(I) Розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} \text{задано } \sigma = const > 0, \ f \in L^2(0,T), \ u_0 \in \mathbb{R} \\ \text{знайти } u = u(t) \text{ таку, що} \\ u'(t) + \sigma u(t) = f(t), \ \forall t \in (0,T], \ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Рівняння балансу:

Варіаційна задача:

$$\begin{cases} \text{Дано } u_0 \in H = L^2(\Omega) \\ \text{Знайти } u = u(t) \in V = H_0^1(\Omega) \text{ таку, що} \\ m(u', v) + a(u,v) = \langle l, v \rangle \quad \forall t \in (0,T] \\ m(u(0), v)' = m(u_0, v) \end{cases}$$

Білінійні форми:

$$m(u,v) = \int_\Omega uv\,dx$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma uv\,dx$$

$$\langle l, v \rangle = \int_\Omega fv\,dx$$

Підставимо $v = u(t)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} m(u(t), u(t)) + a(u(t), u(t)) = \langle l(t), u(t) \rangle \\ m(u(0), u(0)) = m(u_0, u(0)) \end{cases}$$

Використовуючи поняття норми:

$$\|u\|_m = m^{1/2}(u, u)$$
$$\|u\|_a = a^{1/2}(u, u)$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_V^2 = \langle l(t), u(t)\rangle \\ \|u(0)\|_H^2 = m(u_0, u(0)) \end{cases}$$

Проінтегруємо за часом:

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt = \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \langle l(t), u(t)\rangle\, dt$$

рівняння балансу

Єдиність розв'язку та його неперервна залежність:

Нехай u_1 і u_2 $(u_1 \neq u_2)$ — розв'язки рівняння балансу і $z = z(t) = u_1 - u_2 \neq 0$.

Тоді підставимо у р-ня балансу і отримаємо:

$$\frac{1}{2}\|z\|_H^2 + \int_0^T \|z\|_V^2\, dt = 0 \Rightarrow \begin{matrix}\|z\|_H^2 = 0 \\ \|z\|_V^2 = 0\end{matrix},$$ що

суперечить припущенню

II. Будуємо однокрокову рекурентну схему:

$$u_{\Delta t}(t) = u^j[1-\omega(t)] + u^{j+1}\omega(t) \equiv$$
$$\equiv u^j + \Delta t\, \omega(t)\, \dot{u}^{j+1/2}$$

$u^j, u^{j+1} \in V$; $\dot{u}^{j+1/2} = (u^{j+1} - u^j)/\Delta t$;

$$\omega(t) = \frac{t - t_j}{\Delta t}$$

Підставивши у р-ня задачі отримаємо:

$$m(\dot{u}^{j+1/2}, v) + a(u^j + \Delta t\, \omega(t)\, \dot{u}^{j+1/2}, v) = \langle l, v \rangle$$
$$m(u^0, v) = m(u_0, v) \qquad \forall t \in [t_j; t_{j+1}]$$
$$\forall v \in V,\ j = \overline{0, N-1}$$

$$\forall \xi = \xi(t) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t)\,dt = 1$$

$$\theta = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t)\, \xi(t)\, dt$$

Домножимо їх на ξ, проінтегруємо:

$$\begin{cases} m(\dot{u}^{j+1/2}, v) + a(u^j + \Delta t\, \theta\, \dot{u}^{j+1/2}, v) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \langle l(t), v \rangle dt \\ m(u^0, v) = m(u_0, v) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(\dot{u}^{j+1/2}, v) + \Delta t\, \theta\, a(\dot{u}^{j+1/2}, v) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \langle l(t), v \rangle dt - a(u^j, v) \\ m(u^0, v) = m(u_0, v) \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t\, \dot{u}^{j+1/2} \end{cases}$$

III Достатні умови стійкості:

1) $\theta \in [0;\ 0{,}5)$ і $\Delta t \to 0$

2) $\theta \in [\frac{1}{2};\ 1]$

IV Позначимо $e^j = u(t_j) - u^j$

$$u(t_{j+1}) = u(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{2} u'(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u''(t_{j+\frac{1}{2}}) + \dots +$$

$$u(t_j) = u(t_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{2} u'(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) u''(t_{j+\frac{1}{2}}) + \dots$$

$$\frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{2} = u(t_{j+\frac{1}{2}}) +$$

