[1]命题逻辑

命题：描述客观世界的，可分辨真假且非真即假的陈述句. 判断一个语句是否为命题，首先看它是否是陈述句，再看它是否有唯一的真值

不是命题的几种情况

- 悖论
- 非客观
- 与上下文有关无法确定真假
- 含有不定时间、人物、地点代词

原子命题（简单命题）：不能分解为更简单的陈述句. 简单命题通过联结词联结而成的命题称为**复合命题**

命题标识符：表示命题的符号. 命题常量表示确定命题，命题变量只表示任意命题的位置标志，**不是命题**

命题公式的分类：$\begin{cases} \text{永真式} & \text{重言式} \\ \text{永假式} & \text{矛盾式} \\ \text{可满足式} & \end{cases}$

蕴含：当且仅当命题公式 $P \to Q$ 为重言式时，称 P 蕴含 Q，记作 $P \Rightarrow Q$

对于命题公式 $P \to Q$

- 逆换式：$Q \to P$
- 反换式：$\neg P \to \neg Q$
- 逆反式：$\neg Q \to \neg P$
- 注意区分命题的否定和否命题

证明 $P \Rightarrow Q$ 的方法：

- 设前件 P 为 1，证明后件 Q 的真值为 1
- 设后件 Q 为 0，证明前件 P 的真值为0
- 列命题公式 $P \to Q$ 的真值表

对偶式：在仅含有联结词 $\neg$、$\wedge$、$\vee$ 的命题公式中，将 $\wedge$ 变为 $\vee$，将 $\vee$ 变为 $\wedge$，将 0、1 互相取代

冗余联结词：在一个命题联结词的集合中，如果一个连接词可由集合中的其他联结词定义，则称此联结词为冗余联结词，否则称为**独立联结词**

全功能集合：能表示任意命题的联结词集合

- 与非 $\uparrow$
- 或非 $\downarrow$
- 异或 ∇
- n 个命题变量恰可构成 2^{2^n} 个不等价的命题公式

基本积（基本和）：仅由命题变量或其否定构成的合取式（析取式）

小项（布尔合取）：含 n 个命题变量的基本积，每个命题变量与其否定只出现一个

大项（布尔析取）：含 n 个命题变量的基本和，每个命题变量与其否定只出现一个

合取范式：等价于 A 的命题公式 $(A_1)\wedge(A_2)\wedge\cdots\wedge(A_n)$，其中 A_i 为基本和. 主合取范式的 A_i 为大项

析取范式：等价于 A 的命题公式 $(A_1)\vee(A_2)\vee\cdots\vee(A_n)$，其中 A_i 为基本积. 主析取范式的 A_i 为小项

- 重言式只有主析取范式
- 矛盾式只有主合取范式
- 可满足式既有主合取范式又有主析取范式

有效推理：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, B$ 均是命题公式，若 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n\Rightarrow B$，则称 B 是前提 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的有效结论

- P规则：引入前提
- T规则

证明结论的方法：

- 直接证明
- 附加前提证明法
- 归谬法

命题定律：

对合率	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$	E_1
幂等率	$P\wedge P\Leftrightarrow P$ $P\vee P\Leftrightarrow P$	E_2
结合律	$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$ $(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$	E_3
交换律	$P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$ $P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$	E_4
分配率	$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ $P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	E_5
吸收率	$P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$ $P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$	E_6
德・摩根律	$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$ $\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$	E_7
同一律	$P\wedge 1\Leftrightarrow P$ $P\vee 0\Leftrightarrow P$	E_8
零律	$P\wedge 0\Leftrightarrow 0$ $P\vee 1\Leftrightarrow 1$	E_9
否定律	$P\wedge\neg P\Leftrightarrow 0$ $P\vee\neg P\Leftrightarrow 1$	E_{10}

$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	E_{11}
$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	E_{12}
$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	E_{13}
$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$	E_{14}
$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$	E_{15}
$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \leftrightarrow \neg Q$	E_{16}
$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow Q \to (P \to R)$	E_{17}
$P \to (Q \to R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$	E_{18}
$\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$	E_{19}
$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$	E_{20}

$P \wedge Q \Rightarrow P$	I_1
$P \Rightarrow P \vee Q$	I_2
$\neg P \Rightarrow P \to Q$	I_3
$Q \Rightarrow P \to Q$	I_4
$\neg(P \to Q) \Rightarrow P$	I_5
$\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$	I_6
$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$	I_7
$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$	I_8
$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	I_9
$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$	I_{10}
$(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R) \Rightarrow R$	I_{11}
$(P \to Q) \wedge (R \to S) \Rightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge S)$	I_{12}
$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$	I_{13}
$P \to Q \Rightarrow (P \vee R) \to (Q \vee R)$	I_{14}
$P \to Q \Rightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge R)$	I_{15}
$P \wedge Q \Rightarrow P \wedge Q$	I_{16}

[2]谓词逻辑

谓词逻辑：命题研究的最小单位是原子命题． 一阶逻辑把一个原子命题分为个体与谓词两个部分． **个体**即一个原子命题的主体部分，可以是 **具体事物**，也可以是抽象概念； **谓词**即用来刻画物体**性质**或**关系**的部分． 通常用小写英文字母表示个体，大写英文字母表示谓词

