フーリエ級数の収束性について

(Convergence of Fourier series)

第1章　TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES, 三角フーリエ級数

1.1　Periodic Functions; 周期関数

定義域の任意の x **に対して、**

$$f(x+T) = f(x) \tag{1.1}$$

となるような正の実数定数 T **が存在する**場合、その関数は**周期関数**であると言う。（ここから、$x + T$ は x 同様 f の定義域に含まれていると分かる。なお、以後特に明記しない場合、任意の x とは「定義域内の任意の x 」を示すものとする。）そして、このような定数 T を関数 $f(x)$ の周期という。最も身近な周期関数には、 $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$、等が挙げられる。周期関数は物理学や工学における問題への数学的アプローチの手段として多く用いられる。二つの周期 T の周期関数の和、差、積、商が同様に周期Ｔの関数となることは明らかである。任意の閉区間 $a \le x \le a+T$ 上の周期関数 $y = f(x)$ のグラフを描くと、その閉区間 $a \le x \le a+T$ 上の $f(x)$ に対応するグラフの周期的な繰り返しによって、 $f(x)$ のグラフ全体を描くことができる。(次の図参照)

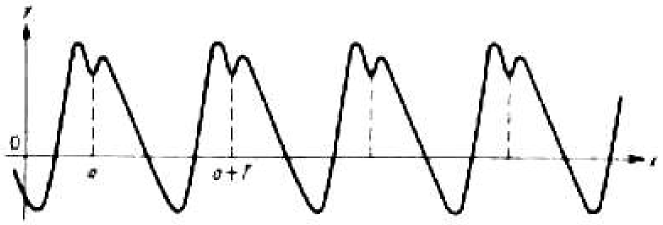


FIGURE 1

T が関数 $f(x)$ の周期である場合、 $2T, 3T, 4T, \cdots$ もまた同様に周期である。このことは、その周期関数のグラフを調べる（見る）、もしくは、(1.1) の定義を繰り返すことによって得られる連続した等式から即座に分かる。（次の式参照）

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \cdots\cdots$$

※ 1 なおこのことから、周期関数は $f(x) = f(x-T) = f(x-2T) = f(x-3T) = \cdots\cdots$ も満たすことが分かる。

以上のことから、T が周期である場合、kT も周期であり (なお、k は任意の正の整数である)、このことは言い換えれば、周期は存在しても、ただそれは一意ではなく、無数に存在すると言える。

次に、周期 T の任意の周期関数 $f(x)$ について以下の性質を示す。: $f(x)$ **が長さ** T **の任意の区間で積分可能であるならば、**$f(x)$ **は他の同じ長さの任意の区間で積分可能であり、かつ、その積分の**

値も等しい。つまり、

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx \qquad (a, b \text{ は任意の数}) \tag{1.2}$$

実際これは、(1.2) のそれぞれの積分値が $y = f(x)$ のグラフを表す曲線と x 軸及び、それぞれの積分区間の両端点を x 座標とする x 軸に垂直な直線で囲まれた領域の面積に等しい。(なお、 x 軸の上側にある領域は正とみなし、 x 軸の下側にある領域は負であるとみなす。) 今回、 $f(x)$ の周期性から、二つの積分によって表わされた領域の面積は同じであると言える。(次の図参照)

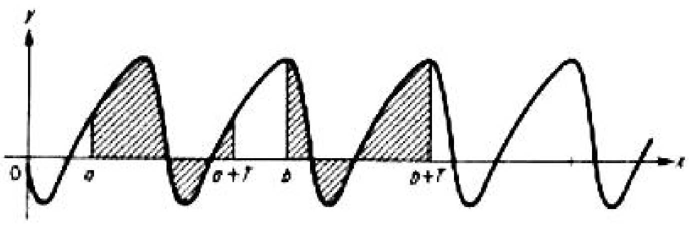


FIGURE 2

1.2 Harmonics, 高調波

Harmonic(高調波、倍音):周波数 (振動数) が f である任意の周期波形をフーリエ級数に展開すると、基本周波数 の整数倍の正弦波成分に分解できるが、このとき基本周波数以外の正弦波を総称して高調波と呼び、基本周波数の波を基本波という。

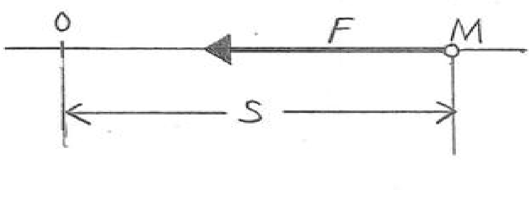
最も単純な周期関数で、応用上最も重要なはたらきをするものの一つとして、

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) \qquad A, \omega, \varphi \text{ は定数}$$

が挙げられる。この関数は振幅 (amplitude) $|A|$、角周波数 (角振動数) (angular frequency) ω 、(初期) 位相 (initial phase) φ の高調波と呼ばれる。このような高調波の周期は $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ であり (上の 3 つによる)、任意の定義域内の x に対して、

$$A\sin\left[\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = A\sin[(\omega x + \varphi) + 2\pi] = A\sin(\omega x + \varphi)$$

という式が成り立つ。振幅 (amplitude)、(角) 振動数 ((角) 周波数)(angular frequency)、(初期) 位相 (initial phase) といった用語は、最も単純な種類の振動、単振動に関わる力学の問題から生まれた言葉である。(次の図参照)



単振動：質量 m の動点 M が固定された原点 O からの距離に比例して、O に向かって働く復元力 F の作用により直線上を動くと仮定する。このとき s を M が固定原点の右側にある場合は正、逆に M が固定原点の左側にある場合は負であるとすると、言い換えれば、数直線に正常に正の向きを割り当てるとすると、復元力 F は $F = -ks$ と表わせる。(k は正の比例定数)

上のことを数式で表わすと、

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ks \text{ すなわち、} \frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$$

ここでの ω は、$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ を満たすような $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である。この微分方程式の解が $s = A\sin(\omega t + \varphi)$ 、(A, φ は定数) であることは、初期時刻 $t = 0$ における動点 M の位置と速度が分かれば計算により容易に確認できる。

※ $y(x)$ の二階微分に $-y(x)$ が出てくる関数は $\cos\omega t, \sin\omega t$ ただ、これを定数倍し、足し合わせたものもその運動方程式を満たす。よってその一般解は

$$C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \qquad (\, C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

この関数は高調波であり、実際、周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (変数は時間 t となっているが x を表す) の周期関数である。そういうわけで、復元力 F の作用のもとで、点 M は振動運動を行う。

振幅 (amplitude) $|\,A\,|$ は固定原点 O からの点 M の最大偏差（平均値からのずれの最大値、微分係数 0 の地点）であり、$\dfrac{1}{T}$ という量は 2π を含む区間単位当たりに繰り返される振動の数である。(例えば、秒) このことが、(角) 振動数、((角) 周波数)(angular) frequency) という言葉の意味の由来である。量 φ は初期段階 (変数が $t = 0$ (または $x = 0$) の時の) 値であり、グラフにおける始点のスタート地点を決定するものであり、変数 $t = 0$ の時は $s_0 = \sin\varphi$ という関数が得られる。

ここから、曲線 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ の概観を見ていく。$\omega > 0$ であると仮定する。そうすると、$A\sin(-\omega x + \varphi)$ は単純に $-A\sin(\omega x - \varphi)$ と単純に置き換えることができる。最も単純な例だと $A = 1, \omega = 1, \varphi = 0$ の場合である。このとき、最も一般的な正弦曲線 $y = \sin x$ のグラフが得られる。(figure4(a) 参照) 同様にして、$A = 1, \omega = 1, \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ のとき、余弦曲線 $y = \cos x$ のグラフが得られる。なおそのグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸の左方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動させたグラフである。

次に高調波 (周期関数) $y = \sin\omega x$ を考える。$\omega x = z$ とおくことによって、普通の正弦曲線 $y = \sin x$ を得ることができる。このことを考えると、 $y = \sin\omega x$ のグラフは正弦曲線 $y = \sin x$ のグラフを変形させることで描くことができると分かる。この変形はもし、 $\omega > 1$ ならば、$y = \sin x$ のグラフを x 軸の方向に $\dfrac{1}{\omega}$ 倍に均一に縮小させるというものであり、$(0 <)\omega < 1$ ならば、$y = \sin x$ のグラフを x 軸の方向に $\dfrac{1}{\omega}$ 倍に均一に拡張させるというものである。figure4(b) は周期 $T = \dfrac{2\pi}{3}$ の高調波 $y = \sin 3x$ を表している。

これから、次に高調波 (周期周波) $y = sin(\omega x + \varphi)$ について考える。$\omega x + \varphi = \omega z$ とおくと、$x = z - \frac{\varphi}{\omega}$ のグラフについては既習済みであるので、それに従って考えると、$y = \sin(\omega x + \varphi)$ のグラフは $y = \sin\omega x$ のグラフを $-\dfrac{\varphi}{\omega}$ だけ x 軸の正の方向に平行移動したものである。figure4(c) は周

期 $\dfrac{2\pi}{3}$ 、初期位相 $\dfrac{\pi}{3}$ の高調波 $y = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を表わしている。最後に、高調波 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ のグラフは $y = \sin(\omega x + \varphi)$ のグラフのすべての座標を A 倍することで得られることができることを言及しておく。figure4(d) は高調波 $y = 2\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を表わしている。

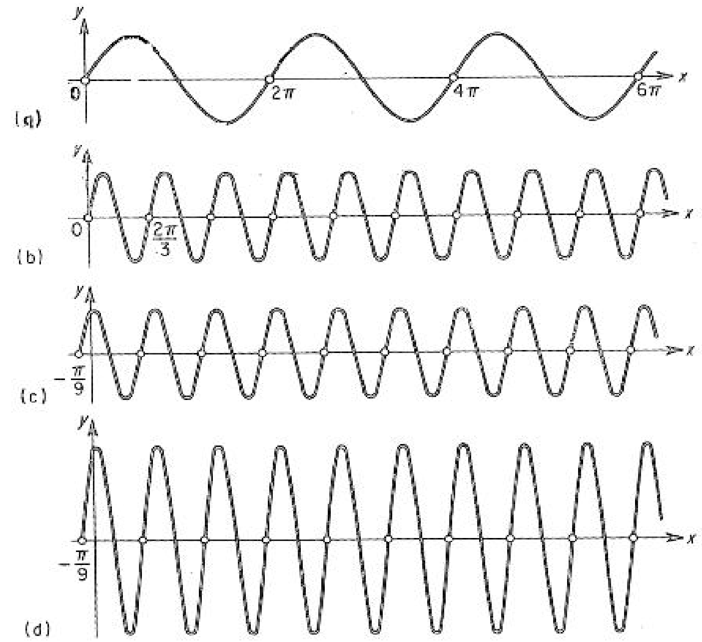


FIGURE 4

これらの結果は以下のようにまとめることができる。: **高調波 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ のグラフは、一般的な正弦曲線 $y = \sin x$ のグラフを座標軸に沿って縮小、（または拡張）し、 x 軸方向にいくらか平行移動させたものである。**

三角関数の加法定理から、$A\sin(\omega x+\varphi) = A(\cos\omega x\sin\varphi+\sin\omega x\cos\varphi)$ と記述することができる。よってここで、

$$a = A\sin\varphi, b = A\cos\varphi \tag{2.1}$$

とおくと、すべての高調波が次の形式で表わせると分かる。

$$a\cos\omega x + b\sin\omega x \tag{2.2}$$

逆に言えば、(2,2) の形のすべての関数は高調波であると言うことができる。このことを証明するのには $a = A\sin\varphi, b = A\cos\varphi \cdots\cdots (2.1)$ を A または B について解けば十分である。実際解くと、$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \sin\varphi = \dfrac{a}{A} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos\varphi = \dfrac{b}{A} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ であり、これらの結果から簡単に φ が分かる。なお、次から、$a\cos\omega x + b\sin\omega x \cdots\cdots (2,2)$ の形式で高調波を記述するものとする。例えば、Figure4(d) で示された高調波をこの形式で表わすと、

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x$$

この形式だと、周期 T を暗示的に示すことができ都合が良い。周期 T を $T = 2L$ とおいた場合、$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ であるから、

$$\omega = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$$

であり、このために、周期 $T = 2L$ の高調波は

$$a\cos\frac{\pi x}{L} + b\sin\frac{\pi x}{L} \tag{2.3}$$

と表わすことができる

1.3 Trigonometric Polynomials and Series 三角多項式、三角無限級数

周期 $T = 2L$（長さが $2L$ の区間）を考え、振動数が $\omega_k = \dfrac{\pi k}{L}$ 、周期が $T_k = \dfrac{2\pi}{\omega_k} = \dfrac{2L}{k}$ の高調波

$$a_k\cos\frac{\pi kx}{L} + b_k\sin\frac{\pi kx}{L} \tag{3.1}$$

について考える。 $T = 2L = kT_k$ であり、周期の整数倍もまた同様に周期であることから、$T = 2L$ という数もまた同時に高調波 (3,1) で表わされるすべての関数の周期である。(第 1 節参照) したがって、それぞれの部分和

$$s_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{L} + b_k\sin\frac{\pi kx}{L}\right) \qquad (A \text{ は定数})$$

は周期 $2L$ の周期関数の和であるから周期 $2L$ の関数である。(ここで、A という定数が足されているが、この式は周期性をちゃんと満たしている。実際、任意の数が周期となりうるがために、この定数は関数の一部と考えることができる。) なお、この関数 $s_n(x)$ のことを**位数 n の三角多項式**と呼ぶ。

これはいくつかの様々な高調波の和であるにもかかわらず、一般に単純な高調波よりもはるかに複雑な性質をもつ周期関数を表わす。適切な定数 A、a_1、b_1、a_2、$b_2 \cdots\cdots$ を選択することにより、滑らかとは言い難いが、対称的な周期関数のグラフを持つ関数 $y = s_n(x)$ を決定することができる。例えば、次の図は三角多項式 $y = \sin x + \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{4}\sin 3x$ 　を表している。

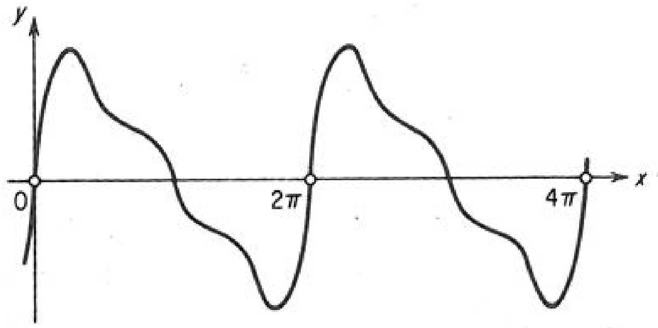


FIGURE 5

また、無限三角級数

$$A + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{L} + b_k\sin\frac{\pi kx}{L}\right) \qquad (A \text{ は定数})$$

は周期 $2L$ の周期関数を表わす。このような三角無限級数の和で表される関数の性質には様々なものがある。

以上これらのことから、自然と次の疑問が起こる。それは「周期 $2L$ の任意の (周期) 関数が三角級数の和として表されうるのか」という疑問である。そのような表現が実際には非常に広い範囲の関数で可能であるということをわれわれはのちに確認することになる。

なお、以後当分の間、 $f(x)$ はこの類に属すると仮定する。これは $f(x)$ が周期関数の和として、言い換えれば、かなり単純な構造の関数の和として、展開されるということである。(三角関数は相互関係の式も多く、また 2 回微分すると、符号は変わるがもとにもどり計算しやすい。) ここでの関数 $y = f(x)$ のグラフは単純な構造の高調波のグラフを「重ね合わせた」ものであると言える。

以上のことから、力学的解釈を与えると、複雑な振動の動きを表す $f(x)$ は個々のとりわけ単純な振動の和として与えられるということになる。しかしながら、三角級数（展開）が振動現象のみに適用されるということを誰も想像しないはずだ。このことは決して事実ではない。（例えば、フーリエでは不連続な周期関数を扱うこともある。）実際、三角級数 (展開) という概念はまったく異なった性質の現象を研究するのに非常に役立つものである。さらに、もし、

$$f(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi k x}{L} + b_k \sin\frac{\pi k x}{L}\right) \qquad (A \text{ は定数}) \tag{3.2}$$

のとき、$\dfrac{\pi x}{L} = t$ または、$\dfrac{tL}{\pi} = x$ と置くと、

$$\varphi(t) = f\left(\frac{tL}{\pi}\right) = A + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{3.3}$$

と表される。(なお、この形で表わされる周期関数はすべて周期の一つに 2π をもつ。) このことは、周期 $2L$ の関数 $f(x)$ が (3,2) のように展開されるなら、関数 $\varphi(t) = f(\frac{tL}{\pi})$ は周期に 2π をもち、(3,3) のように展開されることを意味する。また明らかにその逆も然りであり、周期 2π の関数 $\varphi(t)$ が (3,3) のように展開されるなら、関数 $f(x) = f(\dfrac{\pi x}{L})$ は周期に $2L$ をもち、(3,2) のように展開できる。以上のことから、「「標準的な」周期 2π の (周期) 関数が三角級数で展開できるか」という疑問を解決する方法が分かれば事足りると分かる。さらに言えば、この場合、フーリエ級数はより単純な形で表わせる。それ故に (3,3) の形の級数の理論を構築すべきであり、その最終的な結果は結局は一般的な (3,2) の形の級数の場合のときに一般化されることになる。

1.4 A More Precise Terminology. Integrability. Seires of Functions, より厳密な用語、可積分 (積分可能)、関数項級数

これから、より厳密な用語を導入するとともに、微積分 (法) のいくつかの事柄を思い出す。**「 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で積分可能であるというとき、それは積分**

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$

が初等的な意味で存在する」 ことをいう。したがって以後取り扱う積分可能な関数 $f(x)$ は連続であるか、閉区間 $[a, b]$ における不連続点の数は有限個であるとする。なお、このときその関数は有界でない場合もある。(不連続点の反対側が $\infty, -\infty$ のとき (発散しているとき) もある。)

積分の性質を考えた際に、**「ある関数 $f(x)$ の持つ不連続点の数が有限個であるとして、積分**

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

が存在するならば、積分 $\int_a^b f(x)dx$ **も存在する」**というものが出てくる。(なお、その逆は必ずしも成り立たない。)

証明　$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で絶対積分可能、$a_1,\cdots\cdots,a_n$ を $f(x)$ の不連続点とする。各 a_i に関して、

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_i>0\quad s.t.\quad |\alpha-a_i|<\delta_i\Longrightarrow\left|\int_{a_i}^{\alpha}|f(x)|\,dx\right|<\varepsilon$$

(ただし、$\alpha\in[a,b],\quad a\le\alpha\le b,\quad a_i<\alpha,\quad \alpha$で $f(x)$ は連続)

ところで、

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_i>0\quad s.t.\quad |\alpha-a_i|<\delta_i\Longrightarrow\left|\int_{a_i}^{\alpha}f(x)dx\right|\le\left|\int_{a_i}^{\alpha}|f(x)|\,dx\right|<\varepsilon$$

この式は、$f(x)$ の不連続点のみにおける積分を限りなく 0 に近づけられる (0 でおさえられることを示す。) ことを指している。このことは、命題の**不連続点の数が高々有限個であれば、絶対積分可能ならば、積分可能であること**を示す。よって、命題は成り立つ。

参考　不連続点を含む積分は広義積分を次のように定義する。

$$\lim_{t\to\beta+0}\int_t^{\alpha}f(x)dx=\int_{\beta}^{\alpha}f(x)dx$$

(ただし、この場合$\alpha\in[a,b],\quad a\le\alpha\le b,\beta<t\le\alpha,\quad \alpha$では $f(x)$ は連続,βで $f(x)$ は不連続)

$\int_a^b|f(x)|\,dx$ **が存在するとき、関数** $f(x)$ **は「絶対積分可能」である**という。また、もし $f(x)$ **が絶対積分可能で** $\varphi(x)$ **が有界な積分可能な関数であるならば、その積** $f(x)\varphi(x)$ **は絶対積分可能である。**

補題　f **を閉区間** $[a,b]$ **で有界な積分可能な関数とする。このとき、**$|f(x)|$ **も積分可能で**

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$$

である。

証明　これを示すには、$|f(x)|$ が積分可能であることを言えば十分である。

f が積分可能なことから、

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0,s.t.\,|\Delta|\le\delta_\varepsilon\Longrightarrow 0\le S_\Delta-s_\Delta=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$$

※なお、

$$
\begin{aligned}
&M_i = \max_{x_{i-1} \le \xi \le x_i} f(\xi) = f(\overline{\xi_i}),\\
&m_i = \min_{x_{i-1} \le \xi \le x_i} f(\xi) = f(\underline{\xi_i}),\\
&\Delta = x_i - x_{i-1}\\
&\quad (i = 1, 2, \cdots, n)\\
&S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})\\
&s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{gathered}
\bar{M_i} = \sup |\, f([x_{i-1}, x_i])\,|, \bar{m_i} = \inf |\, f([x_{i-1}, x_i])\,|\\
\bar{S_\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M_i}(x_i - x_{i-1}), \bar{s_\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \bar{m_i}(x_i - x_{i-1})
\end{gathered}
$$

とおく。

$$
\begin{gathered}
\bar{M_i} - \bar{m_i} = M_i - m_i \quad (m_i \ge 0), \bar{M_i} - \bar{m_i} = -m_i + M_i \quad (M_i \le 0)\\
\bar{M_i} - \bar{m_i} \le \bar{M_i} - \max(M_i, -m_i) \le M_i - m_i \quad (M_i \ge 0, m_i \le 0)
\end{gathered}
$$

より、常に $\bar{M_i} - \bar{m_i} \le M_i - m_i$ である。

したがって、

$$
\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, s.t. \quad |\,\Delta\,| \le \delta_\varepsilon \Longrightarrow 0 \le \bar{S_\Delta} - \bar{s_\Delta} &= \sum_{i=1}^{n} (\bar{M_i} - \bar{m_i})(x_i - x_{i-1})\\
&\le \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

これは、$|\,f(x)\,|$ が積分可能であることを表わしている。

よって、不等式 $\pm f(x) \le |\,f(x)\,|$ より、$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$ が導かれる。

本題の命題の証明　先ほどの定理から、関数 f(x) が閉区間 $[a, b]$ で絶対積分可能ならば、

$$
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i > 0 \quad s.t. \quad |\,\alpha - a_i\,| < \delta_i \Longrightarrow \left|\int_{a_i}^{\alpha} |\,f(x)\,|\,dx\right| < \varepsilon_1
$$

$\varphi(x)$ が $[a, b]$ で有界な積分可能な関数ならば、先ほどの補題より、$|\,\varphi(x)\,|$ も積分可能で

$$
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i > 0 \quad s.t. \quad |\,\alpha - a_i\,| < \delta_i \Longrightarrow \left|\int_{a_i}^{\alpha} \varphi(x)dx\right| \le \left|\int_{a_i}^{\alpha} |\,\varphi(x)\,|\,dx\right| < \varepsilon_2
$$

(なお、$a_1, \cdots\cdots, a_n$ は $f(x)$ の有限個の不連続点) よって、このとき、

$$
\begin{aligned}
&\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_i > 0 \quad s.t.\\
&\quad |\,\alpha - a_i\,| < \delta_i \Longrightarrow \left|\int_{a_i}^{\alpha} |\,f(x)\varphi(x)\,|\,dx\right| \le \left|\int_{a_i}^{\alpha} |\,f(x)\,|\,dx\right| \left|\int_{a_i}^{\alpha} |\,\varphi(x)\,|\,dx\right| < \varepsilon_1 \times \varepsilon_2
\end{aligned}
$$

よって、このとき、 $f(x)$ の不連続点が高々有限個ならば、それらの点における絶対積分の値を

限りなく 0 に近づけられる。(0 でおさえられることを示す。) 有界かつ、連続な関数が絶対積分可能なことは明らかなので、不連続な点が高々有限個であれば、命題が成り立つと分かる。

また部分積分法による次のルールが成立する。

$f(x)$ と $\varphi(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続、(ただし、有限個の点で微分不可能であると仮定する。このとき $f'(x)$ と $\varphi'(x)$ が絶対積分可能であるならば、

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = [f(x)\varphi(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx \tag{4.2}$$

が存在する。

(注　両方の導関数の絶対積分可能性について言及する必要はなく、どちらか一方の導関数の絶対積分可能性が示せればよい。しかしながら、前者のほうが以下の事柄を示すのに都合が良い。)

また別のおなじみの結果として、**関数 $f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots, f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で積分可能であるとき、それらの和もまた積分可能であり、**

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)dx \tag{4.3}$$

である。

これから、**無限関数項級数**

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots\cdots + f_n(x) + \cdots\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{4.4}$$

を考える。その部分和

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

が $n \to \infty$ ときの有限極限値

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

をもつとき、そのような級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は与えられた各 x の値に対して (それぞれ) 収束すると言う。$s(x)$ という量は**級数の和**と言われ、見て分かるように明らかに x の関数である。もし、級数が閉区間 $[a,b]$ 内の任意の x に対して収束するならば、その和 $s(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 全体で定義されていることになる。

次にこれから、公式 (4,3) $\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)dx$ が閉区間 $[a,b]$ 上で積分可能であり、収束する無限関数級数にまで拡張できるかどうか、(上の式は上限が n になっているので有界) 要は公式

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx \tag{4.5}$$

が成り立つかどうかということについて言及していく。言い換えれば無限関数項級数は項ごとに積分できるかということである。積分可能な関数、ましてや、連続な関数の級数が積分可能な和を必ずしも持っていないという理由からだけでも、この (4.5) の式はいつも成り立つとは限らないということが分かる。これと同様の問題がこの級数の項別微分可能性を考えるときにも起こる。そのため、今後はそれらの操作が適用される重要な関数項級数の類を選び出していくことにする。

級数

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots\cdots + f_n(x) + \cdots\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

の第 n 部分和を $s_n(x)$ とする。このとき任意の正の数 ε に対して、ある自然数 N が存在して閉区間 $[a, b]$ 内の任意の x に対して、不等式

$$\forall\varepsilon, \exists n, N \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad n \geq N \Longrightarrow | s(x) - s_n(x) | \leq \varepsilon$$

が成り立つ時、(4,4) の級数は「一様（に）収束する」という。 そういうわけで、級数の和 $s(x)$ のグラフ、及びその級数の部分和のグラフを考えるならば、一様収束は、十分大きな任意の添え字と閉区間 $[a, b]$ 内の任意の x に対して、$s(x)$ を表わす曲線と $s_n(x)$ を表わすような曲線が ε (ε は任意のあらかじめ割り当てられた数) より離れていない状態にあり、したがって、二つの曲線が一様に近い状態にある様子を表わしている。(次の図参照)

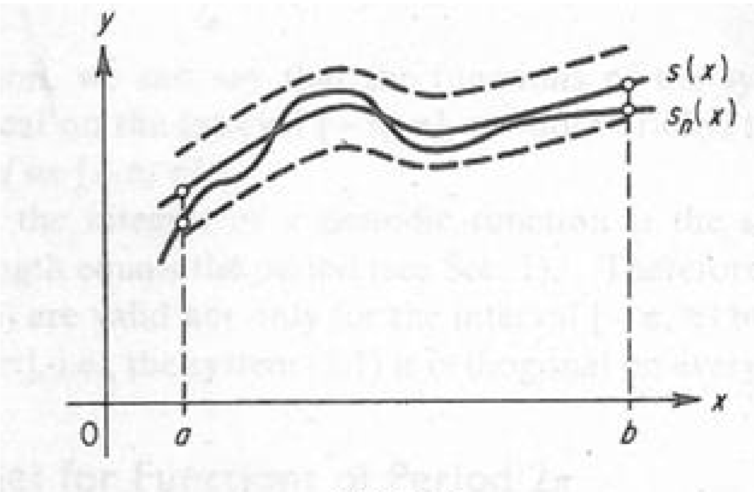


FIGURE 6

閉区間 $[a, b]$ 上で収束するすべての級数が同様に閉区間 $[a, b]$ で一様に収束するとは限らない。以下、関数項級数が一様に収束するかを確かめるのに非常に便利で簡単なテストを示す。

