Frequency response techinque

ในบทนี้เราจะศึกษาถึงผลการตอบสนองของระบบต่ออินพุตที่เป็นสัญญาณซายน์(sinusoidal) หรือเรียกว่าเป็นการศึกษาในโดเมนความถี่(Frequency domain) การหาผลตอบสนองของระบบในโดเมนความถี่ จะทำการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ของสัญญาณอินพุตในช่วงความถี่หนึ่ง แล้วนำผลตอบสนองของระบบในช่วงความถี่นั้นมาทำการวิเคราะห์ต่อไป

ประโยชน์ของการศึกษาวิธีหาผลตอบสนองในโดเมนความถี่มีดังนี้

1 การตรวจสอบหาเสถียรภาพของระบบปิดไม่จำเป็นต้องดูตำแหน่งโพลของระบบปิด หรือแก้สมการคุณลักษณะเพื่อหาตำแหน่งรากของสมการ
2. สามารถตรวจสอบผลตอบสนองต่อความถี่ของระบบได้ง่าย โดยการป้อนสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณซายน์จากเครื่องกำเนิดสัญญาณแล้ว วัดผลการตอบสนองต่อความถี่นั้นของระบบ
3. ระบบควบคุมบางชนิดที่มีความซับซ้อน อาจจะใช้วิธีการตรวจสอบโดยการทดสอบผลตอบสนองต่อความถี่ เพื่อหาฟังก์ชันถ่ายโอน(Transfer function)
4. การหาผลตอบสนองต่อความถี่สามารถ นำมาใช้วิเคราะห์ฟังก์ชันที่ไม่ได้อยู่ในรูปอัตราส่วนได้ เช่น ระบบที่เคลื่อนที่ช้า (transport lag)
5. วิธีหาผลตอบสนองต่อความถี่สามารถใช้กับระบบที่มีลักษณะที่ไม่แน่นอน
6. การออกแบบและวิเคราะห์ผลตอบสนองต่อความถี่สามารถใช้กับระบบที่เป็นไม่เป็นเชิงเส้นได้

หลักสำคัญของการตอบสนองเชิงความถี่(Concept of Frequency Response)

เมื่อให้สัญญาณอินพุตเป็นรูปคลื่นซายน์เข้าไปยังระบบเชิงเส้น(Linear system) ผลการตอบสนองด้านเอาท์พุตที่สภาวะคงตัว จะเป็นสัญญาณซายน์ที่มีความถี่เดียวกับอินพุต แต่มีขนาด (Amplitude, Gain) และมุม (Phase) ที่แตกต่างจากสัญญาณอินพุต ดังแสดงได้ในสไลด์ที่ 3

การวิเคราะห์รูปแบบสมการของการตอบสนองเชิงความถี่

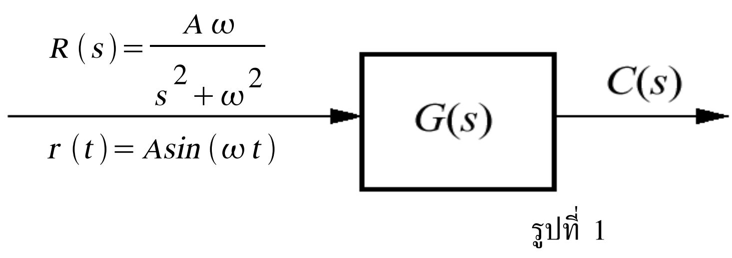
ระบบที่มี G(s) และมีอินพุตเป็นสัญญาณรูปคลื่นซายน์สามารถแสดงให้อยู่ในรูป

$$r(t) = A\cos(\omega t) + jB\sin(\omega t)$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2}\cos[\omega t - \tan^{-1}(B/A)]$$

เราสามารถที่จะแสดงอินพุตได้ในรูปแบบเชิงขั้ว(Polar) $M\measuredangle\phi$ เมื่อ $M = \sqrt{A^2 + B^2}$ และ $\phi = -\tan^{-1}(B/A)$ ในรูปแบบเชิงมุม A-jB หรือในรูปแบบออยเลอร์(Euler) $Me^{j\phi}$

ผลการตอบสนองของระบบในรูปที่ 1 ต่อสัญญาณอินพุตซายน์



รูปที่ 1

$$C(s) = G(s)\, A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{เมื่อ} \quad G(s) = \frac{\prod_{i=1}^{M} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{N} (s + p_j)}$$

$$G(j\omega) = \frac{\prod_{i=1}^{M} (z_i + j\omega)}{\prod_{j=1}^{N} (p_j + j\omega)} = |G(j\omega)|\, \mathrm{e}^{j\phi}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\Im[G(j\omega)]}{\Re[G(j\omega)]} \right)$$

$$\frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} G(s) = \frac{a_1}{s + j\omega} + \frac{a_2}{s - j\omega} + \dots$$

$$a_1 = \left[\frac{\omega A}{s - j\omega} \right]_{(s = -j\omega)} = \frac{-A}{2j} G(-j\omega)$$

$$a_2 = \left[\frac{\omega A}{s + j\omega} \right]_{(s = j\omega)} = \frac{A}{2j} G(j\omega)$$

$$C(s) = -\frac{A}{2j} \frac{1}{s + j\omega} G(-j\omega) + \frac{A}{2j} \frac{1}{s - j\omega} G(j\omega)$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\, \mathrm{e}^{j\phi}$$

