Stability

ในการออกแบบและวิเคราะห์ระบบควบคุมสิ่งสำคัญที่เราต้องการหาคือความเสถียรของระบบ ในระบบที่ไม่เสถียรเราไม่สามารถออกแบบตัวควบคุมให้มีการตอบสนองชั่วขณะ(Transient response) หรือความผิดพลาดที่สภาวะคงที่(Steady-state error) ตามที่ต้องการได้ ในการศึกษาในบทนี้จะจำกัดอยู่ที่ระบบ linear time-invariant

ความหมายของความเสถียรของระบบนั้นขึ้นกับจุดที่เรามองระบบ ในบทที่ผ่านมาเราได้กล่าวถึงเอาต์พุตของระบบควบคุมเกิดจากผลรวมของการตอบสนอง 2 แบบคือ ผลการตอบสนองโดยธรรมชาติ(Natural Response) กับผลการตอบสนองโดยบังคับ (Force Response)

$$C(t) = C_{forced}(t) + C_{natural}(t) \qquad \_\_\_\_\_ \ (1)$$

เราใช้หลักการตรวจสอบเอาต์พุตเพื่อนิยามความเสถียร(stability) ความไม่เสถียร (instability) และความเสถียรที่ขอบ(marginal stability)

การนิยามความเสถียรสำหรับระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรตามเวลา โดยพิจารณาจากผลการตอบสนองทางธรรมชาติ(Natural response)

1. ระบบจะเป็นระบบที่เสถียรถ้าผลการตอบสนองทางธรรมชาติมีค่าประมาณศูนย์ เมื่อเวลาเข้าใกล้อนันต์
2. ระบบจะเป็นระบบที่ไม่เสถียรถ้าผลการตอบสนองทางธรรมชาติมีค่าประมาณอนันต์ ที่เวลาเข้าใกล้อนันต์
3. ระบบจะเป็นระบบที่เสถียรแบบขอบ ถ้าผลการตอบสนองทางธรรมชาติมีค่าคงที่

การนิยามความเสถียรสำหรับระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรตามเวลา โดยพิจารณาจากเอาต์พุตเมื่อให้อินพุตที่มีขอบเขตจำกัด

1. ระบบจะเป็นระบบที่เสถียร ถ้าทุกๆอินพุต(r(t)) ที่มีขอบเขตจำกัดถูกป้อนเข้าไปในระบบแล้วให้เอาต์พุต(c(t)) ที่มีขอบเขตจำกัดออกมา
2. ระบบจะเป็นระบบที่ไม่เสถียร ถ้าทุกๆอินพุตที่มีขอบเขตจำกัดป้อนเข้าไปในระบบแล้วให้เอาต์พุตออกมาเป็นแบบไม่มีขอบเขต

ใน time domain เราจะเรียกว่าระบบเสถียร(stable) เมื่อเราให้อินพุต(r(t)) ที่มีค่าจำกัดแก่ระบบที่เราต้องการศึกษาและระบบนั้นให้เอาต์พุต(c(t)) ที่มีค่าจำกัดออกมาเมื่อเวลาเข้าใกล้ infinity เราจะเรียกว่าระบบไม่เสถียร(unstable) เมื่อเราให้อินพุตที่จำกัดที่มีค่าจำกัดแก่ระบบที่เราต้องการศึกษาและระบบนั้นให้เอาต์พุตที่มีค่าเป็น infinity เมื่อเวลาเข้าใกล้ infinity

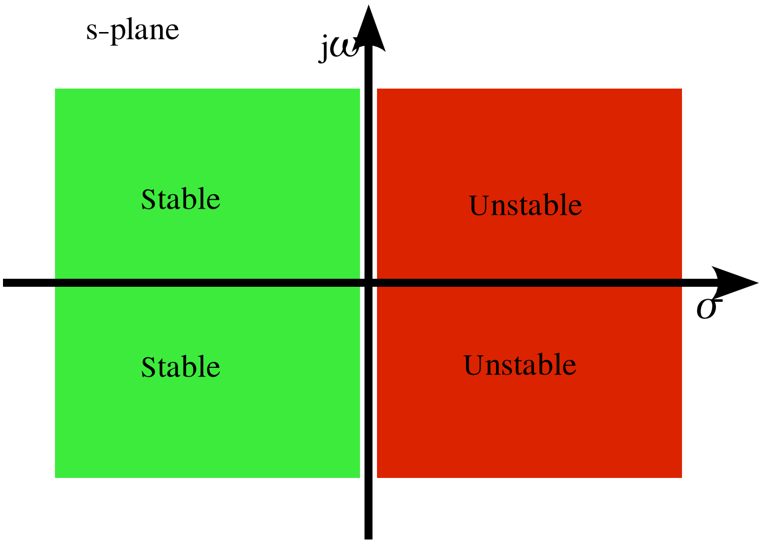
ใน frequency domain เราสามารถตรวจสอบความเสถียรได้จาก transfer function