ワイエルシュトラスの M テスト

「もし、正の数の級数 $M_1 + M_2 + \cdots\cdots + M_k + \cdots\cdots$ が収束し、閉区間 $[a, b]$ 内の任意の x に対して、ある自然数 k 以降 $| f_k(x) | \leq M_k$ を満たすような M_k が存在するならば、そのとき無限関数項級数 (4.4) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で一様収束 (と絶対収束) する。」

証明　$\sum_{k=1}^{n} M_k$ が収束することにより、不等式

$$\forall \varepsilon, \exists m, n, N \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad m > n > N \Longrightarrow M_{n+1} + \cdots\cdots + M_m < \varepsilon$$

よって、任意の $x \in [a, b]$ に対して、

$$| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x) | \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

が成り立つ。故に n を

$$0 < \sum_{m=n+1}^{\infty} M_m < \varepsilon$$

が満足されるように選べば、x に無関係に

$$| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+k}(x) | \leq \varepsilon$$

が存在し、故に (4.4) の無限関数項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で一様収束 (と絶対収束) すると分かる。

以下、次の重要な定理が有効である。

定理 1　無限関数項級数 (4,4) の項が閉区間 $[a, b]$ で連続かつ、その級数が閉区間 $[a, b]$ で一様収束するならば

(a) その級数の和は連続である。

(b) その級数の和は項別積分可能である。

つまりは、公式 (4,5) が成り立つ。

証明　まず、(a) を示す。そのためにまず、(4.4) の級数の第 n 部分和

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

からなる関数列 $\{s_n(x)\}$ を考える。(4.4) の級数が閉区間 $[a, b]$ で連続で、かつ一様収束するとき関数列 $\{s_n(x)\}$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で、かつ一様収束するから、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad s.t \quad \forall x \in [a, b], n \geq N \Longrightarrow | s_n(x) - s(x) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

また、s_n は閉区間 $[a, b]$ で連続であるから、閉区間 $[a, b]$ 上の各点 c に対して、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad s.t \quad | x - c | < \delta \Longrightarrow | s_n(x) - s_n(c) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

このとき、

$$\begin{aligned} | s(x) - s(c) | &\leq | s(x) - s_N(x) | + | s_N(x) - s_N(c) | + | s_N(c) - s(c) | \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

つまり、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad s.t \quad |x - c| < \delta \Longrightarrow |s(x) - s(c)| < \varepsilon$$

したがって、$s(x)$、(一様収束した結果) も連続である。

次に (b) を示すためのある補題を示す。

補題、極限の順序交換　閉区間 $[a, b]$ で連続な関数列 $\{s_n(x)\}$ が $s(x)$ に一様収束するとする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x s_n(x)dx = \int_a^x s(x)dx$$

が成り立つ。つまり、

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x s_n(x)dx = \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right) dx$$

が成り立つ。しかも、これは一様収束である。

証明　定理 (a) より、 $s(x)$ は区間 $[a, b]$ で積分可能である。関数列 $\{s_n(x)\}$ は $s(x)$ に一様収束するから、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad s.t \quad \forall x \in [a, b], n \geq N \Longrightarrow |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

このとき、

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^x s_n(x)dx - \int_a^x s(x)dx \right| &= \left| \int_a^x (s_n(x) - s(x))\, dx \right| \\
&\leq \int_a^x |s_n(x) - s(x)|\, dx \\
&\leq \int_a^x \varepsilon dx \\
&\leq \int_a^b \varepsilon dx \\
&= (b - a)\varepsilon
\end{aligned}$$

したがって、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} s.t \quad \forall x \in [a, b], n \geq N \Longrightarrow \left| \int_a^x s_n(x)dx - \int_a^x s(x)dx \right| < (b - a)\varepsilon$$

$(b-a)$ は定数である。ε は任意であるから、$(b-a)\varepsilon$ も任意の値をとると考えてよい。したがって、

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x s_n(x)dx = \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right) dx$$

が成り立つ。しかも、これは一様収束である。

定理 1(b) の証明　上の補題より、関数列 $\{s_n(x)\}$ は (4.4) の級数の第 n 部分和

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

からなる関数列であるから任意の $x \in [a, b]$ に対して、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x f_k(x)dx = \int_a^x s(x)dx$$

すなわち、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x f_k(x)dx = \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx$$

つまりは、項別積分可能である。

定理 2　級数 (4,4) が収束し、その各項か微分可能であり、かつ、その級数

$$f_1{}'(x) + f_2{}'(x) + \cdots\cdots + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k{}'(x)$$

が閉区間 $[a, b]$ で一様収束するならば、そのときは

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k{}'(x)$$

つまりは、無限関数項級数 (4,4) が項別に微分可能である。

証明　各項を微分して作った級数を

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

とおくと、この級数は一様収束することが分かっているから、$f_n'(x)$ がすべて連続ならば、

$$\int_a^x F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}[f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a)$$

両端の辺を x で微分すると、

$$F(x) = f'(x)$$

すなわち、

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

よって、

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k{}'(x)$$

(注 4　たいてい、解析の過程ではその証明を単純化するために導関数もまた同様に連続であるとする。)

1.5 The Basic Trigonometric System,The Orthogonality of Sines and Cosines 基本的な三角関数系、sin,cos の直交性

これから基本的な三角関数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\cdots \tag{5.1}$$

の構造を見ていく。これらはすべて周期に 2π をもつ関数である。これからいくつか補助的な公式を証明していく。0 以外の任意の整数 n に対して、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0\\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0\end{aligned} \tag{5.2}$$

また、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \pi\\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} dx = \pi\end{aligned} \tag{5.3}$$

さらに有名な三角関数の公式

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\end{aligned}$$

を使うと、任意の整数 $n, m \quad (n \neq m)$ に対して、次の二つの式が成り立つことが分かる。

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x]dx = 0\\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x]dx = 0\end{aligned} \tag{5.4}$$

また、公式 $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ から、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x]dx = 0 \tag{5.5}$$

という式が任意の n, m について成り立つと分かる。これら (5.2)、(5.4)、(5,5) の結果から、閉区間 $[-\pi, \pi]$ での $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\cdots, \cos nx, \sin nx$ 等といった一般的な周期 2π の三角関数の任意の 2 つの異なる積の積分は (0 になって) 消えてなくなると分かる。

以後、**もし** $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$ **ならば、二つの関数** $\varphi(x)$ **と** $\psi(x)$ **は閉区間** $[a, b]$ **において直交関係にある**と呼ぶこととする。この定義に従うと、 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\cdots, \cos nx, \sin nx$ 等といった一般的な周期 2π の三角関数は閉区間 $[-\pi, \pi]$ においてそれぞれが互いに直交していると言える。知っての通り、周期的な関数の積分はその周期と同じ長さを持つ区間での積分に等しい。それゆえに、前述の (5.2)〜(5.5) の公式は閉区間 $[a, a+2\pi]$ 上においても有効なものであり、このことから $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\cdots, \cos nx, \sin nx$ 等といった一般的な周期 2π の三角関数は長さ 2π のすべての区間でそれぞれが互いに直交していると言える。

※幾何学において、直交という言葉は垂直を示す。二つの関数が直交しているという概念がそれら二つの関数のグラフが垂直になっているということに一致しているとは、それが正確に垂直を一般化した概念であるにもかかわらず、誰も考えようとしない。(第 2 章 10 節参照)

1.6 Fourier Series for Functions of Period 2π, 周期 2π の関数のフーリエ級数

周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{6.1}$$

と展開できると仮定する (なお以後、定数項は $\frac{a_0}{2}$ と略記するものとする)

そして、これから $f(x)$ に関する知識から係数 $a_0, a_k, b_k \quad (k = 1, 2, \cdots\cdots)$ をどのように決定していくかということについて考える。そのために、次のことを仮定する。級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cdots\cdots (6.1)$$

と後ほど書かれることになる右辺の級数が項別に積分可能であると仮定する。つまりは、これらの形で書かれるすべての級数に対して、「和の積分はその和を形成するそれぞれの関数の積分の値の和に等しい」と仮定する。(このことを示すと、関数 $f(x)$ もまた同様に積分可能となる。) この仮定の下に $-\pi$ から π までで積分すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx)$$

という式ができる。これに公式 (5.2) を用いると、二項目の和が 0 となり、すべて消え、結局、 右辺 $= \frac{a_0}{2} \times 2\pi$ となり、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 \tag{6.2}$$

となる。

次に、(6.1) の両辺に $\cos nx$ を掛け、先ほどと同様に $-\pi$ から π までで積分すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nxdx)$$

となり、(5.2) により、一項目が 0 となり、 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\cdots, \cos nx, \sin nx$ 等といった一般的な、周期に 2π をもつ三角関数は長さ 2π のすべての区間ででそれぞれが互いに直交していると言えるから、 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx$ 以外はすべて消え、計算結果は

$$右辺 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \pi$$

となり、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\pi \tag{6.3}$$

という結果が得られる。また、これと同様にして、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = b_n\pi \tag{6.4}$$

という結果が得られる。

よって、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \end{aligned} \tag{6.5}$$

よって、周期 2π の関数 $f(x)$ が積分可能であり、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

と (6.1) のように三角級数展開され、この級数と、この級数に $\cos nx, \sin nx$ を掛けて得られる級数が項別積分ならば、上に示した式で以後係数を決定するものとする。

これから、周期 2π の積分可能な関数 $f(x)$ があると仮定し、今後、そのような $f(x)$ を三角級数の和として表せないかどうか考えていく。

三角級数展開による表現がすべての周期 2π の積分可能な (周期) 関数 $f(x)$ において可能であり、その三角級数の各項に関してすべて項別積分可能ならば、ずっと考えてきたように、フーリエ係数 a_n, b_n が (6.5) の式によって与えられることになる。それ故に、その和がある関数 $f(x)$ になる三角級数を探す時においては、その係数が (6.5) によって与えられる級数をまず考え、そうしてできた級数が項別積分可能かなどといった性質を持っているかということを考えるのが妥当である。あとで分かるように、本当に多くの関数でこのことが言える。

公式 (6.5) によって出される係数

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \end{aligned}$$

は**関数 $f(x)$ のフーリエ係数**と呼ばれ、これら係数を持つ三角級数を**関数 $f(x)$ のフーリエ級数**という。ついでにこの公式 (6.5) は周期 2π の関数を積分したものを必ず含んでいることが分かる。したがって、積分区間 $[-\pi, \pi]$ は長さ 2π の別の区間に置き換えられ、公式 (6.5) と同様にして

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx \end{aligned} \tag{6.6}$$

という式ができる。

以上、これらの考察から、フーリエ級数に特別な注意を払うことは当然であると分かる。

フーリエ級数が事前に $f(x)$ に収束するかということは気にせずに、ある関数 $f(x)$ のフーリエ級数が決定されるとし、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cdots\cdots (6.1)$$

と記述するものとする。この表記法 (「ほぼ近似している」の意味) は右辺に書かれたフーリエ級数が、左辺の関数 $f(x)$ に一致するということのみを意味する。$\sim$ という記号は右辺の三角級数が収束し、その和が左辺の $f(x)$ に等しくなることを証明することが出来た場合に限り、「 = 」に置き換えることが出来る。以上これら考察の簡単な一連の流れは、以下のある定理に集約できる（かなり次の定理は便利である。)

定理 1　もし、周期 2π のある周期関数が実数全体の範囲で一様に収束する三角級数に展開されるならば、その級数は関数 $f(x)$ のフーリエ級数である。($f(x)$ の周期性によって、実数全体でなくとも $[-\pi,\pi]$ で一様収束することが言えればよい。)

証明　周期 2π の関数 $f(x)$ が (6.1) を満たすものとする。(なお、この級数は一様に収束するものとする。) 第 4 節の定理 1 によって、 $f(x)$ は連続であり、(6.1) の右辺の級数は項別積分可能であるとわかる。このことから、公式 (6.2) が与えられる。次に等式

$$f(x)\cos nxdx = \frac{a_0}{2}\cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx \cos nxdx + b_k \sin kx \cos nxdx) \tag{6.7}$$

を考え、右辺の級数が一様に収束することを証明する。$s_m(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ とおき、任意の正の数 ε を仮定する。もし、(6.1) の級数が一様に収束するならば、一様収束の定義から、すべての $m \geq N$ に対して、$| f(x) - s_m(x) |\leq \varepsilon$ を満たすような自然数 N が存在する。積 $s_m(x)\cos nx$ は明らかに級数 (6.7) の第 m 部分和である。そのため、このときすべての $m \geq N$ に対して、不等式

$$| f(x)\cos nx - s_m(x)\cos nx |=| f(x) - s_m(x) || cosnx |\leq \varepsilon$$

が成り立ち、これは (6.7) の級数の一様収束性を暗に示す。そして、その一様収束性から (6.7) の右辺の級数は項ごとに積分可能であり、その積分の結果は

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\pi \cdots\cdots (6.3)$$

となる。また同様にして、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = b_n\pi \cdots\cdots (6.3)$$

となる。以上のことから最終的に、その級数の係数に対して、公式

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nxdx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nxdx$$

がなりたち、$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cdots\cdots (6.1)$ が $f(x)$ のフーリエ級数であると言えることになる。

現代のフーリエ級数の理論は以下のより一般的な結果の証明を可能にさせる。なお、その証明はその複雑性からここでは与えることができない。

定理 2　絶対積分可能な周期 2π の関数 $f(x)$ が (一周期の範囲で) 高々有限個の (不連続) 点を除くすべての点において $f(x)$ に収束する三角級数に展開されるならば、その級数は関数 $f(x)$ のフーリエ級数である。

(この定理は、つい先ほど言った主張が間違ないことをはっきりさせており、その和として関数 $f(x)$ が与えられている三角級数を探すには、まずは $f(x)$ のフーリエ級数を考えるとよいと分かる。)

1.7 Fourier Series for Functions Defined on an Interval of Length 2π, 長さ 2π の区間で定義された関数のフーリエ級数

$f(x)$ が閉区間 $[-\pi,\pi]$ においてだけ定義されている時、関数 $f(x)$ を三角級数に展開するということろにかなりの頻度で応用上問題が起こりうる。(なお、この時 f(x) の周期性については全く何も言及されていないものとする。) しかし、それにもかかわらず、公式

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx$$

は閉区間 $[-\pi,\pi]$ だけを必要とするものなので、その問題は $f(x)$ のフーリエ級数を考えることを妨げない。さらに言えば、$f(x)$ は周期性によって $[-\pi,\pi]$ から実数軸 (x 軸) 全体に展開されうる。このことは $[-\pi,\pi]$ で $f(x)$ に一致し、さらに $f(x)$ のフーリエ級数と同一のフーリエ級数をもつ周期関数が存在することに通じる。実際は、もし、 $f(x)$ から作るそのフーリエ級数が $f(x)$ に収束すると分かれば、その関数 $f(x)$ は周期関数であるので、そのフーリエ級数の和は自動的に $[-\pi,\pi]$ から、実数軸全体に周期的拡張をした $f(x)$ になると分かる。そういうわけで、 $[-\pi,\pi]$ で定義されている関数のフーリエ級数について議論するかどうか、または、 x 軸 (実数軸) に沿って $f(x)$ を周期的拡張することで得られる関数のフーリエ級数について議論するかどうかは、さほど重要ではない。このことは、周期関数の個々の例のフーリエ級数がちゃんとその関数に収束するかどうかを確かめるテストを策定すれば、十分であることを示している。

閉区間 $[-\pi,\pi]$ で定義されている周期関数 $f(x)$ を実数 (x 軸) 全体で定義された関数に拡張するという問題に関連して、以下の説明が必要となる。

$f(-\pi) = f(\pi)$ ならば、この場合、 $f(x)$ は $[-\pi,\pi]$ で連続であるので、実数 (x 軸) 全体への拡張も連続なものとなっており、そのような拡張を行うのに何も問題はない。(figure(7a) 参照) しかし、もし $f(-\pi) \neq f(\pi)$ ならば、周期性から $f(-\pi)$ の値と $f(\pi)$ の値とが一致していないといけないので、$f(-\pi)$ 、もしくは $f(\pi)$ の値を変えない限り、そのような拡張は行うことが出来ない。この不具合は以下の二つの方法で何とかすることが出来る。

(1) $x = -\pi$ と $x = \pi$ における $f(x)$ の値を完全に考えないことによって、それらの点では定義されていない関数を考え、結果として、$x = (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$ の点では定義されていない関数 $f(x)$ の周期的な拡張を行う。(要は端点は考えないものとする。)

(2) $x = -\pi$ と $x = \pi$ における関数 $f(x)$ の値を適当に等しいものに修正する。

上記の両方の処理において、その関数 $f(x)$ の高々有限個の点における値しか変えること、ないしは、もはや、その有限個の点における関数 $f(x)$ の値を定義しないことが、さほど積分の値に、とりわけ、フーリエ係数を定義する (6,5) の積分の値には影響しないことから、上記のような操作を行う前と(行った後では)フーリエ係数の値はなんら変わることはない、という点が大切である。(なぜならば積分は高々不連続点があってもその値に影響しないからである。) そういうわけで、周期関数の一周期の端点における値が一致していようと、いなかろうと、そのフーリエ係数は何ら変わらないので、上に示したような修正をフーリエ級数を考える際に施しても、何ら問題はないと分かる。

ただ、 $f(-\pi) \neq f(\pi)$ かつ、 $f(x)$ が閉区間 $[-\pi, \pi]$ で連続であるならば、たとえ、 $x = -\pi$ や $x = \pi$ における関数の値を変えたとしても、その $f(x)$ の実数 (x 軸) 全体への周期的拡張をした関数は $x = (2k+1)\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,)$ を満たすようなすべての点において、不連続であると分かる。(figure(7b) 参照) そのため $[-\pi, \pi]$ で定義された $f(x)$ のフーリエ級数が $x = \pm\pi$ で収束したときの値を考える問題は、$f(-\pi) \neq f(\pi)$ のときの例外であり、これについてはのちに考える。

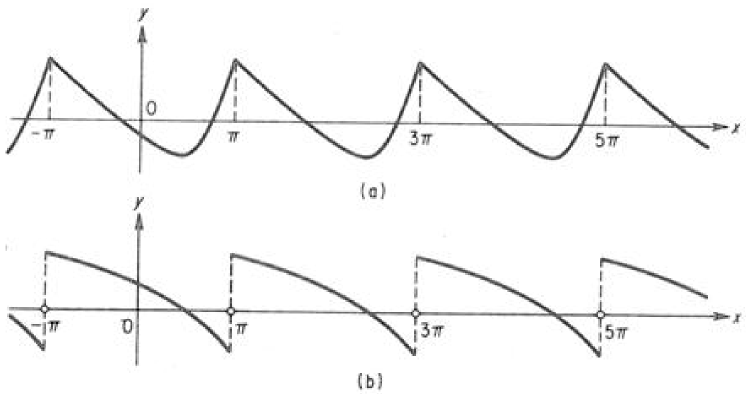


FIGURE 7

最後に、 $f(x)$ が長さ 2π の任意の閉区間 $[a, a+2\pi]$ において定義されており、三角級数に $f(x)$ が展開できるものとすると、先ほど同様、閉区間 $[a, a+2\pi]$ 定義されている関数のフーリエ級数について議論するかどうか、または、x 軸に沿って $f(x)$ を周期的拡張することで得られる関数のフーリエ級数について議論するかどうかは、さほど重要ではない、という結果にたどり着く。なぜなら、$f(a) \neq f(a+2\pi)$ であっても閉区間 $[a, a+2\pi]$ で連続ならば、 $x = a + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,)$ を満たすような点のみにおいて不連続な実数全体での展開を考えることが出来るからである。

1.8 Right-Hand and Left-Hand Limits Jump Discontinuities, 右極限、左極限、ジャンプ不連続 (第一種不連続)

これから、極限 (値) が存在し、有限であることを示す表記

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0 + 0)$$

を導入する。(なお、$x_0 = 0$ ならば、そのときはそれぞれ $f(-0), f(+0)$ とかく。) 前者を**点 x_0 における $f(x)$ の左極限**といい、後者を**点 x_0 における $f(x)$ の右極限**という。これらの極限値は連続な点では両方とも存在し (厳密な連続の定義による)、その連続な点では

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0) \tag{8.1}$$

となる。

x_0 が関数 $f(x)$ の不連続点ならば、右極限と左極限（もしくは二つのうちのどちらか）は場合によっては存在し、場合によっては存在しない。**もし、両方の極限が存在する場合、点 x_0 は第一種不連続、もしくは、ジャンプ不連続な点である**と言う。また、**これらの極限のうち少なくとも一つが存在しないならば、点 x_0 は第 2 種不連続な点である**という。なお今後は、ジャンプ不連続な点について焦点を当てていく。

点 x_0 を第一種不連続な点としたとき,

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) \tag{8.2}$$

という量を関数 $f(x)$ の点 x_0 におけるジャンプという。その例は以下の通りである。関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & (x < 1) \\ 0 & (x = 1) \\ \sqrt{x} & (x > 1) \end{cases} \tag{8.3}$$

と定義すると、そのグラフは下の図のように示される。関数 $f(x)$ の $x = 1$ における値は図のように小さな円で示されている。このとき、 $x = 1$ としたときの左極限と右極限は明らかに、$f(1-0) = -1, f(1+0) = 1$ である。(次の図参照)

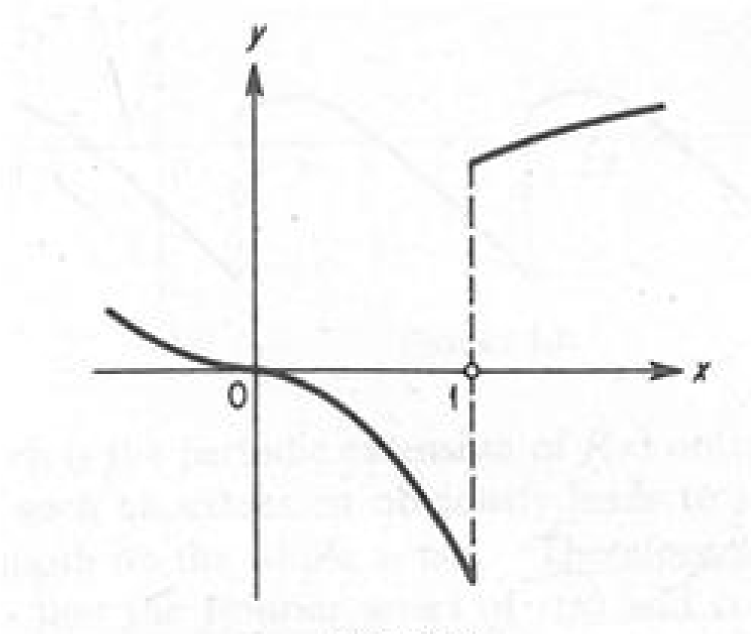


FIGURE 8

それ故に、 $x = 1$ における関数 $f(x)$ のジャンプは

$$\delta = f(1+0) - f(1-0) = 2$$

である。これはジャンプの直感的な概念から納得いくものであろう。

$f(x)$ が閉区間 $[-\pi, \pi]$ で連続な関数である場合、$f(-\pi) \neq f(\pi)$ であれば、 $f(x)$ の実数 (x 軸) 全体への周期的拡張には必ず figure(7b) のようにこの不連続点におけるジャンプという現象が伴われ、すべてのジャンプの値が $\delta = f(-\pi) - f(\pi)$ に等しくなる。

1.9 Smooth and Piecewise Smooth Functions, 滑らか、及び区分的に滑らかな関数

もし、ある関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続な導関数を持つならば、その関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で「滑らか」であるという。幾何学的に考えると、これは、 $y = f(x)$ の曲線の接線の向きが、途切れ

ることなく $y = f(x)$ の曲線に沿って動くように常に変わり続けることを意味している。そういうわけで、滑らかな関数のグラフは任意の「尖点」をもたない滑らかな曲線である。（微分不可能な点が定義域内にない）(次の図の (9a) 参照)

※ **(尖点 (corner)」曲線上の二つの異なる接線を持つような点、(微分不可能な点)**、ロシア語で「угловая　точка」)

また、**もし、関数 $f(x)$ とその導関数が、区間 $[a, b]$ で両方とも連続、もしくは、第一種不連続点 (ジャンプ不連続点) をもち、それが有限個ならば、その関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で区分的に滑らかである**という。区分的に滑らかな関数のグラフが連続な (一続きの) 曲線か、もしくは尖点 (ここで、その導関数はジャンプする) を有限個しか持たない不連続な曲線であると想像するのは、その定義から容易なことと分かる。区分的に滑らかな関数では、任意のいずれかの端点から、その反対側の不連続点 (端点) または、尖点 に近づくにつれて、その導関数は不連続点に第一種不連続点 (ジャンプ不連続点) しか持たないので、接線の向きはある一定の極限に近づく。

下の図の (9b) と (9c) はそれぞれ、連続で区分的に滑らかな関数のグラフ、不連続で区分的に滑らかな関数のグラフを表わしている。なお以後から、滑らかな関数は区分的滑らかな関数の特別な場合とみなすこととする。

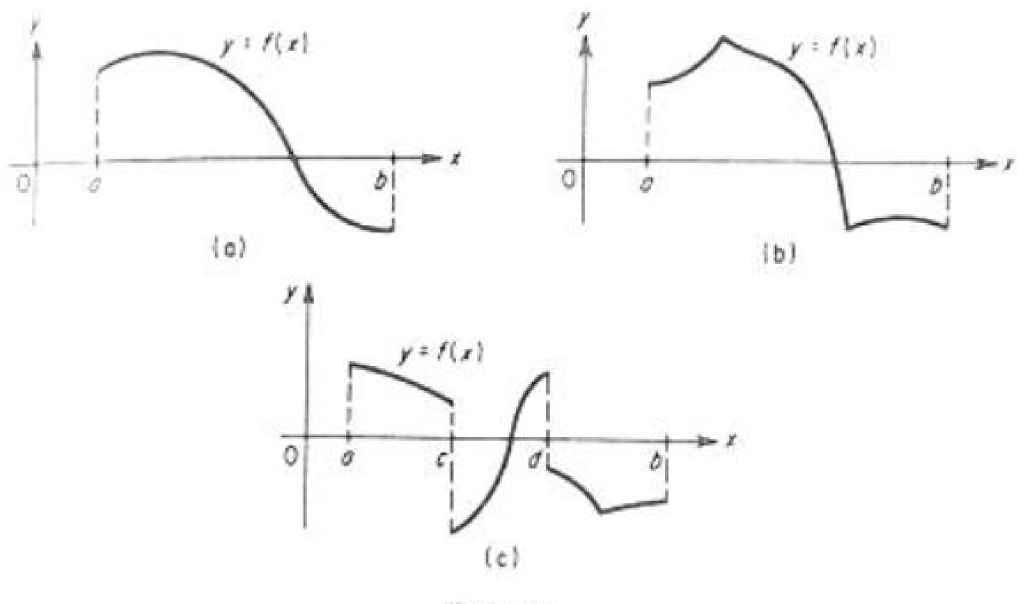


FIGURE 9

(x 軸) 実数全体で定義されている連続、または不連続な関数 $f(x)$ が、長さが有限のすべての区間で区分的に滑らかであるとき、その関数 $f(x)$ は区分的に滑らかであるという。とりわけ、この概念は周期関数に適用される。**すべての区間で区分的に滑らかな関数 $f(x)$ は (連続であるにせよ、不連続であるにせよ) 有界であり、尖点と不連続点 (これらすべての点では微分不可能) を除くすべての点において、有界な導関数を持つ。**

