probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee

Editura Ştiinţifică

Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee (1950–1990)

INTRODUCERE

Lucrarea de față reunește pentru prima oară problemele date la olimpiadele de matematică din țara noastră la etapele județeană și națională, pe o perioadă de patru decenii. Ea constituie o continuare și completare a apreciatelor lucrări alcătuite de profesorii T. Roman, O. Sacter și Gh. D. Simionescu (1950—1967), L. Panaitopol și C. Ottescu (1968—1974), precum și a culegerii elaborate cu ocazia etapei finale a concursului de matematică din anul 1983 de la Focșani (1975—1983).

Ea a fost concepută pe principiul prezentării complete a problemelor pe ani de studiu și tipuri de licee, cu reactualizarea notațiilor și a terminologiei și respectarea cerințelor și exigențelor programelor și manualelor în vigoare. Problemele propuse la olimpiada de matematică din anul 1953 nu au fost publicate în Gazeta matematică *și în consecință nu au putut fi reconstituite și publicate în culegerea de față. Aici sînt prezentate 1176 de probleme de algebră, geometrie plană și în spațiu, aritmetică și teoria numerelor, combinatorică, analiză matematică și geometrie analitică, teoria probabilităților, însoțite de indicații de rezolvare sau soluții complete, în funcție de gradul de dificultate a problemelor. Se poate astfel urmări evoluția nivelului olimpiadelor interne, baza frumoaselor rezultate ale elevilor români la olimpiadele internaționale de matematică, inițiate de România în anul 1959, care dovedesc talentul științific al poporului nostru.*

Lucrarea conține numeroase probleme originale, deosebit de interesante, propuse pentru olimpiade de profesori din învățămîntul superior și liceal și din cercetare. Ea se adresează în primul rînd elevilor din licee și gimnazii, care se pregătesc pentru olimpiadele de matematică și concursurile de admitere în învățămîntul superior sau licee. Problemele pot fi folosite la cercurile de elevi și ca sursă de inspirație pentru sesiunile de comunicări și referate ale elevilor. De asemenea, credem că ele vor constitui un prilej de satisfacții pentru rezolvitorii de probleme de matematică de diferite profesii.

Autorii aduc pe această cale calde mulțumiri Editurii Științifice care a apreciat utilitatea publicării acestei lucrări.

AUTORII

Partea întîi
ENUNȚURI

CLASA A VIII-A

Anul 1950

Etapa I

1. Se consideră polinoamele

$$Y = x^2 - (a + b)x + ab,$$
$$y = 2x - (a + b).$$

a) Să se arate că y ia valori opuse cînd x ia valori egale cu rădăcinile polinomului Y.

b) Notăm $x_1 = \frac{a+b}{2} + m$ și $x_2 = \frac{a+b}{2} - m$. Să se arate că oricare ar fi m, polinomul Y ia valori egale pentru $x = x_1$ și $x = x_2$ iar polinomul y ia valori opuse pentru aceste valori ale lui x.

c) Să se demonstreze că ecuația

$$Y + ky = 0$$

are rădăcini reale oricare ar fi k.

d) Luînd $a = -2$, $b = 5$, să se reprezinte grafic funcțiile Y și y.

2. Fie $ABCD$ un romb în care $m(\hat{A}) = 45°$ și fie $BB' \perp AD$, $B' \in AD$. Se consideră punctul $E \in (BB'$ astfel că $(BE) \equiv (AB)$. Să se arate că:

a) C, D, E sînt coliniare;

b) centrul cercului înscris în triunghiul ABB' aparține cercului circumscris triunghiului BCE.

Etapa a II-a

1. Pe hartă sînt marcate trei localități: A, B, C. Se cere:

a) să se traseze o șosea rectilinie, așa fel ca cele trei localități să se găsească la aceeași distanță de șosea;

b) ce fel de triunghi trebuie să fie ABC pentru ca să putem construi pe șosea un canton egal depărtat de cele trei localități?

2. Profilul unui pod de cale ferată este compus dintr-un arc de cerc de rază R dată și coarda care îl subîntinde. Înălțimea maximă a arcului adunată cu lungimea podului este egală cu diametrul cercului din care face parte arcul. La ce distanță sub pod este centrul cercului?

Anul 1951

Etapa I

1. Două plăci pătrate $ABCD$ și $AEFG$, situate în același plan, sînt reunite în punctul A, vîrfurile lor fiind notate ca în fig. 1. Să se arate că:

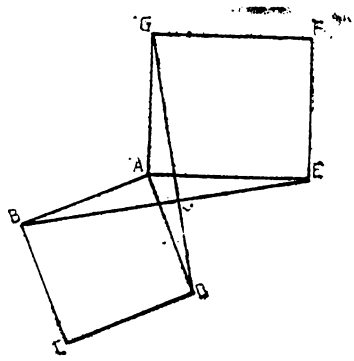


Fig. 1.

a) $(BE) \equiv (GD)$;

b) punctul Y de intersecție a dreptelor GD și BE aparține cercului circumscris triunghiului EGA;

c) unghiul BYG este drept;

d) suma măsurilor unghiurilor $\widehat{ABE}$, $\widehat{BAG}$ și $\widehat{AGD}$ este egală cu $90°$

2. O cameră cu podeaua dreptunghiulară este construită astfel: înălțimea camerei este egală cu diagonala podelei, perimetrul podelei este 14 m, iar suprafața pereților, a podelei și a tavanului la un loc este de 94 m². Să se determine dimensiunile camerei.

Etapa a II-a

1. Se dă ecuația $(1 - m^2)x^2 - 2(a - m^2b)x + a^2 - m^2b^2 = 0$. Se cere să se verifice că dacă $a \neq b$, atunci are loc relația $\frac{x_1 - a}{x_2 - a} + \frac{x_1 - b}{x_2 - b} = 0$, x_1 și x_2 fiind rădăcinile. Să se deducă de aici că x_1 și x_2 nu pot fi amîndouă cuprinse între a și b. De ce este necesară ipoteza $a \neq b$?

2. Se dă un segment $[AB]$. P fiind un punct oarecare al acestui segment, se duc în același semiplan față de AB semicercuri care au, respectiv, ca diametre $[AP]$ și $[PB]$. Se construiește tangenta lor comună MN (M aparține primului semicerc și N celui de-al doilea). Se cere:

a) să se demonstreze că unghiul $\widehat{MPN}$ este drept;

b) dreptele AM și BN se intersectează în Y.

Să se afle locul geometric al punctului Y cînd P parcurge segmentul $[AB]$;

c) lungimea a a segmentului $[AB]$ fiind dată, să se determine printr-o construcție grafică punctul P astfel ca tangenta comună MN să aibă o lungime dată l;

d) ce relație trebuie să existe între l și a pentru ca să fie posibilă construcția? Care este valoarea maximă pe care o poate avea segmentul $[MN]$?

Anul 1952

Etapa I

1. Un mecanism este alcătuit din patru vergele egale două cîte două, $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, care formează un patrulater articulat în cele patru vîrfuri. Vergeaua DC are două găuri E, F, unde $DE = FC = AD$. Două vergele mai subțiri AE și BF sînt prinse în articulațiile A și B, și trecute prin găurile E, respectiv F, așa încît, atunci cînd patrulaterul se deformează, ele să se

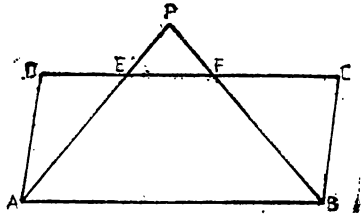


Fig.

poată roti în jurul punctelor A, B. Se notează cu P punctul de intersecție al acestor vergele (vezi fig. 2).

a) Să se demonstreze că $[AE$ și $[BF$ sînt bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$.

b) Să se demonstreze că dacă $a = 3b$, triunghiurile AED și BCF se pot descompune în cîte două triunghiuri dintre care fiecare este congruent cu triunghiul EFP.

c) Ce linie descrie punctul P atunci cînd deformăm paralelogramul $ABCD$, menținînd latura $[AB]$ fixă?

d) Ce linii descriu în aceleași condiții punctele E și F?

Etapa a II-a

1. Să se construiască trapezul $ABCD$, $AB > CD$ cunoscînd lungimea laturii $[AD]$, a bazei mici $[CD]$ și a segmentului ce unește mijloacele celor două baze, știind că laturile neparalele formează un unghi drept.

Anul 1954

Etapa I

1. Dintr-un vas cu o capacitate de 128 l plin cu alcool se scoate o cantitate de alcool și se înlocuiește cu apă. Din acest amestec se mai scoate o cantitate egală în litri cu cea scoasă prima dată și se înlocuiește cu apă. În vas rămîn 98 l alcool curat. Cîți litri de alcool s-au scos prima dată și cîți a doua oară?

2. Se ia un punct M pe bisectoarea unui unghi xOy și pe $[OM]$ drept coardă, se descriu două cercuri oarecare, care taie laturile unghiului în B, C și B', C' respectiv, B, C sînt pe un cerc și B', C' pe al doilea cerc, iar B, B' sînt pe o latură a unghiului și C, C' pe cealaltă latură. Să se arate că $(BB') \equiv (CC')$.

Etapa a II-a

1. Se consideră un triunghi ABC $(AB < AC)$ și punctele $D \in AB$, $E \in AC$ astfel că $(BD) \equiv (CE)$.

a) Să se arate că dacă M este punctul de intersecție al dreptelor BC și DE, avem relația $AB \cdot MD = AC \cdot ME$.

b) Să se determine lungimea segmentului $[BD]$ în funcție de laturile triunghiului astfel ca $(MC) \equiv (CB)$.

2. Două mașini-auto pornesc în același timp, din același loc în aceeași direcție. Prima merge cu 50 km/h, iar a doua cu 40 km/h. După 30 de minute pornește din același loc în aceeași direcție o a treia mașină și ajunge una din aceste mașini cu 1 h 30 min mai tîrziu decît pe cealaltă. Ce viteză are mașina a treia?

Anul 1955

Etapa regională

1. Care sînt ecuațiile de gradul 2 de forma $x^2 + px + q = 0$, în care coeficienții p și q sînt chiar rădăcinile ecuației?

2. Se dă un paralelogram $ABCD$ și se ia pe latura $[AB]$, de la B către A, segmentul $[BM] \equiv [BC]$, iar pe latura $[AD]$, de la D către A, segmentul $[DN] \equiv [DC]$. Prin vîrful C al paralelogramului se duce o dreaptă variabilă, care taie dreptele AB și AD, respectiv, în P și Q. Să se demonstreze că:

a) punctele C, N, M sînt coliniare;

b) produsul $BP \cdot DQ$ este constant cînd dreapta PQ se rotește în jurul punctului C;

c) $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{PM}{QN}$.

3. Să se simplifice fracția $\dfrac{2x^2 - (3a + b)x + a^2 + ab}{2x^2 - (a + 3b)x + ab + b^2}$.

Etapa finală

1. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A, ducem bisectoarea unghiului A care intersectează pe BC în D, iar prin D se duce o perpendiculară pe BC care intersectează pe AB în E și pe AC în F

a) Să se demonstreze că $BD = DF$ și $CD = DE$.

b) Să se demonstreze că simetricul punctului E față de dreapta BC se găsește pe cercul circumscris triunghiului BFC și că simetricul punctului F față de dreapta BC se găsește pe cercul circumscris triunghiului BEC iar aceste două cercuri sînt congruente între ele.

c) Să se arate că măsurile unghiurilor $\widehat{EBF}$ și $\widehat{ECF}$ sînt egale și că $AE \cdot BF = AF \cdot CE$.

2. Să se simplifice fracția

$$\frac{x^4 - 16x^2 + 4}{(x - \sqrt{5} + \sqrt{3})(x + \sqrt{5} - \sqrt{3})},$$

apoi rezultatul să fie pus sub forma unui produs de factori de gradul 1.

3. Se dă ecuația

$$\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a} + \cfrac{x}{\sqrt{a}}}} = \lambda \sqrt{a}.$$

Să se determine λ astfel ca suma inverselor rădăcinilor adunată cu inversul sumei lor să fie egală cu $\dfrac{1}{a}$

Anul 1956

Etapa regională

1. Se dă trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare $AB = 41$ cm, baza mică $CD = 15$ cm și înălțimea $h = 2\sqrt{30}$ cm. O perpendiculară pe baze intersectează pe AB și CD, respectiv, în M și N, iar semicercurile descrise în exterior, care au ca diametre pe AB și CD, sînt intersectate, respectiv, în P și Q. Să se determine poziția acestei perpendiculare astfel ca înălțimea trapezului să fie media geometrică a segmentelor $[MP]$ și $[NQ]$. *(Gh. D. Simionescu)*

2. Se dă un triunghi oarecare ABC, apoi se prelungește latura $[BC]$ în ambele sensuri cu segmentele $[BB'] \equiv [AB]$ și $[CC'] \equiv [AC]$. Notînd lungimile laturilor $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$ respectiv cu a, b și c, să se demonstreze că

$$b \cdot AB'^2 + c \cdot AC'^2 = 2bc(a + b + c),$$

$$AB'^2 = \frac{c}{a}(a + b + c)(a - b + c),$$

$$AC'^2 = \frac{b}{a}(a + b + c)(a + b - c). \quad \textit{(Gh. D. Simionescu)}$$

Etapa finală

1. Să se găsească rădăcinile reale ale sistemului de ecuații

$$x^3 + 2x^2y - y^3 + 44 = 0,$$
$$2y^3 + 3xy^2 + x^2y + 20 = 0.$$

2. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ pentru care se notează lungimile laturilor $[AB]$ și $[BC]$ cu $2a$, respectiv $2b$. Două cercuri egale, de rază a, sînt tangente în vîrfurile opuse A și C, respectiv, laturilor $[AB]$ și $[CD]$ și sînt situate în exteriorul dreptunghiului.

a) Să se calculeze distanța dintre centrele O_1 și O_2 ale celor două cercuri.

b) Să se determine a în funcție de b, în cazul în care linia centrelor este perpendiculară pe diagonala $[BD]$.

c) Se consideră o tangentă comună exterioară a celor două cercuri. Ce relație trebuie să existe între a și b pentru ca această tangentă să treacă prin unul dintre vîrfurile B sau D ale dreptunghiului? *(C. Georgescu)*

Anul 1957

Etapa regională

1. Trei tractoare A, B, C pot ara un teren în a zile lucrînd împreună. După ce au arat împreună timp de b zile se defectează tractorul C, iar cele două tractoare A și B împreună ar termina de arat restul terenului în c zile. Însă după d zile de la defectarea tractorului C, tractorul B este utilizat la altă muncă, rămînînd tractorul A care termină de arat terenul în e zile.

a) Să se exprime în funcție de a, b, c, d, e timpul necesar fiecărui tractor pentru a ara tot terenul dacă ar lucra singur.

b) Exemplu numeric: $a = 7$ zile, $b = 5$ zile, $c = 4$ zile, $d = 2$ zile și $e = 6$ zile.

c) În cazul b să se reprezinte grafic într-un sistem de axe rectangulare procentul de teren care mai trebuie arat ca funcție de timp. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. Se consideră pătratul $ABCD$. Bisectoarea unghiului BDC intersectează latura $[BC]$ în M și diagonala $[AC]$ în L. Perpendiculara dusă din B pe dreapta DM intersectează această dreaptă în E, iar dreapta DC o intersectează în F. Bisectoarea unghiului ABD intersectează diagonala $[AC]$ în I și latura $[AD]$ în G. Paralela dusă prin G la AC intersectează latura $[CD]$ în P.

a) Să se arate că dreptele FG și BP trec prin L.

b) Fie N punctul de intersecție a dreptelor FG și BC. Să se arate că triunghiurile LMN și BGP sînt isoscele. Care sînt măsurile unghiurilor acestor triunghiuri?

c) Să se arate că cercul de diametru $[PG]$ trece prin punctele I și L.

d) Acest cerc intersectează pe BD în S. Să se arate că arcele GI, IS, SL și LP sînt congruente.

e) Fie J intersecția dreptelor PN și BF. Să se arate că punctele I, S, M, J sînt situate pe o aceeași dreaptă paralelă cu GF. *(Gh. Bazacov, C. Ionescu-Țiu).*

Etapa finală

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu laturile $[AB]$ și $[AC]$ congruente. Perpendiculara dusă din B pe AB și perpendiculara dusă din C pe AC se intersectează în punctul D.

a) Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil într-un cerc și circumscriptibil altui cerc.

b) Să se arate că perpendiculara dusă prin intersecția diagonalelor patrulaterului $ABCD$ pe AB trece prin mijlocul laturii $[CD]$, iar perpendiculara dusă din același punct pe CD trece prin mijlocul laturii $[AB]$.

c) Să se arate că bisectoarea unghiului format de cele două perpendiculare duse prin intersecția diagonalelor, respectiv, pe AB și CD este perpendiculară pe bisectoarea unghiului format de dreptele AB și CD.

d) Dacă vîrfurile A și B rămîn fixe, iar punctul C, mobil, descrie un cerc cu centrul în A, lungimea segmentului $[AC]$ rămînînd constantă, să se afle locul geometric descris de mijlocul diagonalei $[BC]$ și, de asemenea,

e) Locul geometric al centrului cercului înscris în patrulaterul $ABCD$. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. Se dă polinomul $P(x) = x^3 + ax^2 + 2x + b$.

a) Să se arate că pentru orice numere reale a și b ecuația $P(x) = 0$ nu poate admite simultan ca rădăcini pe $x = 3$ și $x = -3$.

b) Dacă $P(x)$ se divide prin $x + 2$, să se arate că ecuația $\frac{P(x)}{x+2} = 0$ se poate scrie sub forma

$$x^2 + (a - 2)x + 2(3 - a) = 0$$

și să se rezolve în cazul cînd rădăcinile ei sînt egale.

c) Pentru ce valori reale ale lui a rădăcinile acestei ecuații sînt reale și de semne contrare?

d) Pentru ce valori reale ale lui a are loc relația

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{\ } \geqslant \frac{1}{2}\ ?$$ *(C. Ionescu-Țiu)*

Anul 1958

Etapa regională

1. Să se afle valoarea numerică a polinomului

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$, pentru $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. *(E. Vișa)*

2. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x + y + z = 3a,$$
$$ax + 2by + bz = (a + b)^2,$$
$$bx + 2ay - az = a^2 - b^2,$$ *(Gh.D. Simionescu)*

3. Se consideră un trapez $ABCD$ (baza mare $[AB]$, laturile neparalele $[BC]$ și $[AD]$). Fie M un punct pe latura $[BC]$ și P intersecția dreptei AM cu paralela dusă prin D la BC. Să se arate că:

a) dacă $AM = AB$, atunci $DM = PC$;

b) dacă M este mijlocul laturii $[BC]$ și $AB = 2DC$, atunci AC, DP și paralela dusă prin M la bazele trapezului sînt trei drepte concurente. *(C. Georgescu)*

Etapa finală

1. Se dă expresia $E(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$. Să se arate că dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $bx^2 + (c - a)x - b = 0$, are loc egalitatea

$$E(x_1) + E(x_2) = a + c. \text{ (Gh. D. Simionescu)}$$

2. Se consideră un triunghi oarecare ABC și triunghiul DEF format de picioarele înălțimilor triunghiului dat (triunghiul ortic). Fie H ortocentrul triunghiului ABC și M, N, P simetricele lui H respectiv față de mijloacele laturilor $[EF]$, $[FD]$, $[DE]$ ale triunghiului ortic. Să se arate că:

a) punctele M, N, P sînt respectiv ortocentrele triunghiurilor AEF, BFD, CDE.

b) dreptele AM, BN, CP sînt concurente într-un punct I.

c) punctul I este simetricul lui H față de centrul cercului circumscris triunghiului ortic. *(E. Crăciunescu)*

3. Într-un cerc se duce un diametru $[AB]$, apoi se iau pe cerc, de aceeași parte a acestui diametru, de la A către B, punctele C, D, E.

a) Să se construiască pe diametrul $[AB]$ punctele P și Q astfel încît să avem $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{DPB})$ și $m(\widehat{AQD}) = m(\widehat{BQE})$.

b) Notînd cu m măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$ și cu n măsura arcului $\overset{\frown}{BE}$ să se determine măsura unghiului $\widehat{PDQ}$ cu ajutorul lui m și n. *(P. Dumitreasa)*

Anul 1959

Etapa regională

1. Se dă expresia

$$E = \frac{a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + b + \sqrt{ab})} - \frac{a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab} - ab}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} + \sqrt{ab}}$$

a) Să se aducă această expresie la o formă mai simplă.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei E pentru $a = 2 + \sqrt{3}$ și $b = 2 - \sqrt{3}$. *(St. Musta)*

2. Pe o dreaptă se consideră punctele A, A' și segmentele congruente $[AB]$, de la A către A', și $[A'B']$, de la A' către A. Se construiesc apoi, de o parte și de alta a dreptei AA', dreptunghiurile congruente $ABCD$ și $A'B'C'D'$

a) Să se demonstreze că dreptele CC' și DD' sînt concurente pe dreapta AA'.

b) Fie E intersecția dreptei DD' cu latura $[BC]$ a dreptunghiului $ABCD$. Să se determine poziția dreptunghiului $A'B'C'D'$ astfel încît punctul E să fie centrul de greutate al triunghiului DBB'.

c) Pentru ce poziție particulară a dreptunghiului $A'B'C'D'$ dreptele DD' și CA' sînt paralele?
(Se vor considera segmentele $[AB]$ și $[A'B']$ exterioare unul altuia.) *(Gh.D. Simionescu)*

Etapa finală

1. Se consideră un unghi drept XOY și bisectoarea lui $[OZ$. În interiorul unghiului ZOX se ia un punct A, pe bisectoarea $[OZ$ un punct I, și de cealaltă parte a bisectoarei $[OZ$, în interiorul unghiului, un punct B astfel încît triunghiul BIA să fie dreptunghic în I și isoscel. Cercul circumscris triunghiului AIB intersectează dreapta OY în punctele M și N, iar dreptele MA și NA intersectează dreapta OX în M', respectiv N'

a) Să se arate că triunghiurile MIM' și NIN' sînt dreptunghice și isoscele.

b) Să se arate că dacă punctul I se deplasează pe OZ, al doilea punct de intersecție dintre cercul AIB și dreapta OZ este fix.

c) Să se determine locul geometric al centrului cercului AIB, cînd punctul I descrie dreapta OZ.

2. Un teren de sport de formă dreptunghiulară avînd perimetrul de 244 m trebuie împrejmuit cu panouri prefabricate din beton, lăsîndu-se la una din marginile fiecărei laturi cîte o poartă de intrare largă de 1 m. Panourile prefabricate sînt de două feluri: mari cu lungimea de 3 m și mici cu lungimea de 2 m. Dacă s-ar folosi un sistem de montaj ar fi necesare în total 104 de panouri, iar dacă se întrebuințează alt sistem sînt necesare numai 88 de panouri. Sistemul de montaj trebuie să fie același pe toate laturile format din ansambluri de panouri (mari și mici) care se pot repeta, dar nu se pot diviza. Să se calculeze:

a) numărul de panouri mari și numărul de panouri mici la fiecare sistem de montaj;

b) dimensiunile terenului.

Anul 1960

Etapa regională

1. Trei delegați ai unei întreprinderi călătoresc cu autobuzul, cu trenul și cu autoturismul. Primul călătorește 18 km cu autobuzul, 24 km cu trenul și 30 km cu autoturismul, făcînd 105 minute. Al doilea călătorește 15 km cu autobuzul, 30 km cu trenul și 20 km cu autoturismul în 90 minute. Al treilea călătorește 27 km cu autobuzul, 18 km cu trenul și 16 km cu autoturismul în 96 minute. Considerînd că autobuzul, trenul și autoturismul au viteze constante, să se afle viteza fiecăruia dintre ele exprimată în km/h.

2. Să se determine pentru ce valori reale ale lui x are loc egalitatea

$$\sqrt{x^2-1}+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=0 \quad (C.\ Ionescu\text{-}Țiu)$$

3. Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile ascuțite și P, Q, R simetricele unui punct M din interiorul triunghiului față de laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Să se arate că:

a) triunghiul format de proiecțiile punctului M pe laturile triunghiului ABC are laturile paralele cu laturile triunghiului PQR;

b) mediatoarele laturilor $[QR]$, $[PR]$, $[PQ]$ trec, respectiv, prin vîrfurile A, B, C ale triunghiului dat;

c) mediatoarea laturii $[QR]$ și dreapta AM formează unghiuri congruente cu laturile unghiului $\hat{A}$. *(Lucia Țene)*

Etapa finală

1. Să se rezolve sistemul

$$\frac{x+y+1}{x+y-1}+\frac{y+z+2}{y+z-3}-\frac{z+x+3}{z+x-2}=\frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{x+y-1}+\frac{1}{y+z-3}-\frac{2}{z+x-2}=0,$$

$$\frac{1}{x+y-1}-\frac{2}{y+z-3}+\frac{1}{z+x-2}=0.$$

2. Pe baza $[BC]$ a triunghiului ABC se ia un punct variabil M prin care se duc paralelele MP și MQ la AC și AB, P și Q găsindu-se, respectiv, pe AB și AC. Fie N al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor BMP și CMQ.

a) Să se arate că tangentele în P și Q, respectiv la cercurile BMP și CMQ sînt paralele.

b) Să se determine locurile geometrice ale centrelor celor două cercuri cînd M descrie latura $[BC]$.

c) Să se găsească locul geometric al lui N cînd M descrie latura $[BC]$.

d) Să se arate că punctul de intersecție al celor două locuri geometrice de la punctul b este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. *(D. Flondor)*

Anul 1961

Etapa regională

1. Să se rezolve sistemul

$$a^2x+b^2y-(a+b)z=a^3-b^3,$$
$$a^3x+b^3y-(a^2+b^2)z=a^4-b^4,$$
$$a^4x+b^4y-(a^3-b^3)z=a^5-b^5+2ab^4,$$

dacă $a \neq b$. *(Gh. Bazacov)*

2. Pe drumul dintre localitățile A și B, care măsoară 14 km, se află o uzină către care pleacă simultan din A un autocamion și un turist cu bicicletă, iar din B un grup de muncitori pe jos. Autocamionul întîlnește grupul din B după 15 minute de la plecarea din A. Întorcîndu-se cu acest transport spre uzină, mașina întîlnește turistul după 25 minute. Să se afle:

a) viteza grupului din B pînă la întîlnirea cu mașina;

b) viteza turistului, dacă viteza mașinii este de 50 km/h și nu se ține seama de opriri. *(Lucia Țene)*

3. Se dă un paralelogram $ABCD$ cu centrul O și cu unghiul $\hat{A}$ ascuțit. Prin O se duce o secantă care intersectează pe $[AB]$ și $[CD]$, respectiv în M și P, iar prelungirile laturilor $[BC]$ și $[AD]$ în N și R ($[BN] < [CN]$).

a) Să se arate că patrulaterul $ARCN$ este paralelogram. Cum trebuie dusă secanta prin O, astfel încît acest paralelogram să fie dreptunghi?

b) Ce poziție trebuie să aibă această secantă pentru a avea $PR = PM = MN$?

c) Să se arate că dacă condiția de la punctul b este îndeplinită, atunci AP trece prin mijlocul lui $[CR]$, CM trece prin mijlocul lui $[AN]$; BR trece prin mijlocul lui $[CD]$ și DN prin mijlocul lui $[AB]$. *(C. Georgescu)*

Etapa finală

1. Să se arate că dacă primele două cifre de la stînga ale unui număr de patru cifre sînt, respectiv, dublul celorlalte două cifre, atunci acel număr este divizibil cu 3 și cu 67. Care sînt divizorii unui număr de șase cifre, scris în baza zece, cu proprietatea că primele trei cifre sînt, respectiv, dublul ultimelor trei cifre? *(C. Georgescu)*

2. a) Să se rezolve sistemul

$$xy + yz + zx = 0,$$
$$\frac{b+c}{x} + \frac{c+a}{y} + \frac{a+b}{z} = 0,$$
$$\frac{bc}{x} + \frac{ca}{y} + \frac{ab}{z} = 1.$$

b) Dacă x, y, z reprezintă soluția sistemului de la punctul a, iar a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi, să se arate că

$$x + y + z < ab + bc + ca. \quad \textit{(Lucia Țone)}$$

3. Un triunghi ABC este înscris într-un cerc. Fie P mijlocul arcului $\widehat{AB}$. Se duce coarda $[PQ]$ perpendiculară pe bisectoarea unghiului $\hat{A}$, precum și coarda $[PR]$ paralelă cu această bisectoare.

a) Să se arate că $[BQ$ este bisectoare a triunghiului ABC.

b) Să se demonstreze că triunghiul format de dreptele AB, AC și PR este isoscel.

c) Să se afle locurile geometrice ale mijloacelor corzilor $[PQ]$ și $[PR]$ cînd A descrie cercul, vîrfurile B și C rămînînd fixe. *(C. Menciu)*

Anul 1962

Etapa regională

1. a) Să se arate că dacă numerele a, b, c verifică relația $ab + bc - ca = 0$, atunci ele verifică și relația

$$b^3c^3(a+b)(a+c) + c^3a^3(b+c)(b+a) + a^3b^3(c+a)(c+b) = 0.$$

b) Utilizînd identitatea

$$m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = (m+n+p)(m^2+n^2+p^2-mn-mp-np),$$

se cere să se simplifice expresia

$$E = \frac{(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 - 3(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-b-c)^3 + (x-c-a)^3 + (x-a-b)^3 - 3(x-b-c)(x-c-a)(x-a-b)}.$$

c) Ce devine expresia E pentru $x = \frac{(2\sqrt{2}-1)(a+b+c)}{3(\sqrt{2}-1)}$? *(C. Coșniță)*

2. Un triunghi isoscel ABC are $AB = AC = 2BC$. Se duc: înălțimea $[AP]$, mediana $[BM]$ și bisectoarea $[CL$. Pe latura $[AC]$ se ia un punct D astfel ca $BD = BC$. Notăm cu N intersecția dintre BD și CL. Să se demonstreze că:

a) $[BM$ este bisectoare în triunghiul ABD;

b) $[BD]$ este mediană în triunghiul BCM;

c) patrulaterul $BLMN$ este romb. *(Gh. Bazacov)*

Etapa finală

1. Venitul lunar al unui muncitor este egal cu produsul dintre numărul de ore efectuate, salariul tarifar orar și indicele de îndeplinire a normei, plus o indemnizație specială de 7 lei pentru fiecare zi de muncă. În luna martie muncitorul a primit 1 570,40 lei, în luna aprilie 1 510 lei, iar în luna mai 1 385,28 lei. Se consideră ziua de lucru de 8 ore. Se știe că în luna aprilie a lucrat o zi mai puțin ca în martie, iar în luna mai indicele de îndeplinire a normei obținut a fost mai mic cu 0,2 decît în fiecare din lunile precedente. Să se afle:

a) numărul orelor de muncă efectuate în fiecare lună;

b) salariul tarifar orar;

c) indicele de îndeplinire a normei în fiecare lună. *(Lucia Țene)*

2. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = a$ și $BC = b$ și se consideră cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ACD cu centrele în O_1 și O_2, avînd punctele de contact cu diagonala $[AC]$ în T_1 și T_2.

a) Să se arate că patrulaterele OA_1CO_2, $O_1T_1O_2T_2$ și BO_1DO_2 sînt paralelograme cu același centru. Dacă patrulaterul AO_1CO_2 ar fi romb, ce legătură ar fi între a și b? Ce devin celelalte două paralelograme?

b) Să se determine pe latura $[CD]$ un punct M așa încît patrulaterul O_1CMO_2 să fie inscriptibil. Fie O_3 centrul cercului circumscris acestui patrulater. Să se arate că triunghiul $O_1O_2O_3$ este dreptunghic.

c) Să se calculeze lungimea segmentului $[T_1T_2]$ în funcție de a și b. *(C. Georgescu)*

Anul 1963

Etapa regională

1. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} 2x + m^2y + 4z &= -2, \\ x + 2y - mz &= -(3+m), \\ x + 2my - z &= -2(m+1). \end{aligned}$$

Pentru ce valori ale lui m sistemul este nedeterminat? Pentru ce valori ale lui m sistemul este incompatibil? *(I. Ionescu)*

2. Fie ABC un triunghi și M un punct oarecare pe dreapta BC. Fie S și T mijloacele segmentelor $[BM]$ și $[MC]$, iar B' și C' mijloacele laturilor $[AC]$ și $[AB]$.

a) Să se arate că patrulaterul $B'C'ST$ este paralelogram.

b) Unde trebuie luat punctul M astfel ca patrulaterul $B'C'ST$ să fie romb? Cînd este posibil acest caz?

c) $[B'C']$ taie pe AM în N. Fie A' mijlocul lui $[BC]$. Să se arate că dreapta $A'N$ trece prin punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $B'C'ST$ de la punctul a. *(P. Simion)*

Etapa finală

1. Într-un cerc cu centrul în O se consideră o coardă fixă $[AB]$ și un punct mobil M pe cerc. Paralela dusă din B la AM intersectează cercul a doua oară în N. Dreptele AN și BM se intersectează în punctul C, iar tangentele la cerc în punctele M și N se intersectează în P. Să se arate că:

a) pentagonul $OCMPN$ este inscriptibil;

b) dreapta CP este paralelă cu AM;

c) pentru ce poziție a punctului M patrulaterul $AMPC$ este paralelogram? Să se arate că în acest caz patrulaterul $MPNC$ este trapez isoscel;

d) să se afle locul geometric al centrului cercului circumscris pentagonului $OCMPN$. *(T. Weszely)*

2. Două substanțe se amestecă pentru a se face trei tipuri de medicamente cu care se umplu niște capsule. Pentru tipul I sînt necesare 0,5 g din substanța A și 0,5 g din substanța B. Pentru tipul II sînt necesare 0,2 g din A și 0,4 g din B; pentru tipul III sînt necesare 0,1 g din A și 0,3 g din B. Să se afle cîte capsule se pot face din 13 g din substanța A și 24 g din substanța B, fiind necesare cel puțin zece capsule din fiecare tip. *(Lucia Țone)*

3. Să se demonstreze că ecuația $\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{-b}=1$ are rădăcini reale oricare ar fi a, b, A, B cu $a \neq b$ și $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Anul 1964

Etapa regională

1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia

$$E=\frac{a+b\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b+2\sqrt{ab}}{a-b+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}+\frac{a^2\sqrt{a}+ab\sqrt{a}-ab\sqrt{b}-b^2\sqrt{b}}{a^2\sqrt{a}-ab\sqrt{a}+b^2\sqrt{b}-ab\sqrt{b}}.$$

(Florica Ionescu)

2. Într-un triunghi oarecare ABC, se duce bisectoarea $[AA_1$ $(A_1 \in (BC))$. Fie P și Q simetricele punctului A_1 față de laturile $[AB]$, respectiv $[AC]$. Paralelele duse din Q la AB și P la AC se intersectează în N. Să se arate că:

a) AA_1 este mediatoarea segmentului $[PQ]$;

b) punctul $N \in (AA_1)$;

c) notînd cu D și F punctele unde dreapta PA_1 intersectează, respectiv, pe AB și QN, iar cu E și G punctele unde dreapta QA_1 intersectează, respectiv, dreptele AC și PN, patrulaterul $DEFG$ este trapez isoscel. *(C. Piscati)*

3. a) Să se efectueze $\frac{(x^3+7x^2-9x+1)}{x-2}$.

b) Să se determine valorile întregi și pozitive ale lui x pentru ca expresia

$$\frac{x^3+7x^2-9x+1}{x-2} \in \mathbf{Z}.$$

Etapa finală

1. a) Să se rezolve sistemul

$$ax + by + cz = 2(a + b + c),$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = 2(ab + bc + ca),$$
$$a(b - c)x + b(c - a)y + c(a - b)z = 0.$$

b) Dacă a, b, c sînt numere pozitive și x, y, z rădăcinile sistemului dat, sa se arate că există relația $x + y + z \geqslant 6$.

c) Să se deducă o relație între rădăcinile ecuației care să nu conțină pe a, b, c exprimîndu-se mai întîi $x + 1$, $y + 1$, $z + 1$.

2. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A. Notăm cu A' simetricul lui A față de mijlocul ipotenuzei și cu A'' simetricul lui A față de ipotenuză, iar cu A_1 piciorul înălțimii dusă din A pe ipotenuză. Punctele B, C sînt fixe și punctul A descrie semicercul BCA.

a) Să se arate că mediatoarele segmentelor $[CA']$ și $[BA'']$ trec printr-un punct fix.

b) Să se afle locul geometric al punctului M, mijlocul segmentului $[A'A'']$, cînd punctul A se mișcă pe semicercul BAC.

c) Să se afle locul geometric al punctului P, mijlocul segmentului $[A_1M]$.

(Elena Flondor)

CLASA A IX-A

Anul 1950

Etapa I

1. Schimbătorul de viteze al unui strung este format din trei cilindri de același ax, cu razele $R_1 = r$, $R_2 = r + h$, $R_3 = r + 2h$. Strungul e pus în mișcare de o curea de transmisie acționată de o roată a motorului care are raza r. Distanța dintre axul roții motoare și axul strungului este α.

a) Să se determine lungimea curelei de transmisie în fiecare din cele trei cazuri.

b) Să se afle raportul vitezelor unghiulare de rotație ale: arborelui motor și axul strungului în fiecare din cele trei cazuri.

