Chapter 7

Stability

Outline

1 Definition

2 Routh-Herwitz criterion

Definition

- Limit to linear, time invariant systems.
  - $c(t) = c_{forced}(t) + c_{natural}(t)$

1. If natural response approaches zero as time approaches infinity, system is stable.

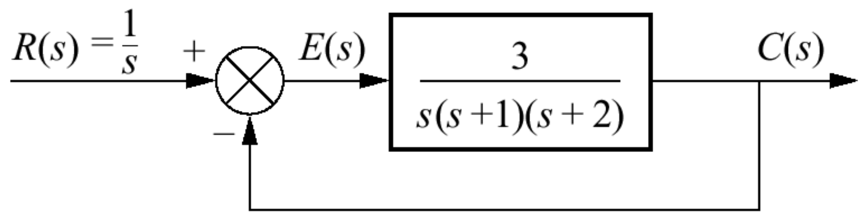
2. If natural response approaches infinity as time approaches infinity system is unstable.

If natural response neither decays nor grows, but remain constant or oscillates, system is marginal stable.

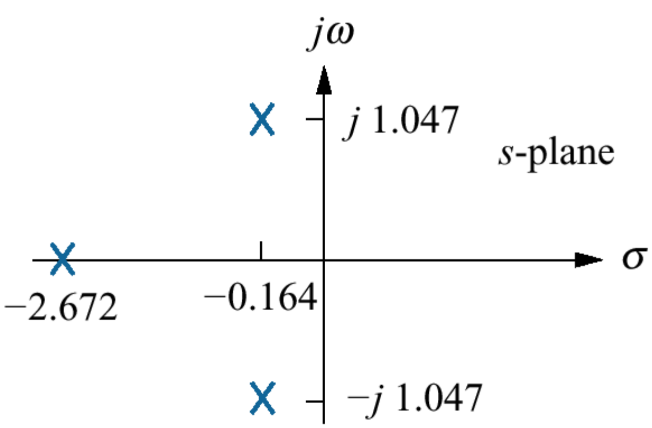
Using total response

1. A system is stable if every bounded input yields a bounded output.

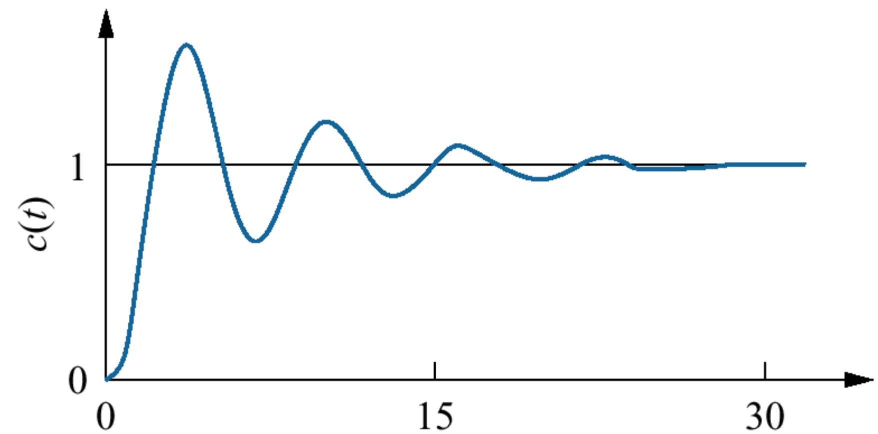
2. A system is unstable if any bounded input yields an unbounded output.



Stable system

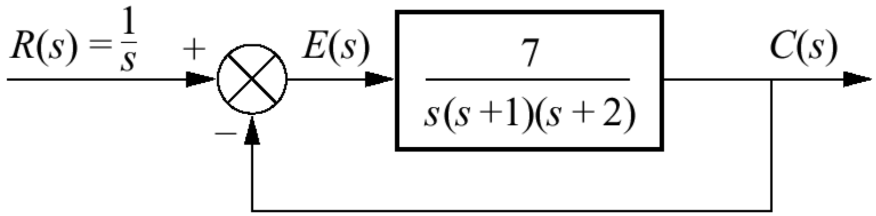


Stable system's closed-loop poles (not to scale)