1.10 A Criterion for the Convergence of Fourier Series, フーリエ級数の収束判定条件

これからフーリエ級数が収束するかどうかを見分けるためのより便利な判定条件を紹介する。なおその証明は第 3 章ですることにする。

周期 2π の区分的に滑らかな (連続または、不連続) 関数 $f(x)$ のフーリエ級数はすべての x の値で収束する。その級数の和はすべての連続な点で $f(x)$ に等しく、すべての不連続な点で右側極限と左側極限の算術平均 (相加平均)、

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

に等しくなる。(次の図参照) さらにもし、 $f(x)$ がすべての点で連続ならば、その級数は絶対収束、一様収束をする。

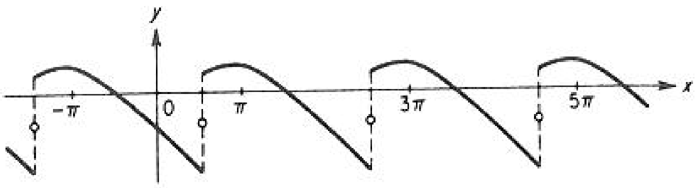


FIGURE 10

関数 $f(x)$ を閉区間 $[-\pi,\pi]$ だけで定義された閉区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかで、その終点で連続な関数であるとする。第 7 節で示したように $f(x)$ のフーリエ級数は、その $f(x)$ を実数 (x 軸) 全体に周期的拡張をした関数のフーリエ級数に一致する。この場合、そのような拡張は明らかに実数 (x 軸) 全体で区分的に滑らかな関数 f(x) を形成する。それ故に、先ほど示した判定条件はこの $f(x)$ のフーリエ級数がいずれの点においても収束することを示している。とりわけ、そのフーリエ級数は拡張する前のもとの閉区間 $[-\pi,\pi]$ で収束する。実際には開区間 $(-\pi,\pi)$ では、そのフーリエ級数は連続な点で $f(x)$ に収束し、不連続な点で $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ に収束することになる。さて、それでは、閉区間 $[-\pi,\pi]$ の端点ではどうなるか。端点では次の二つの場合がその可能性として考えられる。

(1) $f(-\pi)=f(\pi)$ のとき

このとき、周期的拡張は明らかに $x=\pm\pi$ の点で (また、すべての $x=(2k+1)\pi,\quad k=\pm0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$ の点でも) 連続な関数を形成する。それ故に先ほど示した収束判定条件によれば、そのフーリエ級数もまた閉区間 $[-\pi,\pi]$ の端点で $f(x)$ に収束することになる。

(2) $f(-\pi)\neq f(\pi)$ のとき

この時、周期的拡張は $x=\pm\pi$ の点で (また、すべての $x=(2k+1)\pi,\quad (k=\pm0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$ の点でも) 不連続な関数を形成する。このときその $f(x)$ を周期的に拡張した関数を $f_1(x)$ とすると、

$$f_1(-\pi-0)=f(\pi),\ f_1(-\pi+0)=f(-\pi)$$
$$f_1(\pi+0)=f(-\pi),\ f_1(\pi-0)=f(\pi)$$

という式が成り立つ。それ故に、 $x=-\pi, x=\pi$ では、そのフーリエ級数は

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{f_1(-\pi+0)+f_1(-\pi-0)}{2}\\ \dfrac{f_1(\pi+0)+f_1(\pi-0)}{2}\end{array}\right\}=\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$$

に収束することになる。(次の図参照)

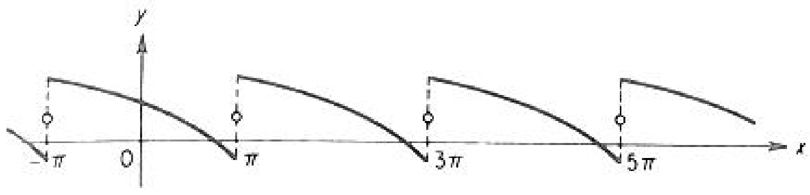


FIGURE 11

以上のことから、閉区間 $[-\pi,\pi]$ で定義され、$x=\pm\pi$ で連続な関数 $f(x)$ のフーリエ級数はもし $f(-\pi)=f(\pi)$ ならば、ちょうど他の連続な点でそうであるように、$x=\pm\pi$ の点でそれぞれ $f(-\pi), f(\pi)$ の値をとる。そして、これに対し、 $f(-\pi)\neq f(\pi)$ ならば、そのフーリエ級数は明らかに $x=\pm\pi$ の点で $f(x)$ に収束することが出来ず、このときは、閉区間 $[-\pi,\pi]$ ではなく、開区間 $(-\pi,\pi)$ における $f(x)$ のフーリエ級数への展開を考えることが意味のあることになる。また、 a を任意の数として $[a, a+2\pi]$ の閉区間で定義された関数のフーリエ級数にもこれと同様のことが言えることになる。

なお、この冒頭で示された収束判定条件を念頭においた場合、周期的な拡張を行った関数のグラフを書いた方が、フーリエ級数がそれぞれの区間の端点において見せる性質が即座に明らかになる。

1.11 Even and Odd Functions, 偶関数、奇関数

(x 軸) 実数軸全体、もしくはいくつかの区間のどちらかで定義された関数 $f(x)$ を仮定し、その関数 $f(x)$ が原点に関して対称であるとする。**もし、その関数 $f(x)$ がすべての x に対して**

$$f(-x)=f(x)$$

を満たすならば、 $f(x)$ は偶関数であるという。この定義は $y=f(x)$ の形のあらゆる週関数が y 軸に対して線対称になっていることを暗に示している。(次の図 (12a) 参照)

そのことから、積分の値を領域の面積として考えると、偶関数 $f(x)$ が閉区間 $[-L,L]$ で定義されており、その区間で積分可能ならば、その区間における積分は

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx \tag{11.1}$$

(L は $f(x)$ の定義域内の任意の数)

また、**もし、その関数 $f(x)$ がすべての x に対して**

$$f(-x)=-f(x)$$

を満たすならば、$f(x)$ **は奇関数である**という。とりわけ、奇関数では $f(-0) = -f(0)$ であることから、$f(0) = 0$ であることが重要である。偶関数に対し、奇関数のグラフは原点 O に関して点対称である。(下の図 (12b) 参照) そのことから、積分の値を領域の面積として考えると、$f(x)$ が閉区間 $[-L, L]$ で定義されており、その区間で積分可能ならば、その区間における $f(x)$ の積分は

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0 \tag{11.2}$$

となる。

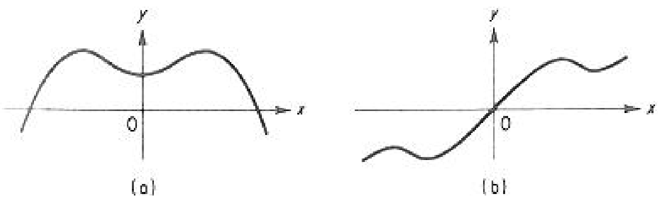


FIGURE 12

遇関数と奇関数の定義からは、次のある簡単なこれら二つの関数に対する性質が言える。

(a) 偶関数同士、または奇関数同士の積は偶関数であり、

(b) 奇関数と偶関数の積は奇関数である。

実際に、 $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ が偶関数であるとし、$f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ とすると、

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)\psi(x) = f(x)$$

であり、 $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ が奇関数であっても

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = [-\varphi(x)][-\psi(x)] = \varphi(x)\psi(x) = f(x)$$

となる。((a) の証明) 一方、 $\varphi(x)$ が偶関数で、 $\psi(x)$ が奇関数ならば、

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)[-\psi(x)] = -\varphi(x)\psi(x) = -f(x)$$

となり、このことは (b) を示す。

1.12 Cosine and Sine Series, フーリエ・コサイン級数、フーリエ・サイン級数

$f(x)$ を閉区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された偶関数、または、周期偶関数であるとする。$\cos nx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots.)$ は明らかに偶関数であり、先ほどの性質 (a)(偶関数同士、または奇関数同士の積は偶関数) から、関数 $f(x)\cos nx$ も同様に偶関数であると言える。これに対し、$\sin nx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots.)$ は明らかに奇関数であり、同様にして考えると、先ほどの性質 (b)(奇関数と偶関数の積は奇関数) から、関数 $f(x)\sin nx$ は奇関数である。そして、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \cdots\cdots (6.5)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \cdots\cdots (6.5)$$
$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx \cdots\cdots (11.1)$$
$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0 \cdots\cdots (11.2)$$

(11.1) の $f(x)$ は偶関数、(11.2) の $f(x)$ は奇関数

を使うと、偶関数 f(x) のフーリエ係数は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \end{aligned} \tag{12.1}$$

となる。それ故に、偶関数のフーリエ級数は cosine(余弦) のみを含む。つまりは

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

となる。なお、この係数 a_n は上の公式 (12.1) によって与えられる。(この形の級数を**フーリエ・コサイン級数、もしくは余弦級数**とも言う。)

次に $f(x)$ を閉区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された奇関数、または、周期奇関数であるとする。$\cos nx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots.)$ は明らかに偶関数であり、先ほどの性質 (b)(奇関数と偶関数の積は奇関数) から、関数 $f(x)\cos nx$ は奇関数であり、これに対し、$\sin nx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots.)$ は明らかに奇関数であり、先ほどの性質 (a) (偶関数同士、または奇関数同士の積は偶関数) から、関数 $f(x)\sin nx$ は偶関数であると言える。そして、同様に、(6.5),(11.1),(11.2) を使うと、奇関数 $f(x)$ のフーリエ係数は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \end{aligned} \tag{12.2}$$

それ故に、奇関数のフーリエ級数は sine (正弦) だけを含み、つまりは

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

となる。なお、この係数 b_n は上の公式 (12.2) によって与えられる。奇関数のフーリエ級数は sine (正弦) だけを含むので、 $x = -\pi, 0, \pi$ (また、一般には $x = k\pi$、(k は実数) の点では、それらの点における $f(x)$ の値に関わらず、 0 となる。(この形の級数を**フーリエ・サイン級数、もしくは正弦級数**とも言う。)

ここで、閉区間 $[0, \pi]$ で定義された絶対積分可能な関数 $f(x)$ をフーリエ・サイン級数、フーリエ・コサイン級数に展開するときに、$f(x)$ に周期的拡張を施すとその値はどうなるかということを考える。まずそのような $f(x)$ をフーリエ・コサイン級数に展開すると、次のことが言える。

閉区間 $[0, \pi]$ で定義されている関数 $f(x)$ を拡張したものが偶関数になるように $f(x)$ を閉区間 $[-\pi, 0]$ においても拡張するものとする。($f(x)$ を y 軸に対して線対称になるように拡張する。次の

図 (13a) 参照) そうすると先ほど考えてきたこと一体から、その拡張した関数のフーリエ係数は

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \\
b_n &= 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)
\end{aligned}
\tag{12.3}
$$

という閉区間 $[0, \pi]$ の $f(x)$ の値しか必要としていない式で出せること分かる。それ故に、フーリエ係数の計算のために、閉区間 $[0, \pi]$ で定義されている $f(x)$ を偶関数になるように閉区間 $[-\pi, 0]$ においても定義されているように拡張する必要は実際は全くないと分かる。

$f(x)$ をフーリエ・サイン級数に展開するときも先ほど同様、まずは閉区間 $[0, \pi]$ で定義されている関数 $f(x)$ を拡張したものが奇関数になるように $f(x)$ を閉区間 $[-\pi, 0]$ においても拡張するものとする。(次の図 (13b) 参照) そうするとき、奇関数の性質から、 $f(0) = 0$ とおくものとする。そして、もう一度先ほど考えてきたこと一体を $f(x)$ が奇関数になるように拡張したものに適用すると、そのフーリエ係数は

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

という閉区間 $[0, \pi]$ の $f(x)$ の値しか必要としていない式で出せることになる。それ故に、コサイン級数の時と同様に、フーリエ係数の計算のために、閉区間 $[0, \pi]$ で定義されている $f(x)$ を奇関数になるように閉区間 $[-\pi, 0]$ でも定義されているように拡張する必要は実際全くないと分かる。

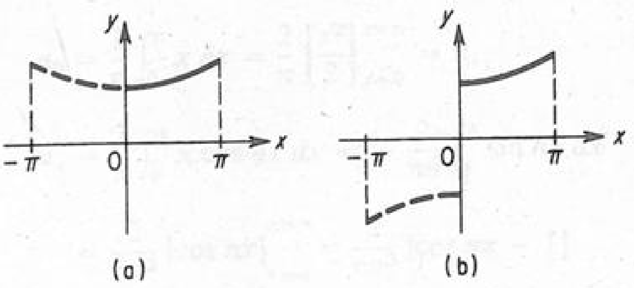


Figure 13

しかしながら、10 節の収束判定条件を使うときの間違いを避けるために、関数 $f(x)$ を (x 軸) 実数全体に周期的に拡張した関数のグラフのスケッチと同様に、関数 $f(x)$ のグラフと $f(x)$ が偶関数 (または奇関数) になるように閉区間 $[-\pi, 0]$ に拡張した関数のグラフをかくことが、いまだに推奨されている。そのスケッチは例の収束判定条件が適用されることになる「拡張された」関数の性質を調べるのに役立つことになる。

1.13 Examples of Expansions in Fourier Series, フーリエ級数展開の例

例 1

閉区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x) = x^2$ をフーリエ級数展開しろ。

$f(x)$ は偶関数であり、それを周期的に拡張した関数を $g(x)$ とすると、$g(x)$ のグラフは、次の図のようになる。

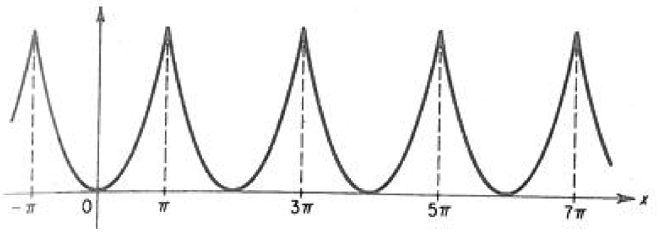


FIGURE 14

周期的に拡張した関数 $g(x)$ は連続であり、区分的に滑らかである。それ故に、10 節の収束判定条件により、そのフーリエ級数は $[-\pi, \pi]$ のすべての点において、 $f(x) = x^2$ に収束し、閉区間 $[-\pi, \pi]$ を除く範囲では周期的に拡張した関数 $g(x)$ に収束する。さらに言えば、その収束は絶対収束であり、かつ一様収束である。

よって、 $g(x)$ をフーリエ係数を求めると、$g(x)$ は偶関数なので、

$$b_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots,)$$

一方、

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \frac{2x}{n}\sin nx dx\right) \\
&= -\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x \sin nx dx \\
&= -\frac{4}{\pi n}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi -\frac{1}{n}\cos nx dx\right) \\
&= \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{4}{\pi n}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

よって、$g(x)$ は連続関数なので、

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{4}{k^2}\cos kx \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots\cdots\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\cdots\right)
\end{aligned}$$

それ故に、閉区間 $[-\pi, \pi]$ で x^2 が定義されていると、

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\cdots\right) \tag{13.1}$$

例 2

閉区間 $[-\pi,\pi]$ で定義された関数 $f(x)=|x|$ をフーリエ級数展開しろ。

$f(x)$ は偶関数であり、これを周期的に拡張した関数を $g(x)$ とすると、$g(x)$ のグラフは、次の図のようになる。

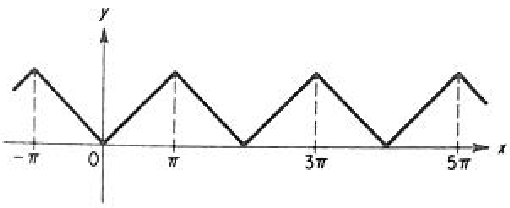


FIGURE 15

周期的に拡張した関数 $g(x)$ は連続であり、区分的に滑らかである。それ故に、10 節の収束判定条件により、そのフーリエ級数は $[-\pi,\pi]$ のすべての点において、 $f(x)=|x|$ に収束し、閉区間 $[-\pi,\pi]$ を除く範囲では周期的に拡張した関数 $g(x)$ に収束する。さらに言えば、その収束は絶対収束であり、一様収束である。

$x \geq 0$ のとき、 $|x|=x$ なので、積分区間が $[0,\pi]$ より、

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \pi$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx dx\right] \\
&= -\frac{2}{\pi n^2}\left[-\cos nx\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= -\frac{2}{\pi n^2}(-\cos n\pi + 1) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]
\end{aligned}$$

よって、 n が偶数のとき $a_n = 0$ であり、 n が奇数のとき $a_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}$

また $g(x)$ は偶関数なので、$b_n = 0$

よって以上のことから、閉区間 $[-\pi,\pi]$ で $|x|$ が定義されていると、

$$\begin{aligned}
|x| &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right]\cos kx \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left[(-1)^k - 1\right]\cos kx \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left[(-2\cos x) + \frac{-2\cos 3x}{3^2} + \frac{-2\cos 5x}{5^2} + \cdots\cdots\right] \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\cdots\right]
\end{aligned} \tag{13.2}$$

例 3

関数 $f(x) =|\sin x|$ をフーリエ級数展開しろ。

この関数はすべての x に対して定義されている連続で区分的に滑らかな偶関数である。そのグラフは次の図のようになる。

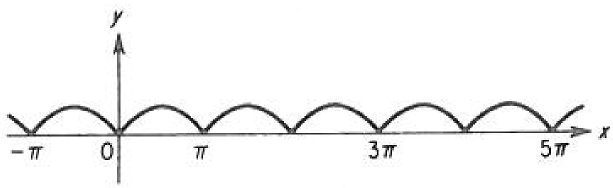


FIGURE 16

この関数 $f(x)$ は 10 節で示した収束判定条件を満たしており、故にそのフーリエ級数は絶対収束かつ一様収束をする級数である。よって、すべての点でそのフーリエ級数は $f(x) =|\sin x|$ に一致する。$0 \le x \le \pi$ のとき、$|\sin x|= \sin x$ なので、

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}[-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right] \\
&= -\frac{2(-1)^n + 1}{\pi(n^2-1)}
\end{aligned}$$

よって $n \neq 1, n = 1$ のいずれであろうと、

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0$$

さらに、$f(x)$ は偶関数なので、$b_n = 0$

それ故に、すべての点 x で

$$|\sin x|= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \cdots\cdots\right)$$

となる。

例 4

開区間 $(-\pi, \pi)$ で定義された関数 $f(x) = x$ をフーリエ級数展開しろ。

関数 $f(x)$ は奇関数である。次の図には、関数 $f(x)$ を周期的に拡張した関数が描かれている。

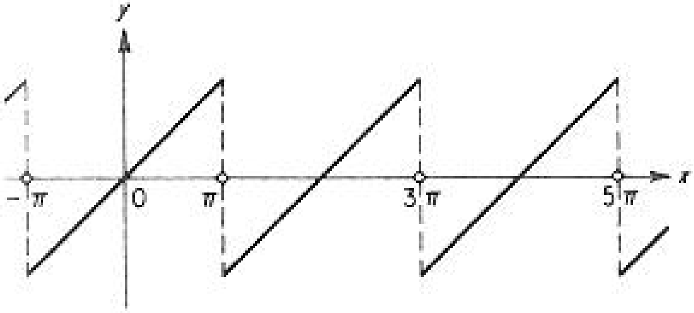


FIGURE 17

その周期的な拡張を行った関数は区分的に滑らかで、$x = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$ を満たす点に不連続点を持つ。よって、10 節で示した収束判定条件が適用されるので、$f(x)$ から作られるフーリエ級数は不連続点で 0 に収束するフーリエ級数となる。$f(x)$ を周期的に拡張した関数、及び $f(x)$ は奇関数であるから、

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= -\frac{2}{\pi n}[x \cos nx]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \cos nx dx \\ &= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

それ故に、開区間 $(-\pi, \pi)$ で定義された $f(x) = x$ は、

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\cdots\right) \tag{13.3}$$

となる。

例 5

開区間 $(0, \pi)$ で定義された関数 $f(x) = 1$ を周期的に拡張した関数のサイン級数を考えろ。

$f(x)$ を開区間 $(-\pi, 0)$ で拡張して、 $x = 0$ で不連続な奇関数を作る。そうして、作った関数を 2π ごとの周期で x 軸 (実数軸) 全体に拡張したものを $g(x)$ とすると、 $g(x)$ のグラフは次の図のようになる。

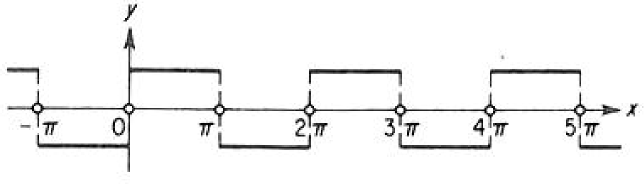


FIGURE 18

10 節の収束判定条件はこの拡張された関数に適用される。それ故にそのフーリエ級数は開区間 $(0, \pi)$ では $f(x)$ に収束し、その区間以外では、先ほどの図のように拡張された関数に収束する。な

お、そのフーリエ級数の和は不連続な点 $x = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$ で 0 (右極限と左極限の算術平均) に等しくなる。以上のことから、

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi n}[-\cos nx]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= \frac{2}{\pi n}[1 - (-1)^n]
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k}[1 - (-1)^k] \sin kx \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k} \sin kx
\end{aligned}
$$

よって、開区間 $(0, \pi)$ で定義された $f(x) = 1$ をサイン級数展開すると、

$$
\begin{aligned}
f(x) = 1 &= \frac{2}{\pi}\left(2\sin x + \frac{2\sin 3x}{3} + \cdots\cdots\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\cdots\right)
\end{aligned}
\tag{13.4}
$$

となる。

例 6

開区間 $(0, 2\pi)$ で定義された関数 $f(x) = x$ を周期的に拡張した関数をフーリエ級数展開しろ。

この例は、表面的には例 4 と類似しているが、 $f(x)$ を周期的に拡張した関数を作れば即座にその違いが明らかとなる。(次の図参照)

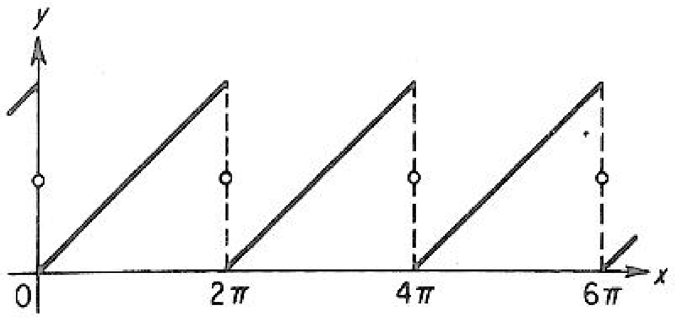


FIGURE 19

その拡張した関数を $g(x)$ とすると、$g(x)$ には 10 節の収束判定条件が適用される。不連続点では、そのフーリエ級数は ($g(x)$ の) 右極限と左極限との相加平均、つまりは、 π という値に収束する。この関数 $g(x)$ は奇関数でも偶関数でもない。よって、両方のフーリエ係数を調べると、

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2\pi} = 2\pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi n}[x\sin nx]_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\sin nx dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx \\
&= -\frac{1}{\pi n}[x\cos nx]_{x=0}^{x=2\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\cos nx dx = -\frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

よって、開区間 $(0, 2\pi)$ で $f(x) = \mathrm{x}$ と定義すると、

$$
x = \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\cdots\right) \tag{13.5}
$$

となる。

例 7

開区間 $(0, 2\pi)$ で定義された関数 $f(x) = x^2$ をフーリエ級数展開しろ。この例は例 1 と似ているが、 $f(x)$ を周期的に拡張した関数のグラフが明らかにその違いを示している。

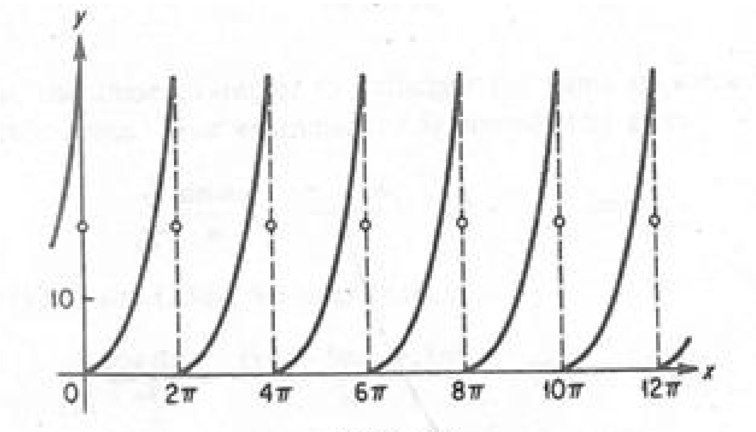


FIGURE 20

グラフから $f(x)$ に周期的拡張を施した関数は明らかに区分的に滑らかな関数である。よって、10 節の収束判定条件が適用され、不連続点では、そのフーリエ級数は拡張した関数の右極限と左極限の算術平均 (相加平均)、つまりは $2\pi^2$ に収束する。$f(x)$ 及び、これを周期的に拡張した関数は奇関数でも偶関数でもないので、そのフーリエ係数を調べると、

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{8\pi^2}{3} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx \\
&= \left[\frac{x^2 \sin nx}{\pi n}\right]_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} x \sin nx dx \\
&= -\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} x \sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi n^2}[x\cos nx]_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{4}{n^2} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\
&= -\frac{1}{\pi n}[x^2\cos nx]_{x=0}^{x=2\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx \\
&= -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi} \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n}
\end{aligned}
$$

よって、開区間 $(0, 2\pi)$ で定義された関数 $f(x) = x^2$ は

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{4\pi^2}{3} + 4\left(\cos x - \pi\sin x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\pi\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n} + \cdots\cdots\right) \\
&= \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}
\end{aligned}
\tag{13.6}
$$

となる。

例 8

開区間 $(-\pi, \pi)$ で定義された関数 $f(x) = Ax^2 + Bx + C \qquad (A, B, C,$ は定数$)$ をフーリエ級数展開しろ。

$f(x)$ のグラフは放物線である。周期的な拡張をすることで定数 A, B, C にしたがった連続なまたは不連続な関数を作ることができる。次の図は A, B, C にある定数をもった $f(x)$ を周期的に拡張した関数のグラフを表わしている。

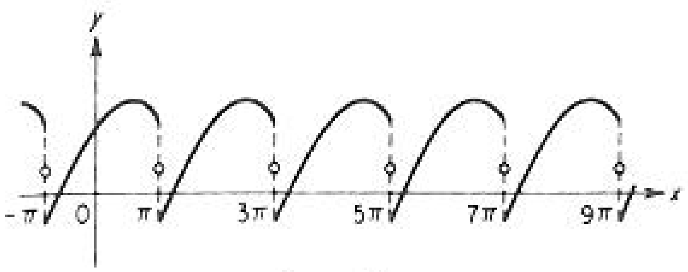


FIGURE 21

これまでの公式から、フーリエ係数を求めることができるが、その必要はなく、例 1、例 4 を利用して、その計算を省略できる。結果、開区間 $(-\pi, \pi)$ では、

$$
Ax^2 + Bx + C = \frac{A\pi^2}{3} + C + 4A\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} - 2B\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}
$$

となる。

(参考)

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \qquad (-\pi < x < \pi)$$
$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi < x < \pi)$$

例 9

開区間 $(0, 2\pi)$ で定義された関数 $f(x) = Ax^2 + Bx + C \qquad (A, B, C,$ は定数) をフーリエ級数展開しろ。