2. Să se aducă la forma cea mai simplă, următoarea expresie

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Etapa a II-a

1. Se dau două cercuri secante în A și B.

a) Se construiesc prin punctele A și B cîte o secantă care să fie împărțită de punctul A, respectiv B, în același raport dat $\frac{m}{n}$. Aceste secante intersectează cercurile, respectiv, în A_1, B_1 și A_2, B_2. Să se arate că $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel AB$.

b) Care este valoarea raportului $\frac{m}{n}$ cînd punctele A_1 și A_2 coincid?

2. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct în interiorul triunghiului. Dreapta dusă prin M paralelă la BC taie AB în D și pe AC în E; dreapta dusă prin M paralelă la CA taie BC în F și pe AB în G; iar dreapta dusă prin M paralelă la AB taie BC în H și pe AC în I. Să se arate că

$$\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{AC}+\frac{HI}{AB}=2.$$

Anul 1951

Etapa I

1. Opt oglinzi plane egale sînt așezate astfel încît secțiunea lor cu un plan este un octogon regulat $ABCDEFGH$ înscris într-un cerc de rază r și centru O.

Din mijlocul M al razei $[OA]$ pleacă o rază de lumină ce cade în mijlocul M_1 al oglinzii AB, apoi se reflectă și așa mai departe.

a) Să se arate că reflexia se produce în circuit închis.

b) Să se calculeze lungimea unui parcurs întreg al ei.

c) Să se afle unde trebuie plasată sursa luminoasă M pentru ca raza care se reflectă din M_1 să ajungă într-un vîrf al octogonului.

2. În trapezul $ABCD$, $[AB]$ fiind baza mică și $[CD]$ baza mare, E și F sînt, respectiv, mijloacele laturilor $[BC]$ și $[AD]$ iar I intersecția diagonalelor. Să se demonstreze că

$$\frac{\sigma[ABEF]}{\sigma[FECD]} > \frac{\sigma[ABI]}{\sigma[IDC]}.$$

Etapa a II-a

1. Se dau două cercuri de centre A și B, razele lor sînt R și r iar distanța dintre centrele lor este $AB = d$. Se duce o tangentă comună exterioară CD, C aparținînd cercului de centru A și D cercului de centru B și cercul de diametru $[CD]$.

a) Să se demonstreze că dacă cercurile sînt exterioare și numai în acest caz, cercul de diametru $[CD]$ intersectează linia centrelor. Care trebuie să fie poziția relativă a primelor două cercuri pentru ca cercul al treilea să fie tangent la AB?

b) Fie M și N punctele în care cercul al treilea intersectează pe $AB (M \in AN)$. Să se demonstreze că $AM \cdot AN = R^2$, $BM \cdot BN = r^2$.

c) Presupunînd cunoscute R, r și d, să se afle lungimile segmentelor $[AM]$ și $[AN]$. Discuție. Să se interpreteze geometric condiția ca să existe M și N.

2. Într-un vas se găsesc a l alcool curat. Se scoate 1 l de alcool și se înlocuiește cu 1 l de apă; apoi se scoate 1 l de amestec și se înlocuiește cu 1 l de apă; din acest amestec se scoate din nou 1 l și se înlocuiește cu 1 l apă ș.a.m.d. După cîte operații va rămîne în vas mai puțin de 50% alcool?

Anul 1952

Etapa I

1. Una din grinzile principale ale unui pod metalic are talpa superioară în formă de arc de cerc și doi montanți NM și PS, unde $AM = MC = CP = PB$. Lungimea podului este $AB = 24$ m, iar săgeata $CD = 5$ m (vezi fig. 3). Se cere:

a) raza cercului din care face parte talpa superioară;

b) lungimea tălpii $ANDSB$;

c) lungimea fiecărui montant MN, PS.

2. Pe un segment de dreaptă dat $AB = 2a$, se ia un punct oarecare P, se construiesc de aceeași parte a segmentului $[AB]$ două semicercuri, unul cu diametrul $[AP]$ iar celălalt cu diametrul $[BP]$, și se duce tangenta comună la aceste semicercuri.

a) Să se determine $AP = x$ astfel ca această tangentă comună să aibă o lungime dată $MN = l$.

b) Ce valoare maximă poate avea l pentru ca construcția să fie posibilă?

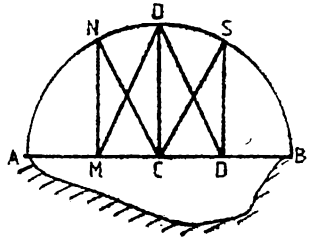


Fig. 3.

Etapa a II-a

1. Un rulment este format din două inele concentrice avînd între ele un număr de n bile egale, tangente două cîte două, și tangente inelelor. Se consideră o secțiune a piesei printr-un plan care trece prin centrele tuturor bilelor și se notează cu r raza inelului interior, cu R raza inelului exterior, iar cu x raza unei bile.

a) Să se arate că raportul $\frac{r}{R}$ depinde numai de n și să i se afle valoarea.

b) Să se arate prin ce construcție geometrică se pot construi cercurile de rază x cunoscînd: i) r (cercul de rază r fiind împărțit în n părți egale); ii) R (cercul de rază R fiind împărțit în n părți egale).

c) Punctele de contact ale bilelor se află pe un cerc. Să se arate cum se poate calcula raza lui.

2. Două drepte xx' și yy' se intersectează în O formînd un unghi drept. Pe semidreapta Oy se ia un segment $[OA] = a$, prin A se duce o dreaptă care formează cu OA un unghi ascuțit u și intersectează axa Ox în B; perpendiculara ridicată în B pe AB intersectează Oy' în C; perpendiculara ridicată în C pe CB intersectează Ox' în D; perpendiculara ridicată în D pe CD intersectează pe Oy în E ș.a.m.d. Să se demonstreze că lungimile segmentelor de dreaptă $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$.... formează o progresie geometrică. Discuție.

Anul 1954

Etapa I

1. Pe o șosea merg o trăsură și un automobil, în același sens. Trăsura se găsește cu 84 m înaintea automobilului și merge uniform cu o viteză de 3 m/s. Automobilul însă parcurge în prima secundă 8 m, iar în fiecare secundă următoare cu 0,1 m mai puțin decît în cea precedentă. Cît timp va merge automobilul pînă ce va ajunge trăsura?

2. Se consideră două cercuri secante O_1 și O_2 de raze R_1 și R_2. Prin unul din punctele comune se duce o secantă variabilă CD, unde C și D sînt punctele unde secanta variabilă taie a doua oară cercurile. Se cere locul geometric al intersecțiilor dreptelor ce unesc punctele C și D, respectiv, cu centrele cercurilor pe care se află fiecare punct.

Etapa a II-a

1. Se dă un plan P și un punct O exterior planului. Fie A piciorul perpendicularei duse din O pe plan, iar B și C alte două puncte în acest plan. Fie un punct D situat pe dreapta OA și E și F proiecțiile lui D pe OB și OC.

a) Ce condiție trebuie să îndeplinească oblicele (OB) și (OC) pentru ca să avem $DE = DF$?

b) Să se arate că pentru ca triunghiul DEF să fie echilateral trebuie să avem $\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BC}$.

c) Să se arate că dacă oblicele (OB) și (OC) sînt oarecare, patrulaterele $ABED$, $ACFD$ și $BCFE$ sînt inscriptibile.

2. Se dau progresiile aritmetice 1, 5, 9, 13, ... și 4,15, 26, 37, ... Să se găsească termenii comuni ai acestor progresii și să se arate că acești termeni comuni formează o nouă progresie.

Anul 1955

Etapa regională

1. Se consideră un hexagon regulat $ABCDEF$ a cărui latură are o lungime egală cu l. Unind din două în două prin segmente de dreaptă vîrfurile sale, intersecțiile acestor segmente determină un al doilea hexagon regulat $LMNPQR$. Să se calculeze lungimea laturii acestui hexagon regulat, precum și lungimea segmentului $[AN]$, punctul N fiind intersecția diagonalelor $[BD]$ și $[CE]$ ale hexagonului $ABCDEF$.

2. Să se exprime

$$\frac{1}{3\sin x\cos^3 x}+\frac{4}{3\sin x\cos x}-\frac{5\cos x}{\sin x}$$

în funcție de $\operatorname{tg} x$.

3. Fie un dreptunghi A_1MNP pentru care laturile $[A_1P]$ și $[MN]$ au o lungime egală cu a și laturile $[A_1M]$ și $[PN]$ au o lungime egală cu $3a$. Se consideră pe latura $[A_1M]$ punctul B_1 astfel încît lungimea segmentului $[A_1B_1]$ să fie egală cu a. Se duc dreptele A_1N și B_1N. Paralela dusă prin B_1 la MN intersectează dreapta A_1N în A_2. Paralela dusă prin A_2 la A_1M intersectează dreapta B_1N în B_2. Paralela dusă prin B_2 la MN intersectează dreapta A_1N în A_3. Paralela dusă prin A_3 la A_1M intersectează dreapta B_1N în B_3 și așa mai departe.

a) Să se arate că lungimile segmentelor $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ..., $[A_nB_n]$, ... formează o progresie geometrică.

b) Să se afle suma termenilor acestei progresii geometrice considerată nelimitată, atît prin aplicarea formulei cît și prin considerații geometrice.

Etapa finală

1. Să se determine două progresii, una aritmetică și cealaltă geometrică, fiecare fiind formată din cîte patru termeni, astfel încît adunînd termenii de același rang din cele două progresii, să obținem drept sumă, respectiv, numerele 18, 18, 26, 58.

2. a) Dacă $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}=\dfrac{\sin(c+d)}{\sin(c-d)}$, atunci mai există și relațiile

$$\frac{\cos(a+d)}{\cos(a-d)}=\frac{\cos(c+b)}{\cos(c-b)} \quad \text{și} \quad \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b}=\frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}.$$

b) Să se scrie sub formă de produs expresia

$$E=\sin(a-b)\sin(a-c)-\cos b\cos c.$$

3. Două pătrate $ABCD$ și $ABEF$ au o latură comună $[AB]$, iar planele lor sînt perpendiculare. Se consideră pe diagonalele lor punctele interioare M și N astfel încît segmentele $[AM]$ și $[BN]$ să fie congruente.

a) Să se arate că dreapta MN rămîne paralelă cu planul $CDFE$.

b) Să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului $[MN]$.

c) Să se arate că dacă lungimea segmentului $[MN]$ este minimă, atunci MN este perpendicular pe BF și AC și este paralel cu DE.

d) Să se calculeze lungimea segmentului $[MN]$ în funcție de lungimea a a laturii pătratului $ABCD$ în cazul cînd $[MN]$ are o lungime minimă.

Anul 1956

Etapa regională

1. Să se simplifice expresia $x^{\frac{\log(\log x)}{\log x}}$, unde toți logaritmii au aceeași bază B.

2. Fiind dat un paralelogram $ABCD$ se notează cu M și N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[CD]$. Prin M și N se duc paralele la diagonala $[BD]$; aceste paralele intersectează dreptele AN și CM în P, respectiv Q. Să se determine aria paralelogramului $MPNQ$ în funcție de aria paralelogramului $ABCD$.

3. Să se arate că dacă

$$\frac{\cos x}{A} = \frac{\cos 3x}{B} = \frac{\cos 5x}{C},$$

atunci $A(A - B + C) = B^2$ și să se deducă de aici o relație între L, M, N din proporțiile

$$\frac{\sin x}{L} = \frac{\sin 3x}{M} = \frac{\sin 5x}{N}.$$

4. Se dă un unghi drept XOY și un semicerc OA cu centrul pe OX. Se duce prin A o dreaptă care taie semicercul în B și dreapta OY în D.

a) Să se determine lungimea segmentului $[OD]$ astfel încît segmentul $[BD]$ să aibă aceeași lungime cu diametrul semicercului.

b) Notînd cu a măsura unghiului $\widehat{OAD}$, să se arate că dacă $[BD]$ și diametrul semicercului au aceeași lungime, atunci au loc relațiile

$$\sin a = \operatorname{ctg} a, \quad \sin^3 a + 2 \operatorname{ctg} 2a = 0.$$

Etapa finală

1. Se consideră un pătrat $ABCD$ și un punct M situat în planul său. Se notează $AB = BC = CD = DA = m$, $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$.

a) În cazul particular $m = 10$, $a = 5$, $c = 1$, punctul M poate avea două poziții M_1 și M_2. Să se calculeze $M_1B = b_1$ și $M_2B = b_2$.

b) Să se arate că, în general, între lungimile m, a, b, c, există relația $a^4 + c^4 - 2(a^2 + c^2)(b^2 + m^2) + 2(b^4 + m^4) = 0$. Să se aplice acest rezultat în cazul a.

c) Să se deducă m în cazul $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$.

d) Să se dea o construcție geometrică a pătratului cînd se cunosc distanțele $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Caz particular: $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$.

e) Dacă $a = 5$ și $c = 1$, ce mulțime de valori poate lua b? Care sînt lungimile laturii pătratului care corespund valorilor extreme ale lui b?

f) Să se generalizeze punctul e pentru valori oarecare ale lui a și c.

g) Să se explice geometric de ce relația de la punctul b este simetrică în raport cu b și m.

Anul 1957

Etapa regională

1. Se dau $\log_{30}3 = a$ și $\log_{30}5 = b$. Să se exprime $\log_{30}8$ în funcție de a și b.

2. Se dau numerele 1, 5, 9, 13 în progresie aritmetică.

a) Să se afle cele două ecuații de gradul 2 care au ca rădăcini: una, primul și ultimul termen al progresiei; a doua, al doilea și al treilea termen al progresiei. Să se explice de ce în ecuațiile obținute coeficienții lui x sînt egali.

b) Se dau ecuațiile

$$x^2 - px + q = 0, \quad x^2 - px + q' = 0.$$

Să se afle ce relație trebuie să existe între coeficienții lor pentru ca cele patru rădăcini să fie în progresie aritmetică.

c) Ce relații trebuie să aibă loc între coeficienții ecuațiilor

$$x^2 - px + q = 0, \quad x^2 - p'x + q' = 0,$$

pentru ca cele patru rădăcini să fie în progresie geometrică, rădăcinile uneia dintre ecuații fiind al doilea, respectiv al treilea termen al progresiei. *(A. Șaichin)*

3. Se consideră un cub cu bazele $ABCD$, $A'B'C'D'$ În planul bazei $ABCD$ se consideră cercul de diametru $[AB]$. Fie M un punct pe acest cerc, L mijlocul segmentului $[A'M]$, I mijlocul laturii $[AB]$, N intersecția dreptei IL cu planul bazei $A'B'C'D'$.

a) Să se arate că suma $IL^2 + A'L^2$ este constantă cînd M descrie cercul.

b) Să se determine locul geometric al punctului N. *(P. Boldescu)*

Etapa finală

1. a) Se dau două progresii geometrice, prima avînd primul termen egal cu 1 și rația 3: 1, 3, 9, 27, ..., a doua avînd primul termen egal cu 1 și rația -2: 1, -2, 4, -8,... Se formează șirul în care fiecare termen este egal cu suma termenilor de același rang ai celor două progresii date: 2, 1, 13, 19,... Să se arate că în acest șir un termen este egal cu suma dintre termenul precedent și de șase ori termenul anteprecedent. De exemplu, $13 = 1 + 6 \cdot 2$, $19 = 13 + 6 \cdot 1$.

b) Să se determine două progresii geometrice astfel încît prin adunarea termenilor de același rang să obținem șirul 1, 1, 2, 3, 5, 8,... pentru care fiecare termen este egal cu suma celor doi termeni care îl preced.

c) Să se găsească rațiile a două progresii geometrice astfel încît în șirul format prin adunarea termenilor de același rang ai celor două progresii un termen să fie egal cu suma celor doi termeni care îl preced. *(A. Șaichin, O. Sacter)*

2. Dintr-un punct M exterior unui plan P, se duce perpendiculara MO pe acest plan și se consideră un punct A în planul P. Se notează $MA = a$. Fie N un punct situat pe segmentul $[MO]$, astfel încît $ON < OA$.

a) Să se arate că există două puncte B și C în planul P astfel încît NB și NC să fie perpendiculare pe MA și $NB = NC = MA$.

b) Notînd cu x și y măsurile unghiurilor pe care le fac dreptele MA și NB cu planul P, să se arate că

$$AB^2 = a^2(\cos^2 x + \cos^2 y + 2 \sin x \sin y).$$

c) Să se arate că $AB \leqslant a\sqrt{2}$ cînd punctul N variază pe segmentul $[MO]$. *(Gh. Bazacov)*

Anul 1958

Etapa regională

1. Pentru ce valori reale ale parametrului m ecuația

$$\frac{x+2m}{mx-3}+1=0$$

admite cel puțin o rădăcină pozitivă subunitară? *(M. Haivas)*

2. Să se construiască un triunghi ABC pentru care se cunoaște lungimea a a laturii $[BC]$, raza cercului circumscris R și raportul $\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n}$. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Se consideră două cercuri O_1 și O_2 de raze R, respectiv r, secante în punctele A și B. Tangenta în A la cercul O_2 intersectează cercul O_1 în C, iar tangenta în A la O_1 intersectează cercul O_2 în D. Să se arate că $AC^2\cdot BD = AD^2\cdot BC$. *(M. Haivas)*

Etapa finală

1. Se dă cercul (O) de rază R și coarda $AD=R\sqrt{3}$. Se prelungește această coardă cu un segment $[AC]$ de lungime R și pe acest segment se construiește triunghiul echilateral ABC astfel încît punctele B și O să fie de aceeași parte a dreptei CD. Prin C se duce o dreaptă care face cu CA un unghi de $45°$ de aceeași parte cu B și care intersectează pe AB în M și cercul (O) în punctele N și P. Să se arate că lungimea segmentului $[MN]$ este aceeași cu a laturii dodecagonului regulat convex înscris în cercul (O). *(Gh. Bazacov)*

2. Se consideră un triunghi ABC de arie S. Pe segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ se iau, respectiv, punctele A_1, B_1, C_1 astfel încît să avem

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}=m.$$

a) Să se exprime aria S_1 a triunghiului $A_1B_1C_1$ în funcție de S și m.

b) Să se determine valoarea lui m pentru care aria S_1 este minimă.

c) Pentru ce valoare a lui m avem $S_1=7S$? *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Se dă $\log_{20}50=a$. Să se determine $\log_8 40$. *(C. Georgescu)*

Anul 1959

Etapa regională

1. Suma primelor n numere naturale este un număr format din trei cifre egale în baza zece. Să se determine n. *(T. Roman)*

2. Se dă un paralelogram $ABCD$ și se consideră pe latura $[AB]$ un punct variabil E.

a) Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor ADE și CEB se intersectează a doua oară într-un punct F situat pe latura $[CD]$ a paralelogramului.

b) Fie I intersecția dreptei CE cu cercul circumscris triunghiului ADE, iar J intersecția dreptei AF cu cercul circumscris triunghiului BCE. Să se arate că triunghiurile ADI și BCJ sînt asemenea și să se demonstreze relația

$$EF^2 = AI \cdot CJ = \text{const.}$$

c) Să se determine locurile geometrice descrise de punctele I și J. *(C. Vasilescu)*

Etapa finală

1. Termenii unei progresii aritmetice $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ se așează într-un tabel de formă triunghiulară, în modul următor

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \; a_3 \\ a_4 \; a_5 \; a_6 \\ a_7 \; a_8 \; a_9 \; a_{10} \\ \ldots \end{array}$$

a) Să se determine termenul cu care începe linia a n-a și cel care se găsește la sfîrșitul acestei linii.

b) Așezînd în acest mod termenii progresiei aritmetice 1, 3, 5, 7,..., să se demonstreze că suma termenilor de pe oricare linie este un cub perfect.

c) Considerînd aceeași progresie ca la punctul b cu termenii așezați în modul indicat, să se determine în a cîta linie se găsește numărul 21 715, care este un termen al progresiei.

2. Într-un triunghi oarecare ABC se duce bisectoarea BD și fie E mijlocul lui $[BD]$. Paralela dusă prin A la BD intersectează pe CE în F, iar paralela dusă prin C la BD intersectează dreapta AE în G.

a) Să se demonstreze că unghiurile $\widehat{FBE}$ și $\widehat{EBG}$ sînt drepte.

b) Fie AA' și CC' perpendicularele duse respectiv din A și C pe dreapta BD. Să se demonstreze că CA', AC' și FG sînt trei drepte concurente.

Anul 1960

Etapa regională

1. Se consideră un trapez isoscel cu lungimea bazei mari egală cu $2a$ și cu diagonalele perpendiculare pe laturile neparalele.

a) Notînd cu x lungimea uneia dintre laturile neparalele, să se exprime perimetrul P al trapezului în funcție de a și x.

b) Să se determine domeniul de variație al lui x.

c) Să se afle valoarea lui x pentru care perimetrul este maxim.

d) Să se reprezinte grafic variația perimetrului ca funcție de x pentru $a = 1$. *(Lucia Țene)*

2. Se dă ecuația

$$x^2 - 2(m - 1)x + m + 5 = 0,$$

unde m este un parametru. În cazul în care ecuația admite rădăcini reale, să se arate că o rădăcină a ecuației, și numai una, este cuprinsă în intervalul $(-2, 3)$. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Se consideră triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ avînd lungimile laturilor $B_1C_1 = a_1$, $A_1C_1 = b_1$, $A_1B_1 = c_1$; $B_2C_2 = a_2$, $A_2C_2 = b_2$, $A_2B_2 = c_2$.

a) Să se arate că dacă $m(\hat{A}_1) = m(\hat{A}_2)$ atunci are loc relația

$$(b_1^2 + c_1^2 - a_1^2)\, b_2c_2 = (b_2^2 + c_2^2 - a_2^2)\, b_1c_1.$$

b) Să se arate că dacă are loc egalitatea de la punctul a, atunci unghiurile $\hat{A}_1$ și $\hat{A}_2$ au măsuri egale. *(E. Vișa)*

Etapa finală

1. a) Să se simplifice fracția

$$y = \frac{(x^2 + 3x + 3)^2 - 1}{(x^2 + 5x + 5)^2 - 1}.$$

b) Să se afle maximul și minimul acestei fracții pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, -2, -3, -4\}$, precum și valorile lui x corespunzătoare acestor extreme. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. Printr-un punct fix F din plan, cuprins între două cercuri concentrice de raze R și r ($R > r$) se duce o dreaptă mobilă care intersectează cercul de rază r în punctele M și M', iar perpendiculara dusă din F pe FM intersectează cercul de rază R în punctele N și N'.

a) Să se arate că suma $MM'^2 + NN'^2$ este constantă.

b) Să se demonstreze că suma $FM^2 + FM'^2 + FN^2 + FN'^2$ este constantă.

c) Ce poziție trebuie să aibă punctul F pentru ca punctul M să fie ortocentrul triunghiului $M'N'N$?

d) Să se arate că locul geometric al mijloacelor segmentelor $[MN]$, $[MN']$, $[M'N]$, $[M'N']$ este un cerc al cărui centru este mijlocul segmentului $[OF]$. *(C. Coșniță)*

Anul 1961

Etapa regională

1. a) Dacă numerele pozitive a, b, c sînt în progresie geometrică, să se arate că au loc egalitățile următoare

$$a^n(\sqrt{c^n} - \sqrt{b^n})(\sqrt{a^n} + \sqrt{b^n} + \sqrt{c^n}) = \sqrt{b^n}(b^n\sqrt{c^n} - a^n\sqrt{a^n}),$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^m} + \sqrt[n]{b^m} + \sqrt[n]{c^m}}{\sqrt[n]{a^{-m}} + \sqrt[n]{b^{-m}} + \sqrt[n]{c^{-m}}} = \sqrt[3n]{(abc)^{2m}}.$$

b) Să se arate că dacă a, b, c sînt în progresie geometrică, parabolele $y = ax^2 + bx + c$ și $y = ax^2 - bx + c$ nu intersectează axa Ox. Să se afle coordonatele vîrfurilor acestor parabole și ale intersecției lor cu axa Oy.

c) Să se demonstreze că dacă a, b, c sînt în progresie geometrică, au loc inegalitățile

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 - bx + c} \leqslant 3.$$

De asemenea, să se arate că fracția $\dfrac{ax^2 - bx + c}{ax^2 + bx + c}$ nu poate lua valori în afara intervalului $\left[\dfrac{1}{3}, 3\right]$. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. Într-un circuit electric între punctele A și B s-au introdus rezistențele $r_1 = 3\,\Omega$ și $r_2 = 4\,\Omega$, legate în paralel. Pentru ca rezistența totală între punctele A și B să fie $R = 1\,\Omega$ se mai introduce în paralel o a treia rezistență r_3. Știind că

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

să se afle r_3 prin construcție grafică cu rigla și compasul. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Se dau două cercuri de raze $R_1 = 2$ cm și $R_2 = 4$ cm, distanța dintre centre fiind $O_1O_2 = 9$ cm și un punct A din plan astfel încît $O_1A = \sqrt{20}$ cm și $O_2A = \sqrt{29}$ cm. Se notează cu B și C intersecțiile segmentelor $[O_1A]$ și $[O_2A]$ cu cercurile O_1, respectiv O_2 și cu D și E celelalte puncte de intersecție ale secantei BC cu cercurile O_1 și O_2.

a) Să se afle lungimile segmentelor $[BC]$ și $[DE]$.

b) Să se construiască cu rigla și compasul o secantă care să treacă prin A și să determine pe aceste cercuri coarde congruente. *(C. Ionescu-Țiu)*

Etapa finală

1. Se dă un trapez dreptunghic $ABCD$ ($m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90°$) cu baza mare $AB = a$, baza mică $CD = b$ și $AD = h$. Prin vîrful A se duce o dreaptă variabilă L care nu traversează trapezul și se notează cu B', C', D' respectiv proiecțiile punctelor B, C, D pe dreapta L. Fie $BB' = x$, $CC' = y$, $DD' = z$.

a) Să se arate că $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$. Să se exprime apoi y în funcție de x și z.

b) Să se construiască dreapta L astfel încît y să fie media aritmetică a lui x și z. Discuție.

c) Fie E simetricul lui D față de C. Să se arate că pentru poziția dreptei L construită la punctul b, lungimea segmentului $[BB']$ este egală cu distanța de la vîrful A la dreapta BE. *(Gh. D. Simionescu)*

2. Se consideră parabolele de ecuație $y = -x^2 + 2(m+1)x + 3m - 1$, unde m este un parametru real.

a) Să se arate că toate aceste parabole trec prin punctul $A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ și să se scrie ecuația parabolei din familia dată al cărei vîrf este A.

b) Să se arate că vîrfurile acestor parabole se află pe parabola

$$y = x^2 + 3x - 4. \text{ (C. Ionescu-Țiu)}$$

3. Se definește un șir de numere în modul următor:

$$u_0 = a,\ u_n = bu_{n-1} + c \text{ pentru } n \geqslant 1.$$

a) Să se determine coeficienții b și c pentru ca acest șir să fie o progresie aritmetică și să se calculeze în acest caz suma

$$s_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \quad + u_n.$$

b) Considerînd șirul numeric dat inițial, să se determine un număr d, în funcție de b și c, astfel încît șirul cu termenul general $(u_n - d)_{n \geqslant 0}$ să fie o progresie geometrică. În acest caz să se exprime u_n în funcție de n și de coeficienții a, b, c și să se calculeze suma

$$s_2 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \text{ (T. Roman)}$$

Anul 1962

Etapa regională

1. Se consideră $\mathcal{C}_1(O_1, R_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, R_2)$. Fie T_1 și T_2 punctele de contact ale acestor cercuri cu una din tangentele comune exterioare și cercul $\mathcal{C}_3(O_3, R_3)$ tangent la T_1T_2 și tangent cercurilor $\mathcal{C}_1(O_1, R_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, R_2)$ în punctele t_1 și t_2.

a) Să se calculeze lungimea T_1T_2 în funcție de R_1 și R_2.

b) Să se calculeze raza R_3 a cercului $\mathcal{C}_3(O_3, R_3)$ în funcție de R_1 și R_2.

c) Să se deducă inegalitatea $8R_3 \leqslant T_1T_2$ și să se arate în ce caz este egalitate.

d) Să se determine raportul în care este împărțit segmentul T_1T_2 de punctul de contact A cu cercul $\mathcal{C}_3(O_3, R_3)$.

e) Notînd cu T punctul de contact al cercurilor $\mathcal{C}_1(O_1, R_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, R_2)$ să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor O_1Tt_1, O_2Tt_2 și $O_3t_1t_2$ trec prin centrul cercului înscris în triunghiul $O_1O_2O_3$. *(C. Georgescu)*

2. a) Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} x + y + z &= m, \\ xy + xz + yz &= m, \\ xyz &= 1. \end{aligned}$$

b) Să se afle valorile lui m pentru care toate soluțiile sistemului dat sînt reale.

Etapa finală

1. a) Se dă ecuația în m, $am(m-1) + (b-c)m + c = 0$, cu rădăcinile m_1 și m_2. Să se calculeze $m_1^3 + m_2^3$ în funcție de a, b și c.

b) Pentru care valori ale lui m expresia $am(m-1) + (b-c)m + c$ este minimă sau maximă și care sînt aceste extreme?

c) Să se arate că $(\forall) m \in \mathbf{R}$ și a, b, c lungimile laturilor unui triunghi, există inegalitatea $am(m-1) + (b-c)m + c > 0$.

d) Să se arate poziția parabolei corespunzătoare funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax(x-1) + (b-c)x + c$ față de axele de coordonate. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. Se dau două cercuri fixe cu centrele A, respectiv B, tangente exterior în punctul T și de raze a, respectiv b. Notăm cu P mijlocul segmentului $[T_1T_2]$, unde T_1 și T_2 sînt punctele de contact cu o tangentă exterioară cercurilor date. Un al treilea cerc tangent exterior celor două cercuri date în punctele R și S are centrul în C și raza c.

a) Să se arate că cercul circumscris triunghiului TRS este același cu cercul înscris în triunghiul ABC. Fie I centrul acestui cerc și raza lui x.

b) $PT^2 = ab$.

c) $IA^2 - IB^2 = AB(CA - CB)$.

d) $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}$

e) Să se determine locul geometric al punctului I, atunci cînd a și b sînt constante iar c este variabilă. *(C. Ionescu-Țiu)*

Anul 1963

Etapa regională

1. a) Să se discute rădăcinile ecuației $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$, unde m este un parametru real.

b) Să se exprime minimum V al trinomului $f(x) = x^2 - mx + 2m - 3$ în funcție de m.

c) Să se afle valoarea lui m pentru care V este maxim.

d) Să se afle valoarea lui m pentru care $f(x) \geqslant 0$, oricare ar fi x real. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. a) Să se arate că dacă într-un triunghi ABC între mediane și laturi au loc relațiile $\frac{m_c}{b} = \frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{c}$, atunci b^2, a^2, c^2 sînt în progresie aritmetică.

b) Reciproc, dacă b^2, a^2, c^2 sînt în progresie aritmetică, există relațiile precedente.

c) Să se construiască grafic un astfel de triunghi ABC, cînd laturile a și b sînt date. *(I. Hadîrcă)*

Etapa finală

1. a) Să se rezolve sistemul

$$xy = (0{,}5)^{-\log_2(a - x^2)},$$

$$y = 4^{\log_2\sqrt{a^2 + xy - 1}}.$$

b) Să se găsească valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluții reale. *(E. Stănescu)*

2. Pe un segment $[OO']$ de lungime a se ia un punct M și se descriu două cercuri tangente exterioare cu razele $[OM]$ și $[O'M]$. De o parte a liniei centrelor se duce tangenta comună $[AB]$, iar de cealaltă parte tangenta $[OC]$ din O la cercul (O') și tangenta $[O'D]$ din O' la cercul (O). Se cere:

a) să se arate că pentru oricare poziție a punctului M pe $[OO']$ raportul $\frac{MA^2 + MB^2}{MC^2 + MD^2}$ are o valoare constantă;

b) să se determine poziția punctului M pe $[OO']$ în cazul cînd aria patrulaterului $ABOO'$ este egală cu $k \cdot OB \cdot O'A$, pentru $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

c) ce alte valori poate avea k pentru ca problema de la punctul b să fie posibilă? *(Gh. Bazacov)*

Anul 1964

Etapa regională

1. a) Să se determine m astfel ca $(m - 2)$, $2(m + 1)$, $5m$ să fie în progresie aritmetică.

b) Să se afle valorile lui x pentru care are loc relația

$$|(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 5m| < 3,$$

m avînd valoarea determinată la punctul a.

c) Să se afle mulțimea valorilor lui m pentru care trinomul $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + 5m$ admite: un maxim mai mare decît -1; un minim mai mic decît -1. *(A. Matei)*

2. Se consideră triunghiul ABC. Cercul dus prin vîrfurile B și C tangent în B la AB, taie pe AC în punctul E, iar cercul dus prin B și C tangent în punctul C la AC, taie pe AB în punctul E_1. Se cere:

a) Să se arate că triunghiurile ABE și ACE_1 sînt asemenea.

b) Să se calculeze AE, EC, AE_1 și E_1B în funcție de laturile a, b, c ale triunghiului ABC.

c) Să se calculeze bazele trapezului $BECE_1$ și să se arate că avem relația $BE \cdot E_1C = a^2$. *(O. Mărculescu)*

Etapa finală

1. Se dă funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ și două variabile strict pozitive și diferite p și q, legate prin relația $p + q = x_1 + x_2$, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile funcției date.

a) Să se calculeze $f(p) - f(q)$.

b) Să se studieze în ce caz expresia $f(p) + f(q)$ admite un maximum sau un minimum și să se exprime acel maxim sau minim în funcție de a, b, c. *(L. Mănescu)*

2. a) Să se determine valorile lui x pentru care avem

$$m^{\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-2}} < m^2, \text{ unde } 0 < m < 1.$$

b) Se dă $\log_{108} 3 = a$ și $\log_{168} 7 = b$. Să se exprime $\log_{24} 2$ în funcție de a și b. *(A. Matei)*

3. a) Să se construiască cu rigla și compasul, un triunghi ABC cunoscînd unghiul A, raza cercului înscris r și raza cercului circumscris R. Desenul se va face în cazul particular $m(\hat{A}) = 45°$, $r = 2$ cm, $R = 5$ cm.

b) Să se arate că $\dfrac{1}{R-d} + \dfrac{1}{R+d} = \dfrac{1}{r}$, unde $d = OI$, O fiind centrul cercului circumscris și I centrul cercului înscris.

c) Se dă unghiul ascuțit xoy și un punct A interior lui. Prin A se duce o dreaptă care taie laturile ox, oy, respectiv, în M și P; tot prin A se duce o perpendiculară pe MP, care taie aceleași laturi în N și Q. Fie H proiecția lui A pe NP și I proiecția lui A pe MQ. Să se demonstreze că $\dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \text{const.}$

Anul 1965

Etapa regională

1. a) Să se afle mulțimea valorilor reale ale parametrului variabil m pentru care ecuația $(m+1)^2x^2 - (m^2-1)x + 2 - 3m = 0$, are ambele rădăcini reale.

b) Fie $V(a, b)$ vîrful parabolei de ecuație $y = (m+1)^2x^2 - (m^2-1)x + 2 - 3m$. Să se afle mulțimea valorilor parametrului m astfel ca vîrful $V(a, b)$ să fie în interiorul dreptunghiului cu centrul în $A\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ și cu laturile paralele cu axele de coordonate, laturile paralele cu $x'x$ fiind de o unitate, iar cele paralele cu $y'y$ de patru unități. *(N. Peligrad)*

2. Să se arate că dacă $1 \leqslant x \leqslant 2$ avem

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2. \textit{ (C. Ionescu-Ţiu)}$$

3. Mediatoarea laturii $[AB]$ a unui triunghi întîlneşte pe AC în F, iar mediatoarea laturii $[AC]$ întîlneşte pe AB în D.

a) Să se arate că triunghiul ADF este asemenea cu triunghiul ABC.

b) Să se calculeze lungimea DF.

