第一章 随机事件及其概率

习题 1-1 随机试验与随机事件

1 【解】 $A\bar{B}\bar{C}$; $AB\bar{C}$; $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

2 【解】(1) $B_2=A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3$;(2) $C_1-C_3=B_1\cup B_2$ 或 $C_1-C_3=\overline{B_0}\,\overline{B_3}$.

3 【解】(1) $A\subset BC$; (2) $B\cup C\subset A$; (3) $A=B$.

习题 1-2 概率及其性质

1【解】(1) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16}.$$

(2) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{7}{16}=\frac{9}{16}$.

2. 【解】(1) 由于 $AB=\varnothing$, 故 $P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B-AB)=P(B)=\frac{1}{2}$,

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)=\frac{1}{5}.$$

(2) 由于 $A\subset B$, 故 $AB=A$, 从而

$$P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10},$$

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(\varnothing)=0.$$

习题 1-3 古典概型与几何概型

1. 【解】(1) 设事件 A 表示“电话号码后面四个数字全不相同”，则

$$P(A)=\frac{10\times9\times8\times7}{10\times10\times10\times10}=\frac{504}{1000}=0.504.$$

(2) 设事件 B 表示“电话号码后面四个数在字中最大数字为 6”，则

$$P(B)=\frac{7^4-6^4}{10^4}=0.1105.$$

2. 【解】设在[0, 1]中所取两个数为 x、y, 则

(1) A: $x+y<\frac{5}{4}, 0\le x\le1, 0\le y\le1$，所以 $P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{23}{32}$；

(2) B: $xy>\frac{1}{4}, 0\le x\le1, 0\le y\le1$，所以

$$P(B)=\frac{S(B)}{S(\Omega)}=\frac{1-[1\times\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}dx]}{1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\text{；}$$

（3）$P(C)=P(A)+P(B)-1=\frac{15}{32}-\frac{1}{2}\ln 2$.

习题 1-4 条件概率与乘法公式

1 【解】设 A 表示在停电状态下，变电器损坏，B 表示在停电状态下，电路线损坏，则

（1） $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1\%}{5\%}=0.2$；

（2）$P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=5\%-1\%=0.04$；

（3）$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.04}{1-0.8}=0.2$.

2 【解】设 A_i 表示“第 i 次取到合格品”，$i=1,2,3,$ 则

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{90}{98}=\frac{9}{1078}.$$

习题 1-5 全概率公式与贝叶斯公式

1. 【解】（1）设事件 A 表示学生考试及格，事件 B 表示努力学习的学生，则

$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.9\times0.9+0.1\times0.1=0.82.$

（2）$P(\bar{B}|A)=\frac{P(\bar{B}A)}{P(A)}=\frac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{0.82}=\frac{0.1\times0.1}{0.82}=\frac{1}{82}$ 或者约等于 0.012.

2. 【解】设事件 A 表示患肺癌，事件 B 表示吸烟者，

$P(A)=0.1\%,P(B|A)=90\%,P(B|\bar{A})=20\%,$ 则

（1）$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$

$$=\frac{0.1\%\times90\%}{0.1\%\times90\%+99.9\%\times20\%}=\frac{9}{2007}\approx0.00448,$$

（2）$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)P(\bar{B}|A)}{1-[P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})]}$

$$=\frac{0.1\%\times 10\%}{1-[0.1\%\times 90\%+99.9\%\times 20\%]}=\frac{1}{7993}\approx 0.000125.$$

习题 1-6 事件的独立性与贝努里概型

1【解】 因为 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

则 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.8-0.32=0.48=P(A)P(B)$

或 $\mathrm{P}(A\overline{B})=\mathrm{P}(A-B)=0.32=0.8\times 0.4=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B})$，

所以 A 和 B 相互独立.

2【解】 设 A_i 表示该射手在第 i 次射击时命中目标，$P(A_i)=p$ 为每次射击时命中目标的概率，则

$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=\frac{80}{81}$, 有 $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=1-\frac{80}{81}=\frac{1}{81}$, 即 $[1-p]^4=\frac{1}{81}$, $p=\frac{2}{3}$.

3【解】（1） 设 A_i 表示“第 i 个不合格”， $i=1,2,3,$ 则

$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$；

（2） A 表示“三个零件中至少有一个合格”，则

$P(A)=1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{23}{24}$.

