Юрас Назар, ПМ 1 - 42

В - 28

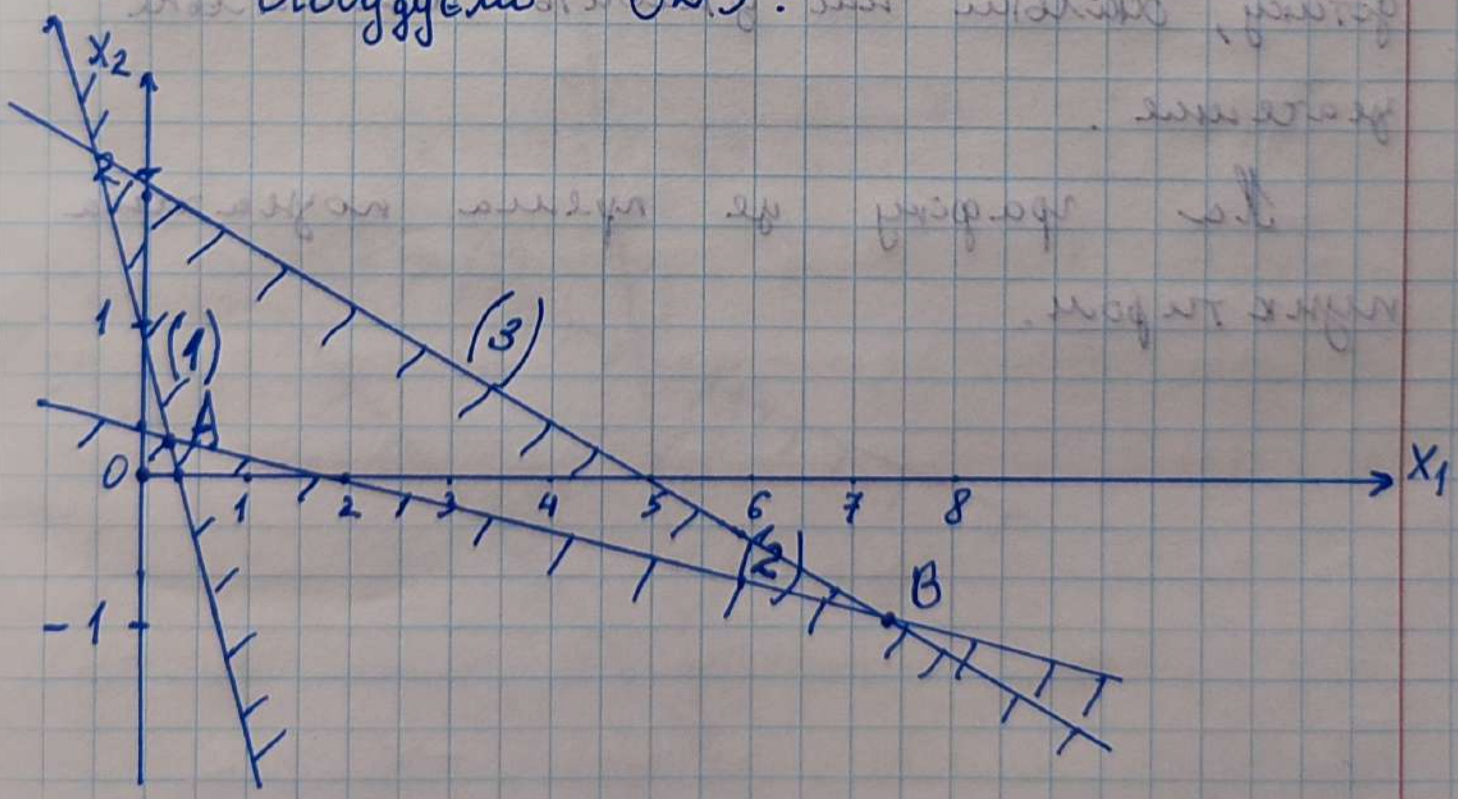
① Графічний метод

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 28x_2 \to extr$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 1 & (1) \\ 5x_1 + 28x_2 \leq 10 & (2) \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 15 & (3) \end{cases}$$