Etapa finală

1. Să se găsească minimumul expresiei $y = x - 1 - \sqrt{2x-1}$. *(M. Dabija)*

2. a) Să se arate că

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+\frac{1}{\log_4 a}+\frac{1}{\log_5 a}=\frac{1}{\log_{120} a},\ a \in (0, +\infty)\setminus\{1\}.$$

b) Să se generalizeze. *(C. Ionescu-Ţiu)*

3. Pe mulţimea $A = (0, +\infty)\setminus\{1\}$ definim legea de compoziţie: $u * v = \log_u v - \log_v u$ pentru orice $u, v \in A$. Să se rezolve ecuaţia $a * b^x - b * a^x = 2(\log_a b - \log_b a)$, $a, b \in A$ şi $a \neq b$ în mulţimea A. *(C. Georgescu)*

4. Într-un cerc de rază unu se înscrie patrulaterul $ABCD$ în care $AB = l_5$ (latura pentagonului convex regulat înscris în cerc), $BC = l_3$ (latura triunghiului echilateral înscris) şi $DA = l_6$ (latura hexagonului).

a) Să se calculeze CD.

b) Să se calculeze AC.

c) Dreptele AB şi CD se taie în E. Să se calculeze distanţa de la punctul E la centrul cercului.

d) Să se construiască grafic o secantă care să treacă prin centrul cercului O şi să taie pe AB în M şi pe CD în N astfel ca $[OM] \equiv [ON]$. *(Gh. D. Simionescu)*

Anul 1966

Etapa regională

1. Fie $E_1 = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ şi $E_2 = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

a) Să se determine mulţimea valorilor lui x pentru care expresiile E_1 şi E_2 au sens.

b) Să se verifice identităţile

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}},$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}}-\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}}.$$

c) Să se calculeze valoarea numerică a sumei $E_1 + E_2$ pentru $x = \frac{7}{3}$ şi $x = \frac{5}{3}$. *(Lucia Ţene)*

2. Într-un triunghi oarecare ascuţitunghic ABC ducem mediana $[AL]$ şi înălţimea $[AD]$ şi fie E şi F mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[AC]$. Perpendicularele în

L pe LE și LF taie laturile $[AC]$ și $[AB]$, respectiv, în P și Q, iar perpendicularele în D pe DE și DF taie aceleași laturi, respectiv, în M și N.

a) Să se arate că patrulaterul $APLQ$ este inscriptibil.

b) Patrulaterul $AMDN$ este inscriptibil și ortodiagonal.

c) Să se precizeze care este coarda comună a cercurilor de la punctele a și b, precum și linia centrelor. *(L. Mănescu)*

Etapa finală

1. a) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia

$$E = \left[\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} - 2\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} - \frac{\sqrt[3]{a^2} - 3\sqrt[3]{ab} + 2\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}\right](\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}).$$

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei de la punctul a pentru

$$a = \sqrt{\frac{81^{0,75} + \left(\frac{1}{25}\right)^{-1/2}}{(0,5)^{-1}}} \text{ și } b = \sqrt{a}. \text{ (A. Matei)}$$

2. Să se rezolve ecuația

$$\frac{(b-c)(x+a)}{x-a} + \frac{(c-a)(x+b)}{x-b} + \frac{(a-b)(x+c)}{x-c} = 0.$$

3. Fie ABC un triunghi oarecare. Se duc MM' paralel cu BC, NN' paralel cu AB și PP' paralel cu AC și tangente cercului înscris triunghiului ABC, respectiv în punctele J, L, K (M și P sînt pe AB; M' și N sînt pe AC; N' și P' sînt pe BC). Fie D, E, F punctele de tangență ale cercului înscris triunghiului ABC, respectiv, cu laturile BC, AC, AB ale triunghiului ABC. Să se arate că:

a) suma perimetrelor triunghiurilor AMM', BPP', CNN' este egală cu perimetrul triunghiului ABC;

b) triunghiurile DEF și JKL sînt egale.

c) Fie $\{Q\} = JK \cap EF$, $\{R\} = JL \cap EF$, $\{S\} = JL \cap DE$, $\{T\} = DE \cap LK$, $\{U\} = LK \cap DF$ și $\{V\} = DF \cap JK$. Să se arate că dreptele QT, RU, SV sînt concurente.

d) Dacă R este raza cercului circumscris triunghiului ABC și R_a, R_b, R_c razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AMM', BPP' respectiv CNN', atunci există relația $R_a + R_b + R_c = R$. *(P. Simion)*

Anul 1967

Etapa regională

1. Fie expresia

$$E(x) = \sqrt[6]{x^3 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{2}\left(3x^2 + \frac{1}{4}\right)} + \sqrt[4]{x(x-1) + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 4x + 1}.$$

Se cere:

a) să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care expresia are sens și să se aducă la forma cea mai simplă;

b) să se calculeze $E(x_0)$ unde $x_0 = a^2 + 2a + \frac{3}{2}$. *(Gh. Ruse)*

2. Un grup de 33 de elevi sînt împărțiți în trei colective A, B, C fiecare colectiv avînd cîte 16 elevi. Știind că 5 elevi din A sînt și în B, 7 elevi din A sînt și în C, iar 3 elevi sînt în toate cele trei colective, se cere:

a) cîți elevi fac parte numai dintr-un colectiv?

b) cîți elevi fac parte numai din două colective? *(Lucia Țene)*

3. Fie $ABCDEF$ un hexagon înscris într-un cerc de centru O și rază R și $AB = CD = EF = R$. Dacă se notează cu I, a, d, j, k, respectiv, mijloacele segmentelor $[BC]$, $[OA]$, $[OD]$, $[DE]$, $[FA]$, să se arate că:

a) patrulaterul $IOaB$ este inscriptibil;

b) triunghiurile adI și IjK sînt echilaterale.

Etapa finală

1. Fie ecuația $x^2 + 4x - 16 = m(x - 4)$. Să se afle o relație independentă de m între rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației.

2. Dacă $z_1 = x_1 + iy_1$ și $z_2 = x_2 + iy_2$ sînt două numere complexe, legate prin relația $z_2 = \dfrac{1 - \bar{z}_1}{1 + \bar{z}_1}$, unde $\bar{z}_1$ este conjugatul lui z_1, se cere:

a) să se arate că y_1 și y_2 au același semn.

b) ce condiții trebuie să îndeplinească y_1 și y_2 pentru ca $z_1 + z_2$ să fie număr real?

3. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\frac{mx - 2}{x - 2} = 4 \text{ după valorile parametrului } m. \textit{ (Lucia Țene)}$$

4. Trei grupe de pescari din cadrul unei filiale de pescuit sportiv aflîndu-se la un concurs au pescuit în total 113 pești. În medie, fiecare membru al grupei întîi a prins 13 pești, fiecare membru al grupei a doua a prins 5 pești și fiecare membru al grupei a treia a prins 4 pești. Să se afle numărul membrilor din fiecare grupă știind că în total au fost 16 pescari.

5. Se dă un triunghi ABC ascuțitunghic. Pe latura $[AC]$ drept coardă și în exteriorul triunghiului se construiește arcul capabil de unghiul B, iar pe $[AB]$ drept coardă și tot în exterior, arcul capabil de unghiul C. O dreaptă variabilă ce trece prin A taie arcele, respectiv, în B' și C'. Dreptele $B'C$ și $C'B$ se taie în A'.

a) Să se arate că locul geometric al punctului A', cînd $C'B'$ se rotește în jurul punctului A, este un arc de cerc.

b) Să se arate că cercurile cărora le aparțin arcele $\widehat{AB'C}$, $\widehat{BC'A}$ și arcul loc geometric au un punct comun.

c) Fie C_1, C_2, C_3 centrele celor două cercuri și centrul cercului din care face parte locul geometric. Să se arate că triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul $C_1C_2C_3$. *(D. Manolache)*

6. Se dă un segment $[AB]$ și se consideră transformarea punctuală $M' = T(M)$ care face să corespundă unui punct M din plan, punctul M' de intersecție a perpendicularelor în A și B, respectiv pe AM și BM.

a) Care este figura omoloagă a unei drepte care trece prin punctul A?

b) Care este figura omoloagă a unui cerc care trece prin punctele A și B?

Anul 1968

Etapa județeană*

1. Să se determine mulțimile A și B știind că:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$.

c) $1 \notin A \setminus B$.

d) $2 \notin B \setminus A$. *(E. Georgescu-Buzău)*

2. Să se calculeze expresia $E(x, y) = \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{y+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1}}$ pentru $x = \dfrac{2a^2 - 2a + 3}{a^2 + 2}$, $y = \dfrac{-4a + 2}{a + 2}$, $a \in \mathbf{R}$. *(Lucia Țene)*

3. Să se rezolve ecuația $x^2 - 2x - 2\sqrt{(x-1)^2} - 2 = 0$. *(Lucia Țene)*

4. Cîte ecuații cu rădăcini reale de forma $x^2 + 2px + q = 0$ se pot forma, dacă $p \in \{-1, 0, 1, 2\}$ și $q \in \{-2, -1, 0, 3\}$? *(E. Georgescu-Buzău)*

5. Tangenta în B la cercul $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului ABC intersectează pe AC în D. Cercul $\mathcal{C}_1$ circumscris triunghiului BCD intersectează dreapta AB în E. Să se arate că:

a) Triunghiul BDE este isoscel.

b) Cercul circumscris lui ACE este tangent dreptei DE.

c) Dreapta AD este perpendiculară pe DE.

Etapa finală

1. Să se determine mulțimile X și Y știind că satisfac condițiile:

a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

b) $X \cap Y = \{1, 2, 3, 4\}$;

c) $\{4, 6\} \not\subset X$;

d) $\{5, 6\} \not\subset Y \setminus X$. *(E. Georgescu-Buzău)*

2. Să se arate, folosind o grupare convenabilă, că ecuația

$$a^2x^2 - x(2ab - b^2) - 2b^2 = 0, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0,$$

are rădăcini mai mici decît 3. *(Lucia Țene)*

3. Pe arcul $\widehat{BC}$, căruia nu-i aparține punctul A, al cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC, cu unghiul drept A, se consideră un punct M. Fie P, respectiv Q, simetricul punctului M față de dreapta AB, respectiv AC.

a) Să se arate că punctele P, A, Q sînt coliniare.

b) Să se determine poziția punctului M astfel încît lungimea segmentului PQ să fie maximă.

c) Să se arate că dacă dreapta PQ este tangentă la cerc în A, atunci punctul M este simetricul lui A față de dreapta BC și, reciproc, dacă punctul M este simetricul lui A față de dreapta BC, atunci dreapta PQ este tangentă la cerc în punctul A.

d) Să se arate că dacă patrulaterul $BMQT$ este inscriptibil, atunci segmentele $[AM]$ și $[AB]$ sînt congruente și, reciproc, dacă $[AM] \equiv [AB]$, atunci patrulaterul $BMQT$ este inscriptibil. *(T. Weszely)*

---

* Noua împărțire administrativă.

Se notează $\{M\} = PA \cap QB$ și $\{N\} = PB \cap QA$.

a) Să se arate că dreapta MN trece printr-un punct fix.

b) Să se afle locul geometric al punctului M în ipoteza $PQ = 2l$(const). *Idem* pentru punctul N. Discuție.

c) Considerînd poziția în care $MN \perp AB$ și $l < a$, să se afle valorile lui l în funcție de a și d pentru care N este centrul cercului înscris în triunghiul MAB. Discuție. *(E. Constantinescu)*

Anul 1970

Etapa județeană

1. Fie mulțimile

$$A = \{x \mid x = 2n - 1;\ n \in \mathbf{N}\},$$
$$B = \{x \mid x = 501 - 3m;\ m \in \mathbf{N}\},$$
$$C = \{x \mid x = 501 - 6p;\ p \in \mathbf{N},\ p \leqslant 83\},$$

unde $\mathbf{N}$ este mulțimea numerelor naturale. Să se arate că $A \cap B = C$.

2. Să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \frac{1 + A \cdot B}{A + B} - \frac{1 - A \cdot B}{A - B}, \text{ unde}$$

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$
$$B = (3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}) / (3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}).$$

3. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se construiesc în exterior pătratele $ABCE$ și $ACFG$. Se duce perpendiculara AI pe EC, $I \in EG$ și $\{M\} = AI \cap BC$. Notăm cu O_1 și O_2 centrele celor două pătrate construite și cu P intersecția lui EC cu BG. Să se arate că:

a) $EC = BG$;

b) $[PA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{EPG}$;

c) AM este mediană în triunghiul ABC și $2AM = EG$;

d) $\widehat{EPG}$ este drept;

e) O_1O_2 este mediatoarea segmentului $[AP]$. *(E. Onofraș)*

4. Se consideră ecuația

$$2(m + 2)x^2 - 2(m + 1)(m + 2)x + m = 0.$$

Să se arate că dacă $m \in \mathbf{R}$, $m > 0$, ecuația admite o rădăcină pozitivă subunitară. *(L. Pîrșan)*

Etapa finală

1. Se dau trei drepte în plan (d_1), (d_2) și (d_3) care nu sînt concurente. Dreapta (d_3) taie pe (d_1) în B și pe (d_2) în C. O dreaptă variabilă (d) taie pe (d_1) în P, pe (d_2) în Q și pe (d_3) în R. Notăm cu M cel de-al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor BPR și CQR. Se cere:

a) locul geometric al punctului M;

b) să se studieze cazul cînd dreptele (d_1) și (d_2) sînt paralele;

c) dacă $\{A\} = (d_1) \cap (d_2)$, ce relație există între segmentele (MA), (MB), (MC) în cazul cînd triunghiul ABC este echilateral? *(N. Teodorescu)*

Anul 1969

Etapa județeană

1. Fie polinoamele $P_1 = a^3 - 3a^2 + 4$, $P_2 = a^3 + 5a^2 + 8a + 4$ și expresia

$$E(a) = \frac{\sqrt{a^3 - 3a^2 + 4} + \sqrt{a^3 - a^2 - a + 1}}{\sqrt{a^3 + 3a^2 + 3a + 1} - \sqrt{a^3 + 5a^2 + 8a + 4}}.$$

Să se arate că:

a) polinoamele P_1 și P_2 sînt divizibile cu $(a + 1)$;

b) $E(a)$ este constantă pentru $1 < a < 2$. *(L. Pîrșan)*

2. Să se arate că dacă $1 > x > y > 0$, atunci

$$\frac{x}{y} < \frac{x + 1 - \sqrt{1 - x^2}}{y + 1 - \sqrt{1 - y^2}}. \quad \textit{(C. Ionescu-Țiu)}$$

3. Să se determine mulțimile A, B și coeficienții p și q reali, știind că:

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x + p = 0\}$,

$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + qx - 3 = 0\}$,

$A \cup B = \{-2, -1, 1, 3\}$; $-1 \notin A \setminus B$, $1 \notin B \setminus A$. *(Lucia Țene)*

4. Înălțimea $[AA']$ a triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$ taie cercul circumscris triunghiului în E, iar bisectoarea unghiului EAC taie același cerc în D. Tangenta la cerc în D intersectează dreptele AE, AC, BC, respectiv, în F, I, L. Să se arate că:

a) patrulaterul $BHCE$ este romb (H fiind ortocentrul triunghiului ABC);

b) punctele A, B, F, L sînt situate pe același cerc;

c) cum trebuie să fie triunghiul ABC pentru ca să avem $EB = EH = EC$?

d) cum trebuie să fie triunghiul ABC pentru ca triunghiul CIL să fie isoscel? *(Elena Flondor)*

Etapa finală

1. Se dă ecuația

$$x^2 - a(a - 2)x - (a - 1)^2 = 0, \quad a \in \mathbf{R}.$$

a) Să se arate că ecuația are rădăcini reale pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și apoi să se rezolve.

b) Să se determine mulțimea valorilor lui a care verifică inegalitatea

$$2\sqrt{x_1 + x_2 - 2(a - 2)} - 3\sqrt{-x_1x_2} \geqslant 1,$$

unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației date. *(A. Ghioca)*

2. a) Să se arate că dacă $x > 0$, $y > 0$, atunci

$$(x + y)^2 \geqslant 2(x + y)\sqrt{xy} \geqslant 4xy.$$

b) Să se arate că dacă a, b, c sînt numere pozitive și $a + b + c = 1$, atunci

$$3(ab + bc + ca) \leqslant 1 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$4(ab + bc) \leqslant 2\sqrt{ab + bc} \leqslant 1,$$

$$4a(1 - a) \leqslant 2\sqrt{a(1 - a)} \leqslant 1. \quad \textit{(C. Ionescu-Țiu)}$$

3. Pe dreapta (D) se consideră două puncte mobile P și Q. Fie $[AB]$ un segment de lungime $2a$, paralel cu (D) la distanța d de (D).

2. Se dau mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Să se determine mulțimea X astfel încît să avem

$$(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = B.$$

3. Fie x, y, z trei numere reale. Să se demonstreze că dacă $x + y + z = 0$, atunci $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

4. Să se calculeze

$$E(a, b, c) = \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)},$$

unde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$. *(Gh. Rizescu)*

Anul 1971

Etapa județeană

1. Prin mijlocul M al corzii $[AB]$ a unui cerc se duc alte două corzi arbitrare $[CD]$ și $[EF]$, punctele C și E fiind pe același arc $\widehat{AB}$. Paralela prin E la AB taie a doua oară cercul în punctul G iar CF și ED taie AB în punctele U și V.

a) Să se demonstreze că patrulaterul $CGUM$ este inscriptibil.

b) Să se arate că triunghiurile GUM și EMV sînt congruente.

c) Dreptele CE și FD taie pe AB în P, respectiv Q. Să se demonstreze că patrulaterul $QGUF$ este inscriptibil.

d) Să se arate că $PM = MQ$.

2. a) Să se demonstreze identitățile

$$(a^2 + b^2)(A^2 + B^2) - (aA + bB)^2 = (aB - bA)^2,$$
$$(a^2 + b^2 + c^2)(A^2 + B^2 + C^2) - (aA + bB + cC)^2 =$$
$$= (aB - bA)^2 + (aC - cA)^2 + (bC - cB)^2.$$

b) Să se deducă din punctul a implicațiile duble

$$(a^2 + b^2)(A^2 + B^2) = (aA + bB)^2 \Leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B};$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(A^2 + B^2 + C^2) - (aA + bB + cC)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

c) Se consideră polinoamele

$$(a + AX)^2 + (b + BX)^2,\ (b + BX)^2 + (c + CX)^2,$$
$$(c + CX)^2 + (a + AX)^2,\ (a + AX)^2 + (b + BX)^2 + (c + CX)^2,$$

pe care le notăm, respectiv, cu $p_1(X)$, $p_2(X)$, $p_3(X)$, $p(X)$, iar a, b, c, A, B, C sînt numere întregi. Să se arate că dacă cel puțin două din polinoamele p_1, p_2, p_3 sînt pătrate perfecte, atunci și p este un pătrat perfect.

d) Reciproc, dacă p este un pătrat perfect, atunci p_1, p_2, p_3 sînt pătrate perfecte.

e) Dacă p este pătrat perfect, atunci nu există nici un număr întreg x astfel încît $\sqrt{p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)}$ să fie un număr întreg.

Etapa finală

1. Se consideră următoarea mulțime M de numere reale:

$$M = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid \alpha = \sqrt{x + 2(1 - \sqrt{x+1})} - \sqrt{x+1},\ x \in [-1, +\infty)\}.$$

a) Să se arate că mulțimea $M' \subset M$, definită astfel:

$$M' = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid \alpha = \sqrt{x + 2(1 - \sqrt{x+1})} - \sqrt{x+1},\ x \in [0, +\infty)\},$$

are un singur element.

b) Să se determine mulțimea $M \setminus M'$. *(I. N. Onuță)*

2. Se consideră mulțimile de perechi de numere reale:

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 - y^2 = 3x - 4y\},$$
$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 2xy = 4x + 3y\}.$$

Să se determine mulțimea

$$M = \{z = x^2 + y^2 \mid (x, y) \in M_1 \cap M_2\}.$$ *(L. Panaitopol)*

3. a) Să se arate că romburile cu vîrfurile situate pe fiecare din laturile unui dreptunghi dat sînt asemenea.

b) Se consideră mulțimea T a triunghiurilor dreptunghice care au vîrfurile unghiurilor ascuțite pe fiecare din laturile unui unghi drept xOy, iar vîrful unghiului drept al triunghiurilor este situat într-un punct fix A din interiorul unghiului xOy. Să se determine triunghiul $\Delta \in T$ de perimetru minim.

Notă. La punctul b se poate folosi, eventual, rezultatul de la punctul a.

c) Fie un patrulater convex $ABCD$, cu proprietatea

$$\sigma[ABC] \leqslant \sigma[BCD] \leqslant \sigma[CDA] \leqslant \sigma[DAB],$$

unde prin $\sigma[ABC]$ se înțelege aria triunghiului ABC. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este un trapez. *(L. Panaitopol)*

Anul 1972

Etapa județeană

1. Se dau numerele $N_1 = a\sqrt{a} + \sqrt{ab}$ și $N_2 = b\sqrt{b} + \sqrt{ab}$, unde a și b sînt două numere reale strict pozitive. Să se demonstreze următoarele propoziții:

a) dacă $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3$ și $\sqrt{ab} = 1$, atunci $N_1 + N_2 = N_1 \cdot N_2 = 20$;

b) dacă numerele $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ și $\sqrt{ab}$ sînt raționale, atunci numerele $N_1 + N_2$ și $N_1 \cdot N_2$ sînt de asemenea raționale;

c) dacă a și b sînt numere raționale strict pozitive, atunci condiția necesară și suficientă ca numerele N_1 și N_2 să fie raționale este ca numerele $\sqrt{a}$ și $\sqrt{b}$ să fie raționale. *(E. Onofraș)*

2. Să se rezolve inecuația $\dfrac{x - m}{1 - mx} \geqslant 1$ în raport cu valorile reale ale parametrului m. Discuție. *(L. Panaitopol)*

3. a) Să se găsească $x \in \mathbf{R}$ pentru care există radicalul

$$\sqrt[36-x^2]{x}.$$

b) Să se arate ca există numai două valori reale ale lui x care verifică egalitatea

$$\sqrt[36-x^2]{x} - \sqrt[3-x]{1+x} + 1 = 0,$$

și să se precizeze aceste valori. *(A. Ghioca)*

4. Se dau două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ de centre O_1 și O_2 care se taie în punctele A și B.

a) Prin A se duc secantele $A_1AA_2(A_1 \in \mathcal{C}_1;\ A_2 \in \mathcal{C}_2)$ și $B_1AB_2(B_1 \in \mathcal{C}_1,\ B_2 \in \mathcal{C}_2)$ egal înclinate față de O_1O_2. Să se demonstreze că $A_1A_2 = B_1B_2$.

b) Să se construiască secanta A_1AA_2 astfel încît $A_1A_2 = l$.

c) Între ce limite poate varia l?

LICEE DE SPECIALITATE

1. Să se determine mulțimea numerelor reale x care satisfac egalitatea

$$\|x - |x+1\| - |x + |x-1|\| = 0. \ \textit{(D. Radu)}$$

2. Se consideră mulțimea

$$M = \left\{ y \mid y = \frac{2x^2+5x+9}{2x+3},\ x \in \mathbf{Q} \right\}.$$

Să se determine mulțimea $M \cap \mathbf{Z}$ (unde $\mathbf{Q}$ este mulțimea numerelor raționale și $\mathbf{Z}$ este mulțimea numerelor întregi). *(D. Radu)*.

3. Un unghi $\hat{A}$ de 75° este împărțit în două unghiuri printr-o dreaptă AP, unul de 30° și altul de 45°, $AP = 5$. Să se ducă prin P o dreaptă care taie laturile unghiului $\hat{A}$ în punctele B și C astfel ca $BP = PC$. *(C. Ionescu-Țiu)*

Etapa finală

1. Două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sînt secante în A și B. Fie C un punct fix pe $[BA]$. Prin B se duce o secantă mobilă care taie $\mathcal{C}_1$ în M și $\mathcal{C}_2$ în N. CM și CN taie a doua oară cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ în Q, respectiv P.

a) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

b) Se cere locul geometric al intersecției mediatoarelor segmentelor $[AP]$ și $[AQ]$.

c) Care este poziția lui MN astfel încît raza cercului circumscris triunghiului AMN să fie maximă?

2. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\frac{\sqrt[n]{a-x} + \sqrt[n]{x-b}}{\sqrt[n]{a-x}} = \frac{3\sqrt[n]{a-x} - \sqrt[n]{x-b}}{\sqrt[n]{x-b}},\quad a, b, x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}.$$

3. Fie ecuația $x^2 + ax + b = 0$,
unde a și b sînt numere întregi nenule. Se consideră următoarele afirmații:

(p_1). Dacă ecuația dată admite o rădăcină rațională, atunci această rădăcină este întreagă.

(p_2). Dacă ecuația dată admite o rădăcină întreagă, atunci această rădăcină divide pe b.

(p_3). Dacă ecuația dată admite o rădăcină întreagă, atunci cealaltă rădăcină este de asemenea întreagă.

1) Sînt propozițiile (p_1), (p_2), (p_3) echivalente din punct de vedere logic?

2) Sînt adevărate propozițiile (p_1), (p_2), (p_3)? *(D. Radu)*

4. Se dă un pătrat cu latura 1.

a) Să se arate că oricum am considera cinci puncte interioare lui, există cel puțin două astfel încît distanța dintre ele să fie mai mică decît $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Se poate găsi o propoziție analoagă pentru hexagonul regulat cu latura 1?

Anul 1973

Etapa județeană

1. Pentru orice număr real x se consideră numărul

$$E(x) = \sqrt{2x + 19 - 8\sqrt{2x+3}} + \sqrt{2x + 7 - 4\sqrt{2x+3}}.$$

a) Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbf{R} \mid E(x) \in \mathbf{R}\}$.

b) Să se arate că există un interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$, în care $E(x)$ este constant. *(L. Pîrşan)*

2. Se dă sistemul

$$mx + ky = 10, \quad kx + my = 10, \quad \text{cu } m, k \in \mathbf{N}.$$

Să se găsească mulțimea perechilor (m, k) pentru care sistemul are soluție formată din numere naturale.

3. Pentru ce valori ale lui x are loc egalitatea

$$\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}} = \sqrt[5x]{2x}.$$ (C. *Ottescu, L. Pîrşan)*

4. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$ unghiurile $\hat{A}$ și $\hat{B}$ sînt drepte, iar diagonala $[BD]$ este egală cu baza mare $[BC]$.

a) Să se arate că cercul circumscris triunghiului isoscel BDC intersectează segmentul $[AB]$ într-un punct E.

b) Să se arate că $[DE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ADB}$.

c) Să se arate că paralela dusă prin E la bazele trapezului trece prin intersecția diagonalelor trapezului. *(C. Ionescu-Țiu)*

5. Se dă un segment de dreaptă $[AB]$, o dreaptă d care nu taie segmentul și un punct M mobil pe d. Să se arate că punctul M al dreptei astfel încît unghiul $\widehat{AMB}$ să fie maxim se găsește pe cercul ce trece prin A și B, tangent la dreapta d.

6. Să se arate că în orice poligon convex nu putem avea mai mult de trei unghiuri ascuțite. *(A. Hollinger)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Să se arate că pentru orice a număr întreg,

$$\frac{1}{2}(a^3 - 2a^2 + 3a - 1) \text{ nu este număr întreg.}$$ *(I.C. Ligor)*

2. Se presupune că sistemul

$$ay + bx = c,$$
$$cx + az = b,$$
$$bz + cy = a,$$

cu $a, b, c \in \mathbf{R}$, are soluție unică. Să se demonstreze că $abc \neq 0$ și să se rezolve.

Etapa finală

1. Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 - 3x + 4 = 0$, să se calculeze

$$\frac{x_1^2 - 4x_1 + 5}{x_1^2 - 6x_1 + 10} + \frac{x_2^2 - 4x_2 + 5}{x_2^2 - 6x_2 + 10}. \quad \textit{(L. Pîrșan)}$$

2. Un trapez are baza $AB = a$, baza $CD = b$ și aria S. Diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ se întîlnesc în punctul I. Paralela la bază dusă prin I taie laturile $[AD]$ și $[BC]$, respectiv, în M și N. Notăm ariile triunghiurilor ABI, BCI, DCI și AID, respectiv, cu S_1, S_2, S_3 și S_4; iar ariile trapezelor $ABNM$ și $DCNM$, respectiv, cu S_a și S_b.

a) Să se arate că $2(S_1 + S_3) \geqslant S \geqslant 2(S_2 + S_4)$.

b) Să se exprime S_1, S_2, S_3, S_4 în funcție de a, b, S.

c) Să se exprime S_a și S_b în funcție de a, b și S. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Să se rezolve

$$\sqrt{mx^2 - x + 1} + \sqrt{mx^2 + x + 1} = x, \text{ cu } m \in \mathbf{R}.$$

4. Două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ verifică condițiile:

1) $AB \leqslant A'B'$; 2) $BC \leqslant B'C'$; 3) $AC \leqslant A'C'$;

4) $\sigma[ABC] \geqslant \sigma[A'B'C']$;

5) triunghiurile sînt ascuțitunghice.

a) Să se arate că triunghiurile sînt congruente.

b) Dacă sînt verificate numai condițiile 1)—4), proprietatea a se păstrează?

(L. Panaitopol)

5. Dacă ecuațiile $x^2 + ax + bc = 0$, $x^2 + bx + ac = 0$, cu a, b, c numere reale diferite de 0, au o rădăcină comună, să se arate că celelalte soluții satisfac ecuația $x^2 + ax + ab = 0$.

Anul 1974

Etapa județeană

1. Pentru orice număr real x se notează prin $[x]$ cel mai mare număr întreg care nu depășește pe x.

a) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și orice $m \in \mathbf{Z}$ să se arate că $[x + m] = [x] + m$.

În $\mathbf{R}$ se definește o lege de compoziție astfel: $a * b = a + [b]$.

b) Este legea de compoziție asociativă?

c) Este legea de compoziție comutativă? *(D. Radu)*

2. O dreaptă perpendiculară cu ipotenuza $[BC]$ a triunghiului dreptunghic ABC întîlnește pe AB și AC în M și N. Cercurile circumscrise triunghiurilor BMC și BNC întîlnesc pe AC și AB, respectiv, în Q și P.

a) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este romb.

b) Să se arate că mulțimea romburilor astfel obținute este alcătuită numai din romburi asemenea, cînd perpendiculara pe BC variază, triunghiul rămînînd constant.

c) Cum trebuie să fie triunghiul pentru ca rombul obținut să devină pătrat?

(E. Constantinescu)

3. Să se arate că produsul a trei numere naturale consecutive nu poate fi cubul unui număr natural. *(E. Constantinescu)*

4. a) Să se arate că orice punct din interiorul unui cerc poate fi centrul de greutate al unui triunghi înscris în cerc.

b) Să se arate că orice punct din interiorul unui cerc poate fi punctul de intersecție a bisectoarelor unui triunghi înscris în cerc.

c) Să se arate că orice punct din interiorul unui cerc sau de pe circumferința unui cerc poate fi ortocentrul unui triunghi neobtuzunghic înscris în cerc.

d) Să se determine mulțimea ortocentrelor în cazul general (deci și cînd triunghiurile pot fi obtuzunghice). *(N. Popescu)*

5. Să se determine mulțimea funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $f^2(x) = x^2$.

(S. Rădulescu)

Etapa finală

1. Fie $E(a, b) = 2a^2 + 2b^2 + 4b + 1$.

a) Pentru ce valori reale ale lui a și b, $E(a, b)$ este minimă?

b) Pentru ce valori ale lui a și b, $a \in [-4, -2]$, $b \in [2, 3]$, $E(a, b)$ este minimă?

2. Ecuația

$$\sqrt{a + bx} + \sqrt{b + cx} + \sqrt{c + ax} = \sqrt{b - ax} + \sqrt{c - bx} + \sqrt{a - cx},$$

$a, b, c > 0$, are soluția $x = 0$. Arătați că această soluție este unică.

(L. Panaitopol)

3. Se dă un pătrat $ABCD$. Două puncte M și N parcurg conturul în sens invers acelor unui ceasornic, pornind unul din A, celălalt din B cu aceeași viteză. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului $[MN]$. Generalizare pentru un poligon regulat cu n laturi. *(C. Ottescu)*

4. Față de sistemul de axe rectangulare (xOy) se consideră dreptele de ecuații $ax + by = 0$, $ax + (a + b)y = 0$, $y = k$. Fie ABO triunghiul determinat de aceste drepte. Să se arate în ce caz perimetrele tuturor dreptunghiurilor înscrise în acest triunghi avînd două vîrfuri pe latura AB sînt egale. *(I. Iliescu)*

Anul 1975

Etapa județeană

1. Fie $n = 2a^2 + 3b^2$, unde a și b sînt numere naturale distincte. Să se arate că n poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere naturale.

2. Fie un patrulater convex $ABCD$; M mijlocul laturii $[BC]$ și N mijlocul laturii $[CD]$. Dreptele AM și BN se intersectează în P. Dacă $\frac{PM}{AM} = \frac{1}{5}$ și $\frac{PB}{BN} = \frac{2}{5}$ să se precizeze natura patrulaterului $ABCD$. *(L. Panaitopol)*

3. Fie două triunghiuri ascuțitunghice ABC și $A'B'C'$ astfel ca $\frac{a}{a'} \geqslant \frac{b}{b'} \geqslant \frac{c}{c'}$ (cu litere mici s-au notat lungimile laturilor) și $\hat{C} \equiv \hat{C'}$. Să se arate că triunghiurile sînt asemenea. *(L. Panaitopol)*

4. Se dă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 2(k - p)x + k^2$, unde k și p sînt numere naturale diferite de 0. Precizați valorile lui p știind că punctul de minim al funcției aparține produsului cartezian $[0, 2] \times [-2p, 0]$. *(I. Nănuți, V. Drulă)*

5. Se dă funcția $f(x) = |x^2 - 3x + 2| + |x - a|$ definită pe $\mathbf{R}$. Să se determine a, astfel încît mulțimea valorilor funcției să fie $[0, +\infty)$.

Etapa finală

1. Se consideră funcția definită pe $\mathbf{R}$ cu valori reale, $f(x) = x^2 + ax + b$.

a) Să se arate că dacă p și q sînt strict pozitive și $p + q = 1$, atunci $f(px_1 + qx_2) \leqslant pf(x_1) + qf(x_2)$ pentru orice x_1 și x_2 numere reale.

b) Să se determine mulțimea valorilor funcției f atunci cînd $x \in [-1, 1]$. *(T. Cohal)*

2. Fie funcția $f(x) = \sqrt{x - a} + \sqrt{b - x}$, definită pe $[a, b]$, $a < b$.

a) Să se arate că f este crescătoare pe $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ și descrescătoare pe $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

b) Să se găsească extremele funcției f. *(L. Panaitopol)*

3. Pe segmentul fix $[AB]$ se ia punctul mobil M și se construiesc de aceeași parte a segmentului triunghiurile echilaterale AMC și MDB.

a) Să se găsească locul geometric al centrului de greutate al triunghiului DMC.

b) Să se găsească poziția lui M astfel încît aria triunghiului DMC să fie maximă. *(V. Matrosenco, C. Ottescu)*

4. Fie paralelogramul $ABCD$, M un punct mobil pe segmentul (CD), A' intersecția dreptei AM cu latura (BC) și B' intersecția dreptei BM cu latura (AD). Paralela prin M la AD intersectează pe $A'B'$ în P. Se cere locul geometric al punctului P. *(T. Pamfil)*

5. Fie $a \neq b$ numere naturale astfel încît $a + b = k$, k constant. Să se afle valoarea cea mai mică a expresiei $E = a^2 + b^2$.

Anul 1976

Etapa județeană

1. Pe ipotenuza $[AB]$ a triunghiului dreptunghic OAB se consideră punctele D și E astfel încît $AD \leqslant AE$. Fie F și G proiecțiile punctelor D și E pe catetele $[OA]$ și $[OB]$. Notăm L, M, N, P, R mijloacele segmentelor $[OF]$, $[FD]$, $[DE]$, $[EG]$ și $[GO]$.

a) Să se arate că vectorii $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{PL}$, $\overrightarrow{MR}$ pot forma un triunghi.

b) Să se găsească condiția necesară și suficientă pentru ca $\overrightarrow{MP}$ să fie paralel cu $\overrightarrow{AB}$. *(E. Onofraș)*

2. Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 7| + |x + 7| = 14\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x + 3| + |x - 9| = 14\}$. Să se calculeze mulțimile A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

3. Se consideră $a, b, c, d \in \mathbf{R}_+^*$ așa încît $a < b < c < d$ și $f, g : [a, d] \to \mathbf{R}$. Cunoscînd graficul funcției f și faptul că

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in [a, b] \cup [c, d], \\ -1 \text{ dacă } x \in (b, c), \end{cases}$$

să se reprezinte grafic funcția $fg : [a, d] \to \mathbf{R}$.

4. Fie funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -(x - a)^2, & x \leqslant a, \\ (x - a)^2, & x > a, \end{cases}$$

$g(x) = m(x - a)$, $a \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{R}$.

a) Pentru ce valori ale lui m graficele celor două funcții au trei puncte comune?

b) Să se determine valorile lui x pentru care $f(x) \geqslant g(x)$.

5. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (ax - a_1)^2 + (ax - a_2)^2 + \ldots + (ax - a_{10})^2$, cu $a \neq 0$ și $a_i \in \mathbf{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

a) Să se arate că valoarea minimă a lui f nu depinde de a.

b) Dacă $a_1^2 + a_2^2 + \quad + a_{10}^2 = 1$, atunci $|a_1 + a_2 + \quad + a_{10}| \leqslant \sqrt{10}$.