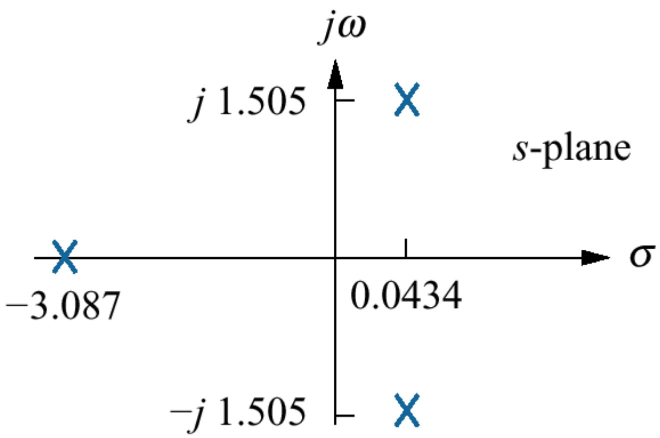


Time (seconds)

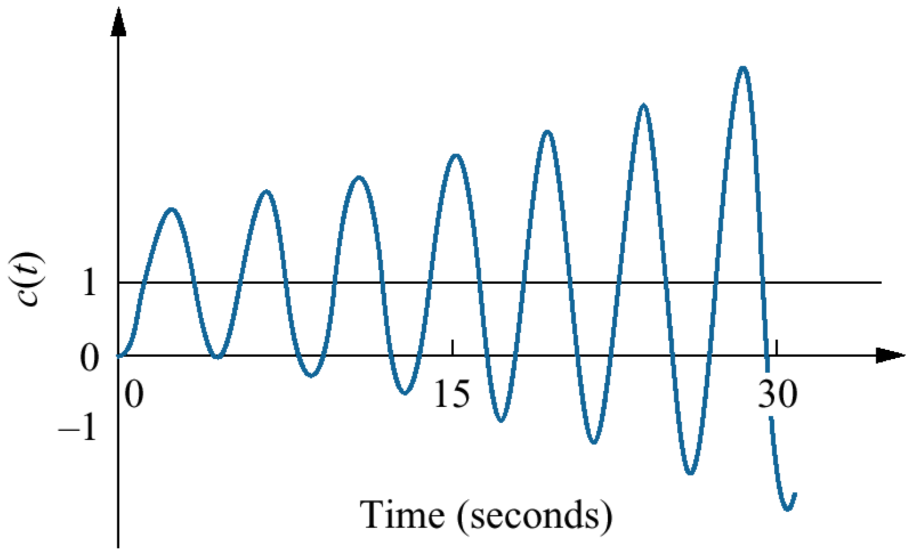
Closed-loop poles and responses for stable system