次の図は A, B, C にある定数をとった $f(x) = Ax^2 + Bx + C \qquad (A, B, C,$ は定数) を周期的に拡張した関数のグラフを表している。

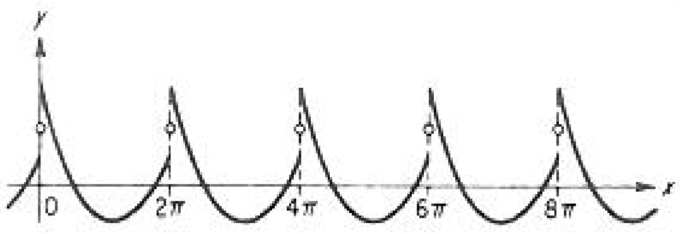


Figure 22

例 6、例 7 の結果から、開区間 $(0, 2\pi)$ で定義された関数 x^2, x のフーリエ級数展開の結果を使って、開区間 $(0, 2\pi)$ で定義された関数 $Ax^2 + Bx + C \qquad (A, B, C,$ は定数) は

$$Ax^2 + Bx + C = \frac{4A\pi^2}{3} + B\pi + C + 4A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - (4\pi A - 2B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

となる。

これらの結果を利用して、いくつかの重要な三角級数の和を求めることができる。例えばすぐに、(13.5) の結果より、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \tag{13.7}$$

と分かり、(13.5) と (13.6) から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \tag{13.8}$$

と推測できる。(13.8) の式に関して、左辺の級数の一般項は、その絶対値が $\frac{1}{n^2}$ を上回ることがないので、この級数は一様収束し、結果この級数の和はすべての x で連続であると分かる。(第 4 節参照) それ故に、(13.8) は開区間 $(0, 2\pi)$ だけでなく、閉区間 $[0, 2\pi]$ でも成り立つことが分かる。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ が収束することの確認

自然数 k に対して、$k \leq x \leq k+1$ すなわち、$\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$ のとき、すべての辺を閉区間 $[k, k+1]$ において、x で積分すると、常に $\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{x}$ または $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{k}$ ではないから、

$$\begin{aligned}
&\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^2}dx < \int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}dx < \int_k^{k+1}\frac{1}{k^2}dx \\
&\Longrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}dx < \frac{1}{k^2} \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}dx < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2} < \int_1^{n}\frac{1}{x^2}dx < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\int_1^n \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

よって、それぞれ

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2} &< 1 - \frac{1}{n} \\
1 - \frac{1}{n} &< \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

よって、それぞれの両辺に順に 1、$\dfrac{1}{n^2}$ を加えて、

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

よって、

$$1 < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots\cdots < 2$$

であり、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ は収束すると分かる。

同様にして、(13.3) から

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2} \qquad (-\pi < x < \pi) \tag{13.9}$$

と分かり、(13.1) から

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3x^2}{12} \qquad (-\pi \leq x \leq \pi) \tag{13.10}$$

(13.4) から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \qquad (0 < x < \pi) \tag{13.11}$$

と分かり、 また、(13.2) から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2-2\pi x}{8}\qquad(0\leq x\leq\pi)\tag{13.12}$$

と分かり、さらに、(13.7) から (13.11) を引いて、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}=\frac{\pi-2x}{4}\qquad(0<x<\pi)\tag{13.13}$$

と分かり、(13.8) から (13.2) を引いて、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n)^2}=\frac{6x^2-6\pi x+\pi^2}{24}\qquad(0\leq x\leq\pi)\tag{13.14}$$

と分かり、これらの公式からいくつかの数で表わされた級数の和を計算することができる。例えば、 $x=0$ とおくと、(13.8) や (13.10) は

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$

となり、$x=\dfrac{\pi}{2}$ とおくと、

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

となる。

1.14 The Complex of a Fourier Series, 複素フーリエ級数

関数 $f(x)$ が閉区間 $[-\pi,\pi]$ で積分可能であると仮定し、そのフーリエ級数を

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\tag{14.1}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\qquad(n=0,1,2,\cdots\cdots)\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\qquad(n=0,1,2,\cdots\cdots)\end{aligned}\tag{14.2}$$

とおく。これらに三角関数と指数関数を結びつけるオイラーの有名な公式

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

を適用するとする。そうすると、

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

よって、これらから

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=i\cdot\frac{-e^{inx}+e^{-inx}}{2}$$

この二つの式から、（14.1）の式は

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right) \tag{14.3}$$

という式に変形することができる。ここで、

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \tag{14.4}$$

とおくと、級数 (14.3) の第 m 部分和、言い換えれば、(14.1) の結果は

$$s_m(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{m}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}) = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx} \tag{14.5}$$

という形で書き表すことができる。ゆえに、

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{14.6}$$

と書き表すことができる。これを**関数** $f(x)$ **の複素フーリエ級数**と言う。(これに対し、前のものを**実フーリエ級数**という。) なお、この複素フーリエ級数が収束するとは、(14.5) の第 m 部分和の m を $m \to \infty$ としたときに極限が存在することを言う。(14.4) の式で与えられる c_n のことを**関数** $f(x)$ **の複素フーリエ係数**といい、これは、

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots) \tag{14.7}$$

で与えられる。実際にオイラーの公式と（14.4）から計算すると、正の数の項は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = c_n\end{aligned}$$

となり、負の数の項は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] \\ &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = c_{-n}\end{aligned}$$

となる。

なお、 $f(x)$ が実数関数である場合は二つの複素フーリエ係数 c_n と c_{-n} が互いに共役複素数となっていることを覚えておくと便利である。これは（14.4）からすぐにわかることである。ちなみに、もし「～」という記号の代わりに (14,6) で「＝」という記号が使われ、かつ項別積分が正当なものであると仮定すれば、第 6 節で公式（14.2）が直接与えられたように、(14,7) の式も与えられる。実際に等式 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ の両辺に e^{-inx} を掛け、閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で項別に積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\right)e^{-inx}dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx &= 2\pi c_n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)\end{aligned} \tag{14.8}$$

という等式を得る。これは、 $k \neq n$ のとき、(第 5 節参照)

$$右辺 = c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx = c_k \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-n)x + i\sin(k-n)x] dx = 0$$

となるからである。つまりは右辺の添え字が $k = n$ となる項以外のすべての項の値が 0 となり消え、一方 $k = n$ となる項には 2π という係数が掛けられるからである。このことから、(14.7) の式が (14.8) の式よりすぐに作られる。

1.15 Functions of Period $2L$, 周期 $2L$ の関数

3 節でやったように周期 $2L$ の関数 $f(x)$ をフーリエ級数に展開するときには $x = \frac{Lt}{\pi}$ と置くことによって、$f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) = \varphi(t)$ とすることで、周期 2π の関数に帰着させて考えていた。その $\varphi(t)$ のフーリエ級数を考えると、それは

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{15.1}$$

と表せることができる。なお、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) \cos ntdt \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) \sin ntdt \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \end{aligned}$$

これを、 $t = \frac{\pi x}{L}$ とおいて、もとの変数 x に戻すと、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L}) \tag{15.2}$$

となり、またこのとき、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{\pi n x}{L} dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \end{aligned} \tag{15.3}$$

となる。この (15.3) の係数もまた今までと同様に、関数 f(x) のフーリエ係数と呼び、また、(15.2) の級数もまた関数 f(x) のフーリエ級数と呼ぶ。また、(15.1) の式で右辺と左辺の間に = が入るのなら、(15.2) の式の右辺と左辺の間にも = が入る。逆の場合も同様である。

以上のことから、ちょうど基本的な三角関数系 (5.1) のときと同じようにして、

$$1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cdots\cdots, \cos \frac{\pi n x}{L}, \sin \frac{\pi n x}{L}, \cdots\cdots, \tag{15.4}$$

という形の三角関数系から始めることで、直接 (15.2) の形の三角フーリエ級数の理論を構築することが出来たと分かる。(15.4) の関数系は、共通する周期として $2L$ を持つ関数を含んでいるが、これらの関数が長さ $2L$ の区間において直交していることは簡単に検証できる。第 6,7,10,12,14 節の考えも (15.4) の関数系に繰り返し適用され、その結果、 π が L に置き換えられるという点を除けば、これらの節で与えられてきたものに類似した公式が得られる。そうすると特に、周期 $2L$ の関数の代わりに、閉区間 $[-L, L]$ でだけ (もしくは、(15.3) の積分の極限値を適切に別のものに換えれば他の任意の長さ $2L$ の区間で) で定義された関数についても考えることができると分かる。その

ような長さ $2L$ の区間で定義された関数のフーリエ級数はそのような関数を x 軸全体 (実数軸全体) に周期的に拡張したもののフーリエ級数と一致する。このとき、第 10 節の収束判定条件で示されている周期を 2π ではなく、$2L$ として考えると、これと同様のことが成り立つ。また、このとき関数 $f(x)$ が偶関数ならば公式 (15.3) は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{\pi nx}{L}dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots,) \\ b_n &= 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots,) \end{aligned} \tag{15.5}$$

一方、f(x) が奇関数ならば、それらは

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots,) \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{\pi nx}{L}dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots,) \end{aligned} \tag{15.6}$$

となる。さらに第 12 節で示したように、閉区間 $[0, L]$ だけで定義された関数 f(x) をそれぞれ偶関数、あるいは奇関数となるように閉区間 $[-L, 0]$ においても拡張して定義することでコサイン級数やサイン級数に展開出来るという事実を使うことができる。なお、(15.2) の複素フーリエ級数はこのとき

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{L}}$$

という形になる。なお、複素フーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-i\pi nx}{L}}dx \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

または、

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

という式で求められる。)

例 1

次のように定義された関数 $f(x)$ をフーリエ・コサイン級数展開しろ。

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{L} & (0 \leq x \leq \dfrac{L}{2}) \\ 0 & (\dfrac{L}{2} < x \leq L) \end{cases}$$

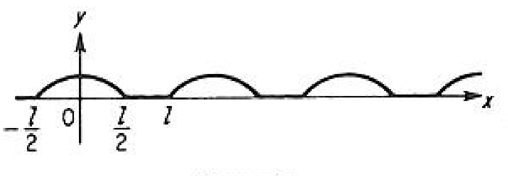


FIGURE 23

上の図は $f(x)$ のグラフをまず偶関数となるように $[-L, 0]$ においても拡張し、それをさらに x 軸 (実数軸) 全体に拡張したもののグラフを表わしている。グラフより、これには明らかに 10 節の収束判定条件がどの点においても適用される。

$\frac{L}{2} \leq x \leq L$ のとき、 $f(x) = 0$ であるので、

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \cos\frac{\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{\pi n x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi n x}{L}dx$$

となる。$\frac{\pi x}{L} = t$ と置き換えると、

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos ntdt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(n+1)t + \cos(n-1)t]dt$$

であり、これから

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin 2t}{2} + t\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} + \frac{\sin(n-1)t}{n-1}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \qquad (n > 1)$$

となる。よって、 n が 1 より大きい奇数のとき、

$$a_n = 0$$

であり、一方 n が 2 以上の偶数のとき

$$a_n = -\frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi(n^2-1)}, b_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

となる。

以上のことから、

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{L} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\frac{2\pi n x}{L} = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{L} & (0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \\ 0 & (\frac{L}{2} < x \leq L) \end{cases}$$

となる。この級数は上の図に示された関数にすべての点において収束する。

例 2

次のように定義された関数 $f(x)$ をサイン級数展開しろ。

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \\ L - x & (\frac{L}{2} < x \leq L) \end{cases}$$

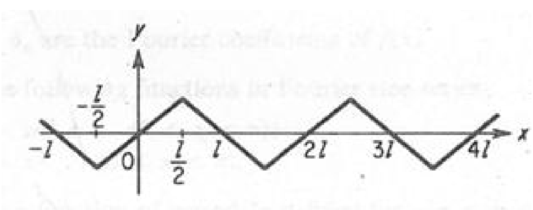


FIGURE 24

上の図は $f(x)$ のグラフ及びそれをまずは奇関数となるように $[-L, 0]$ いおいても拡張し、それをさらに x 軸 (実数軸) 全体に拡張したもののグラフを表わしている。グラフより明らかにこれには 10 節の収束判定条件がどの点においても適用される。このとき、

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \\
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{\pi n x}{L}dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} x\sin\frac{\pi n x}{L}dx + \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\sin\frac{\pi n x}{L}dx \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)
\end{aligned}
$$

ここで、$\dfrac{\pi x}{L} = t$ と置き換えると、

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2L}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin nt dt + \frac{2L}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - t)\sin nt dt \\
&= \frac{2L}{\pi^2}\left[-\frac{t\cos nt}{n}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} + \frac{2L}{\pi^2 n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nt dt + \frac{2L}{\pi^2}\left[-\frac{(\pi - t)\cos nt}{n}\right]_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi} - \frac{2L}{\pi^2 n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nt dt \\
&= \frac{4L}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}
\end{aligned}
$$

以上のことから、

$$
\frac{4L}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{L} - \cdots\cdots\right) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \\ L - x & (\frac{L}{2} < x \leq L) \end{cases}
$$

となる。この級数は先ほどの図に示された関数のすべての点において収束する。

第2章　ORTHOGONAL SYSTEMS,直交系

2.1　Definitions, いくつかの事柄の定義

(ある関数列

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots\cdots, \varphi_n(x), \cdots\cdots \tag{1.1}$$

があって、それらが)

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \qquad (n \neq m, n, m = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{1.2}$$

であるとき**その無限個の実関数からなる集合 (または関数列) は閉区間** $[a, b]$ **で直交している (または、直交関係にある)** と言い、また**そのような無限個の実関数からなる集合 (または関数列) のことを直交関数系という。**当然のごとく、それらにおいて、

$$\int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx \neq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{1.3}$$

が成り立つと想定できる。(1.2) の条件は (1.1）の関数系のそれぞれのペアが直交していることを表わしており、(第 1 章 5 節参照）次の (1.3）の条件はその関数系の中に同一のものが二つ以上存在していないことを表わしている。ちなみに私たちはすでにある特別な直交系について学んでいる。それは基本的な三角関数の集合

$$1, \cos x, \sin x, \cdots\cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\cdots, \tag{1.4}$$

であり、これは任意の長さ 2π の区間で直交している。また、より一般的な三角関数の集合

$$1, \cos\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{\pi x}{L}, \cdots\cdots, \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}, \cdots\cdots, \tag{1.5}$$

は長さ $2L$ の任意の区間で直交している直交関数系である。(第 1 章 5 節、15 節参照)

　また、

$$\int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

ならば (1.1) の直交関数系は正規化されているという。すべての直交関数系は正規化することができる。(グラム・シュミット直交化法による) 言い換えれば、任意の直交関数系が正規化されるようにそれぞれの直交関数系について、

$$\mu_0\varphi_0(x), \mu_1\varphi_1(x), \mu_2\varphi_2(x), \cdots\cdots, \mu_n\varphi_n(x),$$

というふうに定数 $\mu_0(x), \mu_1(x), \mu_2(x), \cdots\cdots, \mu_n(x), \cdots\cdots$ をとることができる。なお、そのような正規化された関数系は**正規直交関数系**と呼ばれる。実際には、その条件

$$\int_a^b {\mu_n}^2 {\varphi_n}^2(x)dx = {\mu_n}^2 \int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

というのは、

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx}} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

ということを暗に示している。

最後に、

$$\| \varphi_n \| = \sqrt{\int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

という表記法を導入し、この数のことを関数 $\varphi_n(x)$ **のノルム (norm) と呼ぶ**こととする。もし、(1.1) の直交関数系が正規化されていれば、当然

$$\| \varphi_n \| = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

となる。

2.2 Fourier Series with Respect to an Orthogonal Systems, 直交関数系に関するフーリエ級数

これから基本的に、より一般的な文章で第 1 章の 6 節 (周期 2π の関数のフーリエ級数) の考察を再度行う。$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で定義された関数と仮定する。そして、$f(x)$ が (1.1) の直交系の関数を含む級数の和として表現されうると仮定する。言い換えれば、$c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n, \cdots\cdots$ をある定数として, 閉区間 $[a, b]$ の任意の点で、

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots\cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots\cdots \tag{2.1}$$

と表せると仮定する。そして、これらの定数を計算するために、(2.1) の両辺に $\varphi_n(x)$ を掛けてできる閉区間 $[a, b]$ 上で項別積分可能な次の級数を考える。

$$\begin{aligned} f(x)\varphi_n(x) = c_0\varphi_0(x)\varphi_n(x) + c_1\varphi_1(x)\varphi_n(x) + c_2\varphi_2(x)\varphi_n(x) + \cdots\cdots \\ + c_n\varphi_n(x)\varphi_n(x) + \cdots\cdots \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \end{aligned} \tag{2.2}$$

(1.2) によれば、この式の両辺を閉区間 $[a, b]$ 上で積分すると、

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = c_n \int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

となる。(直交系の定義より、第 n 項以外すべて 0 となる。) それ故に、

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx} = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\| \varphi_n \|^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{2.3}$$

となる。

閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ が与えられていると仮定し、そのような展開が可能かどうか事前に知らない状態ではあるが、(1.1) の直交関数系を使って関数 $f(x)$ を級数展開できないかを考える。もし実際にそのような展開が可能ならば、（また必要とされる項別積分が可能ならば、) そのときはちょうど今まで見てきたように、(2.3) の公式にたどり着くに違いない。それ故に、求められている関数 $f(x)$ の展開した結果を見つけようとするときには、まずは (2.3) によって与えられる係数をもつ級数を調べ、次にその級数が $f(x)$ に収束するかどうかを調べるのが妥当である。

なおこの (2.3) によって与えられる係数は (1.1) の直交関数系に関する $f(x)$ のフーリエ係数と呼ばれ、それに対応する級数は (1.1) の直交関数系に関する $f(x)$ のフーリエ級数と呼ばれる。もし、(1.1) の直交関数系が正規化されていたら、そのときはフーリエ係数を求めるための公式は次の特別な単純な形になる。

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{2.4}$$

なお、$f(x)$ のフーリエ係数が実際に $f(x)$ に収束するのを確認するまで、

$$f(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots\cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots\cdots$$

と記述するものとする。

ただ、フーリエ級数が発散すると分かったときでさえ、(そういうことは実際に時々起こりうる) それらフーリエ級数が様々な驚くべき特徴をもつということは留意すべきである。それらの特徴を以下に記す。

もし、(1.1) の直交関数系を構成する関数が連続かつ、(2.1) の右辺の級数が一様収束するならば、(2.2) の級数もまた同様に一様収束し、またそのことから、項別積分が可能と分かる。(第 1 章 6 節定理 1 の証明参照) また、このことから、すぐに次のことが分かる。

定理　直交関数系 (1.1) を構成する関数がすべて連続で、かつ、$f(x)$ を (2.1) のように級数展開したものが一様収束するならば、その式 (2.1) は関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開である。

2.3　Some Simple Orthogonal Systems いくつかの単純な直交系

丁度引用した (1.4) や (1.5) の直交系に加えて、次の関数系について考える。

関数系 I

$\cos nx$ で表わされる関数系

$$1、\cos x、\cos 2x,、\cdots\cdots \cos nx \cdots\cdots$$

は閉区間 $[0,\pi]$ で直交している。実際に、

$$\int_0^\pi \cos nx dx = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \tag{3.1}$$

であり、これは、関数 $y = \cos nx$ と $y = 1$ が直交関係にあることを意味している。さらに言えば、(3.1) の結果を利用して、

$$\int_0^\pi \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(n+m)x dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(n-m)x dx = 0$$
$$(n \neq m)$$

となると分かる。このことは関数系 **I**が直交系であることを証明している。この関数系を利用したフーリエ級数を書く場合、第 1 章で導入した表記法を使い続けることになる。つまりは、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots\cdots + a_n \cos nx + \cdots\cdots$$

と表記する。この表記法をフーリエ係数に適用すると、(2.3) の公式から

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\int_0^\pi f(x)dx}{\int_0^\pi 1dx} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx$$

や

$$a_n = \frac{\int_0^\pi f(x)\cos nx dx}{\int_0^\pi \cos^2 nx dx} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

さらに、

$$\int_0^\pi \cos^2 nx dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2nx}{2}dx = \frac{\pi}{2}$$

なので、

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

そういうわけで、予期していた通り、フーリエ・コサイン級数 (余弦級数) については第 1 章の (12.3) で与えられたのと同じ公式にたどり着く。

関数系 II

$\sin nx (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots)$ で表わされる関数系

$$\sin x, \sin 2x, \cdots\cdots, \sin nx, \cdots\cdots$$

は閉区間 $[0, \pi]$ で直交している。実際に n, m を自然数として、

$n \neq \mathrm{m}$ のとき

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]dx = 0 \qquad ((3.1)\ 参照)$$

前述の場合と同様に、この関数系 IIを用いて、フーリエ級数を書こうとすると、第 1 章で採用された表記法を使い続けることになる。

$$f(x) \sim b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots\cdots + b_n \sin nx + \cdots\cdots$$

(2.3) によって、

$$b_n = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx}{\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 nx dx} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

さらに、

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} dx = \frac{\pi}{2}$$

なので、

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

つまりは、予期していた通り、フーリエ・サイン級数 (正弦級数) についても第 1 章の (12.4) で与えられたのと同じ公式にたどり着く。

関数系 Ⅲ

$\sin(2n+1)$ (n は 0 以上の整数) で表わされる関数系

$$\sin x, \sin 3x, \cdots\cdots, \sin(2n+1)x, \cdots\cdots$$

は閉区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で直交している。実際に、$n \neq m$ でかつ、$n, m = 0, 1, 2, \cdots\cdots$ のとき、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)x \cdot \sin 2(m+1)x dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos 2(n-m)x - \cos 2(n+m+1)x] dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(n-m)x}{2(n-m)}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(n+m+1)x}{2(n+m+1)}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 0\end{aligned}$$

となり、フーリエ係数を求める（2.3）の公式から、

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n+1)x dx}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2n+1)x dx} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

となる。ただ、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2n+1)x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4n+2)x}{2} = \frac{\pi}{4}$$

であるから、

$$c_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n+1)x dx \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \tag{3.2}$$

となる。

これから、もし、関数 $f(x)$ が閉区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で定義された関数なら、ちょうど第 1 章の 12 節でそうであったように基本的な三角関数の関数系から考察を始めて、関数系 Ⅲを利用して $f(x)$ を級数展開できることを示す。

なお、12 節では私たちは $[0, \pi]$ で定義された関数のフーリエ・サイン級数やフーリエ・コサイン級数への展開を、その関数が奇関数または偶関数となるように閉区間 $[-\pi, 0]$ においても拡張することで考えた。これをするためには、関数の**偶**、**奇**という概念を一般化しなければならない。そ

ういうわけで、まずは $f(x)$ を x 軸（実数軸）上全体でまたは、いくつかの区間で定義されている、ある点 $x = L$ に対して対称な関数であると仮定する。

このとき、すべての h に対して、$f(L-h) = f(L+h)$ ならば、$x = L$ に関して、$f(x)$ は偶関数となっていると言うことにする。このことは、$y = f(x)$ を表わす曲線のグラフが直線 $x = L$ を表わすグラフに関して、線対称となっていることを表わしている。（次の図参照）

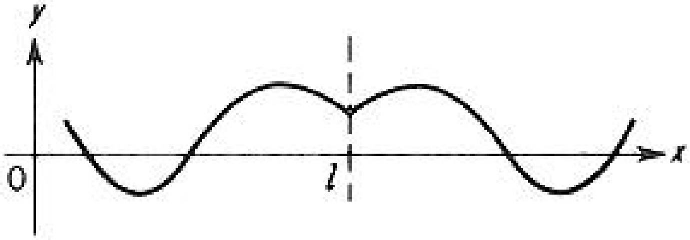


FIGURE 25

もし、関数 $f(x)$ が $x = L$ に関して偶関数となっているならば、そのときは明らかに

$$\int_{L-a}^{L+a} f(x)dx = 2\int_{L-a}^{L} f(x)dx$$

であり、特に、**($a = L$ のとき)**

$$\int_{0}^{2L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx \tag{3.3}$$

である。

同様にして、**すべての h に対して、$f(L-h) = -f(L+h)$ ならば、$x = L$ に関して、$f(x)$ は奇関数となっている**ということにする。これは明らかに、$y = f(x)$ の曲線のグラフが点 (L,0) に関して点対称になっていることを表わしている。(次の図参照)

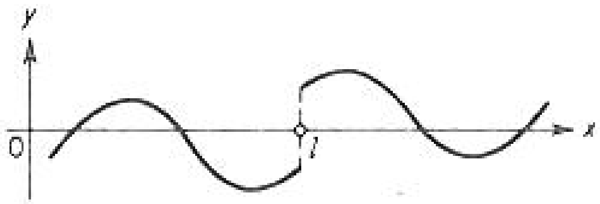


FIGURE 26

もし、関数 $f(x)$ が $x = L$ に関して奇関数となっているならば、そのときは明らかに、

$$\int_{L-a}^{L+a} f(x)dx = 0$$

であり、$a = L$ のときも

$$\int_{0}^{2L} f(x)dx = 0$$

である。

この**偶**や**奇**の概念の解釈を基にして、偶関数同士、奇関数同士の積が偶関数であること、また一方、偶関数と奇関数の積が奇関数であることを調べることができる。その証明は本質的に第 1 章の 11 節でしたものと同じようなものになる。

$f(x)$ を 閉区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で定義されている関数とし、次の図のように $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ の区間上で $f(x)$ が偶関数となるように拡張する。この関数を $g(x)$ とし、コサイン級数に展開すると、それは (次の図に示すように) $g(x)$ を閉区間 $[-\pi, 0]$ において、それが 0 に関して奇関数となるように周期的に拡張することと同じことなので、結果

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx dx \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \tag{3.4}$$

となる。

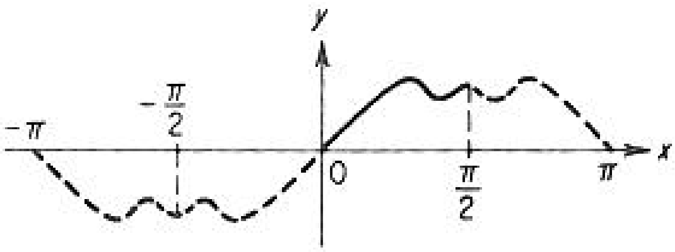


Figure 27

次に、 $\sin(2n+1)x$ で表わされる関数系 Ⅲの関数が、$x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して偶関数になっていることを確認する。実際に、 $n = 1, 2, \cdots\cdots$ のとき、

$$\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$$

なので、

$$\begin{aligned}
&\sin(2n+1)\left(\frac{\pi}{2} - h\right)\\
&\quad = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\cos(2n+1)h - \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\sin(2n+1)h\\
&\quad = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\cos(2n+1)h + \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\sin(2n+1)h\\
&\quad = \sin(2n+1)\left(\frac{\pi}{2} + h\right)
\end{aligned}$$

となる。それ故に、関数 $g(x)$ と $\sin(2n+1)x$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して、偶関数となっているから、(3.3) と (3.4) から、

$$\begin{aligned}
b_{2n+1} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(2n+1)x dx\\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n+1)x dx\\
&\quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)
\end{aligned}$$

となる。

一方で関数系 $\sin 2nx$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ は

$$\begin{aligned}\sin 2n\left(\frac{\pi}{2}-h\right) &= \sin\pi n\cos 2nh - \cos\pi n\sin 2nh\\ &= -(\sin\pi n\cos 2nh + \cos\pi n\sin 2nh)\\ &= -\sin 2n\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\end{aligned}$$

となるので、 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して、奇関数になっている。それ故に、関数 $g(x)\sin 2nx$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して、奇関数になっており、そのことから、

$$b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin 2nx dx = 0 \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