$$G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \qquad \_\_\_\_\_ \ (2)$$

การพิจารณาความเสถียรของระบบควบคุมแบบป้อนกลับนั้นจะพิจาณาจากตำแหน่งโพลของระบบควบคุมแบบปิดที่วางอยู่ในระนาบเอส (s-plane) นั่นคือ

1. ถ้าตำแหน่งโพลอยู่ครึ่งขวาของ s-plane จำทำให้ผลตอบสนองชั่วขณะ(transient response) เพิ่มขึ้นหรือเกิดการแกว่ง(Oscilate) ตามค่าของเวลาที่เพิ่มขึ้น หมายความว่าระบบไม่เสถียร (unstable)
2. ถ้าตำแหน่งโพลอยู่ครึ่งซ้ายของ s-plane แล้วผลตอบสนองชั่วขณะ(transient response) จะเข้าสู่สภาวะคงตัว และระบบจะเสถียร
3. ถ้าตำแหน่งโพลอยู่บนแกนจินตภาพ ($j\omega$) จะทำให้ผลตอบสนอง(response) เกิดการแกว่ง(oscilate) ด้วยขนาด(amplitude) คงที่ แต่ในระบบจริงอาจจะมีสัญญาณรบกวนและทำให้เกิดการแกว่งเพิ่มของขนาด ดังนั้นในระบบควบคุมจึงไม่ควรมีโพลของลูปปิดอยู่บนแกนจินตภาพ

เราสามารถแสดงถึงขอบเขตของโพลของระบบที่ทำให้ระบบเสถียรคือด้านซ้ายของแกน $j\omega$ และไม่เสถียรคือด้านขวาของแกน $j\omega$ ได้ดังรูปด้านล่าง



รูปแสดงขอบเขตของตำแหน่งโพลที่ทำให้ระบบเสถียรและไม่เสถียร

เมื่อ transfer function อยู่ในรูป polynomial

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad \text{-----} \quad (3)$$

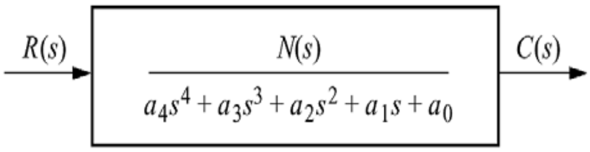
Characteristic equation คือสมการที่แสดงคุณลักษณะของระบบ ซึ่งก็คือส่วนของ Transfer function, G(s) เรากำหนด characteristic equation ดังนี้

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 \qquad \text{-----} \ (4)$$

การตรวจสอบหาความเสถียรของระบบที่แสดงอยู่ในรูป polynomial โดยวิธีที่กล่าวมาด้าน

บน เกิดความไม่สะดวกเนื่องจากต้องทำการหาค่ารากของ characteristic equation ถ้ากำลังของ characteristic equation สูงการหาค่ารากยิ่งยากมากขึ้น จากปัญหาดังที่กล่าวมาเราสามารถหาความเสถียรของระบบได้จากวิธีการของ Routh-Hurwitz วิธีการนี้จะบอกได้ว่ามีจำนวน pole ของระบบที่มีส่วนจริงเป็นบวกหรืออยู่อยู่ทางขวาของแกน $j\omega$ ใน s-domain จำนวนกี่ pole โดยไม่จำเป็นต้องทำการหาค่ารากของ characteristic equation วิธีการของ Routh-Hurwitz นี้ไม่สามารถหาค่าของ pole ได้เพียงสามารถบอกได้ว่ามีจำนวน pole ที่มีส่วนจริงเป็นบวกจำนวนกี่ pole ส่วนจริงเป็นลบจำนวนกี่ pole และอยู่บนแกน $j\omega$ ซึ่งเมื่อเราพบว่าระบบมี pole ที่มีส่วนจริงเป็นบวกเราสามารถบอกได้ว่าระบบนั้นไม่เสถียร

