

円形流の境界層に関する考察

Considerations on the boundary layer of circular flow

目次

第 1 章	Introduction	1
1.1	初めに	1
1.2	方程式 (1.4) の導出	5
第 2 章	定理 1.3 の証明	8
2.1	定理 1.3 の解 (1.8) の形式的な導出	8
2.2	定理 1.3 の解 (1.8) および、その形式的な偏導関数の $t > 0$ における一様収束の証明	14
付 録 A	直交直線座標系における粘性流体・Navier-Stokes 方程式に関して	18
A.1	粘性流体に関する定義・概念	18
A.2	非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の特殊解の例（平行流）	19
付 録 B	(1.5) の定常解	25
付 録 C	ベッセル関数、修正ベッセル関数に関して	28
C.1	補題 2.2、命題 2.6、命題 2.8 の証明	28
C.2	ベッセル関数のいくつかの性質	43
付 録 D	Fourier-Bessel 級数に関して	52

第1章 Introduction

1.1 初めに

この論文では、現実には存在する水などといった液体をモデル化した、密度一定な ($\nabla \rho = 0$) 非圧縮性 ($\text{div } \mathbf{u} = 0$) 粘性流体の 2 次元流の運動を扱うものとする。それを記述する基礎方程式は、以下の空間 2 次元の密度一定な非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (以下、NS 方程式、付録 A.1 節参照)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{x}, t) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

である。本論文では、これのある条件下での特殊解を考える。なお、ここでは外力無しのもの扱うものとする。(1.1) も外力無しとしてある。記号の意味は次の通りである。

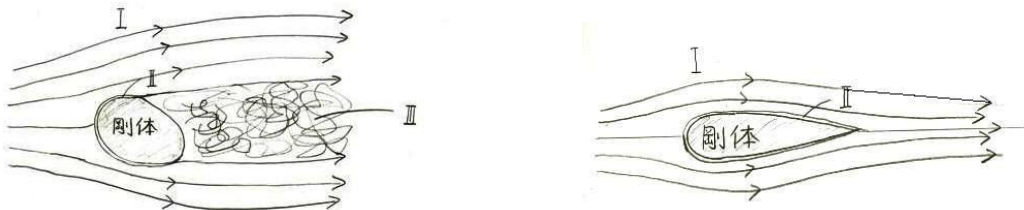
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ 時刻 t で点 \mathbf{x} を通る流体粒子の速度ベクトル
 ρ 流体粒子の質量密度 (正の定数)
 ν 動粘性率 (正の定数)
 $p = p(\mathbf{x}, t)$ 圧力関数 (一価関数であるとする。)

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} := u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \quad \text{移流項}$$

注意 1.1

(1.1) の解 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ の各成分の関数 u, v 、また、この後定義する u_θ や圧力関数 p は、この論文では十分滑らかなものであると仮定する。

さて、一般に流れの速い、あるいは粘性の低い非圧縮性粘性流体に代表される流れの中に剛体とみなせる物体が固定されている場合 (例えば、急流の中の岩)、多くの実験や観察結果から、その流れは次のように分けられると考えられている。



(この図は [6]1 章 §2 pp.5-6 の図を参考とした。)

このうち、II と示した、粘性が大きく影響していると考えられている物体近傍の極めて狭い範囲のことを境界層と呼ぶ。そして一般に、この境界層では、流れの速度分布が I のものに近づくように急激に変化していると考えられている（境界層に関する記述は [6]pp.6-7、[8]6 章、[11]6 章 8 節、[12]13 章 1 節 pp.272-275, 15 章などを主に参考とした）。

しかし、境界層は今のところ数学的には厳密に定義がされていないものと思われる。さらにその存在を数学的に示唆するのも、自分が調べた限りでは上半平面における平行流の一部の解析解だけで、上半平面以外の場合では、そのようなものは見かけられなかった（平行流については付録 A 2 節参照）。

そこで極座標系 $\{e_r, e_\theta\}$ を考え、(1.1) の解を改めて

$$\mathbf{u}(r, \theta, t) = u_r(r, \theta, t)\mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta, t)\mathbf{e}_\theta \quad (= u(x, y, t)\mathbf{e}_x + v(x, y, t)\mathbf{e}_y) \quad (1.2)$$

と直和分解し、 $u_r(r, \theta, t) = 0$ と仮定して、適切と思われる領域と条件を課したとき、

$$\mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{e}_r + u_\theta(r, t)\mathbf{e}_\theta \quad (1.3)$$

という形で表される非自明な解を考察した。そして、円弧に沿った境界層の存在を示唆する、2次元流を表わす解析解の例を作ることをこの論文では試みた。

注意 1.2

次の節で見るように、(1.2) において $u_r(r, \theta, t) = 0$ を課したとき、非圧縮性条件は $\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$ と変形される。そこで、これを満たすものとして、ここでは $u_\theta = u_\theta(r, t)$ を考える。

なお、 $\{e_r, e_\theta\}$ は極座標 (r, θ) の座標曲線上の各点における単位接線ベクトルにより定義される正規直交基底である。

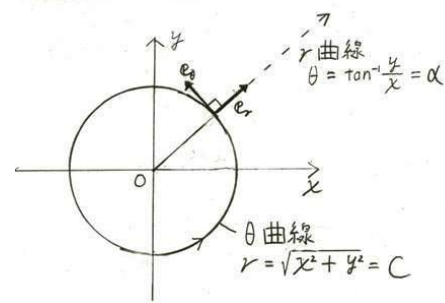
本論文では、 $u_\theta(r, t)$ は必ず e_θ 成分を指すこととする。 θ 偏微分は必ず $\frac{\partial}{\partial \theta}$ と書く。また、直交直線座標 (x, y) は、原点以外では、変換

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad (0 < r, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

によって、極座標 (r, θ) との一対一対応が与えられる。

ここで、(1.3) の直和分解に伴い、 e_r 成分 u_r を 0 としたときの極座標系での成分による (1.1) の表示を考えることで

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\theta}{\partial t}(r, t) = \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, t) - \frac{u_\theta}{r^2}(r, t) \right) \\ \frac{u_\theta^2}{r}(r, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}(r, t) \end{cases} \quad (1.4)$$



を得る。これを満たす流れ $\mathbf{u}(r, t) = {}^t(0, u_\theta(r, t))$ は円形流と呼ばれることが多い。 p は第 1 式の解から定まるので、ここで、その第 1 式を改めて基礎方程式とする (円形流については [1]4 章 5 節、[11]6 章 7 節 pp.200-205 などの記述を参考とした。(1.4) の式の導出は次の節を参照)。その定義から、(1.3) における $u_\theta(r, t)$ が表わすものは、流線がすべて同心円である 2 次元流の回転方向速度である。

最終的には、 $\tilde{\Omega}_a \times (0, \infty) = \{r \mid 0 < r < a\} \times \{t \mid 0 < t < \infty\}$ において、

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}(r, t) = \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, t) - \frac{u_\theta}{r^2}(r, t) \right) \quad (1.5)$$

の非自明な解であって、

$$\lim_{r \rightarrow 0} |u_\theta(r, t)| = 0, \quad u_\theta(a, t) = 0 \quad (t > 0) \quad (1.6)$$

$$u_\theta(r, 0) = \frac{U_0}{r} \quad (U_0 \text{ は } 0 \text{ を除くある実数定数}) \quad (0 < r < a) \quad (1.7)$$

という境界条件・初期条件を満たす解を考えた。そして、次の結果を得た。

定理 1.3 (主結果)

次で与えられる $u_\theta(r, t)$ は、 $\tilde{\Omega}_a \times [t_0, \infty) = \{r \mid 0 \leq r \leq a\} \times \{t \mid t_0 \leq t < \infty\}$ (ただし、 t_0 は任意の正の数) において一様収束し、(1.5)、(1.6) を満たす。

$$u_\theta(r, t) = 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n} r}{a} \right) \quad (1.8)$$

ただし J_1 、 J_0 は、1 次、0 次のベッセル関数と呼ばれる関数であり (注意 1.5 参照)、

$\lambda_{1,n}$ は J_1 の正の第 n 零点である。また、 $u_\theta(r, 0)$ は $0 < r < a$ 上で $\frac{U_0}{r}$ に広義一様収束する。

注意 1.4

$t = 0$ での広義一様収束は既存の事実に基づいた (本論文 pp.12 – 13、付録 D 参照)。

注意 1.5

一般に、 q 次 ($q > -1$) の実数値ベッセル関数 $J_q(s)$ は次のような表示を持つ。

$$J_q(s) = \left(\frac{s}{2}\right)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(q+n+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \quad (s \in \mathbb{R})$$

ただし、 Γ は Γ 関数で、 $\Gamma(q+n+1) := \int_0^\infty e^{-t} t^{(q+n+1)-1} dt$ である。特に、 Γ 関数の性質

$\Gamma(q+n+1) = (q+n)\Gamma(q+n)$ 、 $\Gamma(1) = 1$ より、 q が非負整数のとき、

$$J_q(s) = \left(\frac{s}{2}\right)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(q+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n}.$$

なお、この $J_q(s)$ は、 $|q|$ 次のベッセルの微分方程式と呼ばれる常微分方程式

$$J''(s) + \frac{1}{s} J'(s) + \left(1 - \frac{q^2}{s^2}\right) J(s) = 0 \quad (1.9)$$

解の一つである。

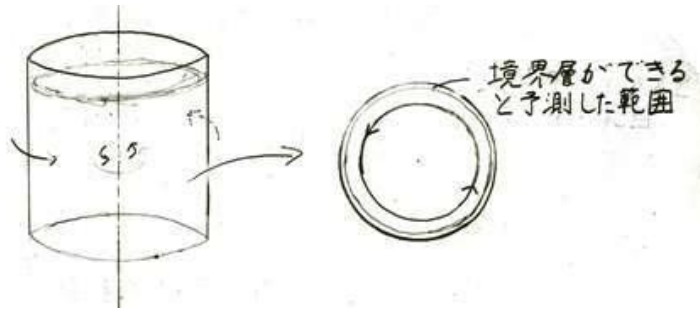
注意 1.6

q が非負整数のとき、 $J_q(s)$ とは別に (1.9) の $s > 0$ での解として q 次のノイマン関数と呼ばれる関数 $N_q(s)$ が存在し、 J_q と N_q が (1.9) の基本解をなすことが知られている。

定理 1.3 における混合問題 (1.5), (1.6), (1.7) は、以下の状況設定を考えた場合、中心に回転軸をもつ円筒内に満たされた密度一定な非圧縮性粘性流体のなす円形流が、その後どのような挙動を示すかという問題に相当する。

自転する中心軸をもつ円筒の内部の密度一定な非圧縮性粘性流体が、軸から発生する原点の渦糸によって、定常な円形流を形成しているとする。また、それと共に、その円筒も流れに沿って回転しているとする。ここで、あるときに突如それら軸と円筒の回転を止める。

状況設定から、動粘性率 $\nu(>0)$ が十分に小さく、 $|U_0|$ が十分に大きければ、回転を止めた直後に、円筒の内側の側面に沿って少なくとも境界層と呼べそうな範囲が出来ると思われる (原点の渦糸による円形流については、付録 B 参照)。



注意 1.7

本論文では、有界領域で求まる厳密解の具体形を考えたいがために変数分離解を考えた。同様の解析は、変数分離解をもとに、原点以外の全空間に対してなされている。具体的には、Fourier-Bessel 変換を用いることで、 $\lim_{r \rightarrow +0} |u_\theta(r, t)| = 0$ の仮定の下、変数が分離されていない解を構成できることが示されている (通称、減衰渦 [1]4 章 5 節 p.205、[11]6 章 7 節 pp.200 – 205 参照)。

さらに、付録 A の命題 A.7 のときと同様に常微分方程式を導出し、付録 C の事実 C.3 を用いることで、一般べき級数解の形の自己相似解も導くことができたと考えている。

また、今回初期条件として取った原点の渦糸による流れを表わす $\frac{U_0}{r}$ は、(1.4), (1.5) に対応する密度一定な非圧縮性 Euler 方程式 (完全流体 (粘性 0 の流体) の運動方程式) の渦無し定常解に他ならない。(これも詳しい計算は付録 B で述べる。)

これは境界層理論における、境界壁から十分離れた領域の流れは粘性の影響を受けない渦無し流か、または、それで上手く近似される、という考えに出来る限り合わせたものである。今回は、円筒内部の円筒の側面から十分離れた部分の流れがそれにあたると思われる。

さて、定理 1.3 の証明の前に、次の節において、方程式 (1.4) の導出を行っておく。

1.2 方程式 (1.4) の導出

ある空間2次元の原点を除く原点中心の回転対称な領域と $(0, \infty)$ との直積を D とする。

命題 1.8

領域 D で定義された式 (1.1) を満たす速度ベクトル \mathbf{u} が (1.3) の形で表されると仮定したとき、 \mathbf{e}_θ 成分 $u_\theta(r, t)$ と一価な圧力関数 p は次の式を満たす。

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\theta}{\partial t}(r, t) = \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, t) - \frac{u_\theta}{r^2}(r, t) \right) \\ \frac{u_\theta^2}{r}(r, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}(r, t) \end{cases} \quad (1.4)$$

命題 1.8 の証明

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \text{ に対し、} \quad (0 < r, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$\mathbf{e}_r := \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \right\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_r\|} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta := \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_\theta\|} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

である。

よって、 ${}^t(u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ と ${}^t(0, u_\theta(r, t))$ の関係は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\mathbf{x}_r\|} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{1}{\|\mathbf{x}_\theta\|} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\|\mathbf{x}_r\|} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{1}{\|\mathbf{x}_\theta\|} \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_\theta \sin \theta \\ u_\theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。さて、(1.1) の各式にこの関係式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(-u_\theta \sin \theta) - u_\theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial x}(-u_\theta \sin \theta) + u_\theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}(-u_\theta \sin \theta) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta(-u_\theta \sin \theta) \\ \frac{\partial}{\partial t}(u_\theta \cos \theta) - u_\theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial x}(u_\theta \cos \theta) + u_\theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}(u_\theta \cos \theta) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta(u_\theta \cos \theta) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-u_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial y}(u_\theta \cos \theta) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($0 < r, 0 \leq \theta < 2\pi$) より、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

よって、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

である。

従って、非圧縮性条件 $\frac{\partial}{\partial x}(-u_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial y}(u_\theta \cos \theta) = 0$ の左辺を整理すると、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{\partial}{\partial r}(-u_\theta \sin \theta) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}(-u_\theta \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}(u_\theta \cos \theta) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
&= \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