个体标识符：表示个体的符号． 一个个体标识符如果表示具体的或特定的个体则称为**个体常量**；若个体标识符只表示任意个体的位置标志则称为**个体变量**

谓词标识符：表示谓词的符号． 一个谓词标识符如果表示具体或特定的谓词则称为 **谓词常量**；若谓词标识符智标师任意谓词的位置标志则称为 **谓词变量**

- 个体 a 具有性质 F ，记作 $F(a)$
- 个体 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 具有关系 L，记作 $L(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

谓词（简单命题函数）：由一个谓词常量或谓词变量 A，$n(n \geq 0)$ 个**个体变量** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的表达式 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 **n元谓词**或 **n元简单命题函数**． 0 元谓词就是命题

个体域（论域）：个体变量的取值范围

复合命题函数：由一个或几个简单命题通过运算所得的表达式． 运算指 $\neg \vee \wedge \to \leftrightarrow \uparrow \downarrow \nabla \mapsto$ 等命题运算

全总个体域：各个个体变量的论域综合在一起形成的个体域. 不特别说明时，全总个体域即为宇宙间万物组成的集合

量词：表示个体常量或个体之间数量关系的词. 量词对个体变元的约束与量词的次序有关

方法：用量词符号化命题时

1. 指明论域
2. **特性谓词**限定个体变量的取值范围
3. 全称量词 $\forall$ 中，特定谓词只能作为条件式的前件
4. 存在量词 $\exists$ 中，特定谓词只能做合取项

谓词公式：谓词演算的合式公式

指导变元（作用变元）：量词 $\forall$ 或 $\exists$ 后面所紧跟的**个体变量**称为相应量词的指导变元或作用变元

作用域（辖域）：紧跟在量词后面的** **称为相应量词的作用域或辖域

约束变元：在辖域中，自导边缘的全部出现称作**约束出现**，并称约束出现的个体变量为相应量词的约束变元. 其余的个体变量称为相应量词的自由变元. 一个变元只能被一个量词约束，同一个量词的约束变元论域相同

约束变元换名规则：对量词辖域中的约束变元及相应的指导变元，选用谓词公式中**未出现**的符号更换，其余部分保持不变

自由变元代入规则：选用谓词公式中**未出现**的符号，对谓词公式中出现该自由变元的**每一处**都进行代入. 对自由变元代入所得的谓词公式与原谓词公式未必等价，除非原式是重言式或矛盾式

$\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$	E_{21}
$\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$	E_{22}
$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$	E_{23}
$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$	E_{24}
$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$	E_{25}
$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$	E_{26}
$\forall x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \to B$	E_{27}
$\exists x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \to B$	E_{28}
$\forall x(A \to B(x)) \Leftrightarrow A \to \forall xB(x)$	E_{29}
$\exists x(A \to B(x)) \Leftrightarrow A \to \exists xB(x)$	E_{30}
$\exists xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x))$	I_{17}
$\forall xA(x) \to \exists xB(x) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$	E_{31}
$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\ \wedge \forall xB(x)$	E_{32}
$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\ \vee \exists xB(x)$	E_{33}

$\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$	E_{21}
$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$	I_{18}
$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$	I_{19}
$\forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$	E_{34}
$\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$	I_{20}
$\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$	I_{21}
$\forall y \exists x P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$	I_{22}
$\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$	E_{35}

x对y自由： 个体变量x不自由出现在量词 $\forall y$ 或 $\exists y$ 的辖域之内

全称指定规则（US规则）：

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(a)$$
$$\forall x P(x) \Rightarrow P(x)$$

也可表示为$\forall x P(x) \Rightarrow P(y)$，此时变量 y 必须满足 x 对 y 是自由的

全称推广规则（UG规则）：

$$P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$$

也可表示为$P(x) \Rightarrow \forall y P(y)$，此时变量 y 必须满足 x 对 y 是自由的

存在指定规则（ES规则）：

$$\exists x P(x) \Rightarrow P(a)$$

a 为 x 论域中特定的个体常量，且不曾在 $P(x)$ 中出现过

若 $\exists x P(x)$ 中还有 x 以外的其他**自由出现**的个体变量，则不能使用ES规则

存在推广原则（EG规则）：

$$P(a) \Rightarrow \exists x P(x)$$

x 为个体变量，且不曾在 $P(a)$ 中出现过

[3]集合与关系

集合： 把具有某种特定性质的对象，汇集成一个整体，就形成一个集合，集合中的对象称为集合的**元素**或**成员**

- 对于有限集合A，其元素的个数还称为A的**基数**，**记作**$|A|$
- 集合的表述方法：列举法，描述法（谓词法）和文氏图法
- 集合与其元素的排列顺序无关，并约定集合的元素两两不同

空集：不包含任何元素的集合，记作$\varnothing$.

$$\varnothing = \{x \mid P(x) \ \wedge \ \neg P(x)\}$$

全集：在一定范围内，所有集合均为全集的子集，记作E

$$E = \{x \mid P(x) \ \vee \ \neg P(x)\}$$

子集：若 $A \subseteq B$，当且仅当 $\forall x((x \in A) \to (x \in B))$ 的真值为1

真子集：若 $A \subset B$，当且仅当 $\forall x((x \in A) \to (x \in B)) \ \wedge \ \exists x\,((x \in B) \wedge (x \notin A))$ 的真值为1