$+ \frac{\Delta t}{2} u'(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u''(t_{j+\frac{1}{2}}) +$
$+ O(\Delta t'')$

$$\frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{\Delta t} = \dot{u}(t_{j+0,5}) +$$

$+ \frac{1}{3} \frac{\Delta t^2}{8} u''' + D(\Delta t'')$, тому, умову знаходження похибки можна представити у вигляді:

Знайти $\{e^{j+\frac{1}{2}}; e^{j+1}\} \in V^2 : m(\dot{e}^{j+\frac{1}{2}}, v) +$
$+ \beta(e^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\dot{e}^{j+\frac{1}{2}}, v) =$
$= \langle l_{j+\frac{1}{2}} u, e^{j+\frac{1}{2}} \rangle = \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}), v \rangle =$
$= -m(\dot{u}(t_{j+\frac{1}{2}}), v) - \beta(u(t_{j+\frac{1}{2}}), v),$
$\forall v \in V$

Приведемо це все до ОРС:

$\frac{1}{2}\|e^{m+1}\|_m^2 + \Delta t \sum_{i=0}^{m} \|e^{j+\frac{1}{2}}\|_\beta^2 + \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \frac{1}{2}) \cdot$
$\cdot \|\dot{e}^{m+1}\|_\beta^2 = \frac{1}{2}\|e^0\|_m + \Delta t \cdot \frac{\Delta t^2}{8} \sum_{i=0}^{m} \langle l_{i+1} u,$
$e^{i+\frac{1}{2}} \rangle + \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|\dot{e}^0\|_\beta^2$

Припустимо $\theta = \frac{1}{2}$, $\langle l_{j+\frac{1}{2}}, e^{j+\frac{1}{2}} \rangle \leq$

$\| l_{j+\frac{1}{2}}(u) \| \, \| e^{j+\frac{1}{2}} \|_B \leq \frac{1}{4\varepsilon} \| l_{j+1}(u) \|^2 \cdot \| e^{j+\frac{1}{2}} \|_B^2$, $\forall \varepsilon > 0$

$$d = \frac{8}{\Delta t^2} ; \quad \| e^{m+1} \|_m^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{m} \| e^{j+\frac{1}{2}} \|_B^2 \leq$$

$$\leq \Delta t \frac{\Delta t^4}{2^8} \sum_{j=0}^{m} \| l_{j+1}(u) \|^2$$

Припустимо, що $\theta \neq \frac{1}{2}$:

$$m(\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}, v) + B(\varepsilon^{j+\theta}, v) =$$

$$= \Delta t (\theta - \tfrac{1}{2}) B(u_n(t_{j+\frac{1}{2}}), v) -$$

$- \Delta t^2 \langle l_j(v) \rangle$, тому, ми можемо зробити висновок, що це 1 тип схем апроксимації

(V) Показати, що $0 \leq \Theta \leq 1$.

$$\Theta = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t)\, \xi(t)\, dt$$

Оскільки $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t)\, dt = 1$, то, (I)

згідно з теоремою про середнє отримуємо:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t)\, \xi(t)\, dt = \omega(t^*) \underbrace{\int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t)\, dt}_{=1} =$$

$$= \omega(t^*) = \frac{t^* - t_j}{\Delta t}, \quad t^* \in [t_j; t_{j+1}]$$

Оцінка значення t^*:

$$t_j \leq t^* \leq t_{j+1}$$

$$0 \leq t^* - t_j \leq t_{j+1} - t_j$$

$$0 \leq t^* - t_j \leq \Delta t \quad \Big| : \Delta t$$

$$0 \leq \frac{t^* - t_j}{\Delta t} \leq 1$$

Таким чином Θ набуває мінімального значення при $t^* = t_j \rightarrow \Theta = 0$ та максимального при $t^* = t_{j+1} \rightarrow \Theta = 1$

(VI) У разі $f(t) = 0$; $a = 1$ отримаємо:

$$\langle l_{t+\frac{1}{2}}; v \rangle \equiv 0$$

$$a(u, v) = m(u, v) = \int uv \, dv \Rightarrow A = M$$

Тому, однокрокова рекурентна задача матиме вигляд

$$\begin{cases} (A + \theta \Delta t A)\tau^{j+\frac{1}{2}} = -A q^j \\ q^{j+1} = q^j + \Delta t \, \tau^{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \tau^{j+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{1+\theta\Delta t} q^j \\ q^{j+1} = q^j + \Delta t \cdot \tau^{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