を得る。よって、ここでは非圧縮性条件は $\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$ となるが、 $u_\theta = u_\theta(r, t)$ のときは確かに常に満たされる。これと同様に NS 方程式も整理していくと、移流項の部分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(-u_\theta \sin \theta) &= \frac{\partial}{\partial r}(-u_\theta \sin \theta) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}(-u_\theta \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\sin \theta \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta \sin \theta \cos \theta}{r} \\
\frac{\partial}{\partial y}(-u_\theta \sin \theta) &= \frac{\partial}{\partial r}(-u_\theta \sin \theta) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}(-u_\theta \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\sin^2 \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta \cos^2 \theta}{r} \\
\frac{\partial}{\partial x}(u_\theta \cos \theta) &= \frac{\partial}{\partial r}(u_\theta \cos \theta) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos^2 \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta \sin^2 \theta}{r} \\
\frac{\partial}{\partial y}(u_\theta \cos \theta) &= \frac{\partial}{\partial r}(u_\theta \cos \theta) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta \sin \theta \cos \theta}{r} \\
\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

となる。また極座標系において、ラプラシアンは

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{1.10}$$

と変換されるので、

$$\begin{aligned}
\Delta(-u_\theta \sin \theta) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (-u_\theta \sin \theta) \\
&= -\sin \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta \sin \theta}{r^2} \\
\Delta(u_\theta \cos \theta) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (u_\theta \cos \theta) \\
&= \cos \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta \cos \theta}{r^2}.
\end{aligned}$$

これらから、ここでは、(1.1) の x 方向成分・ y 方向成分の式は、順に

$$\begin{aligned}\sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{u_\theta^2 \cos \theta}{r} &= \frac{1}{\rho} \left(\cos \theta \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \nu \left(\sin \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta \sin \theta}{r^2} \right) \\ \cos \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial t} - \frac{u_\theta^2 \sin \theta}{r} &= -\frac{1}{\rho} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \nu \left(\cos \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta \cos \theta}{r^2} \right)\end{aligned}$$

と表される。そして、第1式 $\times \sin \theta$ + 第2式 $\times \cos \theta$ をすると、

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \quad (1.11)$$

第1式 $\times \cos \theta$ - 第2式 $\times \sin \theta$ をすると、

$$\frac{u_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

を得る。ここで再び、 $\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$ から、

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}(r, t) - \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, t) - \frac{u_\theta}{r^2}(r, t) \right) = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

故に、上の式の右辺は θ に依存せず、 $p(r, \theta, t) = P(r, t)\theta + p_0(r, t)$ と表せると分かる。ここで、 p は一価なものを考えているので、各 r, t に対し、

$$p(r, 2\pi, t) = p(r, 0, t) \text{ すなわち、} p(r, 2\pi, t) - p(r, 0, t) = 2\pi P(r, t) = 0$$

を満たす必要がある。よって、 $P(r, t) \equiv 0$ である。従って、 $\frac{\partial p}{\partial \theta} \equiv 0$ より、(1.11) の式は

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}(r, t) = \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, t) - \frac{u_\theta}{r^2}(r, t) \right) \quad (1.5)$$

となる。よって、命題の主張が示された。 \square

第2章 定理 1.3 の証明

2.1 定理 1.3 の解 (1.8) の形式的な導出

以後、対象とする領域は $\tilde{\Omega}_a \times (0, \infty) = \{r \mid 0 < r < a\} \times \{t \mid 0 < t < \infty\}$ であるとする。ここでは、Fourier の方法により発見的に解を構成していく。実数値関数 $R(r), T(t)$ を用いて $u_\theta(r, t) = R(r)T(t)$ とできるものと仮定し、これを (1.5) に代入すると、

$$R(r)T'(t) = \nu \left\{ R''(r)T(t) + \frac{1}{r}R'(r)T(t) - \frac{1}{r^2}R(r)T(t) \right\}$$

となる。今ここでは、 $u_\theta(r, t)$ は恒等的に 0 でないものを考えたいので、

$$u_\theta(r_0, t_0) = R(r_0)T(t_0) \neq 0 \quad \text{すなわち、} R(r_0) \neq 0, \text{ かつ } T(t_0) \neq 0$$

となる点 (r_0, t_0) が存在することになる。よって、 $R(r_0) \neq 0$ となる $r = r_0$ を代入すると、

$$T'(t) = \nu \left\{ \frac{R''(r_0)}{R(r_0)} + \frac{1}{r_0} \frac{R'(r_0)}{R(r_0)} - \frac{1}{r_0^2} \right\} T(t).$$

を得る。ここで

$$\beta := \nu \left\{ \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_0} \frac{R'(r_0)}{R(r_0)} - \frac{R''(r_0)}{R(r_0)} \right\} \neq 0$$

とおく。

注意 2.1

β は、実数値関数 $R(r)$ 、およびその導関数の値から定まるので実数であるが、 $\beta = 0$ とすると、 $T(t) \equiv C$ (定数) となり $u_\theta(r, t)$ は定常 ($\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = 0$) となる。その場合、付録 B の内容から、 $u_\theta(r, t) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$ (C_1, C_2 は任意定数) となるが、自明な場合以外、これは境界条件 (1.6) をともに満たさない。よって、予め $\beta = 0$ を除外した。

さて、

$$T'(t) = -\beta T(t) \quad (\beta \text{ は } 0 \text{ 以外の実数})$$

を解くと、

$$T(t) = C_1 e^{-\beta t} \quad (C_1 \text{ は任意の定数}) \tag{2.1}$$

を得る。

一方、 $T(t_0) \neq 0$ なる $t = t_0$ を代入すると、

$$R(r)T'(t_0) = \nu \left\{ R''(r)T(t_0) + \frac{1}{r}R'(r)T(t_0) - \frac{1}{r^2}R(r)T(t_0) \right\}.$$

両辺を $\nu T(t_0) \neq 0$ で割って整理すると、

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\frac{\beta}{\nu} - \frac{1}{r^2} \right) R(r) = 0.$$

を得る。また、境界条件 (1.6) から、

$$\lim_{r \rightarrow 0} |R(r)| = 0, R(a) = 0 \quad (2.2)$$

を得る。ここで熱方程式のときと同様、 β の符号により以下のように場合分けをして考える。

(i) $\beta > 0$ の場合

$$\sqrt{\frac{\beta}{\nu}}r = s > 0 \text{ とおき、 } R(r) = J\left(\sqrt{\frac{\beta}{\nu}}r\right) = J(s) \text{ とおくと、}$$

$$\frac{dR}{dr} = \sqrt{\frac{\beta}{\nu}} \frac{dJ}{ds}, \quad \frac{d^2R}{dr^2} = \frac{\beta}{\nu} \frac{d^2J}{ds^2}.$$

これらから、上の式は、

$$\frac{\beta}{\nu} \frac{d^2J}{ds^2}(s) + \frac{1}{s} \frac{\beta}{\nu} \frac{dJ}{ds}(s) + \frac{\beta}{\nu} \left(1 - \frac{1}{s^2} \right) J(s) = 0 \quad \left(0 < s < \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}a \right).$$

そして、両辺を $\frac{\beta}{\nu} > 0$ で割って、

$$\frac{d^2J}{ds^2}(s) + \frac{1}{s} \frac{dJ}{ds}(s) + \left(1 - \frac{1}{s^2} \right) J(s) = 0 \quad \left(0 < s < \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}a \right) \quad (2.3)$$

という式を得る。この式は、1 次のベッセルの微分方程式と呼ばれる式に他ならない。さて、これに対して次頁のことが成り立つ。

補題 2.2

1 次のベッセルの微分方程式

$$J''(s) + \frac{1}{s}J'(s) + \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)J(s) = 0$$

の $s > 0$ 全体で定義できる基本解として、1 次の（第一種）ベッセル関数 $J_1(s)$ と 1 次のノイマン関数（第二種ベッセル関数） $N_1(s)$ を選ぶことができる。但し、これらは以下の表示をもつ関数である。

$$J_1(s) := \left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \quad (2.4)$$

$$N_1(s) := \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \log \frac{s}{2}\right) J_1(s) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{s}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\text{ただし、}\varphi(n) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \varphi(0) := 0 \quad \text{と規約、}\gamma := \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \log m\right) \doteq 0.57721. \quad (2.5)$$

よって、このとき条件 (2.2) を考えなければ、

$$R(r) = C_1 J_1 \left(\sqrt{\frac{\beta}{\nu}} r \right) + C_2 N_1 \left(\sqrt{\frac{\beta}{\nu}} r \right) \quad (C_1, C_2 \text{ は } C_1^2 + C_2^2 \neq 0 \text{ を満たす任意の定数}) \quad (2.6)$$

と表せることが分かる。

ここで以下の命題から、 $C_2 = 0, \beta = \nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2}$ ($\lambda_{1,n}$ は 1 次のベッセル関数 J_1 の正の第 n 零点) とすれば、 $R(r)$ はこのとき確かに (2.2) を満たす。そして重ね合わせの原理により、このとき、 $u_\theta(r, t)$ は形式的に

$$u_\theta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n} r}{a} \right)$$

と表せる。

命題 2.3 ([2]7 章 2 節 p.227 など を参考とした。)

q 次の実数値ベッセル関数 $J_q(s)$ (s は実変数、 $q > -1$) は、 $s > 0$ において無限に発散する可算無限個の零点をもつ。

命題 2.4 $\lim_{s \rightarrow +0} J_1(s) = 0, \lim_{s \rightarrow +0} N_1(s) = -\infty$

注意 2.5

一般論であるが、補題 2.2 の証明を命題 2.3・命題 2.4 の証明と共に付録 C につける。なお、 J_1 と N_1 の一次独立性を示すにあたり、例えば [13] などに載っているものより簡明な証明を得た。

(ii) $\beta < 0$ の場合

改めて $\beta = -\alpha$ ($\alpha > 0$) とおくと、先ほどの計算を利用すれば、

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \left(\frac{\alpha}{\nu} + \frac{1}{r^2}\right)R(r) = 0$$

ここで、同様に $\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}}r = \xi > 0$ とおき、 $R(r) = I(\xi)$ とおくと、

$$\frac{dR}{dr} = \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} \frac{dI}{d\xi}, \quad \frac{d^2R}{dr^2} = \frac{\alpha}{\nu} \frac{d^2I}{d\xi^2}$$

より、上の式から、

$$\frac{d^2I}{d\xi^2}(\xi) + \frac{1}{\xi} \frac{dI}{d\xi}(\xi) - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)I(\xi) = 0 \quad \left(0 < \xi < \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}}a = c\right) \quad (2.7)$$

という式を得る。これは 1 次の修正ベッセルの微分方程式と呼ばれる式に他ならない。さて、これに対して補題 2.2 を利用すると、次のことが成り立つと分かる。

命題 2.6 (証明は付録 C に付ける。)

$0 < \xi < c$ における 1 次の修正ベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2I}{d\xi^2}(\xi) + \frac{1}{\xi} \frac{dI}{d\xi}(\xi) - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)I(\xi) = 0$$

の非自明な解は次の線形結合の形で表わせる。

$$I(\xi) = C_1 I_1(\xi) + C_2 \tilde{I}_1(\xi) \quad (C_1, C_2 \text{ は、} C_1^2 + C_2^2 \neq 0 \text{ を満たす任意の定数})$$

ただし、 $I_1(\xi), \tilde{I}_1(\xi)$ は次のような表示をもつ関数である。

$$I_1(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n} \quad (2.8)$$

$$\tilde{I}_1(\xi) := I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} \quad (2.9)$$

注意 2.7

$$I_1(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n}$$

を 1 次の修正ベッセル関数という。これは、その形から $\xi > 0$ では正值である。

よって、このとき条件 (2.2) を考えなければ、

$$R(r) = C_1 I_1 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} r \right) + C_2 \tilde{I}_1 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} r \right) \quad (C_1, C_2 \text{ は、} C_1^2 + C_2^2 \neq 0 \text{ を満たす任意の定数})$$

と表せることが分かる。

しかし、 $\tilde{I}_1(\xi)$ に関して以下の命題が成り立つことから、 $C_2 = 0$ である必要があるが、一方で、 $I(\xi)$ が $\xi > 0$ で零点を取り得ないことから、このとき (2.2) を成り立たせるような $\alpha > 0$ は存在しない。従って、そもそも分離定数 β を負とするのは不適である。

命題 2.8 (証明は付録Cに付ける。)

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} I_1(\xi) = 0, \lim_{\xi \rightarrow +0} \tilde{I}_1(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +0} I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} = \infty$$

以上のことから、少なくとも形式的に (1,5), (1,6) を満たすものとして、以後

$$u_{\theta}(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n} r}{a} \right) \quad (2.10)$$

を考える。

ここでさらに、係数 C_n を決定するのに必要なベッセル関数の性質について、いくつか述べる。なお、これらも証明は付録Cにつける。

命題 2.9 ([3]6章 §94 pp.108-109などを参考とした。)

$\lambda_{1,m}, \lambda_{1,n}$ をそれぞれ 1 次のベッセル関数の正の第 m 零点、第 n 零点とすると、

$$\int_0^a J_1 \left(\frac{\lambda_{1,m} r}{a} \right) J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n} r}{a} \right) r dr = \begin{cases} \frac{a^2}{2} \{J_1'(\lambda_{1,n})\}^2 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (a \text{ は任意の正の定数}) \quad (2.11)$$

という関係式が成り立つ。なお、 $J_1'(s) = \frac{dJ_1}{ds}(s)$ である。

命題 2.10 ([3]6章 §90, 96 および巻末 pp.98-99, 115, 172などを参考とした。)

$$J_0'(s) = -J_1(s) \quad (2.12)$$

$$\frac{2}{s} J_1(s) = J_0(s) + J_2(s), 2J_1'(s) = J_0(s) - J_2(s), 2J_2'(s) = J_1(s) - J_3(s) \quad (2.13)$$

$$J_1'(\lambda_{1,n}) = J_0(\lambda_{1,n}) = -J_2(\lambda_{1,n}) \neq 0 \quad \lambda_{1,n} \text{ は } J_1(s) \text{ の正の第 } n \text{ 零点} \quad (2.14)$$

(2.10) に対し、初期条件 (1.7) から

$$\frac{U_0}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n} r}{a} \right) \quad (0 < r < a) \quad (2.15)$$

とできるものとする。

形式的に (2.15) の両辺に $J_1\left(\frac{\lambda_{1,m}r}{a}\right)r$ ($m = 1, 2, \dots$) をそれぞれ掛けて $[0, a]$ で項別積分すれば、命題 2.9, 命題 2.10 より、

$$\frac{a^2}{2} \{J_1'(\lambda_{1,m})\}^2 C_m = U_0 \int_0^a J_1\left(\frac{\lambda_{1,m}r}{a}\right) dr = -\frac{aU_0}{\lambda_{1,m}} \{J_0(\lambda_{1,m}) - 1\}.$$