第二章　一维随机变量及其分布

习题 2-1 随机变量及其分布函数

1【解】（1）因为 $F(+\infty)=1$， $F(0+0)=F(0)$，

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(a+be^{-\frac{x^2}{2}})=a$， $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+be^{-\frac{x^2}{2}})=a+b$，

则有 $a=1, a+b=0$，所以 $a=1, b=-1$..

（2） $P\{1<X<2\}=F(2-0)-F(1)=(1-e^{-2})-(1-e^{-\frac{1}{2}})=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}$.

2.【解】(1) 不可以. $F(x)$ 并非单调不减，或 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0\neq 1$；

(2) 不可以. $f(x)$ 可能为负，所以 $F(x)$ 未必非负，未必单调不减等等；

（3）不可以．$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{1}{2}\neq 1$，或$0\le F(x)\le\frac{1}{2}$．

习题 2-2 离散型随机变量及其分布律

1.【解】其分布函数为

X	0	1	2	3	4
p	0.6	0.24	0.096	0.0384	0.0256

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.6, & 0\le x<1\\ 0.84, & 1\le x<2\\ 0.936, & 2\le x<3\\ 0.9744, & 3\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$$

2.【解】（1）需要维修的设备台数 X 服从二项分布即，则 $X\sim B(4,0.25)$，

$$P\{X=k\}=C_4^k 0.25^k 0.75^{4-k},k=0,1,2,3,4.$$

（2）　$P\{X=0\}=C_4^0 0.25^0 0.75^4=\frac{81}{256}.$

（3）$P\{X\ge 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-\frac{81}{256}-C_4^1 0.25^1 0.75^3=\frac{67}{256}.$

习题 2-3 连续型随机变量及其密度函数

1.【解】（1）因为$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}k|x|e^{-|x|}dx=2k\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=2k=1,$

得 $k=\frac{1}{2}$

（2）分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}te^{t}dt=\frac{1}{2}(1-x)e^{x}, & -\infty<x<0\\ =\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0}-te^{t}dt+\int_{0}^{x}te^{-t}dt)=1-\frac{1}{2}(1+x)e^{-x}, & 0\le x<+\infty\end{cases}$$

（3）　$P\{-1<X<2\}=F(2)-F(-1)=1-e^{-1}-\frac{3}{2}e^{-2}$

2. 【解】(1) $P\{X<2\}=F(2)=\ln 2$

$$P\{0<X<3\}=F(3)-F(0)=1$$

(2) $F'(x)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},1\le x\le e,\\ 0,\quad 其他.\end{cases}$

3.【解】(1) $P\{X>90\}=1-P\{X\le 90\}=1-\Phi(\dfrac{90-72}{10})=1-\Phi(1.8)=3.6\%$；

(2) $P\{X>96\}=1-P\{X\le 96\}=1-\Phi(\dfrac{96-72}{\sigma})=1-\Phi(\dfrac{24}{\sigma})=0.023,$ 由查表知，

$\dfrac{24}{\sigma}=2\Rightarrow\sigma=12.$

$$P\{60\le X\le 84\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826.$$

4. 【解】 由题意知，

$$Y\sim B(3,p),\ P(X\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4},P(Y=2)=C_3^2(\frac{1}{4})^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$$

习题 2-4 一维随机变量函数的分布

1. 【解】(1 $\sum_{k=1}^{5}p_k=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+a=1,a=\frac{11}{30}.$

(2) $Y=X^2$ 的分布律为

$Y=X^2$	0	1	4	9
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

2. 当 $y\le 0$ 时， $F_Y(y)=0,$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=\int_{-\infty}^{\ln y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,y}e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}, y>0,\\ 0, \qquad y\le 0.\end{cases}$

3. 【解】由题意知，$Y=1-e^{-2X}$ **在[0,1]单增的，**

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $0\le y\le 1$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-e^{-2X}\le y)=P(X\le -\frac{\ln(1-y)}{2})=\int_{-\infty}^{-\frac{\ln(1-y)}{2}}2e^{-2x}dx=y;$$

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & y\in 其他\end{cases}$

第三章 多维随机变量及其分布

习题 3-1 二维随机变量及其分布函数

1．（1）$F(b,+\infty)$；（2）$F(b,d)-F(a,d)$；（3）$1-F(a,+\infty)-F(+\infty,c)+F(a,c)$.