以上のことから、最終的に私たちは関数 $g(x)$ 、並びにその結果として f(x) を、偶数項がすべて 0 となって消えるようなフーリエ係数をもつサイン級数に展開することになった。奇数項のフーリエ係数は (3.2) に一致する公式 (3.4) によって与えられる。

これまで続けてきた長い議論は第 1 章の 10 節の収束判定条件を $\sin(2n+1)x$ で表わされる関数系 (3) に適用できるようにするためのものだった。(なお、その収束判定条件は周期 2π の関数で適用されるものであった。) 以上これらの議論は第 1 章の収束判定条件が、$f(x)$ を閉区間 $[0,\frac{\pi}{2}]$ で定義された関数とすると、まずはそれを $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上で、偶関数となるように拡張することで得られる関数に、次は、その拡張した関数をさらに奇関数となるように、 $[-\pi,0]$ においても拡張した関数に、そして最後に、そうして得られた関数をさらに x 軸 (実数軸) 全体に周期的に拡張することで得られる関数に、それぞれすべて適用されなければならないことを示している。

関数系 Ⅳ,Ⅴ

$$1,\cos\frac{\pi x}{L},\cos\frac{2\pi x}{L},\cdots\cdots,\cos\frac{n\pi x}{L},\cdots\cdots$$

並びに、

$$1,\sin\frac{\pi x}{L},\sin\frac{2\pi x}{L},\cdots\cdots,\sin\frac{n\pi x}{L},\cdots\cdots$$

は区間 [0,L] で直交している。実際に、$\dfrac{\pi x}{L}=t$ と置き換えると、これらそれぞれの関数から一つずつ取って積にしたものの積分は、関数系 **I**,Ⅱで同様のことをしたときの積分に一致する。

関数系 Ⅵ

$$1,\sin\frac{\pi x}{2L},\sin\frac{3\pi x}{2L},\cdots\cdots,\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L},\cdots\cdots\cdots$$

は区間 [0,L] で直交している。実際に、 $\dfrac{\pi x}{L}=t$ と置き換えると、構成要素がすべて、直交関数系 Ⅲ のものになるので、

$$\begin{aligned}&\int_0^L \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2L}dx\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2L}{\pi}\sin(2n+1)t\sin(2m+1)tdt=0 \qquad (n\neq m)\end{aligned}$$

となる。関数系 Ⅵに関するフーリエ係数を求めると、

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}dx}{\displaystyle\int_0^L \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}^2 dx} \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}dx
\end{aligned}
$$

となる。

関数系 VIに関して、閉区間 [0,L] で定義された関数 $f(x)$ をフーリエ級数で展開したいのなら、まずは、 $\frac{\pi x}{2L} = t$ と置き換えるべきである。この作業は、関数系 IIIに関して、閉区間 $[0, \frac{2Lt}{\pi}]$ で定義されている関数 $\varphi(t) = f(\frac{2Lt}{\pi})$ を拡張するという問題を省く。このとき、変数 t を x に戻すことで、要求されている級数展開にたどり着くことができる。そしてそれから、関数系 IIIにも第 1 章 10 節の収束判定条件が適用されることから、関数系 VIに関する級数展開に第 1 章 10 節の収束判定条件を適用することができる。(これはかなり汎用性が高い。)

後で、我々は三角関数系より複雑な関数を含む直交関数系について考える。(Bessel's functions, ベッセルの関数, この論文では取り扱わない。)

2.4 Square Integrable Functions,The Schwarz Inequality, 二乗積分可能な関数 (二乗可積分関数)、シュワルツの不等式

閉区間 $[a, b]$ **で定義された関数 f(x) において、**$f(x)$ **とその平方 (つまりは、二乗) が閉区間** $[a, b]$ **で積分可能である**とき、$f(x)$ **は二乗積分可能**であると言う。すべての有界な積分可能な関数は必ず二乗積分可能であるが、有界でない積分可能な関数についてはその限りでない。例えば、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

は存在するが、積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

は存在しない。($\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C, C$ は積分定数 なので, 明らかに、 $\log x$ の定義を満たさない。)
よって、関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ は二乗積分可能でない。

$\varphi(x)$ と $\psi(x)$ を 閉区間 [a,b] で定義された二乗積分可能な関数とする。このときまず、次の初等的な不等式

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(x)\psi(x)| \leq \frac{1}{2}(\varphi^2(x) + \psi^2(x)) \\
&\Longleftrightarrow \varphi^2(x) + \psi^2(x) - 2|\varphi(x)\psi(x)| \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow |\varphi(x) - \psi(x)|^2 > 0
\end{aligned}
$$

が成り立つことから、**関数** $|\varphi(x)\psi(x)|$ **が積分可能である**ことを言っておく。

よって、このことから付随的に、**二乗積分可能な関数は必ず絶対積分可能である**ことが分かる。(見て分かるように、この逆は必ずしも成り立たない) なお、このことを示すには、 $\psi(x) = 1$ とおけば十分である。

そして次に、任意の λ に対して、次の不等式が成立することを考える。

$$\int_a^b (\varphi(x) + \lambda\psi(x))^2 dx = \int_a^b \varphi^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx + \lambda^2 \int_a^b \psi^2(x)dx \geq 0$$

そして、

$$\int_a^b \varphi^2(x)dx = A, \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = B, \int_a^b \psi^2(x)dx = C$$

とおく。このとき、任意の λ に対して、

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 \geq 0$$

が成り立つ。ここで、多項式

$$\mu = A + 2B\lambda + C\lambda^2 \geq 0$$

のグラフは λ 軸 (実数軸) より上にある、もしくは λ 軸 (実数軸) に接している下向きに凸の放物線である。(次の図参照)

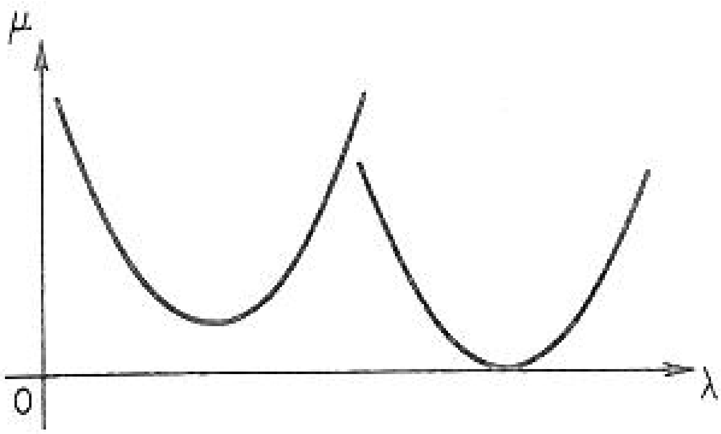


FIGURE 28

それ故に、この多項式の判別式は次の不等式 (判別式) を満足しなければならないことになる。

$$B^2 - AC \leq 0 \text{ つまりは } B^2 \leq AC$$

A, B, C にもとの関数を代入すると、

$$\left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x)dx \int_a^b \psi^2(x)dx \tag{4.1}$$

$$\Longleftrightarrow (<\varphi, \psi>)^2 \leq (\|\varphi\|)^2(\|\psi\|)^2$$

(これより、$(\|\varphi+\psi\|)^2 \leq (\|\varphi\|+\|\psi\|)^2$ も分かる。) この非常に便利な不等式は **(Schwarz inequality) シュワルツの不等式**と呼ばれる。(これはロシアの数学者の間では Buniakovski inequality, ブニャコフスキーの不等式とも呼ばれる) このシュワルツの不等式を使えば、**有限個の二乗積分可能な関数の和もまた、二乗積分可能な関数である**ことを証明するのは容易である。実際に二つの二乗積分可能な関数の和を計算すると、

$$\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))^2 dx = \int_a^b \varphi^2(x)dx + 2\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx + \int_a^b \psi^2(x)dx \geq 0$$

であり、任意の有限個の二乗積分可能な関数の和への一般化も直観的に正しいと分かる。

2.5 The Mean Square Error and its Minimum, 平均二乗誤差, 及びその最小値

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で定義された任意の二乗積分可能な関数であると仮定し、$\sigma_n(x)$ を (1.1) の直交関数系からなる関数列の初項から第 $n+1$ 項までを基底関数としてもつ線形結合であると仮定する。つまりは

$$\sigma_n(x) = \gamma_0\varphi_0(x) + \gamma_1\varphi_1(x) + \cdots\cdots + \gamma_n\varphi_n(x) \tag{5.1}$$

(なお、$\gamma_0, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_n$ は定数)

とする。

仮定によれば、(1.1) の直交関数系 $\varphi_n(x)$ のすべての関数が二乗積分可能である。((1.3) 参照) それ故に、 $\sigma_n(x)$ の線形結合や、差 $f(x) - \sigma_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ も二乗積分可能な関数である。これから、$\sigma_n(x)$ **で** $f(x)$ **を近似した時の平均二乗誤差**と呼ばれる量

$$\delta_n = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2 dx \tag{5.2}$$

を考える。

関数 $f(x)$ から線形結合 $\sigma_n(x)$ を引いた偏差 (ずれ) を計算する方法はいくつもある。その中でも、この平均二乗誤差を今回選んだのは、特にフーリエ級数の理論を考えるのに、これが最も適しているからである。

(偏差とは母集団内の要素 1 つ 1 つに対して定まるものであり、全体の分布に関する数値である標準偏差とは異なる（標準偏差は全要素の偏差より算出される）。偏差は単純に引き算した結果であり母集団によってその大小が左右される。この変動を打ち消して、その要素が母集団の中ではどのくらい平均からずれているかの度合いを出したものが偏差値である。要はどのくらい近似できているかを表す数字、 0 に近いほど精密)

まだこの段階では、平均二乗誤差が最小となるように、ある n に対して、どのように係数 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_n$ を選ぶかという問題が残っている。そのためこれからそれについて考える。

(5.2) より、

$$\delta_n = \int_a^b f^2(x)dx - 2\int_a^b f(x)\sigma_n(x)dx + \int_a^b {\sigma_n}^2(x)dx \tag{5.3}$$

(5.1) によれば、

$$\int_a^b f(x)\sigma_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$$

となる。さらに (2.3)

$$(c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\parallel \varphi_n \parallel^2}) \text{ により、}$$

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = c_k \parallel \varphi_k \parallel^2 \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

となる。なお、 c_k は関数 $f(x)$ のフーリエ係数である。それ故に、

$$\int_a^b f(x)\sigma_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k c_k \| \varphi_k \|^2 \tag{5.4}$$

である。さらに言えば、

$$\begin{aligned}\int_a^b \sigma_n{}^2(x)dx &= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \varphi_k(x)\right)^2 dx \\ &= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} \gamma_k{}^2 \varphi_k{}^2(x) + \sum_{p\neq q} \gamma_p\gamma_q\varphi_p(x)\varphi_q(x)\right)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \gamma_k{}^2 \int_a^b \varphi_k{}^2(x)dx + \sum_{p\neq q} \gamma_p\gamma_q \int_a^b \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx\end{aligned}$$

最後の項は p, q を 0 以上、 n 以下の互いに等しくない整数として、$\gamma_p\gamma_q \int_a^b \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx$ の値を可能な限り全部足し合わせたものである。(1.1) の関数系は直交系なので、この和は 0 になり消える。そういうわけで、

$$\int_a^b \sigma_n{}^2(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k{}^2 \| \varphi_k \|^2 \tag{5.5}$$

(5.3) に (5.4)、(5.5) を代入すると、

$$\begin{aligned}\delta_n &= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^{n} \gamma_k c_k \| \varphi_k \|^2 + \sum_{k=0}^{n} \gamma_k{}^2 \| \varphi_k \|^2 \\ &= \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k=0}^{n} (c_k - \gamma_k)^2 \| \varphi_k \|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k{}^2 \| \varphi_k \|^2\end{aligned}$$

ここで、 $\int_a^b f^2(x)dx, \sum_{k=0}^{n} c_k{}^2 \| \varphi_k \|^2$ は共に $\gamma_0, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_n$ に依存しない定数である。それ故に、

$$\delta_n = \int_a^b f^2(x)dx - 2\int_a^b f(x)\sigma_n(x)dx + \int_a^b \sigma_2{}^2(x)dx \tag{5.6}$$

は明らかに

$$\sum_{k=0}^{n} (c_k - \gamma_k)^2 \| \varphi_k \|^2 = 0$$

のとき、最小値をとり、このような等式を満たすのは、

$$\gamma_k = c_k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

のときである。(この 5 節の一連の流れを最良近似問題という。)

そういうわけで、最終的に、**(5.1) の線形結合の係数が $\sigma_n(x)$ のフーリエ係数のとき、その平均二乗誤差が最小となる。**その平均二乗誤差の最小値を Δ_n とすると、

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx \\ &= \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k{}^2 \| \varphi_k \|^2\end{aligned} \tag{5.7}$$

この表現は n が増加するにつれて、必ず 0 以上の数である量 Δ_n が単調に減少することを表わしている。(= 0 に近づく) そういうわけで、n が増加するにつれて、フーリエ級数の部分和は $f(x)$ に限りなく近づき、その誤差は考えるに値しない、小さなものとなる。

2.6 Bessel's Inequality, ベッセルの不等式

$\Delta_n \geq 0$ なので、(5.6) から、n を任意の 0 以上の整数として、

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=0}^{n} {c_k}^2 \| \varphi_k \|^2$$

右辺の和は n が増加するにつれて、単調に増加する。それ故に、(左辺の積分値である) ある定数によって、上に有界なので、右辺の和の n を ∞ にとばしたときの極限は有限な値をとる。そういうわけで、級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} {c_k}^2 \| \varphi_k \|^2$$

は収束し、

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} {c_k}^2 \| \varphi_k \|^2 \tag{6.1}$$

となる。この非常に大切な結果は **Bessel's Inequality(ベッセルの不等式)** と呼ばれる。また、右辺の級数の収束性からすぐに、

$$\lim_{n\to\infty} c_n \| \varphi_n \| = 0 \tag{6.2}$$

ということが分かる。さらに、もし関数系 (1.1) が正規化されていれば、ベッセルの不等式は

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} {c_k}^2$$

という形になり、それ故に、フーリエ係数の 2 乗の和が、収束するので正規直交関数系では、(6.2) は

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

となる。つまりは、 n が ∞ に近づくにつれて、フーリエ係数は 0 に近づく。

2.7 Complete Systems, Convergence in the Mean, 複雑な関数系、平均収束

もし、任意の二乗積分可能な関数 $f(x)$ に対して、(ベッセルの不等式の代わりに) 等式

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} {c_k}^2 \| \varphi_k \|^2 \tag{7.1}$$

が成り立つならば、関数系 (1.1) は「完備である」という。(この等式のことを **Parseval equality, パーシヴァルの等式**とも言う。) ここで、先ほどのように、 $c_k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ は関数 $f(x)$ のフーリエ係数であるとする。(7.1) の等式は関数系 (1.1) の完備条件とも呼ばれる。この完備条件からすぐに次のことが分かる。

定理 1 $f(x), F(x)$ **を**

$$f(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots\cdots,$$
$$F(x) \sim C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \cdots\cdots,$$

であるような二乗積分可能な関数とし、直交関数系 (1.1) は「完備である」とする。このとき、

$$\int_a^b f(x)F(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k \| \varphi_k \|^2 \tag{7.2}$$

証明　和 $f(x)+F(x)$ と差 $f(x)-F(x)$ は二乗積分可能な関数である。さらに言えば、前者の和はフーリエ係数 $c_k + C_k$ を、後者の差はフーリエ係数 $c_k - C_k$ をもつ。完備条件により、((7.1) の等式が成り立ち、)

$$\int_a^b [f(x)+F(x)]^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + C_k)^2 \| \varphi_k \|^2$$
$$\int_a^b [f(x)-F(x)]^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k - C_k)^2 \| \varphi_k \|^2$$

という式が成り立つ。そして、これらの式から、

$$4\int_a^b f(x)F(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} 4c_k C_k \| \varphi_k \|^2$$

という式が得られる。あとは両辺を 4 で割ると、命題が証明できる。

定理 2　直交関数系 (1.1) が「完備である」ための必要十分条件は、任意の二乗積分可能な関数 $f(x)$ に対して、c_k　$(k = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ を関数系 (1.1) に関する $f(x)$ のフーリエ係数として、

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = 0 \tag{7.3}$$

が成り立つことである。

証明　(5.6) の関係式と完備条件が等式

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} {c_k}^2 \| \varphi_k \|^2 \right] = 0$$

に等しいという事実を利用する。もし、**関数 $f(x)$ が (7.3) の条件を満たす**ならば、**その $f(x)$ のフーリエ級数は $f(x)$ に平均収束する**と言う。それ故に、定理 2 は次のようにも言うことができる。

直交関数系 (1.1) が完全であるための必要十分条件は、関数系 (1.1) を用いた任意の二乗積分可能な関数 $f(x)$ のフーリエ級数が $f(x)$ に平均収束することである。

直交関数系 (1.1) が完全であっても、フーリエ級数がそれを作るもととなった関数に各点において収束をするとは限らない。それでもなお、これまでちょうどさっき見たように、完備な関数系に関するフーリエ級数は必ず平均収束する。(議論から分かるように、フーリエ級数に展開する関数は二乗積分可能な関数とする。) とりわけ、これらのことは三角関数系に適用される。(それの完備性は第 5 章の第 2 節で証明することになる。) また、これらのことは平均収束の概念の重要性を示し、この種の収束を各点における収束の一般化としてみなすことを提案している。

この提案 (定理 2 を言い換えたもの) が完全にあっているものとして、これから、ある任意のフーリエ級数がそれぞれ、(新たなある条件の下に) ただ唯一の関数に平均収束しうることを示す。

そういうわけで、(7.3) に加えて、

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[F(x)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)\right]^2dx=0 \tag{7.4}$$

という関係も成り立つと仮定する。(なお、$F(x)$ も任意の二乗積分可能な関数)

そのとき、初等的な不等式

$$(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$$

を利用すると、

$$\begin{aligned}0&\leq\int_a^b[F(x)-f(x)]^2dx\\&=\int_a^b\left[\left(F(x)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)-f(x)\right)\right]^2dx\\&\leq 2\int_a^b\left[F(x)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)\right]^2dx+2\int_a^b\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)\right]^2dx\end{aligned}$$

と分かる。

(7.3) と (7.4) によりこのことは

$$\int_a^b[F(x)-f(x)]^2dx=0$$

となることを暗に示している。また、その被積分関数は正であることから、連続な点で

$$F(x)=f(x)$$

となることが分かる。(このことは、ある任意のフーリエ級数がただ唯一の関数に平均収束することを示す。)

なお、その被積分関数は高々有限個だけ不連続な点をもつ。それ故に、関数 $F(x)$ と $f(x)$ はある有限個な (連続な) 点をおそらく除いて、それ以外のすべての点で一致する。さらに言えば、二つのこのような関数は、個々のそれぞれの点における関数の値は、その関数のフーリエ級数の性質に全く影響しないので、フーリエ級数の理論においてほとんど違わないものと考えられるはずである。(なぜなら、そのフーリエ係数は積分によって表現され、積分は被積分関数の高々有限個の点における値に左右されないからである。) そして、このことから次の結果が導かれる。

定理 3　もし、関数系 (1.1) が完備であるならば、任意のすべての二乗積分可能な関数 $f(x)$ は収束するか、しないかは別として、そのフーリエ級数によって完全に (ただし、高々有限個の不連続な点における値は除いて) 再定義される。(一意性を示す。)

このことは、ある任意の関数 $f(x)$ と本質的に相異なる関数は、その $f(x)$ のフーリエ級数と同じフーリエ級数を持つことはないことを意味している。例えば、ある関数に対して、その関数と不加算個 (濃度が $\aleph$ に等しい) の点において異なっている関数は互いに同一のフーリエ級数を持つことはない。

(注意：この本では積分可能な関数や、またここから二乗積分可能な関数は、必ず高々有限個の点を除いて連続なものを扱っているものとする。(第 1 章 4 節参照) そうでなければ、定理 3 が成り

立たない。)

2.8 Important Properties of Complete Systems, 完備である直交関数系の重要な性質

これから、いくつかの完備である直交関数系のとても大事な性質について立証していく。

定理 1　直交関数系 (1.1) が完備であるならば、その関数系を構成するすべての関数と直交関係にある任意の連続な関数 $f(x)$ は $f(x) = 0$ のみである。

証明　もし、関数 $f(x)$ が直交関数系 (1.1) のすべての関数に対して直交関係にあるならば、$f(x)$ のすべてのフーリエ係数が 0 となって消える。そのとき、完備条件 (パーシヴァルの等式) は、

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0$$

となり、そのため、 $f(x)$ は連続であるので

$$f(x) \equiv 0$$

となる。

定理 2　直交関数系 (1.1) が完備で、その関数系を構成する関数がすべて連続で、かつ、連続な関数 $f(x)$ のフーリエ級数が一様収束するならば、その級数の和は $f(x)$ に等しい。

証明

$$f(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots\cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots\cdots$$

と仮定し、また

$$s(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots\cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots\cdots \tag{8.1}$$

とおく。

直交関数系 (1.1) の関数はすべて連続であり、級数 (8.1) は一様収束するため、級数 (8.1) の和は連続である。よって、第 2 節の定理から、(8.1) は $f(x)$ のフーリエ級数であると分かる。それ故に、連続な関数、$f(x)$ と $s(x)$ は同じフーリエ級数をもつ。なお、第 7 節の定理 3 は、

$$f(x) \equiv s(x)$$

ということを示しているのであって、(8.1) によって、

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots\cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots\cdots$$

と最終的に分かる。

定理 3　直交関数系 (1.1) が完備であるならば、すべての二乗積分可能な関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、その級数が収束するかしないかに関わらず、項別積分が可能である。言い換えれば、もし、

$$f(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots\cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots\cdots$$

と仮定されているならば、x_1 と x_2 を閉区間 [a,b] 内の $x_1 \leq x_2$ であるような任意の点であるとすると、

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = c_0 \int_{x_1}^{x_2} \varphi_0(x)dx + c_1 \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x)dx + \cdots\cdots + c_n \int_{x_1}^{x_2} \varphi_n(x)dx + \cdots\cdots \tag{8.2}$$

という式が成立する。

証明　$x_1 < x_2$ とすると、積分の性質 $\left(\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\right)$、シュワルツの不等式を利用して、

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{x_1}^{x_2} \varphi_k(x)dx\right| &\leq \int_{x_1}^{x_2} \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\right| dx \\ &\leq \int_a^b \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\right| dx \\ &\leq \sqrt{\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx \int_a^b 1dx}\end{aligned} \tag{8.3}$$

第 7 節の定理 2(完全であるための必要十分条件) によって (8.3) の最後の項は n を ∞ に限りなく近づけると、限りなく値が 0 に近づく。それ故に、(8.2) の等式に等しい

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{x_1}^{x_2} \varphi_k(x)dx\right] = 0$$

という式が成り立つ。よって、命題は正しい。

2.9　A Criterion for the Completeness of a System, 直交関数系が完備であるための条件

完備直交関数系の概念の重要性を考えると、直交関数系が「完備である」かどうかを簡単に調べるテストをかんがえることは適切である。

直交関数系が「完備である」かどうかを調べるテストには、次のものが非常に便利である。

もし、閉区間 [a,b] で連続なすべての関数 $F(x)$ と任意の $\varepsilon > 0$ であるような ε に対して、

$$\int_a^b [F(x) - \sigma_n(x)]^2 dx \leq \varepsilon$$

を満たすような、線形結合

$$\sigma_n(x) = \gamma_0\varphi_0(x) + \gamma_1\varphi_1(x) + \cdots\cdots\cdots + \gamma_n\varphi_n(x) \tag{9.1}$$

が存在するとき、直交関数系 (1.1) は完備である。

証明　まずは、最初に**任意の二乗積分可能な関数 $f(x)$ が与えられたとき、**

$$\int_a^b [f(x) - F(x)]^2 dx \leq \varepsilon \tag{9.2}$$

という式を満たすような連続な関数 $F(x)$ **が存在する**ことを記述しておく。この事実はかなり幾何学的なものだが、一応証明をしておこう。

上の補題の証明　二乗積分可能な関数 $f(x)$ は不連続な点を有限個しか持つことができない。とりわけ、そこで有界となっていないような点を限られた数しか持つことができない。そして全てのそのような点は、関数 $f^2(x)$ のその区間における定積分の和が $\frac{\varepsilon}{4}$ 以下であるような小区間に必ず含まれる。

※注意 ($f^2(x)$ の定積分の和について言及しているのはここで考えている $f(x)$ が任意の二乗積分可能な関数であるから。)(別にεでもいいのだが、後の三角不等式で使うため便宜上 4 で割ったものをとってきている。εは任意の正の数)(これは図形的に考えると、要は不連続点は高々有限個なので、そのような点が含まれる区間を限りなく細く切り取れるということを示す。)

ここで、それらの区間の外で $f(x)$ に等しく、それらの区間で 0 となるような補助関数 $\Phi(x)$ を定義する。つまりは、次の関数を定義する。

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & (\text{f(x) の不連続点が含まれる区間}) \\ f(x) & (\text{f(x) の不連続点が含まれない区間}) \end{cases}$$

$\Phi(x)$ は有界であり、不連続点を有限個しか持たず、また、明らかに、

$$\int_a^b [f(x) - \Phi(x)]^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{9.3}$$

を満たす。

次にまず、M を x の範囲を $a \leq x \leq b$ としたとき $|\Phi(x)| < M$ という式を満たすような任意の数とする。つまり、 M は

$$M \begin{cases} > 0 & (\text{f(x) の不連続点が含まれる区間}\textbf{のみ}) \\ > \max|\Phi(x)| & (\text{f(x) の不連続点が含まれない区間}\textbf{を少しでも含む区間}) \end{cases}$$

であるような定数である。このとき

$$4M^2 L \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

という条件をそれらを足した長さ L が満たすような、$\Phi(x)$ のそれぞれの不連続点を含む小区間を考える。(なお、L を構成する小区間の中に $\Phi(x)$ の不連続点は一つ)

最後に、先ほど考えた足したら L となる区間を除く区間で $\Phi(x)$ に等しく、先ほど考えた足したら L となるそれぞれの区間で直線となっている連続な関数 $F(x)$ を考える。(次の図参照)

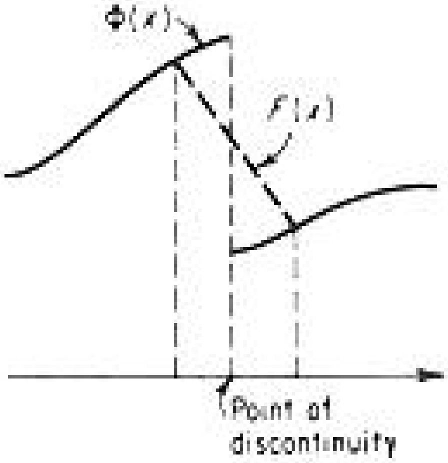


FIGURE 29

そうすると明らかに、

$$\int_a^b [\Phi(x) - F(x)]^2 dx \leq 4M^2 L \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{9.4}$$

となる。

(L は条件を満たすような、小さなある正の数であり、M がどんな数でも、L に条件を満たすような十分小さな数を持ってくれば、(9.4) の不等式が成り立つような $F(x)$ で $\Phi(x)$ を限りなく近似できる。)

よって、(9.3)(9.4) 及び、不等式

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \tag{9.5}$$

より、

$$\int_a^b [f(x) - F(x)]^2 dx \leq \int_a^b [(f(x) - \Phi(x)) + (\Phi(x) - F(x))]^2 dx$$
$$\leq 2\int_a^b [f(x) - \Phi(x)]^2 dx + 2\int_a^b [\Phi(x) - F(x)]^2 dx \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