การสร้างตารางของ Routh สามารถศึกษาได้จากตัวอย่าง (Nise) สมมุติให้ระบบปิดมีทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่นดังรูปด้านล่าง



Characteristic equation ของระบบคือ

$$F(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

การสร้างตารางของเร้าท์เริ่มต้นโดยการพิจารณาสมการคุณลักษณะ(characteristic equation) ของระบบ ทำการใส่ตัวสัมประสิทธ์ต่างเข้าไปในตารางของเร้าท์ดังนี้

ขั้นตอนในการเริ่มต้นสร้างตาราง Routh

1 ในคอลัมแรกใส่ค่า s กำลังสูงสุดของ characteristic equation ในแถวแรก แถวที่ 2 ใส่ค่า s ยกกำลังลดลง 1 และในแถวถัดๆ ไปใส่ค่า s ยกกำลังลดลงทีละ 1 เรื่อยไปจนถึง s ยกกำลังศูนย์

2 ใส่ค่าสัมประสิทธ์ของ s กำลังสูงสุดในแถวแรกคอลัมที่ 2 สัมประสิทธ์ของ s ยกกำลังลดลงที่ละ 2 ในคอลัมที่ 3, 4, ...

3 ใส่ค่าสัมประสิทธ์ของ s กำลังสูงสุดลบ 1 ในแถวที่ 2 คอลัมที่ 2 สัมประสิทธ์ของ s ยกกำลังลดลงที่ละ 2 ในคอลัมที่ 3, 4, ...

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

ขั้นตอนการหาค่าเพื่อเติมตาราง Routh ให้เติมดังนี้

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

สมมุติให้ทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน(Transfer function) ของระบบปิด(Closed-loop system) แสดงได้โดยสมการ (4) และ characteristic equation แสดงโดยสมการ (5)

ตารางของ Routh-Hurwitz

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	
s^{n-2}	c_1	c_2	c_3	c_4	
s^{n-2}	d_1	d_2	d_3	d_4	
s^1	e_1				
s^0	f_1				

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$
$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$
$$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$
$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

การตรวจสอบความเสถียรจากตารางของ Routh ได้โดยการตรวจสอบที่คอลัมแรกของสัมประสิทธิ์หรือคอลัมที่ 2 ของตารางด้านบน ถ้าค่าในคอลัมนี้ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายแสดงว่าไม่มีโพลอยู่ทางขวาของ s-plane ถ้าค่าในคอลัมนี้มีการเปลี่ยนเครื่องหมายแสดงว่ามีโพลอยู่ทางขวาของ s-plane โดยที่จำนวนครั้งของการเปลี่ยนเครื่องหมายจะบอกถึงจำนวนโพลที่อยู่ทางขวาของ s-plane นักศึกษาสามารถพิจารณาได้จากตัวอย่างในสไลด์ที่ 16-18

กรณีพิเศษของการทดสอบแบบเร้าท์เฮอร์วิช(Routh- Hurwitz Criterion : Special Cases)

ในบางกรณีไม่สามารถทำให้ตารางเร้าท์เฮอร์วิชสิ้นสุดลงได้ หมายความว่าไม่สามารถหาค่าสัมประสิทธ์ของ s^0 ได้ อันเนื่องมาจากสาเหตุดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ตัวเลขเฉพาะคอลัม(Column) แรกของแถวใดแถวหนึ่งเป็นศูนย์ แต่ตัวเลขอื่นในคอลัมไม่เป็นศูนย์ เมื่อตัวเลขเฉพาะคอลัมภ์แรกของแถวใดแถวหนึ่งเป็นศูนย์ จะทำให้ผลลัพธ์มีค่าเป็นอนันต์ สามารถแก้ปัญหานี้ได้โดยแทนเลขในคอลัมแรกที่เป็นศูนย์ด้วยเลขบวกที่มีค่าน้อยๆ ใคือ ϵ(epsilon) ซึ่งเป็นค่าที่ใกล้ 0 มาก จะเป็นค่าบวกหรือลบก็แล้วแต่เราจะสมมุติ

ตัวอย่างที่ 6.2 (Nise) จงหาว่าระบบที่แสดงโดยทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่นนี้เสถียรหรือไม่