习题 3-2 二维离散型随机变量及其分布

1. （1）

Y \ X	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{4}$	0	0

（2） $P\{X \ge Y\}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$； $P\{X<1|Y>0\}=\frac{P\{X<1,Y>0\}}{P\{Y>0\}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$.

习题 3-3 二维连续型随机变量及其密度函数

1. 【解】（1） $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{6},(x,y)\in D,\\ 0,\text{其余。}\end{cases}$

$$P\{X \le Y\}=\frac{\frac{1}{2}\times 2\times 2}{6}=\frac{1}{3},\text{或}=\iint\limits_{x\le y} f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_x^2 \frac{1}{6}dy=\frac{1}{3}.$$

（2） $P\{X+Y>1\}=\dfrac{6-\frac{1}{2}\times 2\times 2}{6}=\dfrac{2}{3},\text{或}=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_{1-x}^2 \frac{1}{6}dy=\frac{2}{3}$.

2.【解】（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=k\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-2(x+y)}dy\right]dx=k\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$ **得到** $k=4$；

（2） $P\{(X,Y)\in D\}=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}4e^{-2(x+y)}dy\right]dx=1-3e^{-2}$；

（3） X **与** Y **至少有一个小于 2 的概率为**

$P\{(X<2)\cup(Y<2)\}=1-P\{X\ge 2,Y\ge 2\}=1-\int_2^{+\infty}\left[\int_2^{+\infty}4e^{-2(x+y)}dy\right]dx=1-e^{-8}$.

习题 3-4 边缘分布

1.【解】（1） $\{X=m,Y=n\}$ **是指第** m **次和第** n **次命中，**

$$P\{X=m,Y=n\}=(1-p)^{n-2}p^2=0.3^{n-2}\cdot 0.7^2, m=1,2,\cdots,n-1; n=m+1,m+2,\cdots$$

（2）

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}0.3^{n-2}\cdot 0.7^2=0.7^2\left(0.3^{m-1}+0.3^m+\cdots\right)=0.7^2\frac{0.3^{m-1}}{1-0.3}=0.3^{m-1}\cdot 0.7, m=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}0.3^{n-2}\cdot 0.7^2=(n-1)0.3^{n-2}\cdot 0.7^2, n=2,3,\cdots.$$

2.【解】（1）由题意 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=k\int_0^1\left[\int_0^2\left(x^2+xy\right)dy\right]dx=1$ **解得** $k=\frac{3}{5}$.

（2） X **的边缘密度函数**

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2 \frac{3}{5}(x^2+xy)dy,\ 0\le x\le 1\\ 0,\ 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{6}{5}x^2+\frac{6}{5}x, 0\le x\le 1\\ 0,其他\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 \frac{3}{5}(x^2+xy)dx,\ 0\le y\le 2\\ 0,\ 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{5}+\frac{3}{10}y, 0\le y\le 2\\ 0,其他\end{cases}$$

习题 3-5　条件分布

1.【解】 X 的边缘密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin(x+y)dy, 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 0,\qquad 其他，\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}(\cos x+\sin x), 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 0,\qquad 其他.\end{cases}$$

同理　$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{1}{2}(\cos y+\sin y), 0<y<\frac{\pi}{2},\\ 0,\qquad 其他.\end{cases}$$

当 $0<y<\frac{\pi}{2}$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{\sin(x+y)}{\cos y+\sin y}, 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 0,\qquad 其他.\end{cases}$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{\sin(x+y)}{\cos x+\sin x}, 0<y<\frac{\pi}{2},\\ 0,\qquad 其他.\end{cases}$

2.【解】 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{24}$
1	0	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{20}$	0
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0

（1）$(Y\mid X=0)\sim\begin{pmatrix}2 & 3\\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8}\end{pmatrix}$ 或 $P\{Y=2\mid X=0\}=\frac{3}{8}, P\{Y=3\mid X=0\}=\frac{5}{8}$；

（2） $(X|Y=2)\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 或 $P\{X=0|Y=2\}=\frac{1}{3},P\{X=1|Y=2\}=\frac{2}{3}$.

