2021-2022 第二学期《高等数学 A》参考答案

一、填空题

1. -1　　2. 3　　3. $\frac{1}{2}$　　4. $4\sqrt{2}$　　5. 3π

二、选择题

1. B　　2. C　　3. D　　4. A　　5. A

三、解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y^2+f_2'\cdot 2xy$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf_1'+y^2\left(f_{11}''\cdot 2xy+f_{12}''\cdot x^2\right)+2xf_2'+2xy\left(f_{21}''\cdot 2xy+f_{22}''\cdot x^2\right)$$

$$=2yf_1'+2xy^3f_{11}''+5x^2y^2f_{12}''+2xf_2'+2x^3yf_{22}''.$$

四、解设 $\forall(x,y,z)\in\Gamma$，则该点到原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

作拉格朗日函数

$$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1),$$

令 $\begin{cases}L_x'=2x+2\lambda x+\mu=0\\L_y'=2y+2\lambda y+\mu=0\\L_z'=2z-\lambda+\mu=0\\x^2+y^2-z=0\\x+y+z-1=0\end{cases}$，(1)-(2): $2(x-y)(1+\lambda)=0$，

解得驻点为 $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3})$ 和 $(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})$，

代入距离公式，可得 $d_{\max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，$d_{\min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

五 解 方法一 化定积分计算

$$\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y^2)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}[1+\sin^3 x+(2x+\sin^2 x)\cos x]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}[1+\sin^3 x+(2x+\sin^2 x)\cos x]\mathrm{d}x$$

$$=\pi-\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\mathrm{d}\cos x+\int_0^{\pi}2x\cos x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\pi-\cos x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi}+2(x\sin x+\cos)\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\pi}$$

$$=\pi+\frac{4}{3}-4+0=\pi-\frac{8}{3}.$$

方法二 利用格林公式计算

补充曲线 $L_1: y=0, x:\pi\to 0$

$$\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y^2)\mathrm{d}y=\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}$$

$$=-\iint_D (2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{0}1\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}(2-3y^2)\mathrm{d}y+\pi.$$

$$=-\int_0^{\pi}(2\sin x-\sin^3 x)\mathrm{d}x+\pi=2\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\mathrm{d}\cos x+\pi$$

$$=-4+2-\frac{2}{3}+\pi=\pi-\frac{8}{3}.$$

六、解补充曲面 $\Sigma_1: z=0\,(x^2+y^2\le 1)$，并取下侧，则 $\Sigma+\Sigma_1$ 围成闭区域 Ω，取外侧，故

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

其中 $\displaystyle\iint_{\Sigma+\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+1)\mathrm{d}V$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2-y^2}(x^2+y^2+1)\mathrm{d}z=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2+1)(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^4)r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

因为 $\Sigma_1\perp yoz$ 面，$\Sigma_1\perp zox$ 面，所以 $\displaystyle\iint_{\Sigma_1}\frac{x^3}{3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma_1}\frac{y^3}{3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，

故 $\displaystyle\iint_{\Sigma_1}=\iint_{\Sigma_1}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\le 1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi$，

所以 $\displaystyle I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\frac{2\pi}{3}-(-\pi)=\frac{5\pi}{3}.$

七、解由公式 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}\cdot(n+1)}\cdot\dfrac{3^n\cdot n}{(-1)^{n-1}}\right|=\dfrac{1}{3}$，故收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=3$，

从而收敛区间为 $(-3,3)$，

当 $x=-3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(-3)^n}{3^n\cdot n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\cdot\dfrac{1}{n}$，级数发散，

当 $x=3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{3^n\cdot n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，级数收敛，所以收敛域为 $(-3,3]$，

对 $\forall x\in(-3,3)$，设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{3^n\cdot n}=s(x)$，则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{x}{3})^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\frac{1}{x+3}，又 s(0)=0，$$

$$s(x)=\int_0^x s'(t)\mathrm{d}t+s(0)=\int_0^x\frac{1}{t+3}\mathrm{d}t=\ln(x+3)-\ln 3，\quad x\in(-3,3].$$

或 $s(x)=\int s'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x+3}\mathrm{d}x=\ln(x+3)+C$,因为 $s(0)=0$，所以 $C=-\ln 3$，故

$s(x)=\ln(x+3)-\ln 3$，$x\in(-3,3]$.

令 $x=3$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}=s(3)=\ln 6-\ln 3=\ln 2$.

八、证明：设$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}-a_n)$的前 n 项之和为T_n，则

$$T_n = a_0 - a_1 + 2a_1 - 2a_2 + 3a_2 - 3a_3 + \cdots + na_{n-1} - na_n = a_0 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) - na_n$$

$$= a_0 + S_{n-1} - na_n = S_{n-1} - na_n,$$

又因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以前 n 项和极限$\lim_{n\to\infty} S_n = s$，故$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = s$.

下证：$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$

因为$\{a_n\}$是正项递减数列，所以$0 \le 2na_{2n} \le 2(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) = 2(S_{2n} - S_n)$，

又因为$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = s$，故$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = s - s = 0$，由夹逼定理，可知$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$，

又$0 < (2n+1)a_{2n+1} \le (2n+1)a_{2n} = 2na_{2n} + a_{2n}$，

结合级数收敛的必要条件，可知$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0$，故$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

所以$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(S_{n-1} - na_n) = s$，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1}-a_n)$收敛.