となり、関数 F(x) は条件 (9.2) を満たす。

ここで直交関数系が完全であるための条件の証明に戻り、等式 (9.1) を満たすような線形結合 $\sigma_n(x)$ を考える。F(x) を (9.2) で登場した連続な関数として不等式 (9.5) を利用すると、

$$\int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2 dx \leq \int_a^b [(f(x) - F(x)) + (F(x) - \sigma_n(x))]^2 dx$$

$$\leq 2\int_a^b [f(x) - F(x)]^2 dx + 2\int_a^b [F(x) - \sigma_n(x)]^2 dx \leq 4\varepsilon \tag{9.6}$$

ここで、その係数がフーリエ係数 c_k となっている線形結合が最も小さい平均二乗誤差をとるこ

とを利用する。($\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$ を代入,5 節参照) そのことから、

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x) \right]^2 dx \leq 4\varepsilon$$

であり、そこから、(5.6 により)

$$0 \leq \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} {c_k}^2 \| \varphi_k \|^2 \leq 4\varepsilon$$

という式が導かれ、同様に、これから、

$$0 \leq \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{\infty} {c_k}^2 \| \varphi_k \|^2 \leq 4\varepsilon$$

という式が導かれる。ε は任意の正の数であるので、これから、(7.1) が成り立ち、直交関数系 (1.1) は言われたように「完備」となる。

2.10 The Vector Analogy, ベクトルとの類似点

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を互いに垂直な任意の長さの (3 次元) 空間ベクトルとする。このとき、その (3 次元) 空間の任意のベクトル $\mathbf{r}$ は

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \tag{10.1}$$

という和の形で表わされる。なおそのときのスカラー係数 a, b, c は次のように計算される。以下のように、まずは等式 (10.1) の両辺において $\mathbf{i}$ との内積をとり、そして次に等式 (10.1) の両辺において $\mathbf{j}$ との内積を $\mathbf{i}$ との内積をとり、そして最後に等式 (10.1) の両辺において $\mathbf{k}$ との内積をとる。このとき、ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は互いに直交しているから、

$$(\mathbf{r}, \mathbf{i}) = a| \mathbf{i} |^2$$
$$(\mathbf{r}, \mathbf{j}) = b| \mathbf{j} |^2$$
$$(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = c| \mathbf{k} |^2$$

となり、

$$a = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{i})}{| \mathbf{i} |^2}, b = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{j})}{| \mathbf{j} |^2}, c = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{| \mathbf{k} |^2} \tag{10.2}$$

となる。(ここからベクトルの長さを示すのに、絶対値の記号を使うこととする。) (10.1) のベクトルの表記法を既に知っている状態でベクトル $\mathbf{r}$ の長さを計算する。そのために (10.1) の両辺において $\mathbf{r}$ との内積をとると、その結果は、

$$| \mathbf{r} |^2 = a(\mathbf{r}, \mathbf{i}) + b(\mathbf{r}, \mathbf{j}) + c(\mathbf{r}, \mathbf{k})$$

もしく公式 (10.2) を使えば、

$$| \mathbf{r} |^2 = a^2| \mathbf{i} |^2 + b^2| \mathbf{j} |^2 + c^2| \mathbf{k} |^2 \tag{10.3}$$

となる。

$a|\mathbf{i}|, b|\mathbf{j}|, c|\mathbf{k}|$ といった量はベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 方向へのベクトル $\mathbf{r}$ の射影 (作用素) である。したがって、ベクトルの長さの二乗と三つの垂直な方向への射影との間には、この (10.3) のような関係があると言える。ベクトル $\mathbf{r}$ に加えて、

$$\mathbf{R} = a\mathbf{i} + B\mathbf{j} + c\mathbf{k} \tag{10.4}$$

であるようなベクトル $\mathbf{R}$ を考え、 $\mathbf{r}$ との内積をとると、(10.1) と (10.4) により、

$$(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = aA|\mathbf{i}|^2 + bB|\mathbf{j}|^2 + cC|\mathbf{k}|^2 \tag{10.5}$$

となる。

ここまできて、何人かの方はすぐにこれらのベクトルの考慮すべき事項とフーリエ級数のそれとには類似しているところがあることに気づかれるだろう。実際に、閉区間 [a,b] 上で定義された二乗積分可能なすべての関数をベクトルを一般化したものとして考え、そのような一般化したベクトル (関数) の内積を

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$$

という式によって定義する (とフーリエ級数にも同じようなことが言える)。このとき特に、

$$\|\varphi\|^2 = \int_a^b \varphi^2(x)dx = (\varphi, \varphi)$$

となる。

また、直交関数系

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots\cdots, \varphi_n(x), \cdots\cdots \tag{10.6}$$

が先ほど考えた内積の定義と完全に一致しているという点から、直交関係にあるベクトルの集合とみなすことができる。さらに、ある任意の二乗積分可能な関数が与えられたとき、その $f(x)$ を直交関数系 (10.6) に関するある級数で表わそうとすると、つまりは、

$$f(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots\cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots\cdots$$

と表そうとすると、(10.2) の関係へと導かれた主張が

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi\|^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

というフーリエ係数の公式として認識できる関係へと導かれる。実際に、第 2 節で正確にこのような誘導を通り過ぎてきた。ここまで読んで、あなたは完備であるための条件 (7.1) は公式 (10.3) を一般化したものであり、同じように (7.2) は (10.5) を一般化したものであると分かるだろう。

これから、「完備性」という言葉に関係したいくつかの発言をしていく。任意の (3 次元) 空間ベクトル $\mathbf{r}$ は (10.1) の形で表わすことができるので、言い換えれば、ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ の線形結合として、「任意の」(3 次元) 空間ベクトル $\mathbf{r}$ は表わすことができるので、これら 3 つのベクトルを含む関数系を完備であると言うのはごく自然なことである。しかし、「任意の」(3 次元) 空間ベクトル $\mathbf{r}$ を 3 つの直交しているベクトルではなくて、そうした 2 つのベクトルの線形結合、例えば、 $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ の線形結合で表わすなどとなって来ると話がまた違ってくる。そのとき、一般的には

$$\mathbf{r} = \mathrm{a}\mathbf{i} + \mathrm{B}\mathbf{j}$$

という形の等式を書くことはできない。ただ、公式 (10.2) で与えられる係数は明らかに

$$|\,\mathbf{r}\,|^2 \geq a^2|\,\mathbf{i}\,|^2 + b^2|\,\mathbf{j}\,|^2 \tag{10.7}$$

(等号が成り立つのは、ベクトル $\mathbf{r}$ が $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ によって張られる平面上にあるときのみ)

という不等式を満たす。そういうわけで、任意の (3 次元) 空間ベクトルを表わすのに、二つの直交しているベクトルしか使わないのは不十分であり、そのことから、2 つの直交しているベクトルからなる関数系は「完備でない」という。

これと同様の考えがフーリエ級数の展開の場合にも適用される。もし、関数系 (10.6) が完備条件 (7.1) を満たすならば、(フーリエ級数が平均収束することから) その関数系は、すべての二乗積分可能な関数をフーリエ級数で表わすのに必要な関数を十分に含む。このときその関数系 (10.6) は「完備関数系」であると言う。一方、関数系 (10.6) が完備条件 (7.1) を満たさないならば、その関数系 (10.6) は「完備でない」と言う。また、任意の完備でない関数系が与えられたとき、そのフーリエ級数がそれに平均収束しないような二乗積分可能な関数 $f(x), g(x), \cdots\cdots$ が必ず存在することを示すことができる。これらのことを考えると、ベッセルの不等式 (6.1) は不等式 (10.7) に類似していることに容易に気づくだろう。

また、関数系が (10.6) のように正規化されている場合はベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ が単位ベクトルとなっている場合と一致する。例えば、公式 (10.2) は

$$a = (\mathbf{r}, \mathbf{i}), b = (\mathbf{r}, \mathbf{j}), c = (\mathbf{r}, \mathbf{k})$$

となる。(ここ以降、 a, b, c はベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ と同じ向きの単位ベクトルへのベクトル $\mathbf{r}$ の射影にそれぞれ、一致している。) また、フーリエ係数を求めるための公式は

$$c_n = (f, \varphi_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

となる。

さて、ここまで来て、 n 次元空間ベクトル (n 本のベクトルがそれぞれ互いに直交している場合) について多少は理解している方なら、ここで議論されている類比がより一層自然なものと分かるだろう。しかし、たとえ n の値がどれだけ大きかろうと、n 次元空間ベクトルのときと同様に、無限ベクトル空間のときのことを考えるのはナンセンスであろう。なぜなら、前者から後者への変化は単純な量としてとらえるのはおかしいからである。(ここでは関数系をベクトル系に置き換えて扱っていることに留意すべきである。) 実際、そのような変化をさせると、有限な部分和の代わりに、無限級数と平均収束を扱わないといけなくなるので、やることに質的な変化が出てくる。

第3章　CONVERGENCE OF TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES,三角フーリエ級数の収束性

3.1　A Consequence of Bessel's inequality, ベッセルの不等式のから分かること

基本的な三角関数系

$$1, \cos x, \sin x, \cdots\cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\cdots \tag{1.1}$$

において、

$$\| 1 \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx} = \sqrt{2\pi}$$

$$\| \cos nx \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \sqrt{\pi} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$\| \sin nx \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \sqrt{\pi} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

となる。

$f(x)$ を閉区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された二乗積分可能な関数とする。このとき関数系に直交関数系 (1.1) を使うと、ベッセルの不等式は

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \| 1 \|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2 \| \cos nx \|^2 + b_n{}^2 \| \sin nx \|^2)$$

または、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2 + b_n{}^2)\pi$$

となる。よって、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{a_0{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2 + b_n{}^2) \tag{1.2}$$

となる。これから、この形式で基本的な三角関数系の不等式によるベッセルの不等式を書いていくこととする。のちに、この不等式 (1.2) において等号が成り立つことが示されるだろう。(第 5 章 3 節参照) しかし、いまのところはこれで十分である。

これから、この不等式 (1.2) は右辺の級数が関係している次の定理を示す。

定理　任意の二乗積分可能な関数のフーリエ係数の二乗の和は必ず収束する。

これは、ほかの種類の、つまりは二乗積分可能でない任意の関数を同じようにしてできる級数の和が必ず発散すると言っているところが便利である。なお、このことには証明を与えない。

3.2 The Limit as $n \to \infty$ of the Trigonometric Integrals, 三角関数の積分の $n \to \infty$ のときの極限

収束する級数の一般項は $n \to \infty$ のとき限りなく 0 に近づくので、先ほどの定理から、任意の二乗積分可能な関数 $f(x)$ のフーリエ係数に対して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \tag{2.1}$$

となると分かる。ここで、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \end{aligned}$$

であるので、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \tag{2.2}$$

さらに (2.2) から、どんな閉区間 $[a, b]$ であれ、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\sin nx dx = 0 \tag{2.3}$$

という式も成り立つことを示す。(ここで、一時的に $f(x)$ は二乗積分可能であるとする。なおすぐにこの要件はどうでもよくなる。)

この (2.3) を示すために、まず $a < b \leq a + 2\pi$ 、つまりは $b - a \leq 2\pi$ であるとし、$a \leq x \leq b$ のとき $g(x) = f(x)$ 、 $b < x \leq a + 2\pi$ のとき $g(x) = 0$ であるような関数 $g(x)$ を考える。関数 $g(x)$ は明らかに閉区間 $[a, a + 2\pi]$ で二乗積分可能である。これから、関数 $g(x)$ を実数軸全体に周期的に拡張する。そのとき、周期関数の性質によって、

$$\int_{a}^{a+2\pi} g(x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx$$

となり、(第 1 章 1 節参照) (2.2) によって、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{a+2\pi} g(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx = 0$$

となる。一方、関数 $g(x)$ の定義から、

$$\int_{a}^{a+2\pi} g(x)\cos nx dx = \int_{a}^{b} f(x)\cos nx dx$$

であり、このことから、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cos nx dx = 0$$

という式が導かれる。また、これと同様の議論が (2.3) の第 2 項にも適用される。そして最終的に $b-a>2\pi$ であるならば、閉区間 $[a,b]$ をその長さが 2π より小さい有限個の小区間に分けることでそれぞれの小区間に (2.3) が適用でき、結果このときも (2.3) が成り立つと分かる。このことは、(2.3) が実数全体においても成り立つことを示す。

さてこれから、先ほどの式 (2.3) が $f(x)$ が二乗積分可能でなく、 かつ、また n が整数でなくても成り立つことを示していく。そのために、幾何学的見地から明らかになっている 2 つの補題を示す必要がある。

補題 1　f(x) を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とする。このとき、任意の $\varepsilon>0$ であるような ε に対して、$a\le x\le b$ であるような x をとったとき、

$$|\ f(x)-g(x)\ |\le\varepsilon \tag{2.4}$$

であるような連続で、かつ区分的に滑らかな関数 $g(x)$ が存在する。

証明　まずは閉区間 $[a,b]$ を

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b$$

としていくつかの点によって小区間に分ける。さらに、それぞれの閉区間 $[x_{k-1},x_k]$　$(k=1,2,\cdots\cdots m)$ 上で、直線で、それぞれの区分点で $g(x_k)=f(x_k)$　$(k=0,1,2,\cdots\cdots m)$ となっているような関数 $g(x)$ をとる。そうすると、 $y=g(x)$ のグラフは曲線 y = f(x) 上のいくつかの頂点を結んだ直線によって表わされる。なおグラフより、明らかに関数 $g(x)$ は区分的に滑らかな関数である。$f(x)$ は連続であるから、$[a,b]$ を分けた小区間 $[x_{k-1},x_k]$　$(k=1,2,\cdots\cdots m)$ は $[a,b]$ のすべての x で (2.4) が成立するように十分小さく出来る。よって、 m に十分大きな値をとればこの命題が成り立つ。

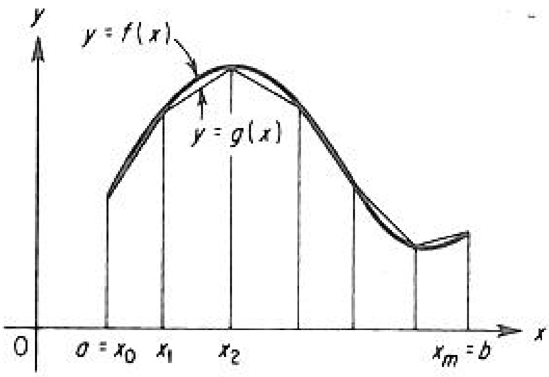


FIGURE 30

補題 2　関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で絶対積分可能である。このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して、

$$\int_a^b |\ f(x)-g(x)\ |\,dx\le\varepsilon \tag{2.5}$$

という式を満たすような連続で区分的に滑らかな関数 $g(x)$ が存在する。

なお、これの証明は第 2 章の式 (9.2) のときと同じようないくつかのアイデアのもとに成り立っている。

証明　関数 $f(x)$ は仮定より不連続な点を有限個しか持たず、とりわけ、有界でないような点を有限個しか持たない。なお、関数 $| f(x) |$ のそれらの区間における積分の和が $\frac{\varepsilon}{3}$ を超えないような小区間にそのような点 (不連続点) は含まれる。

※注意 ($| f(x) |$ の定積分の和について言及しているのはここで考えている $f(x)$ が任意の絶対積分可能な関数であるから。)(別にεでもいいのだが、後の三角不等式で使うため便宜上 3 で割ったものをとってきている。εは任意の正の数)(これは図形的に考えると、要は不連続点は高々有限個なので、そのような点 (不連続点) が含まれる区間を限りなく細く切り取れるということを示す。)

次に証明のために、それらの区間で 0 、それら以外の区間で $f(x)$ と等しくなるような関数 $\Phi(x)$ を定義する。つまりは、次の関数を定義する。

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & (\text{f(x) の不連続点が含まれる区間}) \\ f(x) & (\text{f(x) の不連続点が含まれない区間}) \end{cases}$$

$\Phi(x)$ は有界であり、不連続な点を有限個しか持たない。また、明らかに

$$\int_a^b | f(x) - \Phi(x) | \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.6}$$

である。

次に M を $a \leq x \leq b$ のとき、 $| \Phi(x) | < M$ を満たすような任意の正の数とする。そして、このとき

$$2ML \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

という条件をそれらを足した長さ L が満たすような $\Phi(x)$ のそれぞれの不連続な点を含んでいる小区間を考える。(なお、先ほどの証明と同様、L を構成する小区間の中に $\Phi(x)$ の不連続点は一つ)

ここで、丁度さっき記述した小区間で線形 (または、直線) となっており、それ以外の区間で $\Phi(x)$ と等しいような連続な関数 $F(x)$ を考える。そうすると、明らかに

$$\int_a^b | \Phi(x) - F(x) | \, dx \leq 2ML \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.7}$$

である。

(L は条件を満たすような、ある小さな正の数であり、M がどんな数でも、L に条件を満たすような十分小さな数を持ってくれば、(2.7) の不等式が成り立つような $F(x)$ で $\Phi(x)$ を限りなく近似できる。)

また最後に補題 1 により、$F(x)$ は連続な関数であるので

$$| F(x) - g(x) | \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad (a \leq x \leq b)$$

であるような連続で区分的に滑らか関数 $g(x)$ が存在する。

(ε を $3(b-a)$ で割ってあるのはあとで $|F(x)-g(x)|$ の閉区間 $[a,b]$ 上での定積分を考えた時にその図形的意味から、$\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}\times(b-a)$ となって上手く $\dfrac{\varepsilon}{3}$ という値が出てくるから。補題 1 の ε も任意の正の数であるから、何で割ろうとあまり関係ない。)

そして、このとき

$$\int_a^b |F(x)-g(x)|\,dx \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.8}$$

となる。そして最習的に (2.6),(2.7),(2.8) より、最初示したように

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx &= \int_a^b |[f(x)-\Phi(x)]+[\Phi(x)-F(x)]+[F(x)-g(x)]|\,dx \\ &\le \int_a^b |f(x)-\Phi(x)|\,dx + \int_a^b |\Phi(x)-F(x)|\,dx + \int_a^b |F(x)-g(x)|\,dx \le \varepsilon\end{aligned}$$

となる。

注意　もし関数 $f(x)$ が絶対積分可能な周期的な関数ならば、$g(x)$ も周期的となるようにとられる。

定理 2　任意の絶対積分可能な関数 $f(x)$ に対して、

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\cos mx\,dx = \lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\sin mx\,dx = 0 \tag{2.9}$$

という式が成り立つ。なお m は整数である必要はない。(実数の範囲内) (この結果は一般に Riemann-Lebesgue lemma, リーマン・ルベーグの補助定理と呼ばれる。)

証明　ε を任意のある正の数とする。補題 2 により、

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.10}$$

という式を満たすような連続で区分的に滑らかな関数 $g(x)$ が存在する。ここで、

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos mx\,dx\right| &= \left|\int_a^b [f(x)-g(x)]\cos mx\,dx + \int_a^b g(x)\cos mx\,dx\right| \\ &\le \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx + \left|\int_a^b g(x)\cos mx\,dx\right|\end{aligned} \tag{2.11}$$

という式を考える。部分積分により、

$$\int_a^b g(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{m}[g(x)\sin mx]_{x=a}^{x=b} - \frac{1}{m}\int_a^b g'(x)\cos mx\,dx$$

右辺の括弧と積分の式は明らかに有界である。それ故に、十分な大きさの m に対して、

$$\left|\int_a^b g(x)\cos mx\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.12}$$

という式が成り立ち、(2.10) と (2.12) によって、(2.11) から

$$\left|\int_a^b f(x)\cos mxdx\right| \leq \varepsilon$$

がすべての十分な大きさの m に対して成り立つ。すなわち、

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\cos mxdx = 0 \tag{2.13}$$

となる。また、これと同様の議論が (2.9) の二番目の項にも適用され、定理が証明される。

フーリエ係数を求める公式を思い返すと、この公式は次のように言い表わすことができる。

任意の絶対積分可能な関数のフーリエ係数は $n \to \infty$ のとき限りなく 0 に近づく。

このセクションの始めで、任意の二乗積分可能な関数に対するこの特性を証明し、今度はそれが絶対積分可能な関数に対しても成り立つことを確認した。そのため、関数が絶対積分可能かどうかという要件を見落とした場合、そのフーリエ係数は n が $n \to \infty$ と増加しても、0 に収束しないかもしれないということを念頭に置くべきである。

3.3 Formula for the Sum of Cosines.Auxiliary Integrals　コサインの和を求める公式、補助的な積分

これから、

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos nu = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}} \tag{3.1}$$

という式が成り立つことを証明する。

これを示すために、まず等式の左辺の和を S と記述するものとする。そうすると明らかに、

$$2S\sin\frac{u}{2} = \sin\frac{u}{2} + 2\cos u\sin\frac{u}{2} + 2\cos 2u\sin\frac{u}{2} + \cdots + 2\cos nu\sin\frac{u}{2}$$

となる。これの右辺のそれぞれの項に加法定理

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

を適用すると、

$$\begin{aligned} 2S\sin\frac{u}{2} = \sin\frac{u}{2} &+ \left(\sin\frac{3}{2}u - \sin\frac{u}{2}\right) + \left(\sin\frac{5}{2}u - \sin\frac{3}{2}u\right) + \cdots \\ &+ \left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)u\right) = \sin\left(n+\frac{1}{2}u\right) \end{aligned}$$

となる。よって、先にのべたように、

$$S = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

となる。

次に、2 つのより補助的な役割をする公式の証明をする。(3.1) の等式を閉区間 $[-\pi,\pi]$ 上で積分し、両辺を π で割ると、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\cdots+\cos nu\right)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$
$$\frac{1}{\pi}(\pi+0+0+\cdots+0)=\text{右辺}$$

より、

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du \tag{3.2}$$

という結果が n にどんな値を持ってきても得られる。この (3.2) の積分が偶関数となっていることを確かめるのは容易である。(なぜなら、 u の符号を変えても分子分母の両方の符号が変わるので、これらの比は実質そのままだから。) それ故に、

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=\frac{1}{2} \tag{3.3}$$

という式が成り立つ。

3.4 The Integral Formula for the Partial Sum of a Fourier Series, フーリエ級数の部分和を求める積分公式

関数 $f(x)$ を周期 2π の関数であると仮定し、さらに

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

であると仮定する。ここで、

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

と記述するものとし、これにフーリエ係数を求める式を代入する。そうすると、

$$\begin{aligned}
s_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt\cdot\cos kx+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt\cdot\sin kx\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt
\end{aligned}$$

となる。ここでさらに公式 (3.1) により、

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]}{2\sin[\frac{1}{2}(t-x)]}dt$$

ここで、変数を $t-x=u$ として置き換える。そうすると、結果は

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

となる。

ここで関数 $f(x+u)$ と

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

を考えると、これらは変数 u の周期に 2π を持つ周期関数であり、また (積分区間の) 閉区間 $[-\pi-x, \pi-x]$ は長さ 2π の区間である。よって $s_n(x)$ のこの区間における積分値と閉区間 $[-\pi, \pi]$ における積分値は同じであり、(第 1 章 1 節参照)

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du \tag{4.1}$$

となると分かる。このフーリエ級数の部分和を求める公式から、そのフーリエ級数がもとの $f(x)$ に収束するにはどのような条件が必要であるかということが分かる。

3.5 Right-Hand and Left-Hand Derivatives, 右導関数、左導関数

$f(x)$ が点 x において右側で連続であるとする。言い換えれば、$f(x+0) = f(x)$ であるとき、**極限**

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{f(x+u)-f(x)}{u} = f'_+(x) \tag{5.1}$$

が存在し、かつ、それが有限であるとき、$f(x)$ **は点** x **において右導関数をもつ**と言う。

一方 $f(x)$ が点 x において左側で連続であるとする。言い換えれば、$f(x-0) = f(x)$ ということであるとき、**極限**

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ u<0}} \frac{f(x+u)-f(x)}{u} = f'_-(x) \tag{5.2}$$

が存在し、かつ、それが有限であるとき、$f(x)$ **は点** x **において左導関数をもつ**と言う。

$f'_+(x) = f'_-(x)$ である場合、明らかにその関数 $f(x)$ は導関数を持ち、その点における右導関数と左導関数は同じ値を持つ (要は同じ微分係数を持つ。) これは幾何学的にみると、$y = f(x)$ の曲線と、縦軸に平行で横軸の座標が x の直線との交点において、曲線 $y = f(x)$ がある唯一の一本の接線をもっていることを表わしている。

これに対し、$f'_+(x), f'_-(x)$ の両方とが存在するが、等しくない場合、ここではその点 (点 x) を境としてそれぞれ左側と右側に異なる接線を持っているので曲線 $y = f(x)$ は点 x を「尖点」としてもつことになる。(次の図の矢印を見れば一目瞭然である。)

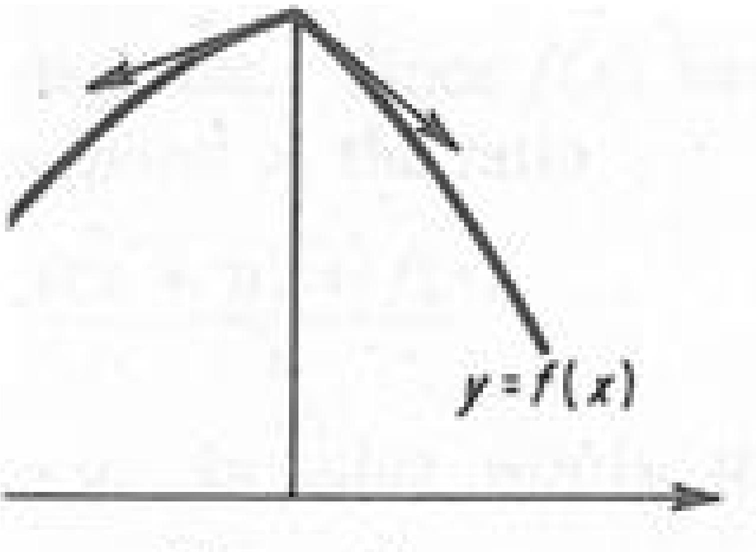


FIGURE 31

これから、この節における x を関数 $f(x)$ のジャンプ不連続点 (第一種不連続点) とする。(よって、その点において異なる右極限と左極限が存在する。) **このとき、(5.1) の代わりに極限**

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} = f'_+(x) \tag{5.3}$$

が存在し、かつ、それが有限であるとき、同様に、$f(x)$ **は点** x **において右導関数をもつ**と言う。同じようにして、(5.2) の代わりに、**極限**

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ u < 0}} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} = f'_-(x) \tag{5.4}$$

が存在し、かつ、それが有限であるとき、$f(x)$ **は点** x **において左導関数をもつ**と言う。

不連続な点 $x = x_0$ において右導関数が存在するということは、$x > x_0$ のとき $f(x)$ に等しく、$x = x_0$ のとき $f(x+0)$ に等しい曲線 $y = f'_+(x)$ が、点 $x = x_0$ において接線を持つことを表している。(そのことから分かるように $y = f'_+(x)$ は $x \geq x_0$ においてだけ定義される。)
同様の考え方で、不連続な点 $x = x_0$ において左導関数が存在するということは、$x < x_0$ のとき $f(x)$ に等しく、 $x = x_0$ のとき $f(x-0)$ に等しい曲線 $y = f'_-(x)$ が点 $x = x_0$ において接線を持つことを表している。(そのことから分かるように $y = f'_-(x)$ は $x \leq x_0$ においてだけ定義される。)

例として、次の図に示されている次の関数を考える。

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & (x < 1) \\ 0 & (x = 1) \\ \sqrt{x} & (x > 1) \end{cases}$$

この関数は $x = 1$ をジャンプ不連続点 (第一種不連続点) としてもち、明らかに、

$$f_+(x) = \sqrt{x} \qquad x \geq 1 \text{ のとき}$$
$$f_-(x) = -x^3 \qquad x \leq 1 \text{ のとき}$$