习题 3-6 随机变量的独立性

1. 【解】（1）

$$P\{X_1=2\}=P\{Y\le 1\}=\int_0^1 e^{-y}dy=1-e^{-1},P\{X_1=3\}=P\{Y>1\}=1-\int_0^1 e^{-y}dy=e^{-1},$$

$$P\{X_2=2\}=P\{Y\le 2\}=\int_0^2 e^{-y}dy=1-e^{-2},P\{X_2=3\}=P\{Y>2\}=1-\int_0^2 e^{-y}dy=e^{-2},$$

$$P\{X_1=2,X_2=2\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=1-e^{-1},$$

$$P\{X_1=2,X_2=3\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=0,$$

$$P\{X_1=3,X_2=2\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=\int_1^2 e^{-y}dy=e^{-1}-e^{-2},$$

$$P\{X_1=3,X_2=3\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{2<Y\}=e^{-2},$$

X_1 \ X_2	2	3
2	$1-e^{-1}$	0
3	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

（2） X_1,X_2 不相互独立.

2. 【解】（1） X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 由于 X,Y 相互独立，(X,Y) 的联合密度

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}},0<x<1,y>0,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

（2） $p=P\{\Delta=4X^2-4Y^2\ge 0\}=P\{X^2\ge Y^2\}=P\{X\ge Y\}+P\{X\le -Y\}$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy+0=2e^{-\frac{1}{2}}-1.$$

习题 3-7 二维随机变量函数的分布

1.【解】

(X,Y)	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,1)$	$(1,2)$
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{20}$

（1）$U \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}$；

（2）$(U,V) \sim \begin{pmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,1) & (4,2) \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}$.

2. 【证明】记 $Z = X + Y$， Z **的所有可能取值** $0,1,2,\cdots$， n_1+n_2, 因

$\{Z = i\} = \{X + Y = i\} = \{X = 0, Y = i\} \bigcup \{X = 1, Y = i-1\} \bigcup \cdots \bigcup \{X = i, Y = 0\}$,

由于上述事件互不相容，且 X **与** Y **相互独立，则**

$$\mathrm{P}\{Z = i\} = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{P}\{X = k, Y = i-k\} = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{P}\{X = k\}\mathrm{P}\{Y = i-k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{i} C_{n_1}^{k} p^k (1-p)^{n_1-k} C_{n_2}^{i-k} p^{i-k} (1-p)^{n_2-i+k} = C_{n_1+n_2}^{i} p^i (1-p)^{n_1+n_2-i}，i = 0,1,2,\cdots, n_1+n_2.$$

所以 $Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$

3.【解】设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z \le z\} = P\{X - Y \le z\} = \iint\limits_{x-y \le z} f(x,y)dxdy$

① 当 $z < 0$ 时，$F_Z(z) = 0$，$f_Z(z) = 0$

② 当 $0 \le z < 1$ 时，$F_Z(z) = 1 - \int_z^1 dx \int_0^{x-z} 3x dy = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^3$

③ 当 $z \ge 1$ 时，$F_Z(z) = 1$，$f_Z(z) = 0$

故 $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - z^2), & 0 \le z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

4. 【解】： 由 *X,Y* 的分布函数分别为

$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$ $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \le y \le 1, \\ 1, & y > 1, \end{cases}$ 又

$$F_Z(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-(1-z)^2, & 0\le z\le 1,\\ 1, & z>1,\end{cases}$$

故 $f_Z(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0\le z\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

第四章 随机变量的数字特征

习题 4-1 数学期望

1. 将 n 只球随机地放到 m 个盒子中，每个盒子可装任意多个球，每个球以相同的概率落入每个盒子中，求有球的盒子数 X 的数学期望。

解： 设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个盒子中有球},\\ 0, & \text{第}i\text{个盒子中无球},\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,m$，则 $X=X_1+X_2+\cdots\cdots X_m$

$P\{X_i=0\}=\dfrac{(m-1)^n}{m^n}=\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n$，$P\{X_i=1\}=1-\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n$，

则 $EX_i=1-\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n$，故 $EX=mEX_i=m\left[1-\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n\right]$。

2.解： $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=0$；

$$E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}rdr\int_0^{2\pi}r\cdot e^{-\frac{1}{2}r^2}d\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