また、 $s = \frac{\lambda_{1,m}r}{a}$ のとき、 $-J_1(s) = \frac{dJ_0}{ds} = \frac{dJ_0}{dr} \frac{dr}{ds} = \frac{a}{\lambda_{1,m}} \frac{d}{dr} \left(J_0\left(\frac{\lambda_{1,m}r}{a}\right) \right)$ より、

$$\int_0^a J_1\left(\frac{\lambda_{1,m}r}{a}\right) dr = \left[-\frac{a}{\lambda_{1,m}} J_0\left(\frac{\lambda_{1,m}r}{a}\right) \right]_0^a = -\frac{a}{\lambda_{1,m}} \{J_0(\lambda_{1,m}) - 1\}.$$

$$\text{以上により、} \quad C_m = -\frac{2U_0 \{J_0(\lambda_{1,m}) - 1\}}{a\lambda_{1,m} \{J_0(\lambda_{1,m})\}^2} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.16)$$

ここで、この係数 C_m を (2.15) の右辺の形式的な級数に代入したものは $(0, a)$ で定義された $\frac{U_0}{r}$ に対する Fourier-Bessel 級数に他ならない。

ところで、[13]18 章 の議論によれば、 a が任意の正の数であることにつき、右辺の級数は $(0, a)$ で $\frac{U_0}{r}$ に広義一様収束するための条件を満たしていることが分かる。(付録 D 参照、なお、[13]18 章 の議論は自分ではまだ確認できていない。)

よって、ここではそれを認め、(2.15) における等号を正当化する。同様にして、(2.16) の係数 C_m を形式的に (2.10) の右辺に代入して得られる級数

$$2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} J_1\left(\frac{\lambda_{1,n}r}{a}\right)$$

ただし、 $\lambda_{1,n}$ は 1 次の第 1 種ベッセル関数 J_1 の正の第 n 零点

を考えると、これは形式的に $\widetilde{\Omega}_a \times (0, \infty)$ において (1.5) の解となっている。

実際、

$$u_\theta(r, t) = 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} J_1\left(\frac{\lambda_{1,n}r}{a}\right)$$

ただし、 $\lambda_{1,n}$ は 1 次の第 1 種ベッセル関数 J_1 の正の第 n 零点

に対し、形式的に各偏導関数を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial t}(r, t) &= 2U_0 \nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a^3 \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} J_1\left(\frac{\lambda_{1,n}r}{a}\right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, t) &= 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \left(\frac{d}{dr} \left\{ J_1\left(\frac{\lambda_{1,n}r}{a}\right) \right\} \right) \\ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}(r, t) &= 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \left(\frac{d^2}{dr^2} \left\{ J_1\left(\frac{\lambda_{1,n}r}{a}\right) \right\} \right). \end{aligned}$$

よって、 $J_1(s)$ が 1 次のベッセル微分方程式の解であることから、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, t) - \frac{u_\theta}{r^2} \\
&= 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \left\{ \left(\frac{d^2 J_1}{ds^2}(s) \right) \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{dJ_1}{ds}(s) \right) \frac{\lambda_{1,n}}{a} - \frac{J_1(s)}{r^2} \right\} \\
&= 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \left\{ -\frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n} r}{a} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\nu} \frac{\partial u_\theta}{\partial t}(r, t)
\end{aligned}$$

となり、確かに (1.5) を満たしている。

また、形式的には

$$J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n} r}{a} \right) \Big|_{r=0} = J_1(0) = 0, \quad J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n} r}{a} \right) \Big|_{r=a} = J_1(\lambda_{1,n}) = 0 \quad (2.17)$$

より、(1.6) の境界条件を満たしていることも分かる。

以上のことから、形式的には、

$$u_\theta(r, t) = 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n} r}{a} \right) \quad (1.8)$$

ただし、 $\lambda_{1,n}$ は 1 次の第 1 種ベッセル関数 J_1 の正の第 n 零点

が確かに $\widetilde{\Omega}_a \times (0, \infty)$ における境界値問題 (1.5), (1.6) の解となっていることが分かる。以後、次の節で上記の計算を正当化する。

2.2 定理 1.3 の解 (1.8) および、その形式的な偏導関数の $t > 0$ における一様収束の証明

さて、前節で形式的に導出した (1.8) の解やその形式的な偏導関数の $t > 0$ における一様収束を示す。

そのために (1.8) の解やその形式的な偏導関数を与える級数の優級数を構成するが、それには命題 2.10 および以下の事実・補題を用いる。

事実 2.11

非負整数次ベッセル関数 $J_q(s)$ に対して、

$$|J_q(s)| \leq 1 \quad (s > 0) \quad q = 0, 1, \dots$$

(この事実は [7]6 章 4 節 pp.200-204 参照。)

補題 2.12

$J_1(s)$ の正の第 n 零点を $\lambda_{1,n}$ とすると、 π より大きいある正の数 $M > 0$ が存在して、

$$n < \lambda_{1,n} \leq Mn$$

が成り立つ。

(この証明は付録 C で行う。)

補題 2.13

各 $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$0 < \frac{1}{\{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} < \frac{2\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2}$$

補題 2.13 の証明

命題 2.9 および命題 2.10 の (2.14) から、各 $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$a^2 \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2 > \frac{a^2}{2} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2 = \int_0^a \left\{ J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n}r}{a} \right) \right\}^2 r dr > 0.$$

ここで、 $s = \frac{\lambda_{1,n}r}{a} (> 0)$ と置くと、

$$\begin{aligned} \int_0^a \left\{ J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n}r}{a} \right) \right\}^2 r dr &= \int_0^{\lambda_{1,n}} \{J_1(s)\}^2 \left(\frac{a}{\lambda_{1,n}} \right)^2 s ds = \left(\frac{a}{\lambda_{1,n}} \right)^2 \int_0^{\lambda_{1,n}} \{J_1(s)\}^2 s ds \\ &\geq \left(\frac{a}{\lambda_{1,n}} \right)^2 \int_0^{\lambda_{1,1}} \{J_1(s)\}^2 s ds. \end{aligned}$$

最後の不等号は $J_1(s)$ の可算無限個の正の第 n 零点 $\lambda_{1,n}$ が

$$0 < \lambda_{1,1} < \lambda_{1,2} < \lambda_{1,3} < \dots < \lambda_{1,n} < \dots$$

を満たすこと ($\because J_1(s)$ は任意の $s \in \mathbb{R}$ で解析的なので、すべての零点が孤立点) と被積分関数が $[0, \lambda_{1,n}]$ において常に非負であることによる。よって、(C.47) に $\alpha = 1$ を代入して得られる式、命題 2.10 の (2.14) から

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_{1,1}} \{J_1(s)\}^2 s ds &= \frac{1}{2} \left[s^2 \{J_1'(s)\}^2 + (s^2 - 1) \{J_1(s)\}^2 \right]_0^{\lambda_{1,1}} \\ &= \frac{\lambda_{1,1}^2}{2} \{J_1'(\lambda_{1,1})\}^2 = \frac{\lambda_{1,1}^2}{2} \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2 \quad (\text{正定数}). \end{aligned}$$

以上のことから、各 $n = 1, 2, \dots$ に対し、

$$a^2 \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2 > \frac{a^2 \lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2}{2\lambda_{1,n}^2} > 0.$$

すなわち、各 $n = 1, 2, \dots$ に対し、

$$0 < \frac{1}{\{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} < \frac{2\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2}.$$

□

さて、

$$u_\theta(r, t) = 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} J_1 \left(\frac{\lambda_{1,n} r}{a} \right) \quad (1.8)$$

に対して、再び $s = \frac{\lambda_{1,n} r}{a}$ と置くと、形式的に

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, t) &= 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \left\{ \frac{dJ_1}{ds}(s) \right\} \frac{ds}{dr} \\ &= 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a^2 \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \left\{ \frac{dJ_1}{ds}(s) \right\} \\ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}(r, t) &= 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a^3 \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \frac{d^2 J_1}{ds^2}(s) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t}(r, t) &= 2\nu U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{1,n} \{J_0(\lambda_{1,n}) - 1\}}{a^3 \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \right) e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} J_1(s). \end{aligned}$$

従って、命題 2.10 の (2.12), (2.13) および、事実 2.11 から、 $s > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} \left| \frac{dJ_1}{ds}(s) \right| &= \frac{1}{2} |J_0(s) - J_2(s)| \leq 1 \\ \left| \frac{d^2 J_1}{ds^2}(s) \right| &= \frac{1}{2} | -J_1(s) - J_2'(s) | = \frac{1}{2} \left| -J_1(s) - \frac{1}{2} \{J_1(s) - J_3(s)\} \right| \leq 1 \end{aligned}$$

と評価できることに注意すると次を得る。

$$\begin{aligned} |u_\theta(r, t)| &< 2|U_0| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a\lambda_{1,n}} \frac{2\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2} e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \\ &< \frac{8|U_0|M}{a\lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{\nu t}{a^2} n} \\ \left| \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, t) \right| &< 2|U_0| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a^2} \frac{2\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2} e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \\ &< \frac{8|U_0|M^2}{a^2 \lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{\nu t}{a^2} n} \\ \left| \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}(r, t) \right| &< 2|U_0| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_{1,n}}{a^3} \frac{2\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2} e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \\ &< \frac{8|U_0|M^3}{a^3 \lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-\frac{\nu t}{a^2} n} \\ \left| \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}(r, t) \right| &< 2\nu|U_0| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_{1,n}}{a^3} \frac{2\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2} e^{-\nu \frac{\lambda_{1,n}^2}{a^2} t} \\ &< \frac{8\nu|U_0|M^3}{a^3 \lambda_{1,1}^2 \{J_0(\lambda_{1,1})\}^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-\frac{\nu t}{a^2} n} \end{aligned}$$

ここで、 $t_0 > 0$ を任意に取って固定して考えると、 $t \geq t_0 > 0$ なる任意の t に対して、
一様に

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{\nu t}{a^2} n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{\nu t_0}{a^2} n} < +\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{\nu t}{a^2} n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{\nu t_0}{a^2} n} < +\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-\frac{\nu t}{a^2} n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-\frac{\nu t_0}{a^2} n} < +\infty\end{aligned}$$

と評価できる。従って、ワイエルシュトラスのMテストから、前節で形式的に導出した定理 1.3 の解 (1.8) やその形式的な偏導関数を与える級数は $\widetilde{\Omega}_a \times [t_0, \infty) = \{r \mid 0 \leq r \leq a\} \times \{t \mid t_0 \leq t < \infty\}$ (ただし、 t_0 は任意の正の数) において一様収束すると分かり、これまでの計算は正当化される。結果、定理 1.3 が示された。□

また、これまでの議論から、(1.8) の解は、 $t > 0$ の直後に熱方程式をフーリエ級数を使って解いたときと同様、 $r = 0, r = a$ 近傍で急激に変化していると考えられ、ここでは、その部分を境界層と呼べると考える。

付 録 A 直交直線座標系における粘性流体・Navier-Stokes 方程式に関して

A.1 粘性流体に関する定義・概念

ここの定義は主に [6]1,2,8 章を参考とした。

さて、粘性流体を考えるとときは多く粘着条件 (no-slip condition) と呼ばれる以下の境界条件 (ディリクレ条件) を設定する。

定義 A.1

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \text{物体表面} \quad (\text{ただし、}\mathbf{u} \text{ は流体粒子の速度}) \quad (\text{A.1})$$

すなわち、川の中の岩のように流れの中の固定されている物体表面に流体が粘着して、流体の速度 \mathbf{u} が物体表面では 0 になるという条件である。

注意 A.2

粘着条件は厳密には、流体の速度が物体表面では物体の速度 \mathbf{v} に一致するという条件である。そのため、一般には

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{on} \quad \text{物体表面} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ は順に流体粒子の速度、流体内の物体の速度}) \quad (\text{A.2})$$

という意味である。

なお、当論文で扱うのは水などをモデル化した Newton 流体と呼ばれる粘性流体であるとする。従って、ここでは、その応力を表わすテンソルが「その流体は等方性の物質である」・「その応力 (流体の粒子の仮想的なまとまりの境界面に働く力、面積力) は変形速度の一次式で表わされる」という仮定から決定されているものを考えている。

定義 A.3 ナビエ・ストークス (Navier - Stokes) 方程式

Newton 流体の流体粒子の運動を記述する運動方程式 (ニュートンの運動の第二法則、 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ のこと) は

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu)\nabla(\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mu\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.3})$$

であり、この運動方程式のことを Navier-Stokes の方程式という。(λは第二粘性率とよばれる定数) なお、(A.3) は外力無しとしてある。

また、液体はその体積変化が極めて小さいために、密度が運動中一定に保たれるとして非圧縮性を仮定することが一般的である。よって、この論文でも非圧縮性、すなわち、

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{A.4})$$

を課す。加えて、本論文では

$$\text{密度一定 } (\nabla \rho = 0) \quad (\text{A.5})$$

を課す。(これは [8]10 章 3 節 p.233、4 章 2 節 p.87、6 章 3 節 p.153 の記述を参考にした。)

注意 A.4

今回の問題提起の契機となった境界層方程式を非圧縮性 NS 方程式から導出する際も、多くの文献で密度一定を仮定している。

結果として、(A.3)～(A.5) から、本論文で対象とする式、密度一定な非圧縮性 NS 方程式 (1.1) が導出される。

A.2 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の特殊解の例 (平行流)

さて、(1.1) を解くには大きな障害がある。それは、

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.6})$$

の項が、(未知関数の勾配) \times (未知関数) という非線形項になっていることである。非線形項が含まれているとき、その偏微分方程式は一般に古典的、解析的に解くことは困難である。

そのため、これまでの研究では、流れを制限して考察を進めることがしばしば行われてきた。その 1 つが上半平面などの直交直線座標系の x 軸に平行な 2 次元領域で (1.1) を満たすようなもので、さらに x 軸に平行な一方向の流れ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = {}^t(u(\mathbf{x}, t), 0)$ であるものを考えるというものである (平行流、または、一方向の流れなどと呼ばれることが多い。[6]8 章 §64 – 67pp.284-311、[12]13 章 1 節 pp.268-284 などを参照)。

命題 A.5

直交直線座標系の x 軸に平行な 2 次元領域で、密度一定な非圧縮性 NS 方程式 (1.1) を満たす解のうち、 x 軸に平行な一方向の流れ $\mathbf{u}(y, t) = {}^t(u(y, t), 0)$ の x 方向成分 u は

$$\frac{\partial u}{\partial t}(y, t) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) \quad (\text{A.7})$$

を満たす。

命題 A.5 の証明

$\mathbf{u}(y, t) = (u(y, t), 0)$ を (1.1) の式に代入すると、まず非圧縮性条件は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

となるが、このときは確かに常に満たされる。加えて、 u に関する式の移流項は

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)u(y, t) = u \frac{\partial u}{\partial x}(y, t) + v \frac{\partial u}{\partial y}(y, t) = u(y, t) \cdot 0 + 0 \frac{\partial u}{\partial y}(y, t) = 0$$

となり消える。また、 $v = 0$ より、

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

となるから、解が $\mathbf{u}(y, t) = {}^t(u(y, t), 0)$ のときは p は y に依らない。そして結局、(1.1) の u に関する式は、解が $\mathbf{u}(y, t) = {}^t(u(y, t), 0)$ のときは

$$\frac{\partial u}{\partial t}(y, t) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(x, t)$$

