Контрольна робота № 1

Юраса Назара

ПМ 1 - 22

4) $(2x + \sin y)dx + (x\cos y + \frac{1}{y})dy = 0$

$P(x, y) = 2x + \sin y$,

$Q(x, y) = \frac{1}{y} + x\cos y$

Визначимо $f(x, y)$ як $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} =$

$= \cos(y) = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

Розв'язок може бути поданий як $f(x, y) = C_1$, де C_1 - деяка константа

Проінтегруємо $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ щодо x для того щоб знайти $g(y)$:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \sin(y)x + g(y)\right) =$

$= \cos(y)x + \frac{dg(y)}{dy}$

$$\cos(y)\,x + \underbrace{\frac{d(g(y))}{dy}}_{=\frac{1}{y}} = \frac{1}{y} + \cos x$$

Інтегруємо $\frac{d(g(y))}{dy}$ щодо y:

$$g(y) = \int \frac{1}{y}\,dy = \log y$$

Замінимо $g(y)$ в рівняння $f(x, y$

$$f(x, y) = x^2 + \log y + \sin(y)\,x$$

В-дь: $x^2 + \log(y) + \sin(y)\,x = C_1$

(3) $2yy' + y^2 = 2xe^{-x}$

$v(x) = y(x^2)$

$$\frac{dv(x)}{dx} = 2y(x)\frac{dy(x)}{dx}:$$

$$\frac{dv(x)}{dx} + v(x) = 2e^{-x}x \;\Big|\; \cdot M(x)$$

Нехай $M(x) = e^{\int 1\,dx} = e^x$

$$e^x\frac{dv(x)}{dx} + e^x v(x) = 2x$$

Заміна: $e^x = \frac{d}{dx}(e^x)$:

$$e^x\frac{dv(x)}{dx} + \frac{d}{dx}(e^x)\,v(x) = 2x$$

$f\left(\frac{dg}{dx}\right) + g\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(fg)$ з лівого боку!

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x} v(x)\right) = 2x$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{x} v(x)\right) dx = \int 2x\, dx$$

$$e^{x} v(x) = x^2 + c_1, \quad c_1 - const \quad \Big|: \mu(x) = e^{x}$$

$$v(x) = e^{-x}\left(x^2 + c_1\right)$$

В-дь: $\cancel{y(x)^2} = y^2 = e^{-x}\left(x^2 + c_1\right)$

⑤ $xy' - y = x\,tg\left(\frac{y}{x}\right)$

Хай $y(x) = x v(x)$, що дасть $\frac{dy(x)}{dx} =$
$= x \frac{dv(x)}{dx} + v(x)$:

$$x\left(x \frac{dv(x)}{dx} + v(x)\right) - x v(x) = x\, tg(v(x))$$

Спростимо $x^2 \frac{dv(x)}{dx} = x\, tg(v(x))$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{tg(v(x))}{x} \quad \Big|: \quad \frac{dv(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$ctg(v(x)) \frac{dv(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int ctg(v(x)) \frac{dv(x)}{dx}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\log(\sin(v(x))) = \log x + c_1$$

$$v(x) = \sin^{-1}(e^{c_1} x)$$

$$v(x) = \sin^{-1}(c_1 x)$$

$$y(x) = x \cdot \sin^{-1}(c_1 x)$$

В-дь: $y(x) = x \cdot \sin^{-1}(c_1 x)$

① $y' \sin x = y \cos x + \sin^2 x, \quad y(\pi/2) = 0$

Поділимо рівнення на $\sin x$

$$\frac{d}{dx} y(x) = \frac{y(x)\cos(x) + \sin 2x}{\sin x}$$

$$P(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin x}$$

$$Q(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x}$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x), \quad y \neq 0$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int P(x)\, dx;$$

$$\log|y| = -\int P(x)\, dx$$

Тому, $y_1 = e^{-\int P(x)\, dx}$

$y_2 = -e^{-\int P(x)\, dx}$

$$\int P(x)\,dx = \int\left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx = -\log(\sin x) + c$$

$$y = C(x)\sin x$$

$$\frac{d}{dx}C(x) = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}C(x) = \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx = 2\log(\sin x) + C$$

$$y = C(x)\sin(x)$$

$$\cancel{y(x) = \sin x\,(x + C)}$$