6. Să se determine a și b așa încît funcția $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ ax + b, & 2 < x \leqslant 3, \end{cases} \quad a, b \in \mathbf{R},$$

să aibă proprietatea că: oricare $y \in [0, 8]$ să fie imaginea prin f a unei singure valori $x \in [0, 3]$. *(I. Cuculescu)*

Etapa finală

1. Să se determine mulțimea valorilor funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

(Șt. Kadar)

2. Să se determine $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ așa încît:

$$\sqrt[n]{x^2 + a^n} + \sqrt[n+1]{y^2 + a^{n+1}} = \begin{cases} 2a \text{ pentru } a \geqslant 0, \\ 0 \text{ pentru } a < 0. \end{cases}$$ *(S. Brener)*

3. Spre exteriorul triunghiului ABC se construiesc unghiurile de măsură $m(\widehat{BAB_1}) = m(\widehat{CAC_1}) = 30°$ și $m(\widehat{BB_1A}) = m(\widehat{CC_1A}) = 60°$, iar spre interiorul triunghiului se duc semidreptele $(BA_1$ și $(CA_1$ așa încît $m(\widehat{CBA_1}) = m(\widehat{BCA_1}) = 30°$. Dacă A_2 este vîrful triunghiului echilateral BCA_2 construit în exteriorul triunghiului, să se arate că:

a) $(B_1C_1) \equiv (A_1C_1)$;

b) B_1, A_1, C_1 sînt coliniare;

c) $B_1C_1 \perp AA_2$. *(I. Hadîrcă)*

4. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \min(x^2 + ax + b;\ cx + d)$. Să se determine a, b, c, d și să se traseze graficul funcției f știindu-se că $f(-2) = f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 4$. *(I. Cuculescu)*

5. Se dau vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, precum și vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ definiți astfel: $\vec{u} = \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a})$, $\vec{v} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$, $\vec{w} = \vec{c}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$. Să se arate că dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ formează un triunghi, atunci și vectorii $\vec{u}$, $\vec{w}$, $\vec{v}$ formează un triunghi asemenea cu primul. *(M. Chiriță)*

Anul 1977

Etapa județeană

1. Fie familiile de parabole

$$(P_1) : y = (m + 1)x^2 - 2(m + 4)x + 2m,\ m \neq -1,$$
$$(P_2) : y = (m + 3)x^2 - 2(m + 3)x + 15,\ m \neq -3.$$

a) Să se arate că dacă parabolele (P_1) intersectează axa Ox, atunci parabolele (P_2) nu o intersectează și reciproc: dacă parabolele (P_2) intersectează axa Ox, atunci parabolele (P_1) nu o intersectează.

b) Pot coincide vîrfurile a două parabole din cele două familii?

c) Ce figură geometrică se obține unind consecutiv vîrfurile de coordonate întregi ale parabolelor din familia (P_1), care corespund valorilor întregi ale lui m?

d) Care este mulțimea punctelor din plan descrisă de vîrfurile parabolelor (P_2) cînd m variază? *(Laura Constantinescu)*

2. Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a unui triunghi ABC. Notăm $AC = b$, $AB = c$, $m(\widehat{AMB}) = \alpha$, $m(\widehat{BAM}) = \beta$, $m(\widehat{CAM}) = \gamma$ ($\alpha, \gamma \neq 90°$). Să se arate că:

a) $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{\sin \beta}{\sin \gamma}$;

b) $\dfrac{c + b\cos A}{b + c\cos A} = \dfrac{\cos \beta}{\cos \gamma}$;

c) $AM = \dfrac{b\cos\gamma + c\cos\beta}{2} = \dfrac{b\cos C - c\cos B}{2\cos\alpha}$. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Fie A, B, C trei numere naturale care se pot scrie fiecare ca o sumă de două pătrate de numere întregi. Să se arate că:

a) produsul AB se poate scrie ca o sumă de două pătrate de numere întregi;

b) produsul ABC se poate scrie de asemenea ca o sumă de două pătrate de numere întregi.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram în care $m(\hat{A}) \leq m(\hat{B})$. Considerăm propozițiile:

(p): Există un punct M în interiorul paralelogramului astfel încît triunghiul MAB este echilateral;

(q): Există un punct N în interiorul paralelogramului astfel încît triunghiul NAD este echilateral.

a) Să se determine mulțimea valorilor măsurii unghiului $\hat{A}$ pentru care propoziția „(p) sau (q)" este adevărată.

b) Pentru măsura unghiului A aparţinînd mulţimii de la punctul a, să se determine în funcţie de $m(\hat{A})$, mulţimea valorilor raportului $\frac{AB}{AD}$ pentru care propoziţia „(p) şi (q)" este adevărată. *(M. Toloşi)*

Etapa finală

1. Fie a un număr real dat. Să se găsească numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ştiind că

$$x_1^2 + ax_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_2,$$

$$x_2^2 + ax_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}^2 + ax_{n-1} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_n,$$

$$x_n^2 + ax_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_1.$$

(D. Tănăsie)

2. Dacă A, B, C sînt măsurile unghiurilor unui triunghi oarecare, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{3 + \cos^2 A}{2} > \cos^2 B + \cos^2 C.$$

3. Se consideră o reţea plană infinită de pătrate, cu latura de lungime egală cu unitatea, ale căror vîrfuri se numesc noduri. Să se arate că dacă un cerc de rază $r \in \mathbf{N}^*$ trece prin două noduri ale reţelei situate la distanţă egală cu unitatea unul de celălalt, atunci cercul nu mai trece prin alt nod al reţelei. *(M. Cavachi)*

4. Fie ABC şi DBC două triunghiuri echilaterale cu latura de lungime a, simetrice faţă de BC. Fie P un punct oarecare pe cercul de centru O, circumscris triunghiului DBC. Să se arate că $PA^2 - 2PB \cdot PC = a^2$ sau $PA^2 + 2PB \cdot PC = a^2$ în funcţie de poziţia punctului P pe cercul de centru O. *(E. Rogai)*

Anul 1978

Etapa judeţeană

1. Pe laturile triunghiului ascuţitunghic ABC, spre exterior se construiesc dreptunghiurile congruente ABB_1B_2 şi ACC_1C_2 ($[AC_2] \equiv [AB]$ şi $[AB_2] \equiv [AC]$). Fie P punctul de intersecţie a dreptelor BB_2, CC_2 şi S punctul de intersecţie a dreptelor BC_2, B_2C. Să se demonstreze că:

a) $m(\widehat{BSC}) = 90°$ şi punctele B_1, S, C_1 sînt coliniare;

b) semidreapta $(PA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BPC}$ şi patrulaterul $BPCA$ are două unghiuri opuse complementare. *(I. Hadîrcă)*

2. Se consideră funcţiile de gradul 2, $f(x) = 2x^2 + 2$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Să se arate că pentru orice funcţie de gradul al II-lea h aşa încît $g(x) \leqslant h(x) \leqslant f(x)$, oricare ar fi x real, avem $h(1) = 4$ şi există $\lambda \in [0, 1]$ constant aşa încît $h(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. *(L. Panaitopol)*

3. Cîte numere de cinci cifre există care încep cu 7 şi au ca sumă a cifrelor 11? *(C. Ottescu)*

4. Să se găsească numerele întregi x, y aşa încît

$$(x + 2)(y + 5) - 2(x + 1)(y + 2) = 0. \textit{ (C. Cărbunaru)}$$

Etapa finală

1. Determinaţi valorile posibile ale expresiei

$\sqrt{a^2 + a + 1} - \sqrt{a^2 - a + 1}$ pentru $a \in \mathbf{R}$. *(S. Rădulescu)*

2. Rezolvaţi în numere reale ecuaţia

$$\sqrt{x} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 2} = \frac{1}{2}(x + y + z). \textit{ (T. Andreescu)}$$

3. Fie $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, întregi aşa încît $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$. Să se arate că $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$. *(R. Gologan)*

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M un punct pe diagonala $[AC]$. Paralelele prin M la AB, respectiv DC, intersectează BC în P, respectiv AD în Q.

a) Arătaţi că $MP^2 + MQ^2 \geqslant \frac{AB^2 \cdot DC^2}{AB^2 + DC^2}$. În ce caz are loc egalitatea?

b) Determinaţi locul geometric al mijlocului segmentului $[PQ]$ cînd M parcurge segmentul $[AC]$. *(D. Buşneag)*

Anul 1979

Etapa judeţeană

1. Să se determine funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ aşa încît $f(x + 1) \leqslant x \leqslant f(x) + 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. *(L. Panaitopol)*

2. Se consideră funcţiile $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ definite prin $f_0(x) = \frac{1}{x - 2}$ şi $f_{k+1}(x) = \frac{1}{1 - f_k(x)}$ pentru $k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.

a) Să se determine domeniile maxime de definiţie ale funcţiilor $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$.

b) Presupunînd $n = 1979$, să se determine o funcţie $h : \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R}$ aşa încît funcţia compusă $f_{1979} \circ h$ să fie egală cu f_0. *(A. Ghioca)*

3. Să se demonstreze că locul geometric al punctelor din interiorul unui unghi ascuţit avînd suma distanţelor la laturile unghiului constantă este un segment.

4. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri oarecare în același plan și M, N, P, respectiv mijloacele segmentelor $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$. Să se arate că:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'})$;

b) perimetrul triunghiului MNP este cel mult egal cu semisuma perimetrelor triunghiurilor ABC și $A'B'C'$. În ce caz are loc egalitatea? *(V. Pătrîngeșaru)*

Etapa finală

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4 + 9}{x^2 - ax + a^2}$. Să se determine valoarea minimă a acestei funcții, știind că $a \in [-2, 2] \setminus \{0\}$. *(Th. Dăneț)*

2. a) Fie $ax^2 + bx + c = 0$, o ecuație de gradul 2, unde $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ nu poate fi rădăcină a acestei ecuații.

b) Să se arate că există coeficienți $a, b, c \in \mathbf{Z}$ astfel încît $0 < a\sqrt[3]{9} + b\sqrt[3]{3} + c < 0{,}01$. *(S. Popa)*

3. Dacă un poligon are proprietatea că există o dreaptă care îi taie toate laturile în cîte un punct interior, atunci acest poligon are un număr par de laturi.

4. Fie un hexagon $ABCDEF$ și fie M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FA]$. Să se arate că o condiție necesară și suficientă pentru ca $RN^2 = MQ^2 + PS^2$ este ca MQ și PS să fie perpendiculare. *(L. Panaitopol)*

Anul 1980

Etapa județeană

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ așa încît $af(x) + bf(1 - x) = x$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, cu $a + b \neq 0$. Să se arate că:

a) $f(x) + f(1 - x) = \dfrac{1}{a + b}$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

b) dacă $a \neq b$, atunci $f(x) = \dfrac{1}{a - b}x - \dfrac{1}{a^2 - b^2}$. *(D. Buşneag)*

2. Dacă $f : E \to F$ este o funcție, vom nota cu $\operatorname{Im} f = \{y \in F \mid$ există $x \in E$ așa încît $y = f(x)\}$; $\operatorname{Im} f$ se numește imaginea funcției f. Fiind dată funcția $f : \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{a + b}{2}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - ab}{2x - a - b}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, să se determine $\operatorname{Im} f$.

(C. Năstăsescu)

3. Dacă a este un număr real, notăm $\{a\} = a - [a]$, partea fracționară a sa. Fiind dat m $(m \geq 2)$ un număr natural, să se arate că funcția $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = \{m^n\sqrt{2}\}$ este injectivă. *(C. Niță)*

4. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este convex dacă și numai dacă $(AC) \cap (BD) \neq \emptyset$.

Etapa finală

1. Fie a_1, a_2, b_1, b_2 numere reale și funcția f $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = a_1 |x + b_1| + a_2 |x + b_2|$. Să se arate că:

a) dacă f este injectivă, atunci f este bijectivă.

b) funcția f este suma a două funcții bijective.

Generalizare. *(S. Rădulescu)*

2. Se consideră ecuația de gradul 2: $ax^2 + bx + c = 0$ cu coeficienți întregi. Să se arate că dacă numerele a, b, c sînt impare, această ecuație nu are rădăcini raționale.

3. Să se arate că în orice triunghi lungimea bisectoarei dintr-un vîrf este mai mică sau egală decît lungimea medianei din același vîrf.

4. Să se arate că un triunghi ABC este echilateral dacă și numai dacă oricare ar fi punctele $M, N \in \text{Int } ABC$ este îndeplinită relația $MN < \min(AB, BC, CA)$. *(M. Burtea)*

Anul 1981

Etapa județeană

1. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare ABC, să se arate că ecuația $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ nu are rădăcini reale.

2. Să se determine funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ așa încît pentru orice $x \in \mathbf{R}$ să aibă loc egalitatea

$$2f(x) + f(-x) = \begin{cases} -x - 3 \text{ pentru } x \leqslant 1, \\ x + 3 \text{ pentru } x > 1. \end{cases}$$

3. Într-un patrulater convex $ABCD$ avînd laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$ există inegalitatea $AB + BD < AC + CD$. Să se arate că $AB < AC$.

4. Să se arate că oricum am alege cinci numere întregi, există două dintre acestea care au suma sau diferența divizibilă cu 7. *(I. Tomescu)*

Etapa finală

1. Există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, injective, așa încît

$$f(x^2) - f^2(x) \geqslant \frac{1}{4}, \ (\forall) x \in \mathbf{R}? \quad (T. \ Andreescu)$$

2. Se dau cinci puncte în plan, printre care nu există trei care să fie situate pe aceeași dreaptă. Să se demonstreze că printre acestea se găsesc patru puncte care sînt vîrfurile unui patrulater convex.

3. Se consideră numerele reale a, b, c cu proprietățile $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Să se demonstreze că:

a) dacă $a \leqslant b \leqslant c$, atunci $b^2 \leqslant \frac{1}{6}$

b) $1 \leqslant \max\{(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\} \leqslant 2$. *(D. Miheț)*

4. Fie un triunghi ABC și punctele A', B', C' situate pe (BC), (AC), respectiv (AB), astfel încît să avem $\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = k$. Să se arate că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate.

Anul 1982

Etapa județeană

1. Fie trinoamele $T_1 = X^2 + p_1X + q_1$ și $T_2 = X^2 + p_2X + q_2$. Să se arate că dacă $2(q_1 + q_2) = p_1p_2$, atunci cel puțin unul din cele două trinoame are rădăcini reale.

2. Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcție așa încît $(f \circ f)(x) = x^2$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$. Să se arate că:

a) f este bijectivă;

b) $\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x})$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$. *(P. Dályáy)*

3. Fie $T = X^2 + aX + b$ un trinom care admite ca rădăcini numere întregi. Să se arate că dacă c este un întreg astfel încît $T(c) = 13$, atunci $\max\{T(c-1), T(c+1)\} = 28$. *(D. Miheț)*

4. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic al cărui ortocentru este H. Pe semidreptele $(HA$, $(HB$, $(HC$ se consideră punctele A', B', C' astfel încît $(HA') \equiv (BC)$, $(HB') \equiv (AC)$, $(HC') \equiv (AB)$. Arătați că:

a) $B'C' = 2AM$, $A'C' = 2BN$ și $A'B' = 2CP$, unde M, N, P sînt mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$;

b) H este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

Etapa finală

1. Știind că numerele reale a, b, c satisfac inegalitatea $63(a^6 + b^6 + c^6) < 31(a^3 + b^3 + c^3)^2$, să se demonstreze că $a, b, c \neq 0$ și să se arate că cel puțin una dintre ecuațiile $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$, $cx^2 + ax + b = 0$ nu are rădăcini reale. *(T. Andreescu)*

2. Să se arate că o condiție necesară și suficientă pentru ca suma distanțelor unui punct M la cele patru laturi ale unui patrulater inscriptibil să fie constantă, cînd M se mișcă în interiorul sau pe frontiera patrulaterului, este ca patrulaterul să fie dreptunghi.

3. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, și să notăm cu G_f graficul acestei funcții. Definim $\varphi : G_f \to [0, \infty)$, $\varphi(x, y) = |x| + |y|$. Să se arate că φ este surjectivă dacă și numai dacă $c = 0$. *(M. Țena)*

4. Fie P un punct în interiorul sau pe frontiera unui triunghi ABC în care $m(\hat{A}) \geq 90°$. Demonstrați că:

$$\min(PA, PB, PC) \leq \frac{BC}{2} \leq \max(PA, PB, PC).$$ *(D. Miheț)*

Anul 1983

Etapa județeană

1. Să se demonstreze că există o singură funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$ și $a \neq 0$, așa încît a, Δ, P și S să fie numere întregi consecutive în această ordine (Δ, P și S sînt, respectiv, discriminantul, produsul și suma rădăcinilor ecuației $ax^2 + bx + c = 0$). *(T. Andreescu)*

2. Să se determine funcțiile $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ care verifică inegalitatea $f(km) + f(kn) - f(k)f(mn) \geqslant 1$ pentru orice $k, m, n \in \mathbf{N}$. *(D.M. Bătinețu-Giurgiu)*

3. Fie ABC un triunghi și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încît $\widehat{ABN} \equiv \widehat{ACM}$. Să se arate că $MN < BC$. *(L. Panaitopol)*

4. Pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC se construiește în exterior triunghiul dreptunghic isoscel BCD ($m(\hat{D}) = 90^\circ$). Să se arate că dacă $[AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic sau isoscel. *(M. Bălună)*

Etapa finală

1. Să se determine funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care $f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$, $(\forall)x \in \mathbf{R}^*$. *(Th. Dăneț)*

2. Fie numerele a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 care verifică inegalitatea $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5)^2 \geqslant 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2)$. Să se demonstreze că oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$, are loc inegalitatea

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - x - y)^2 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - x^2 - y^2.$$

(D. Andrica)

3. În triunghiul ABC notăm $BC = a$, $AC = b$ și $AB = c$. Cercurile cu centrele în A, B și C de raze, respectiv, r_1, r_2 și r_3 intersectează laturile triunghiului în șase puncte (discurile respective sînt două cîte două disjuncte). Demonstrați că cele șase puncte sînt conciclice dacă și numai dacă există egalitățile

$$a - r_2 = b - r_1 \text{ și } b - r_3 = c - r_2. \quad \textit{(I.V. Maftei, A. Ghioca)}$$

4. Fie ABC un triunghi, $D \in (BC)$ și $CD = k \cdot BC$.

a) Să se demonstreze că $AD < k \cdot AB + (1 - k) \cdot AC$.

b) Dacă $[AD$ este bisectoarea interioară a unghiului A, să se arate că

$$\frac{2}{AD} > \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}. \quad \textit{(T. Andreescu)}$$

Anul 1984

Etapa județeană

1. Se dau funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leqslant 1 \\ cx + d, & x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = 2x - 1.$$

Să se arate că o condiție necesară și suficientă pentru ca să existe $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, așa încît $h \circ f = f \circ h = g$, este ca $a + b = c + d = 1$ și $ac > 0$. *(I.V. Maftei, M. Piticari)*

2. Fie $A = B \cup C$ și $f : P(A) \to P(A) \times P(A)$, $f(X) = (X \cup B, X \cup C)$. Să se demonstreze că f este injectivă dacă și numai dacă $B \cap C = \emptyset$. *(D. Miheț)*

3. Se consideră triunghiul ABC și punctele $D \in (AC)$, $E \in (BC)$, $F \in (DC)$, $\{M\} = AE \cap BD$, $\{N\} = AE \cap BF$, $\{P\} = MF \cap DE$, $\{Q\} = BF \cap DE$ și $\{R\} = MF \cap DC$, presupunînd că dreptele MF și BC nu sînt paralele. Dacă EF este paralelă cu BD să se arate că dreptele AP, CQ și RN sînt concurente. *(A. Ghioca)*

4. a) Dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$, și dacă ecuația

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = nx_1x_2 \dots x_n, \tag{1}$$

are o soluție $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ în numere întregi nenule, să se arate că există o soluție $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ a ecuației (1) și un indice i, $1 \leqslant i \leqslant n$, așa încît $b_k = a_k$ $(\forall)k \neq i$ și $b_i \neq a_i$.

b) Să se determine toate soluțiile (a, b, c) în numere întregi ale ecuației $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ care verifică condiția $1 \leqslant a < b < c < 200$. *(Gh. Albu)*

Etapa finală

1. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ și $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că $f(ax^2 + bx + c) = af^2(x) + bf(x) + c$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

a) Să se demonstreze că ecuația $f(f(x)) = x$ are cel puțin o soluție dacă $a \neq 0$ și $b \neq 1$.

b) Să se arate că proprietatea de la punctul a se păstrează pentru orice $a, b, c \in \mathbf{R}$ care verifică relația $4ac < (b + 1)^2$. *(T. Andreescu)*

2. Fie $F = \{E_1, E_2, \dots, E_s\}$ o familie de submulțimi cu $n - 2$ elemente ale unei mulțimi X cu n elemente ($n \geqslant 3$). Dacă reuniunea oricăror trei submulțimi din F este diferită de X, să se arate că reuniunea tuturor submulțimilor lui F este diferită de X. *(I. Tomescu)*

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex inscriptibil. Pe semidreptele $(AB$ și $(AD$ se consideră punctele P, respectiv Q, așa încît $AP = CD$ și $AQ = BC$. Fie $\{M\} = (PQ) \cap (AC)$, iar N mijlocul segmentului $[BD]$. Să se arate că $PM = MC = CN$. *(C. Cocea)*

4. Se dă un triunghi oarecare ABC și o dreaptă variabilă d care intersectează segmentele $[AB]$ și $[AC]$ în două puncte interioare M, respectiv N. Dacă există două numere fixate $u, v > 0$, așa încît $u \dfrac{MB}{MA} + v \dfrac{NC}{NA} = 1$, să se arate că d trece printr-un punct fix și să se afle acest punct. Caz particular $u = v = 1$. *(I. Tomescu)*

Anul 1985

Etapa județeană

1. Se consideră polinomul $P(X) = X^2 + aX + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că:

i) dacă polinomul $P(P(X))$ are numai două rădăcini reale, atunci $P(X)$ are o singură rădăcină în intervalul $\left[-\dfrac{\Delta}{4}, \infty\right)$, unde $\Delta = a^2 - 4b$;

ii) dacă $P(b) \neq 0$ atunci $P(X)$ are o singură rădăcină în intervalul $(0, 1)$ dacă și numai dacă are loc cel puțin una din situațiile

a) $P(P(X))$ are o singură rădăcină strict pozitivă.

b) $P(P(X))$ are o singură rădăcină strict negativă. *(D. Miheț)*

2. Fie $a \in \mathbf{R}$ așa încît $4a + 1 \leqslant 0$ și $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea $f(x) < a(1 - x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Să se arate că ecuația $f^2(x) = ax$ are cel mult o rădăcină reală și aceasta este independentă de a. *(D. Secălman)*

3. Într-un plan se consideră două puncte fixe A și B și un punct fix $I \in (AB)$. Pe perpendiculara în I pe AB se consideră punctul mobil M. Perpendicularele în A pe AM și în B pe BM se intersectează în P. Să se determine locul geometric al punctului P.

4. În interiorul unui triunghi oarecare ABC se consideră un punct M. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{BMC}$, $\widehat{AMC}$, $\widehat{AMB}$ intersectează laturile $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ în punctele A_1, B_1 și, respectiv, C_1. Să se arate că:

a) dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente într-un punct.

b) $\frac{PA}{PA_1} \cdot \frac{PB}{PB_1} \cdot \frac{PC}{PC_1} = 8$ dacă și numai dacă M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Etapa finală

1. a) Dacă $M \subset \mathbf{R}$ este o mulțime finită, să se determine funcția strict crescătoare $f : M \to M$.

b) Dacă $M \subset \mathbf{R}_+^*$ este o mulțime finită, să se determine toate funcțiile, $f : M \to M$ așa încît $xf(y) = yf(x)$, $(\forall)x, y \in M$. *(I. Nedelcu)*

2. Fie ecuația $x^2 - x(a + b) + a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.

a) Să se rezolve ecuația considerînd că necunoscuta este a.

b) Să se arate că ecuația are cel puțin o rădăcină întreagă dacă și numai dacă $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$.

c) Să se determine a și b așa încît ambele rădăcini să fie întregi. *(L. Panaitopol)*

3. a) Se consideră în plan un cerc $\mathcal{C}$ de rază R și șase cercuri distincte două cîte două $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$ de rază R așa încît fiecare dintre ele este secant cu cercul $\mathcal{C}$. Să se demonstreze că din cele șase cercuri $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$ există cel puțin două care sînt secante.

b) Să se arate că afirmația nu mai este adevărată dacă cele șase cercuri se înlocuiesc cu trei sau patru cercuri. *(C. Gașparic)*

4. În triunghiul ABC se consideră punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$ și fie M, N, P mijloacele segmentelor $[AA_1]$, $[BB_1]$, respectiv $[CC_1]$. Să se arate că $p_{MNP} < \frac{1}{2} p_{ABC}$, unde p_{ABC} este semiperimetrul triunghiului ABC.

(M. Lascu)

Anul 1986

Etapa județeană

1. Să se determine toate perechile (x, y) de numere întregi care verifică ecuația $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

2. Fie a, b, c trei numere întregi și $a > 0$. Să se arate că dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ admite două rădăcini distincte în intervalul $(0, 2)$, atunci $a \geqslant 2$, $b \leqslant -3$ și $c \geqslant 1$. *(M. Lascu, L. Vlaicu)*

3. Fie ABC un triunghi, M și N mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ și $P \in (AB)$ așa încît $PA = 2PB$. Fie $\{G\} = BN \cap AM$ și $\{Q\} = BN \cap CP$. Dacă $BM \cdot BP = BQ \cdot BC$ să se arate că AB este perpendiculară pe BC dacă și numai dacă $AB = BC$. *(D.M. Bătinețu-Giurgiu)*

4. Fie ABC un triunghi oarecare. Pe semidreptele $(AB$ și $(AC$ se consideră punctele E, respectiv D, așa încît $AE = AD = \dfrac{2AB \cdot AC}{AB + AC}$. Să se arate că DE, BC și bisectoarea interioară a unghiului A sînt concurente.

Etapa finală

1. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$ Să se rezolve ecuația $(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x$ știind că admite o rădăcină întreagă. *(M. Becheanu)*

2. Să se arate că centrul cercului înscris într-un triunghi aparține interiorului triunghiului care are vîrfurile în mijloacele laturilor triunghiului dat.

3. Se dă funcția $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, $f(x) = \left[\dfrac{ax + b}{ax + d}\right]$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{N}$ și $c + d \neq 0$. Să se arate că f este injectivă dacă și numai dacă $c = 0$ și $a \geqslant d$. *(M. Chiriță, M. Piticari)*

4. Se dă triunghiul ascuțitunghic ABC. Se notează cu $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului, cu A', B', C', respectiv, intersecțiile înălțimilor triunghiului ABC cu cercul $\mathcal{C}$, $A'C' \cap BC = \{M\}$, $A'B' \cap BC = \{N\}$, $A'B' \cap AC = \{P\}$, $B'C' \cap AC = \{Q\}$, $B'C' \cap AB = \{R\}$, $C'A' \cap AB = \{S\}$. Să se arate că dreptele MQ, NR, PS sînt concurente. *(O. Bucicovschi)*

Anul 1987

Etapa județeană

1. Să se arate că dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi, atunci cel puțin una din ecuațiile $x^2 - 2ax + 2bc = 0$, $x^2 - 2bx + 2ca = 0$, $x^2 - 2cx + 2ab = 0$ nu admite soluții reale. *(Gh. Ianuș)*

2. Fie $a > 2$. Să se rezolve ecuația în x: $x^3 - 2ax^2 + (a^2 + 1)x + 2 - 2a = 0$ (considerînd-o mai întîi ca ecuație în a) și să se pună rădăcinile în ordine crescătoare.

3. Fie $x > 1$. Să se arate că există și este unic $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $1 + 2 + \ldots + n < x \leqslant 1 + 2 + \ldots + n + (n + 1)$. Pentru ce x real, n rezultă pătrat perfect?

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex avînd diagonalele perpendiculare, intersectîndu-se în O. Se consideră o dreaptă d perpendiculară pe AD, intersectînd segmentul (AD) în F și pe AC în E. Să se cerceteze dacă există puncte M pe d astfel încît $AM^2 = AO \cdot AE$.

5. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC și fie D piciorul înălțimii din A pe BC. Se duce DE perpendiculară pe AC $(E \in AC)$ și fie F un punct pe segmentul $[DE]$. Să se arate că AF este perpendiculară pe BE dacă și numai dacă $DF/FE = DC/BD$. Este esențial că triunghiul este ascuțitunghic? *(M. Piticari)*

Etapa finală

1. Să se determine locul geometric al centrelor de greutate ale triunghiurilor care au un vîrf pe o dreaptă dată d și două vîrfuri pe un cerc dat $\mathcal{C}(O, R)$.
(M. Becheanu)

2. Dacă $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ este mulțimea perechilor ordonate (x, y) de numere reale și $A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sînt submulțimi, se definește $A \circ B = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid (\exists) z \in \mathbf{R}, (x, z) \in A, (z, y) \in B\}$. În cazul particular al submulțimilor $A = \{(x, x - [x]) \mid x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(y - [y], y) \mid y \in \mathbf{R}\}$ să se reprezinte grafic mulțimile $A \circ A$, $A \circ B$, $B \circ A$, $B \circ B$.

3. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(n) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } n = 0, \\ n(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \text{ dacă } n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

este injectivă. *(M. Becheanu)*

4. Se dă un triunghi ABC și în interiorul său se consideră triunghiul $A'B'C'$, asemenea cu triunghiul dat și avînd aceeași orientare. Fie A'', B'', C'' aparținînd respectiv segmentelor $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ astfel încît $\frac{AA''}{A'A''} = \frac{BB''}{B'B''} = \frac{CC''}{C'C''}$. Să se demonstreze că triunghiul $A''B''C''$ este asemenea cu triunghiul dat. *(M. Becheanu)*

Anul 1988

Etapa județeană

1. Să se determine toate tripletele de numere întregi pozitive (x, y, z), $0 < x \leqslant y \leqslant z$, care satisfac ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$.

2. Fie $a \in \mathbf{R}^*$. Să se arate că există funcții bijective $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $a^2 f^2[(a^2+1)x] - 2af(x^2+a^2) + 1 \leqslant 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, dacă și numai dacă $a \in \{-1, 1\}$. *(I. Tomescu)*

3. În triunghiul ABC se consideră bisectoarele $[BB'$ și $[CC'$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$. Fie B'' mijlocul segmentului $[BB']$ și C'' mijlocul segmentului $[CC']$. Să se arate că dreptele $C'B''$, $B'C''$ și BC sînt concurente dacă și numai dacă $m(\hat{A}) = 60°$. *(L. Panaitopol)*

4. a) Să se demonstreze că dacă G este punctul de întîlnire al medianelor unui triunghi ABC și M un punct oarecare din plan, avem $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

b) Să se deducă de aici că dacă ABC este un triunghi echilateral cu latura de lungime 1, atunci $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geqslant 1$.

Etapa finală

1. Se consideră un triunghi echilateral ABC de latură 1 și punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$. Să se arate că

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \geqslant \frac{3}{4}.$$

2. Fie un triunghi ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încît lungimile tangentelor duse din B și C la cercul circumscris triunghiului AMN să fie egale. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AC]$, $[BN]$ și $[CM]$ sînt puncte conciclice. *(L. Panaitopol)*

3. Fie m și n numere naturale, $n \geqslant 1$. Să se determine numerele reale x pentru care

$$[x+1] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \ldots + \left[x + \frac{1}{n}\right] = m. \quad \textit{(M. Becheanu)}$$

4. a) Să se arate că nu există funcții $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ astfel încît $(f \circ f)(x) = x + 1$, $(\forall) x \in \mathbf{Z}$.

b) Să se arate că există o infinitate de funcții $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ astfel încît $(g \circ g)(x) = -x$, $(\forall) x \in \mathbf{Z}$. *(C. Năstăsescu, S. Dăscălescu)*

Anul 1989

Etapa județeană

1. Fie E o mulțime nevidă și $A \in \mathcal{P}(E)$. Definim funcția $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ prin relația $f(X) = (X \cap A,\ X \cup A)$, $(\forall) X \in \mathcal{P}(E)$.

a) Să se arate că f este injectivă.

b) Să se arate că $\{f(X) \mid X \in \mathcal{P}(E)\} = \mathcal{A}$, unde $\mathcal{A} = \{(M, N) \mid M \subset A \subset N \subset E\}$.

c) Considerăm funcția $f_0 : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{A}$ definită de $f_0(X) = f(X)$, $(\forall) X \in \mathcal{P}(E)$. Să se arate că f_0 este bijectivă și să se determine funcția f_0^{-1}.

2. Se consideră expresia $f(x, y) = (m-5)x^2 - 2(m+1)xy - my^2$, unde m este un parametru real. Să se determine m astfel încît $f(x, y) \leqslant 0$, $(\forall) x \geqslant 1$ și $(\forall) y \geqslant 2$.

3. Considerăm triunghiul ABC și un punct O în interiorul triunghiului. Presupunem că $AB \leqslant BC \leqslant CA$. Să se arate că $OA + OB + OC < BC + CA$.

4. Fie triunghiul ABC și notăm D mijlocul segmentului $[BC]$, E mijlocul segmentului $[AD]$ și F punctul de intersecție al dreptelor AB și CE.

a) Să se demonstreze că dacă patrulaterele $BDEF$ și $AFDC$ sînt inscriptibile, atunci $AB = AC$.

b) Să se enunțe și să se demonstreze propoziții reciproce celei de la punctul a.

Etapa finală

1. Să se determine cel mai mic număr rațional pozitiv a pentru care există $b > 0$ astfel ca

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leqslant 2 - \frac{x^a}{b}, \quad (\forall) x \in (0, 1].$$

Pentru a astfel determinat să se afle cel mai mic număr $b > 0$ cu această proprietate. *(C. Zălinescu)*

2. Fie $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$ astfel încît $a > 0$ și $(cd - be)(b - d) > a(e - c)^2$. Să se demonstreze că:

i) trinoamele $ax^2 + bx + c$ și $ax^2 + dx + e$ au rădăcini reale și distincte;

ii) funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{x_1, x_2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{ax^2 + dx + e}$ este surjectivă.

(Am notat cu x_1, x_2 rădăcinile trinomului $ax^2 + dx + e$.) *(I. Tomescu)*

3. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ și fie M, N, P, Q respectiv mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Fie O un punct în interiorul trapezului astfel încît $\sigma[OQAM] = \sigma[OMBN] = \sigma[ONCP] = \sigma[OPDQ]$. Să se arate că punctele O, M, P sînt coliniare. *(I. Pop)*

4. Fie $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ două cercuri cu centrele distincte O_1 și O_2. Să se determine locul geometric al punctelor din plan din care cele două cercuri se văd sub unghiuri congruente. (Unghiul sub care se vede un cerc dintr-un punct exterior lui este unghiul format din cele două tangente la cerc prin punct și care conține cercul în interior.) *(C. Zălinescu)*

Anul 1990

Etapa județeană

1. Să se determine $a, b \in \mathbf{Z}^*$ astfel încît ecuația $x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$ să aibă rădăcini întregi. *(L. Panaitopol)*

2. Să se arate că singura funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care $f(x + y) = \max(f(x), y) + \min(f(y), x)$, $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$, este funcția identică. *(L. Panaitopol)*

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se arate că mijloacele laturilor $[AB]$, $[CD]$ și intersecția diagonalelor sînt coliniare dacă și numai dacă AB este paralelă cu CD. *(L. Panaitopol)*

4. Fie un triunghi echilateral ABC de latură a, M un punct în interiorul său și A', B', C' proiecțiile lui M pe BC, AC respectiv AB.

a) Să se arate că $AC' + BA' + CB' = \frac{3}{2}a$.

b) Să se arate că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente dacă și numai dacă M se află pe una din înălțimile triunghiului ABC. *(L. Panaitopol)*

Etapa finală

1. Fie a, b numere reale. Să se determine mulțimea tuturor numerelor reale m care au proprietatea: (m, n, p, q) este soluție reală a sistemului

$$x + y + z + t = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = b. \quad \textit{(M. Becheanu)}$$

2. Să se determine numerele reale a, b, c, astfel încît să avem

$$|ax^2 + bx + c| \leqslant |cx^2 + bx + a|, \ (\forall)x \in \mathbf{R}. \quad \textit{(L. Panaitopol)}$$

3. Fie ABC un triunghi și $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$. Semidreptele $(AA_1$, $(BB_1$ și $(CC_1$ mai intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în A_2, B_2 și respectiv C_2. Să se arate că dacă suma

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} + \frac{BB_1}{B_1B_2} + \frac{CC_1}{C_1C_2}$$

este minimă, atunci dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 sînt concurente. *(Gh. Eckstein)*

4. Într-un plan π se consideră o dreaptă d și un semiplan S determinat de dreapta d. Pentru punctele P, Q din S se definește $f(P, Q) = \min\limits_{x \in d} (PX + XQ)$. Fiind date punctele A, B în S, se cere locul geometric al punctelor M din S astfel încît $f(M, A) = f(M, B)$. *(D. Brânzei)*

CLASA A X-A

Anul 1950

Etapa I

1. Se notează cu B mijlocul unui segment $[AC]$ de lungime $2R$. Pe $[AB]$ și $[AC]$ ca diametri, se construiesc două semicercuri, în același semiplan. O secantă variabilă ce trece prin A intersectează cele două semicercuri în D, respectiv E.

a) Notînd cu x măsura unghiului secantei variabile cu dreapta AC, să se exprime în funcție de R și x: DB, EC, DD', EE', $D'E'$, $E'C$ (unde am notat cu D' și E' proiecțiile punctelor D și E pe AC).

b) Să se exprime în funcție de R și x volumul corpului obținut prin rotația triunghiului CDE în jurul dreptei AC.

c) Să se determine poziția secantei astfel ca acest volum să fie maxim.

2. Să se rezolve ecuația

$$\sin x + \sin 8x + \sin 9x = 0$$

și să se scrie efectiv toate rădăcinile ei cuprinse între $-180°$ și $+180°$.

Etapa a II-a

1. Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu baza $ABCD$ (A, C vîrfuri opuse) și muchiile laterale $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$. Latura cubului este $AB = 3a$. Se împarte fiecare latură a cubului în cîte trei părți egale. Fie M punctul de diviziune de pe AB, cel mai apropiat de A, iar N și P punctele de diviziune de pe AD respectiv AA', cele mai apropiate de A. Se taie cubul cu planul (MNP) și se îndepărtează piramida $AMNP$. Se procedează la fel cu toate cele opt colțuri ale cubului. Se cere:

a) să se schițeze poliedrul rămas. Să se arate cîte fețe (f), cîte vîrfuri (v) și cîte muchii (m) are acest poliedru și să se verifice că

$$f + v = m + 2;$$

b) să se determine suprafața și volumul acestui poliedru;

c) să se afle unghiul diedru format de planul (MNP) cu planul bazei cubului;

d) să se calculeze distanța de la vîrful A pînă la planul (MNP).

2. O statuie de înălțime a este așezată pe un soclu de înălțime b. La ce distanță de piciorul soclului trebuie să se afle un observator ca să vadă statuia și soclul sub același unghi? Cu cît trebuie să-și mărească observatorul distanța față de soclu, pentru a vedea statuia împreună cu soclul sub unghiul sub care a văzut mai înainte numai statuia?

