Root Locus Technique

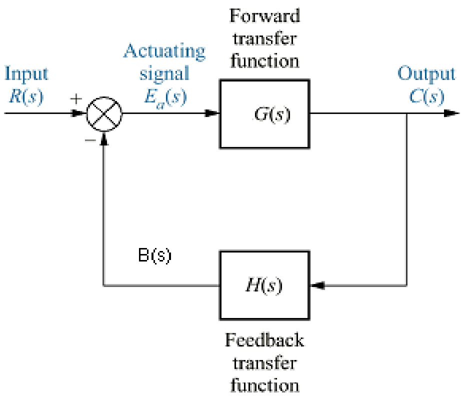
Root locus เป็นวิธีการการนำเสนอโพลของระบบปิด(closed-loop pole) ในรูปแบบกราฟฟิก เมื่อมีการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ในระบบนั้น Root locus เป็นวิธีการที่มีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์และออกแบบความเสถียรภาพและการตอบสนองชั่วขณะ(transient response) เนื่องจากระบบควบคุมแบบป้อนกลับนั้นยากในการทำความเข้าใจถึงคุณภาพของระบบและต้องใช้คณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนมาก ดังนั้นการแสดงเส้นทางเดินรากในรูปแบบกราฟฟิกช่วยอธิบายถึงสมรรถนะโดยคร่าวๆ ของระบบและใช้ในการวิเคราะห์และออกแบบความเสถียรภาพและการตอบสนองชั่วขณะ(transient response)

เส้นทางเดินรากสามารถใช้ทำการวิเคราะห์คุณภาพหรือสมรรถนะโดยคร่าวๆ ของระบบเมื่อพารามิเตอร์ใดๆ มีการเปลี่ยนแปลง ตัวอย่างเช่น ผลของการเปลี่ยนแปลงเกนต่อเปอร์เซนต์ของ Overshoot, setting time และค่าเวลาสูงสุด(Peak time) สามารถที่จะแสดงให้เห็นได้อย่างชัดเจน

เส้นทางเดินรากจะสามารถแสดงกราฟฟิกของความเสถียรของระบบ ทำให้เราสามารถทราบขอบเขตความเสถียร ขอบเขตที่ไม่เสถียร และเงื่อนไขที่เป็นสาเหตุให้ระบบอยู่สถานะภาพการแกว่งไม่หยุด(Oscillation) ได้อย่างชัดเจน

ปัญหาของระบบควบคุม(The Control System Problem)

โพลในระบบเปิดสามารถหาได้ง่ายและไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเกนของระบบเปลี่ยนแปลง ส่วนโพลของระบบปิดนั้นหาได้ยากและยิ่งไปกว่านั้นโพลในลูปปิดเปลี่ยนแปลงเมื่อเกนในระบบเปลี่ยนแปลง



รูปที่ 1

ลักษณะของระบบควบคุมแบบป้อนกลับได้แสดงในรูปที่ 1 ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันของระบบเปิด(Open-loop transfer function) คือ KG(s)H(s) เราสามารถหาโพลของ KG(s)H(s) ได้ทันทีเมื่อระบบประกอบด้วยระบบอันดับหนึ่งหรือสองเชื่อมต่อกันแบบ cascade และเราสามารถที่จะเปลี่ยนค่า K ได้ โดยไม่มีผลต่อตำแหน่งของโพลของ KG(s)H(s) ตัวอย่างเช่น G(s) = (s+1)/[s(s+2)] และ H(s) = (s+3)/(s+4) ตำแหน่งโพลของ KG(s)H(s) คือ 0, -2 และ −4 ตำแหน่งของซีโร่ ของ KG(s)H(s) คือ −1 และ −3 ถ้าเป็นระบบปิด T(s) = KG(s)/[1+G(s)H(s)] =

$K(s+1)(s+4)/[s^3+(6+K)s^2+3K]$ ดังนั้นจะเห็นว่า ซีโร่ของ T(s) จะประกอบด้วยซีโร่ของ G(s) ด้วย และโพลของ H(s) ตำแหน่งโพลของ T(s) ไม่สามารถหาได้ทันทีและค่า K ทำให้โพลของระบบปิด(T(s)) เปลี่ยนไป เนื่องจากการตอบสนองชั่วขณะและความเสถียรของระบบขึ้นอยู่กับโพลของระบบปิด เพื่อทำการตรวจสอบสมรรถนะของระบบเราต้องทำการหาค่ารากของส่วนสำหรับค่า K ต่างๆ เส้นทางเดินรากจะสามารถแสดงให้เห็นถึงค่าของโพลที่เปลี่ยนไปในรูปกราฟฟิก เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่า K ได้อย่างชัดเจน