Unstable system

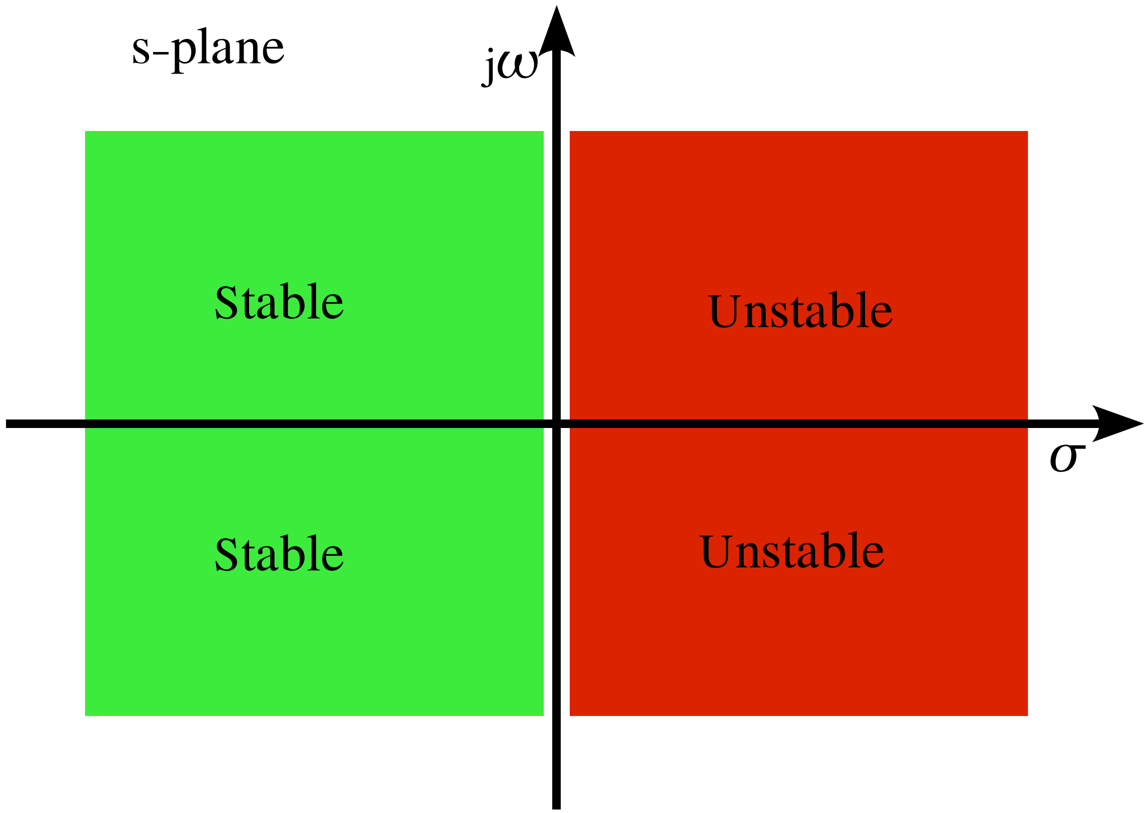


Unstable system's
closed-loop poles
(not to scale)



Closed-loop poles and response unstable system

Regions of stable and Unstable



Definitions

- A symptotically stable if and only if all the roots of the characteristic equation lie in the left half s-plane.
- Marginally stable if some of the roots occur as a single root at the region in the s-plane or as single paires of roots at points on the jω-axis and the remaining roots are in the left half s-plane.
- Unstable if one or more roots occur in the right half s-plane or if multiple roots or pairs of roots occur at a point on the jω-axis.

Routh-Hurwitz Criterion

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Characteristic equation

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Routh-Hurwitz Criterion

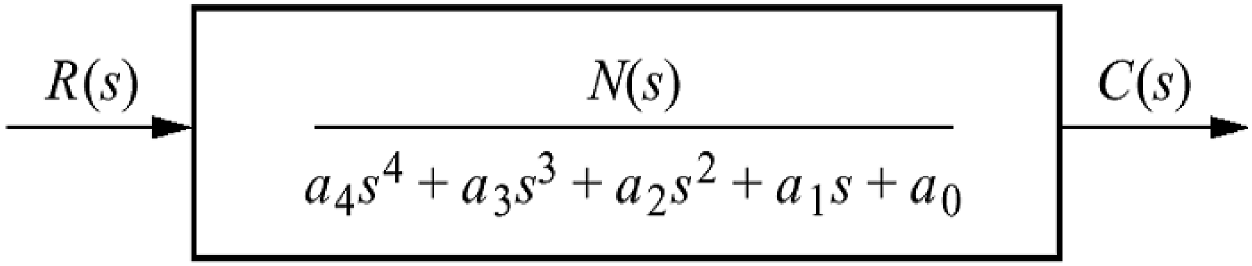
Using this method, we can tell how many closed-loop system poles are in the left half-plane, in the right half-plane, and on the $j\omega$ axis.

This method requires two steps :

1. Generate a data table called a Routh table.

2. Interpret the Routh table

Example (Nise page 329)



s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

The Routh Table

The general form of Routh Table uses the coefficients of the characteristic polynomial in the equation to arrange in the first and second rows. Assuming for the a_{n-1} is non zero, then the other values can calculate.

Table General form of routh table

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	---
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	---
s^{n-2}	$p_{n-2,1}$	$p_{n-2,2}$	$p_{n-2,3}$	---
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
s^2	$p_{2,1}$			
$p_{2,2}$ s^1				
$p_{1,1}$ s^0				

$p_{0,1}$

$$P_{n-2,1} = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{-(a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2})}{a_{n-1}}$$

$$P_{n-2,1} = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{-(a_n a_{n-5} - a_{n-1} a_{n-4})}{a_{n-1}}$$

Examples

1. $F(s) = s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12\ s + 4$

2. $F(s) = s^5 - 4s^4 + 4s^3 + 9s^2 - 12s + 4$

The Routh Table of example 1

s^4	1	13	4
s^3	6	12	
s^2	11	4	
s^1	9.8		
s^0	4		

The Routh Table of example 2.