であり、それ故に、

$$f'_+(1) = (\frac{1}{2\sqrt{x}})_{x=1} = \frac{1}{2}$$
$$f'_-(1) = (-3x^2)_{x=1} = -3$$

この式が表わす接線は次の図のそれぞれの矢印が表わすものと一致する。

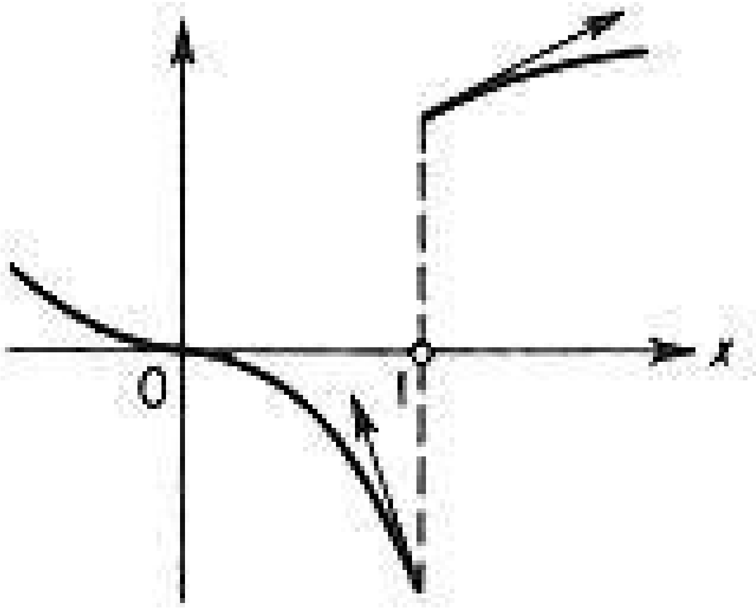


FIGURE 32

3.6 A Sufficient Condition for Convergence of a Fourier Series at a Continuity Point, 連続な点でフーリエ級数が収束するための十分条件

これから次の重要な事柄を証明する。

定理 $f(x)$ **を周期** 2π **の絶対積分可能な関数と仮定する。このとき、右導関数と左導関数が存在するすべての連続な点では** $f(x)$ **のフーリエ級数は** $f(x)$ **に収束する。とりわけ、このことは導関数が存在するすべての点についても言える。**

証明 x を $f(x)$ の連続な点とする。その定義からそこには右導関数と左導関数が存在する。ここでは

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$$

となることを示さなければならない。

※ $s_n(x)$ は $f(x)$ のフーリエ級数の部分和

(4.1) によれば、このことは

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du = f(x) \tag{6.1}$$

という式を証明することに置き換えられる。さらに言えば、(3.2) から、

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

なので、(6.1) の式は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du = 0 \tag{6.2}$$

という式に置き換えられ、最終的にはこれを示せば十分であることになる。

さて、まずは関数

$$\varphi(u) = \frac{f(x+u)-f(x)}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{f(x+u)-f(x)}{u}\frac{u}{2\sin\frac{u}{2}} \tag{6.3}$$

が u に関して絶対積分可能であることを証明する。(ここでは x は固定されている。) $f(x)$ は右側導関数と左側導関数を点 x に対して持っているので、比

$$\frac{f(x+u)-f(x)}{u} \tag{6.4}$$

は u を限りなく 0 に近づけても、有界なままであり、必ず値を持つ。言い換えれば、$-\delta \le u \le \delta$ のとき、

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\right| \le M = \text{定数}$$

という式を満たすような $\delta > 0$ が存在する。$u \neq 0$ のとき、この比は $f(x+u)$ がそこで不連続となっている点でだけ不連続となっている。(この比は u の関数) ただし関数 $f(x)$ は絶対積分可能であるので、関数 $f(x+u)$ は絶対積分可能であり、それ故に、関数 $f(x+u)$ は有限個しか不連続な点を持たない。それ故に、(6.4) の比は閉区間 $[-\delta,\delta]$ で絶対積分可能である。

閉区間 $[-\delta,\delta]$ 以外の区間では、(6.4) の比は絶対積分可能な関数 $f(x+u)-f(x)$ と有界な関数 $\dfrac{1}{u}$ の積であることから絶対積分可能である。($|u| \ge \delta$ であることは、$\left|\dfrac{1}{u}\right| \le \dfrac{1}{\delta}$ であることを暗示している。以上のことから最終的に (6.4) の比は閉区間 $[-\delta,\delta]$ 内であろうと、それ以外の区間であろうと絶対積分可能であると分かる。よって、このことから (6.4) の比は閉区間 $[-\pi,\pi]$ 上においても絶対積分可能であると分かる。

一方で、関数

$$\frac{u}{2\sin\dfrac{u}{2}} \tag{6.5}$$

は $u \neq 0$ のとき連続であり、$u \to 0$ のときの極限が 1 となる $u = 0$ を除くすべての点で有界な連続関数である。(なお、点 $u = 0$ ではこの関数は定義されていない。)

証明　公式

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

を利用すると、

$$\lim_{u \to 0} \frac{u}{2 \sin \frac{u}{2}} = \lim_{u \to 0} \frac{2 \cdot \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} = 1$$

以上のことから、(6.3) で定義された関数 $\varphi(u)$ は絶対積分可能な関数 (6.4) と有界な関数 (6.5) との積であるから、絶対積分可能な関数である。(1 章 4 節前半部分参照) $\varphi(u)$ が絶対積分可能であることを証明した以上、今後は

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u du$$

と記述するものとする。そして、これから (2.9)(リーマン・ルベーグの補助定理) を使うことで (6.2) の式が導かれる。

3.7 A Sufficient Condition for Convergence of a Fourier Series at a Point of Discontinuity, 不連続点におけるフーリエ級数が収束するための十分条件

次に以下のことを証明する。

定理　$f(x)$ **を周期** 2π **の絶対積分可能な関数とする。このとき、右側導関数と左側導関数が存在するすべての不連続な点では** $f(x)$ **のフーリエ級数は**

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

に収束する。

証明　(4.1) によれば、ここでは

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

となることを示さなければならない。だが、これを示すには

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{f(x+0)}{2} \tag{7.1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{f(x-0)}{2} \tag{7.2}$$

を示せば十分である。ここから (7.1) の証明を行っていくが、(7.2) を導くための証明は以下のものと本質的に同じなので省くものとする。

(3.3) によれば、

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

である。それ故に、(7.1) の代わりに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du = 0 \tag{7.3}$$

という式を証明すればそれで事足りると分かる。

さて、まずこれを示すのに変数 u の次の関数が閉区間 $[0,\pi]$ において絶対積分可能であることを証明する。

$$\varphi(u) = \frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\dfrac{u}{2}} = \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\frac{u}{2\sin\dfrac{u}{2}}$$

$f(x)$ は点 x において右導関数を持つから、比

$$\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u} \quad (u>0) \tag{7.4}$$

は $u\to 0$ のとき有界である。

(※なお、(7.2) を証明するためには (7.4) の代わりに

$$\frac{f(x+u)-f(x-0)}{u} \quad (u<0)$$

を考えなければならない。)

このことから、(6 節の (6.4) のときと同じように、) (7.4) は閉区間 $[0,\pi]$ で絶対積分可能である言うことができる。よって、関数

$$\frac{u}{2\sin\dfrac{u}{2}}$$

は有界な関数であるから、関数 $\varphi(u)$ は閉区間 $[0,\pi]$ で絶対積分可能であると分かる。よって、

$$\int_0^{\pi}[f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du = \int_0^{\pi}\varphi(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu$$

という式が導かれ、この式によって先ほどの最終目標であった (7.3) の式が導かれる。そして先ほど同様、(2.9) のリーマン・ルベーグの補助定理により、右辺 = 0 となる。

3.8 Generalization of the Sufficient Conditions Proved in Secs. 6 and 7　6、7 節で証明された十分条件の一般化

6,7 節で立証された十分条件を分析すると、

$$\frac{f(x+u)-f(x)}{u} \tag{8.1}$$

という比と

$$\begin{array}{ll} \dfrac{f(x+u)-f(x+0)}{u} & u>0 \\ \dfrac{f(x+u)-f(x-0)}{u} & u<0 \end{array} \tag{8.2}$$

という比の絶対積分可能性を証明できるようにするためだけに点 x における右導関数と左導関数の存在が主張されているということが言える。(なおこれらの式において x は固定されており、(8.1)(8.2) の比はここでは u の関数として考える。) したがって、この絶対積分可能性を考慮すると、(必要とされている右導関数と左導関数を考えなくてもいいようにすると、) つぎのより一般的な収束判定条件を考えることができる。

定理　周期 2π の絶対積分可能な関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、 $f(x)$ から作られる (8.1) の比が絶対積分可能な u の関数となるとき、すべての連続な点で $f(x)$ に収束し、$f(x)$ から作られる (8.2) の比が絶対積分可能であるとき、すべての不連続な点で

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

に収束する。

3.9 Convergence of the Fourier Series of a Piecewise Smooth Function(Continuous or Discontinuous) ,(連続または不連続な) 区分的に滑らかな関数のフーリエ級数の収束性

次の定理は第 6,7 節の結果を集約したものである。

定理　閉区間 $[a,b]$ 上で区分的に滑らかな周期 2π の周期関数 $f(x)$ が絶対積分可能ならば、その $f(x)$ のフーリエ級数は、開区間 (a,b) 上のすべての連続な点で $f(x)$ に収束し、そのような範囲の不連続な点で

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

に収束する。(端点 $x=a, x=b$ の収束性については言っていないことに注意)

証明　閉区間 $[a,b]$ で定義された区分的に滑らかな関数は開区間 (a,b) すべての点で必ず右導関数と左導関数をもつ。そのことから、第 6,7 節の諸々の定理を適用して分かる事実をまとめたものがこの定理である。

この定理は $f(x)$ が導関数をもつ点では明らかなことである。また「尖点」では、ロピタルの定理を使うと、ξ を $x<\xi<x+u$ とすると、$u\to 0$ のとき $\xi\to x, x<\xi$ なので、

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{f(x+u)-f(x)}{u} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} f'(\xi) = f'(x+0)$$

となる。同様にして、不連続な点では

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} f'(\xi) = f'(x+0)$$

となる。言い換えれば、このとき $f(x)$ は尖点と不連続点の両方で右導関数を持つと言える。また、これと同様にして $f(x)$ が尖点と不連続点の両方で左導関数を持つことも言える

閉区間 $[a,b]$ の端点 $x=a,b$ に関しては、この定理からは $x=a$ において右導関数が存在し、$x=b$ において左導関数が存在するということしか言うことができない。それ故に 6,7 節の諸定理はこれらの点では適用されない。よって以上のことから命題が成り立つ。

ただし、閉区間 $[a,b]$ の長さが 2π ならば、ここの $f(x)$ は周期 2π の周期関数であるので、$f(x)$ は x 軸 (実数軸) 全体で区分的に滑らかな関数であると容易に分かる。このとき、そのフーリエ級数はすべての点において収束する。

以上のことから、結果的にここでは第一章の 10 節の収束判定条件の最初の部分を証明することとなった。このときの $f(x)$ が連続関数であるときのそのフーリエ級数の絶対収束性と一様収束性に関して言っている第一章の 10 節の収束判定条件の 2 番目の部分は次の節で証明することになる。

3.10 Absolute Uniform Convergence of the Fourier Series of a Continuous, Piecewise Smooth Function of Period 2π, 周期 2π の連続で区分的に滑らかな関数のフーリエ級数の絶対収束性と一様収束性

$f(x)$ を連続で区分的に滑らかな周期 2π の周期関数とする。このとき、その $f(x)$ はその定義域から尖点を除くすべての点で導関数 $f'(x)$ をもつ。また、その $f'(x)$ は有界な関数である。(第一章 9 節参照) それ故にフーリエ係数を求める公式に部分積分 (法) を適用すると、

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi n}[f(x)\sin nx]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= -\frac{1}{\pi n}[f(x)\cos nx]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx
\end{aligned}$$

となる。そうすると、これらの式の右辺の括弧の項はどちらの式も 0 となって消える。そういうわけで、 関数 $f'(x)$ のフーリエ係数を a', b' と書くものとすると、

$$a_n = -\frac{b'_n}{n}, b_n = \frac{a'_n}{n} \tag{10.1}$$

と表せることが分かる。$f'(x)$ は有界であり、そのことから $f'(x)$ は二乗積分可能であると分かるので、1 節の定理から、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}({a'_n}^2 + {b'_n}^2) \tag{10.2}$$

は収束する。

次に

$$\left(|\, a'_n \,| - \frac{1}{n}\right)^2 = {a'_n}^2 - \frac{2\,|\, a'_n \,|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0$$
$$\left(|\, b'_n \,| - \frac{1}{n}\right)^2 = {b'_n}^2 - \frac{2\,|\, b'_n \,|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0$$

という不等式を考える。これを使うと、

$$\frac{|\, a'_n \,|}{n} + \frac{|\, b'_n \,|}{n} \leq \frac{1}{2}({a'_n}^2 + {b'_n}^2) + \frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

という不等式ができる。これを見ると、右辺の項はそれぞれ収束する級数の一般項である。したがって、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\, a'_n \,|}{n} + \frac{|\, b'_n \,|}{n}\right)$$

もまた収束する。よって、(10.1) から、任意の連続で区分的に滑らかな関数に対して、その関数のフーリエ級数を a_n, b_n とすると、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|\, a_n \,| + |\, b_n \,|) \tag{10.3}$$

が収束することが分かる。

注意　(10.3) の級数の収束性を証明するために、今回は級数 (10.2) の収束性だけを使った。$f'(x)$ が二乗積分可能であるとき [なお、 $f'(x)$ は周期毎に有限個その値が存在しない点を持つ可能性がある。$\longleftarrow$ $f(x)$ における尖点の部分]、この (10.2) の級数は必ず収束する。したがって、このとき (($f(x)$ が周期 2π の連続な周期関数のとき)(10.3) の級数もまた収束する。

これからとても単純だが、とても重要な事実を考える。

任意の関数のフーリエ級数となっているということが事前に想定されていない状態で、ある三角級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{10.4}$$

を仮定する。このとき、次のことが成り立つ。

定理 1　級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|\, a_n \,| + |\, b_n \,|) \tag{10.5}$$

が収束するならば、このとき無限級数 (10.4) は絶対収束および一様収束をし、それ故にフーリエ級数となる連続な和を部分和としてもつ。(第一章 6 節参照)

証明

$$| a_n \cos nx + b_n \sin nx | \leq | a_n \cos nx | + | b_n \sin nx | \leq | a_n + b_n |$$

であるので、(10.4) の三角級数の項は (10.5) の項の収束する数値を超えることはない。そして、ここでワイエルシュトラスの M テストを使うと、命題が証明される。

さらに、この定理と 9 節の定理を使うと、次のことが言える

定理 2　周期 2π の連続で区分的に滑らかな周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数は絶対収束、および一様収束をする。

この定理は第 1 節 10 章の収束判定条件の 2 番目の部分である。この定理から、周期 2π の連続で区分的に滑らかな関数 $f(x)$ はそのフーリエ級数の n に十分大きな値をもつ部分和 $s_n(x)$ によって上手く近似されると分かる。実際、このことは一様収束の意味そのものである。(第 1 章 4 節) 次の図のように、周期的で連続で、かつ区分的に滑らかな閉区間 $[-\pi,\pi]$ で $|x|$ に等しい関数 $f(x)$ を考える。第 1 章 13 節の例 2 で、

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\cdots\right) \qquad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

となることを証明した。

これに対し、次の図は、$f(x)$ のグラフと、そのフーリエ級数の $n = 5$ のときまでの部分和

$$s_5(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2}\right)$$

のグラフを表わしている。見て分かるように $n = 5$ の段階ですでに二つの曲線のグラフはかなり似ている。

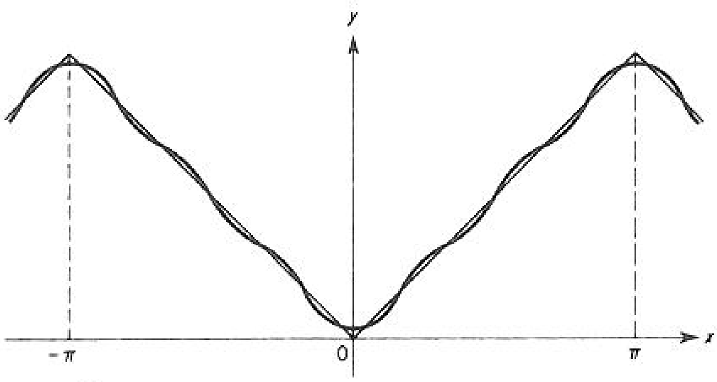


FIGURE 33

加えて、定理 1 を言う前に述べられた注意から、定理 2 を一般化して次のように言うことができる。

定理 3　二乗積分可能な導関数をもつ周期 2π の連続な関数 $f(x)$ のフーリエ級数は $f(x)$ に絶対収束、及び一様収束する。(ただ、導関数は尖点については考えないものとする。)

3.11 Uniform Convergece of the Fourier Series of a Continuous Function of Period 2π with an Absolutely Integrable Derivative, 絶対積分可能な導関数をもつ周期 2π の連続な関数のフーリエ級数の一様収束性

補題 1　関数 $f(x)$ を絶対積分可能な導関数をもつ、周期 2π の連続な関数と仮定し、(なお尖点については導関数は考えないものとする。) また、関数 $\omega(u)$ を $\alpha \le u \le \beta$ としたとき、連続な導関数をもつ関数とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 m (整数であるとは限らない) が十分に大きいと仮定したとき、すべての x の値に対して、不等式

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x+u)\omega(u)\sin mu du \right| \le \varepsilon \tag{11.1}$$

が成り立つ。

証明　(11.1) の左辺の絶対値の中身を部分積分すると

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(x+u)\omega(u)\sin mu du &= \frac{1}{m}[-f(x+u)\omega(u)\cos mu]_{u=\alpha}^{u=\beta} \\ &\quad + \frac{1}{m}\int_\alpha^\beta [f(x+u)\omega(u)]' \cos mu du \end{aligned} \tag{11.2}$$

という式が得られる。これをみると、明らかに右辺の括弧の項は有界である。また、

$$[f(x+u)\omega(u)]' = f'(x+u)\omega(u) + f(x+u)\omega'(u) \tag{11.3}$$

であるので右辺の積分もまた有界であると分かる。実際、$\omega(u)$ と $f(x+u)\omega'(u)$ は有界である。言い換えれば、これらは、その絶対値がある定数 M を超えないような値を持つ。このとき、(11.3) によれば、

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^\beta [f(x+u)\omega(u)]' \cos mu du \right| &\le \left| \int_\alpha^\beta [f(x+u)\omega(u)]' du \right| \\ &\le \left| \int_\alpha^\beta [f'(x+u)\omega(u) + f(x+u)\omega'(u)] du \right| \\ &\le \left| \int_\alpha^\beta f'(x+u)\omega(u) du \right| + \left| \int_\alpha^\beta f(x+u)\omega'(u) du \right| \\ &\le M \int_\alpha^\beta |f'(x+u)| du + M \left| \int_\alpha^\beta 1 du \right| \\ &\le M \int_\alpha^\beta |f'(x+u)| du + M(\beta-\alpha) \\ &\le M \int_{-\pi}^\pi |f'(u)| du + M(\beta-\alpha) \\ &= \text{定数} \end{aligned}$$

となる。なおここでは、 $f(x)$ が周期関数であるがゆえに、関数 $|f'(x)|$ も周期関数であるという事実を利用した。また、ここでは分かりやすさ、見やすさのために $\beta - \alpha \le 2\pi$ であるとものとした。

以上のことから、(11.2) の括弧と積分の項がともに有界であると分かった今では、(11.1) が妥当であることは明らかである。

補題 2　積分

$$I = \int_0^u \frac{\sin mt}{2\sin\frac{t}{2}} dt \tag{11.4}$$

は $-\pi \le u \le \pi$ **のとき任意の** m **に対して、有界である。**

証明

$$\omega(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$$

とおくと、

$$I = \int_0^u \frac{\sin mt}{t} dt + \int_0^u \omega(t)\sin mt dt \tag{11.5}$$

となる。ここでロピタルの定理を適用すると、[$\omega(0) = 0, \omega'(0) = \frac{1}{24}$ と置けば、] $\omega(t)$ と $\omega'(t)$ は連続であると分かる。よって、(11.5) の右辺の二つ目の積分の項は明らかに有界であると分かる。

確認

$$\omega(t) = \frac{t - 2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}$$

と直せ、

$$\lim_{t\to 0} \omega(t) = \frac{0}{0}$$

と不定形になるので、

$$\text{分子} = f(x), \text{分母} = g(x)$$

とおくと、

$$\lim_{t\to 0} f(x) = 0, \lim_{t\to 0} g(x) = 0$$

であり、$f(x), g(x)$ は明らかに C^2 級であることから、

$$f''(x) = \sin\frac{t}{2}$$
$$g''(x) = 4\cos\frac{t}{2} - t\sin\frac{t}{2}$$

より、ロピタルの定理を適用すると、

$$\lim_{t\to 0} \omega(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{t}{2} - t\sin\frac{t}{2}}$$
$$= \frac{0}{4} = 0$$

一方、 $t \ne 0$ のとき、明らかに $\omega(t)$ は 1 階微分可能であり、まずこのとき一度微分し整理すると、

$$\omega'(t) = \frac{4\sin^2\dfrac{t}{2} - t^2\cos\dfrac{t}{2}}{4t^2\sin^2\dfrac{t}{2}}$$

である。次に三角関数の 2 倍角の公式より、

$$\sin^2\frac{t}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2}$$

であるから、これを代入して、

$$\lim_{t\to 0}\omega'(t) = \lim_{t\to 0}\frac{4\sin^2\dfrac{t}{2} - t^2\cos\dfrac{t}{2}}{2t^2(1-\cos t)}$$

となる。先ほど同様、分子 $= f(t)$, 分母 $= g(t)$ とみると、$f(t), g(t)$ はその構成を考えると明らかに C^∞ である。$f(t), g(t)$ の導関数、二次導関数、三次導関数を求めると、

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2\sin t - 2t\cos\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2}\sin\frac{t}{2}\\
f''(t) &= 2\cos t - 2\cos\frac{t}{2} + 2t\sin\frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}\cos\frac{t}{2}\\
f'''(t) &= -2\sin t + 3\sin\frac{t}{2} + \frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\sin\frac{t}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(t) &= 4t - 4t\cos t + 2t^2\sin t\\
g''(t) &= 4 - 4\cos t + 8t\sin t + 2t^2\cos t\\
g'''(t) &= 12\sin t + 12t\cos t - 2t^2\sin t
\end{aligned}$$

となる。また、これらの点 $t \to 0$ のときの極限を実際に計算してみると、

$$\lim_{t\to 0} f'(0) = \lim_{t\to 0} f''(0) = \lim_{t\to 0} f'''(0) = 0$$

かつ、

$$\lim_{t\to 0} g'(0) = \lim_{t\to 0} g''(0) = \lim_{t\to 0} g'''(0) = 0$$

であるから、ロピタルの定理により、

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\omega'(t) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{-2\sin t + 3\sin\dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{2}t\cos\dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{8}\sin\dfrac{t}{2}}{12\sin t + 12t\cos t - 2t^2\sin t}
\end{aligned}$$

よって、分子・分母を t で割って、

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\omega'(t) &= \lim_{t\to 0}\frac{(-2)\dfrac{\sin t}{t} + 3\dfrac{\sin\dfrac{t}{2}}{t} + \dfrac{3}{2}\cos\dfrac{t}{2} - \dfrac{t}{8}\sin\dfrac{t}{2}}{12\dfrac{\sin t}{t} + 12\cos t - 2t\sin t}\\
&= \frac{(-2) + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} - 0}{12 + 12 - 2\times 0} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

となる。

一方で、 $mt = x$ とおくと、

$$\int_0^u \frac{\sin mt}{t} dt = \int_0^{mu} \frac{\sin x}{x} dx$$

となるが、右辺の積分は $y = \dfrac{\sin x}{x}$ の曲線の最初の「コブ」の部分の値を超えることはないと簡単に分かる。それ故、右辺の両方の積分が有界と分かり、積分 I は有界と分かる。

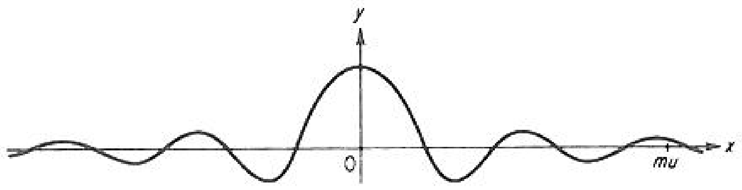


FIGURE 34

数式によるの証明　(**i**)$m = 0$ または $u = 0$ のとき

$$\int_0^{mu} \frac{\sin x}{x} dx = 0$$

(**ii**)$0 < u \leq \pi, m \to \infty$ のとき

このとき、すなわち $mu \to \infty$ であるとき、

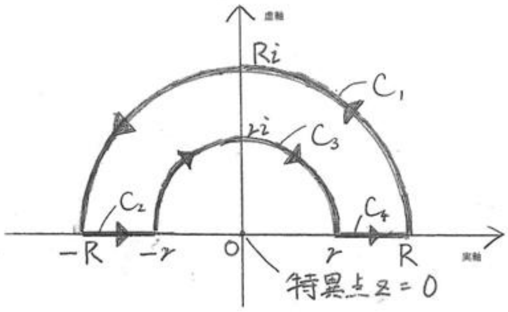
$$\lim_{mu\to\infty} \int_0^{mu} \frac{\sin x}{x} dx \leq M(M \text{ は定数})$$

であるような M が存在することを示す。

まず、 r, R を $0 < r < R$ であるような実数, t を媒介変数 として、図のような積分路

$$\begin{aligned}
&C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\
&C_1 : z = Re^{it}(t \text{ は } 0 \to \pi), C_2 : z = t(t \text{ は } -R \to -r) \\
&C_3 : z = Re^{it}(t \text{ は} \pi \to 0), C_4 : z = t(t \text{ は } r \to R)
\end{aligned}$$

に沿った一周線積分 $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz$ を考える。



$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ とおくと、$f(z)$ は積分路 C 上及びその内部に特異点を持たず、それらの領域において、$f(z)$ は正則である。よって、コーシーの積分定理より、

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

よって、$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ より、

$$0 = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz$$

ここで、項別に考えていく。

$$\begin{aligned}\int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz &= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}\frac{dz}{dt}dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t}\frac{dz}{dt}dt \\ &= \int_R^r \frac{e^{i(-s)}}{-s} \cdot 1 \cdot -ds + \int_r^R \frac{e^{it}}{t} \cdot 1 \cdot dt\end{aligned}$$

(第 1 項において $-t = s$ と置いた。)

よって、

$$\begin{aligned}\int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz &= \int_r^R -\frac{e^{-ix}}{x}dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx \\ &= \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx \\ &= 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx\end{aligned}$$

次に $\int_{C_1} f(z)dz$ について考える。

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_1} f(z)dz\right| &= \left|\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}dz\right| \\
&= \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it}dt\right| \\
&= \left|\int_0^{\pi} ie^{iRe^{it}}dt\right| \\
&= \left|\int_0^{\pi} ie^{iR(\cos t + i\sin t)}dt\right| \\
&= \left|\int_0^{\pi} ie^{iR\cos t - R\sin t}dt\right| \\
&\leq \int_0^{\pi} |\, i \,| \left|e^{iR\cos t}\right| \cdot e^{-R\sin t}dt \\
&= \int_0^{\pi} 1 \cdot 1 \cdot e^{-R\sin t}dt \\
&= \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}dt
\end{aligned}
$$

よって、$I(t) = -R\sin t$ のグラフが $t = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であることと併せて、