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$\cancel{0}\ \epsilon$	$\frac{7}{2}$	0
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	0
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	0	0
s^0	3	0	0

ตารางเร้าท์เฮอร์วิธในตัวอย่าง 6.2

วิธีการแก้ปัญหา

1 ทำการนำสมการคุณลักษณะของทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่นมาจัดใส่ในตาราง จะเห็นว่ามีคอลัมภ์แรกที่ตำแหน่ง s^3 มีสัมประสิทธ์เป็น 0 ให้เราทำการแทนด้วย ϵ เข้าไป

2 ทำการหาค่าดีเทอร์มีแนนท์โดยส่วนใดที่มี ϵ ก็ให้ติดร่วมเข้าไปด้วยตามปรกติ

3 ทำการพิจารณาความเสถียรภาพโดยพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายในคอลัมแรก แต่เมื่อมี ϵ ทำได้โดยการสมมุติให้ ϵ มีค่าเป็นบวกทำการตรวจสอบการเปลี่ยนเครื่องหมาย ในคอลัมแรก หลังจากสมมุติให้ ϵ มีค่าเป็นลบแล้วทำการตรวจสอบการเปลี่ยนเครื่องหมายในคอลัมแรกอีกครั้ง

Label	First Column	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
s^5	1	+	+
s^4	2	+	+
s^3	$\cancel{0}\ \epsilon$	+	−
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	−	+
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	+	+
s^0	3	+	+

แสดงให้เห็นวิธีการสมมุติค่า ให้มีค่าเป็น + และ -

4 จากการพิจารณาปรากฏว่าเมื่อ ϵ มีค่า + จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมายสองครั้ง แสดงว่าระบบไม่เสถียรภาพมีจำนวนโพลอยู่ทางขวามือของ s-plane สองโพล และถ้าหากแทน เมื่อ ϵ มีค่า – ก็ยังมีการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมายสองครั้งแสดงว่าระบบไม่เสถียร มีจำนวนโพลอยู่ทางด้านขวามือของ s-plane สองโพล

กรณีที่ 2 ค่าในแถว(Row) แถวใดแถวหนึ่งเป็นศูนย์ทั้งแถว

กรณีนี้เมื่อนำไปสร้างเป็นตารางแล้วเกิดเป็นศูนย์ทั้งแถว สามารถแก้ไขโดยการนำค่าในแถวอยู่บนแถวที่เป็นศูนย์ มาสร้างเป็นสมการช่วย(Auxiliary Equation) เพื่อนำสมการนั้นไปทำการดิฟเฟอร์เรนเชียลเทียบกับ s จากนั้นนำสัมประสิทธิ์ของผลลัพธ์ที่ได้จากการดิฟเฟอร์เรนเชียลมาแทนค่าลงในแถวที่เป็นศูนย์ เราก็สามารถหาค่าในตารางของเร้าท์ต่อไปได้

ตัวอย่างที่ 6.3 (Nise) จงหาว่าระบบปิดต่อไปนี้เสถียรหรือไม่

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

เริ่มต้นโดยทำการนำค่าสมการคุรลักษณะ นำไปแทนในตารางของเร้าท์ นำเอา 1/7 คูณในแถวที่สองเพื่อลดทอนค่า ในการคำนวณในแถวที่สามจะพบว่ามีค่าเป็น 0 ทั้งแถว วิธีการแก้ไขคือนำเอาสัมประสิทธิ์ของแถวด้านบนแถวที่เป็นศูนย์ 1 แถว มาเขียนเป็นสมการช่วยจะได้สมการช่วยคือ

$$P(s) = S^4 + 6S^2 + 8$$

ทำการดิฟเฟอร์เรนเชียลสมการช่วยจะได้

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0$$

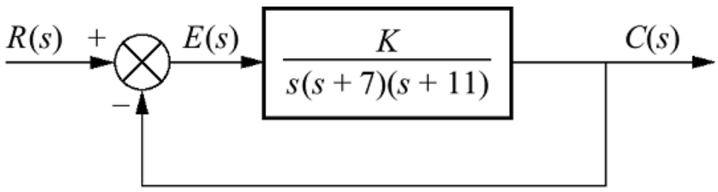
นำสัมประสิทธ์ของสมการที่ได้ใส่ในแถวที่มีค่าเป็นศูนย์ จากนั้นก็ทำการหาค่าในตารางต่อไป จากผลลัพธ์ที่ได้พบว่าคอลัมแรกไม่มีการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมาย แสดงว่าระบบไม่มีโพลอยู่ทางด้านขวาของ s-plane เราสรมารถสรุปได้ว่าระบบที่กำลังศึกษาเสถียร

