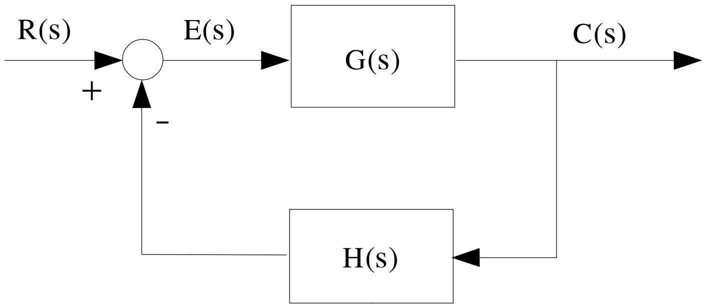
Steady-State Errors
(ค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์)

คำนิยาม

ความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์ คือความแตกต่างระหว่างอินพุตและเอาท์พุต(E(s)) เมื่อป้อนสัญญาณรูปแบบต่างๆ ที่ใช้ในทดสอบเข้าไปที่อินพุตของระบบ แล้วตรวจสอบความแตกต่างที่เวลาเข้าสู่อนันต์หรือเวลาที่ระบบอยู่ในภาวะคงตัว



รูปที่ 1

ระบบที่เรานำมาตรวจสอบ Steady-State Error ต้องเป็นระบบที่เสถียรเท่านั้น ดังนั้นก่อนที่จะทำการตรวจสอบ Steady-State Error ต้องมีการตรวจสอบความเสถียรก่อนทุกครั้งและถ้าระบบไม่เสถียรจะต้องทำการปรับปรุงระบบให้เสถียรก่อนจึงจะสามารถนำมาตรวจสอบ Steady-State Error ได้

การหา steady-state errors แสดงไว้ในรูปที่ 1 โดยความคลาดเคลื่อน(error) สามารถหาได้จาก E(s)=R(s)-C(s)H(s) หรือ

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

Steady-State Errors หาได้จากการหาลิมิตของความคลาดเคลื่อน(e(t)) เมื่อเวลา(t) เข้าสู่อนันต์ และโดยทฤษฎีค่าสุดท้ายจะได้ว่า

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to 0} sE(s)$$

หรือ

$$e(\infty) = \lim_{t \to 0} sE(s) = \lim_{t \to 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

สำหรับระบบที่มีการป้อนกลับหนึ่งหน่วย

$$e(\infty) = \lim_{t \to 0} sE(s) = \lim_{t \to 0} s \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

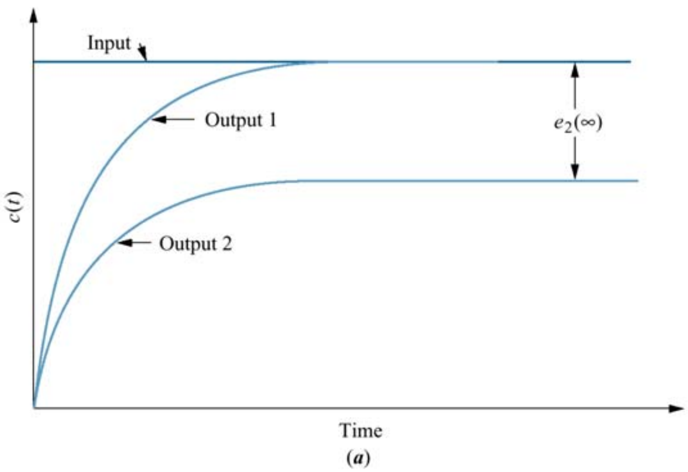
ในการหา Steady-State errors มีการกำหนดอินพุตสำหรับการตรวจสอบไว้ 3 รูปแบบคือ

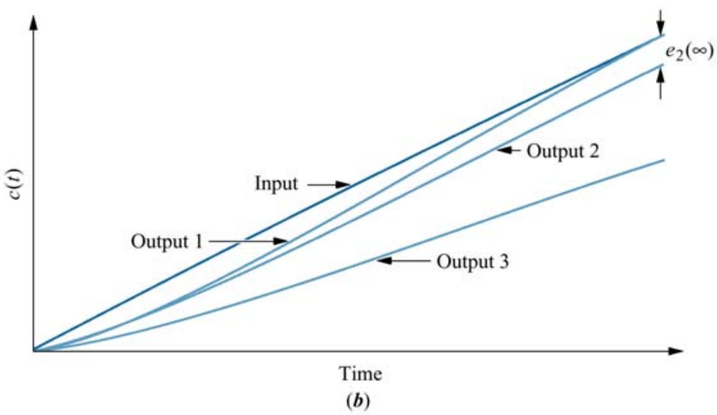
1 Step function r(t) = u(t) = 1
2 Ramp function r(t) = t
3 Parabola function r(t) = $r(t) = t^2/2$

ลักษณะของสัญญาณที่ใช้เป็นอินพุตในการตรวจสอบ Steady-State Errors ได้แสดงไว้ในสไลด์ที่ 4