Notă. a) Terenul pe care se află statuia și observatorul este orizontal, iar statuia verticală.

b) Nu se ține seama de înălțimea observatorului.

Anul 1951

Etapa I

1. O piesă de maşină are forma unui inel care se obţine făcîndu-se într-o sferă o gaură cilindrică, axa cilindrului trecînd prin centrul sferei. Înălţimea piesei fiind 2 dm să i se calculeze volumul.

Etapa a II-a

1. Se consideră o dreaptă AB şi două semiplane (P) şi (Q) mărginite de AB. Printr-un punct C al segmentului $[AB]$ se duce în semiplanul (P) o semidreaptă $[CM$ şi măsura unghiului $\widehat{BCM}$ se notează cu α, iar în semiplanul (Q) se duce o semidreaptă $[CN$ şi măsura unghiului $\widehat{BCN}$ se notează cu β.

a) Dacă unghiul diedru determinat de cele două semiplane este drept şi măsura unghiului $\widehat{NCM}$ este γ, atunci să se demonstreze că

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta.$$

b) Să se generalizeze rezultatul precedent în cazul cînd măsura unghiului plan corespunzător unghiului diedru determinat de semiplanele (P) şi (Q) este φ.

Anul 1952

Etapa I

1. Pentru montarea unei macarale se întrebuinţează un trepied ale cărui picioare $[PA]$, $[PB]$, $[PC]$ sînt articulate în P. Punctele A, B, C sînt aşezate într-un plan orizontal, triunghiul ABC fiind echilateral. Se notează cu O punctul unde verticala punctului P intersectează planul (ABC).

Se dă $PA = PB = PC = l$, $PO = h$ (vezi fig. 4).

Se cere:

a) să se calculeze laturile triunghiului ABC. Să se pună în expresia obţinută $h = 0$ şi să se explice rezultatul;

b) să se calculeze unghiul u format de două picioare ale trepiedului. Ce relaţie trebuie să existe între h şi l, pentru ca acest unghi să fie drept? Cît de mare este în acest caz latura triunghiului ABC? Rezultatul se va stabili şi pe baza răspunsului de la punctul a.

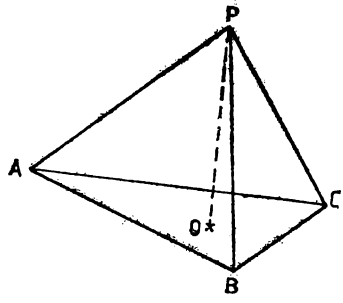


Fig. 4.

c) să se deducă din expresia obţinută pentru cos u care este valoarea maximă pe care o poate lua unghiul u atunci cînd h variază, iar l rămîne constant. Ce poziţie are în acest caz trepiedul? Se putea obţine unghiul maxim fără nici un calcul?

d) să se determine cosinusul unghiului v format de planele (PAB), (PBC). Ce relaţie trebuie să existe între h şi l pentru ca acest unghi v să fie drept?

Etapa a II-a

1. Se dă o piramidă triunghiulară $VABC$ în care muchia $[VC]$ este perpendiculară pe planul bazei (ABC). În triunghiul ABC se duc înălţimile $[AM]$ şi $[BN]$ şi se notează punctul lor de intersecţie cu P; de asemenea, se duc în triunghiul ABC înălţimile $[AD]$ şi $[BE]$ şi se notează punctul lor de intersecţie cu O.

a) Să se demonstreze că planul (AMD) este perpendicular pe muchia $[VB]$; de asemenea, planul (BNE) este perpendicular pe muchia $[VA]$.

b) Să se demonstreze că dreapta după care se taie planele (AMD) și (BNE) este perpendiculară pe planul (VAB).

c) Particularizînd triunghiul ABC să se deducă din punctul b teorema următoare: într-un triedru tridreptunghic, înălțimea coborîtă din vîrful în care se taie muchiile perpendiculare cade în ortocentrul feței opuse.

d) În cazul cînd $AB = BC = CA = a$, $VA = VB = 2a$, să se calculeze lungimea segmentului $[OP]$.

Anul 1954

Etapa I

1. Într-un cerc de rază R se duce diametrul $[AG]$ și coarda $[AC]$, care face cu acest diametru un unghi de măsură x. Prin punctul D, mijlocul razei $[OG]$, se duce secanta DC care mai taie cercul în B. Să se determine x cu condiția ca aria triunghiului ABC să fie de p ori mai mare decît aria triunghiului ACG și să se discute rezultatul după valorile pe care le poate lua p.

Etapa a II-a

1. Într-un triunghi ABC se cunosc laturile $BC = a$, $CA = b$ și relația între unghiuri $A = 2B$. Se cere să se exprime unghiul B și latura c în funcție de laturile a și b, iar apoi să se construiască, pe cale grafică, triunghiul.

2. Într-o excursie au plecat 40 de persoane, care dispun de două cabane a cîte 20 de locuri.

a) În cîte moduri se pot împărți persoanele respective între cele două cabane pentru a dormi?

b) Cu cîte zerouri se termină numărul de la punctul precedent?

c) Să se demonstreze că:

$$(11 \cdot 20)^5 < 11 \cdot 12 \ldots 19 \cdot 20 < (15 \cdot 16)^5;$$
$$(21 \cdot 30)^5 < 21 \cdot 22 \ldots 29 \cdot 30 < (25 \cdot 26)^5;$$
$$(31 \cdot 40)^5 < 31 \cdot 32 \ldots 39 \cdot 40 < (35 \cdot 36)^5.$$

Să se deducă pe baza acestor inegalități, numărul de cifre al rezultatului de la punctul a. Se dau:

$$\log 11 \cdot 20 = \log 220 \simeq 2{,}341,$$
$$\log 21 \cdot 30 = \log 630 \simeq 2{,}800,$$
$$\log 15 \cdot 16 = \log 240 \simeq 2{,}380,$$
$$\log 35 \cdot 36 = \log 1\,260 \simeq 3{,}100,$$
$$\log 31 \cdot 40 = \log 1\,240 \simeq 3{,}092,$$
$$\log 25 \cdot 26 = \log 650 \simeq 2{,}812.$$

3. Să se arate că dacă într-un tetraedru $ABCD$ muchiile $[AB]$ și $[BD]$ sînt perpendiculare și, de asemenea, $[AC]$ și $[CD]$ sînt perpendiculare, piciorul înălțimii din vîrful A se află pe cercul circumscris triunghiului BCD.

Anul 1955

Etapa regională

1. Se dă ecuația $x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0$.

a) Considerînd pe y ca un parametru, să se afle intervalele de variație ale lui y pentru ca ecuația în x dată să admită rădăcini reale.

b) Aceeași problemă ca la punctul a considerîndu-l pe x parametru și y variabilă.

c) Să se afle valoarea reală a lui x pentru care y ia valoarea maximă, precum și valoarea reală a lui x pentru care y ia valoarea minimă.

2. Într-un patrulater $ABCD$ se dau lungimile laturilor $AB = 15$ m, $BC = 13$ m, $CD = 7$ m, $DA = 3$ m și a diagonalei $AC = 8$ m. Să se calculeze măsura unghiului A al patrulaterului și lungimea diagonalei $[BD]$.

3. Un vas în formă de trunchi de con circular drept are ca fund baza mică cu raza de 4 dm așezată orizontal. Baza mare are raza de 7 dm, iar generatoarea are lungimea de 5 dm. Se toarnă în vas 314 l de lichid. Să se afle înălțimea apei din vas.

Etapa finală

1. Se consideră patrulaterul $ABCD$ înscris într-un semicerc de rază $\sqrt{2}$, al cărui centru O se găsește la mijlocul laturii $[AD]$ a patrulaterului. Se știe că latura $[BC]$ este văzută din O sub un unghi de 90°, adică $m(\widehat{BOC}) = 90°$ și că $AB + BC + CD = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Să se afle:

a) lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$;

b) aria corpului generat prin rotirea patrulaterului $ABCD$ în jurul laturii $[AD]$;

c) volumul corpului obținut la punctul b.

2. Să se rezolve sistemul de inegalități:

$$x - 5y - 5 < 0;$$
$$2y + x^2 - 2x - 15 \leqslant 0;$$
$$\frac{(x^3 - 3x^2 - 4x)(2x - 1 - x^2)^3}{(4 - x^2)^3(x^3 - 5x^2 + 4x + 10)} \geqslant 0.$$

Să se deseneze în planul de coordonate rectangulare xOy punctele ale căror coordonate satisfac sistemul dat de inegalități.

3. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu bazele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ și trei puncte L, M, N situate respectiv pe muchiile $[A'D']$, $[AB]$ și $[CC']$. Să se determine forma secțiunii determinate de planul (LMN) în paralelipiped.

Anul 1956

Etapa regională

1. Se consideră două axe rectangulare Ox, Oy și în planul lor punctul $A(8, 2)$. Fie M un punct pe Oy. Prin punctul M se duce dreapta MA care taie axa Ox în N. Tot prin M se duce o dreaptă care face un unghi de măsură egală cu 45° cu

direcția pozitivă a axei Ox și care taie axa Ox în punctul P. Se notează lungimile segmentelor $[OM]$ și $[ON]$ cu y, respectiv x. Se cere:

a) să se găsească relația dintre x și y;

b) să se exprime lungimea segmentului $[PN]$ în funcție de y și apoi în funcție de x;

c) să se afle pe care segment de pe axa Oy poate varia punctul M astfel încît să avem $-7 < PN < 2$ și să se deseneze cazurile limită cînd $PN = 2$ și $PN = -7$. Segmentul $[PN]$ este considerat a avea o lungime negativă cînd $N \in [OP$.

d) să se afle pozițiile lui M pentru care lungimea segmentului $[PN]$ devine zero și pentru care ea devine infinită.

2. Se consideră un semicerc cu diametrul $[AB]$ avînd lungimea de 12 cm și pe acest diametru un punct C situat la o distanță de 2 cm de punctul A.

a) Să se determine poziția punctului D pe acest semicerc astfel încît dacă semicercul se rotește în jurul diametrului $[AB]$, volumul corpului generat de suprafața $(CBDC)$ să fie $\frac{3}{5}$ din volumul corpului generat de suprafața $(ACDA)$.

b) Să se calculeze aria triunghiului COD, unde O este mijlocul diametrului $[AB]$, iar D este punctul obținut la punctul a.

3. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$$

și să se scrie valorile lui x, cuprinse între 0° și 720°, care o verifică.

Etapa finală

1. Să se rezolve ecuația

$$4x^4 - 8x^3 + ax^2 + 27x + 18 = 0$$

știind că suma a două rădăcini este egală cu 1 și egală cu suma celorlalte două rădăcini.

2. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2(x + a) = \sin(x + 2b)\sin(x + 2c)$$

și să se ajungă la o formă căreia să i se poată aplica logaritmii.

Aplicație numerică: $a = -50°$, $b = 65°$, $c = 35°$. Se vor scrie toate soluțiile cuprinse între 0° și 720°.

3. Se dau un plan (P) și două puncte A, B situate de aceeași parte a planului.

a) Să se găsească locul geometric al punctelor M din planul (P) cu proprietatea că dreptele AM și BM fac cu planul unghiuri congruente.

b) Să se arate cum se poate construi punctul M care îndeplinește condiția de la punctul a și pentru care, în plus, unghiul $\widehat{AMB}$ este drept.

c) Dacă se notează lungimea segmentului $[AB]$ cu d, iar distanțele de la punctele A și B la planul (P) cu a, respectiv b, să se găsească relația pe care trebuie să o satisfacă a, b, d astfel încît să fie posibilă construcția punctului M de la punctul b. *(Gh.D. Simionescu)*

Anul 1957

Etapa regională

1. Coasta OA a unui deal face cu orizontala un unghi a cărui măsură este de 45°. Din punctul A înclinarea se micşorează şi noua direcţie Ax face cu orizontala un unghi de măsură α (unghiul $\widehat{OAx}$ se află într-un plan vertical). În A este înfipt vertical un stîlp $[AM]$ de lungime l, ancorat în punctele B pe Ax şi C pe AO prin cablurile $[MB]$, $[MC]$ care fac cu stîlpul unghiuri de măsuri egale. Ştiind că unghiul $\widehat{MBA}$ şi unghiul $\widehat{MCA}$ sînt complementare şi că diferenţa lungimilor segmentelor $[AC]$ şi $[AB]$ este egală cu lungimea diagonalei pătratului a cărui latură are lungimea l, să se determine:

a) măsurile unghiurilor $\widehat{MBA}$, $\widehat{MCA}$, α şi măsurile unghiurilor făcute de cabluri cu stîlpul;

b) lungimile AB şi AC în funcţie de lungimea stîlpului. *(Gh.D. Simionescu)*

2. Muchiile laterale $[OA]$, $[OB]$ şi $[OC]$ ale unei piramide triunghiulare au respectiv lungimile a, b, şi c şi sînt perpendiculare două cîte două. Prin centrul de greutate G al bazei ABC se duc plane paralele cu feţele laterale ale piramidei, formîndu-se astfel un paralelipiped dreptunghic.

a) Să se afle volumul piramidei în funcţie de a, b şi c.

b) Să se determine raportul dintre volumele paralelipipedului şi piramidei.

c) Să se afle distanţa de la vîrful piramidei la bază.

d) Să se exprime prin funcţii trigonometrice măsurile unghiurilor pe care le face diagonala $[OG]$ a paralelipipedului cu muchiile $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ ale piramidei. *(I. Lepădatu)*

3. Să se arate că expresia

$$E = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x}{x^5 - x^2 - x + 2}$$

ia valoarea 3 cînd x se înlocuieşte printr-o rădăcină a ecuaţiei

$$x^3 + x - 1 = 0.$$

Etapa finală

1. Să se determine polinomul $P(x)$ de gradul 5, cu coeficientul lui x^5 egal cu 1, care are următoarele proprietăţi:

— împărţit cu $x^2 - x + 5$ dă restul $3x - 2$;
— restul împărţirii la $x - 1$ este 5;
— restul împărţirii la $x - 2$ este
— restul împărţirii la $x + 3$ este 4.

Să se scrie descompunerea în factori a polinomului $P(x) - 3x - 2$. *(Gh.D. Simionescu)*

2. a) Să se rezolve triunghiul oarecare ABC în care se dau: lungimea a a laturii $[BC]$, măsura unghiului opus $\hat{A}$ şi suma $b + c = l$ a lungimilor celorlalte două laturi. Să se exprime aria σ a triunghiului şi raza r a cercului înscris în funcţie de elementele date. Discuţie.

b) Să se construiască grafic triunghiul cu datele din enunţ şi să se regăsească pe această cale condiţiile de existenţă ale problemei.

c) Să se rezolve complet triunghiul în cazul $m(\hat{A}) = 60°$ și $l = a\sqrt{2}$.

3. a) Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru $ABCD$ bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$ și $\widehat{BDC}$ intersectează muchia $[BC]$ în același punct M, atunci și bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABD}$ și $\widehat{ACD}$ întîlnesc muchia $[AD]$ într-un același punct N.

b) Dacă și bisectoarele unghiurilor $\widehat{CAD}$ și $\widehat{CBD}$ se intersectează pe muchia $[CD]$, atunci proprietatea este generală pentru orice pereche de fețe în raport cu muchia lor comună.

c) Care sînt relațiile între lungimile muchiilor care caracterizează astfel de tetraedre? Reciproca este adevărată, adică dacă relațiile sînt îndeplinite, rezultă că bisectoarele unghiurilor opuse muchiei comune a două fețe sînt concurente?

d) Să se demonstreze că dacă $AC = BD$, atunci planul dus prin M paralel cu dreptele AB și CD conține dreapta MN. *(Gh.D. Simionescu)*

Anul 1958

Etapa regională

1. a) Să se demonstreze că polinomul

$$P(x) = \frac{x^n}{n-1} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)(n-2)} + \frac{\quad}{(n-2)(n-3)} + \qquad + \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 1} - 1$$

este divizibil prin $x - 1$.

b) Să se determine citul împărțirii polinomului $P(x)$ prin $x - 1$. *(E. Vișa)*

2. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are lungimea laturii bazei mari egală cu a, lungimea laturii bazei mici egală cu b și măsura unghiului format de muchia laterală cu muchia bazei mari, care pornesc din același vîrf, egală cu c radiani.

a) Să calculeze volumul trunchiului de piramidă.

b) Să se determine domeniul de variație a parametrului c pentru care problema este posibilă.

c) Să se generalizeze discuția de la punctul b pentru un trunchi de piramidă regulata avînd n fețe laterale. *(Gh. Pîslaru)*

3. a) Să se stabilească identitatea

$$\operatorname{tg} 15° \operatorname{tg} 35° \operatorname{tg} 55° \operatorname{tg} 75° = 1$$

b) Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{tg}(5° - x)\operatorname{tg}(25° - 2x)\operatorname{tg}(45° - 3x)\operatorname{tg}(65° + 2x)\operatorname{tg}(85° + x)\operatorname{tg} kx = 1.$$ *(T. Roman)*

4. Să se arate că expresia

$$E = 5^{n+2}7^{2n} - 2^{2n}5^{2n-2}$$

este divizibilă cu 3 625, oricare ar fi numărul natural n.

Etapa finală

1. a) Să se arate că dacă m_1, m_2, m_3, m_4 sînt numere naturale, polinomul

$$P(x) = x^{4m_1} + x^{4m_2+1} + x^{4m_3+2} + x^{4m_4+3}$$

este divizibil cu polinomul $x^3 + x^2 + x + 1$.

b) Să se determine un polinom $Q(x)$, de aceeași formă cu $P(x)$ și care este divizibil cu $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$.

c) Să se rezolve ecuația de gradul 9, $P(x) = 0$, unde polinomul $P(x)$ verifică condițiile de la punctul a. *(T. Roman)*

2. Se consideră piramidele regulate care au aceeași arie totală egală cu s, iar bazele lor sînt poligoane regulate cu n laturi.

a) Să se arate că în mulțimea acestor piramide există două piramide distincte care au același volum.

b) Să se determine piramida de volum maxim.

c) În cazul particular $s = 144$, $n = 4$ și volumul $v = 64$, să se calculeze lungimile laturilor bazelor și înălțimilor celor două piramide. *(I. Loziciu)*

3. a) Să se arate că

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg}(x + 1) = \operatorname{arcctg}(1 + x + x^2).$$

b) Să se deducă valoarea sumei

$$S_n = \operatorname{arcctg}(1 + 1 + 1^2) + \operatorname{arcctg}(1 + 2 + 2^2) + \ldots + \operatorname{arcctg}(1 + n + n^2).$$

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

Anul 195[illegible]

Etapa regională

1. a) Să se afle restul împărțirii polinomului $x^m + a^m$ prin $(x + b)(x + c)$.

b) Pe baza rezultatului precedent, să se determine restul împărțirii polinomului $x^m + a^m$ prin $(x + a)^2$.

c) Ținînd seama de rezultatul obținut la punctul b, să se demonstreze că oricare ar fi numărul întreg și pozitiv m expresia

$$E = 12^m + (-1)^m(13m - 1)$$

este divizibilă cu 169. *(O. Sacter)*

2. Se consideră un tetraedru regulat $ABCD$ și se notează cu M mijlocul muchiei $[AD]$ și cu G centrul de greutate al triunghiului BCD. Se dă $MG = d$.

a) Să se calculeze volumul tetraedrului.

b) Dacă u și v sînt măsurile unghiurilor pe care le formează MG cu planele (ABC), respectiv (BCD), să se arate că

$$\operatorname{tg}(u + v) = 2\operatorname{tg} v = 10\operatorname{tg} u.$$

c) Să se determine punctul de intersecție dintre dreapta MG și planul (ABC). *(C. Georgescu)*

3. Să se arate că dacă $\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b = 1 + \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b$, atunci

$$\sin a \sin b \in \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Etapa finală

1. Să se rezolve ecuația

$$4a^2 \sin(x + B) \sin(x + C) = (b + c)^2 + 2bc,$$

unde a, b, c sînt lungimile laturilor, iar B și C măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic. Să se scrie soluțiile acestei ecuații cuprinse între 0 și 2π. *(Gh. D. Simionescu)*

2. Se dă o piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$. Un plan paralel cu baza, dus pe la mijlocul înălțimii, taie muchiile $[VA]$, $[VC]$, $[VE]$ în punctele M, N, P, determinînd astfel un tetraedru regulat $VMNP$ cu lungimea muchiei egală cu a.

a) Să se calculeze, în funcție de a, volumul piramidei $VABCDEF$.

b) Să se calculeze aria totală a piramidei.

3. Se dă ecuația $E(x) = 0$, unde $E(x) = x^3 + px^2 + qx + r$. Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $E(x) = 0$ și se consideră relațiile:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3r; \quad (1)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = q. \quad (2)$$

a) Să se arate că dacă rădăcinile x_1, x_2, x_3 satisfac relația (2), atunci ele satisfac și relația (1).

b) Presupunînd că are loc relația (2), să se găsească relația dintre coeficienții ecuației $E(x) = 0$.

c) Să se rezolve ecuația $E(x) = 0$ știind că

$$p + q + r = -1$$

și să se arate că una dintre rădăcini nu depinde de coeficienții p, q, r.

Anul 1960

Etapa regională

1. Se dă ecuația $x^3 + max^2 + ax + na = 0$, unde a, m, n sînt numere reale.

a) Să se calculeze expresia

$$E = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2,$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației date.

b) Folosind rezultatul obținut la punctul a, să se arate că dacă ecuația $2mx^2 + 2x + n = 0$ are rădăcinile complexe, atunci ecuația dată are numai o singură rădăcină reală. *(O. Sacter)*

2. a) Știind că latura $[BC]$ de lungime a a unui triunghi ABC are proprietatea $a = (b + c)/2$, unde b și c sînt lungimile laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$ ale triunghiului, să se arate că există relația

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

b) Dacă proprietatea de la punctul a este satisfăcută, să se stabilească între ce valori poate să varieze măsura unghiului $\hat{A}$.

3. O prismă triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ are latura bazei de lungime a și înălțimea de lungime b. Pe muchiile laterale se consideră punctele M, N, P astfel încît să existe relațiile:

$$\frac{A_1M}{MA} = 1; \frac{B_1N}{NB} = \frac{1}{3} \text{ și } \frac{C_1P}{PC} = 3.$$

Se notează cu D dreapta de intersecție a planului bazei (ABC) cu planul (MNP).

a) Dacă se notează cu A_2, B_2 intersecțiile dreptelor BC, respectiv AC cu dreapta D, să se arate că triunghiul CA_2B_2 este dreptunghic și că unghiul $\widehat{BA_2A}$

este unghiul plan corespunzător diedrului format de planul bazei prismei cu planul (MNP).

b) Să se calculeze aria triunghiului MNP în funcție de a și b, precum și măsura unghiului diedru definit la punctul a. *(A. Petrescu)*

Etapa finală

1. Se consideră șirul

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots$$

a) Să se afle care este grupul de termeni consecutivi ai acestui șir, a căror sumă este $\frac{1}{3}$.

b) Să se demonstreze că nu există în șirul dat un număr de cel puțin doi termeni consecutivi a căror sumă să fie egală cu $\frac{1}{2}$.

c) Să se arate că dacă n este întreg, expresia $n^2 - 8n$ este pătrat perfect numai pentru $n = 1$, iar $n^2 + 12n$ este pătrat perfect numai pentru $n = 4$. *(O. Sacter)*

2. Pentru confecționarea unei matrițe se trasează pe o foaie de tablă două cercuri concentrice de raze R și r $(R > r)$. Se împart apoi cele două cercuri în cîte cinci părți egale prin punctele consecutive A, B, C, D, E de pe cercul mare și A', B', C', D', E' de pe cercul mic, astfel încît A' să se afle pe raza care trece prin mijlocul arcului $\widehat{AB}$, B' pe raza care trece prin mijlocul arcului $\widehat{BC}$ ș.a.m.d. Unind punctele A cu A', B cu B' C cu C', D cu D', E cu E', se formează șablonul unei stele în cinci colțuri.

a) Să se demonstreze că prin îndoirea triunghiurilor $AE'A'$, $BA'B'$, $CB'C'$ etc. după laturile $[E'A']$, $[A'B']$, $[B'C']$, ... vîrfurile A, B, C, D, E pot fi aduse într-un punct comun, astfel încît să se formeze o piramidă regulată. Să se exprime volumul acestei piramide în funcție de R și r.

b) Să se exprime aria laterală a piramidei în funcție de R și r.

c) Să se determine formulele trigonometrice pentru calculul măsurilor unghiurilor formate de muchiile laterale ale piramidei cu planul bazei, precum și măsura unghiului diedru format de o față laterală cu baza piramidei.

d) Presupunînd că vrem să folosim șablonul la confecționarea unor stele de sticlă avînd numai triunghiurile $AE'A'$, $BA'B'$, $CB'C'$ etc. colorate cu roșu, să se determine relația dintre R și r pentru ca suprafața colorată cu roșu să aibă o arie maximă. *(O. Sacter)*

Anul 1961

Etapa regională

1. a) Să se calculeze suma

$$S(n) = \sum_{p=1}^{n} (p^3 - ap^2 - (a-1)p).$$

b) Să se arate că expresia $E = \frac{12S(n)}{n(n+1)(n+2)}$ este un număr întreg dacă a este întreg.

c) Să se determine numărul a astfel încît să avem $E = a^2$. *(O. Sacter)*

2. a) Într-un vas complet închis, transparent, în formă de piramidă regulată cu baza un poligon cu n laturi se află lichid la o înălțime de h cm de vîrf. Vasul are axa de simetrie pe direcția verticalei locului și vîrful în jos. Se răstoarnă vasul cu baza orizontală și vîrful în sus. Pînă la ce înălțime se ridică lichidul în vas, știind că înălțimea vasului este H cm, iar lungimea laturii poligonului de bază este a cm? Să se arate că înălțimea astfel găsită, z, depinde numai de h și H.

b) Dacă piramida nu este regulată și are aceeași înălțime cu piramida regulată, se mai păstrează proprietatea și în ce condiții?

c) Aplicație numerică: piramida regulată are drept bază un pătrat cu $a = 6$ cm, $h = 4$ cm, $H = 8$ cm. *(O. Sacter)*

3. Să se arate că dacă $\sin 2(a+c) = n \sin 2b$, atunci

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{n+1}{n-1}\operatorname{tg}(a-b+c). \quad \textit{(E. Kiss, P. Simon)}$$

Etapa finală

1. Se secționează tetraedrul regulat $ABCD$, avînd lungimea muchiei egală cu a, cu un plan paralel cu muchiile opuse $[AB]$ și $[CD]$. Fie k raportul în care acest plan împarte muchia $[AD]$ și M, N, P, Q punctele de intersecție cu muchiile $[AD]$, $[BD]$, $[BC]$ și respectiv $[AC]$. Se notează cu E și F mijloacele muchiilor $[AD]$ și $[CD]$.

a) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

b) Să se demonstreze că dreptele MP, NQ, EF sînt concurente.

c) Să se determine raportul k astfel încît solidele obținute prin secționare să fie echivalente.

d) Să se arate că pentru valoarea lui k găsita la punctul c aria dreptunghiului $MNPQ$ este maximă. *(Gh. Popescu)*

2. Dacă ecuația de gradul al treilea $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ are numai rădăcini reale și pozitive, să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$\frac{a_1a_2}{a_0a_3} \geqslant 9. \quad \textit{(O. Sacter)}$$

3. Pe o foaie de tablă se trasează două cercuri concentrice avînd razele R și r $(R > r)$. În cercul mic se înscrie pătratul $ABCD$, iar pe cercul mare se marchează punctele K, L, M, N, P, Q, R, S care sînt vîrfurile unui octogon neregulat, astfel încît $KL = MN = PQ = RS$ și perechile de drepte (KL, AB), (MN, BC), (PQ, CD) și (RS, AD) să fie paralele. Se croiește tabla după conturul $AKLBMNCPQDRSA$ și apoi se îndoaie fețele $AKLB$, $BMNC$, $CPQD$, DRS 1 respectiv după laturile AB, BC, CD, DA. Prin alipirea muchiilor $([AS], [AK])$, $([BL], [BM])$, $([CN], [CP])$, $([DQ], [DR])$ se formează o piesă avînd forma unui trunchi de piramidă.

a) Se notează $m(\widehat{SAK}) = u$. Să se arate că pentru orice valoare a lui r și a lui R, u nu depinde decît de unghiul diedru de măsură α pe care îl formează fețele laterale ale trunchiului cu baza mare.

Să se demonstreze că între unghiurile de măsură u și respectiv a, există relația

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2}\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}=1.$$

b) Să se determine $\operatorname{tg} u$, astfel încît $a=60^\circ$. *(O. Sacter)*

Anul 1962

Etapa regională

1. a) Să se stabilească condițiile pentru ca funcția rațională definită de expresia

$$\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+\ldots}{a'x^4+c'x^2+\ldots}$$

să aibă o valoare constantă pentru orice valoare a lui

b) Să se exprime distanța între imaginile M_1 și M_2 ale numerelor complexe $z_1=a_1+ib_1$ și $z_2=a_2+ib_2$.

c) Să se demonstreze că există un punct I în planul în care se reprezintă imaginea M a numărului complex

$$z=\frac{3-t^2}{1+t^2}+i\frac{2t^2+4t+2}{1+t^2},$$

a cărui distanță pînă la M rămîne constantă, oricare ar fi valoarea parametrului t. Să se determine afixul punctului I. *(O. Sacter)*

2. Se dau două dreptunghiuri în spațiu $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ avînd planele paralele; primul dreptunghi are dimensiunile $AB=a$, $BC=b$ iar al doilea $A_1B_1=a_1$, $B_1C_1=b_1$.

a) Să se demonstreze că pentru ca dreptele AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 să fie concurente este necesar și suficient ca laturile celor două dreptunghiuri să fie respectiv paralele și să aibă loc relația $ab_1=a_1b$.

b) Dacă centrele dreptunghiurilor de mai sus se află pe aceeași perpendiculară pe cele două plane, iar distanța dintre plane este h, atunci între unghiurile diedre x, y formate respectiv de planele ABA_1B_1 și BCB_1C_1 cu planul bazei mari $ABCD$ există relația

$$(a+a_1)\sqrt{4h^2+(b-b_1)^2}\cos x+(b+b_1)\sqrt{4h^2+(a-a_1)^2}\cos y=2(ab-a_1b_1).$$

(O. Sacter)

3. Să se transforme în produs expresia

$$E=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-3\operatorname{tg}3x.$$ *(Gh. D. Simionescu)*

Etapa finală

1. Un vas plin cu apă are forma unei piramide patrulatere regulate a cărei apotemă este egală cu latura bazei și egală cu $2a$. Inițial, vasul este ținut cu vîrful în jos și cu baza într-un plan orizontal. Se înclină apoi vasul așa fel încît înălțimea piramidei și una din apotemele bazei să rămînă în planul în care s-au aflat la început, iar înălțimea, în ultima ei poziție, să facă un unghi de 60° cu planul orizontal pe care stă vîrful piramidei.

a) Ce fracțiune din cantitatea de apă se varsă prin această înclinare?

b) Să se arate că unghiurile pe care le fac, cu planul orizontal ce trece prin vîrful piramidei, două din muchiile laterale opuse, în ultima lor poziție, sînt complementare. *(C. Georgescu)*

2. a) Fiind date polinoamele $P = X^n \sin a - X \sin na + \sin(n-1)a$ și $I = X^2 - 2X\cos a + 1$, să se arate că P se divide prin I și să se determine cîtul Q al diviziunii lui P prin I.

b) Notăm cu $E(a)$ expresia care se obține înlocuind în Q pe X^k cu $\cos ka$, $k \in \{1, 2, \ldots, (n-2)\}$. Să se determine valorile lui a pentru care $E(a) = 0$.

c) Să se determine suma pătratelor coeficienților polinomului Q. *(D. Flondor)*

Anul 1963

Etapa regională

1. a) Să consideră numărul complex $z = \dfrac{1 + i\lambda}{1 - i\lambda}$, unde λ este un parametru real. Să se determine modulul numărului complex z și să se arate că imaginea geometrică a numărului complex z descrie un cerc a cărei poziție să se precizeze.

b) Dacă se notează cu $\bar{z}$ conjugatul lui z, atunci să se demonstreze că avem $z^n + (\bar{z})^n = 2\cos(2n \operatorname{arctg} \lambda)$.

c) Să se arate că pentru două valori λ_1, λ_2 ale parametrului λ legate prin relația $\dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1\lambda_2} = k$ (constant), distanța între imaginile geometrice corespunzătoare este constantă. *(C. Ivănescu)*

2. Un vas are forma unei prisme regulate cu baza pătrată și conține apă pînă la o înălțime oarecare, fără a fi plin. Latura pătratului este egală cu $a\sqrt{3}$. Se rotește vasul din poziția verticală, în jurul unei laturi a bazei, pînă cînd apa este gata să iasă din vas și se observă că vasul s-a înclinat cu 30° față de poziția inițială.

a) Ce adîncime a avut partea goală a vasului în poziția verticală?

b) Ce volum de apă se va pierde din vas dacă se va continua rotirea cu încă 30°? *(C. Georgescu)*

3. Să se arate că expresia

$$E = \frac{\cos 2x - (m-1)\cos 4x + m}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + m\sin^2 x}$$

nu depinde de m. *(M. Oprea)*

Etapa finală

1. Fețele laterale ale unei piramide regulate $VABCD$, cu baza pătrată $ABCD$, se desprind rămînînd articulate în vîrful V. În noile lor poziții fețele VAB, VBC, VCD, VDA se notează respectiv cu VA_2B_1, VB_2C_1, VC_2D_1, VD_2A_1. Octogonul $A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$ este plan și $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2$. Se notează cu x unghiul A_2VA_1, cu a lungimea laturii $[AB] \equiv [A_2B_1]$ și cu m lungimea muchiei $[VA] = [VA_1]$.

a) Cu cît este mai mică înălțimea piramidei octogonale față de cea a piramidei date?

b) Care este volumul piramidei octogonale? *(O. Sacter)*

2. Între unghiurile triunghiului ABC există relația $3B + 2C = 180°$.

a) Ce relație există între laturile acestui triunghi?

b) Dacă triunghiul ABC este isoscel, atunci există relația $R^2 = 2r(R + 2r)$, unde R și r sînt, respectiv, raza cercului circumscris și raza cercului înscris triunghiului ABC. *(Gh. Popescu)*

3. a) În ce condiții polinomul $f_1(n) = n^2 + pn + q$, (p, q întregi) este un număr par (sau impar) pentru orice n întreg?

b) Să se determine relațiile necesare și suficiente între coeficienții întregi p, q astfel încît polinomul $f_2(n) = n^3 + pn + q$ să fie divizibil cu 3 pentru orice n natural. *(T. Roman)*

Anul 1964

Etapa regională

1. Într-un plan P se dă un triunghi ABC dreptunghic în A. Pe perpendicularele din B și C pe acest plan luăm punctele B', respectiv C'. Fie $m(\widehat{C'AB'}) = \alpha$, $m(\widehat{B'AB}) = \beta$, $m(\widehat{C'AC}) = \gamma$, iar $BB' = b$ și $CC' = c$. Se cere:

a) să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $AB'C'$;

b) să se demonstreze că $\alpha \leqslant 90°$. În ce caz avem semnul de egalitate?

c) Să se arate că $\dfrac{V}{b + c} = \text{const}$, unde V este volumul corpului $ABCC'B'$;

d) notînd cu φ măsura unghiului diedru format de planul triunghiului $AB'C'$ cu planul P, să se arate că avem relația

$$\sin \alpha \cos \varphi = \cos \beta \cos \gamma.$$ *(T. Weszely)*

2. Se dă polinomul $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$.

a) Să se determine coeficienții a_0, a_1, a_2, a_3 astfel ca să avem

$$P(1) + P(2) + \quad + P(n) \quad n^4.$$

b) După determinarea coeficienților să se verifice relația găsită prin metoda inducției matematice. *(I. Stănescu)*

Etapa finală

1. a) Fiind dată ecuația $x^3 + ax^2 \quad bx + c = 0$ cu coeficienți reali, ale cărei rădăcini sînt x_1, x_2, x_3, să se calculeze $x_1^2x_2^2 \quad x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$ în funcție de coeficienții ecuației.

b) Să se demonstreze, că dacă ecuația $ax^2 + 2bx + 2c \quad 0$ are rădăcini complexe, atunci ecuația de gradul al treilea de la punctul precedent are o singură rădăcină reală.

c) Presupunînd a, b, c raționali, să se determine relația dintre coeficienți astfel ca $\sqrt{x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2}$ să fie număr rațional. *(O. Sacter)*

2. Se consideră triedrul tridreptunghic $OXYZ$ și punctele fixe D și F, respectiv pe OZ și OY. În planul (XOZ) considerăm punctul M mobil, astfel ca proiecția lui pe OX să fie punctul fix A. Din M ducem perpendiculara MC pe FB, B fiind intersecția dreptelor MD și OX.

a) Să se afle locul geometric al punctului C.

b) Dacă măsura unghiului planelor (XOY) și (FMB) este n, $m(\widehat{OFD}) = m$, $m(\widehat{OBD}) = p$, să se arate că $tg^2 m + tg^2 p = tg^2 n$.

c) Dacă $OA = a$, $OF = b$, $OD = c$, să se determine poziția punctului M astfel ca $V_{FABD} = \frac{abc}{3}$. *(I. Stănescu)*