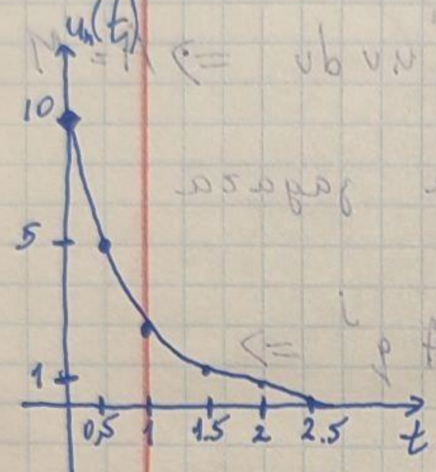
$$\Rightarrow q^{j+1} = q^j - \frac{\Delta t}{1+\theta\Delta t} q^j = q^j \cdot \left(\frac{1+\theta\Delta t - \Delta t}{1+\theta\Delta t} \right)$$

$$q^{j+1} = \left(\frac{1 - \Delta t + \theta\Delta t}{1+\theta\Delta t} \right) \cdot q^j$$

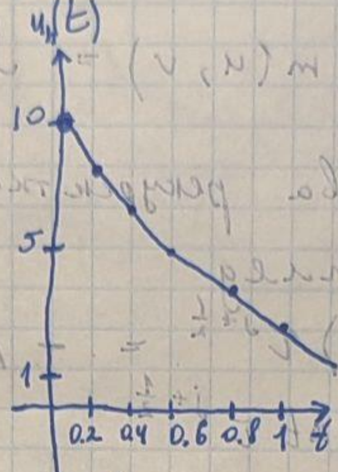
При заданих $u_0 = 10$, $q^0 = 10$

1) $\theta = 0 : \Rightarrow q^0 = 10,$

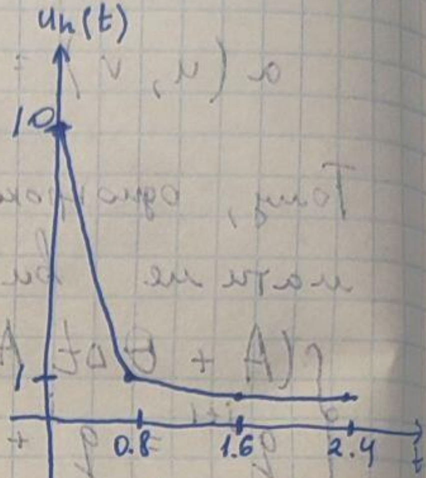
$$q^{j+1} = (1 - \Delta t)\, q^j \Rightarrow q^j = 10 \cdot (1 - \Delta t)^j$$



$\Delta t = 0,5$



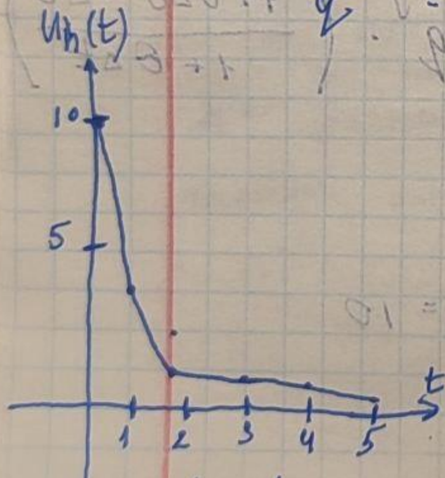
$\Delta t = 0,2$



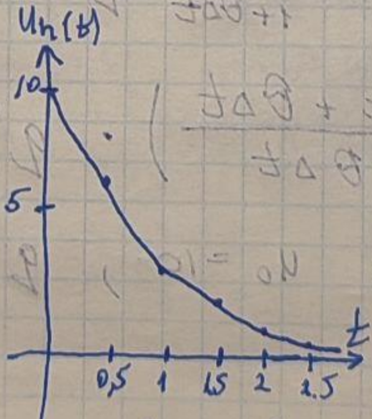
$\Delta t = 0,8$

2) $\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow q^0 = 10,$

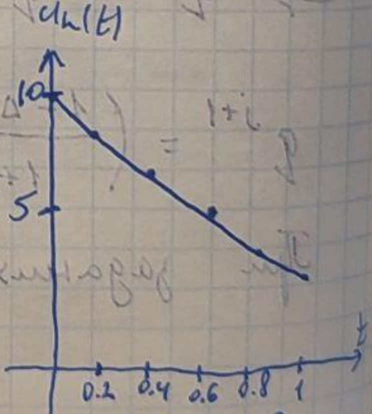
$$q^{j+1} = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t}{1 + \frac{1}{2}\Delta t}\right) \cdot q^j$$