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|\, \mathrm{e}^{-j\phi} = |G(j\omega)|\, \mathrm{e}^{-j\phi}$$

$$c(t) = A\, |G(j\omega)| \left(\frac{\mathrm{e}^{j(\omega t + \phi)} - \mathrm{e}^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \right) = A\, |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

จากสมการจะเห็นได้ว่าเอาต์พุตของระบบเชิงเส้น (Linear system) จะมีขนาด(Gain) และมุมเฟสที่เปลี่ยนไปจากอินพุต ดังนั้นการศึกษาถึงการตอบสนองของระบบในโดเมนความถี่ จะเป็นศึกษาขนาดและมุมของเอาต์พุตระบบเมื่อขนาดของสัญญาณอินพุตซายน์คงที่และความถี่ของสัญญาณเปลี่ยนไป

Bode diagram

เป็นการแยกพล็อดขนาด(magnitude or gain) ในสเกล log และ มุม(phase) กับความถี่ในสเกล log(log ω) โดยแกนตั้งเป็นขนาดมีหน่วยเป็นดีบี(dB=20log|G(s)|) และมุมเฟสมีหน่วยเป็น degree หรือ radian และแกนนอนเป็น log ω บนกระดาษ semi-log นักศึกษาสามารถดูวิธีการคำนวณค่า dB และมุมจากทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่น(Transer function) (สไลด์ที่ 9-12)

กำหนดให้

$$G(s)=\frac{K}{s^k}\frac{\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{N}(s+p_j)}$$

Gain diagram

$$dB = 20\log|G(j\omega)|$$

$$|G(j\omega)|=\frac{K\,|j\omega+z_1|\ldots|j\omega+z_M|}{|(j\omega)^k|\,|j\omega+p_1|\ldots|j\omega+p_N|}$$

$$\begin{aligned} dB &= 20log(K)+20log\sqrt{z_1^2+\omega^2}+\ldots+20log\sqrt{z_M^2+\omega^2} \\ &\quad -20log\,\omega^k-20log\sqrt{p_1^2+\omega^2}-\ldots-20log\sqrt{p_N^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Phase Diagram

$$\begin{aligned} \measuredangle G(j\omega) &= \measuredangle(j\omega+z_1)+\ldots+\measuredangle(j\omega+z_M) \\ &\quad -\measuredangle(j\omega+p_1)-\ldots-\measuredangle(j\omega+p_N) \end{aligned}$$

เมื่อ

$$\phi_1=\measuredangle(s+z_1)=\arctan\left(\frac{j\omega}{z_1}\right) \quad \ldots. \quad \phi_M=\measuredangle(s+z_M)=\arctan\left(\frac{j\omega}{z_M}\right)$$

$$\theta_1=\measuredangle(s+p_1)=\arctan\left(\frac{j\omega}{p_1}\right) \quad \ldots. \quad \theta_N=\measuredangle(s+p_1)=\arctan\left(\frac{j\omega}{p_N}\right)$$

Asymptotic approximation

เราสามารถทำการพล็อต Bode โดยคร่าวๆได้วิธีการพล็อดสามารถดูได้จากสไลด์ที่ 15

$$G(s) = s + a \qquad G(j\omega) = j\omega + a = a\left(j\frac{\omega}{a} + 1\right)$$

low frequency

$\omega \ll$ a G(jω) = a dB = 20 log a

high frequency

$\omega \gg$ a $G(j\omega) = a\left(j\frac{\omega}{a}\right) = \omega \measuredangle 90^{\circ}$ dB = 20 log ω

Bode diagram แสดงไว้ในสไลด์ที่ 15-16

ในสไลด์ที่ 17 แสดง asymptotic approximation ของระบบ

$$G(s) = s$$

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

$$G(s) = s + a$$

$$G(s) = \frac{1}{s + a}$$

หลักการพล็อตเหมือนที่แสดงไว้ด้านบน

Nyquist plot(Polar plot)

เป็นการพล็อตระหว่างขนาดและมุมของ G(jω) บน complex plane(G(jω)-plane) เมื่อ ω เปลี่ยนจาก 0 ถึง ∞ ในการพล็อตจะพล็อตขนาดและมุมพร้อมระบุความถี่ที่ใช้ในการคำนวณดังสไลด์ที่ 28-29

สไลด์ที่ 30 แสดง Nyquist plot ของ G(s) = 1+Ts

สไลด์ที่ 32-33 แสดง Nyquist plot ของ $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ ซึ่งแสดงให้เห็นถึง overshoot ของระบบ

ในกรณีที่ระบบมี integrator 1 ตัว nyquist plot แสดงได้ดังสไลด์ที่ 34 สำหรับระบบทั่วไป เราสามารถแสดง Nyquist plot โดยคร่าวๆได้ดังสไลด์ที่ 36-37