s^5	1	4	-12
s^4	-4	9	4
s^3	6.25	-11	
s^2	1.96	4	
s^1	-23.76		
s^1	4		

Interpret of stability from Routh table

การตรวจสอบความเสถียรจากตารางของ Routh ได้โดยการตรวจสอบที่คอลัมแรกของสัมประสิทธิ์หรือคอลัมที่ 2 ของตารางของ Routh ถ้าค่าในคอลัมนี้ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายแสดงว่าไม่มีโพลอยู่ทางขวาของ s-plane ถ้าค่าในคอลัมนี้มีการเปลี่ยนเครื่องหมายแสดงว่ามีโพลอยู่ทางขวาของ s-plane โดยที่จำนวน ครั้งของการเปลี่ยนเครื่องหมายจะบอกถึงจำนวนโพลที่อยู่ทางขวาของ s-plane

Routh-Hurwitz Criterion : Special case

Zero only in the first colume

เมื่อค่าในคอลัมภ์แรกของแถวใดแถวหนึ่งเป็นศูนย์ จะทำให้การคำนวณต้องหารด้วยศูนย์ เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหานี้เราสามารถทำได้โดยแทนเลขที่เป็นศูนย์ด้วยเลขบวกที่มีค่าน้อยๆ ε(epsilon) ซึ่งเป็นค่าที่ประมาณว่าใกล้ 0 มาก ซึ่งจะเป็นค่าบวกหรือลบก็แล้วแต่เราจะสมมุติ

Example 6.2 (Nise)

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$\cancel{0}\ \epsilon$	$\frac{7}{2}$	0
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	0
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	0	0
s^0	3	0	0

Label	First Column	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
s^5	1	$+$	$+$
s^4	2	$+$	$+$
s^3	$\cancel{0}\ \ \epsilon$	$+$	$-$
s^2	$\dfrac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	$-$	$+$
s^1	$\dfrac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	$+$	$+$
s^0	3	$+$	$+$

Entire row is zero

ในกรณีเมื่อนำไปสร้างเป็นตารางแล้วการคำนวณเกิดเป็นศูนย์ทั้งแถว เรียกว่าเกิดตารางเร้าท์เบรกดาวน์ การแก้ไขโดยนำค่าแถวแนวนอนที่อยู่บนแถวที่เป็นศูนย์มาสร้างเป็นสมการช่วย(Auxiliary Equation) เพื่อนำสมการนั้นไปทำการดิฟเฟอร์เรนเชียลเทียบกับ s แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้จากการดิฟเฟอร์เรนเชียลมาแทนในแถวที่เป็นศูนย์และใช้วิธีการหาค่าตารางเร้าท์ต่อไป

Example 6.3 (Nise)

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

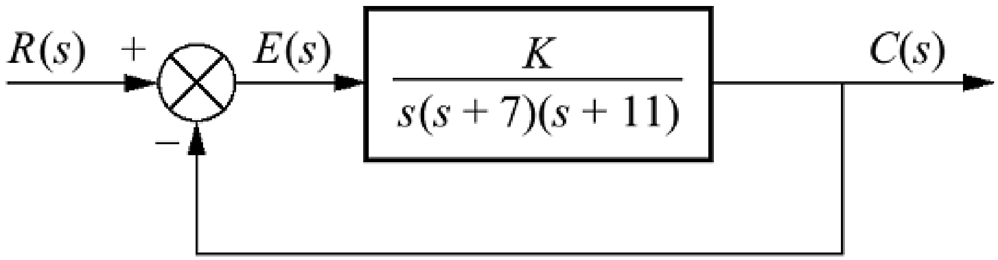
$$P(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0$$

s^5	1	6	8
s^4	$\cancel{7}$ 1	$\cancel{42}$ 6	$\cancel{56}$ 8
s^3	$\cancel{0}$ $\cancel{4}$ 1	$\cancel{0}$ $\cancel{12}$ 3	$\cancel{0}$ $\cancel{0}$ 0
s^2	3	8	0
s^1	$\frac{1}{3}$	0	0
s^0	8	0	0

Stability design via Routh-Hurwitz

Example 6.9 (Nise)



s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

$$P(s) = 18s^2 + 1386$$

$$\frac{d\,p(s)}{dt} = 36s + 0$$

s^3	1	77
s^2	18	1386
s^1	$\cancel{0}$ 36	
s^0	1386	

Stability in State-Space

การหาความเสถียรใน State-Space โดยใช้การวิเคราะห์ใน s -plane สามารถทำได้โดยการหา Characteristic equation จากสมการ แล้วนำไปสร้างตารางเร้าท์

Characteristic Equation

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$$

Example 6.11 (Nise)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$