① $f(x_1, x_2) = \ldots \to min$

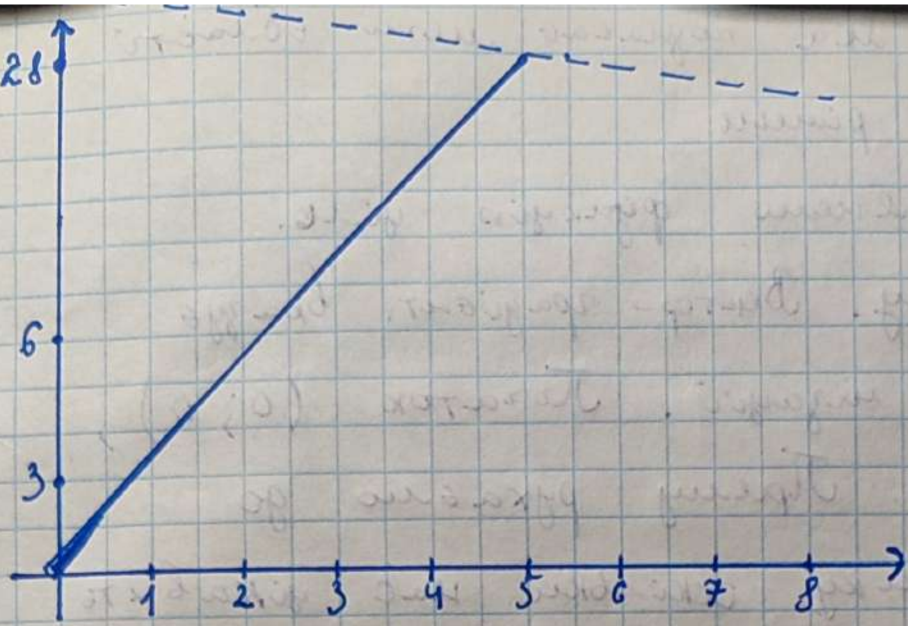
Побудуємо ОДЗ:



Межі ОДЗ: на графіку (попередньому) додав точки A та B для зазначення області багатокутника рішень

Далі розглянемо функцію цілі. Побудуємо пряму, яка відповідає значенню ф-ції. Вектор-градієнт, побудований з коефіцієнтів функції цілі вказує напрямок максимізації. Початок вектора – т. (0;0), кінець – (5;28). Рухаємо цю пряму паралельно і будемо її рухати до першого дотику, оскільки нас цікавить мінімальне значення.

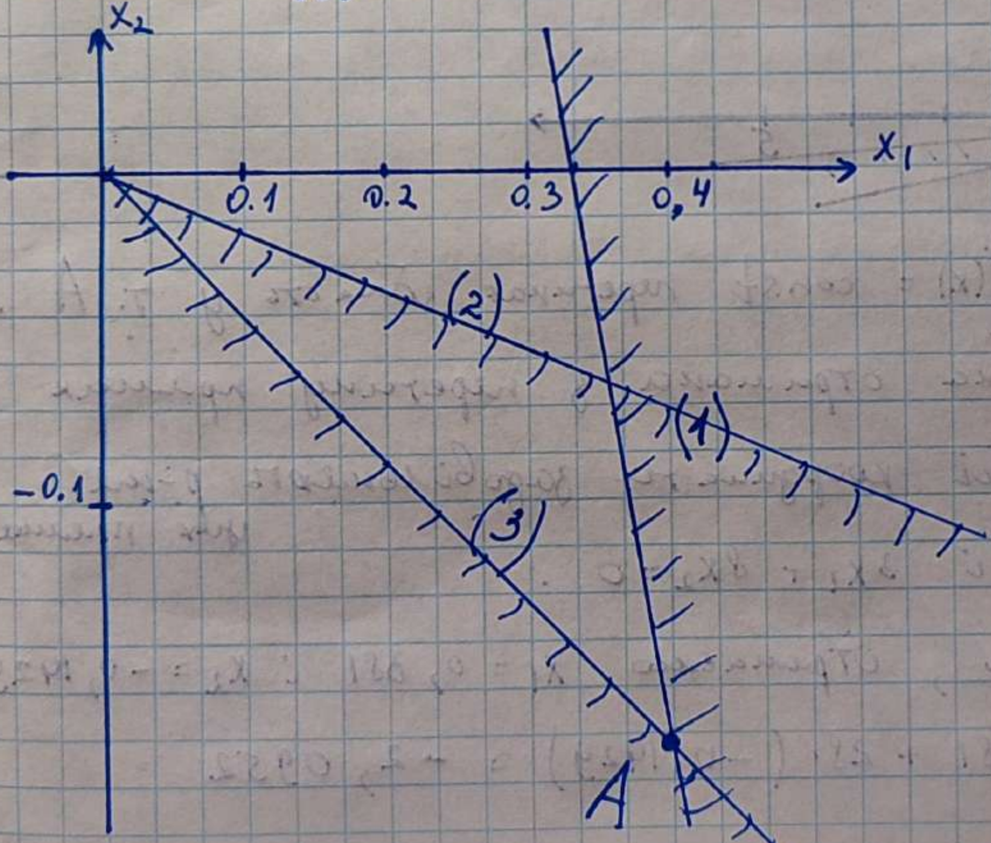
На графіку це пряма позначена пунктиром.



