证明行列式交换两行变号：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & & & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & & & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{交换第}\ i,j\ \text{行后} \quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对阶数 n 归纳. $n=2$ 时 ✓.

假设 $n-1$ 阶成立.

I 不换第一行：$D=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}$

$D'=a_{11}(-1)^{1+1}M'_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M'_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}M'_{1n}$

而 M'_{1i} 是 M_{1i} 交换两行得到的行列式 $(n-1)$ 阶

根据归纳，$D'=a_{11}(-A_{11})+a_{12}(-A_{12})+\cdots+a_{1n}(-A_{1n})$

$=-(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n})$

$=-D$

II 换第一，二行：即

$$D'=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

设 N_{ij} 为去掉第 1,2 行第 i,j 列的行列式. $(N_{ij}=N_{ji})$

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\big(\underbrace{(-1)^{1+1}a_{22}N_{12}+(-1)^{1+2}a_{23}N_{13}+\cdots+(-1)^{1+(n-1)}a_{2n}N_{1n}}_{M_{11}}\big)$$

$$+(-1)^{1+2}a_{12}\big(\underbrace{(-1)^{1+\overset{1=1}{1}}a_{21}N_{12}+(-1)^{1+\overset{2=3-1}{2}}a_{23}N_{23}+\cdots+(-1)^{1+(n-1)}a_{2n}N_{2n}}_{M_{12}}\big)$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\big(\underbrace{(-1)^{1+1}a_{21}N_{1n}+(-1)^{1+2}a_{22}N_{2n}+\cdots+(-1)^{1+(n-1)}a_{2\,n-1}N_{n-1\,n}}_{M_{1n}}\big)$$

$$=\sum_{0\le i<j\le n}(-1)^{1+i}a_{1i}(-1)^{1+j}a_{2j}N_{ij}+\sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{1+i}a_{1i}(-1)^{1+j-1}a_{2j}N_{ji}$$

注意指数.

而 $D' = (-1)^{1+1} a_{21} M_{21} + (-1)^{1+2} a_{22} M_{22} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{2n} M_{2n}$

$$= (-1)^{1+1} a_{21} \underbrace{\left((-1)^{1+1} a_{12} N_{12} + (-1)^{1+2} a_{13} N_{13} + \cdots + (-1)^{1+(n-1)} a_{1n} N_{1n}\right)}_{M_{21}}$$

$$+ (-1)^{1+1} a_{22} \underbrace{\left((-1)^{1+\overset{1=1}{1}} a_{1\underline{1}} N_{12} + (-1)^{1+2} a_{1\underline{3}} N_{23} + \cdots + (-1)^{1+(n-1)} a_{1n} N_{2n}\right)}_{M_{22}} \quad 2=3-1$$

$$+ \cdots + (-1)^{1+1} a_{2n} \underbrace{\left((-1)^{1+1} a_{11} N_{1n} + (-1)^{1+2} a_{12} N_{2n} + \cdots + (-1)^{1+(n-1)} a_{1,n-1} N_{n-1,n}\right)}_{M_{2n}}$$

$$= \sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^{1+i} a_{2i} (-1)^{1+j} a_{1j} N_{ij} + \sum_{0 \le j < i \le n} (-1)^{1+i} a_{2i} (-1)^{1+j-1} a_{1j} N_{ji}$$

注意指数

$$D = \underbrace{\sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^{1+i} a_{1i} (-1)^{1+j} a_{2j} N_{ij}}_{①} + \underbrace{\sum_{0 \le j < i \le n} (-1)^{1+i} a_{1i} (-1)^{1+j-1} a_{2j} N_{ji}}_{②}$$

$$D' = \underbrace{\sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^{1+i} a_{2i} (-1)^{1+j} a_{1j} N_{ij}}_{①'} + \underbrace{\sum_{0 \le j < i \le n} (-1)^{1+i} a_{2i} (-1)^{1+j-1} a_{1j} N_{ji}}_{②'}$$

考虑 $a_{1k} a_{2l} N_{kl}$ 这一项，当 $k<l$ 时 在①中，也在②′中

当 $k>l$ 时 在②中，也在①′中

但前面符号一个是 $(-1)^{1+k+1+l}$，一个是 $(-1)^{1+k+l-1}$ 异号

从而 $D = -D'$

III 换第1行和第i行. $r_1 \leftrightarrow r_i$

$D \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_i} D'$ 可化为三步：$D \xrightarrow[\text{I}]{r_2 \leftrightarrow r_i} D_1 \xrightarrow[\text{II}]{r_1 \leftrightarrow r_2} D_2 \xrightarrow[\text{I}]{r_2 \leftrightarrow r_i} D'$ （换2,i；换1,2；换2,i）

根据 I, II, $D' = -D_2 = -(-D_1) = -(-(-D)) = -D$

证毕 $\square$

交换两列变号.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 交换 i. j 列

证明:

Ⅰ 交换相邻两列变号.