แนวคิดของการวิเคราะห์ทางเดินราก

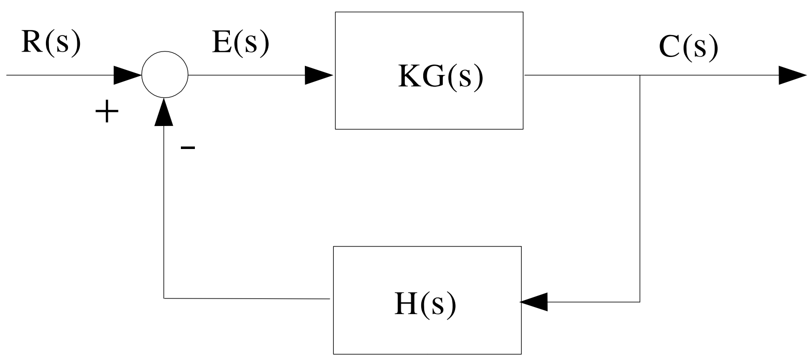
เส้นทางเดินของรากของสมการคุณลักษณะ(Charecteristic equation) หรือการเปลี่ยนแปลงของโพลของระบบปิดจะพิจารณาจากการเปลี่ยนอัตราการขยาย (Gain, K) ของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเปิดจากค่าเริ่มต้น K=0 จนถึงค่าสุดท้ายที่ $K=\infty$ การวิเคราะห์ทางเดินของรากเป็นวิธีที่จะทราบตำแหน่งของโพล และตำแหน่งของซีโร่ของระบบปิดจากสมการคุณลักษณะของระบบเปิดในระนาบเอส(s-plane)

นิยามของเส้นทางเดินราก(Defining the Root Locus)

จากบล็อกไดอะแกรมในรูปที่ 1 ฟังก์ชันถ่ายโอนแบบปิด(Closed-loop Transfer function, T(s)) คือ

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad \text{-- (1)}$$

ฟังก์ชั่นถ่ายโอนแบบเปิด(Open-loop transfer function) คือ G(s)H(s) และสมการคุณลักษณะ (Charecteristic equation) คือ 1+G(s)H(s) = 0



รูปที่ 2

ดังนั้นระบบปิดในรูปที่ 2 จะมี closed-loop transfer function คือ

$$T(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)}$$

สมการคุณลักษณะของระบบคือ

$$1+KG(s)H(s) = 0$$

เมื่อ K เป็นอัตราขยาย จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$K.G(s)H(s) = -1$$

เนื่องจากทรานสเฟอร์ฟังก์ชันเป็นตัวแปรเชิงซ้อน จากสมการจะได้ว่าขนาดของ KG(s)H(s) = 1 และมุมมีค่าเท่ากับ 180 องศา เมื่อพิจารณาเฉพาะขนาด(gain) จะได้

$$|K|\ |G(s)H(s)| = 1$$

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{|K|}$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะมุม(phase) จะได้ว่า

$$\measuredangle KG(s)H(s) = 180+k360$$
$$= (2K+1)180 \qquad \text{เมื่อ} \quad 0 < K < \infty$$

การร่างเส้นทางเดินของราก(sketching the root locus)

1 จำนวนเส้นทางเดินของราก(Number of branch)

จำนวนของเส้นทางเดินของรากจะมีค่าเท่ากับจำนวนโพลของระบบเปิด(Open-loop poles) พิจารณารูปที่ 2 ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันของระบบเปิดคือ KG(s)H(s) ดังนั้นจำนวนของเส้นทางเดินของรากจะมีค่าเท่ากับจำนวนโพลของทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน G(s)H(s)

2 สมมาตรของเส้นทางเดินของราก(Symmetry)

เส้นทางเดินของรากจะสมมาตรกับแกนจริง(The root locus is symmetrical about the real axis)

3 เส้นทางเดินของรากบนแกนจริง(Real-axis segments)

บนแกนจริงเมื่อ K>0 เส้นทางเดินของรากจะอยู่ทางด้านซ้ายของจำนวนคี่ของจำนวนโพลและซีโรที่มีค่าจำกัดของระบบเปิด(On the real axis, for K>0, the root locus exists to the left of an odd number of real-axis finite open-loop poles and/or finite open-loop zeros.)

