2019～2020 学年第二学期《线性代数》试卷（A）评分标准

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、$\underline{1}$；2、$\underline{4}$；3、$\begin{pmatrix}1&3&2\\4&6&5\\7&9&8\end{pmatrix}$；4、$\underline{3}$；5、$x=k\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、B；2、A；3、C；4、D；5、C.

三、（10 分）已知行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\1&2&3&1\\2&4&3&2\\0&0&2&1\end{vmatrix}$，求 $2A_{21}+A_{22}+4A_{23}+2A_{24}$，其中 A_{2j} 为 D 中 $(2,j)$ 元素的代数余子式（$j=1,2,3,4$）.

解：$2A_{21}+A_{22}+4A_{23}+2A_{24}=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\2&1&4&2\\2&4&3&2\\0&0&2&1\end{vmatrix}$ …………5

$\overset{r_3-2r_1}{\underset{r_2-2r_4}{=}}\begin{vmatrix}1&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&3&2\\0&0&2&1\end{vmatrix}$ …………4

$=3$. ■ …………1

四、（10 分）已知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解：$\because AB=B+2A$，即 $(A-E)B=2A$， …………3

所以 $B=2(A-E)^{-1}A$ …………2

而 $\boldsymbol{A}-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ …………1

故 $(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， …………2

$\therefore B=2(A-E)^{-1}A=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. ■ …………2

五、（12 分）设向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,2,-6)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,0,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,3,0,3)^T$，求此向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解：

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&0&3&3\\1&2&0&0\\0&-6&0&3\end{pmatrix}$ …………3

$\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-6&0&3\\0&0&-1&0\\0&-6&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-6&0&3\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$， …………3

$\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$， …………2

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3， …………1

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为其一个最大无关组， …………1

且 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$ …………2

注意：最大无关组不唯一. ■

六、（12 分）设方程组 $\begin{cases}x_1+ax_2+2x_3=1\\x_1+x_2-ax_3=2\\2x_1+2x_2+4x_3=2\end{cases}$（1）求系数行列式 $|\boldsymbol{A}|$；（2）a 取何值时，方程组有唯一解、无解及无穷多解？

解：（1）因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&2\\1&1&-a\\2&2&4\end{vmatrix}=(a+2)(2-2a)$； …………4

2019～2020 学年第二学期《线性代数》试卷（A）评分标准

（2）当$|A|\neq 0$，即$a\neq -2$且$a\neq 1$时，此方程组有唯一解； …………4

当$a=-2$时，$\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\1&1&2&2\\2&2&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\0&3&0&1\\0&6&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\0&3&0&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$，

故方程组无解． …………2

当$a=1$时，$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&1&-1&2\\2&2&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\0&0&-3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故方程组有无穷多解．■ …………2

七、（12 分）矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$可否相似对角化？若能相似对角化，则求可逆阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角阵．

【解】①求特征值：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\2&2-\lambda&0\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}$$ …………2

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)，$$

故A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$． …………3

②判定对角化：

由于有三个不同的特征值，故A可以相似对角化。 …………2

③对角化：

• 特征向量

对于$\lambda_1=1$，由$A-E=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得对应的特征向量为$p_1=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$；

…………1

对于$\lambda_2=2$，由$A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得对应的特征向量为$p_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；

…………1

对于$\lambda_3=3$，由$A-3E=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得对应的特征向量为$p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

…………1

• 作可逆阵$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，对角阵$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda$．■ …………2

八、（4 分）设$\boldsymbol{\alpha}$为$n\times 1$非零矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，证明：$R(\boldsymbol{A})=1$．

证明：因为$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\leq R(\boldsymbol{\alpha})$， …………2

$R(\boldsymbol{A})\geq 1,\ R(\boldsymbol{\alpha})=1$

所以$R(\boldsymbol{A})=1$．■ …………2