

Екзаменаційна робота
студента групи ПМІ - 22
Юраса Назара

Завдання А Знайти розв'язок задачі Коші

$$x^2 y' = 4x^2 + xy + y^2, \quad y(1) = 0$$

Нехай $v(x) = y/x$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx}$$

$$x^2 \left(x \frac{dv}{dx} + v(x) \right) = 4x^2 + x^2 v(x)^2$$

$$x^2 \left(x \frac{dv}{dx} + v(x) \right) = x^2 (v^2(x) + v(x) + 4)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 x + 4}{x} \quad \Bigg| \quad : v^2(x) + 4$$

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{v^2(x) + 4} = \frac{1}{x}$$

Інтегруємо: $\int \frac{\frac{dv}{dx}}{v^2(x) + 4} dx = \int \frac{1}{x} dx$

$$\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{v(x)}{2} \right) = \log(x) + C_1, \quad \text{де } C_1 = \text{const}$$

$$v(x) = 2 \arctan (2 (\log(x) + C_1))$$

$$y(x) = 2x \arctan (2 (\log(x) + C_1))$$

$$2 \arctan (2 C_1) = 0, \quad C_1 = 0$$

$$y(x) = 2x \arctan (2 \log(x))$$

Відповідь: $y(x) = 2x \arctan (2 \log(x))$

Завдання В Знайти розв'язок задачі Коші:

$$xy' + x^3 y^2 \cos x + 2y = 0, \quad y(\pi) = \frac{1}{2\pi^2}$$

Візьмемо $x^3 y^2 \cos(x)$ від обох частин:

$$x \frac{dy}{dx} + 2y(x) = -x^3 \cos x y^2(x)$$

Поділимо обидві част. на $-x y^2(x)$

$$\rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y^2(x)} - \frac{2}{xy(x)} = x^2 \cos(x)$$

$$\text{Нехай } v(x) = \frac{1}{y(x)}$$

$$\frac{dv(x)}{dx} - \frac{2v(x)}{x} = x^2 \cos(x)$$

$$\text{Нехай } \mu(x) = e^{\int -2/x dx} = \frac{1}{x^2}$$

Поділимо обидві част. на $\mu(x)$:

$$\frac{\frac{dv(x)}{dx}}{x^2} - \frac{2v(x)}{x^3} = \cos(x)$$

$$\text{Заміна: } -\frac{2}{x^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{x^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right) v(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v(x)}{x^2} \right) = \cos(x)$$

$$\int \frac{d}{dx} \left(\frac{v(x)}{x^2} \right) dx = \int \cos(x) dx$$

$$\frac{v(x)}{x^2} = \sin(x) + C_1, \quad C_1 - \text{const}$$

$$\text{Поділимо обидві част. на } \mu(x) = \frac{1}{x^2}$$
$$v(x) = x^2 (\sin(x) + C_1)$$
$$y(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{x^2 (\sin(x) + C_1)}$$

$$\frac{1}{\pi^2 C_1} = \frac{1}{2\pi^2}, \quad C_1 = 2$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2 (\sin(x) + C_1)}$$

$$\text{Відповідь: } y(x) = \frac{1}{x^2 (\sin(x) + C_1)}$$

Завдання С

Завдання 2

Завдання Е

Завдання F