3. a) Să se stabilească identitatea

$$E = \sin(4x - 10°)\cos(4x - 30°) + \sin(11x + 40°)\cos(11x + 60°) = \\ = \sin(15x - 150°)\sin(7x - 20°).$$

b) Dacă $12° \leqslant x \leqslant 20°$ să se arate că $E \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$.

c) Să se arate, fără tabele, că pentru $x = 20°$ avem $E = \frac{\sqrt{3}}{4}$. *(C. Ionescu-Țiu)*

Anul 1965

Etapa regională

1. Se dau numerele complexe $z_1 = \frac{1 + im}{1 - im}$, $z_2 = \frac{m + i}{m - i}$, unde m este un parametru real. Se cere:

a) să se arate că imaginile geometrice ale acestor numere complexe se află pe un același cerc cu centrul în originea axelor de coordonate. Să se precizeze poziția acestor imagini față de axele de coordonate.

b) dacă notăm cu $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ conjugatele numerelor z_1, z_2, să se arate că avem relația

$$z_1^{2n} + z_2^{2n} = (\overline{z_1})^{2n} + (\overline{z_2})^{2n}.$$

2. Se dau unghiurile adiacente $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$ cu $m(\widehat{AOB}) = x$ și $m(\widehat{BOC}) = 2x$, unde $x \leqslant 30°$. Pe semidreapta $[OB$ se consideră un punct oarecare M ale cărui simetrice față de semidreptele $[OA$, $[OC$ se notează respectiv cu N, P. Se cere:

a) valoarea lui x pentru care avem $\sin(\widehat{MPN}) = \cos(\widehat{MNP})$;

b) să se arate că în cazul cînd avem $PN = OP - MN$, există relația $2(\sin 3x - \sin x) = 1$;

c) presupunînd $PN > OP + MN$ să se arate că $4\sin x \cos 2x > 1$. *(L. Mănescu)*

3. Se consideră un triunghi ABC cu unghiul drept în A. Pe planul triunghiului în A, se ridică perpendiculara AV. Se unește punctul variabil V cu vîrfurile B, C.

a) Din punctul G, centrul de greutate al triunghiului ABC, ducem GM, GN, GP paralele la muchiile $[VA]$, $[VB]$, $[VC]$ pînă întîlnesc, respectiv, fețele VBC, VCA, VAB în punctele M, N, P. Să se stabilească relația

$$\frac{GM}{VA} + \frac{GN}{VB} + \frac{GP}{VC} = 1.$$

b) Să se arate că această relație este valabilă și în cazul cînd G este un punct oarecare din interiorul triunghiului ABC. *(I. Sdrulla)*

Etapa finală

1. Fiind dată ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, să se arate că:

a) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (x_1 + x_2 + x_3)^4$ dacă și numai dacă $c = ab - \frac{b}{2a}$;

b) presupunînd că b este un număr rațional și $c = ab - \frac{b}{2a}$, cum trebuie luat c pentru ca și a să fie rațional? *(O. Sacter)*

2. Să se arate că în orice triunghi există relațiile:

a) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$;

b) $\sin^4 \frac{A}{2} + \sin^4 \frac{B}{2} + \sin^4 \frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left[1 - 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos A \cos B \cos C\right]$;

c) dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi ascuțitunghic, să se demonstreze inegalitatea $\sin^4 \frac{A}{2} + \sin^4 \frac{B}{2} + \sin^4 \frac{C}{2} < \frac{1}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

(O. Sacter)

3. Două pătrate egale de latură a, $ABCD$ și $BEFG$, sînt situate în planele (P) și (Q) perpendiculare, au vîrful comun B și laturile $[AB]$ și $[BE]$ pe dreapta de intersecție a planelor (A și E fiind simetrice față de B).

a) Să se arate că figura $BDGECF$ este o prismă al cărei volum V_1 se cere.

b) Să se afle distanța de la dreapta AB la planul $(DCFG)$ și unghiul dreptelor BD și BF;

c) Fie M un punct pe EF. Se notează $FM = x$. Planul (AMC) taie prisma în două solide dintre care unul este un trunchi de piramidă al cărui volum V_2 se cere. Să se afle x dacă $V_2 = k\, V_1$, unde $k > 0$ este dat. *(Elena Flondor)*

Anul 1966

Etapa regională

1. Să se arate că $\left(\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right)^{24} - 2^{24} = 0$.

(C. Ionescu-Țiu)

2. Se consideră prisma dreaptă cu baza pătrată $ABCD$. Se intersectează această prismă prin planul (P), care intersectează planul $(ABCD)$ prin dreapta MN, M și N fiind mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[BC]$. Planul (P) formează cu planul $(ABCD)$ un unghi α și taie muchiile laterale $[AA']$, $[DD']$ și $[CC']$ în punctele Q, S, T.

a) Să se determine, prin construcție, vîrfurile poligonului de intersecție $MQSTN$.

b) Să se calculeze perimetrul și aria acestei figuri plane $MQSN$ și limitele între care variază aceste valori, considerînd înălțimea prismei egală cu $\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot AB$ și α variabil. Punctul S este situat pe muchia $[DD']$.

c) Să se calculeze volumul corpului mărginit de planul (P), planul bazei $(ABCD)$ și fețele laterale ale prismei. *(Margareta Boer)*

3. Să se demonstreze egalitatea

$$\frac{2\sin a}{\cos a - \cos 3a} + \frac{2\sin a}{\cos a - \cos 5a} + \frac{2\sin a}{\cos a - \cos 7a} + \dots + \frac{2\sin a}{\cos a - \cos(n+1)a} =$$

$$= \frac{\sin na}{\sin (n-1)a \cdot \sin a}, \ n \text{ fiind număr natural. } (Al. \ Lalescu)$$

Etapa finală

1. Se dă ecuația $(a^3 - 4a^2 + 5a - 2)x^3 + x - 1 = 0$.

a) Să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sînt inversele rădăcinilor ecuației date și să se rezolve ecuația dată.

b) În ce caz toate rădăcinile sînt reale? *(C. Ionescu-Țiu)*

2. Să se afle restul împărțirii

$$(7\sin^{31} x + 8\sin^{13}x - 5\sin^5 x \cos^4 x - 10\sin^7 x + \sin^5 x - 2) :$$
$$:[\sin^2 x - (1 - \sin x)(\cos^2 x - 2)]$$

fără a se efectua împărțirea. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. O placă triunghiulară ABC se îndoaie în jurul liniilor mijlocii ale triunghiului. Vîrfurile A, B, C se unesc formînd vîrful V al unui tetraedru $VABC$, unde A_1, B_1, C_1 sînt mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$.

a) Să se arate că au loc relațiile

$$\cos \alpha = \frac{2\cos A}{\sin B \sin C} - 1 = 1 - 2\operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C,$$

unde α este unghiul diedru corespunzător muchiei $[B_1C_1]$.

b) Să se exprime volumul tetraedrului în funcție de raza ρ a cercului circumscris unei fețe a tetraedrului și unghiurile triunghiului. *(C. Ionescu-Țiu)*

Anul 1967

Etapa regională

1. Se consideră într-un plan (P) un cerc de centru O și rază r, o dreaptă Δ paralelă cu planul (P), aflată la o distanță $\frac{r}{2}$ de planul (P) și a cărei proiecție pe planul (P) taie cercul dat în punctele A și B. Se notează cu (Q) planul determinat de dreapta Δ și O, centrul cercului dat, cu I punctul de intersecție al tangentelor în A și B la cercul dat și cu C și D punctele în care aceste tangente întîlnesc dreapta de intersecție a planelor (P) și (Q). Se cere:

a) dacă unghiul diedru format de planele (P) și (Q) este de $30°$, să se determine lungimile segmentelor $[AB]$, $[MI]$ și $[MC]$, unde M este piciorul perpendicularei, duse din O pe dreapta Δ;

b) să se arate că planele $(R) = (MI, MC)$ și $(S) = (MI, MD)$ sînt perpendiculare pe planul (Q);

c) unghiul plan al diedrului format de planele (R) și (S) fiind x, iar unghiul plan al diedrului format de planele (R) și (P) fiind y, să se arate că $x = 2y$. *(N. Peligrad, P. Simion)*

2. Fie A, B, C trei mulțimi. Să se arate că:

a) dacă sînt îndeplinite condițiile $A \cup B \subset A \cup C$ și $A \cap B \subset A \cap C$, atunci $B \subset C$;

b) dacă $B \subset C$, atunci $A \cup B \subset A \cup C$ și $A \cap B \subset A \cap C$. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Să se calculeze suma:

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)}.$$

4. Se dă expresia $E(x)=m\sin^4x+(m-n)\cos^4x+n\cos^2x$.

a) Să se arate că dacă $0<n<m$, atunci $\frac{2m+n}{4}\leqslant E(x)\leqslant m$.

b) Pentru care valori ale lui x expresia $E(x)$ are valoarea maximă sau minimă?

c) Să se determine m și n astfel încît să avem $E(x)=\cos 4x$. *(M. Oprea)*

Etapa finală

1. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu baza superioară $ABCD$ și muchiile $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ paralele, are $AA'=a$, $AB=b$, $AD=2c$. Notăm cu M mijlocul muchiei $[AD]$, cu BI perpendiculara din B pe $A'M$, iar cu AP perpendiculara din A pe BI. Se cere:

a) lungimea BI;

b) lungimea AI;

c) cosinusul unghiului diedru format cu planele $(A'BM)$ și $(CC'D)$;

d) locul geometric al punctului I presupunînd că M descrie muchia $[AD]$. *(P. Boldescu)*

2. Să se afle valorile lui $x\in[0,\ 2\pi]$ pentru care $E=\cos 2x+\cos 3x<0$.

3. În triunghiul ABC se cunoaște unghiul $\hat{A}$, latura $BC=a$ și mediana $AM=m_a$. Să se afle aria triunghiului ABC.

4. a) Să se arate că

$$\left(\frac{x^2\sin y-2x+\sin y}{x^2-2x\sin y+1}\right)^2\leqslant 1,\ x,\ y\in\mathbf{R},\ \text{iar}\ x^2-2x\sin y+1\neq 0.$$

b) Să se rezolve ecuația

$$|\sqrt{x^4-18x^2+81}-2|\sqrt{x^4-2x^2+1}+|\sqrt{x^2}+x+7|=0.$$

c) Pentru ce valori reale ale lui m avem $\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}=-\frac{22}{25}$, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2-2(m+1)x-m+5=0$.

d) Se dau parabolele care sînt graficele funcției $y=x^2-2(m+1)x-m+5$. Dintre acestea să se determine parabola pentru care ordonata vîrfului este cea mai mare și să se precizeze coordonatele acestui vîrf. *(C. Ionescu-Țiu)*

Anul 1968

Etapa județeană

1. Se dă ecuația $(m^2-1)x^2-2(m^2+2)x+m^2-4=0$, unde m este un parametru real.

a) Să se rezolve ecuația.

b) Să se afle valorile lui m pentru care ecuația dată are numai o rădăcină cuprinsă în intervalul $[-1,\ 1]$.

c) Pentru ce valori ale lui m funcția $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(m^2 + 2)x + m^2 - 4 \leqslant 3$, oricare ar fi x real?

d) Să se arate că toate parabolele de ecuație $y = f(x)$, cînd m variază, trec printr-un punct fix ale cărui coordonate se cer. *(E. Alisie)*

2. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(4x + 60^\circ)} + \cos(x + 45^\circ)} + \frac{1}{1 + \cos(x + 45^\circ)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\cos(4x + 60^\circ)} - \cos(x + 45^\circ)} + \frac{1}{1 - \cos(x + 45^\circ)}.$$

(C. Ionescu-Țiu)

3. Se consideră piramida triunghiulară $ABCD$, cu muchiile $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DA]$. Fie M și N respectiv mijloacele muchiilor $[AC]$ și $[BD]$, iar E proiecția lui D pe planul (ABC) și F proiecția lui A pe planul (BCD).

a) Să se arate că MN este perpendiculară pe AC și BD.

b) Să se afle locul geometric al punctului R din planul (ABD) astfel ca dreptele care îl unesc cu punctele fixe M și E să fie egal înclinate față de planul (ABD).

c) Să se exprime lungimile MN, DE și CF în cazul particular cînd $AB = BC = CD = DA = AC = BD = 2a$. *(N. Peligrad)*

Etapa finală

1. Se dă funcția $f(x) = x^2 - 2x\sqrt{1 - m^2} + 1 + m - m^2$.

a) Să se afle cea mai mică valoare a acestei funcții cînd parametrul real m parcurge toate valorile posibile.

b) Să se afle ecuația locului geometric al vîrfurilor parabolelor definite de funcția dată cînd m variază. *(I. Stănescu)*

2. Se consideră ecuația $x^2 + 3x + 3 = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se arate că:

a) $x_1^6 = x_2^6 = -27$;

b) $x_1^3 + x_2^3 = x_1^{6n+3} + x_2^{6n+3} = 0$;

c) $3(x_1^5 + x_2^5) = x_1^7 + x_2^7 = 81$. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Fie un cub cu baza $ABCD$ iar $[VA]$ muchia cubului perpendiculară pe bază. Punctul A se proiectează pe VB, VC, VD, respectiv în A_1, A_2, A_3. Să se arate că:

a) dreapta CV este perpendiculară pe planul (A_1, A_2, A_3);

b) patrulaterul $AA_1A_2A_3$ este inscriptibil, iar unghiurile $\widehat{AA_1A_2}$ și $\widehat{AA_3A_2}$ sînt drepte. *(D. Manolache)*

4. Să se arate că dacă între unghiurile unui triunghi ABC există relația $2A + 3B = 180^\circ$, atunci între laturile sale există inegalitatea $4c < 4(a + b) \leqslant 5c$. *(Gh. Popescu)*

Anul 1969

Etapa județeană

1. Un triunghi echilateral ABC cu latura de lungime b se proiectează pe un plan (P), obținîndu-se triunghiul $A'B'C'$ astfel că $AA' = 2a$, $BB' = a$ și $CC' = 3a$.

a) Să se arate că $A'C' = A'B'$.

b) Să se calculeze aria triunghiului $A'B'C'$ în funcție de b și a.

c) Să se calculeze raportul $\frac{b}{a}$ astfel ca unghiul diedru al planelor (ABC) și $(A'B'C')$ să fie de $60°$. *(I. Teodorescu)*

2. Să se arate că dacă $x > y > 0$ și $x + y < 180°$, atunci:

a) $\sin(x + y) > \sin x - \sin y > 0$;

b) $\frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} < \frac{(1 + \sin x) \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \sin y) \cdot \sin^2 \frac{y}{2}}$. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Se dă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = (m + 1)x^2 + 2(m - 1)x + m, \ m \in \mathbf{R}.$$

a) Să se afle valorile lui m pentru care vîrfurile parabolelor, definite de funcția dată, se află în interiorul triunghiului OAB, unde $O(0, 0)$; $A(1, 0)$ și $B(1, 1)$.

b) Să se deseneze graficul parabolei definită de funcția dată, în cazul cînd vîrful parabolei se află pe prima bisectoare a axelor de coordonate.

c) Să se determine valorile lui m astfel că ambele rădăcini ale lui $f(x) = 0$ să fie mai mari decît $-\frac{1}{2}$. *(C. Fediuc)*

Etapa finală

1. a) Se dă $\log_{108} N = a$ și $\log_{72} N = b$. Să se exprime $\log_2 N$ și $\log_3 N$ în funcție de a și b.

b) Să se arate că

$$\frac{1}{\log_{x^n y^m} A} = \frac{n}{\log_x A} + \frac{m}{\log_y A},$$

unde $A > 0$; $x, y \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, iar $m, n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $A \neq 1$. *(L. Pîrșan)*

2. Se dă expresia

$$E = 3 + 2\cos(a + x) - 2(\cos a + \cos x).$$

a) Să se afle valorile lui a pentru care ecuația în x, $E = 0$, admite soluții reale și în acest caz să se rezolve ecuația.

b) Să se arate că $0 \leqslant E \leqslant 9$ și să se afle valorile lui a și x din intervalul $[0, 2\pi]$ pentru care $E = 0$, și pentru care $E = 9$. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. O prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$ are fețele laterale pătrate de latură a. Fie M un punct mobil pe diagonala (AB') a feței $ABB'A'$ și N proiecția sa pe fața $BCC'B'$.

a) Notăm cu A'' mijlocul muchiei $[B'C']$. Să se arate că $A'N$ și MA'' se intersectează într-un punct P și să se afle locul lui P cînd M descrie diagonala $[AB']$.

b) În cazul cînd punctul M este în mijlocul diagonalei $[AB']$ să se exprime volumul piramidei $MBNB'$ *(N. Peligrad)*

Anul 1970

Etapa județeană

1. Se consideră ecuația

$$2(m + 2)^2 x^2 - 2(m + 1)(m + 2)x - m = 0$$

Să se arate că $\forall m \in \mathbf{R}$, $m \geqslant 0$, ecuația admite o rădăcină pozitivă subunitară. *(L. Pîrşan)*

2. Să se discute ecuația în x,

$$2\sin^2 x + 3\cos x - m - 2 = 0,$$

unde m este un parametru real. *(M. Neavşu)*

3. Se dă $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos 3x}{b} = \frac{\cos 5x}{c}$, unde a, b, $c \neq 0$ şi $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$.

a) Să se arate că

$$\frac{a+c}{a+b} = \frac{b}{a} \text{ şi } \operatorname{tg}^2 x = \frac{a-b}{3a+b}.$$

b) Să se arate că dacă $a + c = b$, atunci $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ unde k este număr întreg. *(C. Ionescu-Ţiu)*

4. Pe planul pătratului $ABCD$ de latură a se duce în punctul A perpendiculara $OA = a\sqrt{2}$. Proiecțiile lui A pe planele (OBC) şi (OCD) le notăm respectiv cu M şi N. Fie P proiecția lui M pe planul (OAD) şi L proiecția lui A pe MN.

a) Să se calculeze MP şi AL.

b) Să se calculeze unghiul diedru format de planele (AMN) şi $(ABCD)$. *(Gh. Bazacov)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = x^2 + mx + m - 4, \quad m \in \mathbf{R}.$$

a) Folosind relațiile dintre rădăcini şi coeficienți să se exprime în funcție de m expresia

$$x_1 \cdot f(x_2 - m) + x_2 \cdot f(x_1 - m),$$

unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ şi $m \in (4, +\infty)$.

b) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$ ştiind că între rădăcinile x_1 şi x_2 există relația $x_1 + x_2 = 2$.

c) Să se determine vîrful cel mai depărtat de axa Ox, din mulțimea parabolelor ce au vîrfurile situate în semiplanul deasupra axei Ox. *(I. V. Maftei)*

2. Se consideră unghiul diedru format din semiplanele (p) şi (q) şi pe muchia lui două puncte A şi B. În A şi B se ridică pe muchia diedrului perpendicularele $AC = a$, $BD = b$ situate în fețele (q) respectiv (p). Se notează cu C' şi D' proiecțiile ortogonale ale punctelor C şi D pe semiplanele (p) respectiv (q) şi se consideră segmentul $[CC']$

a) Dacă $AB = \frac{AC}{3}$, să se calculeze aria proiecției patrulaterului $ABCD$ pe planul (q).

b) Presupunînd punctul C mobil pe perpendiculara în A din semiplanul (q) pe muchia diedrului, să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $(C'D')$. *(M. Constantinescu, I. Constantinescu)*

3. În triunghiul ABC mediana AM formează cu latura BC unghiul ascuțit de $60°$. Cunoscînd latura $AC = b$ şi $AB = c$, să se calculeze:

a) BC;
b) $\sin A$;
c) să se construiască figura cînd $AC = \sqrt{7}$ și $AB = \sqrt{3}$.

(C. Ionescu-Țiu)

Etapa finală

1. Fie un pătrat $ABCD$ de latură $2a$. În planul ce trece prin AB și este perpendicular pe planul $(ABCD)$ se construiește triunghiul echilateral AEB. Un punct M este mobil pe latura (AB) și se notează $MB = x$. Fie N proiecția lui E pe dreapta MC, F mijlocul lui (AB), O mijlocul lui (CE) și H mijlocul lui (DC).

a) Să se afle locul geometric al punctului N cînd M descrie segmentul (AB).

b) Să se exprime MO în funcție de a și x cînd M descrie segmentul (FB).

c) Să se arate că $OC = ON = FO = OB = OH$.

d) Care este minimul și maximul lungimii segmentului (MO)?

2. Să se rezolve ecuația $\cos a \cos 2x - \sin x + \cos x = 0$ și să se discute după valorile lui a. Aplicație: $a = \frac{\pi}{12}$.

a) Să se arate că dacă $0 < b < a < \frac{\pi}{8}$, atunci

$$\frac{\cos 2a}{\cos 2b} < \frac{\sin a \cos a}{\sin b \cos b} < \frac{\sqrt{1 + \sin 4a} - \sqrt{\cos 4a}}{\sqrt{1 + \sin 4b} - \sqrt{\cos 4b}}.$$ *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Să se arate, fără a utiliza tabele de logaritmi, că

$$\frac{5}{9} < \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 17} < \frac{13}{20}.$$ *(L. Pîrșan)*

Anul 1971

Etapa județeană

1. Să se determine a și b astfel încît parabola definită de ecuația $y = ax^2 + bx - 8$ să taie axa xx' în punctele B și C, $BC = 6$, iar vîrful parabolei să aibă ordonata egală cu 8. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. a) Să se arate că ecuația $x^3 - 3x - 14 = 0$ admite rădăcina

$$x_1 = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7 - 4\sqrt{3}}.$$

b) Să se arate, fără tabele, că $2{,}8 < x_1 < 2{,}9$.

c) Să se exprime celelalte două rădăcini ale ecuației în funcție de x_1 și să se arate că nu sînt reale. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Se dau dreptele paralele d_1 și d_2 și punctele, exterioare lor, A și B. Planele variabile (P_1) și (P_2) sînt paralele și conțin respectiv dreptele d_1 și d_2. Fie AN perpendiculara pe planul (P_1), unde $N \in (P_1)$ și BM perpendiculara pe (P_2), unde $M \in (P_2)$. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului (MN). *(I. Stănescu)*

4. Se consideră funcția

$$f : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \to [\sqrt{3}, 2] \text{ dată de legea } f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{cosec} x.$$

a) Să se arate că funcția f este o bijecție.

b) Să se construiască funcția inversă f^{-1} a funcției f. *(L. Pîrșan)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Să se arate că dacă

$$x^2 + a^2 = m^2, \quad y^2 + b^2 = n^2 \text{ și } mn > 0,$$

atunci $(m - n)^2 \leqslant (x - y)^2 + (a - b)^2 \leqslant (m + n)^2$, a, b, x, y, m, n fiind numere reale.

b) În ce condiții au loc semnele egal în relațiile cerute? *(C. Ionescu-Țiu)*

Etapa finală

1. Fie x_1 și x_2 rădăcinile reale ale ecuației

$$2x^2 + 2mx + (m + 1)^2 = 0, \text{ unde } m \text{ este parametru real.}$$

a) Să se stabilească mulțimile de valori pe care le pot lua fiecare din expresiile: $x_1 + x_2$; x_1x_2 și $x_1^2 + x_2^2$.

b) Să se afle cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o pot lua rădăcinile x_1 și x_2.

c) Să se rezolve ecuația în fiecare din cazurile particulare:

$$x_1x_2 = 2; \; x_1 = 2x_2; \; x_1 - x_2 = 1{,}4.$$

d) Dacă n este un număr natural, atunci expresia

$$E_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$$

este un întreg divizibil cu 2^n, iar E_{2n+1} se divide și cu 3. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. Ecuația $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$ admite soluția $x = 3$. Să se arate că $x = 3$ este singura soluție reală. *(L. Pîrșan)*

3. Fie A, B, C, D patru puncte în spațiu, α, β, γ măsurile unghiurilor planelor (DBC), (DAC), (DAB) cu planul (ABC) și G centrul de greutate al triunghiului ABC.

a) Să se arate că dacă $\operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma$ și dreapta DG este perpendiculară pe planul (ABC), atunci $m(\widehat{BAC}) = 90°$.

b) În aceste condiții, notînd cu S_1, S_2, S_3, S ariile triunghiurilor DBC, ACD, ABD, ABC, să se arate că

$$S^2 = 9(S_2^2 + S_3^2 - S_1^2). \quad \textit{(Gh. Popescu)}$$

4. Să se arate că dacă

$$\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \quad \pm a_n) = 0,$$

unde suma se face după toate combinațiile posibile de semne de la argumentul cosinusurilor, atunci există cel puțin un

$$a_k = \frac{(2p + 1)\pi}{2}, \text{ unde } k \in \mathbf{N} \text{ iar } p \in \mathbf{Z} \text{ și reciproc.}$$

1. Se consideră ecuația $2x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$, m fiind parametrul real astfel că rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației date să fie reale.

a) Să se afle mulțimea valorilor pe care le poate lua:

$$x_1 + x_2;\ x_1x_2 \text{ și } x_1^2 + x_2^2.$$

b) Să se rezolve ecuația dată în cazul particular $x_1 = \sqrt{2}$. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. Să se afle mulțimea valorilor reale pe care le ia x și mulțimea valorilor reale pe care le ia y astfel că

$$ax^2 + y^2 + 2x(y-1) = 0. \quad (C.\ Ionescu\text{-}Ţiu)$$

3. Să se arate că dacă în triunghiul ABC, măsura unghiului $\hat{A}$ este jumătatea măsurii unghiului $\hat{B}$, atunci

$$BC < 2CM \leqslant BC\sqrt{5},$$

unde M este mijlocul laturii (AB).

4. O piramidă $VABC$ are $AB = AC = VA = VB = VC = a$, iar $1 + 3\cos(\widehat{BAC}) = 0$. Să se afle aria și volumul piramidei în funcție de a. *(C. Ionescu-Ţiu)*

Anul 1972

Etapa județeană

1. Se dă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de

$$f(x) = \left(\frac{2 - \cos^2 a - 2\,|\sin a|}{1 + \sin^2 a}\right)^x,$$

unde a este un parametru real. Să se arate că funcția este descrescătoare pentru orice valoare reală a parametrului a diferită de $k\frac{\pi}{2}$, unde $k \in \mathbf{Z}$. *(C. Ottescu)*

2. Să se determine ecuația de gradul al doilea cu coeficienți întregi ale cărei rădăcini sînt $x_1 = \cos 72°$ și $x_2 = \cos 144°$ (se poate folosi identitatea

$$4\sin a \cos a - \cos 2a = \sin 4a). \quad (L.\ Pîrşan)$$

3. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$, $A < 90°$, $BC = a$ și un punct M din spațiu astfel ca $MA = BC$, $MB = MC = AB$, iar M' proiecția lui M pe planul triunghiului ABC. Să se calculeze MM' în funcție de $\hat{A}$ și a. *(C. Ionescu-Ţiu)*

4. Se consideră familia de parabole definite de funcția

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = 2x^2 + 2mx + m^2 + 4m + 3,$$

unde m este un parametru real, iar cu x_1 și x_2 notăm rădăcinile reale ale ecuației $f(x) = 0$.

a) Să se afle locul geometric descris de vîrfurile parabolelor cînd m variază.

b) Să se afle locul geometric descris de focarele parabolelor cînd m variază.

c) Să se afle mulțimea valorilor pe care le poate lua produsul x_1x_2 al rădăcinilor reale cînd m variază.

d) Ce relație independentă de m există între rădăcinile x_1 și x_2?

e) Să se afle mulțimea valorilor pe care le pot lua rădăcinile reale cînd m variază.

f) Să se afle mulțimea valorilor pe care le poate lua raportul $\frac{x_1 + \sqrt{5} - 2}{x_2 + \sqrt{5} - 2}$, unde x_1, x_2 sînt reale, cînd m variază. *(C. Ionescu-Țiu)*

Etapa finală

1. Se consideră piramida triunghiulară $ABCD$.

a) Să se arate că există un plan (P_1) paralel cu AB și CD, iar punctele A, B, C, D egal depărtate de planul (P_1); apoi să se deseneze intersecția planului (P_1) cu fețele piramidei date.

b) Fie un alt plan (P_2) paralel cu AC și BD, iar punctele A, B, C, D egal depărtate de planul (P_2). Să se arate că intersecția planelor (P_1) și (P_2) trece printr-un punct G situat pe mijlocul segmentului ce unește mijloacele segmentelor (AB) și (DC).

c) Să se arate că volumul piramidei $ABCG$ este un sfert din volumul piramidei $ABCD$. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. Fie M un punct pe muchia Oz a unui unghi diedru Ox, Oy, Oz cu muchiile Ox și Oy perpendiculare. Se notează cu P și Q proiecțiile punctului M respectiv pe muchiile Ox, Oy.

a) Să se arate că

$$MP^2 + MQ^2 + PQ^2 = 2OM^2.$$

b) Punctul H fiind proiecția punctului O pe planul triunghiului MPQ, să se determine unghiul ascuțit făcut de muchia Oz cu planul xOy astfel ca $PQ^2 = 5OH^2$ și $MP = MQ$. *(Gh. Popescu-Lugoj)*

3. Se consideră numerele reale

$$a = \log_x(x + 3) \text{ și } b = \log_{x+1}(x + 4).$$

În ipoteza că $x \in [2, +\infty)$ să se arate care dintre numerele a sau b este mai mare. *(L. Pîrșan)*

4. Se dă $f(x) = x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x \quad 1, \quad \in \mathbf{R}$.

a) Să se rezolve inecuația $f(x) \geqslant 0$. $\left(\text{Se poate nota } x + \frac{1}{x} = y, \text{ după ce polinomul se împarte cu } x^2.\right)$

b) Știind că $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, să se arate că rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sînt $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{20}$, unde $k = 1, 9, 13, 17$.

c) Să se arate, fără tabele, că

$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ și apoi să se arate că $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}$. *(C. Ionescu-Țiu)*

1. Să se arate că dacă $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1)$, atunci

$$\log_a \frac{2ab}{a-b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant 2 \quad (H. \ Müller)$$

2. a) Să se afle mulțimea valorilor pe care le ia expresia $E_1 = (a-2)^2 + (b+1)^2$ cînd $a, b \in \mathbf{R}$, iar $a^2 - 4a + b - 5 = 0$, unde $a \in (1, 4)$.

b) Să se afle mulțimea valorilor pe care le ia expresia $E_2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$ în ipoteza că $b \in (1, 5)$ și $a^2 - 4a - 2b + 7 = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.

(C. Ionescu-Țiu)

3. O urnă conține 5 bile albe și 7 bile negre. Se extrage o bilă care nu se mai repune în urnă, apoi se extrag alte două bile simultan și se repun în urnă, iar după aceea se mai extrage o bilă. Să se afle probabilitatea ca să fie extrase în total 2 bile albe și 2 bile negre.

4. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{15} \sin^2 \frac{k\pi}{8} = 8, \ \sum_{k=1}^{15} \cos^2 \frac{k\pi}{8} = 7. \quad (C. \ Ionescu\text{-}Țiu)$$

5. Dîndu-se relația $(a^2 + b^2)(1 - \sin x) = 2ab(1 + \sin x)$, unde $a > b > 0$, $0 < x < \pi$, să se arate că

$$\frac{a-b}{a+b} = \sqrt{\sin x}. \quad (C. \ Ionescu\text{-}Țiu)$$

6. a) Să se arate că dacă $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci

$$\frac{\sqrt[4]{1 + \sin 2x} - \sqrt[4]{1 - \sin 2x}}{\sqrt[4]{1 + \sin 2x} + \sqrt[4]{1 - \sin 2x}} = \operatorname{tg} x - \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}.$$

b) Să se arate că

$$\sum_{k=0}^{359} \cos(x + 2k) = 0,$$

k fiind în grade sexagesimale. *(C. Ionescu-Țiu)*

Anul 1973

Etapa județeană

1. Se consideră funcțiile reale de variabilă reală f și g, astfel încît sînt satisfăcute condițiile: f este impară; $f(0) = 0$; $f(x) \neq 0$, pentru $x \neq 0$ și, oricare ar fi x și y numere reale,

$$f(x+y) = f(x)\, g(y) + g(x)\, f(y),$$
$$g(x+y) = g(x)\, g(y) - f(x)\, f(y).$$

Să se arate că:

a) funcția g este pară și $g(0) = 1$;

b) $f^2(x) + g^2(x) = 1$, $f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x)$, $g(3x) = 4g^3(x) - 3g(x)$, oricare ar fi x real. *(L. Pîrșan)*

2. Să se rezolve ecuația

$$\sin 6x - 2\cos 4x - 1 = 0, \quad x \in (0, 2\pi). \quad (C. \ Ionescu\text{-}Ţiu)$$

3. Un acoperiș plan, înclinat față de planul orizontal, are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$ cu laturile paralele (AB) și (CD), $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 90°$ Acoperișul este susținut de stîlpii verticali $AA_1 = 8$ m, $BB_1 < 10$ m, $CC_1 = 12$ m și DD_1 astfel încît patrulaterul orizontal $A_1B_1C_1D_1$ este un trapez cu:

$A_1B_1 = 6$ m, $B_1C_1 = 10$ m, $m(\widehat{A_1B_1C_1}) = 120°$ și $m(\widehat{A_1D_1C_1}) = 45°$.

a) Să se calculeze înălțimea stîlpului BB_1.

b) Să se calculeze înălțimea stîlpului DD_1. *(C. Ionescu-Ţiu)*

4. Să se reprezinte graficul funcției

$$f(x) = \frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} - \frac{\cos 3x + \cos x}{\sqrt{1 + \cos 2x}}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Să se afle amplitudinea și perioada funcției. *(C. Ionescu-Ţiu)*

5. Să se rezolve ecuația

$$\log_{\sec x}(13{,}25) = \log_{\operatorname{tg} x}(12{,}25), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (C. \ Ionescu\text{-}Ţiu)$$

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Fie m un număr prim. Să se arate că dacă $1 < n \leqslant m - 1$, atunci C_m^n se divide cu m.

b) Să se arate că $2^m - 2$ se divide cu m dacă m este un număr prim. Se poate ține seama că $(1 + 1)^m = 2^m$. *(C. Niță)*

2. Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sînt numere complexe și sînt îndeplinite condițiile

$$\arg(a) + \arg(c) = 2\arg(b), \quad |a| + |c| = |b|,$$

unde $|a|$ este modulul și $\arg(a)$ este argumentul numărului complex a. Să se arate că cel puțin o rădăcină a ecuației are modulul unu. *(L. Panaitopol)*

3. Să se rezolve inecuația

$$\log_{0,5} \log_{64} x \geqslant 2. \quad (C. \ Ionescu\text{-}Ţiu)$$

4. a) Să se arate că $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2$, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile reale ale ecuației cu coeficienți reali

$$2x^2 - 2mx + m^2 - 4m + 6 = 0.$$

b) Să se arate că $2 - \sqrt{3} \leqslant \dfrac{x_1}{x_2} \leqslant 2 + \sqrt{3}$. *(C. Ionescu-Ţiu)*

5. Să se calculeze, fără tabele,

$$E_1 = \cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{24} - \sin\frac{5\pi}{24}\right) - \sin\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{24} - \cos\frac{5\pi}{24}\right)$$

$$E_2 = \sin\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{24} + \cos\frac{\pi}{24}\right). \quad (C. \ Ionescu\text{-}Ţiu)$$

6. Să se rezolve ecuația

$$4^x - 1 = 2^{x-1}(1 + 2^{x-1}),\ x \in \mathbf{R}.\ \textit{(C. Ionescu-Ţiu)}$$

7. Într-un depozit se află 55 de piese noi bine fabricate, 4 piese cu defecte care se pot remedia și 3 piese cu defecte iremediabile. Se fac 3 extrageri de cîte o piesă, fără a se repune piesa extrasă.

a) Care este probabilitatea ca piesele extrase să fie astfel: prima o piesă bună, apoi o piesă cu defecte care se pot remedia, iar ultima cu defecte iremediabile?

b) Care este probabilitatea ca în aceleași condiții extragerea să fie astfel: prima și a doua să fie ambele cu defecte indiferent dacă sînt sau nu remediabile iar a treia să fie fără defecte? *(C. Ionescu-Ţiu)*

Etapa finală

1. Se consideră polinomul

$P(x) = 2x^2 - 2mx + m^2 - 10m + 45$, m fiind parametru real, $x \in \mathbf{R}$.

a) Să se afle mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care polinomul $P(x)$ este totdeauna pozitiv, oricare ar fi x real.

b) Să se afle cea mai mică valoare numerică reală a polinomului $P(x)$ cînd m variază.

c) Notînd cu x_1 și x_2 rădăcinile reale ale ecuației $P(x) = 0$, să se arate că:

1. $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 5$; 2° $|x_1 - x_2| \leqslant \sqrt{10}$;

3. $10 - \sqrt{10} \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 10 + \sqrt{10}$; 4° $x_1, x_2 \in [5 - \sqrt{5}, 5 + \sqrt{5}]$;

5. $\frac{1}{2} \leqslant \frac{x_1}{x_2} \leqslant 2$.

d) Să se afle mulțimea valorilor pe care le ia $x_1^2 + x_2^2$ cînd m variază ($x_1, x_2 \in \mathbf{R}$). *(C. Ionescu-Ţiu)*

2. Fie M un punct în interiorul unui tetraedru $VABC$. Dreptele MA, MB, MC intersectează fețele VBC, VCA, VAB respectiv în A_1, B_1, C_1, iar dreptele VA_1, VB_1, VC_1 întîlnesc muchiile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ respectiv în A_2, B_2, C_2. Să se arate că volumul tetraedrului $VA_2B_2C_2$ este cel mult un sfert din volumul lui $VABC$. *(C. Ionescu-Ţiu)*

3. Se consideră aplicația $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată de $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$. Să se afle mulțimea valorilor pe care le ia $f(x)$ cînd x parcurge mulțimea numerelor reale. *(C. Ionescu-Ţiu)*

4. Să se rezolve ecuația

$$4\sin^2 x + \sin^2 nx = 4\sin x \sin^2 nx.$$

Caz particular $n = 3$. *(L. Pîrşan)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se consideră polinomul $P(x) = 2x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2$, unde m este un parametru real, $x \in \mathbf{R}$.

a) Să se afle cea mai mică valoare a polinomului $P(x)$ cînd m și x variază.

b) Să se calculeze cea mai mare valoare a expresiei $|x_1 - x_2|$, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile reale ale ecuației $P(x) = 0$.

c) Să se exprime în funcție de m expresia $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ cînd rădăcinile x_1 și x_2 sînt ambele pozitive și să se afle cea mai mică valoare a expresiei cînd m variază.

d) Notînd cu y_v ordonata vîrfului parabolei definită de $f = P(x)$, să se arate că dacă $|x_1 - x_2| = |4y_v|$, atunci focarul parabolei se află pe axa absciselor, apoi să se calculeze valoarea lui m în acest caz.

e) Să se determine o relație între x_1 și x_2 independentă de m.

f) Să se afle mulțimea valorilor pe care le pot lua rădăcinile reale x_1 și x_2 cînd m variază.

g) Să se afle mulțimea valorilor reale pe care le poate lua produsul x_1x_2 al rădăcinilor reale ale ecuației $P(x) = 0$. *(C. Ionescu-Țiu)*

2. Să se arate că dacă $7\sin a = 3\sin(a + b)$, $\sin a \neq 0$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2} \neq 0$, atunci $2\operatorname{tg}\left(\frac{2a+b}{2}\right) = 5\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ și reciproc. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Se dau dreptele d_1 și d_2 oarecare în spațiu. O dreaptă d_3 intersectează pe d_1 în A și este perpendiculară pe d_1. Se consideră un plan mobil (P) care se rotește în jurul dreptei d_3. Să se afle locul geometric al intersecțiilor proiecțiilor dreptelor d_1 și d_2 pe planul (P). Discuție. Cazuri particulare. *(I. Stănescu)*

4. Se consideră polinomul $P(x) = 2x^2 - 2mx + (m-2)^2$, $x, m \in \mathbf{R}$.

a) Să se afle valorile reale ale lui m pentru care polinomul $P(x)$ este totdeauna pozitiv, oricare ar fi x real.

b) Notînd cu x_1 și x_2 rădăcinile reale ale ecuației $P(x) = 0$, să se arate că:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4(x_1 + x_2) + 4 = 0;\ |x_1 - x_2| \leqslant 2\sqrt{2};$$

$$0 \leqslant x_1x_2 \leqslant 6 + 4\sqrt{2};\ 2\sqrt{2} - 2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 2\sqrt{2} + 2;\ 0 \leqslant \frac{x_1}{x} < \infty.$$

(C. Ionescu-Țiu)

5. Să se calculeze limita expresiei

$$E = \frac{\operatorname{tg}(A+B)\operatorname{tg}(A+x) - \operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}(A+B+x)},$$

cînd x tinde către C iar $A + B + C = \pi$ *(C. Ionescu-Țiu)*

6. Într-o urnă sînt 7 bile numerotate de la 1 la 7.

a) Care este probabilitatea ca extragînd simultan două bile una să poarte număr par și alta număr impar.

b) Care este probabilitatea ca din cele 7 bile date, extragînd simultan 4 bile să obținem 3 bile cu un număr impar și bila marcată cu numărul 6. *(C. Ionescu-Țiu)*

Anul 1974

Etapa județeană

1. Fie $P(x, m) = mx^2 - 2(m-3)x + m + 3$, $(m \neq 0)$, $m, \in \mathbf{R}$. Notăm cu $x_1(m)$, $x_2(m)$ rădăcinile ecuației $P(x, m) = 0$.

a) Să se arate că între $x_1(m)$ și $x_2(m)$ există o relație independentă de m.

b) Să se găsească valorile lui m pentru care există a astfel încît

$$x_1(m) = \frac{1}{\cos a},\ x_2(m) = \frac{1}{\sin a}.$$

c) Să se arate că există un x_0 astfel încît $P(x_0, m)$ să nu depindă de m. *(Gh. Călugăriţa)*

2. Pentru $x \geqslant 0$ se notează prin $[x]$ cel mai mare întreg inferior sau egal cu x.

a) Să se studieze variaţia funcţiei $f(x) = [x]$ pentru $0 \leqslant x \leqslant 5$ şi să se construiască graficul corespunzător.

b) Să se rezolve ecuaţia $2[x] + 4 = 3x$. *(Ionica Alexandrescu)*

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchiile laterale $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$. Punctul M parcurge diagonala $(A'D)$ a feţei $AA'D'D$ şi N parcurge diagonala (BC') a feţei $BB'C'C$. Să se afle locul geometric al punctului P, mijlocul segmentului (MN). *(C. Ottescu)*

4. a) Să se arate că $|\sin a \pm \cos a| \leqslant \sqrt{2}$, pentru orice a real.

b) Să se transforme în produs expresia $E(a) = \sin(b \sin a) - \cos(b \cos a)$.

c) Să se găsească numărul pozitiv b_0, cel mai mare, cu proprietatea că oricare ar fi $b \in [0, b_0]$ avem $E(a) \geqslant 0$ pentru orice a.