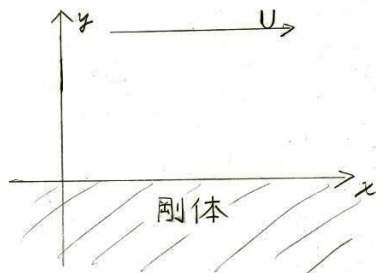
と簡略化される。 □

注意 A.6

(A.7) の方程式は線形であるから、適当な条件を加えれば、解析的に厳密な解を求めることができる。

実際に一つ例を挙げる。

- ・ 上半平面 $y \geq 0$ 上で定義される密度一定な非圧縮性粘性流体の $t > 0$ における二次元流 $\mathbf{u}(y, t) = (u(y, t), 0)$ を考える。
- ・ 境界 $y = 0$ は剛体の固定された (= 速度が 0 の) 平板である。
- ・ $y = \infty$ における流体粒子の速度ベクトルは境界壁に平行な正の向きのベクトルで、その大きさは U (正の定数) である。
- ・ 座標軸は境界に沿った線を x 軸とし、それに対する上半平面への外向き法線に平行な適当な直線を y 軸とする。
- ・ $\nabla p = 0$ 、すなわち、圧力は時間にのみよる。



この図は [5]2 章 2 節 p.69 のものを参考とした。

命題 A.7

前頁の状況設定における (A.7) の解析解、 $\mathbf{u}(y, t) = {}^t(u(y, t), 0)$ の x 方向成分 $u = u(y, t)$ の一つは

$$u(y, t) = U(\operatorname{erf}(\eta)) = \frac{2U}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-s^2} ds \quad \text{ただし、} \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad \nu, t > 0 \quad (\text{A.8})$$

である。

命題 A.7 の証明

問題の状況設定、命題 A.5 から、ここで考える問題は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, t) & (y, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0 & (t > 0) \\ u(\infty, t) = U \quad \left(\lim_{y \rightarrow \infty} u(y, t) = U \right) & (t > 0) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

となる。

ここでは（前向き）自己相似解と呼ばれる解を考える。よって、(A.9) に対して適切なスケール変換を探すために、とりあえず $L, T (> 0)$ をそれぞれ適当な長さと同時間のスケールとしてとり、

$$y' = \frac{y}{L}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad u(y, t) = u(y(y'), t(t'))$$

とすると、

$$\frac{\partial}{\partial t'} \{u(y, t)\} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt'} = T \frac{\partial u}{\partial t}(y, t), \quad \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \{u(y, t)\} = L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, t).$$

(A.9) にこれらを代入すると

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t'}(y', t') = \frac{\nu T}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}(y', t') & (y', t') \in (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u(0, t') = 0 & (t' > 0) \\ u(\infty, t') = U & (t' > 0) \end{cases}.$$

よって、 $L^2 = T$ ならば、第 1 式がスケール変換する前と全く同じ方程式である。故に、求める解 u が自己相似解であるとは、ここでは、 u が

$$L^2 = T \text{ のとき、} \quad u\left(\frac{y}{L}, \frac{t}{T}\right) = u(y, t) \quad (y, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

を満たすときのことを言う。仮にここで、 $T = t, L = \sqrt{t}$ とおくと、これは $L^2 = T$ を満たし、上の方程式の解に対し、

$$u\left(\frac{y}{\sqrt{t}}, 1\right) = u(y, t).$$

さて、この式を参考として

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad (y \geq 0, t > 0, \nu \text{は正の定数より}, \eta \geq 0) \quad f(\eta) = \frac{u(y, t)}{U}$$

とおいてみると、

$$\frac{\partial u}{\partial t}(y, t) = -\frac{U}{2t}\eta f'(\eta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, t) = U f''(\eta) \frac{\eta^2}{y^2}$$

となる (上の'は η に関する微分)。そして、これらを (A.9) の第1式に代入して整理すると、

$$f''(\eta) + 2\eta f'(\eta) = 0$$

結果、 η に関しての常微分方程式に帰着することができる。

また、各固定した $t(>0)$ に対し、 $y=0$ のとき、 $\eta=0$ 、 $y=\infty$ のとき $\eta=\infty$ であるので、 $f(\infty)=1$ 、 $f(0)=0$ である。

従って、結局 (A.9) の問題は常微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} f''(\eta) + 2\eta f'(\eta) = 0 & (\text{ただし}, \eta > 0) \\ f(\infty) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

に帰着される。まず、第1式を解くと、 $f'(\eta) = Ce^{-\eta^2}$ (ただし、 C は0を除くような定数) を満たすことが分かる。これを境界条件と併せて考えると、 $\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ より、(A.10) を満たすような関数 $f(\eta)$ として、

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-s^2} ds \quad (\text{誤差関数と呼ばれる。})$$

がとれる。従って、 $f(\eta) = \frac{u(y, t)}{U}$ より、(A.9) の解の一つとして

$$u(y, t) = U(\text{erf}(\eta)) = \frac{2U}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-s^2} ds \quad \text{ただし}, \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad \nu, t > 0$$

が存在すると分かる。 □

注意 A.8

$u(y, t) = U$ (正の定数) は、この問題に対応する2次元の完全流体 (粘性0の理想流体) の運動を記述する方程式、*Euler* 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) = 0 & \text{in } D \times (0, \infty) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial D \times (0, \infty) \\ \text{※ } D \text{ は空間変数の領域、} \mathbf{n} \text{ は } D \text{ の外向き単位法線} \\ \text{ここでは、} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \mathbf{n} = 0 \cdot \mathbf{e}_x - 1 \cdot \mathbf{e}_y \\ u(\infty, t) = U \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

の一意的な渦無し定常解（時刻 t に依存しない解）である（このとき、渦無しの条件は $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ）。なお、この境界条件は、流れが領域から出ないことを表わすもので、完全流体において通常課される境界条件である。

定義 A.9

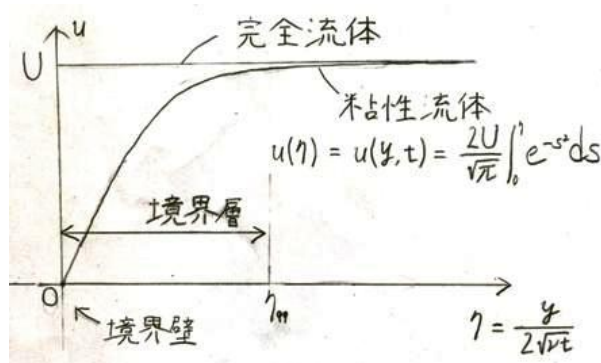
直交直線座標系における速度ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = {}^t(u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ に対し、

$$\omega_{\mathbb{R}^2} := \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.12})$$

を（空間 2 次元における）渦度と言う。

これは（空間 3 次元における）渦度 $\text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ の第 3 成分である。なお、次元に関わらず、渦度が 0 のことを渦無しと言う rot を curl と書く場合もある。

さて、(A.9), (A.11), それぞれの解の η に関するグラフを書くと次のようになる。



この図は [5]2 章 2 節 p.71 を参考とした。

なお、(A.9) の自己相似解に対して

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\eta} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} > 0 && \text{単調増加しつつ増加率は漸近的に減衰} \\ \frac{d^2u}{d\eta^2} &= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} && \text{上に凸の状態から段々}\eta\text{軸に平行に} \end{aligned}$$

グラフを見ても明らかなように、(A.9) の粘性流の自己相似解は、(A.11) の完全流体の定常な渦無し流の解に急激に近づき、その後は緩やかに漸近している。

[5]2 章 p.71 や [6]§67 などの記述によれば、丁度その部分が冒頭で述べた境界層を表す部分であるとされている。なお、ここでは境界層は境界である x 軸に沿って形成されていると考えられている。

また、ここで仮に (A.9) の自己相似解に対して境界層厚さを表わす代表値を δ_{99} 、それに対応する η を η_{99} とすると（これが比例定数となる）、

$$\eta_{99} = \frac{\delta_{99}}{2\sqrt{\nu t}}, \text{ すなわち } \delta_{99} = 2\eta_{99}\sqrt{\nu t} \quad (\text{A.13})$$

これが示すように、一般に境界層のおおよその厚さは、(t を固定すれば) \sqrt{t} に比例すると考えられている。(他のいくつかの上半平面における一方向の流れに関しても、同じような比例式が現れる)

そして、この「境界層のおおよその厚さは (t を固定すれば) \sqrt{t} に比例する」という認識は多くの実験結果から支持され、それをもとに境界層理論というものが構築されている。そこでは、おおよそ次のような主張がなされている。

高レイノルズ数 (または粘性の低い) の物体・境界壁の周りの水などの現実の液体においては、伴流 (物体の後ろ側にできる流れ) を除いて、粘性の影響が及ぶのは物体のごく狭い近傍の境界層に限られる。そして、その外側の主流と呼ばれる領域は、粘性の影響を受けない渦無し流か、または、それで上手く近似される

これに基づき、高レイノルズ数の場合に境界層の存在を仮定し、境界層における密度一定な非圧縮性 NS 方程式を近似したものが境界層方程式と呼ばれるものである。

なお、レイノルズ数とは以下のように定義される粘性流を特徴づける無次元数である。

定義 A.10

次のように定義される無次元数 R をレイノルズ数と言う。

$$R := \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

U 、 L はそれぞれ対象とする流れの場を特徴づける代表速さ、代表長さ

例えば、半径 L_0 の円板の周りの二次元の一様流 (向きが一定の流れ) で、無限遠方での流れの速さが U_0 となっているものを考える場合、

$$U = U_0, L = L_0$$

というようにとる。レイノルズ数 R の定義から、

流体粒子の密度 (大)、粘性 (小)、流れの中の物体 (大)、流れの速さ (大) $\rightarrow R$ (大)
流体粒子の密度 (小)、粘性 (大)、流れの中の物体 (小)、流れの速さ (小) $\rightarrow R$ (小)

であり、それぞれ矢印の左の個々の条件を付加することは、対象とする非圧縮粘性流の流れの場に対して同等の影響を与えるとされている。

本論文は、円板曲面の内側に沿った 2 次元粘性流の中に、境界層と呼べるような範囲の存在を示すことが目標であった。残念ながら、本論文では境界層と思しき範囲の存在を示すことはできたものの、 \sqrt{vt} のような具体的な範囲を示す定量的な指標を見出すところまでは至らなかった。

付 録 B (1.5) の定常解

命題 B.1

円形流の e_θ 成分 $u_\theta(r, t)$ が満たす式 (1.5) の $r > 0$ における定常解の一般解は

$$u_\theta(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

である。

命題 B.1 の証明

流れが定常、すなわち、 $\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = 0$ のとき、(1.5) の式は、

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2}(r) + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2}(r) = 0 \quad (r > 0) \quad (\text{B.1})$$

となるが、これは、 $u_\theta(r) = Cr$ を解の一つに持つ (C は任意の定数)。 $C = C(r)$ として $u_\theta(r) = C(r)r$ をこれに代入すると、

$$\frac{du_\theta}{dr}(r) = C'(r)r + C(r), \quad \frac{d^2 u_\theta}{dr^2}(r) = C''(r)r + 2C'(r)$$

より、

$$C'''(r)r + 2C''(r) + C'(r) + \frac{C(r)}{r} - \frac{C(r)}{r} = 0$$
$$C'''(r)r + 3C''(r) = 0$$

$C''(r) \neq 0$ として計算を進めると、

$$\frac{1}{C''(r)} \frac{dC''}{dr} = -\frac{3}{r} \quad \text{両辺を } r \text{ に関して (形式的に) 積分すると、}$$

$$\log |C''(r)| = -3 \log r + C = \log \frac{C_1}{r^3} \quad (C_1 \text{ は } 0 \text{ を除く任意の正定数})$$

$C''(r) = 0$ と合わせて、

$$C''(r) = \frac{C_2}{r^3} \quad (C_2 \text{ は任意の定数})$$

よって、

$$C(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

故に、(1.5) の定常解の一般解は

$$u_\theta(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

□

注意 B.2

物理的には、 $\mathbf{u}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_1}{r} \end{pmatrix}$ (C_1 は0を除く任意定数) は原点の直線渦糸による流れを表わし、 $\begin{pmatrix} 0 \\ C_2 r \end{pmatrix}$ (C_2 は0を除く任意定数) はいたるところで渦度一定の剛体的回転を表わす。

なお、前者の渦糸による流れは複素速度ポテンシャル $W(z) = -C_1 \log z$ (ただし、 $z = x + iy = re^{i\theta}$) による複素速度に対応する速度ベクトルの渦である。故に、これをポテンシャル渦と呼んでいる文献もある (複素速度ポテンシャル、複素速度については [9] 4章 pp.66-72などを参照、なお、これらによる流れは2次元の非圧縮性渦無し流である)。

ここで $C_1 = U_0$ として、初期条件として用いた

$$\mathbf{u}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U_0}{r} \end{pmatrix} \quad (U_0 \text{は0を除くある定数})$$

を $r > 0$ で直交直線座標系の成分による表示 $\mathbf{u} = u(x, y, t)\mathbf{e}_x + v(x, y, t)\mathbf{e}_y$ に直すと、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U_0}{r} \end{pmatrix} = U_0 \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

この渦度は、

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{R}^2} &= U_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right\} \\ &= U_0 \left\{ \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

であり、確かに (原点以外で) 渦無しである。

また、 $\tilde{\Omega}_a \times (0, \infty) = \{r \mid 0 < r < a\} \times \{t \mid 0 < t < \infty\}$ における密度一定な非圧縮性 Euler 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{x}, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

の解 \mathbf{u} が (1.3) の形で表わせると仮定すると、1章2節と同様にして、非圧縮性条件は $\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$ となり、Euler 方程式からは

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\theta}{\partial t}(r, t) = 0 \\ \frac{u_\theta^2}{r}(r, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}(r, t) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

を得る。

ここで、実際 $\mathbf{u}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U_0}{r} \end{pmatrix}$ は (1.3) の形であり、これは (B.3) を満たす。

注意 B.3

完全流体における境界条件 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ on $\partial\tilde{\Omega}_a$ も、

$\mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{e}_r + \frac{U}{r} \mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{n} = 1 \cdot \mathbf{e}_r + 0 \cdot \mathbf{e}_\theta$ であることから、確かに常に満たされている。

よって 1 章で述べたように、確かに $\mathbf{u}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U_0}{r} \end{pmatrix}$ は、

$\tilde{\Omega}_a \times (0, \infty) = \{r \mid 0 < r < a\} \times \{t \mid 0 < t < \infty\}$ における (1.4), (1.5) に対応する密度一定な非圧縮性 Euler 方程式の渦無し定常解となっている。

付 録 C ベッセル関数、修正ベッセル関数に関して

C.1 補題 2.2、命題 2.6、命題 2.8 の証明

([4]2 章 8 節 pp.262-266、[7]6 章 2 節 pp.162-175)、[10]1 章 3 節 pp.57-67 など を 参 考 と した。)