$\Delta t = 1$



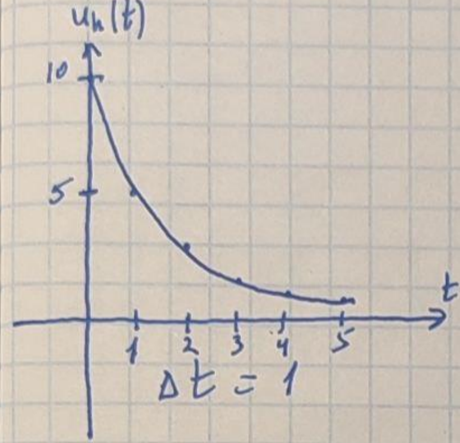
$\Delta t = 0.5$

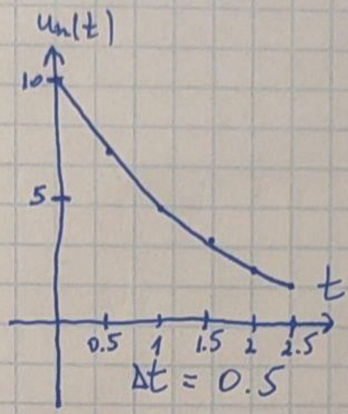


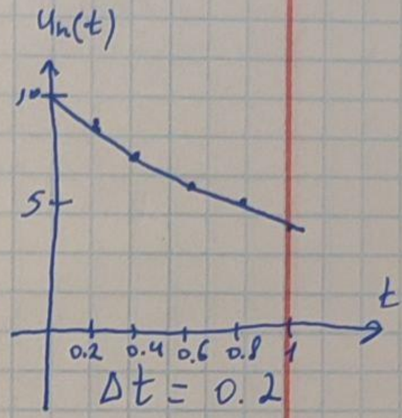
$\Delta t = 0.2$

(3) $\theta = 1 \Rightarrow q^0 = 10$

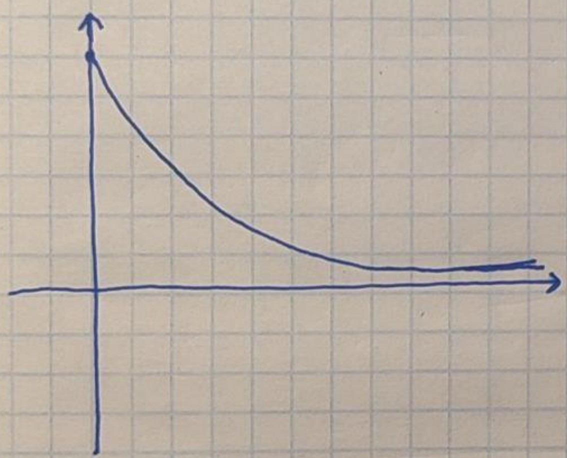
$$q^{j+1} = \frac{q^j}{1+\Delta t}$$







Загальний вигляд графіка:



(VII) Задача Коші:

$$\begin{cases} u'(t) + \sigma u(t) = f(t) \\ u(0) = u_0 \\ \sigma = 1, \; f(t) = 0, \; u_0 = 10 \end{cases}$$

$$u'(t) + u(t) = 0$$

$$\frac{du}{dt} = -u \Rightarrow \frac{du}{u} = -dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|u| = -t + c, \; c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u| = e^{-t+c} = e^{c} e^{-t} = |k| e^{-t}, \; k \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{u = ke^{-t}}$$

→ загальний розвʼязок

$$u(0) = u_0 = 10 = ke^{-0} = k \Rightarrow k = 10$$

Отже,

$u(t) = 10e^{-t}$ – розвʼязок задачі Коші