平凡子集： A 和 $\varnothing$称为集合 A 的平凡子集，其余称为非平凡子集

幂集：给定集合A，以A的全部子集为元素组成的集合，称为A的幂集，记作$P(A)$或2^A

- $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$
- 引进编码用来唯一的表示有限幂集的元素，其全部子集与n位二进制数一一对应
- $x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$
- $x \in A \Leftrightarrow x \in \{x \mid P(A)\}$

交集：$A \ \cap \ B = \{x \mid (x \in A) \ \wedge (x \in B)\}$.　若$A \ \cap \ B = \varnothing$，则称$A$和$B$**不相交**

并集：$A \ \cup \ B = \{x \mid (x \in A) \ \vee \ (x \in B)\}$.

补集：$A - B = \{x \mid (x \in A) \ \wedge \ (x \notin B\}$.

称为B相对A的补集或集合A与B的差；全集E与A的差还称为A的**绝对补或绝对差**，简记作 $\sim A$ 或 $\overline{A}$

对称差：$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = （A - B） \cup (B - A) = \{x \mid (x \in A) \ \nabla \ (x \in B)\}$

运算性质：一元运算$\sim$，总是优先于二元运算$\cap$、$\cup$、 $-$ 、$\oplus$

证明技巧：

- 要证明$A = B$，只需任取$x \in A$，证明$x \in A \Leftrightarrow x \in B$
- 要证明$A \subseteq B$，只需任取$x \in A$，证明$x \in A \Rightarrow x \in B$

n **元组**：以a_1为第一元素，a_2为第二元素，$\cdots$，a_n为第n元素组成的**有序组**. **其中二元组** $< a_1, a_2 >$ **特称为**序偶**.

笛卡尔积：$A \times B = \{< a, b > \ \mid a \in A, \ b \in B\ \}$

- $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n个A} = A^n$.
- 笛卡尔积不满足交换律：$A \times B \neq B \times A$
- 笛卡尔积不满足结合律：$A \times B \times C = (A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$
- 笛卡尔积满足分配率：$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- 若$C \neq \varnothing$，则 $A \subseteq B \iff A \times C \subseteq B \times C \iff ;\mathbb{C} \times A \subseteq C \times B$
- 若A、B、C、D为任意非空集合，则 $A \times B \subseteq C \times D \iff A \subseteq C, \ B \subseteq D$

关系：任一 n 元组的集合称为 n 元关系；2 元关系简称为关系，$< a, b > \in R$ 可记作 aRb，否则可记作 $a\overline{R}b$

- 笛卡尔积 $A \times B$ 称为 A到 B 的关系

- $A \times B$ 的平凡子集 $\varnothing$ 称为 A 到 B 的**空关系**
- $A \times B$ 的平凡子集 $A \times B$ 称为A 到 B 的**全域关系**
- $A \times A$ 的子集称为 A 上的关系

前域：$\text{dom}(R) = \{x \mid \ < x, y > \in R \ \}$

值域：$\text{ran}(R) = \{ \ y \mid \ < y, \ x > \in R \ \}$

域：$\text{FLD}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R)$

恒等关系：设A为任意集合，$I_A \subseteq A \times A$ 且 $I_A = \{< x, x > \ \mid x \in A \ \}$，则称$I_A$是$A$上的恒等关系.

自反关系：设A为任意集合，$R \subseteq A \times A$，若

- 对 $\forall x \in A$，均有 $< x, x > \in R$，则称 R 为 A 上的自反关系
- 对 $\forall x \in A$，均有 $< x, x > \notin R$，则称 R 为 A 上的反自反关系

注意：

- R 为 A 上的自反关系，当且仅当 $I_A \in R$
- R 为 A 的反自反关系，当且仅当 $I_A \cap R = \varnothing$
- A 上一共有 $2^{|A|^2 - |A|}$ 个自反关系（反自反关系）
- $\varnothing$ 上没有自反关系

对称关系：设A为任意集合，$R \subseteq A \times A$，若

- 对于 $\forall x, y \in A$，每当 $< x, y > \in R$ 时，一定有 $< y, x > \in R$，则称R为A上的对称关系
- 对于 $\forall x, y \in A$，每当 $< x, y > \in R$ 且 $< y, x > \in R$ 时，一定有 $x = y$，则称 R 为 A 上的反对称关系

注意：

- A上一共有$2^{\frac{|A|(|A|+1)}{2}}$个对称关系
- A上一共有$2^{|A|} \cdot 3^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}}$个反对称关系

传递关系：设A为任意集合，$R \subseteq A \times A$，若对 $\forall x, y, z \in A$，每当 $< x, y > \in A$ 且 $< y, z > \in A$ 时，一定有 $< x, z > \in A$ 则称 R 为 A 上的传递关系

关系矩阵：$M_R = (r_{ij})_{n \times m}$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \, R \, b_j \\ 0, & a_i \, \bar{R} \, b_j \end{cases}$$

等价关系：设 A 为任意集合，$R \subseteq A \times A$，若 R 是自反关系、对称关系和传递关系，则称 R 是 A 上的等价关系

等价类：设 R 为 A 上的等价关系，$a \in A$，集合 $[a]_R$ 称为元素 a 确定的关于 R 的等价类.