補題 2.2 の証明

$$P(s) = \frac{1}{s}, \quad Q(s) = 1 - \frac{1}{s^2} \quad \text{とおくと、} sP(s) = 1, \quad s^2Q(s) = -1 + s^2$$

これらは $sP(s)$ 、 $s^2Q(s)$ のマクローリン展開に他ならない。従って、 $s = 0$ は一次のベッセルの微分方程式 (2.3) の確定特異点である。

注意 C.1

変数係数をもつ n 階線形微分方程式

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^n}(x) + p_1(x) \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}}(x) + \cdots + p_n y(x) = 0 \quad (\text{C.1})$$

の係数関数 $p_k(x)$ がすべて $x = x_0$ で解析的であるとき、 $x = x_0$ を方程式 (C.1) の正則点 (または、通常点) と言い、そうでない点 $x = x_1$ のことを方程式 (C.1) の特異点と言う。そしてさらに、その特異点 $x = x_1$ が以下の性質を満たす場合、 $x = x_1$ は方程式 (C.1) の確定特異点であると言う。

$$(x - x_1)^k p_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots) \text{ はすべて } x = x_1 \text{ で解析的となる。} \quad (\text{C.2})$$

ここで、 C_0 を 0 をでない定数、 λ はある定数 として、

$$J(s) = s^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^{n+\lambda} = C_0 s^\lambda + C_1 s^{\lambda+1} + \cdots \quad (\text{C.3})$$

という形の級数表示をもつ非自明解を見出すことを考える。(C.3) が項別微分できるもの とすると、

$$J'(s) = \lambda s^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^n + s^\lambda \sum_{n=1}^{\infty} C_n n s^{n-1} \quad (\text{C.4})$$

$$J''(s) = \lambda(\lambda-1) s^{\lambda-2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^n + 2\lambda s^{\lambda-1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n n s^{n-1} + s^\lambda \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1) s^{n-2} \quad (\text{C.5})$$

(C.4),(C.5) の右辺を (2.3) の両辺に s^2 を掛けた

$$s^2 J''(s) + s J'(s) + (s^2 - 1)J(s) = 0 \quad (s > 0) \quad (C.6)$$

の左辺に代入して整理すると、形式的には次を得る。

$$(\lambda^2 - 1)C_0 s^\lambda + \lambda(\lambda + 2)C_1 s^{\lambda+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \{C_n(\lambda + n + 1)(\lambda + n - 1) + C_{n-2}\} s^{n+\lambda} = 0 \quad (C.7)$$

ここで、(C.7) がすべての $s > 0$ に対して成り立っているものとする、(C.7) は s に関する恒等式なので、

$$C_0(\lambda^2 - 1) = 0 \quad (\text{この } s^\lambda \text{ の係数の式を決定方程式と言う}) \quad (C.8)$$

$$C_1 \lambda(\lambda + 2) = 0 \quad (C.9)$$

$$C_n(\lambda + n - 1)(\lambda + n + 1) + C_{n-2} = 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (C.10)$$

が成り立つ。

C_0 が 0 を除く任意の定数であることから、 $\lambda^2 - 1 = 0$ によって、 $\lambda = \pm 1$ である。また、(C.10) より、形式的に

$$C_n = -\frac{C_{n-2}}{(\lambda + n - 1)(\lambda + n + 1)} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

ここで $\lambda = -1$ を選んだ場合は、偶数項が定まらない。ここで $\lambda = 1$ を選ぶと、

$$C_1 = C_3 = \dots = C_{2m-1} = \dots = 0 \quad (m \in \mathbb{N}) \quad (C.11)$$

また、偶数項を求めると、

$$\begin{aligned} n = 2 \text{ のとき、} C_2 &= -\frac{C_0}{2 \cdot 4} \\ n = 4 \text{ のとき、} C_4 &= -\frac{C_2}{4 \cdot 6} = \frac{C_0}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} \\ n = 6 \text{ のとき、} C_6 &= -\frac{C_4}{6 \cdot 8} = -\frac{C_0}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8} \\ &\vdots \end{aligned}$$

一般に

$$C_{2m} = \frac{(-1)^m C_0}{2^{2m} m! (m+1)!} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (C.12)$$

を得る。よって、(C.11),(C.12) から、 C_0 は 0 を除く任意定数なので、 $\frac{C_0}{2}$ と置きなおせば、

$$J(s) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^{n+\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m C_0}{2^{2m+1} m! (m+1)!} \right\} s^{2m+1} = C_0 \left(\frac{s}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n} \quad (C.13)$$

となる。そして、ここで得た $\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n}$ を 1 次のベッセル関数と言う。以後これを $J_1(s)$ と表す。

さて、 $J_1(s)$ の級数部分は現段階では形式的なもののなので、その収束性を考えるのに $\left(\frac{s}{2}\right)^2 = t$ とすると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} t^n.$$

ここで $a_n = \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}$ とすれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)!}{(n+1)!(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

よって、ダランベールの定理より、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} t^n$ は \mathbb{R} 上で絶対収束かつ一様収束すると分かる。従って $J_1(s)$ の級数部分は、 \mathbb{R} 上で絶対収束かつ一様収束すると分かる。

故に、改めて $J_1(s) := \left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n}$ は任意の $0 < s < \infty$ で項別微分可能と分かり、最初の計算は正当化される。結果、これが 1 次のベッセルの微分方程式 (2.3) の解の一つであると分かる。また、 \mathbb{R} 上で一様収束することから

$$\lim_{s \rightarrow 0} J_1(s) = J_1(0) = 0. \quad (\text{C.14})$$

ここで $J_1(s)$ の $s > 0$ における原点近傍の挙動に関する命題を述べておく。

命題 C.2

$0 < s < 1$ において、1 次のベッセル関数 $J_1(s)$ は $J_1(s) > 0$ 、 $J_1'(s) > 0$

証明

$$J_1(s) = \left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \quad \text{より、}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} J_1(s) = J_1(0) = 0$$

$$\begin{aligned} J_1'(s) &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1} \right\}' = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \\ &> \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \right\} > \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \right\} \\ &> \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{s^2}{4}\right)^n \right\}. \end{aligned}$$

よって、 $0 < s < 1$ ならば、

$$0 < \frac{s^2}{4} < \frac{1}{4}, \text{ すなわち } -\frac{1}{4} < -\frac{s^2}{4} < 0$$

より、 $0 < s < 1$ では、

$$J_1'(s) > \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \right\} > \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \right\} = \frac{1}{6} > 0.$$

よって、 $0 < s < 1$ では、 $J_1(s) > 0$ 、 $J_1'(s) > \frac{1}{6}$. □

さて、次にベッセル関数のときと同様の方法で、 $s > 0$ 全体で定義される (2.3) のもう一つの基本解であるノイマン関数を構成する。まず、その形式的な導出をするにあたり、次の事実を用いる。([7]6 章 2 節 pp.162-175 参照。)

事実 C.3

$s = 0$ で実解析的な関数 $p(s), q(s)$ を係数を持つ、 $s > 0$ における

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{p(s)}{s} \frac{dy}{ds} + \frac{q(s)}{s^2} y = 0 \quad (\text{C.15})$$

という形の 2 階線形微分方程式の決定方程式

$$\lambda(\lambda - 1) + p(0)\lambda + q(0) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \quad (\text{C.16})$$

の解 λ_1, λ_2 ($\text{Re} \lambda_1 \geq \text{Re} \lambda_2$) が、 $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N}$ を満たすとする。また、 $p(s), q(s)$ のマクローリン展開は共に $s < \rho$ ($0 < \rho \leq \infty$) で収束するものとする。

このとき、(C.15) の微分方程式は $0 < s < \rho$ で収束する次の 2 つの非自明解をもつ。

$$y(s, \lambda) = s^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\lambda) s^n \quad (\text{C.17})$$

に対して、

$$y_1(s, \lambda_1) = y(s, \lambda_1) = s^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\lambda_1) s^n \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} y_2(s, \lambda_2) &= \left. \frac{\partial(y(s, \lambda))}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_2} = \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(s^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\lambda) s^n \right) \right]_{\lambda=\lambda_2} \\ &= s^{\lambda_2} \log s \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\lambda_2) s^n + s^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dC_n(\lambda_2)}{d\lambda} s^n. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

なお、 $C_n(\lambda)$ は、(C.17) の級数を (C.15) の式に代入して整理することで得られる関係式から決まる。ただし、 $C_0(\lambda) := D_0(\lambda - \lambda_2)$ (D_0 は 0 を除く任意定数) とおく。

本論文では、この式により $N_1(s)$ を形式的に求め、その後、それが確かに 1 次のベッセルの微分方程式の解であることを示す。

さて、1 次のベッセルの微分方程式の (C.18), (C.19) の右辺を計算する。上の事実に従えば、1 次のベッセルの微分方程式に関しては、恒等式 (C.7) により得られる関係式 (C.8) ~ (C.10) から、次のように $C_0(\lambda)$ 以降の $C_n(\lambda)$ が決まる。

$$\begin{aligned}
C_1(\lambda)\lambda(\lambda+2) &= 0 \\
C_{2m}(\lambda) &= \frac{(-1)^m C_0(\lambda)}{\prod_{n=1}^m \{(\lambda+2n-1)(\lambda+2n+1)\}} \quad (m=1, 2, \dots) \\
&= \frac{(-1)^m C_0(\lambda)}{(\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+3)\cdots(\lambda+2m-1)(\lambda+2m-1)(\lambda+2m+1)} \\
C_{2m+1}(\lambda) &= \frac{(-1)^m C_1(\lambda)}{\prod_{n=1}^m \{(\lambda+2n)(\lambda+2n+2)\}} \quad (m=1, 2, \dots) \\
&= \frac{(-1)^m C_1(\lambda)}{(\lambda+2)(\lambda+4)(\lambda+4)\cdots(\lambda+2m)(\lambda+2m)(\lambda+2(m+1))}.
\end{aligned}$$

そして、決定方程式 (C.16) の解の一つ $\lambda = \lambda_1 = 1$ をこれらに代入して整理することで、(C.18) に対応する係数

$$\begin{aligned}
C_0(\lambda_1) &= C_0(1) = 2D_0 \neq 0 \\
C_{2m}(\lambda_1) &= C_{2m}(1) = \frac{(-1)^m C_0(1)}{2^{2m} m! (m+1)!} \quad (m=1, 2, \dots) \\
C_1(\lambda_1) &= C_1(1) = 0 \\
C_{2m+1}(\lambda_1) &= C_{2m+1}(1) = 0 \quad (m=2, 3, \dots)
\end{aligned}$$

を得る。(これは 1 次のベッセル関数 J_1 の係数に他ならない。)

一方、ここで $C_0(\lambda) := D_0(\lambda - \lambda_2) = D_0(\lambda + 1)$ (ただし、 D_0 は 0 を除く任意定数) とおいていることから、

$$C_0(\lambda_2) = C_0(-1) = 0, \quad C_1(\lambda_2) = C_1(-1) = 0, \quad \frac{dC_0}{d\lambda}(\lambda_2) = C_0'(-1) = D_0 \neq 0 \quad (C.20)$$

よって、

$$C_{2m+1}(\lambda_2) = C_{2m+1}(-1) = 0 \quad (m=1, 2, \dots) \quad (C.21)$$

また、

$$C_{2m}(\lambda) = \frac{(-1)^m D_0}{(\lambda+3)(\lambda+3)\cdots(\lambda+2m-1)(\lambda+2m-1)(\lambda+2m+1)}.$$

これに $\lambda = \lambda_2 = -1$ を代入すれば、

$$\begin{aligned}
C_{2m}(\lambda_2) &= C_{2m}(-1) = \frac{(-1)^m D_0}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2(m-1) \cdot 2(m-1) \cdot 2m} \\
&= \frac{(-1)^m D_0}{2^{2m-1} (m-1)! m!} \quad (m=1, 2, \dots).
\end{aligned} \quad (C.22)$$

また、ここで対数微分を利用すると、

$$\begin{aligned}
\frac{C_{2m}'(\lambda)}{C_{2m}(\lambda)} &= \frac{d}{d\lambda} \log |C_{2m}(\lambda)| \\
&= \frac{d}{d\lambda} \log |D_0(\lambda+3)^{-2}(\lambda+5)^{-2} \cdots (\lambda+2m-1)^{-2}(\lambda+2m+1)^{-1}| \\
&= -2 \left(\frac{1}{\lambda+3} + \frac{1}{\lambda+5} + \cdots + \frac{1}{\lambda+2m-1} \right) - \frac{1}{\lambda+2m+1}.
\end{aligned}$$

よって、 $\varphi(m) := \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$ 、ただし、 $\varphi(0) = 0$ とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{dC_{2m}}{d\lambda}(\lambda_2) &= C_{2m}'(-1) = \left\{ -2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2(m-1)} \right) - \frac{1}{2m} \right\} C_{2m}(-1) \\
&= \left\{ - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m-1} \right) - \frac{1}{2m} \right\} C_{2m}(-1) \\
&= \left(-\varphi(m-1) - \frac{1}{2m} \right) \frac{(-1)^m D_0}{2^{2m-1} m! (m-1)!} \\
&= \left(-2\varphi(m-1) - \frac{1}{m} \right) \frac{(-1)^m D_0}{2^{2m} m! (m-1)!} \\
&= -\{\varphi(m-1) + \varphi(m)\} \frac{(-1)^m D_0}{2^{2m} m! (m-1)!} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (C.23)
\end{aligned}$$

一方、(C.9) の両辺を λ で微分すると

$$C_1'(\lambda)\lambda(\lambda+2) + C_1(\lambda)(\lambda+2) + C_1(\lambda)\lambda = 0$$

なので、 $C_1(-1) = 0$ より、

$$\frac{dC_1}{d\lambda}(\lambda_2) = C_1'(-1) = 0 \quad (C.24)$$

また、(C.22)、(C.23) のときと同様にして、

$$\begin{aligned}
C_{2m+1}'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \log |C_{2m+1}(\lambda)| C_{2m+1} \\
&= \left\{ \frac{C_1'(\lambda)}{C_1(\lambda)} - \frac{1}{\lambda+2} - 2 \left(\sum_{k=2}^m \frac{1}{\lambda+2k} \right) - \frac{1}{\lambda+2m+2} \right\} \frac{(-1)^m C_1(\lambda)}{\prod_{n=1}^m \{(\lambda+2n)(\lambda+2n+2)\}}
\end{aligned}$$

であるので、 $C_1(-1) = 0$ 、 $C_1'(-1) = 0$ より、

$$\frac{dC_{2m+1}}{d\lambda}(\lambda_2) = C_{2m+1}'(-1) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (C.25)$$