Задача не має допустимих рішень. ОДР - нескінченна множина

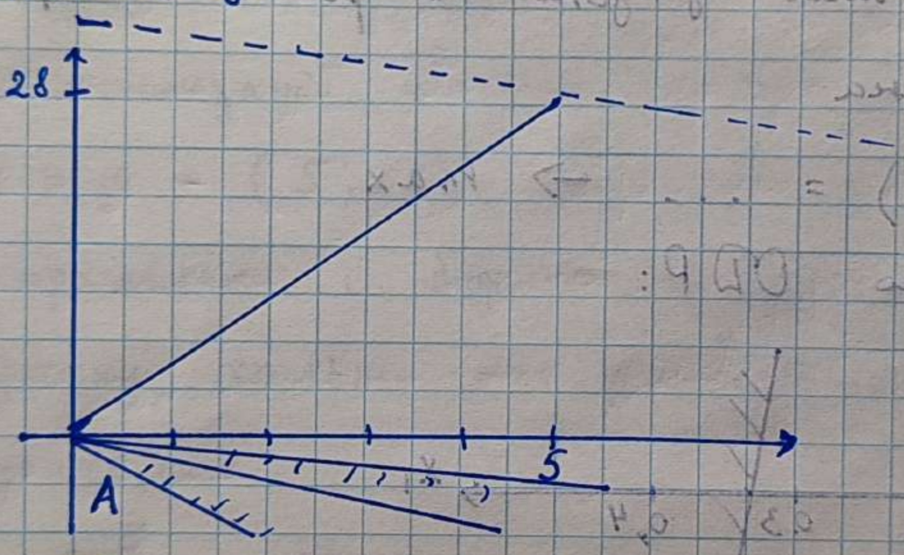
② $F(x_1, x_2) = \dots \to max$

Побудуємо ОДР:



Додав т. A, яка позначає межі області багатокутника рішень

Далі розглянемо функцію цілі. Побудуємо пряму. Вектор-градієнт вказує напрям максимізації. Початок (0; 0), кінець (5; 28). Пряму рухаємо до останнього дотику, оскільки нас цікавить максимум.



Пряма F(x) = const перетинає область у т. A
Оскільки вона отримана з перетину прямих (1) і (3) то її координати задовільняють р-ня цих прямих

$3x_1 + x_2 = 1$ і $3x_1 + 8x_2 = 0$.

Розв'язавши, отримаємо $x_1 = 0,381$ і $x_2 = -0,1429$

$F(x) = 5 \cdot 0,381 + 28 \cdot (-0,1429) = -2,0952$

(2) $-x_1 + 28x_2 + 2x_3 \to max$

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 5 & (1) \\ x_1 - 3x_3 = 3 & (2) \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 2 & (3) \end{cases}$$

Приведемо систему у вигляд нерівностей $\leq$

В (1) вводимо базисну змінну x_4

В (3) вводимо базисну змінну x_5

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -5 \\ x_1 - 3x_3 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -2 \end{cases}$$

Розширена матриця:

5	1	-2	1	0	-5
1	0	-3	0	0	3
-1	-2	0	0	1	-2

Приведемо систему до одиничної матриці методом жорданівських перетворень

Як базисну змінну можна взяти x_3, x_4, x_5

Роздільний елемент $= -3$

$1-(0\cdot 2):-3$

5. $(1\cdot(-2)):(-3)$ $\quad \bar{1}(0\cdot(-2)):-3$ $\quad -2-(-3\cdot -2):-3$ $\quad 0$ $\quad \bar{-5}(3\cdot -2):-3$

