

# 2021 ~ 2022 学年第二学期《线性代数》试卷（A）答案

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1、 $-2^n$ ； 2、 $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ ； 3、 $\frac{\pi}{4}$ （亦可写成  $45^\circ$  或者  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ ）； 4、 $\underline{2}$ ； 5、 $\underline{6}$ ； 6、 $\underline{1}$ .

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1、A； 2、D； 3、C； 4、D； 5、B； 6、D.

三、(10分)  $n(\geq 3)$  阶行列式  $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$ , 求  $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}$ .

其中  $A_{ij}$  为  $D_n$  的  $(i,j)$  位置元素的代数余子式.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \sum_{k=1}^n A_{1k} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[r_i + r_1 \times (-a)]{i=2, \dots, n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\ &= (x-a)^{n-1} \end{aligned}$$

四、(12分)  $A = \alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & x \\ y & 3 & 6 \end{pmatrix}$ , 其中  $\alpha, \beta$  是 3 维实列向量.

(1) 求  $R(A)$  以及  $x, y, \beta^T \alpha$ ; (2) 计算  $A^n$ ,  $n$  是大于等于 2 的正整数.

(1)解: 由  $A$  是非零矩阵, 故  $R(A) \geq 1$

又  $A = \alpha\beta^T$ , 可知  $R(A) \leq 1$ . 综上  $R(A) = 1$ .

从而  $x = 4, y = 3, \beta^T \alpha = \text{tr}(\alpha\beta^T) = 9$ .

$$\begin{aligned} (2)\text{解: } A^n &= \alpha(\beta^T \alpha)^{n-1} \beta \\ &= 9^{n-1} A \end{aligned}$$

五、(12分) 求向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$  的秩以及一个极大线性无关组,

并将其余向量用该极大无关组线性表示.

$$\text{解: } (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{若干初等行变换} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故该向量组的秩为 3; 极大无关组可取  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  此时  $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_5 = 6\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3$ .

六、(12分)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$ , 讨论  $a$  为何值时线性方程组  $Ax = b$

无解, 有唯一解, 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

$$\text{解: } |A| = a(a-2)$$

当  $a \neq 0$  且  $a \neq 2$  时有唯一解;

当  $a = 0$  时该方程组无解;

当  $a = 2$  时, 该方程组有无穷多解, 此时

$$(A \ b) \text{ 若干初等行变换} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{等价于解方程组} \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

取  $x_3$  为自由变元, 求得一个特解为  $\alpha = (1 \ -1 \ 0)^T$ ,

$Ax = 0$  的一组基础解系为  $\beta = (-2 \ 3 \ 1)^T$ .

此时通解可取为  $\alpha + k\beta, k \in \mathbb{R}$ .

## 2021 ~ 2022 学年第二学期《线性代数》试卷（A）答案

七、(12分) 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$  的秩为 2.

(1) 求  $a$ ;

(2)  $f$  经过正交变换  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  化为标准形, 求  $P$  以及对应的标准形.

解: (1) 由条件可知二次型的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

由  $A$  的秩为 2, 可得  $|A| = 0$  且  $a \neq 1$ , 故  $a = -2$ .

(2)  $|A - \lambda E| = -\lambda(\lambda + 3)^2$ , 从而  $A$  的特征值为 0,  $-3$ (二重)

求解  $Ax = 0$ , 可得  $A$  的属于特征值 0 的一个特征向量  $(1 \ 1 \ 1)^T$ , 单位化得  $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ 1 \ 1)^T$ ;

求解  $(A + 3E)x = 0$ , 可得  $A$  的属于特征值  $-3$  的两个线性无关的特征向量  $(-1 \ 1 \ 0)^T, (-1 \ 0 \ 1)^T$ ,

正交化、单位化可得  $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \ 1 \ 0)^T, \alpha_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}\left(-\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \ 1\right)$ .

可取  $P = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$ , 此时  $P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

八、(6分)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  皆是 3 维实列向量, 且  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关,  $\alpha_3, \alpha_4$  线性无关.

证明: 必存在 3 维非零列向量  $\beta$ , 满足  $\beta$  既可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示, 也可由  $\alpha_3, \alpha_4$  线性表示.

证明: 由于都是 3 维列向量,

故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关.

从而存在不全为 0 的  $k_i, i = 1, 2, 3, 4$

使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$

亦即  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = -k_3\alpha_3 - k_4\alpha_4$

由  $\alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 可知若  $k_1 = k_2 = 0$ , 必有所有  $k_i$  全为 0, 矛盾.

故  $k_1, k_2$  不全为 0, 由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关可知  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$

令  $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$  得证.