Etapa finală

1. Ştiind că $A > 1$, $B > 1$, să se rezolve ecuaţia

$$A^{\sqrt{x-2}} + B^{\sqrt{x^2-3x+2}} = 2. \quad (C.\ Oprişan)$$

2. Să se arate că nu există numere $N \neq 1$ astfel încît dacă a şi b sînt două numere naturale prime între ele, $\log_a N$ şi $\log_b N$ să fie amîndouă numere raţionale.

3. Să se arate că pentru $n \geqslant 2$,

$$\sin a_1x \sin a_2x \quad \sin a_nx + \cos a_1x \cos a_2x \quad \cos a_nx \leqslant 1. \quad (L.\ Panaitopol)$$

4. Să se ducă printr-un punct A din spaţiu o dreaptă D care să formeze cu trei drepte date oarecare D_1, D_2, D_3 unghiuri congruente.

5. a) Fie $VABC$ un tetraedru şi A', B', C' trei puncte situate respectiv pe muchiile $[VA]$, $[VB]$, $[VC]$. Să se arate că

$$\frac{\text{volum } VA'B'C'}{\text{volum } VABC} = \frac{VA' \cdot VB' \cdot VC'}{VA \cdot VB \cdot VC}.$$

b) Fie $VABC$ o piramidă cu baza un paralelogram şi A', B', C', D' intersecţiile segmentelor (VA), (VB), (VC), (VD) cu un plan. Notăm

$$\frac{VA'}{VA} = K_A, \quad \frac{VB'}{VB} = K_B, \quad \frac{VC'}{VC} = K_C, \quad \frac{VD'}{VD} = K_D.$$

Să se calculeze volumul piramidei $VA'B'C'D'$ în funcţie de volumul piramidei $VABCD$ şi de K_A, K_B, K_C, K_D.

c) Să se deducă relaţia

$$\frac{1}{K_A} + \frac{1}{K_B} = \frac{1}{K_C} + \frac{1}{K_D}. \quad (L.\ Panaitopol)$$

Anul 1975

Etapa județeană

1. Se dă ecuația $a\sin x + b\sin 3x + c\sin 5x + d\sin 7x = 0$.

a) În ce condiții această ecuație admite soluțiile $\frac{k\pi}{4}$, unde k este orice număr întreg, și în acest caz să se rezolve.

b) În ce cazuri pentru $b = 1$ ecuația admite numai aceste soluții? *(L. Panaitopol)*

2. a) Să se demonstreze că în orice poliedru convex aria unei fețe este mai mică decît suma ariilor celorlalte fețe.

b) Se dau două poliedre convexe P_1 și P_2 în care P_1 este strict interior lui P_2 (toate punctele suprafeței lui P_1 sînt interioare poliedrului P_2). Să se demonstreze că aria $P_1 <$ aria P_2. *(D. Schwarz)*

3. Fie a, b strict pozitive. Să se rezolve ecuația

$$2a^x = b^x + c^x \text{ în ipoteza că } c = \sqrt{ab}.$$

4. Dacă $x, y \neq \frac{k\pi}{2}$, să se arate că

$$(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y}\right) \geqslant (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} y}\right).$$

Cînd are loc egalitatea?

5. Se dă funcția $f(x) = |x^2 - 3x + 2| + |x - a|$ definită pe $\mathbf{R}$. Să se determine a, astfel încît mulțimea valorilor funcției să fie $[0, \infty)$. (Această problemă este problema 5 de la clasa a IX-a, etapa județeană, 1975).

LICEE DE SPECIALITATE

1. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x \sin 4x} + \frac{\cos 5x}{\sin 4x \sin 6x} + \frac{\cos 7x}{\sin 6x \sin 8x} = \frac{\sin 3x \cos 5x}{\sin x \sin 2x \sin 8x}.$$

(Olimpia Popescu)

2. Dacă $A > B > a > 1$ și $K > 0$, să se demonstreze inegalitățile:

a) $\frac{A}{B} > \frac{A+K}{B+K}$;

b) $\log_a \frac{A}{B} + 1 > \log_{B+K}(A + K)$. *(Șt. Tache)*

3. Fie triedrul tridreptunghic $Oxyz$ pe ale cărui muchii se iau punctele fixe $A \in (Ox$, $B \in (Oy$, $C \in (Oz$, astfel încît $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Pe segmentul (OA) se consideră punctul mobil M care se proiectează pe AB și AC respectiv în N și P.

a) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului (NP);

b) Să se determine măsura unghiului $\widehat{NMP}$. *(P. Toma)*

Etapa finală

1. Să se arate că există numere iraționale a și b astfel încît a^b să fie natural. *(L. Panaitopol)*

2. Să se arate că ecuația $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{3}{4}$ nu are soluții.

3. Să se arate că un poliedru convex care cel mult un centru de simetrie.

4. Un tetraedru are toate înălțimile congruente și una din ele cade în ortocentrul feței opuse. Să se arate că tetraedrul este regulat. *(N. Popescu)*

5. Fie $x_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, 3, \quad n)$ verificînd relațiile:

i) $a(1 + x_i) \geqslant (a + 1)x_{i+1}$, $(\forall) i = 1, 2, \ldots, n$ și $x_{n+1} = x_1$;

ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant na$, unde $a \in \mathbf{R}$ este diferit de $-1, 0, -\frac{1}{2}$.

Să se arate că numerele x_i sînt egale. *(V. Matrosenco)*

6. Dacă $a + b + c + d = 2\pi$ să se arate că

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\quad}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2} = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{c+d}{2}.$$

Să se deducă de aici că într-un patrulater inscriptibil suma produselor lungimilor laturilor opuse este egală cu produsul lungimilor diagonalelor.

Anul 1976

Etapa județeană

1. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{\sqrt{2\log_{x+a|} a}} + \frac{1}{\sqrt{2\log_{|x-a|} a}} = \frac{1}{\sqrt{\log_{|x^2-a^2|} a}},$$ unde $a > 0$ și $a \neq 1$. *(P. Toma)*

2. Să se arate că $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ este adevărată relația

$$\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} + \ldots + \frac{1}{8n} > \frac{5}{8}.$$

3. Să se arate că dacă o funcție este inversabilă și impară, atunci inversa ei este impară.

4. Dacă într-un triunghi $S = R^2$, unde R este raza cercului circumscris și S este aria triunghiului, atunci $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2$ și triunghiul nu are nici un unghi obtuz.

5. Se dă un număr real fixat $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$.

a) Să se determine mulțimea

$$M_A = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, a^{\log_{\sqrt{a}} \sin x + \log_{\sqrt{a}} \cos x} \leqslant A\right\}, \text{ unde } A \in \mathbf{R}_+^*;$$

b) Să se determine toate perechile (A, B) pentru care $M_A = M_B$. *(I. Ilie)*

Etapa finală

1. Să se determine numărul elementelor mulțimii finite A, astfel încît să existe bijecții $f: A^2 \to \mathcal{P}(A)$. Cîte asemenea bijecții există? (S-a notat cu $\mathcal{P}(A)$ mulțimea părților mulțimii A.) *(H. Banea)*

2. Dacă numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfac relațiile

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \quad \geqslant x_n > 0, \text{ atunci}$$

$$\frac{(x_3 + x_4 + \ldots + x_n)(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} + \frac{(x_1 + x_4 + \ldots + x_n)(x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + \ldots$$

$$+ \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} + x_n} + \frac{(x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1})(x_n - x_1)}{x_n + x_1} \geqslant 0.$$

(C. Caragea)

3. Pe un cub $[ABCDA'B'C'D']$ un punct M parcurge linia frîntă închisă $ABB'C'CDA$ și un punct N parcurge cu aceeași viteză linia frîntă închisă $BCC'D'A'B'B$. Să se afle locul geometric al mijlocului P al segmentului $[MN]$. *(C. Ottescu)*

4. a) Să se dovedească relația $\frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} \leqslant \cos\frac{x_1 + x_2}{2}$, unde x_1 și x_2 sînt numere din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele x_i ($i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$) din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, are loc relația $\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\cos x_i \leqslant \cos\frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8}$.

c) Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele x_i ($i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$) din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, are loc relația $\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}\cos x_i \leqslant \cos\frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7}$.

5. Fie o funcție $f: [0, 1] \to \left[-\frac{\pi^2}{4}, 0\right]$ pentru care $f(\sin t) = t^2 - t$, pentru orice $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Să se arate că:

a) $f(x) = (\arcsin x)^2 - \pi\arcsin$

b) f este bijectivă. *(I. Matrosenco)*

Anul 1977

Etapa județeană

1. Să se demonstreze că

$$\operatorname{tg} x \sqrt[4]{\operatorname{tg}(2x)} \sqrt[8]{\operatorname{tg}(4x)} \quad \sqrt[n+1]{\operatorname{tg}(2^n x)} = 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}} \frac{\sin x}{\sqrt[2^{n+1}]{\sin(2^{n+1}x)}}, \ (\forall) n \in \mathbb{N} \text{ și}$$

$$(\forall) x \in \left(0, \frac{\pi}{2^{n+1}}\right). \ \textit{(D. Buşneag)}$$

2. Fie $f : E \to E$ (E cu un număr finit de elemente) așa încît $(f \circ f)(x) = x$, oricare ar fi $x \in E$. Să se demonstreze că dacă E are un număr impar de elemente, atunci există cel puțin un element $k \in E$ așa încît $f(k) = k$. *(Gh. Ionescu)*

3. Să se determine numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$, strict pozitive, care verifică relația $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$. *(L. Panaitopol)*

4. Fie triunghiul oarecare ABC cu $m(\hat{A}) > m(\hat{B}) > m(\hat{C})$. Să se arate că dacă $\sin A + \sin B + \sin C = 1$, atunci $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) < 30°$. *(L. Mănescu)*

Etapa finală

1. Care sînt poligoanele convexe plane care au proprietatea: numărul diagonalelor lor este egal cu numărul punctelor de intersecție ale acestor diagonale situate în interiorul poligonului și nu există trei diagonale concurente în interiorul poligonului? *(H. Schneider)*

2. Să se arate că dacă $A > B > a > 1$ și $k > 0$, atunci există inegalitatea $1 + \log_a \frac{A}{B} > \log_{B+k}(A + k)$. *(Șt. Tache)*

3. Fie d_1 și d_2 două drepte oarecare în spațiu și $A \in d_1$, respectiv $B \in d_2$ două puncte fixe pe acestea iar $k > 0$ o constantă. Dacă $M \in d_1$ și $N \in d_2$ sînt două puncte variabile așa încît $\frac{MA}{NB} = k$, să se afle locul geometric al punctului P situat pe segmentul (MN), știind că $\frac{PM}{PN} = k$. *(C. Caragea)*

4. Să se rezolve ecuația $\frac{\sin^3 a}{\sin x} + \frac{\cos^3 a}{\cos x} = 1$, $a \in \mathbf{R}$.

Anul 1978

Etapa județeană

1. Să se arate că oricare ar fi $a, b, \varphi \in \mathbf{R}$ are loc inegalitatea

$$1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant (\sin \varphi + a\cos \varphi)(\sin \varphi + b\cos \varphi).$$ *(R.M. Popovici)*

2. Care este cea mai mare valoare a lui n pentru care există n numere reale distincte două cîte două $x_1, x \quad x_n$ așa încît să aibă loc egalitatea de mulțimi $\{x_1, x_2, \quad x_n\} = \{x_1^n, x_2^n, \quad x_n^n\}$. *(A. Ghioca)*

3. La un concurs de șah participă n persoane. Care este numărul minim de zile în care se poate termina concursul, știind că fiecare participant trebuie să joace cu toți ceilalți participanți și că un participant nu poate juca mai mult de o partidă în aceeași zi? *(I. Tomescu)*

4. Fie a, b, c numerele naturale astfel încît ab, bc, ca să fie cuburi perfecte. Să se arate că a, b, c sînt de asemenea cuburi perfecte. *(Maria Elena Panaitopol)*

Etapa finală

1. a) Se consideră o mulțime $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de numere reale și $\varphi : A \to A$ o aplicație bijectivă așa încît

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n \text{ și } a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \quad < a_n + \varphi(a_n).$$

Să se arate că φ este aplicația identică a mulțimii A.

b) Rămîne adevărată afirmația dacă se înlocuiește mulțimea A cu mulțimea numerelor întregi? *(M. Dădîrlat)*

2. Pentru ce valori naturale ale parametrului k, expresia

$$\sin kx \sin^k x + \cos kx \cos^k x - \cos^k 2x$$

este independentă de $x \in \mathbf{R}$? *(L. Panaitopol)*

3. Fie K un poliedru convex cu $n \geq 5$ fețe astfel încît din fiecare vîrf să pornească exact trei muchii. Două persoane joacă următorul joc: fiecare, alternativ, se semnează pe una din fețele care nu au fost semnate anterior și cîștigă cel care reușește să se semneze pe trei fețe avînd un vîrf comun. Să se arate că persoana care începe jocul, aceea cîștigă în toate cazurile *(S. Popa)*

4. Fie ABC un triunghi cu $m(\hat{A}) = 30°$ și fie π un plan ce trece prin latura $[BC]$ a triunghiului și formează cu planul (ABC) un unghi diedru de măsură α. Fie β și γ măsurile unghiurilor formate de $(AB$, $(AC$ cu planul π și fie A' proiecția lui A pe planul π. Să se arate că $m(\widehat{BA'C}) = 90°$ dacă și numai dacă $\cos\alpha = 2\cos\beta\cos\gamma$. Cunoscînd numai elementele triunghiului $A'BC$, să se calculeze AA' (presupunînd $m(\widehat{BAC}) = 30°$ și $m(\widehat{BA'C}) = 90°$). *(Ioana Țigău)*

Anul 1979

Etapa județeană

1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, distincte două cîte două și avînd același modul. Să se arate că dacă $z_1 + z_2z_3$, $z_2 + z_3z_1$, $z_3 + z_1z_2$ sînt reale, atunci $z_1z_2z_3 = 1$. *(L. Panaitopol)*

2. Să se arate că $\sin 2x(\sin y + \cos y + \sin y \cos y \operatorname{ctg} x) \leq 2$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ și $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. *(M. Rădulescu)*

3. Să se arate că nu există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ așa încît $f^2(x^2) + f(2^x) + 1 = 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. *(I.V. Maftei, S. Rădulescu)*

4. a) Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, este o constantă reală, să se arate că funcția $f_a : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f_a(x) = a^x + \dfrac{1}{a^x}$, este strict crescătoare.

b) Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale fixate, distincte două cîte două, strict pozitive și diferite de 1. Să se arate că funcția $g : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = (a_1^x + a_2^x + \quad + a_n^x)(a_1^{-x} + a_2^{-x} + \quad + a_n^{-x})$, este injectivă. *(D. Bușneag)*

Etapa finală

1. Se dau numerele reale strict pozitive: $a_1 < a_2 < \quad < a_n$. Pentru ce permutare φ a mulțimii $\{1, 2, \quad n\}$ produsul

$$\prod_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_{\varphi(i)}}\right) \text{ este maxim?}$$ *(D. Bușneag)*

2. Se consideră funcțiile $f, g, h : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ cu proprietățile: g și h sînt bijective și $f(n) = g(n) - h(n)$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Să se demonstreze că $f(n) = 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

3. Se consideră $n + 2$ puncte în plan $A_0, A_1, \ldots, A_{n+1}$ așa încît

$$x_i = m(\widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}) \in (0, \pi], \ (\forall) i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Dacă $\sin x_1 + \sin x_2 + \quad + \sin x_n = a \leqslant 1$ și dacă $\cos 2x_1 + \cos 2x_2 + \ldots + \cos 2x_n = n - 2a$, atunci cele $n + 2$ puncte sînt sau coliniare sau sînt situate pe două drepte perpendiculare. *(A. Ghioca)*

4. Se consideră două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ situate în două plane paralele. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $[M_1M_2]$ atunci cînd M_1 parcurge cercul $\mathcal{C}_1$ și M_2 parcurge cercul $\mathcal{C}_2$. *(I. Tomescu)*

Anul 1980

Etapa județeană

1. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$, iar $\log x_k$ logaritmul în baza zece al numărului x_k, $k = 1, \ldots, n$.

a) Dacă $\log x_1 + \log x_2 + \quad + \log x_n \geqslant 0$ și $\log x_1 \cdot \log x_2 \ldots \log x_n > 0$, atunci cel puțin două dintre numerele date sînt subunitare.

b) Dacă $\log(x_1x_2 \ldots x_n) = p$ și $\log^2 x_1 + \log^2 x_2 + \quad + \log^2 x_n = q$, să se exprime în funcție de p și q suma

$$s_n = \log x_1 \cdot \log(x_2x_3 \ldots x_n) + \log x_2 \cdot \log(x_3x_4 \ldots x_n) + \ldots + \log x_{n-1} \cdot \log x_n.$$

(A. Ghioca)

2. a) Să se rezolve ecuația trigonometrică

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x} + \frac{\operatorname{tg} 2x}{\cos 4x} + \frac{\operatorname{tg} 4x}{\cos 8x} = \operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 3x.$$

b) Fie $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se arate că $x \cos y = y \cos x$ dacă și numai dacă $x \operatorname{ctg} y = y \operatorname{ctg} x$. *(I. V. Maftei)*

3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, $n + 1$ numere reale în progresie aritmetică. Să se demonstreze relațiile:

a) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i a_{i+1} = 0$;

b) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i a_{i+1}^2 = 0$.

4. Considerăm un triunghi ABC cu unghiurile $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ avînd respectiv măsurile $20°, 80°, 80°$. Se consideră apoi punctele $D \in (AC)$ și $E \in (AB)$ așa încît $(CD) \equiv (BC)$ și $\widehat{ACE} \equiv \widehat{CAE}$.

a) Să se demonstreze că unghiul $\hat{u} = \widehat{CED}$ verifică relația $\sin(\hat{u} + \hat{A}) = 2 \sin \hat{u} \cos 2\hat{A}$.

b) Să se arate că $\hat{u}$ are măsura $30°$.

Etapa finală

1. Să se arate că pentru orice numere întregi și strict pozitive m și n există un număr întreg strict pozitiv p astfel încît

$$(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n=\sqrt{p}+\sqrt{p-1}. \quad (I.\ Tomescu)$$

2. Să se arate că dacă $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$, atunci

$$\sum \pm z_1 \pm z_2 \pm z_3 = 2^3 \sum_{k=1}^{8} z_k$$

unde semnul $\sum$ se referă la suma după toate cele 2^3 combinații posibile de plus sau minus. Generalizare. *(S. Rădulescu)*

3. Să se verifice că în orice triunghi ABC are loc relația

$$\sin^2\frac{A-B}{2}+\sin A\sin B+\sin^2\frac{C}{2}=1.$$

4. Fie z un număr complex astfel încît partea reală a lui z^n să fie strict mai mare decît partea imaginară a lui z^n, pentru orice n întreg, $n \geq 1$. Să se arate că este un număr real strict pozitiv. *(L. Panaitopol)*

Anul 1981

Etapa județeană

1. Să se demonstreze că

$$C_n^0+C_n^4+C_n^8+\ldots=2^{n-1}+\frac{(\sqrt{2})^n}{2}\cos\frac{n\pi}{4}$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

2. Să se rezolve inecuația

$$x^{\log_4(x^2-2)-\log_2 x}<1.$$

3. Ce relație există între laturile unui triunghi, dacă între unghiuri are loc relația

$$\sin A\sin B=3\sin^2\frac{C}{2}?$$

4. Să se arate că pentru orice număr întreg pozitiv n, are loc inegalitatea

$$\log(n+1)>\frac{3}{10n}+\log n.$$

Folosind acest rezultat, să se demonstreze că

$$\log(n!)>\frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Etapa finală

1. Să se găsească toate soluțiile în numere întregi ale ecuației

$$x^6+3x^2+1=y^4. \quad (P.\ Radovici)$$

2. Să se demonstreze că în scrierea numărului $(\sqrt{2\,501}+50)^{1981}$ ca număr zecimal, primele 3962 cifre după virgulă sînt zerouri. *(D.M. Bătinețu-Giurgiu)*

3. Să se arate că

$$\sin(\sin x)+\cos(\cos x)>\sin(\cos x)+\cos(\sin x)-1{,}32.\ (\forall)x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

(I.V. Maftei)

4. O prismă oarecare are ca bază un trapez $ABCD$ cu bazele $[AB]$ și $[CD]$. Muchiile laterale ale prismei se notează cu $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$. Să se demonstreze că volumul prismei este dat de expresia

$$v[ABCDA'B'C'D']=\frac{h}{2}(\sigma[ABB'A']+\sigma[CDC'D']),$$

unde h este distanța dintre planele $(ABA'B')$ și $(CDC'D')$.

Anul 1982

Etapa județeană

1. Să se arate că pentru orice $x\in\left(0,\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right)$ avem

$$\frac{\sin(\sin x)}{x}+\frac{x}{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}<2.\ \textit{(I.V. Maftei)}$$

2. Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ are loc egalitatea

$$1^4-2^4+3^4-4^4+\ldots+(-1)^{n-1}n^4=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

(I. Tomescu)

3. Să se rezolve în numere naturale ecuația $3^x-y^3=1$. *(T. Andreescu)*

4. Fie $z_1, z_2, z_3\in\mathbf{C}^*$ așa încît $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.

a) Să se arate că există numerele complexe a, b așa încît

$$z_2=az_1,\ z_3=bz_1 \text{ și } |a|=|b|=1.$$

b) Să se rezolve în raport cu una dintre necunoscutele a sau b ecuația

$$a^2+b^2-ab-a-b+1=0.$$

c) Folosind eventual rezultatul de la punctele a și b, să se arate că dacă $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$, atunci fie $z_1=z_2=z_3$, fie imaginile geometrice ale numerelor z_1, z_2, z_3 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral. *(I. Tomescu)*

Etapa finală

1. Se consideră în spațiu trei semidrepte d_1, d_2, d_3 care au originea comună O. Se notează cu α, β, γ măsurile unghiurilor formate de semidreptele d_1 și d_2, d_2 și d_3, d_3 și d_1. Dacă $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, să se găsească o condiție necesară și suficientă pentru ca proiecția semidreptei d_1 pe planul (P) determinat de d_2 și d_3 să se găsească în interiorul unghiului determinat de d_2 și d_3. În acest caz, să se afle măsura unghiului format de d_1 cu planul (P).

2. Se consideră numărul complex $z = \frac{1}{2} + \omega + \omega^2$, unde $\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Să se arate că:

a) $\operatorname{Re} z = 0$;

b) pentru orice n număr natural există și sînt unic determinate numerele raționale a_n, b_n, c_n, d_n așa încît

$$z^{4n} = a_n\omega + b_n\omega^2 + c_n\omega^3 + d_n\omega^4;$$

c) există relațiile $a_n = d_n < 0$, $b_n = c_n < 0$ și

$$a_n + b_n + c_n + d_n = (-2)\left(\frac{5}{16}\right)^n((9 + 4\sqrt{5})^n + (9 - 4\sqrt{5})^n).$$ *(I. Tomescu)*

3. Într-un plan considerăm o dreaptă d și un punct A, iar în afara planului un punct B. Se notează cu a respectiv b distanțele punctelor A și B la dreapta d iar cu o distanța dintre proiecțiile punctelor A și B pe dreapta d. Să se arate că

$$MA + MB \geqslant \sqrt{(a+b)^2 + c^2}.$$

4. Să se arate că oricare ar fi numerele întregi a, b, c, d, numărul $abcd(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(a^2 - d^2)(b^2 - c^2)(b^2 - d^2)(c^2 - d^2)$ este multiplu de 7.

Anul 1983

Etapa județeană

1. Fie $a \in (0, 1)$ fixat. Să se rezolve ecuația: $x^{a^x} = a^{x^a}$. *(I.V. Maftei, T. Andreescu)*

2. Să se arate că, dacă numerele naturale m și n sînt prime între ele, atunci ecuațiile $z^m - 1 = 0$ și $z^n - 1 = 0$ au o singură rădăcină comună.

3. Să se determine $x, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$ așa încît

$$|\log(xx_1)| + |\log(xx_2)| + \quad + |\log(xx_n)| + \left|\log\frac{x}{x_1}\right| + \left|\log\frac{x}{x_2}\right| +$$

$$+ \ldots + \left|\log\frac{x}{x_n}\right| = |\log x_1 + \log x_2 + \quad + \log x_n|.$$ *(A. Ghioca)*

4. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și M un punct în interiorul său, astfel încît măsurile unghiurilor $\widehat{AMC}$, $\widehat{BMC}$ și $\widehat{AMB}$ să fie egale, respectiv, cu 90°, 120° și 150°. Notîndu-se cu P, Q și R, respectiv, centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BMC, AMC și AMB, să se arate că $\sigma[PQR] > \sigma[ABC]$. *(I. Tomescu)*

Etapa finală

1. Să se determine funcția $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}_+^*$ cu proprietățile:

a) $f(4) = 4$;

b) $\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \ldots + \frac{1}{f(n)f(n+1)} = \frac{f(n)}{f(n+1)}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

(D.M. Bătinețu-Giurgiu)

2. Să se arate că $(\forall)k, m, n \in \mathbf{N}$, există numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ așa încît

$$C_{n+k}^{m+k-1} = C_n^{m-1} + a_1 C_n^m + a_2 C_n^{m+1} + \ldots + a_{k-1} C_n^{m+k-2} + C_n^{m+k-1}.$$

Să se determine coeficienții $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ pentru $k = 7$. *(M. Becheanu)*

3. Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ astfel încît $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$ și $z_3 \neq z_2$, atunci

$$\min_{a \in \mathbf{R}} |az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = \frac{|z_1 - z_2|\,|z_1 - z_3|}{2r}.$$

(D. Andrica)

4. Fie $(Ox$, $(Oy$, $(Oz$ trei semidrepte necoplanare și $A \in (Ox$, $B \in (Oy$, $C \in (Oz$. Să se arate că următoarele afirmații sînt echivalente:

a) ortocentrul triunghiului ABC este piciorul perpendicularei duse din O pe planul (ABC), pentru orice poziție a punctelor A, B și C;

b) triunghiul ABC este ascuțitunghic, pentru orice poziție a punctelor A, B și C. *(I.V. Maftei, M. Bătună)*

Anul 1984

Etapa județeană

1. Să se rezolve ecuația $2^{2x-1} = x^2$. *(S. Rădulescu)*

2. Să se arate că în orice triunghi ABC este adevărată egalitatea $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$. Utilizînd eventual această egalitate, să se demonstreze inegalitatea

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \sqrt{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}.$$ *(I.V. Maftei)*

3. Fie $a = 4k - 1$, unde $k \in \mathbf{N}^*$. Să se demonstreze că

$$s_n = 1 - C_n^2 a + C_n^4 a^2 - C_n^6 a^3 + C_n^8 a^4 - \ldots$$

se divide cu 2^{n-1}, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$. *(D. Miheț)*

4. Fie (AB) și (CD) două segmente fixe și distincte în plan. Să se determine locul geometric al punctelor M din acest plan care verifică condiția $\sigma[MAB] + \sigma[MCD] = k$, unde k este o constantă pozitivă. Discuție. *(Gh. Albu)*

Etapa finală

1. Să se determine funcțiile strict monotone $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ cu proprietatea că $f(xy) = f(x)f(y)$, $(\forall)x, y \in \mathbf{Z}$ și există $k \in \mathbf{Z}$, $k \geqslant 2$, astfel încît $f(k) = k$. *(D.M. Bătinețu-Giurgiu, I.V. Maftei)*

2. Să se determine minimul expresiei

$$\log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right),$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, precum și valorile variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru care se realizează minimul. *(T. Andreescu)*

—3. Fie $k \geq 1$ un număr natural și $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{Q}$ astfel încît nu toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sînt nule. Se consideră șirul de numere raționale definit astfel

$$x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \quad + a_1 n + a_0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Să se arate că dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ are un termen număr întreg, atunci acest șir conține o infinitate de termeni distincți doi cîte doi care sînt numere întregi. *(C. Năstăsescu)*

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(A) = 90°$) avînd lungimile laturilor $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$ iar M un punct în spațiu, astfel încît $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$. Să se arate că M se găsește în planul triunghiului ABC dacă și numai dacă este îndeplinită relația

$$2(y^2 + z^2) = a^2 + \frac{(x^2 - y^2)^2}{c^2} + \frac{(x^2 - z^2)^2}{b^2}. \quad \textit{(I. Tomescu)}$$

Anul 1985

Etapa județeană

1. Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție crescătoare cu proprietatea $f(f(x)) = 2^x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, să se arate că există $x_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x_0) < 0$. *(M. Chiriță, M. Piticari)*

2. Să se demonstreze că pentru orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\frac{R}{r} \geq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc}.$$

Să se deducă de aici inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$, notațiile fiind cele cunoscute.

3. Fie $a, b, c \in \mathbf{C}$ afixele vîrfurilor unui triunghi ABC. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă ecuația

$$az^2 + bz + c = 0$$

admite fie rădăcina $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, fie rădăcina $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$.

4. Fie $F \subset \mathbf{R}_+$ o mulțime fixată cu n elemente. Să se determine cîte mulțimi $E \subset \mathbf{R}$ au proprietatea următoare: dacă $f : E \to F$ este dată de $f(x) = x^2$, să avem $f(E) = F$. *(A. Ghioca)*

Etapă finală

1. a) Să se determine două soluții întregi ale ecuației $3^{2x!} = 2^{3x!} + 1$.

b) Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor naturale. *(D. Secălman)*

2. Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, așa încît $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, atunci $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$. *(F. Vulpescu-Jalea)*

3. Să se arate că în orice triunghi avînd lungimile laturilor a, b, c are loc inegalitatea

$$a(2a^2 - b^2 - c^2) + b(-a^2 + 2b^2 - c^2) + c(-a^2 - b^2 + 2c^2) \geq 0.$$

În ce caz avem egalitate? *(I. Varga)*

4. Fie ABC un triunghi și π un plan care nu conține triunghiul.

a) Care este condiția necesară și suficientă pentru ca proiecția triunghiului ABC pe planul π să fie un triunghi?

b) În cazul cînd proiecția triunghiului ABC pe planul π este un triunghi $A'B'C'$, să se arate că proiecția ortocentrului lui ABC pe π coincide cu ortocentrul lui $A'B'C'$ dacă și numai dacă proiecția centrului cercului circumscris lui ABC coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$. *(H.-C. Pop)*

Anul 1986

Etapa județeană

1. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\log_3 x + \log_2 y = 2,$$
$$3^x - 2^y = 23.$$

(I.V. Maftei, Gh. Pantelimon)

2. Se notează $a_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6}}}$ numărul radicalilor suprapuși fiind egal cu n. Să se arate că $\frac{3 - a_{n+1}}{3 - a_n} > \frac{1}{6}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. *(I. Tomescu)*

3. Să se arate că nu există trei numere complexe z_1, z_2, z_3 avînd modulele egale cu unu, care să verifice relația

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3 \cdot (2 - 2i - (z_1 + z_2 + z_3)).$$ *(I.V. Maftei, S. Rădulescu)*

4. Fie ABC un triunghi avînd lungimile laturilor a, b, c. Se notează cu l_a și l_b respectiv lungimile bisectoarelor interioare ale unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$. Dacă $l_a = a$ și $l_b = b$, să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC. *(L. Panaitopol)*

Etapa finală

1. Să se rezolve ecuația

$$8^x + 27^x + 64^x + 125^x = 24^x + 30^x + 40^x + 60^x.$$ *(I.V. Maftei)*

2. Fie P un punct situat în interiorul unui triunghi, x, y, z distanțele de la P la vîrfurile A, B, C ale triunghiului, iar p, q, r distanțele lui P la laturile $[BC]$, $[AC]$ și $[AB]$. Să se arate că

$$xyz \geqslant (q + r)(r + p)(p + q).$$

3. Fie A o submulțime a mulțimii numerelor complexe $\mathbf{C}$ cu proprietățile:

a) A conține orice număr $z \in \mathbf{C}$, cu $= 1$;

b) pentru orice $z_1, z_2 \in A$ avem $z_1 + z_2 \in A$. Să se demonstreze că $A = \mathbf{C}$. *(M. Țena)*

4. Să se rezolve ecuația $4a^2 \sin(x + B) \sin(x + C) = (b + c)^2 + 2bc$, unde a, b, c sînt lungimile laturilor, iar B și C măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic.