การวัดค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์(Evaluating Steady –State Errors)

สามารถทำได้โดยการหาค่าความแตกต่างของระดับสัญญาณอินพุทที่ให้กับระบบกับสัญญาณเอาท์พุทที่ได้ เมื่อเวลาเข้าสู่อนันต์





รูปที่ 2 (Nise)

จากรูปที่ 2 จะมีการแสดงการวัดค่าความคลาดเคลื่อนของสัญญาณอินพุต 2 สัญญาณ คือ

1 สัญญาณอินพุตเป็น Step function (a)

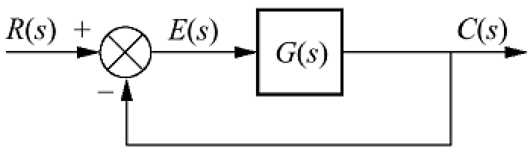
2 สัญญาณอินพุตเป็นRamp function (b)

พิจารณาเมื่อสัญญาณอินพุตเป็น Step function การตรวจสอบ Steady-State Error จะกระทำเมื่อเวลาเข้าสู่อนันต์หรือเมื่อระบบเข้าสู่ภาวะคงตัวแล้ว เช่นระบบอันดับ 1 สามารถวัดได้เมื่อเวลาผ่านไปอย่างน้อย 5T เมื่อ T เป็น time constant ของระบบ ดังนั้นจากรูปที่ 2(a) Steady-State Error ของระบบที่ 1 ซึ่งแสดงโดย Output 1 มีค่าเป็น 0 หรือไม่มี Steady-State Error และ Steady-State Error ของระบบที่ 2 ซึ่งแสดงโดย Output 2 มีค่าคงที่ $e_2(\infty)$

เมื่อพิจารณาสัญญาณอินพุต Ramp function จะพบว่า Steady-State Error ของระบบที่ 1 ซึ่งแสดงโดย Output 1 มีค่าเป็น 0 Steady-State Error ของระบบที่ 2 ซึ่งแสดงโดย Output 2 มีค่าคงที่ $e_2(\infty)$ และ Steady-State Error ของระบบที่ 3 ซึ่งแสดงโดย Output 3 มีค่าอนันต์

ค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์สำหรับระบบป้อนกลับหนึ่งหน่วย (Steady-state Error for Unity Feedback Systems)

ระบบป้อนกลับหนึ่งหน่วยแสดงได้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 (Nise)

ในการพิจารณาระบบควบคุมแบบป้อนกลับ เราจะมีตัวป้อนกลับ คือ H(s) ในที่นี้มีค่าเป็น 1 และมี E(s) เป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่แท้จริงระหว่างอินพุท R(s) กับเอาท์พุท C(s) ดังนั้นเราจึงมีวิธีการหาค่า E(s) ได้จาก

$$E(s) = R(s) - C(s) \qquad \text{-- (1)}$$

เมื่อ

$$C(s) = E(s)\,G(s) \qquad \text{-- (2)}$$

แทนสมการที่ 2 ในสมการที่ 1 แล้วจะได้

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)} \qquad \text{-- (3)}$$

การตรวจสอบความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์ จะทำที่เวลามีค่าเป็นอนันต์ e(∞) เราจะได้ว่า

$$e(\infty) = \lim_{t \to 0} sE(s) = \lim_{t \to 0} s \frac{1}{1+G(s)} R(s) \qquad \text{-- (4)}$$

อินพุตแบบระดับขั้น(ค่าความคลาดเคลื่อนในการควบคุมตำแหน่ง)

เมื่อสัญญาณป้อนเข้าเป็นสัญญาณ step function หนึ่งหน่วย r(t) = u(t) เมื่อแปลงลาปลาซจะได้ R(s) = 1/s แทนในสมการที่ 4 จะได้

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+G(s)} . \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)} \qquad \text{-- (5)}$$

หากเราต้องการให้ค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์มีค่าเป็นศูนย์ เราต้องออกแบบให้

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \infty \qquad \text{-- (6)}$$

อินพุทแบบลาด(ค่าความคลาดเคลื่อนในการควบคุมอัตราเร็ว)

เมื่อสัญญาณป้อนเข้าเป็นสัญญาณ ramp function r(t) = t เมื่อแปลงลาปลาซจะได้ R(s) = $1/s^2$ แทนในสมการที่ 4 จะได้

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+G(s)} . \frac{1}{s^2} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} sG(s)} \qquad \text{-- (7)}$$

หากเราต้องการให้ค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์มีค่าเป็นศูนย์ เราต้องออกแบบให้

$$\lim_{s \to 0} s\,G(s) = \infty \qquad \text{-- (8)}$$

อินพุทแบบพาราโบล่า(ค่าความคลาดเคลื่อนในการควบคุมอัตราเร่ง)

เมื่อสัญญาณป้อนเข้าเป็นสัญญาณ parabola function r(t) = t^2 เมื่อแปลงลาปลาซจะได้ R(s) = $1/s^2$ แทนในสมการที่ 4 จะได้