Nyquist Criterion

เป็นการหาความสัมพันธ์ระหว่างความเสถียรของระบบปิด(close loop system) และการตอบสนองต่อความถี่ของระบบเปิด ซึ่งทำให้เราสามารถหาความเสถียรของระบบปิดได้เมื่อเราทราบการตอบสนองต่อความถี่ของระบบเปิด

ในการทำความเข้าใจใน Nyquist Criterion นักศึกษาจะต้องเข้าในความสัมพันธ์ดังนี้

1 pole ของ characteristic equation 1+G(s)H(s) เหมือนกับ pole ของ G(s)H(s) (open-
loop system)

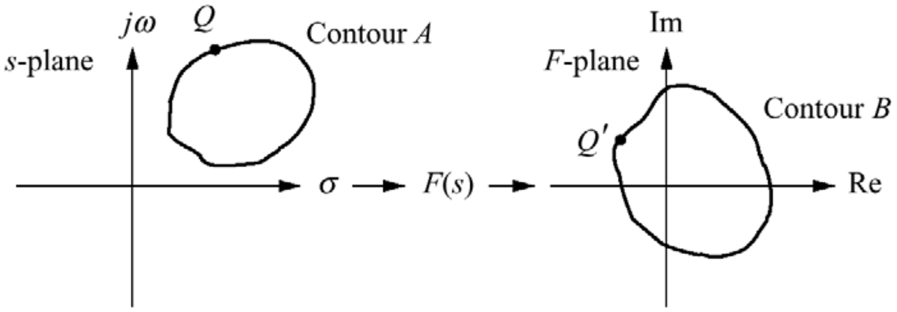
2 zero ของ 1+G(s)H(s) เป็น pole ของ T(s) (close-loop system)

3 Mapping point

ถ้าเรานำเอาจำนวนเชิงซ้อนค่าหนึ่งบน s-plane แทนลงในฟังก์ชั่น F(s) เราจะได้คำตอบเป็นจำนวนเชิงซ้อนค่าหนึ่งใน F($j\omega$)-plane เราเรียกว่า mapping

4 Mapping contour

เป็นการนำเอาแต่ละค่าบน contour A ใน s-plane แทนลงในฟังก์ชั่น F(s) เราจะได้ contour B ใน G(s)-plane ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

หลักการของ Nyquist ได้แสดงไว้ในสไลด์ที่ 44 กฎในการตรวจสอบความเสถียรแสดงไว้ในสไลด์ที่ 48-49

Gain margin and Phase margin

Gain margin, G_m, คือการเปลี่ยนของขนาด(dB) ของระบบแปิด(open-loop system) ที่มุม 180 องศา ที่ทำให้ระบบปิด(close-loop system) ไม่เสถียร

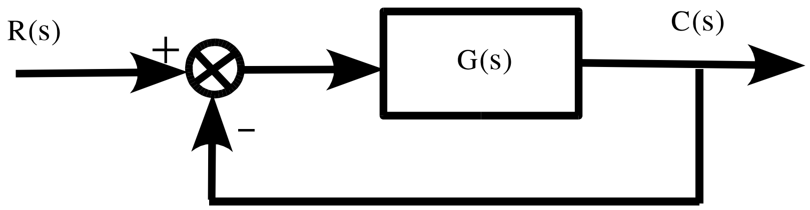
Phase margin, ϕ_M, คือการเปลี่ยนของมุม ของระบบแปิด(open-loop system) ที่ขนาดมีค่า 1 หน่วย ที่ทำให้ระบบปิด(close-loop system) ไม่เสถียร

Relation between Closed-loop and Open-loop frequency response

เราจะเห็นว่าการหาการตอบสนองต่อความถี่ของระบบปิดนั้นไม่ได้ง่าย จากที่ผ่านมาจะเห็นว่าการร่างผลการตอบสนองความถี่ของระบบเปิดสามารถทำได้อย่างรวดเร็ว ถ้าเราสามารถหาความสัมพันธ์ของระบบเปิดกับระบบปิดได้ เราก็จะสามารถร่างผลการตอบสนองของระบบปิดโดยการหาการตอบสนองของระบบเปิดได้

Constant M cycles and Constant N cycles

เป็นการหาความสัมพันธ์ของระบบปิดที่มีการป้อนกลับหนึ่งหน่วย(Unity feedback system) (รูปที่ 3, T(s)) กับระบบเปิด(G(s))



รูปที่ 3

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

จากการพิสูจน์ในสไลด์ที่ 63-66 เราได้ความสัมพันธ์ของระบบปิดบนระบบเปิดในรูปของขนาด (M circle) และมุม(N circle) ซึ่งสามารถนำไปวาดเป็นกราฟบน G-plane ดังสไลด์ที่ 67

Nichols Chart

เป็นการแสดงความสัมพันธ์ของ M circles และ N circles ใหม่ โดยนำเอาขนาดมาพล็อตเป็น dB ซึ่งทำให้เราสามารถใช้หลักการของ bode diagram ในการทำงานได้ ลักษณะของ Nichols chart แสดงไว้ในสไลด์ที่ 69