$$[a]_R = \{ \ x \mid x \in A, \ < a, \ x > \in R \ \}$$

商集：所有等价类的集合称为集合 A 关于 R 的商集，记作 A/R

$$A/R = \{ \ [a]_R \ \mid \ a \in A \ \}$$

性质：

- $[a]_R=[b]_R$当且仅当 aRb
- $[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$当且仅当 $a\overline{R}b$

模 k 同余关系：

$$R=\{<x,y>\ |x,\ y\in I,\ x\equiv y(\bmod k)\}$$

此时，模k同余类为

$$\begin{gathered}[0]=\{\ x\mid x\in I,\ x-0=kn,\ n\in I\ \}\\ [1]=\{\ x\mid x\in I,\ x-1=kn,\ n\in I\ \}\\ \vdots\\ [k-1]=\{\ x\mid x\in I,\ x-(k-1)=kn,\ n\in I\ \}\end{gathered}$$

划分：设 A 为非空集合，另有集合 $S=\{S_1,\,S_2,\,\cdots,\,S_n\}$ ，若

1. $S_i\subseteq A,\ S_i\neq\varnothing$
2. $S_i\ \cap\ S_j=\varnothing\ (i\neq j,\,i,\,j=1,\,2,\,\cdots,\,n)$
3. $S_1\ \cup S_2\ \cup\ \cdots\ \cup\ S_n\ =A$

则称集合 S 为集合 A 的划分，其中 S_i 称为该划分的块；块数最多的划分称为最大划分，最少的称为最小划分

划分一一对应等价关系：

- 集合 A 上的等价关系 R 决定 A 的一个划分，且该划分为商集 A/R.
- 集合 A 上的划分 $S=\{\ S_1,\,S_2,\cdots,\,S_n\ \}$，决定$A$上一个等价关系$R$，且 $R=(S_1\times S_1)\ \cup\ (S_2\times S_2)\ \cup\ \cdots\ \cup\ (S_n\times S_n)$

相容：设A为任意集合，$R\subseteq A\times A$，若 R 是自反关系、对称关系，则称 R 是 A 上的相容关系

相容类：设 A 为任意集合，R 是 A 上的相容关系，$B\subseteq A$ 且 $B\neq\varnothing$，若对任意的 $a,b\in B$，均有 $<a,\,b>\in R$，则称 B 为关于 R 的相容类；若 B 是关于 R 的相容类，但任取 $x\in A-B$，集合 $B\ \cup\ \{x\}$ 都不是关于R的相容类，则称 B 为关于R的**极大相容类**；元素个数最多的相容类称为**最大相容类**.

覆盖：设A为非空集合，另有集合$S=\{\ S_1.\ S_2,\,\cdots,\,S_n\ \}$，若

1. $S_i\subseteq A,\ S_i\neq\varnothing\ (i=1,\,2,\,\cdots,\,n)$
2. $S_1\ \cup S_2\ \cup\ \cdots\ \cup\ S_n\ =A$

则称S为集合A的覆盖

完全覆盖：设 R 是集合A上的相容关系，其全部**极大相容类**的集合，称作 R 确定的集合 A 的完全覆盖，记作 $C_R(A)$

覆盖与相容关系不存在一一对应：集合A的覆盖 $S=\{\ S_1,\,S_2,\cdots,\,S_n\ \}$，确定 A 上的一个相容关系R，且 $R=(S_1\times S_1)\ \cup\ (S_2\times S_2)\ \cup\ \cdots\ \cup\ (S_n\times S_n)$

偏序关系：设 A 为任意集合， $R\subseteq A\times A$，若 R 是自反关系，反对称关系和传递关系，则称 R为 A上的偏序关系，记作 $\preccurlyeq$

- $<a,\,b>\in\preccurlyeq$ 习惯记作 $a\preccurlyeq b$
- 若 $a\preccurlyeq\ b$ ，则称 a 与 b 可比，且 a 小 b 大

- 若$< a, b > \notin \preccurlyeq R$且$< b, a > \notin \preccurlyeq$，则称$a$与$b$不可比

拟序关系：设 A 为任意集合，$R \in A \times A$，若 R 是反自反关系，反对称关系和传递关系，则称 R 为 A 上的拟序关系，记作 $\prec$.

复合关系：$R \subseteq A \times B$，$S \subseteq B \times D$，记 R 与 S 的复合关系为 $R \circ S$

1. $R \circ S = \{ < a, d > \mid a \in A,\ d \in D,\ (\exists\, b \in B)\ (aRb,\ bSd) \}$
2. 复合关系满足结合率：$(R \circ S) \circ H = R \circ (S \circ H)$
3. 复合关系满足分配率：$R \circ (S \cap H) = (R \circ S) \cap (R \circ H)$

对于 $R \subseteq A \times A$，有

1. $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n个R}$
2. $R^0 = I_A$
3. $R^n \circ R^m = R^{n+m}$，其中$n, m \in N$
4. $(R^n)^m = R^{nm}$，其中$n, m \in N$