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_1} f(z)dz\right| &\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}dt \\
&\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}t}dt
\end{aligned}
$$

(なぜならば、閉区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ では、$\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ であるので、$e^{-R\sin t} \leq e^{-\frac{2R}{\pi}t}$)

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\pi}{R}\left[e^{-\frac{2R}{\pi}t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{e^R}\right)
\end{aligned}
$$

よって挟みうちの原理より、

$$
\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz = 0 \cdot 1 = 0
$$

そして最後に、$\displaystyle\int_{C_3} f(z)dz$ について考える。

$$
\begin{aligned}
\int_{C_3} f(z)dz &= \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z}dz \\
&= \int_{\pi}^{0} \frac{e^{iz}}{z}\frac{dz}{dt}dt \\
&= \int_{\pi}^{0} \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}} ire^{it}dt \\
&= i\int_{\pi}^{0} e^{re^{it}}dt
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\lim_{r\to 0}\int_{C_3} f(z)dz = i\int_{\pi}^{0} e^{0}dt = i\int_{\pi}^{0} 1dt = -\pi i
$$

よって以上のことから、

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz \\
&\Longrightarrow \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz = -\left(\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz\right) \\
&\Longrightarrow 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx = -\left(\int_{C_1} f(z)dz + i\int_\pi^0 e^{re^{it}}dt\right)
\end{aligned}
$$

であり、$r \to 0, R \to \infty$ のとき、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx = -\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \left(\int_{C_1} f(z)dz + i\int_\pi^0 e^{re^{it}}dt\right) \\
&\Longrightarrow 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = -(0-\pi i)
\end{aligned}
$$

よって、

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

よって、$M = \dfrac{\pi}{2}$ と置けばよい。

(ⅲ) $-\pi < u < 0, m \to \infty$ **のときすなわち、**$mu \to -\infty$ **のとき**

$\dfrac{\sin x}{x}$ は偶関数であるから、

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

であり、

$$\int_0^{-\infty} \frac{\sin x}{x}dx = -\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\pi}{2}$$

よって以上のことから、$-\pi \le u \le \pi, m$ は任意の数 に対して、

$$\left|\int_0^{mu} \frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{\pi}{2}$$

であり、これは $\displaystyle\int_0^{mu} \frac{\sin x}{x}dx$ が有界であることを示す。

定理　絶対積分可能であるような導関数をもつ周期 2π **の連続な周期関数** $f(x)$ **のフーリエ級数は、すべての** x **の値において** $f(x)$ **に一様収束する。(なお、尖点については** $f(x)$ **の導関数は考えないものとする。)**

証明　まず、すでに 6 節で出てきた (ここでは $m = n + \frac{1}{2}$ と置いた。) 差

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u) - f(x)]\frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}}du \tag{11.6}$$

を考える。

十分に小さい $\varepsilon > 0$ であるような ε を選び δ を $0 < \delta < \pi$ であるような数と仮定する。そして (11.6) の積分を閉区間 $[-\delta, \delta], [\delta, \pi], [-\pi, -\delta]$ での 3 つの積分 I_1, I_2, I_3 にそれぞれ分ける。部分

積分法により、

$$I_1 = \left[(f(x+u) - f(x)) \int_0^u \frac{\sin mt}{2\sin\frac{t}{2}} dt \right]_{u=-\delta}^{u=\delta} - \int_{-\delta}^{\delta} \left[f'(x+u) \int_0^u \frac{\sin mt}{2\sin\frac{t}{2}} dt \right] du$$

となる。右辺の最初の項の値を求めると、関数 $\frac{\sin mt}{2\sin\frac{t}{2}}$ が偶関数であることを利用して、

$$[(f(x+\delta) - f(x)) + (f(x-\delta) - f(x))] \int_0^{\delta} \frac{\sin mt}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

となり、これはこの項が十分に小さなすべての δ に対して、その絶対値が $\frac{\varepsilon}{2}$ を超えないことを示している。なぜなら、$f(x)$ は連続であり、補題 2 によりその積分は有界であるからである。

積分

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} | f'(t) | dt$$

は、連続な関数 $f(x)$ の増分

$$\int_{x_0}^{x} | f'(t) | dt \qquad (x_0\text{は固定されている。})$$

なので、それ故に δ が極小のとき、

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} | f'(t) | dt$$

も極小である。(ここの証明においては、一般性を失わずに $-\pi \leq x \leq \pi$ と想定できる。) よって補題 2 により、二つ目の項は M をある定数としたとき、十分小さなすべての δ に対して、

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} \left[f'(x+u) \int_0^u \frac{\sin mt}{2\sin\frac{t}{2}} dt \right] du \right| \leq M \int_{-\delta}^{\delta} | f'(x+u) | du = M \int_{x-\delta}^{x+\delta} f'(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

という不等式が成り立つ。以上のことから最終的に、 x にどんな値をもってきても、 δ に十分小さな値をもってこれば、

$$| I_1 | \leq \varepsilon$$

となる。さらに、 n に十分大きな値を持ってこれば

$$| I_2 | \leq \left| \int_{\delta}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}} du \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} f(x) \frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}} du \right| \leq \varepsilon$$

となる。これは、

$$\omega(u) = \frac{1}{2\sin\dfrac{u}{2}}, \alpha = \delta, \beta = \pi$$

と置けば、補題 1 が成り立つことからきている。

また、これらと同様の不等式が I_3 に対しても与えられる。よって、これらの結果を組み合わせると、n に十分大きな値をとれば

$$| s_n(x) - f(x) | = \frac{1}{\pi}[I_1 + I_2 + I_3] \le \frac{3\varepsilon}{\pi} < \varepsilon$$

という式がどんな x に対しても成り立つと分かる。

3.12 Generalization of the Results of Sec.11, 第11節の結果の一般化

もし、 $f(x)$ がすべての区間でなく、いくつかの区間だけで連続かつ絶対積分可能な導関数を持つならば、フーリエ級数の収束性について何が言えるだろうか。

今から、この問いに関して調べていく。まずは 11 節の補題 1 をより強力なものとする

補題　関数 $f(x)$ **を周期** 2π **の絶対積分可能な関数と仮定し、** $\omega(u)$ $(\alpha \le u \le \beta)$ **を連続な導関数を持つ関数とする。このとき、** $\varepsilon > 0$ **にどんな値を持ってきても、** m (整数でなくてもよい。) **が十分に大きな値をとるならば、すべての** x **に対して、不等式**

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x+u)\omega(u) \sin mu du \right| \le \varepsilon \tag{12.1}$$

が成り立つ。

証明　$| \omega(u) | \le M$, (M は定数) とし、不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) - g(x) | dx \le \frac{\varepsilon}{2M}$$

を満たす、周期 2π の連続かつ区分的に滑らかなある関数 $g(x)$ を選ぶ。

(2 節の補題 2 と注意参照) このとき、

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x+u)\omega(u) \sin mu du \right| \\ &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} [f(x+u) - g(x+u)]\omega(u) \sin mu du + \int_{\alpha}^{\beta} g(x+u)\omega(u) \sin mu du \right| \\ &\le \int_{\alpha}^{\beta} | [f(x+u) - g(x+u)]\omega(u) | du + \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(x+u)\omega(u) \sin mu du \right| \end{aligned} \tag{12.2}$$

m が十分に大きいならば、そのときは 11 節の補題 1 によって、最後の項は $\frac{\varepsilon}{2}$ を超えることはない。一方、

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} | [f(x+u) - g(x+u)]\omega(u) | du \\ &\le M \int_{\alpha}^{\beta} | f(x+u) - g(x+u) | du \le M \int_{-\pi}^{\pi} | f(x) - g(x) | dx \le \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{12.3}$$

である。なお、ここでは差 $f(x) - g(x)$ の周期性を使い、 $\beta - \alpha \le 2\pi$ であると想定した。以上のことから、(12.2) が (12.1) を示す。

定理　$f(x)$ **をいくつかの閉区間** $[a, b]$ **で絶対積分可能な導関数をもつ、連続な周期** 2π **の絶対積分可能な周期関数とする。(その導関数はいくつかの点で存在しなくてもよい。) このとき、その関数** $f(x)$ **のフーリエ級数は** $[a+\delta, b-\delta], (\delta > 0)$ **であるようなすべての区間で** $f(x)$ **に一様収束する。**

証明　もし閉区間 $[a, b]$ の長さが少なくとも 2π あるならば、$f(x)$ がすべての点 x において連続で、絶対積分可能な導関数をもつことは明らかであるので、11 節の定理により、そのフーリエ

級数は実数軸 (x 軸) 全体において、一様収束することが分かる。そういうわけで、閉区間 $[a, b]$ の長さが 2π より小さいときのことをここでは想定する。

ここで、$a \le x \le b$ のとき $f(x)$ に等しく、$x = a + 2\pi$ のとき、$f(a)$ に等しく、かつ、閉区間 $[b, a + 2\pi]$ で直線となっている周期 2π の連続な補助関数 $F(x)$ を考える。(次の図参照) なお、$[a, a + 2\pi]$ 以外の区間では $F(x)$ の値は周期的拡張によって与えられているものとする。($F(x)$ は有界な連続関数なので、)$F(x)$ が絶対積分可能な導関数をもつことは容易に分かる。

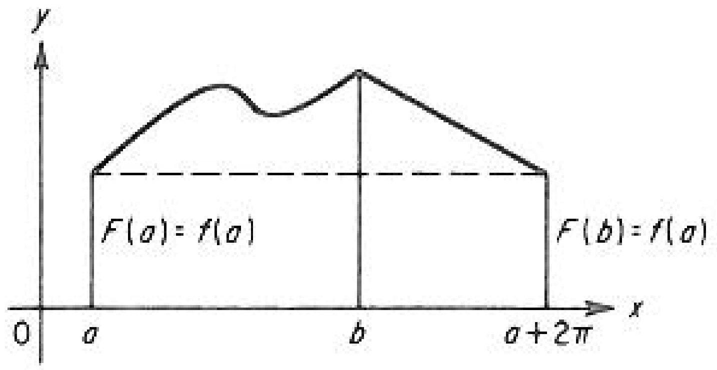


FIGURE 35

次に、$\Phi(x) = f(x) - F(x)$ と置く。この関数は $a \le x \le b$ のとき、絶対積分可能かつ、$\Phi(x) = 0$ である。よって、明らかに

$$f(x) = F(x) + \Phi(x)$$

であり、$m = n + \dfrac{1}{2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} s_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[F(x+u) - F(x)]\frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}}du \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\Phi(x+u) - \Phi(x)]\frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}}du \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{12.4}$$

となる。($s_n(x)$ は第 3 章 4 節で出てきたフーリエ級数の部分和の式) $\varepsilon > 0$ は任意の数とする。11 節の定理により、$F(x)$ のフーリエ級数は $F(x)$ に一様収束する。よって、n に十分の大きな値をとれば、すべての x に対して、

$$|I_1| \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{12.5}$$

となる。

次に、$a + \delta \le x \le b - \delta$ と仮定する。このとき、$\Phi(x) = 0$ であり、それ故に、

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x+u)\frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

となる。さらにもし、$-\delta \le u \le \delta$ ならば、今考えている x の値に対して、

$$a \leq x+u \leq b$$

となり、それ故に、

$$\Phi(x+u)=0$$

となる。それ故に、

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi(x+u)\frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}}du + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi(x+u)\frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

となり、あとは、ちょうど先ほど証明した補題をこれらの積分にそれぞれ適用するだけである。結果、閉区間 $[a+\delta, b-\delta]$ と十分に大きな n に対して、

$$I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{12.6}$$

となると分かる。よって、最終的に (12.3) によって、(12.4) や (12.5) から、n に十分大きな値を持ってこれば、閉区間 $[a+\delta, b-\delta]$ のすべての x に対して、

$$|\, s_n(x) - f(x)\, | \leq |\, I_1\, | + |\, I_2\, | \leq \varepsilon$$

となると分かる。よって、このことから、定理が成り立つと分かる。

※とりわけ、この定理は閉区間 $[a, b]$ で区分的に滑らか、かつ連続な周期 2π の絶対積分可能な周期関数 $f(x)$ に対して有効である。

この定理を図示化するために $0 < x < \pi$ のとき $\frac{\pi}{4}$ に等しく、$-\pi < x < 0$ のとき $-\frac{\pi}{4}$ に等しい周期 2π の奇関数を考える。第 1 章 13 節の例 5 で、それは、$x \neq k\pi$ のとき、

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots$$

となり、一方、 $f(k\pi) = 0, (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ となる関数であることが示された。

次の図には $f(x)$ のグラフと、そのフーリエ級数の部分和のグラフがいくつか描かれている。

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= \sin x \\
s_3(x) &= \sin x + \frac{\sin 3x}{3} \\
s_5(x) &= \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \\
s_7(x) &= \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}
\end{aligned}$$

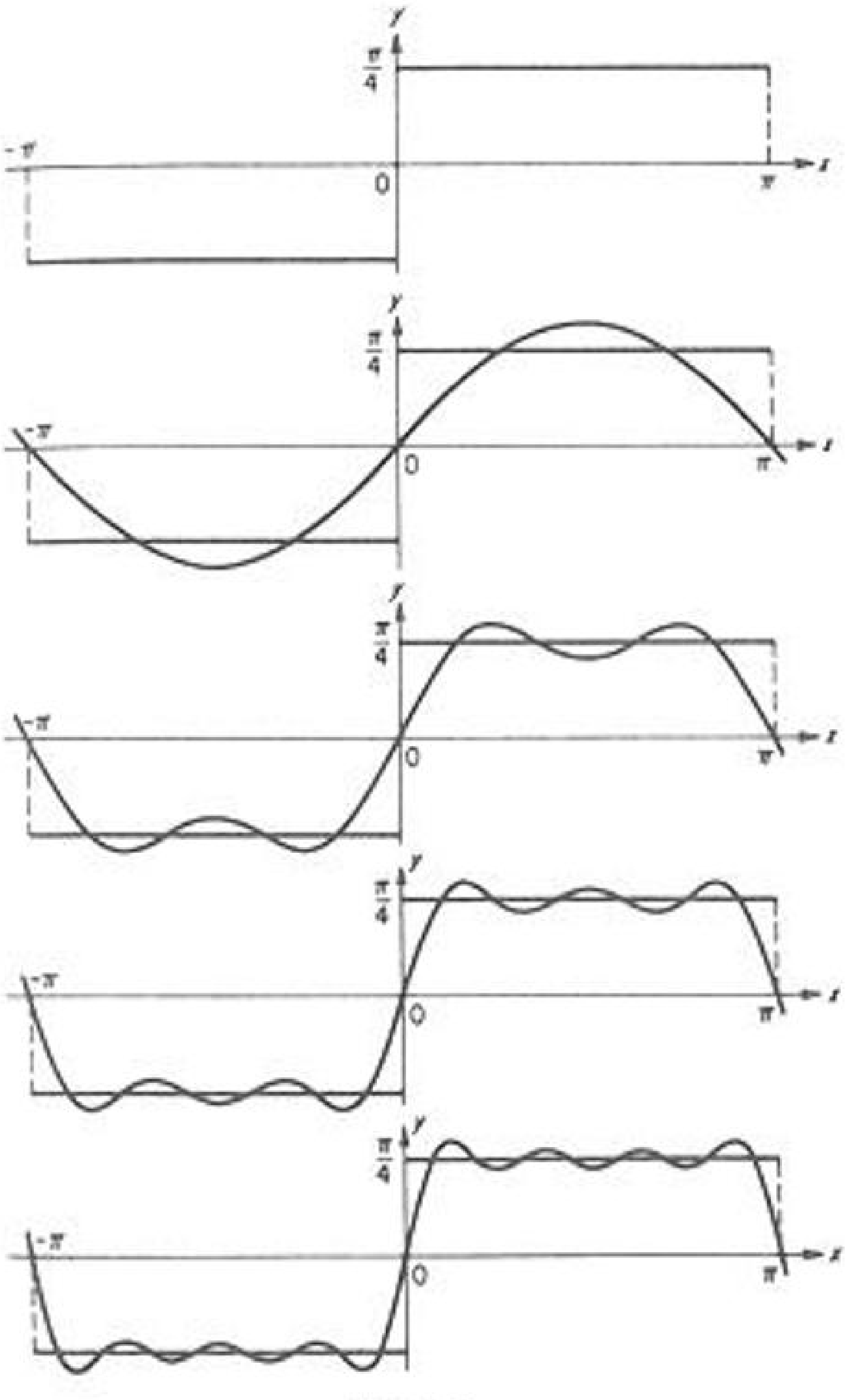


FIGURE 36

この図は明らかに閉区間 $[-\pi+\delta,-\delta]$ と $[\delta,\pi-\delta]$, $(\delta>0)$ で滑らかな関数 $f(x)$ のフーリエ級数の部分和による近似の一様性を示している。なお、δ という数は十分小さくなるように選ぶことができる。(ただし、δ は正の数であるので、0 になることはない。)

δ がだんだん小さくなるにつれて、先ほど記述した区間でより精密に $f(x)$ に近似するために、(より厳密には、ある特定の精度まで $f(x)$ に近似するために) より多くの項をもつ部分和をもってくる必要になってくることは容易に分かる。

3.13 The Localization Principle, 局所化の原理

小さい区間でさえ、関数 $f(x)$ の値が変わると、そのフーリエ係数の値はかなり変わる。ただ、**ある絶対積分可能な関数 $f(x)$ が点 x で右導関数と左導関数をもつ、もしくは、$f(x)$ が連続かつ x の近傍で絶対積分可能な導関数をもつならば、そのときは第 6,7,12 節の証明から、たとえ、その点 x の近傍以外の $f(x)$ の値が変えられたとしても、そのフーリエ級数は変わらず収束する。**この事実は**「The Localization Principle, 局所化の原理」**として知られる、次の定理の特別な場合である。

定理,(局所化の原理)　絶対積分可能な関数 $f(x)$ のある点 x におけるフーリエ級数の性質は、十分小さな点 x の近傍においては x の値だけが関係する。

この定理はそのような絶対積分可能な $f(x)$ のフーリエ級数が点 x で元々収束するならば、そのときはその点 x の近傍以外の点の値をたとえ変えたとしても、そのフーリエ級数は相変わらず収束し、一方、そのフーリエ級数が点 x で元々発散するならば、その時には上と同じ処理をしても、そのフーリエ級数は変わらず発散することを示している。

証明　フーリエ級数の部分和を求める積分公式を利用する。(第 4 節参照)

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}}du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}}du + I_1 + I_2 \end{aligned}$$

なお、ここでは $m=n+\dfrac{1}{2}$ とする。この式における δ は任意の小さな正の数であり、I_1, I_2 はそれぞれ区間 $[\delta,\pi], [-\pi,-\delta]$ における積分である。これらの区間で、関数

$$\frac{1}{2\sin\dfrac{u}{2}}$$

は $(|u|\geq\delta$ なので$)$ 連続であり、それ故に、関数

$$\varphi(u) = \frac{f(x+u)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

は絶対積分可能であると分かる。また、このとき (2.9) により、積分

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\varphi(u)\sin mu du$$

は $m\to\infty$ のとき、0 に近づく。I_2 についてもこれと同様のことが言える。以上のことから、フーリエ級数の部分和が点 x で極限をもつかどうかということは、$m\to\infty$ のときの積分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{\sin mu}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

の性質に依存する。なお、この積分はその点 x の近傍 $[x-\delta, x+\delta]$ において関数 $f(x)$ の値だけに依存する積分である。これが命題 (局所化の原理) を証明する。

3.14 Examples of Fourier Series Expansion of Unbounded Functions, 有界でない関数のフーリエ級数展開の例

例 1

$f(x) = -\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ と仮定する。この関数は偶関数であり、また、これは点 $x = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ で非有界になる関数である。さらに言えば、

$$\left|2\sin\frac{x+2\pi}{2}\right| = \left|2\sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right| = \left|-2\sin\frac{x}{2}\right| = \left|2\sin\frac{x}{2}\right|$$

より、

$$\log\left|2\sin\frac{x+2\pi}{2}\right| = \log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$$

なので、 $f(x)$ は周期関数である。$f(x)$ のグラフを示すと、次の図のようになる。

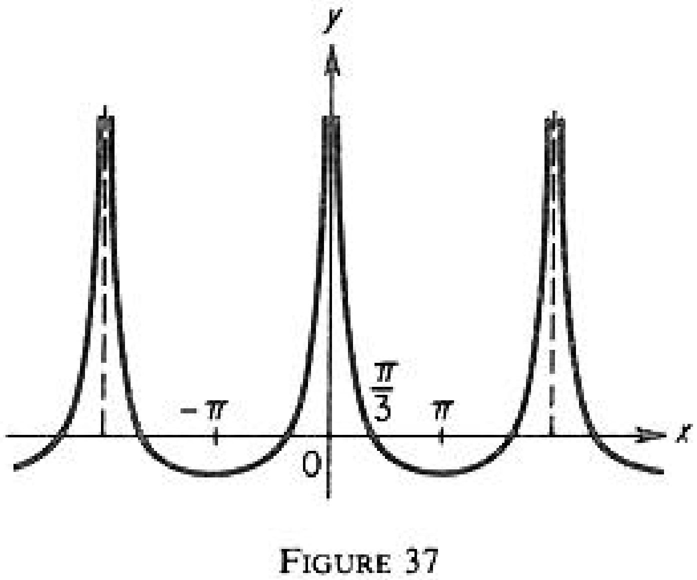


FIGURE 37

$f(x)$ のグラフから、$f(x)$ が積分可能であることを証明するには、これが閉区間 $[0, \frac{\pi}{3}]$ で積分可能であることを証明すれば十分である。

$$-\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \log\left|2\sin\frac{x}{2}\right| dx = -\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right) dx$$
$$= -\left[x\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\right]_{x=\varepsilon}^{x=\frac{\pi}{3}} + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} dx$$
$$= \varepsilon\log\left(2\sin\frac{\varepsilon}{2}\right) + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} dx$$

となる。($0 < x < \dfrac{\pi}{3}$のとき、$2\sin\dfrac{x}{2} > 1$ なので、ここでは絶対値の記号を外した。) ロピタルの定理を利用すると簡単に分かるように、 ε がだんだん 0 に近づくにつれて、$\varepsilon\log\left(2\sin\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ という量はだんだん 0 に近づく。

> ※ $0 \times$(不定) の不定型になってしまうので直接 与式 $= 0$ としてはいけない。まずロピタルの定理により、$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}$ を求めると、
>
> $$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\cos\frac{\varepsilon}{2}} = 1$$
>
> よって、$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 = 0$ より、
>
> $$\text{与式} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 = 1 \cdot 0 = 0$$
>
> となる。

一方、後ろの項の積分は、

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} dx$$

という積分に収束する。なお、この積分はその被積分関数が有界であることから、明らかに値をもつ (発散しない)。

> **確認**　$f(x) = \dfrac{x\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$ とおくと、$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ のとき、
>
> $$\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$$
>
> また、
>
> $$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} \cdot \cos\frac{x}{2} = 1 \cdot 1 = 1$$
>
> よって、

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq M$$

であるような定数 M が存在する。

以上のことから、極限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{3}} \log\left|2\sin\frac{x}{2}\right| dx$$

は存在し、つまりは $f(x)$ は閉区間 $[0, \frac{\pi}{3}]$ で積分可能であると分かる。さらに言えば、 $f(x)$ は閉区間 $[0, \frac{\pi}{3}]$ では、その符号は変わらないので絶対積分可能である。(図参照)

$f(x)$ は偶関数であるので、

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ a_n &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

となる。

まず始めに、積分

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\pi}\left(\log 2 + \log\sin\frac{x}{2}\right) dx = \pi\log 2 + \int_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2} dx \end{aligned}$$

を考える。この積分 I の後ろの項を Y で記述することにし、 $x = 2t$ とすると、

$$\begin{aligned} Y &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right) dt \\ &= \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t}{2} dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\frac{t}{2} dt \end{aligned}$$

これに、$t = \pi - u$ を代入すると、

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\frac{t}{2} dt = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin\frac{u}{2} du = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin\frac{t}{2} dt$$

となる。それ故に、$Y = \pi\log 2 + 2Y$ なので、

$$Y = -\pi\log 2$$

である。このことは、$I = 0$ であることを示しており、このことから、$a_0 = 0$ と分かる。

さらに、部分積分法により、

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\sin nx}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} dx\right\} \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx \end{aligned}$$

となる。(ロピタルの定理を使うことで、$x \to 0$ のときの「不定性」は簡単に取り除かれ、最初の括弧の項は 0 になって消える。) なお、

$$\sin nx\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right]$$

であり、それ故に

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx$$

となる。これに 3 節の公式 (3.3) を適用して、

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

関数 $f(x)$ は $x \neq 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ のとき明らかに導関数をもつので、第 6 節の定理から、$x \neq 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ のとき

$$-\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots \tag{14.1}$$

となる。なお、 $x = 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ のときは (14.1) の両辺が無限となることに注意すべきである。

確認　$x = 2k\pi \quad$ (k は任意の整数) を $\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ に代入すると、$|2\sin k\pi| = 0$

よって、左辺は k を任意の整数として

$$\lim_{x\to 2k\pi} -\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = -\lim_{x\to 0+0}\log|\,x\,| = \infty$$

一方、右辺 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos mx}{m}$ は

$$\begin{aligned}
右辺 &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos mx}{x} \\
&= \cos 2k\pi + \frac{\cos 4k\pi}{2} + \frac{\cos 6k\pi}{3} + \cdots\cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

ここで、級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ の第 n 部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ を考える。

$k \geq x \geq 1$ のとき、すなわち $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k} \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
&\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx < \int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx \\
&\Longrightarrow \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx < \frac{1}{k} \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&[\log|\,x\,|]_1^{n+1} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&\log(n+1) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots
\end{aligned}$$

よって、$\lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$ であるので、比較判定法により、右辺の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ も ∞ に発散すると分かる。

以上のことから、この意味で等式 (14.1) はすべての x に対して有効であると捉えることができる。(14.1) の式において $x = \pi$ を代入すると、有名な式

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

が出てくる。

例 2

$f(x) = \log\left|2\cos\frac{x}{2}\right|$ と仮定する。この関数は偶関数であり、$x = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ のとき、その値が $-\infty$ に向かう関数である。$x = t - \pi$ とおくと、

$$\log\left|2\cos\frac{x}{2}\right| = \log\left|2\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$$

となり、つまりは関数 $\log\left|2\cos\frac{x}{2}\right|$ のグラフは、関数 $\log\left|2\cos\frac{x}{2}\right|$ のグラフを π だけ x 軸 (実数軸) の正の方向に平行に移動させたものであると分かる。$f(x)$ のフーリエ級数展開を考えるには、級数

$$\log\left|2\sin\frac{t}{2}\right| = -\cos t - \frac{\cos 2t}{2} - \frac{\cos 3t}{3} - \cdots$$

に $t = x + \pi$ を代入すれば十分であると分かる。結果、$x \neq (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ のとき、

$$\log\left|2\cos\frac{x}{2}\right| = \cos x - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} - \cdots \tag{14.2}$$

となる。さらに、$x = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ のときは、両辺は限りなく $-\infty$ に近づくので、この等式 (14.2) はすべての x に対して有効であると言える。

(例 1 のときと同様に考えて発散することが分かる。)

3.15 A Remark Concerning Functions of Period $2L$, 周期 $2L$ の周期関数に関する注意

この章と後の章の定理の疑問について論議するとき、周期 $T = 2L$ の周期関数のフーリエ級数展開についてはなにも言っていない。しかし、第 1 章と第 2 章の内容をよく読んでいる読者は「標準的な」周期 2π の場合から、任意の周期の場合へと変形するのに苦労しないだろう。(要するに、周期 $2L$ の場合については、1,2 章のように変数を変形して同様に考えられる。)