1) $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ $(y'' + 2y' - 3y = -4e^{-3x}$

$(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$

$\lambda = 1$ або $\lambda = -3$

лінійне неоднорідне, 2-го порядку

$\downarrow$ $\downarrow$

$y_2(x) = C_2 e^{x}$ $y_1(x) = C_1 e^{-3x}$

Заг розв. для двох р-нянь:

$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = -4e^{-3x}$$

$y(p) = x(a_1 e^{-3x})$, a_1 - константа

$$\frac{d^2 y_p(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(a_1 e^{-3x} x) =$$

$$= a_1(-6e^{-3x} + 9e^{-3x} x)$$

$$\frac{d^2 y_p(x)}{dx^2} + 2\frac{dy_p(x)}{dx} - 3y_p(x) = -4e^{-3x}$$

Заміна

$$a_1(-6e^{-3x} + 9e^{-3x}x) + 2(a_1 e^{-3x} - 3a_1 e^{-3x}x) -$$
$$-3(a_1 e^{-3x} x) = -4e^{-3x}$$

$-4a_1 e^{-3x} = -4e^{-3x}$; $-4a_1 = -4$; $a_1 = 1$

$y_p(x) = e^{-3x} x$

Отже, заг. розв. виглядає так:

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + x e^{-3x}$$

⑥ $y'' + y' - 2y = 4\cos 2x - 12\sin 2x$

Лінійне неоднорідне 2-го порядку

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$k_1 = -2 \quad k_2 = 1$$

2 корені, отже

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$$

$$\frac{d}{dx} C_1(x) = \frac{4(3\sin 2x - \cos 2x)e^{2x}}{3}$$

$$\frac{d}{dx} C_2(x) = \frac{4(-3\sin 2x + \cos 2x)e^{-x}}{3}$$

$$C_1(x) = C_3 + \int \frac{4(3\sin 2x) - \cos 2x\, e^{2x}}{3}\, dx$$

аналогічно C_2

або

$$C_1 = C_3 + \frac{2e^{2x}\sin x}{3} - \frac{4e^{2x}\cos 2x}{3}$$

$$C_2 = C_4 + \frac{4e^{-x}\sin 2x}{3} + \frac{4e^{-x}\cos 2x}{3}$$

Підставимо

$$y(x) = C_3 e^{-2x} + C_4 e^{x} + 2\sin 2x$$

(2) $y'' - 5y' + 4y = 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\lambda_1 = 1$ або $\lambda_2 = 4$

$y(x) = C_1 e^x$ $\qquad$ $y(x) = C_2 e^{4x}$

$$\frac{d^2 y_p(x)}{dx^2} - 5\frac{dy_p(x)}{dx} + 4y_p(x) = 4$$

$-5 \cdot 0 + 4a_1 = 4$, $a_1 = 1$

$C_1 + C_2 + 1 = 1$ $\qquad$ $C_1 = 0$

$C_1 + 4C_2 = 0$ $\qquad$ $C_2 = 0$

$y(x) = e^x C_1 + e^{4x} C_2 + 1$

$y(-2) = 1$

(5) $xy''' - 2y'' = -20x^3$ $\quad$ $y(1) = 1$ $\quad$ $y'(1) = -1$, $y''(x) =$

$y'' = 4$

$y''' = 4'$

$xy' - 24 = -20x^3$

$xy' - 24 = 0$

$x\frac{dy}{dx} = 24$, $\quad$ $\frac{dy}{4} = 2\frac{dx}{x}$

$y' = 4x^3 - 5x^4 + 0$

$y = \frac{4x^4}{4} - \frac{5x^5}{5} + C_2$ $\qquad$ $y(2) = -15$

(4) $yy'' = y'^2$

$y' = yz$, $\quad y'' = y(z' + z^2)$

$y^2(z' + z^2) = y^2 z^2$, $\quad y = 0$ розв

$z' + z^2 = z^2$

$z' = 0$

$\frac{y'}{y} = C_1$

$\ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|$

$y = C_2 e^{C_1 x}$