注意：

- 在 R 的关系图中，若有一条从结点 x 到结点 y 且边数为 n 的有向路，则在 R^n 的关系图中一定有一条从结点 x 到结点 y 的有向边
- 若 R 是阶数为 n 的有限集 A 上的关系，则 $R^s = R^t$，其中 $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$
- 若 R 是 A 上的关系，且存在两个非负整数 $s < t$ 使得 $R^s = R^t$，则$R^n = \{ R^0, R^1,\ \cdots,\ R^t \}$
- R 为 A 上的传递关系 $\Longleftrightarrow R^2 \subseteq R$
- 设拟序集$< A, R >$，则 $\operatorname{cov}(A) = R - R^2$

复合关系的关系矩阵：记 $M_R = (x_{ij})_{np}$，$M_s = (y_{ij})_{pm}$，$M_{R \circ S} = (r_{ij})_{nm}$，其中

$$r_{ij} = \bigvee_{k=1}^{p} (x_{ik} \ \wedge \ y_{kj})$$

逆关系：将 R 中每个序偶的第一元素与第二元素顺序互换，所得的关系称为 R 的逆关系，记为 R^{-1}

- M_R 与 $M_{R^{-1}}$ 互为转置矩阵
- 设 R 与 S 均为 A 到 B 上的关系，有
  1. $(R^{-1})^{-1} = R$
  2. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
  3. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
  4. $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$
  5. $(A \times B)^{-1} = B \times A$
- 设 $R \subseteq A \times B$，$S \subseteq B \times D$，有 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

自反闭包：设 $R \subseteq A \times A$，则 R 的自反闭包 $r(R) = R \cup I_A$

对称闭包：设 $R \subseteq A \times A$，则 R 的对称闭包 $s(R) = R \cup R^{-1}$

传递闭包：设 $R \subseteq A \times A$，则R 的传递闭包 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cdots$

Warshall算法求传递闭包：

```
for(int i = 1; i <= n; ++i)
    for(int j = 1; j <= n; ++j)
        if(M[j][i])
            for(int k = 1; k <= n; ++k)
                M[j][k] |= M[i][k];
```

闭包的复合运算：设 $R \subseteq A \times A$，有

1. $rsR = srR$
2. $rtR = trR$
3. $stR \subseteq tsR$
4. $tsR = stsR$

[5]群

n 元运算：f 是从 A^n 到 B 的函数，则称 f 为集合 A 上的 n 元运算

代数(二元)运算：对任意 $x, y \in A$，

1. 封闭：$x * y \in A$
2. 交换：$x * y = y * x$
3. 幂等：$x * x = x$
4. 分配：
$$\begin{aligned} x * (y \,\Delta\, z) &= (x * y) \,\Delta\, (x * z) \quad \text{左分配} \\ (y \,\Delta\, z) * z &= (y * x) \,\Delta\, (z * x) \quad \text{右分配} \end{aligned}$$
   则称运算 $*$ 对运算 Δ 满足分配率
5. 吸收：[交换运算]
$$\begin{aligned} x * (x \,\Delta\, y) &= x \\ x \,\Delta\, (x * y) &= x \end{aligned}$$
6. 结合：$x * (y * z) = (x * y) * z$

半群 $< A, * >$：$*$ 在 A 上结合

子半群：B 是 A 的非空子集，且 $< B, * >$ 是半群

幂等元：$a * a = a$. 有限半群必有幂等元

代数系统（代数结构）：$< A, f_1, f_2, \cdots, f_n >$ 表示非空集合连同若干个定义在其上的代数运算所组成的整体

幺元：

- 左幺元：$e_l * x = x$
- 右幺元：$x * e_r = x$
- 幺元若存在则唯一
- 集合元素唯一时，该唯一元素看做幺元

零元：

- 左零元：$\theta_l * x = theta_l$
- 右零元：$x * \theta_r = \theta_r$
- 零元若存在则唯一
- 若 $|A| \geq 2$，且同时存在幺元和零元，则 $e \neq \theta$

逆元：

- 左逆元：$b * a = e$
- 右逆元：$a * b = e$
- 若半群存在逆元，则逆元唯一，记为 a^{-1}

独异点：存在幺元的半群，其运算表中任意两行或两列都不相同

子独异点：B 是 A 的非空子集，且 $< B, * >$ 是独异点

群：任意 $a \in A$ 都有逆元 a^{-1} 的**独异点**

- 有限集元素个数 $|A|$ 称为该集合的阶
- 群 $< G, * >$
  - $(a^{-1})^{-1} = a$
  - $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$
  - 不含零元
  - 含唯一幂等元 e
  - 消去律：
$$\begin{aligned} a * b = a * c &\implies b = c \qquad \text{左消去} \\ b * a = c * a &\implies b = c \qquad \text{右消去} \end{aligned}$$
  - 方程 $a * x = b$ 与 $y * a = b$ 都有唯一解

元素的阶：$a \in G$，$|a|$ 为满足 $a^k = e$ 的最小正整数 k

- 有限群每个元素的阶均有限
- $a^n = e \Longleftrightarrow k \mid n$
- $|a^n| = \frac{k}{\gcd(n, k)}$