$1:-3 \quad 0:-3 \quad -3:-3 \quad 0 \quad 0 \quad 3:-3$

$-1-(1\cdot 0):-3 \quad -2-(0\cdot 0):-3 \quad 0 \quad 1-(0\cdot 0):-3 \quad -2-(3\cdot 0):-3$

Отримуємо нову матрицю:

13/3	1	0	1	0	-7
-1/3	0	1	0	0	-1
-1	-2	0	0	1	-2

Оскільки в системі є одинична матриця, в якості базисних змінних візьмемо

$X = (4, 3, 5)$

$x_4 = -13/3\, x_1 - x_2 - 7$

$x_3 = 1/3\, x_1 - 1$

$x_5 = x_1 + 2x_2 - 2$

Підставимо у функцію цілі:

$F(x) = -1/3\, x_1 + 28x_2 - 2$

$13/3\, x_1 + x_2 + x_4 = -7$

$-1/3\, x_1 + x_3 = -1$

$-x_1 - 2x_2 + x_5 = -2$

$x_0 = 1/3 \cdot (-x_1) - 28(-x_2)$

$x_1 = 0 - 1(-x_1) + 0(-x_2)$

$x_2 = 0 + 0(-x_1) - 1(-x_2)$

$x_3 = -1 - 1/3(-x_1) + 0(-x_2)$

$x_4 = -7 + 13/3(-x_1) + 1(-x_2)$

$x_5 = -2 - 1(-x_1) - 2(-x_2)$

Даній системі відповідає таблиця T^0

0	-1	0
0	0	-1
-1	-1/3	0
-7	13/3	1
-2	-1	-2
	1/3	

В якості направляючого виберемо стовпчик x_1

Обчислимо D_i по рядках як частку від ділення b_i / a_{i1} і з них виберемо найменше

$x_1 = 2 - x_5 + 2x_2$

$x_0 = -2/3 + 0(-x_5) - 86/3(-x_2)$

$x_1 = 2 + 0(-x_5) + 2(-x_2)$

$x_2 = 0 + 0(-x_5) - 1(-x_2)$

$x_3 = -1/3 + 0(-x_5) + 2/3(-x_2)$

$x_4 = -47/3 + 0(-x_5) - 23/3(-x_2)$

$x_5 = 0 - 1(-x_5) + 0(-x_2)$

2	0	2
0	0	-1
-1/3	0	2/3
-47/3	0	-23/3
0	-1	0
-2/3	0	-86/3

Таким чином, чергова база $B^0 = \langle 4, 3, 1 \rangle$

Небазисні змінні $N^0 = \langle 2, 5 \rangle$

В якості направляючого беремо стовпець x_2

$x_2 = 47/23 - 3/23\ x_4$

$x_0 = 1332/23 + 0 \cdot x_5 + 0(-x_4)$

$x_1 = -48/23 + 0(-x_5) + 0(-x_4)$

$x_2 = 47/23 + 0(-x_5) + 0(-x_4)$

$x_3 = -39/23 + 0(-x_5) + 0(-x_4)$

$x_4 = 0 + 0(-x_5) + 1(-x_4)$

$x_5 = 0 - 1(-x_5) + 0(-x_4)$

У вигляді таблиці:

−48/23	0	0
47/23	0	0
−39/23	0	0
0	0	−1
0	−1	0
1332/23	0	0

Таким чином, база $B^1 = \langle 2, 3, 1 \rangle$

Небазисні змінні $N^1 = \langle 4, 5 \rangle$

Оскільки нас цікавить максимум, то ведучий стовпчик вибираємо по мінімальному від'ємному елементу. Останній рядок не має від'ємних, знайдено оптимальний план

−48/23	0	0
47/23	0	0
−39/23	0	0
0	0	−1
0	−1	0
1332/23	0	0

В останньому рядку від'ємні елементи.
Рішення не існує

(3) $-2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \to min$

$$\begin{cases} 28x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 + x_5 = 40 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}$

Розширена матриця:

28	3	1	1	0	20
9	7	10	0	1	40

Можна вибрати як базову змінну x_4 і x_5

Оскільки в нас вже є одинична матриця, то отримаємо $X = (4, 5)$

Виразимо базисні змінні через інші

$x_4 = -28x_1 - 3x_2 - x_3 + 20$

$x_5 = -9x_1 - 7x_2 - 10x_3 + 40$

$F(x) = -2x_1 - 4x_2 - 3x_3$

$28x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 20$

$9x_1 + 7x_2 + 10x_3 + x_5 = 40$

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	20	28	3	1	1	0
x_5	40	9	7	10	0	1
$F(x_0)$	0	2	4	3	0	0