4 จุดเริมต้นและจุดสิ้นสุดของเส้นทางเดินของราก(Starting and ending points)

เส้นทางเดินของรากจะเริ่มจากโพลของทรานสเฟอร์ฟังก์ชันในระบบเปิด G(s)H(s) และสิ้นสุดที่ตำแหน่งซีโร่ของทรานสเฟอร์ฟังก์ชันในระบบเปิด G(s)H(s) (The root locus begins at the finite and infinite poles of G(s)H(s) and ends at the finite and infinite zeros of G(s)H(s).) เราสามารถแสดงให้เห็นได้ดังนี้

กำหนดให้

$$G(s)=\frac{N_G(s)}{D_G(s)} \qquad H(s)=\frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันของระบบปิดแสดงได้โดย

$$T(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)}=\frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s)+KN_G(s)N_H(s)}$$

เมื่อ K เข้าใกล้ 0 (small gain)

$$T(s)\approx\frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s)+\epsilon}$$

จะสังเกตุเห็นว่าโพลของระบบปิดมีค่าเท่ากับโพลของระบบเปิดคือ $D_G(s)D_H(s)$ สรุปได้ว่าจุดเริ่มต้นของเส้นทางเดินของรากอยู่ที่โพลของระบบเปิดคือ $D_G(s)D_H(s)$

เมื่อ K เข้าใกล้อนันต์ (high gain)

$$T(s)\approx\frac{KN_G(s)D_H(s)}{\epsilon+KN_G(s)N_H(s)}$$

จะสังเกตุเห็นว่าโพลของระบบปิดมีค่าเท่ากับซีโรของระบบเปิดคือ $N_G(s)N_H(s)$ สรุปได้ว่าจุดเริ่มต้นของเส้นทางเดินของรากอยู่ที่ซีโรของระบบเปิดคือ $N_G(s)N_H(s)$

5 ลักษณะของเส้นทางเดินของรากที่อนันต์(Behavior at infinity)

- If the function approches infinity as s approches infinity, then the function has a pole at infinity.
- If the function approches zero as s approches infinity, then the function has a zero at infinity.
- Every function of s has an equal number of poles and zeros.

The root locus approches staight lines as the locus approches infinity. Further, the equation of the asymptotes is given by the real-axis intercept, σa, and ,θa, as follows :

$$\sigma_a=\frac{\sum finite\ poles-\sum finite\ zeros}{Number\ of\ finite\ poles-Number\ of\ finite\ zeros}$$

$$\theta_a=\frac{(2k+1)\pi}{Number\ of\ finite\ poles-Number\ of\ finite\ zeros}$$

$$k=0,\pm 1,\pm 2,...$$

6 จุดแยกออกจากแกนจริงและจุดเข้าหาแกนจริงของเส้นทางเดินของราก(Real-axis Breakaway and Breakin points)

Breakaway and Breakin points satisty the relation ship

$$\sum_{1}^{m} \frac{1}{\sigma + z_i} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sigma + p_i}$$

where z_i and p_i are the negative of the zeros and poles values of G(s)H(s).

7 จุดตัดแกนจินตภาพของเส้นทางเดินของราก(The jω-axis crossing)

ในบางกรณีขณะเมื่อขนาด K เพิ่มขึ้น เส้นทางเดินของรากอาจจะตัดแกนจินตภาพซึ่งหมายความว่า ค่าอัตราการขยาย K จะมีค่าสูงสุดที่ตำแหน่งของรากอยู่บนแกนจินตภาพ เพราะถ้าค่าของ K มากกว่าค่านี้จะทำให้ตำแหน่งของรากอยู่ทางด้านขวามือของระนาบ s ซึ่งทำให้ระบบไม่เสถียร ดังนั้นจุดตัดแกนจินตภาพของเส้นทางของรากก็คือจุดที่ค่าของ K มีค่าสูงสุดทีระบบยังคงอยู่ในสภาวะเสถียร ค่าของ K และ ω สูงสุดนั้น สามารถหาได้ 2 วิธีคือ

7.1 แทนค่า s=jω ในสมการคุณลักษณะ(Characteristic equation) จากนั้นให้ส่วนจริงและส่วนจินตภาพมีค่าเป็นศูนย์ แก้สมการเพื่อหาค่า K และ ω (Let s=jω in the characteristic equation equate both real part and imaginery part to zero and then solve for ω and K.)

7.2 นำสมการคุณลักษณะไปสร้างเป็นตารางเร้าท์เฮอร์วิธ แล้วหาค่า K เมื่อแถว s เป็น 0 แก้สมการเพื่อหาค่า K