习题 4-2 方差

1.解: $EX=-2\cdot 0.4+2\cdot 0.3=-0.2$，$EX^2=4\cdot 0.4+4\cdot 0.3=2.8$

$EX^4=16\cdot 0.4+16\cdot 0.3=11.2$

(1) $DX=EX^2-(EX)^2=2.8-0.04=2.76$；

(2) $D\left(-3X^2-5\right)=9DX^2=9\left[EX^4-\left(EX^2\right)^2\right]=9\left(11.2-2.8^2\right)=30.24$

2.解： (1)由 $F\left(0^+\right)=F\left(0^-\right)\ \Rightarrow b=0$

由 $F\left(\pi^{+}\right)=F\left(\pi^{-}\right)\ \Rightarrow 1=k\pi+b\ \Rightarrow k=\frac{1}{\pi}$

⑵由于 $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & 0\le x\le\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则 $EX=\int_0^{\pi}x\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{\pi}{2}$，$EX^2=\int_0^{\pi}x^2\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{\pi^2}{3}$，

故 $DX=\frac{\pi^2}{12}$

习题 4-3 常见分布的数学期望与方差

1.【解】由 $E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=1$，得 $(\lambda+\lambda^2)-3\lambda+2=1$，即 $(\lambda-1)^2=0$，解得 $\lambda=1$，所以 $P\{X\ge1\}=1-P\{X=0\}=1-e^{-1}$.

2.【解】⑴ $EZ=E\left(3X-2Y+4\right)=3EX-2EY+4=14$

$DZ=D\left(3X-2Y+4\right)=9DX+4DY=9\cdot1+4\cdot4=25$

⑵ $Z\sim N\left(14,5^2\right)$,

则 $P\left\{Z\le9\right\}=\Phi\left(\frac{9-14}{5}\right)=\Phi\left(-1\right)=1-\Phi\left(1\right)=1-0.8413=0.1587.$

习题 4-4 协方差和相关系数

1.（1）(X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

有 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}x\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$，同理可得 $EY=0,$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}x^2\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{1}{4},\ DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{4}.$

同理可得 $DX=\frac{1}{4}.$

（2）$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$，

所以 $\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=E(XY)-EXEY=0,\ \rho_{XY}=0$.

（3）由于 $\rho_{XY}=0$，所以 X 和 Y 不相关.

又计算得边缘密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y|\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以所以 X 和 Y 不相互独立.

2. 【解】（1） $D(X+Y+Z)=DX+DY+DZ+2\operatorname{cov}(X,Y)+2\operatorname{cov}(X,Z)+2\operatorname{cov}(Y,Z)$

$=DX+DY+DZ+2\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}+2\rho_{XZ}\sqrt{DX\cdot DZ}+2\rho_{YZ}\sqrt{DY\cdot DZ}$

$=6+\sqrt{3}-\sqrt{6}$；

（2） $E[(X+Y+Z)^2]=D(X+Y+Z)+[E(X+Y+Z)]^2=D(X+Y+Z)+(EX+EY+EZ)^2$

$=(6+\sqrt{3}-\sqrt{6})+(1+2-1)^2=10+\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

第五章　大数定律与中心极限定理

习题 5—1　切比雪夫不等式和大数定律

1.【解】 $E(X+Y)=EX+EY=-2+2=0,\ D(X+Y)=DX+DY+2\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}=3,$

由切比雪夫不等式得 $P\{|X+Y|\ge 6\}=P\{|(X+Y)-E(X+Y)|\ge 6\}\le \dfrac{D(X+Y)}{6^2}=\dfrac{1}{12}.$

2.【解】设随机变量 X 为 1000 次试验中出现正面的次数，则 $X\sim B(1000,\frac{1}{2})$，

得 $EX=500, DX=250,$ 则所求的概率为

$P\{400\le X\le 600\}=P\{|X-500|\le 100\}=P\{|X-EX|\le 100\}\ge 1-\dfrac{DX}{100^2}=\dfrac{39}{40}.$

习题 5—2　中心极限定理

1.【解】设 $X_i=\{第i页的错误个数\}$，则 $X_i\sim P(0.16), i=1,\cdots,400$，又设

$X=\{这册书的错误个数\}$，则 $X=\sum_{i=1}^{400}X_i$，　$EX=400\times 0.16=64, \sqrt{DX}=\sqrt{400\times 0.16}=8$，

