A实对称矩阵，则A可合同对角化.

对A的阶归纳：

$n=1$ ✓. 假设 $n=k$ 成立.

考虑 $n=k+1$ 阶方阵A.

则 $\exists \lambda_1, x_1 \neq 0$, s.t. $Ax_1=\lambda_1 x_1$ （复数域上多项式一定有根. 而对称矩阵特征值一定是实数）.

不妨设 $\|x_1\|=1$.

把 x_1 扩充成标准正交基 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{k+1})$ （扩充成基再单位正交化）

设 $Ax_i = b_{1i}x_1 + b_{2i}x_2 + \cdots + b_{k+1,i}x_{k+1}$ (*) （因为 $x_1 \cdots x_{k+1}$ 是基.） $\forall i$

则 ① $Ax_1=\lambda_1 x_1$ 即 $b_{11}=\lambda_1$ $b_{21}=b_{31}=\cdots=b_{k+1,1}=0$.

② $i\neq 1$ 时, $b_{1i} = [Ax_i, x_1] \overset{\text{对称}}{=} [x_i, Ax_1] = [x_i, \lambda_1 x_1] = \lambda_1 [x_i, x_1] = 0$.

(*)式两边与 x_1 作内积

③ $b_{ij} = [Ax_j, x_i] = [x_j, Ax_i] = b_{ji}$ $i\neq 1, j\neq 1$

$$\therefore A\underbrace{(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})}_{\text{正交基}} = (x_1, \cdots, x_{k+1})\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,k+1} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & \cdots & & b_{k+1,k+1}\end{pmatrix}$$

由①②③

$$= (x_1, \cdots, x_{k+1})\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{k+1,2} & \cdots & b_{k+1,k+1}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k+1,2} & \cdots & b_{k+1,k+1}\end{pmatrix}$$ k阶实对称矩阵

由归纳，$\exists$ 正交阵 Q s.t. $Q^TBQ = \begin{pmatrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{k+1}\end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{k+1}\end{pmatrix}$$ $\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q^T\end{pmatrix}$ 正交.

$$\therefore A\underbrace{(x_1, \cdots, x_{k+1})}_{X} = \underbrace{(x_1, \cdots, x_{k+1})}_{X}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q^T\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q^T\end{pmatrix}X^{-1}AX\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{k+1}\end{pmatrix}$$ 而 $X^T = X^{-1}$ （由于X是标准正交基）

令 $P = X\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix}$, $\Longrightarrow$ $P^TAP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{k+1}\end{pmatrix}$ 且 $P^TP=E$. P正交阵.

惯性定理

利用 $E(i,j)$ 与 $E(i(k))$ 把惯性定理简化为:

证明: 若 $f = y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2\cdots-y_{r-p}^2$　r 为 f 的秩

$= z_1^2+z_2^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-z_{q+2}^2\cdots-z_{r-q}^2$　$C\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$

则 $p=q$　$C=(c_{ij})$ C 可逆

证: 若 $p>q$, $C=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}$ $\}q$ 行, p 列　C_1 是 $q\times p$ 矩阵

$\therefore R(C_1)\le q<p$　$\therefore C_1x=\vec{0}$ 有非零解 $x=(x_1,\cdots,x_p)^T$

令 $y_1=x_1,\ \cdots,\ y_p=x_p$ 则 $\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}$

$y_{p+1}=y_{p+2}=\cdots=y_n=0.$

$=\begin{pmatrix}C_1x\\ C_3x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ C_3x\end{pmatrix}\begin{matrix}\}p\\ \}n-p\end{matrix}$

设 $C_3x=(x_{p+1},x_{p+2},\cdots,x_n)^T$

则 $f(y_1,\cdots,y_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2>0$

而 $f(z_1,\cdots,z_n)=-x_{p+1}^2-x_{p+2}^2-\cdots-x_{r-q}^2\le 0.$

矛盾. $\therefore p\le q$

同理 $p\ge q$ $\Rightarrow$ $p=q.$　□

定理 A 正定 $\Leftrightarrow$ A 各阶顺序主子式 $>0.$

证明. 归纳 $A_{1\times1}$ 成立 ✓.　假设 A_{n-1} 成立 考虑 A_n n 阶

设 $A_n=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha^T & a_{nn}.\end{pmatrix}$ 对称

"$\Rightarrow$" $\forall x=(x_1,\cdots,x_{n-1})^T$ $x^TA_{n-1}x=(x_1,\cdots,x_n,0)\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha^T & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 0\end{pmatrix}>0$ A 正定

$\therefore$ A_{n-1} 正定, 由归纳 A_{n-1} 顺序主子式 $>0.$

又 $|A_n|=$ 特值乘积 >0　$\therefore$ A_n 各阶顺序主子式 $>0.$

"$\Leftarrow$" A_n 各阶顺序主子式 >0 $\Rightarrow$ A_{n-1} 各阶顺序主子式 $>0.$

归纳 $\Rightarrow A_{n-1}$ 正定 $\quad A_{n-1}$ 可逆.

转置. 可逆.

$$\because \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} \underset{(消\alpha)}{\overset{合同}{\sim}} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 只需证 $\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ 正定.

而 $\begin{vmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_{n-1}| \cdot a_{nn} \overset{A主子式>0}{>} 0.$ $\quad$ 又 $|A_{n-1}|>0 \Rightarrow a_{nn}>0.$

$\therefore \forall x=(x_1, \cdots, x_n)$ $\quad x^TAx = (x_1 \cdots x_{n-1}) \underset{正定}{A_{n-1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} + a_{nn}x_n^2$

> 0

$\therefore A$ 正定.