Колоквіум

① Знайти $u \in V$, таку, що
$$a(u, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V,$$
де $a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x)\, dx +$
$$+ \int_0^1 u'(x) v(x)\, dx + \int_0^1 u(x) v(x)\, dx,$$
$$\langle l, v \rangle := \int_0^1 x\, v(x)\, dx$$

② $\forall u, v \in V$:

Треба знайти $\alpha, \beta > 0$ такі, що
$$|a(u, v)| \le M \|u\|_1 \|v\|_1, \quad \forall u, v \in V$$
та
$$\alpha \|v\|_1^2 \le a(v, u) \le \beta \|v\|_1^2, \quad \forall v \in V$$

За нерівн. Коші – Буняковського:
$$|a(u, v)| = \left| \int_0^1 u'(x) v'(x)\, dx + \int_0^1 u'(x) v(x)\, dx + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 u(x) v(x)\, dx \right| \le \left| \int_0^1 u'(x) v'(x)\, dx \right| +$$
$$\left| \int_0^1 u'(x) v(x)\, dx \right| + \left| \int_0^1 u(x) v(x)\, dx \right|$$

$$|a(u,v)| \leq \sqrt{2}\left(\|u\|_1 + \|u'\|_1\right)\left(\|v\|_1 +\right.$$
$$\left.+ \|v'\|_1\right) \leq \sqrt{2}\left(\|u\|_1 + \sqrt{2}\,\|u\|_2\right)\left(\|v\|_1 +\right.$$
$$\left.+ \sqrt{2}\,\|v\|_2\right) \leq 2\sqrt{2}\left(\|u\|_1^2 + \|u\|_1\,\|u\|_2 +\right.$$
$$\left.+ \|u\|_2^2\right)^{1/2}\left(\|v\|_1^2 + \|v\|_1\,\|v\|_2 + \|v\|_2^2\right)^{1/2}$$
$$\leq 2\sqrt{2}\left(\|u\|_1^2 + \|u\|_2^2\right)^{1/2}\left(\|v\|_1^2 + \|v\|_2^2\right)^{1/2}$$
$$\leq 2\sqrt{2}\left(\|u\|_1^2 + \|u'\|_1^2\right)^{1/2}\left(\|v\|_1^2 + \|v'\|_2^2\right)^{1/2}$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 u^2(x)\,dx + \int_0^1 u'^2(x)\,dx\right)^{1/2} \cdot$$
$$\cdot\left(\int_0^1 v^2(x)\,dx + \int_0^1 v'^2(x)\,dx\right)^{1/2} =$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 u^2(x)\,dx + \int_0^1 u'^2(x)\,dx\right)^{1/2} \cdot$$
$$\cdot\left(\int_0^1 v^2(x)\,dx + \int_0^1 v'^2(x)\,dx\right)^{1/2} =$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\|u\|_H^2\right)^{1/2}\left(\|v\|_H^2\right)^{1/2} =$$
$$= 2\sqrt{2}\,\|u\|_H\,\|v\|_H$$

$$\|v\|_1^2 = \int_0^1 v(x) + v'(x)\,dx =$$
$$= \int_0^1 v^2(x)\,dx + 2\int_0^1 v(x)v'(x)\,dx +$$
$$+ \int_0^1 v'(x)^2\,dx = \int_0^1 v^2(x)\,dx + \int_0^1 v'(x)^2\,dx -$$
$$\leq 2\left(\int_0^1 v^2(x)\,dx + \int_0^1 (v'(x))^2\,dx\right) =$$
$$= 2\|v\|_1^2$$

Для того, щоб показати V-еліптичність,

③ За Коші - Буняковським:

$|l(v)| = \left| \int_0^1 f(x) v(x)\, dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| \cdot |v(x)|\, dx \leq |f|_1 |v|_1$

Тому l є неперервним зі сталою $L = |f|_1$

④ За Ріссом - Фішером:

$a(u, v) = \int_0^1 (u'(x) v'(x) + u'(x) v(x) + u(x) v(x)\, dx = a(v, u)$

$a(u, v) = \int_0^1 (v'(x))^2 + (v'(x) + v(x))^2 + (v(x))^2\, dx > 0$

Білінійна форма додатно визначена, тому задача має існування розв'язку

(6) За Коші - Буняковським:

$$|a(u-u_h, u-u_h)| \leq \|a(u-u_h, \cdot)\| \cdot$$
$$\cdot \|V'\| \|u-u_h\|_V$$

$$a(u-u_h, u-u_h) = a(u,u) - 2a(u, u_h) + a(u_h, u)$$

(5) $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$$\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$u_{hea} = C_1 \cdot \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2 \cdot x} + C_2 \xi \cdot \frac{1 - i\sqrt{3}}{2x}$$

$V_p(x) = ax + b$

$-a + b + ax + b + ax - 1 = x$

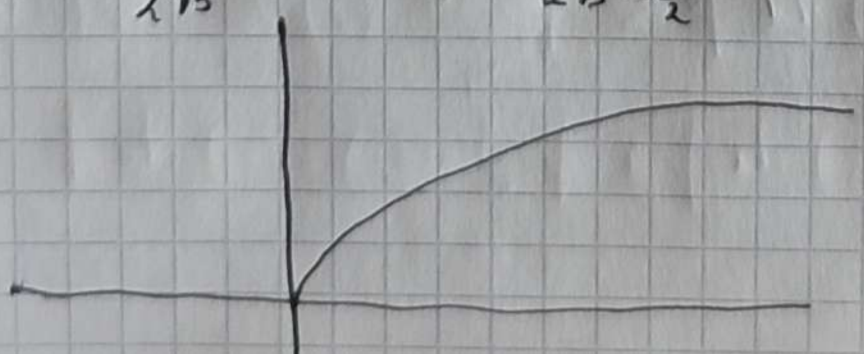
$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}$

$u_{p(x)} = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}$

$u'(0) = 2 [u(0) - 1]$

$V(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{4} = 0$

$C_1 = \frac{-i}{2\sqrt{3}} \qquad C_2 = \frac{i}{2\sqrt{3} - \frac{1}{2}}$



(7) $u(0)=0$, $u(1)=0$

$$N=3 \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Маємо 2 елемента з вузлами

$x_0=0$, $x_1=1/3$, $x_2=2/3$, $x_3=1$

$$u_h(x) = \begin{cases} c_1 + c_2 x, & \text{якщо } x \in [0, 1/3] \\ c_3 + c_4 x, & \text{якщо } x \in [1/3, 1] \end{cases}$$

*

$N=6$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}$$

* $N=3$

$$\|u_h\|_1 = \int_0^1 |u_h(x)|\,dx = \int_0^1 (-1{,}5x^2 + 2x)\,dx = \frac{11}{12}$$

$$\|u-u_h\|_1 = \int_0^1 |u(x) - u_h(x)|\,dx = \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right| dx = \frac{1}{12}$$

$\underline{N = 6}$

$||u_n||_1 \approx 0,4491$

$||u - u_n|| \approx$

$\underline{N = 12}$

$$||u_n||_1 = \sqrt{h} \sum_{1}^{N-1} u_i$$

$$||u_n||_1 = \sqrt{\frac{1}{12}} \sum_{1}^{11} u_i$$

$$||u_{n/2} - u_n||_1 = \sqrt{\frac{1}{24}} \sum_{1}^{5} |u_{i_2} - u_i)$$