$\therefore Z=\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}=\dfrac{X-64}{8}\overset{近似}{\sim}N(0,1)$，$\therefore P\{0\le X\le 80\}=P\{\dfrac{-64}{8}\le Z\le \dfrac{80-64}{8}\}=P\{-8\le Z\le 2\}$

$=\Phi(2)-\Phi(-8)=\Phi(2)+\Phi(8)-1\approx\Phi(2)=0.9772.$

批注 [n1]: 应该没有问题了，另外大括号也改了

2. 【解】设 200 台机床同时开机的台数为 $X\sim B(200,0.7)$，车间供应的电能为 *k226000* 瓦，由题意得 $\boldsymbol{P(0\le 1500X\le k)\ge 95\%}$, 又 $EX=140, DX=42,$

得

$$\boldsymbol{P(0\le 1500X\le k)=P(0\le X\le \frac{k}{1500})\approx\Phi(\frac{\frac{k}{1500}-140}{\sqrt{42}})-\Phi(\frac{0-140}{\sqrt{42}})}$$

$$\boldsymbol{=\Phi(\frac{\frac{k}{1500}-140}{\sqrt{42}})\ge 0.95=\Phi(1.96), k\ge 226000}$$

即至少需要供应 226000 瓦电能。

第六章　数理统计的基础知识

习题 6—1　数理统计的基本概念

1. 【解】$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$不是统计量，因为含有未知参数；其余均是统计量.

2.【解】$ET_1=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=EX=\lambda$，

$$ET_2=E(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n)=E(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i)+\frac{1}{n}EX_n=EX+\frac{1}{n}EX=\lambda+\frac{\lambda}{n},$$

$$DT_1=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}DX=\frac{\lambda}{n},$$

$$DT_2=D(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n)=D(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i)+\frac{1}{n^2}DX_n=\frac{1}{n-1}DX+\frac{1}{n^2}DX=\frac{\lambda}{n-1}+\frac{\lambda}{n^2}$$

$$E(S_n^2)=E[\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]=\frac{n-1}{n}E[\tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]=\frac{n-1}{n}E(S^2)=\frac{n-1}{n}DX=\frac{n-1}{n}\lambda.$$

习题 6—2　抽样分布

1.【解】(1) 因为 $X_1-X_2 \sim N(0,2)$, $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$, $X_3^2+X_4^2\sim\chi^2(2)$, 且 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}$与$X_3^2+X_4^2$ 独立,

故 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}=\dfrac{(X_1-X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2)/2}}\sim t(2)$；

(2) 因为 $\sum_{i=1}^{m}X_i\sim N(0,m)$, $\dfrac{\sum_{i=1}^{m}X_i}{\sqrt{m}}\sim N(0,1)$, 故 $(\dfrac{\sum_{i=1}^{m}X_i}{\sqrt{m}})^2=\dfrac{1}{m}(\sum_{i=1}^{m}X_i)^2\sim\chi^2(1)$, 同理

$\dfrac{1}{n-m}(\sum_{i=m+1}^{n}X_i)^2\sim\chi^2(1)$, 且 $\dfrac{1}{m}(\sum_{i=1}^{m}X_i)^2$与$\dfrac{1}{n-m}(\sum_{i=m+1}^{n}X_i)^2$独立，故

$\dfrac{1}{m}(\sum_{i=1}^{m}X_i)^2+\dfrac{1}{n-m}(\sum_{i=m+1}^{n}X_i)^2\sim\chi^2(2).$

(3) $\dfrac{(n-2)\sum_{i=1}^{2}X_i^2}{2\sum_{i=3}^{n}X_i^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{2}X_i^2\Big/2}{\sum_{i=3}^{n}X_i^2\Big/(n-2)}\sim F(2,n-2)$.

2.【证明】证　⑴由于 $U\sim N(0,1)$，故 $U^2\sim\chi^2(1)$，所以 $P\{U^2>\chi^2_{\alpha}(1)\}=\alpha$.

又 $P\{U^2>U^2_{\frac{\alpha}{2}}\}=P\{|U|>U_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$，故得 $U^2_{\frac{\alpha}{2}}=\chi^2_{\alpha}(1)$.

