

# 合肥工业大学试卷 (A)

共 1 页第 1 页

2021~2022 学年第 二 学期 课程代码 1400221B 课程名称 高等数学 A(下) 学分 6 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑  
专业班级 (教学班) 考试日期 2022. 7. 12 命题教师 高等数学课程组 系 (所或教研室) 主任审批签名

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设  $y = y(x), z = z(x)$  由方程  $\begin{cases} 2z - x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$  确定, 则其中  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1,1)} =$  \_\_\_\_\_.
2. 设函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4$ , 则  $f(x, y, z)$  在点  $(1, -1, \frac{1}{2})$  处的最大方向导数为\_\_\_\_\_.
3.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dx \int_x^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos y}{y} dy =$  \_\_\_\_\_.
4. 设曲线  $L: |x| + |y| = 1$ , 则对弧长的曲线积分  $\oint_L (|x| + |y| + xy) ds =$  \_\_\_\_\_.
5. 设曲面  $\Sigma$  为旋转曲面  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ), 则曲面积分  $\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + 4z} dS =$  \_\_\_\_\_.

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 考虑二元函数  $f(x, y)$  的下列 4 条性质:

- ① 在点  $(x_0, y_0)$  处连续,
- ② 在点  $(x_0, y_0)$  处两个偏导数存在,
- ③ 在点  $(x_0, y_0)$  处两个偏导数连续,
- ④ 在点  $(x_0, y_0)$  处可微.

若用 “ $P \Rightarrow Q$ ” 表示性质  $P$  推出性质  $Q$ , 现有以下五种推导关系:

- ①  $\Rightarrow$  ②, ②  $\Rightarrow$  ①, ③  $\Rightarrow$  ④, ④  $\Rightarrow$  ③, ④  $\Rightarrow$  ②,

则上述正确的推导关系有 ( ) 种.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 曲线  $x = t, y = t^2, z = t^3$  在点  $(1, 1, 1)$  处的法平面方程为 ( ) .

- (A)  $2x + 2y + 3z = 7$  (B)  $x + 2y + z = 4$   
(C)  $x + 2y + 3z = 6$  (D)  $2x + 2y + z = 5$

3. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数 ( ) .

- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛 (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛 (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$  收敛 (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{2}$  收敛

4. 设二元函数  $f(x, y)$  连续, 则  $\int_{-1}^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy =$  ( ) .

- (A)  $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  (B)  $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$   
(C)  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  (D)  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

5. 设  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1 + x^2, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$  则其以  $2\pi$  为周期的傅里叶级数在点  $x = \pi$  处收敛于 ( ) .

- (A)  $\frac{\pi^2}{2}$  (B)  $-1$  (C)  $1 + \pi^2$  (D)  $0$

三、(本题满分 12 分) 设  $z = f(xy^2, x^2y)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

四、(本题满分 12 分) 设曲线  $\Gamma$  为抛物面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $x + y + z = 1$  的交线, 求曲线  $\Gamma$  上的点到原点的最长距离和最短距离.

五、(本题满分 14 分) 计算曲线积分  $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y^2) dy$ , 其中  $L$  为  $y = \sin x$  从  $O(0, 0)$  到  $A(\pi, 0)$  的曲线段.

六、(本题满分 14 分) 计算  $I = \iint_{\Sigma} \frac{x^3}{3} dydz + \frac{y^3}{3} dzdx + (z + 1) dxdy$ , 其中  $\Sigma: z = 1 - x^2 - y^2$  ( $z \geq 0$ ), 取上侧.

七、(本题满分 14 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$  的收敛域及和函数, 并计算  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ .

八、(本题满分 4 分) 设  $a_0 = 0$ , 当  $n \geq 1$  时,  $\{a_n\}$  是正项递减数列, 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} - a_n)$  收敛.