以上、(C.19) に対応するすべての係数が求まった。

よって、事実 C.3 を用いれば、1 次のベッセルの微分方程式 (2.3) の $J_1(s)$ と異なる非自明解として、

$$\begin{aligned}
J(s) &= s^{-1}(\log s) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(-1)s^n + s^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial C_n(\lambda)}{\partial \lambda} s^n \\
&= s^{-1} \log s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n D_0}{2^{2n-1} n! (n-1)!} s^{2n} \\
&\quad + s^{-1} \left(D_0 \cdot s^0 - \sum_{n=1}^{\infty} \{ \varphi(n-1) + \varphi(n) \} \frac{(-1)^n D_0}{2^{2n} n! (n-1)!} s^{2n} \right) \\
&= \log s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} D_0}{2^{2n+1} n! (n+1)!} s^{2n+1} \\
&\quad + \frac{D_0}{s} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \{ \varphi(n) + \varphi(n+1) \} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2(n+1)} n! (n+1)!} s^{2(n+1)} \right\} \\
&= D_0 \left\{ -J_1(s) \log s + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \varphi(n) + \varphi(n+1) \} \frac{(-1)^n}{n! (n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2(n+1)} \right\}
\end{aligned}$$

がとれる。なお、以後

$$\widetilde{J}_{-1}(s) := -J_1(s) \log s + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \varphi(n) + \varphi(n+1) \} \frac{(-1)^n}{n! (n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2(n+1)} \quad (\text{C.26})$$

とおき、

$$N_1(s) := \frac{2}{\pi} \left\{ (\gamma - \log 2) J_1(s) - \widetilde{J}_{-1}(s) \right\} \quad (\text{C.27})$$

$$\gamma := \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \log m \right) \doteq 0.57721 \dots \quad (\text{Euler の定数})$$

とおく。この $N_1(s)$ を 1 次のノイマン関数 (または 1 次の第二種ベッセル関数) と呼ぶ。なお、(C.27) を整理すると、

$$N_1(s) := \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \log \frac{s}{2} \right) J_1(s) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{s}{2} \right)^{-1} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \varphi(n) + \varphi(n+1) \} \frac{(-1)^n}{n! (n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n+1}. \quad (\text{C.28})$$

注意 C.4

q 次 (q は正の整数) のノイマン関数は

$$\begin{aligned}
N_q(s) &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \log \frac{s}{2} \right) J_q(s) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{q-1} \frac{(q-n-1)!}{n!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n-q} \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \varphi(n) + \varphi(n+q) \} \frac{(-1)^n}{n! (n+q)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n+q}.
\end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

また、0 次のノイマン関数は

$$N_0(s) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \log \frac{s}{2} \right) J_0(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi(n)}{(n!)^2} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n} \right]. \quad (\text{C.30})$$

実際、 $s > 0$ で $\widetilde{J_{-1}}$ および、 $N_1(s)$ がそもそも定義できるのかを確認するのに、 $\widetilde{J_{-1}}$ の 3 項目の級数部分の収束性を見ると、

$$\begin{aligned} 0 < \varphi(n) + \varphi(n+1) &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \\ &< 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right) \\ &< 2(n+1) \end{aligned}$$

より、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \varphi(n) + \varphi(n+1) \} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n+1} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n!)^2} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n}.$$

ここで、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n!)^2} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n!)^2} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0.$$

よって、ダランベールの定理、およびワイエルシュトラスのMテストより、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \varphi(n) + \varphi(n+1) \} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n+1}$$

が $0 < s < \infty$ で絶対収束かつ一様収束すると分かり、 $\widetilde{J_{-1}}(s)$ 、 $N_1(s)$ は $0 < s < \infty$ で絶対収束かつ一様収束すると分かる。よって、この範囲で定義できるとわかる。

ここで、次にこれらが $s > 0$ で 1 次のベッセルの微分方程式 (2.3) の解となっていることを確認しておく。まず、 $J_1(s)$ に関して、

$$\begin{aligned} J_1(s) &= \left(\frac{s}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n} \\ J_1'(s) &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n+1} \right\}' = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n} \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

$$\begin{aligned} J_1''(s) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{3}{1!2!} \left(\frac{s}{2} \right)^2 + \frac{5}{2!3!} \left(\frac{s}{2} \right)^4 - \frac{7}{3!4!} \left(\frac{s}{2} \right)^6 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n} \right\}' \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) 2n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(n-1)!(n+1)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

これらを $s > 0$ での (2.3) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(n-1)!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n-1} + \frac{1}{s} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1} - \frac{1}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{2^{2n} (n-1)!(n+1)!} s^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{2^{2n+1} n!(n+1)!} s^{2n-1} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} (n-1)!n!} s^{2n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n!(n+1)!} s^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n (2n+1)}{2^{2n} (n-1)!(n+1)!} - \frac{(-1)^n}{2^{2n-1} (n-1)!n!} s^{2n-1} \right\} s^{2n-1} \\
&\quad + \frac{1}{2s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{2^{2n+1} n!(n+1)!} s^{2n-1} - \frac{1}{2s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n!(n+1)!} s^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4n^2 + 2n - 4n(n+1) + 2n + 1 - 1}{2^{2n+1} n!(n+1)!} \right\} (-1)^n s^{2n-1} = 0.
\end{aligned}$$

よって確かに、 $J_1(s)$ は $s > 0$ で (2.3) の解となっていることが分かる。また、

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_{-1}(s) &= -J_1(s) \log s + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2(n+1)} \\
&= -J_1(s) \log s + \frac{1}{s} + \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n+1} \\
\widetilde{J}_{-1}'(s) &= -J_1'(s) \log s - \frac{J_1(s)}{s} - \frac{1}{s^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n} \quad (\text{C.33})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_{-1}''(s) &= -J_1''(s) \log s - \frac{2J_1'(s)}{s} + \frac{J_1(s)}{s^2} + \frac{2}{s^3} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n (4n+2)}{(n-1)!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n-1}. \quad (\text{C.34})
\end{aligned}$$

これらを同様に (2.3) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= -J_1''(s) \log s - \frac{2J_1'(s)}{s} + \frac{J_1(s)}{s^2} + \frac{2}{s^3} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n(4n+2)}{(n-1)!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n-1} \\
&- \frac{J_1'(s) \log s}{s} - \frac{J_1(s)}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n-1} \\
&+ \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \left\{ -J_1(s) \log s + \frac{1}{s} + \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n+1} \right\} \\
&= -\frac{2J_1'(s)}{s} + \frac{2}{s^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n(4n+2)}{(n-1)!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n-1} \\
&- \frac{1}{s^3} + \frac{1}{4s} + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n-1} \\
&+ \frac{1}{s} - \frac{1}{s^3} + \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n+1} - \frac{1}{4s} \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n-1}.
\end{aligned}$$

ここで、

$$-\frac{2J_1'(s)}{s} = -\frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^n} s^{2n} = -\frac{1}{s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^n} s^{2n-1}$$

から、

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^n} s^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n(4n^2+4n)}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n-1} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi(n-1) + \varphi(n)\} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!n!4^n} s^{2n-1} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^n} s^{2n-1} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right\} \frac{(-1)^n}{(n-1)!n!4^n} s^{2n-1} \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\} \frac{(-1)^n}{(n-1)!n!4^n} s^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^n} s^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \frac{(-1)^n}{(n-1)!n!4^n} s^{2n-1} = 0.
\end{aligned}$$

よって確かに、 $\widetilde{J_{-1}}(s)$ も $s > 0$ で (2.3) の解となっていることが分かる。従って、 $N_1(s)$ もその定義 (C.27) から、確かに $s > 0$ で (2.3) の解となっていることが分かる。

最後に、 $J_1(s)$ と $\widetilde{J}_{-1}(s)$ (または $J_1(s)$ と $N_1(s)$) との一次独立性を示すにあたり、まず、 $\widetilde{J}_{-1}(s)$ 、 $N_1(s)$ および、その導関数が原点でそれぞれ ∞ 、 $-\infty$ に発散することを示す。(なお、これと (C.14) により命題 2.4 が示される。)

$$\begin{aligned} \text{命題 C.5} \quad & \lim_{s \rightarrow +0} \widetilde{J}_{-1}(s) = \infty, \lim_{s \rightarrow +0} N_1(s) = -\infty \\ & \lim_{s \rightarrow +0} \widetilde{J}_{-1}'(s) = -\infty, \lim_{s \rightarrow +0} N_1'(s) = \infty \end{aligned}$$

命題 C.5 の証明

$\widetilde{J}_{-1}(s)$ について示せば、 $N_1(s)$ については $N_1(s)$ の定義 (C.27) から分かる。

さて、 $0 < s < 1$ のとき、 $\log s < 0$ 、および、 $J_1(s) > 0$ (命題 C.2 による) より、
 $0 < -J_1(s) \log s$

よって、十分小さな正の数 $s > 0$ をとれば、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2(n+1)} \\ & < -J_1(s) \log s + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2(n+1)} = \widetilde{J}_{-1}(s) \end{aligned}$$

よって、 $\lim_{s \rightarrow 0+0} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2(n+1)} \right] = \infty$ であるから、

$$\lim_{s \rightarrow 0+0} \widetilde{J}_{-1}(s) = \infty.$$

また、(C.31),(C.33) から

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_{-1}'(s) &= -J_1'(s) \log s - \frac{J_1(s)}{s} - \frac{1}{s^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n} \\ &= -\log s - \frac{\log s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} - \frac{J_1(s)}{s} - \frac{1}{s^2} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n}. \end{aligned}$$

ここで $\lim_{s \rightarrow +0} (-s^2 \log s) = 0$ なので、1 より十分小さい任意の正の数 $0 < \varepsilon < 1$ に対しても、ある正の数 $\delta > 0$ をとると、

$$0 < s < \delta \implies | -s^2 \log s | < \varepsilon$$

が成り立つ。

ここで、 $\delta < 1$ としておけば、 $0 < -s^2 \log s < \varepsilon$

両辺を s^2 で割って、 $0 < s < \delta \implies 0 < -\log s < \frac{\varepsilon}{s^2}$.

よって、 $0 < s < 1$ なる s を十分小さく取っておけば

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_{-1}'(s) &< -\frac{\log s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} - \frac{J_1(s)}{s} + \frac{\varepsilon - 1}{s^2} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n} \quad (\text{ただし、}\varepsilon - 1 < 0) \end{aligned}$$

と評価できる。従って、 $\varepsilon - 1 < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +0} \frac{\log s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} &= 0 \quad \lim_{s \rightarrow +0} \frac{J_1(s)}{s} = \frac{1}{2} \quad \lim_{s \rightarrow +0} \frac{\varepsilon - 1}{s^2} = -\infty \\ \lim_{s \rightarrow +0} \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi(n) + \varphi(n+1)\} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!4^{n+1}} s^{2n} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから、 $\lim_{s \rightarrow +0} \widetilde{J}_{-1}'(s) = -\infty$. □

よって、この命題の系として、十分小さな任意の正の数 $\varepsilon_1 > 0$ に対して、 $0 < s < \varepsilon_1$ では、 $N_1(s) < 0$ かつ、 $N_1'(s) > 0$ (または、 $\widetilde{J}_{-1}(s) > 0$ かつ、 $\widetilde{J}_{-1}'(s) < 0$) となっていることが分かる。

一方、命題 C.2 から、 $0 < \varepsilon_2 \leq 1$ なる任意の正の数 ε_2 に対して、 $0 < s < \varepsilon_2$ では、 $J_1(s) > 0$ かつ、 $J_1'(s) > 0$

故に、 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ なる正の数 ε に対して、 $0 < s < \varepsilon$ なる範囲で考えることで、

$$W[J_1(s), N_1(s)] = \begin{vmatrix} J_1(s) & N_1(s) \\ J_1'(s) & N_1'(s) \end{vmatrix} = J_1(s)N_1'(s) - N_1(s)J_1'(s) > 0 \quad (\text{C.35})$$

(なお、 $W[J_1(s), \widetilde{J}_{-1}(s)] < 0$ である。) よって、補題 2.2 が示された。 □

命題 2.6 の証明

(2.3) の 1 次のベッセルの微分方程式に対し、 $s = i\xi$ とおくと、

$\frac{dJ}{ds} = \frac{dJ}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{i} \frac{dJ}{d\xi}$ $\frac{d^2J}{ds^2} = -\frac{d^2J}{d\xi^2}$ である。従って、これらを代入して整理すると、

$$\frac{d^2J}{d\xi^2}(\xi) + \frac{1}{\xi} \frac{dJ}{d\xi}(\xi) - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) J(\xi) = 0. \quad (\text{C.36})$$

となり、(2.7) の 1 次の修正ベッセルの微分方程式に一致する。従って、(2.7) は

$$CI_1(\xi) = CJ_1(i\xi) = C \left(\frac{i\xi}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{i\xi}{2}\right)^{2n} = C_1 \left(\frac{\xi}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n}$$

という解を持つことが分かる。(収束性に関しては J_1 と同様である。)

$N_1(s)$ に対しても同様のものが考えられるが、それより零点に関する情報が分かりやすい解を、ここで改めて定数変化法を用いて構成する。

$I(\xi) = C(\xi)I_1(\xi)$ と置くと

$$I'(\xi) = C'(\xi)I_1(\xi) + C(\xi)I_1'(\xi), \quad I''(\xi) = C''(\xi)I_1(\xi) + 2C'(\xi)I_1'(\xi) + C(\xi)I_1''(\xi)$$

これらを (2.7) に代入して整理すると、 $0 < \xi < c = \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}}a$ では、 $I_1(\xi) > 0$ なので、

$$C''(\xi) = -\left\{\frac{1}{\xi} + \frac{2I_1'(\xi)}{I_1(\xi)}\right\}C'(\xi).$$

従って、 $0 < \xi < c = \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}}a$ で

$$C'(s) = \frac{C_2}{\xi \{I_1(\xi)\}^2} \quad (C_2 \text{ は任意定数}).$$

よって、 $\frac{1}{\xi \{I_1(\xi)\}^2}$ は $0 < \xi < c = \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}}a$ で連続かつ単調減少なので、

$$C(\xi) = C_2 \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} + C_1 \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

が定義でき、 $I_1(\xi)$ とは別に、

$$C_2 \tilde{I}_1(\xi) := C_2 I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} \quad (C_2 \text{ は任意定数}) \quad (\text{C.37})$$

を (2.7) の解としてとれることが分かる。

ここで、

$$\begin{aligned} W[I_1(\xi), \tilde{I}_1(\xi)] &= I_1(\xi) \left\{ I_1'(\xi) \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} - \frac{1}{\xi I_1(\xi)} \right\} - I_1'(\xi) I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} \\ &= -\frac{1}{\xi} < 0 \quad (\xi > 0). \end{aligned}$$

よって、確かに (2.7) の $0 < \xi < c = \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}}a$ における解は $I_1(\xi)$ と $\tilde{I}_1(\xi) := I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2}$ の線形結合で表わせると分かる。よって、命題 2.6 が示された。□

命題 2.8 の証明

$$\begin{aligned} \{I_1(\tau)\}^2 &= \frac{\tau^2}{4} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2n} \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2n} \right\} \\ &= \frac{\tau^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \frac{1}{n!(n+1)!(m-n)!(m-n+1)!} \right) \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2m}. \end{aligned}$$