子群：S 是 G 的非空子集，且 $< S, * >$ 是群

- $< G, * >$ 与 $< S, * >$ 的幺元 e 相同
- 对任意 $a \in S$，a 在 G 中的逆元也是 a 在 S 中的逆元

平凡子群：$< \{e\}, * >$

子群的判定：$< S, * >$ 是其子群当且仅当

- S 是 G 的非空子集
  1. $\forall a, b \in S$，有 $a * b \in S$
  2. $\forall a \in S$，有 $a^{-1} \in S$
- S 是 G 的非空子集：$\forall a, b \in S$，有 $a^{-1} * b \in S$
- S 是 G 的有限非空子集：$\forall a, b \in S$，有 $a * b \in S$

集合的乘积：A 和 B 均是 G 的非空子集，$AB = \{a * b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$

- 若 A 为 G 的子群，则 $AA = A$
- 若 A 和 B 均为 G 的子群，则 $AB = BA \iff AB$是 G 的子群

陪集：$< H, * >$ 是 $< G, * >$ 的子群，$a \in G$，则

- H 在 G 中的左陪集：$aH = aH$
- H 在 G 中的右陪集：$Ha = Ha$
- H 在 G 中的陪集：$aH = Ha$

> 求群 G 关于子群 H 中的所有陪集
>
> 1. H 本身为陪集
> 2. 从已经生成的陪集中找出没在 G 出现过的元素 a 作为代表元，生成新陪集 aH
> 3. 不再有代表元，所有的陪集都找到

重要结论：$< H, * >$ 是 $< G, * >$ 的子群，$a, B \in G$

1. $a \in aH$
2. $aH = H \iff a \in H$
3. $aH = bH \iff a^{-1} * b = H$
4. $|aH| = |H|$
5. $b \in aH \implies aH = bH$
6. $aH = bH$ 或 $aH \cap bH = \varnothing$

拉格朗日定理：$< H, * >$ 是 $< G, * >$ 的子群

- 指数 $[G : H]$：H 在 G 中陪集的个数
- 表述 1：

  若 G 是有限群，有

  $$|G| = |H|[G : H]$$

- 表述 2：

  设 $R = \{< a, b > \,|\, a, b \in G,\ a^{-1} * b \in H\}$，有

  1. R 是 G 上的等价关系
  2. $\forall a \in G$，有 $[a]_R = aH$. 其中等价类 $[a]_R = \{x \,|\, x \in G, < a, x > \in R\}$

阿贝尔群（交换群）：

1. $*$ 在 G 上交换 $\implies G$ 为阿贝尔群
2. $(a * b)^2 = a^2 * b^2 \iff G$ 为阿贝尔群

循环群：

- 定义
  - a：生成元
  - $< a >$：G 由 a 生成的群换群
  - $\forall x \in G$，$\exists n \in I$，使得 $x = a^n$
- 特征

若 $|G| = n$，有

1. a 为 G 的 n 阶元：$|a| = n$
2. $G = \{a, a^2, \cdots, a^n = e\}$
3. a^r 是生成元 $\iff |a^r| = n \iff r \perp n$
4. 对 n 的每个正因子 d，$< a^{\frac{n}{d}} >$ 是其唯一的 d 阶子群

若 G 为无限循环群，有

1. $G = \{\cdots, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a^1, a^2, \cdots\}$
2. 仅有 a 和 a^{-1} 两个生成元
3. $< a >$ 的全部子群为 a^m，其中 $m = 0, 1, 2, \cdots$

[7]图的基本概念

图： 三元组 $G =< V(G), E(G), \varphi(G) >$，其中

- 顶点集（结点集）：$V(G)$
- 边集：$E(G)$
- 关联函数 $\varphi(G) : E \to V \times V$

邻接结点： 关联于同一条边的两个结点

孤立结点： 不与任何结点相关联的结点

邻接边： 关联与同一结点的两条边

环： 两端点相同的边

平行边（重边）： 两结点间方向相同的若干边

对称边： 两端点相同但方向互为相反的两条有向边

多重图： 含有重边的图

简单图： 无环无重边的图

完全图： 任意两点间有边相连的简单无向图

图的阶： 图顶点个数

- 无向图 $\to$ 对称有向图
- 无向图 $\to$ 定向图
- 有向图 $\to$ 基础图

图的结点度：

- 度：与结点 x 关联的边数（一条环要计算两次）．记作$\deg(x)$
- 入度：$\deg^+(x)$
- 出度：$\deg^-(x)$
- 最大结点度：$\Delta(G) = \max\{ d(x) \mid x \in V(G)\}$
- 最小结点度：$\delta(G)$

- 结点度数总和等于边数的两倍
- 度数为奇数的结点必然是偶数个

图序列：非递增、非负整数序列表示为某个简单无向图的度序列

图序列的判定算法：

1. 已知非递增、非负整数序列 S，删除 S 中的第 1 个数 k 得到序列 S_1
2. 若序列 S_1 中的前 k 个数均不小于 1，则将这 k 个数分别都减去 1 得到序列 S_2；否则序列 S 不是图序列
3. 若序列 S_2 全是 0，则序列 S 是图序列；否则，将序列 S_2 重新排序得非递增序列 S_3
4. 令 $S = S_3$，转步骤1

子图：图 $G_1 =< V_1, E_1, \varphi_1 >$ 是图 $G =< V, E, \varphi >$ 的子图

- $V_1 \subseteq V$
- $E_1 \subseteq E$
- φ_1 是 φ 在 E_1 上的限制
- 生成子图（支撑子图）：$V_1 = V$
- 导出子图 $G[V_1]$：以两端点均在非空集 V_1 中的全体边作为 E_1
- 导出子图 $G[E_1]$：以 E_1 中边关联的全部结点作为 V_1

