただし\ (0 < x < \pi), v(0) = v(\pi) = 0$$

の解 v が非自明解となるための実数 λ の条件は n を整数としたとき、$\lambda = -n^2$ であり、このとき次の非自明解を持つ。

$$v(x) = c\sin nx \qquad (\text{cは任意定数、nは整数})$$

証明 λ によって場合分けをする。以下 c_1, c_2 は任意定数とする。

(I) $\lambda = 0$ のとき
$v''(x) = 0$ を解くと、$v(x) = c_1x + c_2$ を得るよって、$v(0) = c_2 = 0, v(\pi) = c_1\pi = 0$ より、$v(x) \equiv 0$ (恒等的に零)

(II) $\lambda > 0$ のとき
$v''(x) - (\sqrt{\lambda})^2 v(x) = 0$ を解くと、$v(x) = c_1e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$ を得る。
よって、$v(0) = c_1 + c_2 = 0, v(\pi) = c_1e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$ すなわち、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

左辺の行列の行列式は $e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi} = e^{-\sqrt{\lambda}\pi}(1 - e^{2\sqrt{\lambda}\pi})$ となるが、$\lambda > 0$ であるので、この値は 0 になることはない。よって逆行列をもつから、$c_1 = c_2 = 0$ が分かる。よって、$v(x) \equiv 0$ (恒等的に零) となる。

(Ⅲ) $\lambda < 0$ のとき
$v''(x) - (\sqrt{-\lambda})^2 v(x) = 0$ を解くと、

$$v(x) = c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$$

を得る。よって、$v(0) = c_1 = 0, v(\pi) = c_2 \sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$ より、$\sin\sqrt{-\lambda}\pi \neq 0$ ならば、$c_1 = c_2 = 0$ であるから、$v(x) \equiv 0$ となる。

ここで、$\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$ ならば、c_2 は必ずしも 0 である必要はなくなり、このとき、非自明解 (恒等的に零でない解) $v(x) = c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$ を得る。よって、$\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$ 、すなわち $\sqrt{-\lambda}$ が整数であることが条件となる。

以上これら (**I**)〜(Ⅲ) をまとめると、$v(x)$ が非自明解であるための λ の条件は、n を整数としたとき、$\lambda = -n^2$ であり、このとき次の非自明解を持つ。

$$v(x) = c\sin nx \quad (\text{cは任意定数、nは整数})$$

これから、先ほどの節で明らかになった熱方程式 (熱伝導方程式) に初期条件 $u(x,0) = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$ と境界条件 $u(a,t) = u(b,t) = 0 \quad (t > 0)$ を加えた初期値境界値問題を当時のフーリエの方法に従い解いていく。

ここで、$f(a) = f(b) = 0$ と仮定し、$y = \pi\dfrac{x-a}{b-a},\quad \gamma = \kappa\left(\dfrac{\pi}{b-a}\right)^2 t$ と変数変換し、$\tilde{u}(y,\gamma) = u(x,t), \tilde{f}(y) = f(x)$ とおいて、問題を書きなおし、そして、改めて、(y,γ) を (x,t) に、$\tilde{u}, \tilde{f}$ を u, f に書き直すと、次の初期値境界値問題に書きなおすことができる。

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (0 < x < \pi, t > 0) \quad (\text{支配方程式}) \\ u(x,0) = f(x) & (0 \leq x \leq \pi) \quad (\text{初期条件}) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & (t \geq 0) \quad (\text{境界条件}) \end{cases}$$

これを変数分離法 (フーリエの方法) で解く。$u(x,t) = v(x)w(t)$ とおくと、$u_t = vw', u_{xx} = v''w$ より、$\dfrac{w'(t)}{w(t)} = \dfrac{v''(x)}{v(x)} = \lambda$ を得る。ここで、第 1 項目は t の関数、第 2 項目は x の関数であるから、これが等しくなるためには、定数しかない。よって、λ は適当な実数である。故に、$w(t) = Ce^{\lambda t}, v''(x) - \lambda v(x) = 0$ となる。

与式の境界条件より、$v(0) = v(\pi) = 0$ であるから、非自明解を持つためには補題より、$\lambda = -n^2$ (n は整数) でなければならず、$u(x,t) = ce^{-n^2 t}\sin nx \quad$ (c は任意の実数) を得る。定数 c や整数 n は任意だったので、いろいろな c や n について、足せるだけ足して、形式解

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-n^2 t}\sin nx$$

を考える。$n < 0$ のとき、$n = -m \quad (m = 1, 2, \cdots), b_m = c_m - c_{-m}$ とおけば、$n = 0$ のときは和に寄与しないので、

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}(c_m - c_{-m})e^{-m^2 t}\sin mx = \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-m^2 t}\sin mx$$

となる。これが与式の解となるためには、まず、初期条件 $u(x,0) = f(x)$ すなわち、

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx = f(x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

を満たす必要がある。両辺に $\sin nx$ を掛け、$(0,\pi)$ で積分すると、(項別積分可能なら、)

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \qquad (0 \leq x \leq \pi)$$

よって、関数系 $\sin mx \quad (m = 1, 2, \cdots)$ は閉区間 $[0, \pi]$ でそれぞれが互いに直交しているから、

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

を得る。u は境界条件は満たしているので、あとは支配方程式を満たしているか調べればよいが、これはここでは考えない。ここで問題とするのは、($f(0) = f(\pi) = 0$ を満たす) 任意の関数 $f(x)$ が b_n を先ほどのように定めれば、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

と表現できそうだ、ということである。

これが、フーリエが熱方程式を解く過程で発見した「(周期) 関数の三角関数による級数表現」というべき副産物である。