ここで、 $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ では $l! \geq 2^{l-1} > 0$ が成り立つことから、

$$n!(n+1)!(m-n)!(m-n+1)! \geq 2^{n-1}2^n 2^{m-n-1}2^{m-n} = \frac{4^m}{4}.$$

よって、 $0 < \tau \leq 2$ なる任意の τ に対して、

$$\begin{aligned} \tau \{I_1(\tau)\}^2 &= \frac{\tau^3}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \frac{1}{n!(n+1)!(m-n)!(m-n+1)!} \right) \left(\frac{\tau}{2} \right)^{2m} \\ &< \frac{\tau^3}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^m \frac{4}{4^m} \right) \left(\frac{\tau}{2} \right)^{2m} = \tau^3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{4^m} \left(\frac{\tau}{2} \right)^{2m} \\ &< \tau^3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{4^m} = \frac{16}{9} \tau^3. \end{aligned}$$

よって、 $\xi > 0$ を十分小さくとおけば、任意の $\xi > 0$ に対して $I_1(\xi) > 0$ より、以下のことが成り立つ。

(i) $c \leq 2$ のとき

$$I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{9}{16} \frac{1}{\tau^3} d\tau < I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} = \tilde{I}_1(\xi).$$

よって、

$$I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{9}{16} \frac{1}{\tau^3} d\tau = \frac{9}{32} \left(1 + \frac{\xi^2}{8} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{2n} \right) \left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{c^2} \right)$$

より、

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{9}{16} \frac{1}{\tau^3} d\tau = \infty$$

であるので、このとき

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \tilde{I}_1(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +0} I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} = \infty.$$

(ii) $2 \leq c$ のとき

$$\begin{aligned} I_1(\xi) \int_{\xi}^2 \frac{9}{16} \frac{1}{\tau^3} d\tau &< I_1(\xi) \int_{\xi}^2 \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} + I_1(\xi) \int_2^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} \\ &= I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2}. \end{aligned}$$

同様に、

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} I_1(\xi) \int_{\xi}^2 \frac{9}{16} \frac{1}{\tau^3} d\tau = \infty$$

であるので、このとき

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \tilde{I}_1(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +0} I_1(\xi) \int_{\xi}^c \frac{d\tau}{\tau \{I_1(\tau)\}^2} = \infty.$$

また、一方 $I_1(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n}$ は、 J_1 と同様に \mathbb{R} 上で一様収束するので、

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} I_1(\xi) = I_1(0) = 0.$$

よって以上のことから、命題 2.8 が示された。 □

C.2 ベッセル関数のいくつかの性質

命題 2.3

q 次のベッセル関数 $J_q(s)$ (s は実変数、 $q > -1$) は $s > 0$ において、無限に発散する可算無限個の零点をもつ。

命題 2.3 の証明 ([2]7 章 2 節 p.227, [7]6 章 5 節 pp.209-210 を参考とした。)

まず、 $J_q(s)$ の級数部分が、 $s > 0$ で絶対収束かつ一様収束することを確認しておく。

$$J_q(s) = \left(\frac{s}{2}\right)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(q+n+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \text{ に対して、} t = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \text{ とおき、}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(q+n+1)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ とすると、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \Gamma(q+n+1)}{(n+1)! \Gamma(q+n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(q+n+1)} = 0.$$

よって、ダランベールの定理より、確かに $J_q(s)$ の級数部分は $s > 0$ で絶対収束かつ一様収束する。故に解析関数の零点の孤立性から、 $J_q(s)$ が $s > 0$ において零点をもつとすれば、それらはすべて孤立点である。

従って、 $J_q(s)$ は $s > 0$ において高々可算無限個しか零点を持ちえない。なお、これから $(0, \varepsilon]$ においては $J_q(s)$ は高々有限個しか零点を持ちえない。(※ ε は q に依存するある正の数)

故に、あとは、 $J_q(s)$ が $s \geq \varepsilon$ において確かに可算無限個の零点を持つことを示せばよい。それには次の定理を用いる。

Sturm の比較定理 (証明は [2]3 章 3 節 p.65、または [7]6 章 5 節 pp.207-208 参照。)

区間 I で定義された連続関数 $a(s), b(s)$ が 任意の $s \in I$ で

$$a(s) \leq b(s) \quad (\text{ただし、} a(s) \not\equiv b(s))$$

を満たすとする。ここで、 $u(s), v(s)$ が任意の $s \in I$ でそれぞれ

$$\begin{cases} u''(s) + a(s)u(s) = 0 \\ v''(s) + b(s)v(s) = 0 \end{cases}$$

を満たす非自明解であるとする。このとき、 $u(s)$ の任意の隣りあう零点 α, β (ただし、 $\alpha < \beta$) の間 (α, β) に $v(s)$ の零点が少なくとも一つ存在する。

さて、 $J_q(s)$ は q 次のベッセルの微分方程式

$$J''(s) + \frac{1}{s} J'(s) + \left(1 - \frac{q^2}{s^2}\right) J(s) = 0$$

の非自明な解であるので、

$$J_q''(s) + \frac{1}{s} J_q'(s) + \left(1 - \frac{q^2}{s^2}\right) J_q(s) = 0. \quad (\text{C.38})$$

ここで、 $v_q(s) = \sqrt{s} J_q(s)$ とおくと、(この変換をゲージ変換という。)

$s \geq \varepsilon$ においては、 $J_q(s) = \frac{v_q(s)}{\sqrt{s}}$ より、

$$J_q'(s) = \frac{v_q'(s)}{\sqrt{s}} - \frac{v_q(s)}{2s\sqrt{s}}, \quad J_q''(s) = \frac{v_q''(s)}{\sqrt{s}} - \frac{v_q'(s)}{s\sqrt{s}} + \frac{3}{4} \frac{v_q(s)}{s^2\sqrt{s}}.$$

これらを (C.38) に代入して整理すると、

$$v_q''(s) + \left(1 - \frac{q^2 - \frac{1}{4}}{s^2}\right) v_q(s) = 0 \quad (\text{C.39})$$

を得る。一方、ここで $u(s) = \cos as$ (ただし、 $a > 0$) とおくと、これは

$$u''(s) + a^2 u(s) = 0 \quad (\text{C.40})$$

を満たし、 $[\varepsilon, \infty)$ において可算無限個の零点をもつ。よって、 $I = [\varepsilon, \infty)$ として、Sturm の比較定理 を適用すれば、 $v_q(s)$ は I において可算無限個の零点を持つと分かる。

実際、次のように場合分けをして考える。

(i) $|q| = \frac{1}{2}$ のとき

このとき (C.39) の式は、

$$v_q''(s) + v_q(s) = 0$$

よって、このとき $v_q(s) = \cos(s+C)$ (C は任意の実数) より、確かに $v_q(s)$ は $I = [\varepsilon, \infty)$ において可算無限個の零点を持つ。

(ii) $0 \leq |q| < \frac{1}{2}$ のとき

このとき、 $1 - \frac{q^2 - \frac{1}{4}}{s^2} > 1$

よって、(C.40) で $a^2 = 1$ として、Sturm の比較定理を用いれば、 $v_q(s)$ は $I = [\varepsilon, \infty)$ ただし、 ε は $\frac{\pi}{2}$ より十分小さな正の数 における $u(s)$ の任意の隣り合う零点間

$$\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi, \left(\frac{1}{2} + n + 1\right)\pi\right) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

に少なくとも一つ零点を持つと分かる。よって、確かに $v_q(s)$ は I において可算無限個の零点を持つ。

(iii) $\frac{1}{2} < |q|$ のとき

このとき、任意の $s \in I = [\varepsilon, \infty)$ に対して、 $1 - \frac{q^2 - \frac{1}{4}}{s^2} > 1 - \frac{q^2 - \frac{1}{4}}{\varepsilon^2}$ が成り立つ。

従って、 $1 - \frac{q^2 - \frac{1}{4}}{\varepsilon^2} > 0$ を満たすように $\varepsilon > 0$ を各 q に対して取れば、(C.40) で $a^2 = 1 - \frac{q^2 - \frac{1}{4}}{\varepsilon^2} > 0$ として、Strum の比較定理を適用できる。このとき、 $v_q(s)$ は I における $u(s)$ の任意の隣り合う零点間

$$\left(\frac{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi}{a}, \frac{\left(\frac{1}{2} + n + 1\right)\pi}{a} \right) \quad (n = m, m + 1, \dots)$$

に少なくとも一つ零点を持つと分かる。よって、確かに $v_q(s)$ は I において可算無限個の零点を持つ。

※ 例えば $q = 1$ の場合、(C.39) の式は

$$v_1''(s) + \left(1 - \frac{3}{4s^2}\right) v_1(s) = 0 \quad (s > 0)$$

となる。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $s \geq \varepsilon$ では、

$$1 - \frac{3}{4\varepsilon^2} < 1 - \frac{3}{4s^2}$$

であり、命題 C.2 や本論文 2 章 p.9 のその導出の過程から、 $J_1(s)$ は非自明だと分かっている。よって、 $\varepsilon \geq 1$ としておけば、上の式で $a^2 = \frac{1}{4}$ として、Strum の比較定理を適用できる。その場合、 $v_1(s)$ は $I = (\varepsilon, \infty)$ における $u(s) = \cos \frac{s}{2}$ の任意の隣り合う零点間

$$((1 + 2n)\pi, (3 + 2n)\pi) \quad (n = m, m + 1, \dots)$$

に少なくとも一つ零点を持つと分かる。よって、確かに $v_1(s)$ は $s \geq \varepsilon$ において可算無限個の零点を持つと分かる。

ところで、 \sqrt{s} は $s > 0$ において零点を取りえない。

よって、 $s > 0$ における $v_q(s) = \sqrt{s} J_q(s)$ の零点は $s > 0$ における $J_q(s)$ の零点と一致する。よって、確かに命題の主張が成り立つ。□

なお、ここで再度 Strum の比較定理を用いることで、さらに次のことが主張できる。

命題 C.6

$q > \frac{1}{2}$ のとき、 $J_q(s)$ の正の第 n 零点を $\lambda_{q,n}$ とすると、 $\lambda_{q,n+1} - \lambda_{q,n} > \pi$.

命題 C.6 の証明 ([2]7 章 2 節 p.227 を参考とした。)

命題 2.3 から、 q 次のベッセル関数 $J_q(s)$ (s は実変数、 $q \geq 0$) は、 $s > 0$ において無限に発散する可算無限個の零点をもつことが分かっている。ここで、任意の $s > 0$ に対して、

$$q > \frac{1}{2} \quad \text{のとき、} \quad 1 - \frac{q^2 - \frac{1}{4}}{s^2} < 1 \quad \text{であるので、}$$

$q > \frac{1}{2}$ のとき、Strum の比較定理、および (C.39) から、 $J_q(s)$ の任意の隣り合う零点 $\lambda_{q,n}, \lambda_{q,n+1}$ の間 $(\lambda_{q,n}, \lambda_{q,n+1})$ に

$$u(s) = \cos(s + b) \quad (b \text{ は任意の実数、先ほどの命題では } b = 0 \text{ としていた。})$$

の零点が少なくとも一つ存在すると分かる (なお、前命題で取った ε は、このとき各 q に対して、 $0 < \varepsilon < \lambda_{q,1}$ ($J_q(s)$ の正の第 1 零点) となるように改めて取り直しておく)。

ここで、 $u(s) = \cos(s + b)$ の正の第 m 零点を μ_m^b と表すものとする。

(i) 各 $(\lambda_{q,n}, \lambda_{q,n+1})$ に $u(s)$ の正の零点が 2 つ以上ある場合

$$\mu_{m+1}^b - \mu_m^b = \pi \quad \text{より、このときは明らかに } \lambda_{q,n+1} - \lambda_{q,n} > \pi$$

(ii) 各 $(\lambda_{q,n}, \lambda_{q,n+1})$ に $u(s)$ の正の零点が 1 つしかない場合

b は任意の実数であるので、任意の各 $n = 1, 2, \dots$ に対して、 $\lambda_{q,n} = \mu_m^b$ なるように $b \in \mathbb{R}$ を選ぶことが出来る。ここで、 $(\lambda_{q,n}, \lambda_{q,n+1})$ の間に必ず $u(s)$ の零点が必ず一つはあるという制約から、 $\lambda_{q,n+1} - \lambda_{q,n} > \mu_{m+1}^b - \mu_m^b = \pi$

よって、いずれにせよ、

$$q > \frac{1}{2} \quad \text{のとき、} \quad \lambda_{q,n+1} - \lambda_{q,n} > \pi \quad (\lambda_{q,n} \text{ は } J_q(s) \text{ の正の第 } n \text{ 零点})$$

□

また、同様にして Strum の比較定理を利用することにより、次のことが成り立つと知られている。([7]6 章 5 節 pp.209-210 参照)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{q,n+1} - \lambda_{q,n}) = \pi \quad (q \geq 0) \quad (\text{C.41})$$

結果、これらの系として 補題 2.12 が分かる。

補題 2.12

$J_1(s)$ の正の第 n 零点を $\lambda_{1,n}$ とすると、 π より大きいある正の数 $M > 0$ が存在して、

$$n < \lambda_{1,n} \leq Mn \quad (\text{C.42})$$

が成り立つ。

補題 2.12 の証明

(C.41) から、任意の正の数 $\varepsilon_1 > 0$ に対して、ある自然数 $N_1 \in \mathbb{N}$ をとれば、

$$n \geq N_1 \implies \lambda_{1,n+1} - \lambda_{1,n} \leq \varepsilon_1 + \pi$$

が成り立つ。よって、 $\varepsilon_1 + \pi = M_1$ 、 $\max_{1 \leq n \leq N_1-1} \{(\lambda_{1,n+1} - \lambda_{1,n})\} = M_2$ とし、

$M = \max \{M_1, M_2\}$ とすれば、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$0 < \lambda_{1,n+1} - \lambda_{1,n} < M$$

が成り立つ。また、命題 C.6 と合わせると、

$$\pi < \lambda_{1,n+1} - \lambda_{1,n} < M$$

が成り立つ。よって、命題 C.2 および、 $J_1(s)$ が任意の $s \in \mathbb{R}$ で解析的であることから、 $\lambda_{1,1}$ は少なくとも 1 より大きいと分かり、補題 2.12 の主張が成り立つと分かる。 \square

命題 2.9

$\lambda_{1,m}, \lambda_{1,n}$ をそれぞれ 1 次のベッセル関数の正の第 m 零点、第 n 零点とすると、

$$\int_0^a J_1\left(\frac{\lambda_{1,m}r}{a}\right) J_1\left(\frac{\lambda_{1,n}r}{a}\right) r dr = \begin{cases} \frac{a^2}{2} \{J_1'(\lambda_{1,n})\}^2 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (a \text{ は任意の正の定数})$$