补图：$\overline{G}$ 的边集等于 K_n 的边集减去 G 的边集

自补图：简单图 G 同构于 $\overline{G}$

图的笛卡尔积：

- $G = G_1 \times G_2$
- $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$
- G 中 $< a, b >$ 和 $< c, d >$ 邻接当且仅当
  - $a = c$，$< b, d >\in E_2$

    或者
  - $b = d$，$< a, c >\in E_1$
- 图的笛卡尔积满足结合律

n 超立方体：

- $n = 1$：$Q_n = K_2$
- $n > 1$：$Q_n = Q_{n-1} \times K_2$

链：有限结点和边的交替序列$u = u_0 e_1 u_1 e_2 \cdots e_n u_n = v$

- 长度：边数 n
- 端点：u 和 v，其余为<u>内部点</u>
- 迹：边互不同
- 路：内部点互不同
- 开：$u \neq v$.否则为闭
- 平凡链：不含边

图的连通性：

- 无向图两点 x 和 y 之间存在一条路，则称 x 和 y 是连通的。规定 x 到自身总是连通的

- 连通关系是等价关系，可以确定集合 V 的一个划分 $\{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$
  - 当两点属于同一个子集 V_i 时，两点连通
  - 导出子图 $G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_m]$ 称为连通分支
  - 连通分支数：$W(G) = m$

割点：删除点后，图中连通分支数增加

割边：删除边后，图中连通分支数增加

块：没有割点的**非平凡**连通图

点割：真子集 T，满足 $G - T$ 不连通或是平凡图

边割：真子集 S，满足 $G - S$ 不连通或是平凡图

点连通度： $K(G) = \min\{\operatorname{card}(T) \mid T \text{ 是 } G \text{ 的点割}\}$

边连通度：$\lambda(G) = \min\{\operatorname{card}(S) \mid S \text{ 是 } G \text{ 的边割}\}$

- $K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

二分图：V 分为两个不相交的非空集合 V_1 与 V_2，使得每条边关联的两个结点分别属于 V_1 和 V_2

完全二分图：两顶点之间有边当且仅当一个属于 V_1 而另一个属于 V_2

- 二分图不含有长度为奇数的圈
- n 维立方体 Q_n 是二分图

邻接矩阵：$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$

- a_{ij} 表示图中以 x_i 为起点，y_j 为终点的边的数目

关联矩阵：$\boldsymbol{M} = (m_{ij})_{n\times m}$

- 有向图 $D =< V, E, \varphi >$，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$

$$m_{ij} = \begin{cases} -2 & e_j \text{ 是 } x_i \text{ 的自环} \\ 1 & e_j \text{ 以，} x_i \text{ 为起点} \\ -1 & e_j \text{ 以 } x_i \text{ 为终点} \\ 0 & e_j \text{ 与 } x_i \text{ 不关联} \end{cases}$$

- 无向图

$$m_{ij}=\begin{cases}2 & e_j\text{ 是，}x_i\text{ 的自环}\\1 & e_j\text{ 关联于 }x_i\\0 & e_j\text{ 与 }x_i\text{不关联}\end{cases}$$

可达矩阵：无重边有向图的可达矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & x_i\text{ 到 }x_j\text{ 存在有向链}\\0 & x_i\text{ 到 }x_j\text{ 不存在有向链}\end{cases}$$

- 邻接矩阵的传递闭包 $\rightarrow$ 可达矩阵

[8] 树和平面图

de bruijn图：n 维 d 进位有向 **de Bruijn** 标号图，记作 $B(d,n)$

$$V_B(d,n)=\{\,x_1x_2\cdots x_n\mid x_i\in\{0,1,\cdots,d-1\}\,\}$$
$$E_B(d,n)=\{\,x_1x_2\cdots x_{n+1}\mid x_i\in\{0,1,\cdots,d-1\}\,\}$$
$$\varphi(x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+n},p)=<x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_{i+n},\ x_{i+2}x_{i+3}\cdots x_{i+n}p>$$

欧拉路：无孤立结点的无向图 G，经过每边一次且仅一次的迹

欧拉回路：经过每边一次且仅一次的闭迹

- 连通图具有欧拉回路当且仅当每个顶点的度数均为偶数
- 弱连通性有向图具有欧拉回路当且仅当每个顶点的入度等于出度
- 欧拉图：含欧拉回路的图
- **Fluery算法**：
  1. 任取一个顶点 v_0，置 $W_0=v_0$
  2. 假定迹 $W_i=v_0e_1v_1\cdots e_iv_i$ 已经选出，从 $E(G)-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中选出 e_{i+1}，使得
     - e_{i+1} 与 v_i 关联
     - 尽可能不选 $G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 的割边
  3. 当步骤 2 不能执行时停止；否则 $i+1\rightarrow i$，转步骤 2

哈密顿路：经过每点一次且仅一次的路

哈密顿回路：经过每点一次且仅一次的闭路

- 哈密顿图：含哈密顿回路的图
- 哈密顿图无割点
- 二分图 $G=<V_1,V_2,E>$，若 $|V_1|\neq|V_2|$，则不为哈密顿图
- 超立方体都是哈密顿图