习题 6—3　正态总体样本均值和样本方差的分布

1.　【解】$P\{(\overline{X}-\mu)^2 \le \frac{4\sigma^2}{n}\} = P\{(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2 \le 4\} = P\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le 2\} = \Phi(2)-\Phi(-2) = 2\Phi(2)-1$

$= 0.9544$；

2.【解】B.

第七章　参数估计

习题 7—1　点估计

1.【解】(1) 由 $EX = p$，令 $EX = \overline{X}$，即 $p = \overline{X}$，得 p 的矩估计为 $p_M = \overline{X}$.

(2) X 的概率分布为 $P\{X = x\} = p^x(1-p)^{1-x},\ x = 0,1.$

则似然函数 $L(X_1, X_2, \cdots, X_n, p) = \prod_{i=1}^{n} p^{X_i}(1-p)^{1-X_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} X_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}$，

令 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，有 $L(X_1, X_2, \cdots, X_n, p) == p^{n\overline{X}}(1-p)^{n(1-\overline{X})}$，

两边取对数，$\ln L = n\overline{X}\ln p + n(1-\overline{X})\ln(1-p)$，

由 $\frac{d(\ln L)}{dp} = -\frac{n(1-\overline{p})}{1-p} + \frac{n\overline{X}}{p} = -\frac{n}{p(1-p)}(\overline{X}-p) = 0,$

得 p 的极大似然估计为 $p_L = \overline{X}$.

2.　【解】X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, x > 1, \\ 0, x \le 1, \end{cases}$ $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{+\infty} x\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx$

$= \int_{1}^{+\infty} \frac{\beta}{x^{\beta}}dx = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{x^{\beta-1}}\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{\beta}{\beta-1}$，令 $EX = \frac{\beta}{\beta-1} = \overline{X}$，得 β 的矩估计量 $\beta_M = \frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$；

似然函数为 $L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \beta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\beta}{X_i^{\beta+1}} = \frac{\beta^n}{(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\beta+1}}$　$(X_i > 1, i = 1, 2, \cdots, n)$，

$\ln L(\beta) = n\ln\beta - (\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$，令 $\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\ln X_i = 0$，$(x_i > 1, i = 1, 2, \cdots, n)$，解得 β 的

极大似然估计量为 $\beta_L = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

3.【解】似然函数为$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta)=\frac{1}{\theta^n}$，$0\le X_i\le\theta$.

要使$L=\frac{1}{\theta^n}$（$\theta>0$）达到最大，即使得θ^n达到最小. 由于$0\le X_i\le\theta$，得$\theta\ge\max\limits_{1\le i\le\theta} X_i$，因此当$\theta=\max\limits_{1\le i\le\theta} X_i$时，$L=\frac{1}{\theta^n}$最大，所以$\theta$的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\max\limits_{1\le i\le n} X_i$.

习题 7-2 估计量的评选标准

1. 【解】$\because E|X-\mu|=\sigma E\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|=\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$,

$\therefore E\left[\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|\right]=\frac{k}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}E|X_i-\mu|\right]=\frac{k}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}E|X-\mu|\right]=\frac{k}{n}\cdot n\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=k\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$,

若使$\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$为$\sigma$的无偏估计，只需$E\frac{k}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|\right]=\sigma$即可，

即$k\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\sigma$，因此$k=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. 【解】

（1）$E\mu=E(c_1X_1+c_2X_2)=c_1EX_1+c_2EX_2=(c_1+c_2)\mu=\mu$,

$\therefore \mu=c_1X_1+c_2X_2$为$\mu$的无偏估计.

（2）$D(\mu)=E(\mu)^2-(E\mu)^2=E(c_1X_1+c_2X_2)^2-[E(c_1X_1+c_2X_2)]^2$

$=c_1^2EX_1^2+c_2^2EX_2^2+2c_1c_2E(X_1X_2)-c_1^2(EX_1)^2-c_2^2(EX_2)^2-2c_1c_2EX_1EX_2$

$=c_1^2DX_1+c_2^2DX_2=(c_1^2+c_2^2)\sigma^2\ge 2c_1c_2\sigma^2$, 且$c_1=c_2$时等号成立，

又$c_1+c_2=1$，所以当$c_1=c_2=\frac{1}{2}$时方差最小，最小方差为$\frac{\sigma^2}{2}$.