という関係が成り立つ。なお、 $'$ は $s = \frac{\lambda_{1,n}r}{a}$ による微分

命題 2.9 の証明 ([3]6 章 §94pp.108-109 を参考とした。)

$R_1(r) = J_1(\sqrt{\alpha}r)$ 、 $R_2(r) = J_1(\sqrt{\beta}r)$ (J_1 は 1 次の第一種ベッセル関数、 α, β は任意の正の数) とすれば、

$$r^2 R_1''(r) + r R_1'(r) + (\alpha r^2 - 1) R_1(r) = 0 \quad (\text{C.43})$$

$$r^2 R_2''(r) + r R_2'(r) + (\beta r^2 - 1) R_2(r) = 0 \quad (\text{C.44})$$

を満たす。(C.43) $\times R_2(r)$ - (C.44) $\times R_1(r)$ とすれば、

$$\begin{aligned} & r^2 \{R_1''(r) R_2(r) - R_1(r) R_2''(r)\} + r \{R_1'(r) R_2(r) - R_1(r) R_2'(r)\} \\ &= (\beta - \alpha) r^2 R_1(r) R_2(r) \end{aligned}$$

両辺を r で割って

$$\begin{aligned} & r \{R_1''(r) R_2(r) - R_1(r) R_2''(r)\} + \{R_1'(r) R_2(r) - R_1(r) R_2'(r)\} = (\beta - \alpha) r R_1(r) R_2(r) \\ & \frac{d}{dr} \{r(R_1'(r) R_2(r) - R_1(r) R_2'(r))\} = (\beta - \alpha) r R_1(r) R_2(r) \end{aligned}$$

よって、不定積分によって次を得る。

$$(\alpha - \beta) \int R_1(r) R_2(r) r dr = r W[R_1(r), R_2(r)] = r (R_1(r) R_2'(r) - R_1'(r) R_2(r))$$

よって、 $r \geq 0$, 任意の正の数 α, β 、ただし $\alpha \neq \beta$ に対して、 $R_1(r) = J_1(\sqrt{\alpha}r)$ 、 $R_2(r) = J_1(\sqrt{\beta}r)$ とすれば、

$$\begin{aligned} & (\alpha - \beta) \int J_1(\sqrt{\alpha}r) J_1(\sqrt{\beta}r) r dr \\ &= r \left\{ \sqrt{\beta} J_1(\sqrt{\alpha}r) J_1'(\sqrt{\beta}r) - \sqrt{\alpha} J_1'(\sqrt{\alpha}r) J_1(\sqrt{\beta}r) \right\}. \end{aligned} \quad (C.45)$$

また、 $r \geq \varepsilon > 0$, 任意の正の数 α, β 、ただし $\alpha \neq \beta$ に対して、 $R_1(r) = \widetilde{J}_{-1}(\sqrt{\alpha}r)$ 、 $R_2(r) = \widetilde{J}_{-1}(\sqrt{\beta}r)$ とすれば、

$$\begin{aligned} & (\alpha - \beta) \int \widetilde{J}_{-1}(\sqrt{\alpha}r) \widetilde{J}_{-1}(\sqrt{\beta}r) r dr \\ &= r W \left[\widetilde{J}_{-1}(\sqrt{\alpha}r), \widetilde{J}_{-1}(\sqrt{\beta}r) \right] \\ &= r \left\{ \sqrt{\beta} \widetilde{J}_{-1}(\sqrt{\alpha}r) \widetilde{J}_{-1}'(\sqrt{\beta}r) - \sqrt{\alpha} \widetilde{J}_{-1}'(\sqrt{\alpha}r) \widetilde{J}_{-1}(\sqrt{\beta}r) \right\}. \end{aligned} \quad (C.46)$$

一方、(C.43) の両辺に $2R_1'$ を掛けて整理すると、

$$\begin{aligned} & 2r^2 R_1'' R_1' + 2r R_1'^2 + 2(\alpha r^2 - 1) R_1' R_1 = 0 \\ & \frac{d}{dr} \left\{ (r R_1')^2 + (\alpha r^2 - 1) R_1^2 \right\} = 2\alpha r R_1^2. \end{aligned}$$

よって、不定積分として

$$2\alpha \int R_1^2 r dr = (r R_1')^2 + (\alpha r^2 - 1) R_1^2$$

を得る。従って、任意の正の数 α に対して、

$$\begin{aligned} & \int \left\{ J_1(\sqrt{\alpha}r) \right\}^2 r dr \\ &= \frac{1}{2} \left\{ r^2 \left\{ J_1'(\sqrt{\alpha}r) \right\}^2 + \left(r^2 - \frac{1}{\alpha} \right) \left\{ J_1(\sqrt{\alpha}r) \right\}^2 \right\} \quad (r \geq 0) \end{aligned} \quad (C.47)$$

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \widetilde{J}_{-1}(\sqrt{\alpha}r) \right\}^2 r dr \\ &= \frac{1}{2} \left\{ r^2 \left\{ \widetilde{J}_{-1}'(\sqrt{\alpha}r) \right\}^2 + \left(r^2 - \frac{1}{\alpha} \right) \left\{ \widetilde{J}_{-1}(\sqrt{\alpha}r) \right\}^2 \right\} \quad (r > 0). \end{aligned} \quad (C.48)$$

以上、これらから $\lambda_{1,m}, \lambda_{1,n}$ をそれぞれ 1 次のベッセル関数の正の第 m 零点、第 n 零点とすると、関係式

$$\int_0^a J_1\left(\frac{\lambda_{1,m}r}{a}\right) J_1\left(\frac{\lambda_{1,n}r}{a}\right) r dr = \begin{cases} \frac{a^2}{2} \{J_1'(\lambda_{1,m})\}^2 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (a \text{ は任意の正の定数})$$

を得る。 □

注意 C.7

(一般の q 次 ($q \geq -\frac{1}{2}$) の場合も同様の直交関係が得られている。[3]6 章 §94pp.108-109,[2]7 章 10 節 pp.249-250 参照)

注意 C.8

一方、ノイマン関数の方は原点において発散することが分かっているから、同じように積分しても直交性を見出すことは出来ない。(これは直交性がないことを示すものではない。)

命題 2.10

$$\begin{aligned} J_0'(s) &= -J_1(s) \\ \frac{2}{s}J_1(s) &= J_0(s) + J_2(s), \quad 2J_1'(s) = J_0(s) - J_2(s), \quad 2J_2'(s) = J_1(s) - J_3(s) \\ J_1'(\lambda_{1,n}) &= J_0(\lambda_{1,n}) = -J_2(\lambda_{1,n}) \neq 0 \quad \lambda_{1,n} \text{ は } J_1(s) \text{ の正の第 } n \text{ 零点} \\ \text{上の}' &\text{は } \frac{d}{ds} \text{ を表す。} \end{aligned}$$

命題 2.10 の証明

$s \in \mathbb{R}$ における 0 次のベッセル関数は

$$J_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n}.$$

よって、これも収束半径が ∞ なので、

$$J_0'(s) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1} = -J_1(s).$$

$$\text{また、} J_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n}, \quad J_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1},$$

$$J_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+2} \text{ で } J_2(s) \text{ も収束半径が } \infty \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{s}J_1(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \\ J_0(s) + J_2(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2J_1'(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \\
J_0(s) - J_2(s) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{(n!)^2} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+1)!} \right\} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n}.
\end{aligned}$$

よって、 $\frac{2}{s}J_1(s) = J_0(s) + J_2(s)$ 、 $2J_1'(s) = J_0(s) - J_2(s)$

またこれから、 $J_0(s) = \frac{1}{s}J_1(s) + J_1'(s)$ 、 $\frac{1}{s}J_1(s) - J_1'(s) = J_2(s)$

ここで、 s に $J_1(s)$ の正の第 n 零点 $s = \lambda_{1,n} > 1$ を代入すれば、

$$J_1'(\lambda_{1,n}) = J_0(\lambda_{1,n}) = -J_2(\lambda_{1,n})$$

ところで、命題 2.9 から、各 $n = 1, 2, \dots$ に対して、 $a = 1$ として、

$$\int_0^1 \{J_1(\lambda_{1,n}r)\}^2 r dr = \frac{1}{2} \{J_1'(\lambda_{1,n})\}^2 = \frac{1}{2} \{J_0(\lambda_{1,n})\}^2 = \frac{1}{2} \{J_2(\lambda_{1,n})\}^2 \quad (\text{C.49})$$

ここで、左辺の積分は命題 C.2 から 0 ではない。よって

$$J_1'(\lambda_{1,n}) = J_0(\lambda_{1,n}) = -J_2(\lambda_{1,n}) \neq 0$$

また、同様にして

$$\begin{aligned}
J_2'(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n!(n+2)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1} \\
J_1(s) - J_3(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+3)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+3} \\
&= \frac{s}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(n+2)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1} \\
&= \frac{s}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1} \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n!(n+1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+1}
\end{aligned}$$

より、

$$J_2'(s) = J_1(s) - J_3(s)$$

□

注意 C.9

一般に、 q 次の (第一種) ベッセル関数 (q は正の整数) に対しても、同じように

$$\frac{2q}{s} J_q(s) = J_{q-1}(s) + J_{q+1}(s), \quad 2J_q'(s) = J_{q-1}(s) - J_{q+1}(s) \quad (\text{C.50})$$

が成り立つ。([2]7 章 1 節 pp.223-224 参照) なお、この式を recurrence formulae と呼んでいる文献もある。

付 録 D Fourier-Bessel 級数に関して

定義 D.1

(0, 1) で定義された適当な条件を満たす関数 $f(r)$ を上のように

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_q(\lambda_{q,n} r), \quad a_n = \frac{2}{\{J_{q+1}(\lambda_{q,n})\}^2} \int_0^1 f(x) J_q(\lambda_{q,n} x) x dx \quad \text{ただし, } q \geq -\frac{1}{2}$$

J_q は q 次の (第一種) ベッセル関数、 $\lambda_{q,n}$ はその正の第 n 零点

と級数展開したものを (0, 1) における $f(r)$ の Fourier-Bessel 級数と言う。

注意 D.2

Fourier-Bessel 級数は Fourier 級数展開と同様、直交関数系による級数展開である。

この収束性については、[13]18 章 pp.581-593 によれば以下のことが示されている。(なお、 q をすでに 1 としてある。)

定理 D.3 (开区間 (0, 1) 内の任意の閉区間 $[a, b]$ の内点における各点収束)

$f(r)$ を开区間 (0, 1) 内の任意の区間で定義される関数とし、 $\int_0^1 \sqrt{r} f(r) dr$ が絶対収束するとする。このとき、

$$C_n = \frac{2}{\{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \int_0^1 f(x) J_1(\lambda_{1,n} x) x dx$$

r_0 を开区間 (0, 1) の内部の任意の閉区間 $[a, b]$ の内点とし、 $f(r)$ は $[a, b]$ 上で有界変動であるとする。このとき $r = r_0$ において、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_1(\lambda_{1,n} r_0)$$

は収束し、その和は $\frac{1}{2} \{f(r_0 + 0) + f(r_0 - 0)\}$ で与えられる。すなわち、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{2 J_1(\lambda_{1,n} r_0)}{\{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \int_0^1 f(x) J_1(\lambda_{1,n} x) x dx = \frac{1}{2} \{f(r_0 + 0) + f(r_0 - 0)\}.$$

定理 D.4 (开区間 (0, 1) における広義一様収束)

$f(r)$ が定理 D.3 の条件を満たし、さらに有界変動であることに加えて、 $[a, b]$ で連続であるとする。このとき、Fourier - Bessel 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_1(\lambda_{1,n} r), \quad C_n = \frac{2}{\{J_0(\lambda_{1,n})\}^2} \int_0^1 f(x) J_1(\lambda_{1,n} x) x dx$$

は、 ε を任意の正の数として、閉区間 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ で $f(r)$ に一様収束する。

さて、今回初期条件として取った $\frac{U_0}{r}$ は $0 < r < 1$ の内部に含まれる任意の閉区間において単調増加である。よって、そこで有界変動あり、連続である。また、

$$\int_0^1 \frac{U_0}{r} \sqrt{r} dr = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_\alpha^1 \frac{U_0}{\sqrt{r}} dr = \lim_{\alpha \rightarrow +0} [2U_0 \sqrt{r}]_\alpha^1 = 2U_0$$

である。よって定理 D.3、定理 D.4 から少なくとも $\frac{U_0}{r}$ に関する Fourier - Bessel 級数は $0 < r < 1$ の内部に含まれる閉区間 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ で一様収束するとわかる。ここで、 a, b, ε の取り方から、 $a + \varepsilon, b - \varepsilon$ はそれぞれいくらでも $0, 1$ の近くにとれる。従って、 $a = 1$ の場合、(2.15) の級数は $0 < r < 1$ で広義一様収束し、定理 1.3 の解 (1.8) は初期条件 $u_\theta(r, 0) = \frac{U_0}{r}$ (U_0 はある定数) を $0 < r < 1$ で満たすと分かる。

注意 D.5

境界壁近傍を含めた区間 $[a + \varepsilon, 1]$ では $\frac{U_0}{r}$ に関する Fourier - Bessel 級数は $U_0 = 0$ でない限り、 $\frac{U_0}{r}$ に一様収束しない。実際、 $\lambda_{1,n}$ が J_1 の零点であるから、一様収束が示される場合には

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_1(\lambda_{1,n} r) \Big|_{r=1} = 0$$

であるが、

$$\frac{U_0}{r} \Big|_{r=1} = U_0$$

であるからである。

このように、 $(0, 1]$ で定義された関数 $f(r)$ の形式的な Fourier - Bessel 級数が $[a + \varepsilon, 1]$ でも一様収束するには少なくとも

$$f(1 - 0) = 0$$

であることが必要である。

参考文献

- [1] G.K.Batchelor 著、橋本英典、松信八十男 他訳、入門流体力学、東京電機大学出版局,1984
- [2] R.Beals & R.Wong 著,Special Functions A Graduate Text, Cambridge university press,2010
- [3] F.Bowman 著、平野鉄太郎 訳、ベッセル関数入門、日新出版、1963
- [4] M. Brown 著 一樂重雄 他 訳 ,微分方程式（上）その数学と応用,Springer 2001
- [5] A.J.Chorin & J.E.Marsden 著, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer, 2000
- [6] 今井 功 著、流体力学 (前編)、裳華房、2013
- [7] 大谷 光春 著、理工基礎 常微分方程式論、サイエンス社、2011
- [8] H.Schlichting、K.Gersten 著,Boundary Layer theory(8th revised and enlarged edition), Springer 1995
- [9] 柴 雅和 著、複素関数論、朝倉書店、2013
- [10] 篠崎 寿夫 編著、工学者のための常微分方程式とグリーン関数、現代工学社、1984
- [11] 巽 友正 著、連続体の力学、岩波書店、2000
- [12] 巽 友正 著、流体力学、培風館、1986
- [13] G.N.Watson 著, A treatise on the theory of bessel functions, Cambridge university press, 1966