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i+1} & a_{1,i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & & \cdots & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对 n 归纳 $n=2$ 时 ✓. 假设 $n-1$ 成立.

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+\cdots+(-1)^{1+i}a_{1i}M_{1i}+(-1)^{1+i+1}a_{1,i+1}M_{1,i+1}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$D'=(-1)^{1+1}a_{11}M'_{11}+\cdots+(-1)^{1+i+1}a_{1,i+1}M'_{1i}+(-1)^{1+i}a_{1i}M'_{1,i+1}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M'_{1n}$$

考虑 M_{1k}. M'_{1k} 当 $k\neq i,\ i+1$ 时 M'_{1k} 是 M_{1k} 交换相邻两行得到.

根据归纳 $M'_{1k}=-M_{1k}$

而 $M'_{1i}=M_{1,i+1}$ $M'_{1,i+1}=M_{1,i}$

$$\therefore D'=(-1)^{1+1}a_{11}(-M_{11})+\cdots+(-1)^{1+i}a_{1,i+1}M_{1,i+1}+(-1)^{1+i+1}a_{1,i}M_{1,i}+(-1)^{1+n}a_{1n}(-M_{1n})$$
$$=-D$$

Ⅱ 交换任意 i, j 列, 不妨设 $i<j$

$$D\xrightarrow{C_i\leftrightarrow C_j}D' \text{ 可化为 } \underbrace{D\xrightarrow{C_i\leftrightarrow C_{i+1}}D_1\xrightarrow{C_{i+1}\leftrightarrow C_{i+2}}D_2\longrightarrow\cdots\xrightarrow{C_{j-1}\leftrightarrow C_j}D_{j-i}}_{j-i\text{步}}$$

$$\xrightarrow{C_{j-2}\leftrightarrow C_{j-1}}D_{j-i}\xrightarrow{C_{j-3}\leftrightarrow C_{j-2}}D_{j-i+1}\longrightarrow\cdots\xrightarrow{C_i\leftrightarrow C_{i+1}}D_{j-i+j-i-1}=D'$$

i $i+1$ $i+2$ $\cdots$ j.

① ② ③ $\cdots$ $\}$ $j-i$ 步

$\cdots$ $\}$ $j-i-1$ 步

由Ⅰ 每一步 $\times(-1)$

$$\therefore D'=(-1)^{j-i+j-i-1}D$$
$$=-D$$

证毕 □

D为n阶行列式

$D = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$.

证明 $D = \sum\limits_{\substack{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_n \le n \\ \text{两两不同}}} (-1)^{\square} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$　　$\square$ 为逆序数，这里先不考虑

① D 有 $n!$ 项，每一项是 n 个两两不在同行同列的数相乘.

证 归纳法. $n=2$ 时 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 成立，

设 $n-1$ 时成立，

则 $D = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$.　　A_{1i} 是 $n-1$ 阶行列式

且 a_{1i} 与 A_{1i} 中任意数不在同行同列.

$\therefore$ D的项数 $= \underbrace{(n-1)! + (n-1)! + \cdots + (n-1)!}_{n个}$

$= n!$

每项 $= a_{1i} \times A_{1i}$ 中的项，$\therefore$ 是 n 个数相乘.

且两两不在同行同列.　　$\square$

② 每个 n 个两两不在同行同列（由）相乘而来的项在 D 中出现一次

证：这样的项共有 $n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 1$ 个，$= n!$ 个

第1行n种选择　　第2行在第1行确定后只有 $n-1$ 种选择

且每个项不会出现一次以上（因为D的展开是一行一行进行的）

$\therefore$ 每个形如 $\underbrace{a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}}_{\text{交换位置也算同一项}}$ 的项在 D 中正好出现一次。

$D = D^T$

证明 每个D中项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 也在D^T中出现.

因为$a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$两两不在同行同列,则在D^T中也不在同行同列.

考虑 $a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$ 前面的符号$(-1)^{\tau}$.

对D作行对换,可把$a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$换到新行列式对角线上

$$D' = \begin{vmatrix} a_1 & & ① \\ & a_2 & \\ & \ddots & \\ ② & & a_n \end{vmatrix}$$

设做了n次行对换,则$D' = (-1)^n D$.

而 $a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$ 在D'中出现,符号为1

$\therefore$ $a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$ 在D中符号为$(-1)^n$

对D^T作相应列对换,则得到新行列式为

$$(D')^T = \begin{vmatrix} a_1 & & ②^T \\ & a_2 & \\ & \ddots & \\ ①^T & & a_n \end{vmatrix}$$

做了n次列对换 $\therefore (D')^T = (-1)^n D^T$

$a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$在$(D')^T$对角线上,

在$(D')^T$中符号为1

$\therefore$ $a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$ 在D^T中符号为$(-1)^n$

即 $a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$ 在D与D^T中符号相等.

$\therefore D = D^T$ □