习题 7-3　区间估计

1. 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本值. ⑴若样本均值$\bar{x}=9.5$，μ的置信度为0.95的双侧置信区间的置信上限为10.8，求μ的置信度为0.95的双侧置信区间. ⑵若样本容量$n=10$，σ^2的置信度为0.95的双侧置信区间的置信上限为1.2，求σ^2的置信度为0.95的双侧置信区间.

【解】⑴解一：μ 的置信度为 0.95 双侧置信区间为$(\bar{x}-t_{0.025}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{0.025}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}})$，由题意，

$9.5+t_{0.025}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=10.8$，故$t_{0.025}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=1.3$，所以置信区间$(8.2,10.8)$.

解二：因为 μ 的双侧置信区间关于 $\bar{x}=9.5$ 对称故置信区间$(8.2,10.8)$.

⑵ σ^2 的置信度为 0.95 双侧置信区间为$(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)})$，由题意，$\frac{9s^2}{\chi^2_{0.975}(9)}=1.2$，

$9s^2=1.2\chi^2_{0.975}(9)=1.2\times 2.700=3.24$，故$\frac{9s^2}{\chi^2_{0.025}(9)}=\frac{3.24}{19.023}=0.17$，所以$\sigma^2$ 的置信度为0.95 的双侧置信区间为$(0.17,1.2)$.

2.【解】（1）设 $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1)$，$1-\alpha=0.98,\alpha=0.02$，

$F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)=F_{0.01}(12,9)=5.11$，$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(12,9)=\frac{1}{F_{0.01}(9,12)}=\frac{1}{4.39}$

于是有 $\frac{1}{4.39}<\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{1/\sigma_1^2}{0.8^2/\sigma_2^2}<5.11$，整理得

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\in(0.306,6.859)$ 即 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\in(0.553,2.620)$

（2）设 $T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$，$\alpha=0.02$，

$t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)=t_{0.01}(21)=2.5177$

由 $-2.5177<\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}=\frac{(16-11)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{12\times1+9\times0.8^2}{21}}\sqrt{\frac{1}{13}+\frac{1}{10}}}<2.5177$，

整理有 $\mu_1-\mu_2\in(4.026,5.974)$

第八章 假设检验

习题 8-1　假设检验的基本概念

1.【解】(1) H_0：$\mu=1.9$，H_1：$\mu>1.9$；或者 H_0：$\mu\le1.9$，H_1：$\mu>1.9$；

(2) 本题中第一类错误反映了真实情况是甲厂的疫苗平均抗体强度不高于乙厂的疫苗平均抗体强度，但根据样本检验的结果是甲厂的疫苗平均抗体强度高于乙厂的疫苗平均抗体强度.

本题中第二类错误反映了真实情况是甲厂的疫苗平均抗体强度高于乙厂的疫苗平均抗体强度，但根据样本检验的结果是甲厂的疫苗平均抗体强度不高于乙厂的疫苗平均抗体强度.

习题 8-2 单正态总体中均值和方差的假设检验

1.【解】假设 $H_0:\mu=162.5, H_1:\mu\ne162.5$，

$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{H_0}{=}\dfrac{\overline{X}-162.5}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，将已知条件带入有 $\boldsymbol{U_0=2.77}$,

$\alpha=0.02$，$U_{\frac{\alpha}{2}}=U_{0.01}=2.33$，拒绝域为 $I_C=\{u\,|\,|u|>2.33\}$

$U_0\in I_C$,因此拒绝 H_0，接受 H_1。因此有理由相信平均身高变化了。

2. 【解】设 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\overset{H_0}{=}\dfrac{(n-1)S^2}{1.3^2}\sim\chi^2(7)$，

将已知条件带入有 $\chi_0{}^2=13.42,\ \alpha=0.05,\ \chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(7)=\chi_{0.025}{}^2(7)=16.013$，

$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(7)=\chi_{0.975}{}^2(7)=1.690$，拒绝域为 $I_C=\{\chi^2\,|\,\chi^2<1.690或\chi^2>16.013\}$，

$\chi_0{}^2\notin I_C$，所以接受 H_0。

习题 8-3 双正态总体中均值和方差的假设检验

1.(1) 提示：利用 $F=\dfrac{\sigma_2{}^2}{\sigma_1{}^2}\dfrac{S_1}{S_2}$

(2) 提示：有 (1) 知 $\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$，因此利用 $T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$.