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	min
x_4	20	28	3	1	1	0	20/3
x_5	40	9	7	10	0	1	40/7
$F(x_1)$	0	2	4	3	0	0	0

Перераховуємо симплекс — таблицю

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$20-(40\cdot3):7$	$28-(9\cdot3):7$	$3-(\dots)$	$1-(10\cdot3):7$	$1-(\dots)$	$0-(\dots)$
$40:7$	$9:7$	$7:7$	$10:7$	$0:7$	$1:7$
$0-(40\cdot4):7$	$2-(9\cdot4):7$	$4-(7\cdot4):7$	$3-\dots$	$0-\dots$	$0-\dots$

Нова базис таблиця:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	20/7	169/7	0	-23/7	1	-3/7
x_5	40/7	9/7	1	10/7	0	1/7
$F(x_1)$	-160/7	-22/7	0	-19/7	0	-4/7

Це оптимальний план, бо нема додатніх значень

$x_1 = 0$, $x_2 = 40/7$, $x_3 = 0$, $x_4 = 20/7$, $x_5 = 0$

$F(x) = -160/7$

Метод Гоморі

В нас присутні дроби.

Складаємо додаткове обмеження

$q_1 - q_{11} \cdot x_1 - q_{12} x_2 - q_{13} \cdot x_3 - q_{14} x_4 - q_{15} \cdot x_5 \leq$

$q_1 = b_1 - [b_1] = 20/7 - 2 = 6/7$

$q_{11} = a_{11} - [a_{11}] = 169/7 - 24 = 1/7$

$q_{12} = a_{12} - [a_{12}] = 0 - 0 = 0$

$q_{13} = \ldots = -23/7 + 4 = 5/7$

$q_{14} = \ldots = 1 - 1 = 0$

$q_{15} = \ldots = -3/7 + 1 = 4/7$

Додаткове обмеження:

$6/7 - 1/7 x_1 - 5/7 x_3 - 4/7 x_5 \leq 0$

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	20/7	169/7	0	-23/7	1	-3/7	0
x_2	40/7	9/7	1	10/7	0	1/7	0
x_6	-6/7	-1/7	0	-5/7	0	-4/7	1
$F(x_0)$	-160/7	-22/7	0	-19/7	0	-4/7	0

Мінімальне значення Θ у 5 стовпцю

Перерахуємо таблицю

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	7/2	97/4	0	-11/4	1	0	-3/4
x_2	11/2	5/4	1	5/4	0	0	1/4
x_5	3/2	1/4	0	5/4	0	1	-7/4
$F(x_0)$	-22	-3	0	-2	0	0	-1

$q_1 - q_{11} \cdot x_1 - q_{12} \cdot x_2 - q_{13} \cdot x_3 - q_{14} \cdot x_4 - \dots \cdot x_6 \leq 0$

$q_1 = 7/2 - 3 = 1/2$

$q_{12} = 97/4 - 24 = 1/4$

$q_{13} = -11/4 + 3 = 1/4$

$q_{14} = 1 - 1 = 0$

$q_{15} = 0 - 0 = 0$

$q_{16} = -3/4 + 1 = 1/4$

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	7/2	97/4	0	−11/4	1	0	−3/4	0
x_2	11/2	5/4	1	5/4	0	0	1/4	0
x_5	3/2	1/4	0	5/4	0	1	−7/4	0
x_7	−1/2	−1/4	0	−1/4	0	0	−1/4	1
$F(x_0)$	−22	−3	0	−2	0	0	−1	0
θ		$-3:(1/4)=12$		8			4	

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	5	25	0	−2	1	0	0	−3
x_2	5	1	1	1	0	0	0	1
x_5	5	2	0	3	0	1	0	−7
x_6	2	1	0	1	0	0	1	−4
$F(x_0)$	−20	−2	0	−1	0	0	0	−4

Рішення цілочисельне. Нема необхідності застосовувати метод Гоморі.

$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 5, \quad x_5 = 5$

$F(x) = -2\cdot 0 - 4\cdot 5 - 3\cdot 0 = -20$