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1+G(s)} . \frac{1}{s^3} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} s^2 G(s)} \qquad \text{-- (9)}$$

หากเราต้องการให้ค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์มีค่าเป็นศูนย์ เราต้องออกแบบให้

$$\lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \infty \qquad \text{-- (10)}$$

ค่าคงที่ของความผิดพลาดเชิงสถิตย์และประเภทของระบบ
(Static Error Constants an0td System Type)

การนิยามพารามิเตอร์ต่างๆ นั้นทำให้เราสามารถที่จะนำมาใช้เพื่อระบุหาประสิทธิภาพของความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์ได้ ดังเช่นที่ได้นิยามเรื่องของ damping ratio,natural frequency, setting time,percent overshoot เป็นต้น เพื่อนำไปใช้หาประสิทธิภาพของการตอบสนองชั่วขณะ(Transient response) เพื่อหาประสิทธิภาพของความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์จึงต้องนิยามค่าต่างๆ เรียกว่า “Static Error Constants” ซึ่งจะนำไปใช้ในการคำนวณถัดไป

ค่าคงที่ของความผิดพลาดเชิงสถิตย์(Static Error Constants)

ค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์ แสดงได้โดยสมการที่ (5) (7) และ (9) จะสังเกตุเห็นว่าทั้ง 3 สมการมีเทอมของส่วนที่แสดงความสัมพันธ์โดยการหาลิมิต เราจะเรียกส่วนที่มีการหาลิมิตว่า Static Error Constants ดังนี้

ค่าคงที่ของตำแหน่ง(Position constant), K_p

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

ค่าคงที่ของความเร็ว(Velocity constant), K_v

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

ค่าคงที่ของความเร่ง(Acceleration constant), K_a

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

ประเภทของระบบ (System Type)

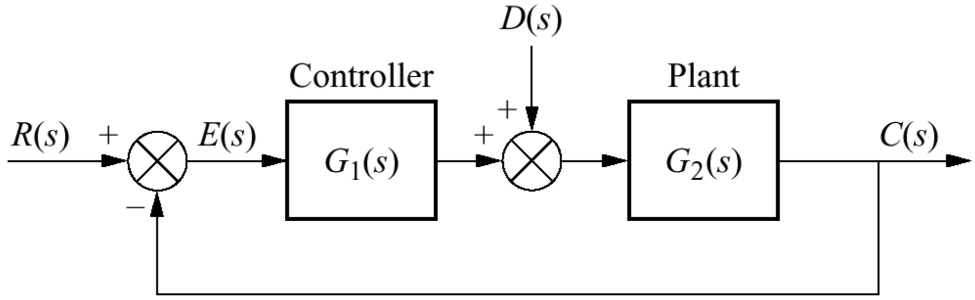
เมื่อสังเกตสมการคุณลักษณะของส่วน จะมีเทอมที่เป็น s คูณอยู่กับเทอมอื่นๆ ซึ่ง s ตัวนี้จะมีอยู่สามประเภทโดยแบ่งตามกำลังของตัวมันเอง ถ้าไม่มี s คูณอยู่แสดงว่าเป็น s ยกกำลัง 0 คือ 1 แบบนี้จะเป็นระบบประเภทที่ 0 ถ้า s ยกกำลัง 1 ก็จะเป็นระบบประเภทที่ 1 และถ้า s ยกกำลัง 2 ก็จะเป็นระบบประเภทที่ 2 ซึ่งสามารถที่จะนำมาสรุปเป็นตารางได้ดังนี้ความสัมพันธ์ระหว่างอินพุท, ประเภทของระบบ, ค่าคงที่ของความผิดพลาดและค่าควมผิดลาดเชิงสถิตย์ดังนี้ (Nise)

		Type 0		Type 1		Type 2	
Input	Steady-state error formula	Static error constant	Error	Static error constant	Error	Static error constant	Error
Step, $u(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p =$ Constant	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Ramp, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v =$ Constant	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parabola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a =$ Constant	$\frac{1}{K_a}$

เราสามารถนำเอาค่าคงที่ของความคลาดเคลื่อนไปใช้ในการระบุคุณลักษณะของค่าความเคลื่อนเชิงสถิตย์ ของระบบได้

Steady-state errors for disturbances

สำหรับระบบที่มีสัญญาณรบกวน(disturbances) เราสามารถแสดง block diagram ในรูปที่ 4 เราสามารถแบ่ง Steady-State Errors ได้เป็น 2 ส่วนคือ Steady-State Errors เนื่องจากสัญญาณอินพุต r(t) และ Steady-State Errors เนื่องจากสัญญาณรบกวน d(t)



รูปที่ 4 (Nise)

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s)$$

ความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์คือ

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \lim_{s \to 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s)$$

$= e_R(\infty) + e_D(\infty)$

เมื่อ $e_R(\infty)$ เป็นความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์สำหรับสัญญาณอินพุต และ $e_D(\infty)$ เป็นความคลาดเคลื่อนเชิงสถิตย์สำหรับสัญญาณรบกวน