s^5	1	6	8
s^4	$\cancel{7}$ 1	$\cancel{42}$ 6	$\cancel{56}$ 8
s^3	$\cancel{0}$ $\cancel{4}$ 1	$\cancel{0}$ $\cancel{12}$ 3	$\cancel{0}$ $\cancel{0}$ 0
s^2	3	8	0
s^1	$\frac{1}{3}$	0	0
s^0	8	0	0

การออกแบบความเสถียรกับการตรวจสอบความเสถียรโดยใช้วิธีของ Routh-Hurwitz (Stability design via Routh-Hurwitz)

เราสามารถประยุกต์วิธีการตรวจสอบความเสถียรของ Routh-Hurwitz เพื่อหาค่าของอัตราขยาย (gain), K สูงสุดที่ให้กับระบบแล้วยังคงทำให้ระบบเสถียร

ตัวอย่างที่ 6.9 (Nise)



1 หาทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่นในลูปปิด

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

2 นำสัมประสิทธ์ของสมการคุณลักษณะไปแทนในตารางของเร้าท์

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

จากตารางเร้าท์ ระบบจะเสถียรเมื่อค่าในคอลัมแรกไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายนั้นคือ K มีค่าเป็นบวก และค่าในแถวที่ 3 จะต้องมีค่าเป็นบวกเราจะพบว่าถ้า K มีค่าไม่เกิน 1386 จะทำให้ค่าในแถวที่ 3 เป็นบวกนั้นคือไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายในคอลัมที่ 1 ดังนั้นค่า K ที่จะทำให้ระบบเสถียรคือ $0 < K < 1386$ นั้นคือระบบมีโพลอยู่ 3 โพลทางด้านซ้ายมือของ s-plane

ถ้า K > 1386 ค่าในแถวที่สามก็จะเป็นลบ ซึ่งจะทำให้เกิดการเปลี่ยนเครื่องหมายสองครั้งแสดงว่าจะมีโพลอยู่ทางด้านขวาของ s-plane จำนวน 2 โพล และมีโพลอยู่ทางด้านซ้ายจำนวน 1 โพล ระบบจะไม่เสถียร

ถ้า K = 1386 เราจะได้แถวที่สาม เป็น 0 ซึ่งจะเป็นการบอกว่ามีโพลอยู่บนแกนจินตภาพ ($j\omega$) เมื่อมองย้อนขึ้นบนอีกหนึ่งแถวเป็นแถวของ s^2 ทำการแทนค่า K ด้วย 1386 เราก็จะได้โพลิโนเมียลดังนี้

$$P(s) = 18s^2 + 1386$$

ทำการดิฟเฟอร์เรนทิเอท จะได้ผลลัพธ์คือ

$$\frac{d\,p(s)}{dt} = 36s + 0$$

แทนค่าสัมประสิทธ์ที่ได้ในแถวที่เป็น 0 ต่อจากนั้นทำการหาด้วยวิธีการของ Routh-Hurwitz จะได้ว่า

s^3	1	77
s^2	18	1386
s^1	$\cancel{0}$ 36	
s^0	1386	

จากตารางจะเห็นว่าคอลัมแรกไม่มีการเปลี่ยนของเครื่องหมาย แสดงว่ามีโพลที่อยู่บนแกนจินตภาพสองโพลและอีกหนึ่งโพลอยู่ทางด้านซ้ายของ s-plane แสดงให้เห็นว่าระบบนี้มีความเสถียรที่ขอบ(Marginally stable)

Stability in state space

เราสามารถตรวจสอบความเสถียรของระบบใน state-space โดยวิธีของ Routh-Hurwitz ได้โดยการหา characteristic equation ของระบบใน state-space แล้วนำเอาสัมประสิทธ์มาสร้างตารางของเร้าท์เพื่อทำการวิเคราะห์หาความเสถียรต่อไป โดยที่ characteristic equation ของระบบหาได้จากสมการ

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$$