闭包：$CL(G)$

- 将图中度数之和至少是 n 的非邻接点连起来得到图 G'
- 重复上述过程，直到不再有这样的结点对存在为止

哈密顿图的判定：

- G 是任意 $n(n \geq 3)$ 阶图，若对任意两个非邻接顶点 x 和 y 有 $d(x)+d(y) \geq n$，则为哈密顿图
- G 是任意 $n(n \geq 3)$ 阶图，若对任意结点 x 有 $d(x) \geq \frac{n}{2}$，则为哈密顿图
- 设 u 和 v 是 G 中非邻接顶点，且 $d(u)+d(v) \geq n$，则 $G+$ 边 (u, v) 是哈密顿图当且仅当 G 是哈密顿图

- 哈密顿图 $\Leftrightarrow$ 闭包是哈密顿图

格雷码：

- 循环码
- 构造方式

$$\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 00 \\ 01 \\ 11 \\ 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 000 \\ 001 \\ 011 \\ 010 \\ 110 \\ 111 \\ 101 \\ 100 \end{cases} \Longrightarrow \cdots$$

- 按 n 阶格雷码顺序得到一条 n 阶超立方体的哈密顿回路

树：

- 无圈连通无向图
- 叶：度数为 1
- 分支点（内点）度数大于 1
- 森林：不相交的若干树
- 等价的四个命题：图 T
  - 树
  - 无环且任两不同顶点间有且仅有一条路
  - 对 $\forall e \in E$，有 $W(T-e)=2$
  - $e=v-1$

- 非平凡树至少有 2 片树叶

有向数：基础图是树

- 根树：仅一点的入度为 0，其余所有结点入度都为 1
- 根是特殊的分支点除非它是唯一点
- 层数：从根到某一结点有向路的长度
- 高度：层数的最大值

m叉树：每个节点的出度不大于 m 的<u>有序根树</u>

- 完全 m 叉树：每个结点的出度恰好为 0 或 m 的 m 叉树
- 正则 m 叉树：所有树叶层次完全相同的完全 m 叉树
- 叶树为 t，分支点数为 i 的完全 m 叉树，有 $(m-1)i=t-1$

二进制编址：

1. 以树 T 的任意边 (u, v) 开始，将 u 标记为 0，v 标记为 1，得到 T_1，令 $k=1$
2. 若 $T_k=T$ 则停止；否则将 T_k 中所有节点 $W(w_1w_2\cdots w_k)$赋予新编址 $W(0w_1w_2\cdots w_k)$，赋予新节点 y 的编址为 $W(1x_1x_2\cdots x_k)$，其中边 (x, y) 与 T_k 相交但不包含在 T_k 中，结点 x 的编址为 $W(x_1x_2\cdots x_n)$，令 $k=k+1$

生成树：

- 图 G 的生成子图 T 是树，则 T 是 G 的生成树
- 树枝：T 中的边
- 弦：不在 T 中的边

加权树： $W(T)=\sum_i^t w_ih_i$

哈夫曼最优二叉树算法： 已知 $w_1\leq w_2\leq w_3\cdots w_t$

1. 连接权为 w_1，w_2 的两片叶，得一权值为 w_1+w_2 的分枝点
2. 在 $w_1+w_2, w_2, \cdots, w_t$ 中选出两个最小的权，连接对应顶点
3. 重复步骤 2，直到形成一棵树为止

前缀码： 任何序列都不是另一个序列的前缀的序列集合

生成树的计数：

- 基本关联矩阵：在关联矩阵 $\boldsymbol{M}_{n\times e}$ 中划去任意结点 x 所对应的行得到 $\boldsymbol{M}_x$
- 矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times m}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}$

$$\det(\boldsymbol{AB})=\sum_i \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_i$$

  其中 A_i 是从 A 中取不同的 m 列组成的行列式，B_i 是从 B 中取相应的 m 行组成的行列式

- B_k 是弱有向连通图的基本关联矩阵，则不同生成树的数目是 $\det(B_kB_k^T)$
- 以 v_k 为根的不同生成根数数目为 $\det(\overline{B}_k\overline{B}_k^T)$，其中 $\overline{B}_k^T$ 是基本关联矩阵 B_k 中全部 1 替换成 0 的矩阵

平面图： 图 G 能画在无限长宽的平面内，且使它的边仅在端点处相交

- 交叉数：不可平面图最少边的交叉次数
- 完全图 K_5 是最小阶不可平面图，其交叉数为 1
- 二分图 $K_{3,n}(n\geq 3)$ 是不可平面图

初等细分：

- 删除平面图 G 的一条边，添加一个新结点 a 和两条边 (x, a) 与 (a, y)
- 通过一系列初等操作得到的两个图**同胚**
- 非平面图 $\Leftrightarrow$ 包含一个同胚于 $K_{3,3}$ 或 K_5 的子图
- 彼得森图不是平面图

面： 由 G 中的边所包围的区域，不包含点和边

- 边界：包围面的长度最短的闭链
- 度数：边界的长度
- 平面图中面的度数之和为边数的两倍

欧拉公式：$v-e+r=2$

- 点数 v
- 边数 e
- 面数 r

- 任意平面图有 $\delta(G)\leq 5$