1 第一题

2022 年 5 月 25 日 星期三

题目：设 n 为偶数，用 a_n 表示长为 n 且含偶数个 0 偶数个 1 的二进制序列的个数，求 a_n。

本题为课本原题。请见 P52 例 2.4.5。现将解答抄录如下：

解：把长度为 n 的二进制序列的 n 个位置看作 n 个不同的球，将它们放入标号为 0 和 1 的两个不同盒中，且每个盒中均放偶数个，于是数列 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 的指数生成函数为

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2 \\
&= \frac{1}{4}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n\right]\frac{x^n}{n!}\right\}^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}x^n\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1+(-1)^k}{k!}\frac{1+(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right]x^n \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[1+(-1)^k\right]\left[1+(-1)^{n-k}\right]\right\}\frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}4C_n^{2k}\right)\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

故

$$
a_n = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n/2}4C_n^{2k}\right) = \sum_{k=0}^{n}C_n^{2k}.
$$

注：本解法的最后一步变换 $\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n/2} 4C_n^{2k}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k}$ 疑似有误，等号右边应为 $\sum_{k=0}^{n/2} C_n^{2k}$，但两个式子实际上是相等的，这是因为 $2k > n$ 时，$C_n^{2k} = 0$。因而这个和式中 $k > \frac{n}{2}$ 的部分全部为零。

另解 1:（乘法原则）二进制序列的第 1 位可以放 0 或 1，有两种放法，第 2 位有两种放法，……，第 (n-1) 位有两种放法，但第 n 位只有一种放法，因为要保持 0 和 1 的数量都是偶数。于是就有 $x^{(n-1)}$ 种放法。

另解 2:（加法原则）

n 个数中可以取 0 个 0，有 C_n^0 种取法。

n 个数中可以取 2 个 0，有 C_n^2 种取法。

n 个数中可以取 4 个 0，有 C_n^4 种取法。

……

n 个数中可以取 n 个 0，有 C_n^n 种取法。

将所有取法相加，故共有

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^n = 2^{(n-1)}$$

种放法。

2 第二题

2022 年 6 月 10 日 星期五

题目：设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则集合 A 上有几个等价关系？

本题的大部分知识可以在《组合数学》P102-106 找到。
复习：等价关系。见《离散数学》P75 定义 3.6.1。

- 设 b 为任意集合，$R\subseteq A\times A$.
- 对 $\forall x\in A$，均有 $\langle x,x\rangle\in R$，则称 R 为 A 上的**自反关系** (reflective relation)。通俗地说，考察 A 中的元素 x，若对 $\forall x$，x 都和自身存在关系 R，则 R 为 A 上的自反关系。
- 对 $\forall x,y\in A$，每当 $\langle x,y\rangle\in R$ 时，一定有 $\langle y,x\rangle\in R$，则称 R 为 A 上的**对称关系** (symmetric relation)。
- 对 $\forall x,y,z\in A$，每当 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in R$ 时，一定有 $\langle x,z\rangle\in R$，则称 R 为 A 上的**传递关系** (transitive relation)。
- 若 R 是自反关系、对称关系和传递关系，则称 R 为 A 上的**等价关系** (equivblence relation)。

定理 1：（《离散数学》P78 定理 3.6.3、3.6.4）一个集合上的等价关系和一个集合的划分的个数是一一对应的。也就是说，一个集合有几种划分，这个集合上就有几种等价关系。

定理 2：（《组合数学》P103 底部）将 p 个元素的集合恰好划分成 k 块的所有不同划分的数目为第二类 Stirling 数 $s(p,k)$.

定理 3：（《组合数学》P104 定理 3.6.6）对每个满足 $0\leq k\leq p$ 的整数 k，都有

$$s(p,k)=\frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{p}(-1)^t C_k^t (k-t)^p$$

定理 4：（《组合数学》P106 顶部）定理 3 的另一个通项公式

$$s(p,k)=\sum_{t=1}^{k}(-1)^{k-t}\frac{t^{p-1}}{(t-1)!(k-t)!}$$

解：集合 A 有 5 个元素，因此可以划分为 1 块，2 块，3 块，4 块，5 块，共 5 种情况。

由定理 2，A 的一划分的个数是 $s(5,1)$，二划分的个数是 $s(5,2)$，依此类推。于是 A 的划分个数为

$$\sum_{k=1}^{p}s(p,k)$$

由定理 3 或 4 求出（笔者实践认为定理 4 的通项更易求解）

$$\begin{aligned} s(5,1)&=1,\\ s(5,2)&=15,\\ s(5,3)&=25,\\ s(5,4)&=10,\\ s(5,5)&=1. \end{aligned} \tag{1}$$

因此，A 的划分个数为 $1+15+25+10+1=52$。

由定理 1 得，A 上有 52 个等价关系。

注意： $s(p,k)$ 的值由 p 和 k 共同决定，因此如果要求 $A=\{1,2,3,4\}$ 或 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的划分数，切勿简单地将 (1) 式的前若干项相加，因为 (1) 式仅仅适用于 $|A|=5$ 的情况。如果 $|A|\neq 5$，就要老实按照定理 3 或 4 求解各项。

本题也可用差分表求解。

3 第三题

2022 年 6 月 15 日 星期三

本题请见《组合数学》课本 P121 例 4.3.1。现将题目抄录如下：

有 6 名教师 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$，另有 6 门课程 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$，要分配每名教师负责一门课程，且 a_1 不胜任 b_1 和 b_4；a_2 不胜任 b_2 和 b_3；a_3 不胜任 b_3；a_4 不胜任 b_2 和 b_5；a_5 不胜任 b_1 和 b_4；a_6 不胜任 b_6. 问这样的工作分配方法有几种？

考试可能会换一种问法。

总结此类题目的解题步骤：

1. 按照题意画带禁区的棋盘。

2. 交换棋盘的行和列，使禁区相对集中。

3. 求新棋盘对应的 B_S 和 B_S^* 两个棋盘。(P121 推论 4.3.1 下面“另一方面”段)

4. 对于 B_S 和 B_S^*，分别进行步骤 5-7。

5. 将棋盘划分为若干个不相交的子棋盘 $B_1, B_2, \cdots, B_n$。

6. 对以上若干个子棋盘，分别计算它们的 $r_1(B_i), r_2(B_i), \cdots$，其中 B_i 表示第 i 个子棋盘，$r_j()$ 的上限是当前子棋盘中阴影方块的个数。

7. 由 $r_1(B_i), r_2(B_i), \cdots$ 计算 $R(x, B_i)$。(P120 定义 4.3.1)

8. 计算 $R(x, B_S)$ 和 $R(x, B_S^*)$。方法是将它们各自的 $R(x, B_i)$ 相乘。(P121 推论 4.3.1)

9. 计算 $R(x, B) = R(x, B_S) + xR(x, B_S^*)$。(P121 定理 4.3.3(2))

10. 根据 $R(x, B)$ 得到 $r_0(B), r_1(B), \cdots$。

11. 得到最后的方案数。(P119 定理 4.3.1)