合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2019～2020 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2020 年 8 月 24 日 8:00-10:00 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名____________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ ______________.

2．设 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\boldsymbol{B}=(\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2)$，其中 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 是 3 维列向量，若 $|\boldsymbol{A}|=1$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ______________.

3．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^3=$ ______________.

4．设 3×4 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $R(\boldsymbol{B})=3$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{AB})=$ ______________.

5．设 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，ξ_1,ξ_2 是三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个特解，且 $\xi_1+\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是______________________.

二、选择题（每小题 4 分，共计 20 分）

1．设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times n$ 矩阵，则必有（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$　　(B) $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　(D) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

2．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中第三行、第二列的元素是(　　).

(A) 2　　(B) 1　　(C) -2　　(D) -1

3．向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ $(m\geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是（　　）.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中不含有零向量

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中任意两个向量的分量不成比例

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中任意一个向量均不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中有一个向量不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的秩为零

(B) $\boldsymbol{A}$ 的行秩等于零

(C) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

(D) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

5．矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{b}$ 的值为（　　）.

(A) 3　　(B) -3　　(C) 5　　(D) -5

三、(10 分）已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$，求 $2A_{21}+A_{22}+4A_{23}+2A_{24}$，其中 A_{2j} 为 D 中 $(2,j)$ 元素的代数余子式（$j=1,2,3,4$）.

四、(10 分) 已知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

五、(12 分) 设向量组：$\alpha_1=(1,3,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,0,2,-6)^T$，$\alpha_3=(1,3,0,0)^T$，$\alpha_4=(0,3,0,3)^T$，求此向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

六、(12 分) 设方程组 $\begin{cases} x_1+ax_2+2x_3=1 \\ x_1+x_2-ax_3=2 \\ 2x_1+2x_2+4x_3=2 \end{cases}$（1）求系数行列式 $|\boldsymbol{A}|$；（2）a 取何值时，方程组有唯一解、无解及无穷多解？

七、(12 分) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 可否相似对角化？若能相似对角化，则求可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

八、(**4 分**) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $n\times 1$ 非零矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，证明：$R(\boldsymbol{A})=1$.