Anul 1987

Etapa județeană

1. Fie $n \in \mathbf{N}^*$. Să se calculeze sumele $\sum_{k=1}^{n} k \sin k$ și $\sum_{k=1}^{100} [\log k]$ (partea întreagă a logaritmului zecimal).

2. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C}^*$ avînd același modul. Să se arate că numărul $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_j}{z_k}$ are partea reală nulă dacă și numai dacă $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$.

3. Într-un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ se înscrie un poligon convex regulat cu n laturi. Prin O se duce o dreaptă oarecare d. Să se calculeze suma pătratelor distanțelor de la vîrfurile poligonului la d.

4. Fie un triunghi ABC. I și O fiind, respectiv, centrul cercului înscris și circumscris triunghiului. Dreapta OI intersectează BC, CA, AB în A', B', C', respectiv. Să se arate că $\frac{OA'}{IA'} + \frac{OB'}{IB'} + \frac{OC'}{IC'} \geqslant 3$; în ce caz are loc egalitatea?
(M. Lascu)

5. Fie un cub $[ABCDA_1B_1C_1D_1]$. Planul determinat de A și de centrele pătratelor $A_1B_1C_1D_1$, B_1C_1CB intersectează $[B_1C_1]$ în E. Să se calculeze $\frac{B_1E}{C_1E}$.

Etapa finală

1. a) Fie $p > 2$ un număr prim și $z \in \mathbf{C}$, $z = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$. Să se determine numerele raționale $a_0, a_1, \ldots a_{p-2}$ astfel încît

$$\frac{1}{1-z} = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{p-2} z^{p-2}.$$

b) Dacă $z \in \mathbf{C}$, cu $|z| = 1$, atunci $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \geqslant 2$.
(M. Becheanu, L. Panaitopol)

2. Fie $[ABCD]$ un tetraedru cu unghiurile diedre ascuțite și P un punct în interiorul său. Fie P_a, P_b, P_c, P_d proiecțiile lui P pe fețele $[BCD]$, $[ACD]$, $[ABD]$, $[ABC]$ ale tetraedrului. Să se determine punctul P astfel încît suma

$$\frac{\sigma[BCD]}{PP_a} + \frac{\sigma[ACD]}{PP_b} + \frac{\sigma[ABD]}{PP_c} + \frac{\sigma[ABC]}{PP_d}$$

să fie minimă.

3. Fie $(a_n)_{n \geqslant 1}$ un șir strict crescător de numere naturale astfel încît:
a) $a_{2n} = a_n + n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$;
b) dacă a_n este număr prim, atunci n este număr prim. Să se arate că $a_n = n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. *(L. Panaitopol)*

4. Fie $p \geqslant 2$ un număr prim, n un număr natural oarecare și q cîtul împărțirii lui n la p. Să se demonstreze că numărul

$C_{n+p}^{n} + (q+1)(p-1)$ este divizibil cu p. *(M. Becheanu)*

Anul 1988

Etapa județeană

1. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît sistemul

$$\begin{cases} 2^x + 2^{-x} + y = a, \\ x^2 + 2^y = 3 - a, \end{cases}$$

să admită o singură soluție. *(L. Panaitopol)*

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}^*$, $f(n) = a_n$, care îndeplinește condițiile:

a) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \ldots$;

b) există numere naturale n, $n > 2$, astfel încît $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$.

Să se arate că funcția f este periodică. *(M. Becheanu)*

3. Fie $n > 2$ un număr natural și $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ astfel încît $z^n = 1$.

i) Să se arate că $|1 - z| > \frac{2}{n-1}$;

ii) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbf{Z}$, k nedivizibil cu n, are loc inegalitatea

$$\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| > \frac{1}{n-1}. \quad \textit{(M. Becheanu)}$$

4. Se consideră pentagoanele convexe $ABCDE$ înscrise într-un cerc de rază 1, care au diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ perpendiculare. Să se determine valoarea maximă a ariilor acestor pentagoane.

Etapa finală

1. Să se demonstreze că dacă a și b sînt două numere complexe astfel încît $tb + (1-t)a \neq 0$, pentru orice $t \in [0, 1]$ și $\operatorname{Re}\frac{a}{b} \geq 0$, atunci $\operatorname{Re}\frac{ab}{(tb+(1-t)a)^2} > 0$, oricare ar fi $t \in (0, 1)$. (Cu $\operatorname{Re} z$ s-a notat partea reală a numărului complex z.) *(Gh. Mocanu)*

2. Să se arate că un șir neconstant de numere naturale nenule $(x_n)_{n\geq 0}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă există $a > 0$ astfel încît $x_{n+1} = x_n + \left[\frac{x_n}{n+a}\right]$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$. (Cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x.) *(L. Panaitopol)*

3. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ se consideră numerele

$$C_{2n}^k, \; k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1.$$

Să se arate că:

a) toate aceste numere sînt pare:

b) unul singur dintre numerele considerate nu este multiplu de 4. *(I. Tomescu)*

4. Fie o piramidă regulată de vîrf V și bază $[ABCD]$. Se consideră punctele $A' \in (VA)$, $B' \in (VB)$, $C' \in (VC)$, $D' \in (VD)$ și se notează cu M și N mijloacele segmentelor $[A'C']$, respectiv $[B'D']$. Să se arate că punctele V, A', B', C', D' se află pe o sferă dacă și numai dacă dreapta MN este paralelă cu planul bazei. *(L. Panaitopol)*

Anul 1989

Etapa județeană

1. Să se arate că dacă lungimile a, b, c ale laturilor unui triunghi ABC verifică inegalitatea $a^4 \geqslant b^4 + c^4 - b^2c^2$, atunci $m(\hat{A}) \geqslant 60°$. *(I. Tomescu)*

2. Să se arate că într-un triunghi lungimea celei mai mici bisectoare interioare nu depășește triplul razei cercului înscris triunghiului.

3. Fie M mulțimea perechilor (x, y) de numere naturale astfel încît $0 \leqslant x \leqslant m$, $0 \leqslant y \leqslant n$, și fie k, l numere naturale astfel încît $0 < k < m$, $0 < l < n$. Se numește drum în mulțimea M o mulțime ordonată $\Gamma \subset M$, $\Gamma = \{(x_0, y_0), \ldots, (x_{m+n}, y_{m+n})\}$ astfel încît $x_{i+1} + y_{i+1} = x_i + y_i + 1$, $(\forall) i$, $0 \leqslant i \leqslant m + n$. Să se determine:

a) numărul drumurilor din mulțimea M;

b) numărul drumurilor care nu conțin perechea (k, l). *(M. Becheanu)*

4. Fie $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ un șir de numere reale îndeplinind condițiile:

$$a_0 = a_1 = 1, \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 2^n a_n, \ (\forall) n \geqslant 2.$$

i) Să se determine termenul general a_n.

ii) Să se arate că mulțimea $\left\{ b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$ este mărginită.

iii) Să se calculeze $s_n = \sum_{k=2}^{n} (k-1) a_k$.

Etapa finală

1. Se consideră un tetraedru echifacial $ABCD$, adică $AD = BC = a$, $AB = CD = b$, $AC = BD = c$.

i) În planul (BCD) prin vîrfurile B, C, D se duc paralele la laturile CD, BD, respectiv BC, care determină triunghiul MNP. Să se demonstreze că dreptele AM, AN și AP sînt perpendiculare două cîte două.

ii) Să se demonstreze că există un tetraedru echifacial avînd muchiile de lungimi a, b, c dacă și numai dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi ascuțitunghic. *(I. Tomescu)*

2. Să se arate că oricare ar fi numerele reale nenule și de același semn a, b, c are loc inegalitatea

$$\sqrt{(a-b)^2 + b^2} + \sqrt{(c-b)^2 + b^2} \geqslant \sqrt{a^2 + c^2},$$

egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|c|}$. *(M. Becheanu)*

3. Fie B și C în planul α. A exterior planului și O proiecția lui A pe plan. Dacă $m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{ACB}) \geqslant 90°$, să se arate că $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{BOC})$. *(L. Panaitopol)*

4. i) Să se determine cel mai mare divizor comun d al polinoamelor $f = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$ și $g = X^{m-1} + X^{m-2} + \ldots + X + 1$.

ii) Să se precizeze suma puterilor de exponent $p \in \mathbf{N}$ ale rădăcinilor polinomului d.

Anul 1990

Etapa județeană

1. Să se determine cel mai mic număr natural a pentru care

$$C_{2n}^{n} < a^n, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*. \ (L.\ Panaitopol)$$

2. Să se rezolve ecuația $2^x + 3^x + 6^x = x^2$. *(L. Panaitopol)*

3. Fie $n \in \mathbf{N}^*$. Să se afle $z \in \mathbf{C}$ astfel încît $\quad + \quad + 1 = 1$. *(L. Panaitopol)*

4. Medianele unui triunghi ABC intersectează cercul circumscris triunghiului în A', B' și C'. Să se arate că $\sigma[A'B'C'] \geqslant \sigma[ABC]$.

Etapa finală

1. Să se demonstreze că pentru orice număr întreg $n \geqslant 2$ are loc inegalitatea

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n}} < \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^{n} \ (S.\ Buzețeanu)$$

2. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ se notează $U_n = \{x \in \mathbf{C} \mid x^n = 1\}$. Să se demonstreze că următoarele afirmații sînt echivalente:

a) există $\alpha \in U_n$ astfel încît $1 + \alpha \in U_n$;

b) există $\beta \in U_n$ astfel încît $1 - \beta \in U_n$. *(M. Țena)*

3. Fie a, b numere reale pozitive cu $a > b$. Fie A, B, C, D puncte în spațiu astfel încît $AB = BC = CD = a$, $BD = DA = AC = b$. Se consideră proiecția ortogonală E a lui D în planul (ABC) și cercul O circumscris triunghiului ABC. Să se arate că $E \in O$ implică $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $D = E$. *(D. Brânzei)*

4. a) Să se demonstreze că numărul șirurilor finite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, unde $a_i \in \{0, 1\}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$ și $0 \leqslant a_i - a_{i+1} \leqslant 1$, pentru orice $i = 1, \ldots, n-1$ este egal cu C_{n-k+1}^{k}.

b) Fie i și n două numere naturale astfel încît $i \geqslant 1$ și $n \geqslant 2$ și o scriere a lui n ca sumă de două numere întregi și pozitive: $n = n_1 - n_2$. Să se arate că au loc inegalitățile

$$C_{n-i+1}^{i} \leqslant \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ i_1, i_2 \geqslant 0}} C_{n_1-i_1+1}^{i_1} C_{n_2-i_2+1}^{i_2} \leqslant C_n^i.$$

(Prin definiție, $C_n^k = 0$ pentru $n < k$.) *(I. Tomescu)*

CLASA A XI-A

Anul 1950

Etapa I

1. Două mobile M_1 și M_2 se mișcă pe axa Ox plecînd în același timp din punctul O. Spațiile parcurse de cele două mobile în timpul t sînt date de funcțiile

$$x_1 = t^3 - 6t^2 + 20t,$$
$$x_2 = 2t + 6t^2 - t^3.$$

Se cere:

a) vitezele cu care au plecat și vitezele pe care le vor avea cele două mobile cînd se vor întîlni din nou:

b) care a fost distanța maximă dintre M_1 și M_2 în acest timp și cînd se vor găsi din nou la aceeași distanță:.

c) în ce intervale de timp mișcările celor două mobile sînt amîndouă accelerate sau amîndouă întîrziate.

(Se va socoti timpul în secunde și spațiul în centimetri.)

2. Să se afle înălțimea unei pîlnii conice, astfel ca:

a) volumul fiind dat, tabla întrebuințată la construirea ei să aibă aria minimă;

b) aria tablei fiind dată, volumul pîlniei să fie maxim.

Etapa a II-a

1. Un vas închis, compus dintr-un cilindru acoperit cu un con de aceeași bază, are o cantitate de apă care se ridică la înălțimea x, atunci cînd vasul este așezat cu baza cilindrului pe sol și cu axa verticală. Răsturnînd vasul cu baza cilindrului în sus și cu axa verticală, apa se așază în con și eventual în cilindru, ridicîndu-se la o înălțime y, de la vîrful conului. Diametrul cilindrului este 10 cm, înălțimea cilindrului 30 cm și înălțimea conului 30 cm.

a) Să se determine relația de dependență dintre x și y.

b) Să se reprezinte grafic variația lui y cînd x ia toate valorile posibile.

c) Să se calculeze aria figurii determinate de curba reprezentînd variația lui y, axa lui x și ordonata maximă a lui y.

2. a) Să se calculeze derivata funcției

$$y = \sqrt[3]{x} \text{ pe baza definiției.}$$

b) Se consideră curba care reprezintă graficul funcției y $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y(x) = \sqrt[3]{x}$, și se notează cu $\alpha(m)$ unghiul pe care-l face tangenta la curbă, în punctul de abscisă $x = m$, cu axa Ox. Să se reprezinte grafic funcția.

Anul 1951

Etapa I

1. Se dă o prismă dreaptă avînd ca bază un triunghi ABC cu laturile $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Pe muchia laterală care trece prin B se ia un punct B', iar pe muchia laterală care trece prin C se ia un punct C' și se secționează prisma cu planul determinat de punctele A, B', C'. Se cere:

a) în cîte moduri pot fi alese punctele B' și C' pentru ca unghiul $\widehat{C'AB'}$ să fie drept? Ce relație există în acest caz între lungimile $BB' = x$ și $CC' = y$?;

b) să se demonstreze că aceasta este posibil numai dacă unghiul $\widehat{CAB}$ este obtuz;

c) în cazul $a = 6$, $b = 5$, $c = 3$, să se afle care este valoarea cea mai mică pe care o poate lua numărul $S = x + y$;

d) în cazul $a = 6$, $b = 5$, $c = 3$, $x = y = 1$, să se afle volumul corpului $ABCB'C'$ și măsura unghiului diedru format de planele (ABC) și $(AB'C')$.

Etapa a II-a

1. Se consideră un triunghi ABC în care latura $[BC]$ este congruentă cu înălțimea $[AD](D \in BC)$.

a) Să se afle locul geometric al punctului C atunci cînd $[AB]$ este fixă.

b) Să se construiască grafic triunghiul ABC cînd se cunosc laturile $AB = c$ și $AC = b$. Între ce limite trebuie să fie cuprins raportul $\frac{b}{c}$ pentru ca triunghiul să existe? Cîte soluții sînt?

c) Să se arate că

$$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = 1 \text{ și } \sin B \sin C = \sin A.$$

Anul 1952

Etapa I

1. În triunghiul dreptunghic ABC $(A = 90°)$, se dau ipotenuza a și raza r a cercului înscris. Se cere:

a) să se calculeze catetele. Discuție;

b) să se construiască triunghiul (soluție geometrică). Discuție;

c) să se calculeze raza unui cerc tangent celor două catete, avînd centrul pe ipotenuză.

Etapa a II-a

1. Într-o piramidă patrulateră regulată avînd ca bază un pătrat $ABCD$ și vîrful V, se dă latura bazei $AB = a$ și înălțimea $VO = i$. Prin dreapta BC și mijlocul M al muchiei laterale VA se duce un plan. Se cere:

a) să se traseze secțiunea $BCMN$ ce se obține;

b) să se traseze perpendiculara coborîtă din vîrful V pe planul de secțiune și să se calculeze distanța de la V la acest plan;

c) să se calculeze raportul dintre volumul piramidei $VMNCB$, obținută prin secționarea piramidei date, și volumul piramidei date.

2. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt exprimate prin a^2 b^2, $(a+b)^2$, a și b fiind numere naturale.

a) Raportul dintre pătratul diagonalei paralelipipedului și suma celor trei dimensiuni este un număr întreg.

b) Presupunînd că dimensiunile unui astfel de paralelipiped sînt în progresie aritmetică, să se calculeze cu o zecimală exactă valorile numerice ale tangentelor unghiurilor formate de diagonala paralelipipedului cu cele trei muchii care pleacă dintr-o aceeași extremitate a diagonalei.

Anul 1954

Etapa I

1. Paralel cu latura $[BC]$ a unui triunghi ABC, se duce o secantă MN ce taie $[AB]$ în M și $[AC]$ în N. Să se arate că punctul A are aceeași putere față de cercurile de diametri $[BN]$ și $[CM]$.

2. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}=b.$$

Etapa a II-a

1. Se dă o placă triunghiulară ABC cu laturile a, b, c și unghiurile A, B, C. Placa se așază cu vîrful A pe un plan orizontal (P), B și C fiind de aceeași parte a planului (P), astfel ca latura AC să facă cu planul (P) un unghi ascuțit α, iar latura AB să facă cu același plan (P) un unghi ascuțit β.

a) Să se arate că are loc relația

$$\sin A \sin \alpha = \sin B \sin \beta - \sin C \sin \gamma.$$

γ fiind unghiul format de latura BC cu planul (P).
Să se stabilească o relație analoagă pentru cazul cînd B și C sînt de o parte și de alta a planului (P).

b) Să se determine unghiul γ dintre proiecțiile laturilor AB, AC. Ce relație trebuie să existe între α și β ca să avem $\gamma=0$, $\gamma=90°$, $\gamma=180°$. Se va face cîte un desen pentru fiecare din aceste cazuri.

c) Să se arate că are loc relația

$$\cos \omega = \frac{\cos A - \sin \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma},$$

ω fiind unghiul format de ABC cu planul (P).

2. Să se arate pentru ce valori reale ale lui a avem

$$\sqrt{a+\sqrt{a-0{,}25}}+\sqrt{a-\sqrt{a-0{,}25}}=1,$$

și pentru ce valori reale ale lui a avem

$$\sqrt{a+\sqrt{a-0{,}25}}-\sqrt{a-\sqrt{a-0{,}25}}=1.$$

3. Considerînd globul pămîntesc ca o sferă perfectă se cere:

a) să se afle locul geometric al proiecției pe planul ecuatorului al punctelor M de pe Pămînt care au latitudinea egală cu longitudinea;

b) să se afle locul geometric generat de dreapta AM, A fiind punctul de pe ecuator de longitudine nulă.

Anul 1959

Etapa regională

1. Se proiectează confecționarea unor piese în formă de inel cilindric (doi cilindri circulari coaxiali) avînd o greutate dată G și aria unuia dintre dreptunghiurile secțiunii axiale egală cu a^2. Greutatea specifică a materialului este g.

a) Să se exprime aria totală a unei piese în funcție de înălțimea piesei.

b) Să se studieze variația ariei totale a piesei cînd variază înălțimea și să se traseze graficul funcției.

c) Ce dimensiuni trebuie să aibă piesa pentru ca în cazul acoperirii ei cu un strat metalic protector să se consume cît mai puțin din acest metal? *(O. Sacter)*

2. Se dă un cerc cu centrul C și lungimea razei egală cu r și se consideră un punct fix O pe cerc și un alt punct fix A pe dreapta OC. Tangenta la cerc într-un punct variabil M situat pe cerc intersectează în P tangenta D dusă în O la cerc și în Q dreapta OC.

a) Să se arate că perpendiculara din A pe PQ, perpendiculara din Q pe AP și dreapta D sînt concurente și să se explice geometric acest fapt.

b) Să se găsească ecuația cercului care trece prin A și C astfel încît axa radicală a celor două cercuri să treacă prin P. Să se arate că axa radicală a celor două cercuri trece printr-un punct fix atunci cînd M descrie cercul $\mathcal{C}$.

c) Să se afle locul geometric al intersecției perpendicularei din P pe D cu perpendiculara din A pe PQ. (Indicație. Se va lua dreapta D ca axă Ox).

(Gh. D. Simionescu)

Etapa finală

1. Se dă funcția $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 3\sin^2 x}{x^n}$ definită pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ cu valori reale.

a) Să se determine n astfel încît y să aibă o limită finită și diferită de zero atunci cînd x tinde către zero prin valori diferite de zero. Să se calculeze această limită.

b) Să se deducă pe baza rezultatului de la punctul a că pentru valori foarte mici ale arcului x putem aproxima pe $\sin^2 x$ prin $x^2 - \frac{1}{3}x^4$. *(O. Sacter)*

2. Se dă funcția compusă $f(u, v, w)$, unde u, w sînt funcții omogene de gradul m, n, respectiv p, de variabile reale x, y și cu valori reale. Dacă funcția f este derivabilă în raport cu fiecare variabilă, să se arate că

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = mu\frac{\partial f}{\partial u} + nv\frac{\partial f}{\partial v} + pw\frac{\partial f}{\partial w}.$$ *(Gh. D. Simionescu)*

3. Pe un cerc $\mathcal{C}$ cu centrul în O (originea axelor de coordonate) și de rază de lungime dată R se consideră un punct M. Se duce un cerc $\mathcal{C}'$ cu centrul în M și tangent axei Ox. Punctul de contact al cercului $\mathcal{C}'$ cu axa Ox se notează cu N, punctele de intersecție ale celor două cercuri se notează cu P și Q, iar punctul de intersecție a dreptelor MN și PQ se notează cu S.

a) Să se arate că locul geometric al lui S cînd M descrie cercul $\mathcal{C}$ este o elipsă.

b) Pentru ce poziție a lui M tangenta în S la elipsa determinată la punctul a coincide cu dreapta PQ?

c) Să se studieze variația tangentei unghiului dintre aceste două drepte cînd S descrie elipsa și să se determine poziția lui S pentru care acest unghi are o măsură maximă. Să se verifice totodată rezultatele de la punctul b. *(T. Roman)*

Anul 1960

Etapa regională

1. Se dă funcția $F(x) = x^2 - 3x + 5$ definită pe mulțimea **R**.

a) Să se determine intervalele pe care, restrîngînd funcția F, se obțin funcții inversabile.

b) Să se determine funcțiile inverse respective.

c) Să se calculeze derivatele funcțiilor directe și inverse conform definiției derivatei (fără a folosi regulile de derivare). Să se verifice proprietatea derivatelor a două funcții inverse. *(N. Dinculeanu, E. Radu)*

2. Se consideră dreptele paralele D_1, D_2 și D_3, unde D_2 este echidistantă (la distanță a) față de celelalte două. Pe dreapta D_2 se iau punctele fixe A și B astfel încît segmentul $[AB]$ să aibă o lungime egală cu distanța dintre dreptele D_1 și D_3. Fie M un punct mobil pe dreapta D_1. Tangenta în M la cercul ABM intersectează dreapta D_3 în N. Să se demonstreze că:

a) dreapta MN este tangentă și cercului ABN;

b) cercurile ABM și ABN sînt ortogonale;

c) dacă punctul M se deplasează pe dreapta D_1, dreapta MN rămîne tangentă elipsei de ecuație $x^2 + 2y^2 - 2a^2 = 0$, dacă se consideră originea axelor în mijlocul segmentului $[AB]$.

Etapa finală

1. Se dau elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Fie A și A' vîrfurile axei mari ale elipsei situate pe axa Ox. O dreaptă variabilă care trece prin A taie din nou elipsa și hiperbola respectiv în punctele M și N.

a) Să se arate că proiecțiile punctelor M și N pe axa Ox împreună cu vîrfurile A și A' formează o diviziune armonică.

b) Să se arate că între ordonatele y_1 și y_2 ale punctelor M și N există relația

$$\frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2} = \frac{1}{b^2}.$$

Să se deducă în ce punct taie elipsa o paralelă dusă prin A la una dintre asimptotele hiperbolei.

c) Să se determine locul geometric al intersecției tangentelor în M și N respectiv la elipsă și hiperbolă. *(Gh. D. Simionescu)*

2. Se dă funcția

$$y(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{k} + \frac{k}{\sqrt{x+1}}$$

definită pe $(-1, \infty)$, unde $k > 0$ este un parametru.

a) Să se arate că oricare ar fi k pozitiv, funcția dată are o valoare minimă constantă. Fie $\mathcal{C}$ curba care reprezintă grafic funcția dată, pentru o anumită valoare a lui k. Să se arate că $\mathcal{C}$ are un punct de inflexiune și să se afle locul geometric al acestui punct cînd k variază.

b) Să se reprezinte grafic funcția dată pentru $k = 1$.

c) Fie M punctul în care curba $\mathcal{C}$ taie axa Oy. Tangenta în M la curba $\mathcal{C}$ intersectează axa Ox în N. Să se studieze variația lungimii segmentului $[MN]$ cînd k variază. Care este cea mai mică lungime a lui $[MN]$? *(Gh. D. Simionescu)*

Anul 1961

Etapa regională

1. Se consideră cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ care au respectiv ecuațiile

$$x^2 + y^2 - 8x + m = 0 \quad \text{și} \quad x^2 + y^2 - 6y - 11 + m = 0.$$

a) Să se studieze dacă există valori ale parametrului m pentru care cercurile corespunzătoare $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sînt tangente. În acest caz să se precizeze poziția lor relativă.

b) Se duc tangentele din origine la cercul $\mathcal{C}_1$; dreapta determinată de punctele de contact ale acestor tangente cu cercul $\mathcal{C}_1$ intersectează axa Ox în punctul P. Fie Q punctul analog pentru cercul $\mathcal{C}_2$ și axa Oy. Să se determine locul geometric al intersecției dreptei PQ cu axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$. *(Gh. D. Simionescu)*

2. Coordonatele punctului $M(x, y)$ care se mișcă în planul xOy verifică relațiile $x = \sin(x + t)$ și $\operatorname{tg} y = \sqrt{1 + t^2}$.
Să se scrie ecuația traiectoriei descrise de M sub forma $y = f(x)$, dacă $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) În ce interval variază timpul t pentru ca M să descrie întreaga traiectorie? Să se determine intervalul maxim I în care poate lua valori x pentru ca $f(x)$ să fie o funcție continuă și să se motiveze continuitatea.

b) Să se stabilească mulțimea valorilor $f(x)$ pentru $x \in I$.

c) Să se calculeze derivata funcției $f(x)$. Să se scrie ecuația tangentei la traiectoria punctului M în punctul de abscisă nulă. Să se indice forma acestei traiectorii în vecinătatea punctelor de abscise $x = -1$ și $x = 1$. Să se reprezinte grafic traiectoria punctului M, pe baza rezultatelor obținute. *(T. Roman)*

Etapa finală

1. Fie A și A' vîrfurile hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și M un punct variabil pe hiperbolă. Dreptele MA și MA' intersectează paralelele duse la Oy prin A' și A respectiv în P și Q, iar dreapta PQ taie axa AA' a hiperbolei în R.

a) Să se demonstreze că dreapta MR este tangentă în M la hiperbolă.

b) Ce condiție trebuie să îndeplinească hiperbola dată pentru ca ortocentrul H al triunghiului MAA' să aparțină hiperbolei?

c) Să se afle locul geometric al ortocentrului H cînd M descrie hiperbola dată și să se regăsească condiția de la punctul b.

d) Să se afle locul geometric al intersecției N a cercului MAA' cu paralela la Oy dusă prin M. Să se explice geometric rezultatul găsit. *(Gh. D. Simionescu)*

2. Un vas de tablă are volumul $V = 30\pi$ dm³ și este alcătuit din doi cilindri cu același ax de simetrie, cilindrul cu rază mai mică fiind așezat deasupra celuilalt. Cei doi cilindri au fiecare înălțimea de 6 dm, iar vasul este fără capac.

a) Să se determine dimensiunile vasului știind că a fost construit pentru răcirea cît mai rapidă a lichidului conținut, avînd aria totală maximă.

b) Notînd cu x raza cilindrului inferior, să se arate că aria vasului este dată de o constantă înmulțită cu funcția

$$f(x) = 3x^2 + 12x - 5 + 12\sqrt{5 - x^2}$$

c) Să se reprezinte grafic această funcție pe domeniul ei maxim de definiție și să se specifice care porțiune corespunde cazului cînd x are semnificația de la punctul b. *(Gh. D. Simionescu)*

3. a și b fiind două numere reale nenule se definește operația $*$ astfel

$$a * b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

a) Să se arate că operația este comutativă: $a * b = b * a$.

b) Să se arate că, în general, operația nu este asociativă, adică

$$(a * b) * c \neq a * (b * c).$$

c) Ce condiții trebuie să îndeplinească numerele a, b, c pentru ca operația $*$ să fie asociativă? *(T. Roman)*

Anul 1962

Etapa regională

1. Se dă funcția $f(x) = (ax + \sqrt{1 + a^2x^2})^{\frac{1}{a}}$, unde a este un parametru real nenul.

a) Să se arate că în domeniul de definiție al funcției $f(x)$ sînt verificate identitățile

$$f'(x)\sqrt{1 + a^2x^2} - f(x) = 0,$$

$$(1 + a^2x^2)f''(x) + a^2xf'(x) - f(x) = 0.$$

b) Rămîn valabile identitățile de mai sus dacă $a \to 0$, adică pentru funcția

$$f(x) = \lim_{a \to 0} (ax + \sqrt{1 + a^2x^2})^{\frac{1}{a}}?$$

Se vor studia cazurile $a > 0$ și $a \leqslant 0$. *(O. Stănășilă)*

2. Se dă elipsa cu axa mare $AA' = 2a$ și axa mică $BB' = 2b$.

a) Prin vîrful B se duce o secantă variabilă care taie din nou elipsa în D și dreapta AA' în E. Să se afle locul geometric al punctului I de intersecție a tangentei în D la elipsă cu paralela dusă prin I la BB'.

b) Pe tangenta în B' se dă un punct fix P. Fie M un punct luminos în planul elipsei și Q, R extremitățile umbrei aruncate pe tangenta în B'. Să se afle locul geometric al punctului M, astfel ca mijlocul umbrei QR să fie în punctul P. *(Gh. D. Simionescu)*

Etapa finală

1. Se consideră elipsa $3x^2 + y^2 - 3a^2 = 0$. Se notează axa mică cu $[AB]$. Tangenta într-un punct M variabil pe elipsă și tangenta în A la elipsă se intersectează în Q. Fie N (diferit de A) punctul de contact al tangentei duse din Q la cercul de diametru $[AB]$. Dreapta QN taie axa Ox în P iar dreapta AM taie paralela prin Q la AB în L.

a) Să se determine locul geometric al punctului L cînd P descrie elipsa.

b) Să se arate că punctele B, N, M sînt coliniare.

c) Să se demonstreze că dreptele OQ și AN se intersectează în punctul T situat pe perpendiculara în P pe AB. Să se determine locul geometric al punctului T. *(Gh. Popescu-Lugoj)*

2. Se consideră un con circular drept a cărui generatoare are lungimea g constantă și sfera tangentă conului de-a lungul cercului său de bază.

a) Să se studieze variația volumului v cuprins între con și sferă, cînd unghiul $2x$ de la vîrful conului variază și să se determine extremele.

b) Să se reprezinte grafic funcția

$$f:\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}; \quad f(x) = \frac{3v(x)}{\pi g^3}.$$ *(Gh. D. Simionescu)*

Anul 1963

Etapa regională

1. Față de sistemul ortogonal de axe xOy se consideră punctul fix $A(1, 0)$ și dreapta mobilă D, a cărei ecuație este $y = mx + n$.

a) Să se arate că dacă produsul distanțelor de la punctele O și A la dreapta D este egal cu 1, raportul $\frac{m^2+1}{m+n}$ nu depinde de m.

b) Fie M simetricul lui A față de dreapta D. Să se afle locul geometric al punctului M cînd este satisfăcută condiția de la punctul a. Discuție. *(V. Băghină)*

2. Se dă funcția $f(x) = \frac{x+2}{2+\sqrt{x^2-4}}$, $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

a) Să se afle $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Să se calculeze derivata $f'(x)$ a funcției $f(x)$ și să se afle $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f'(x)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f'(x)$. Să se precizeze ce fel de limită există în fiecare din cele două puncte.

c) Să se construiască grafic semitangentele la curbă în cele două puncte, fără a construi curba. *(Gh. D. Simionescu)*

3. Se dau funcțiile $f(x) = \operatorname{arctg}(x-a)$ și $g(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{a^2+1-ax}$.

a) Să se arate că ele au aceeași derivată.

b) Să se explice rezultatul.

Etapa finală

1. Se dă funcția $y = \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

a) Ce condiții trebuie să îndeplinească m și n pentru ca funcția dată să fie strict crescătoare (sau strict descrescătoare) pe tot domeniul său de definiție?

b) Să se găsească ecuația locului geometric al punctului de coordonate (m, n) astfel încît în cazul cînd funcția admite un maxim, acesta să fie $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

c) Să se reprezinte grafic locul geometric găsit. *(N. Gheorghiu)*

2. Se dă mulțimea de elipse care au aceeași axă mare $AA' = 2a$. Pe fiecare elipsă din această mulțime se consideră punctul P, din primul cadran XOY, care se proiectează în focarul $F(m, 0)$ și se notează cu C proiecția originii axelor pe tangenta în P la elipsă.

a) Să se determine și să se figureze arcele de curbă (C) și (P) pe care se găsesc toate punctele C și P corespunzătoare elipselor din mulțimea dată.

b) Se notează cu K, intersecția tangentei în P la una din elipse cu axa $y'y$, iar cu I intersecția tangentei în P la curba (P) cu tangenta în C la curba (C). Să se calculeze coordonatele punctelor K și I și să se interpreteze rezultatele.

c) Să se afle ecuația acelei elipse din mulțimea dată pentru care unghiul ascuțit format din cele două tangente în P la elipsă și la curba (P) are valoare maximă. *(Gh. Bazacov)*

Anul 1964

Etapa regională

1. Se dă funcția $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 - a^2| - |x^2 - b^2|}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, și $a > b > 0$.

Se cere:

a) domeniul maxim de definiție;

b) intervalele pe care funcția este continuă;

c) limitele laterale în punctele $x = \pm\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$;

d) să se arate că produsul $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) f'\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ este cubul unei expresii raționale. *(M. Oprea)*

2. Față de un sistem de axe dreptunghiulare XOY se consideră punctul fix A situat pe axa OY și un punct $P(\alpha, \beta)$ mobil în plan.

a) Să se scrie ecuația generală a cercurilor care au centrul în P și trec prin originea axelor. Să se afle locul geometric al punctului P știind că tangentele duse din A la oricare din cercurile de mai sus sînt perpendiculare între ele. Notăm cu $\mathcal{C}$ mulțimea cercurilor cu centrul în P, care satisfac această condiție și cu $\mathcal{L}$ locul geometric (tot un cerc).

b) Să se determine analitic și să se construiască grafic acele cercuri din mulțimea $\mathcal{C}$ față de care punctul A are aceeași putere ca și față de $\mathcal{L}$.

c) Să se afle locul geometric al celui de-al doilea punct de intersecție al unui cerc din mulțimea $\mathcal{C}$, cu perpendiculara dusă din origine pe AP, unde P este centrul cercului respectiv. *(V. Băghină)*

Etapa finală

1. Se consideră funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ și $x_0 \in (a, b)$. Definim

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + h)}{2h} \text{ dacă există și este finită,}$$

și o numim derivata simetrică a lui f în x_0 și o notăm cu $\lambda(x_0)$.

a) Să se demonstreze că este suficient ca funcția f să admită în x_0 derivate laterale distincte, pentru ca $f(x)$ să admită în x_0 derivată simetrică. Ce devine derivata simetrică, dacă derivatele laterale în x_0 sînt egale?

b) Să se arate că dacă $f(x)$ este crescătoare pe $[a, b]$ și admite pe (a, b) derivată simetrică, atunci aceasta este pozitivă pe (a, b).

c) Să se studieze existența derivatelor laterale și a derivatei simetrice în punctul $x = 0$ pentru funcțiile: $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + |x|$ și $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ *(C. Popescu)*.

2. Se dă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{x}$ și se cere:

a) mulțimea valorilor lui x pentru care funcția este o constantă:

b) reprezentarea grafică a funcției pe domeniul ei maxim de definiție. *(Gh. D. Simionescu)*

3. Se dă parabola $y^2 - 2px = 0$, unde $p > 0$.

a) Să se demonstreze că dacă F este focarul parabolei și M un punct oarecare de pe parabolă, cercul de diametru $[FM]$ este tangent axei OY într-un punct N.

b) Fie P al doilea punct de intersecție al cercului de diametru $[FM]$ cu axa OX. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[PN]$ cînd M descrie parabola dată.

c) Să se generalizeze rezultatul de la punctul b pentru cazul cînd în loc de mijlocul segmentului se consideră punctul care împarte segmentul într-un raport dat k. Pentru ce valori ale lui k se obține locul geometric, chiar parabola dată?

d) Dîndu-se punctul $M_1(2p, 2p)$ să se determine punctele M_2 pe parabola dată astfel ca cercurile de diametru $[FM_1]$, $[FM_2]$ să fie ortogonale. *(M. Dabija)*

Anul 1965

Etapa regională

1. Se consideră funcția $f(x) = \arcsin \frac{2 - x^2}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$.

a) Să se determine domeniul de definiție maxim al funcției.

b) Să se calculeze derivata funcției f.

c) Să se studieze comportarea funcției f în vecinătatea punctului de abscisă $x = 0$. *(Margareta Boer)*

2. Se dă un cerc $\mathcal{C}$ și tangenta în punctul A la cerc. Din punctul B diametral opus lui A se duce o secantă variabilă D care taie cercul în P și tangenta în Q.

a) Să se arate că perpendiculara dusă pe D prin mijlocul segmentului $[OP]$ trece printr-un punct fix.

b) Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor care trec prin punctele: centrul cercului $\mathcal{C}$, P, Q.

c) Să se afle locul geometric al punctului M de pe dreapta D, care satisface relația $\frac{m}{BQ} + \frac{n}{BP} = \frac{m + n}{BM}$, m și n fiind două numere reale, date. *(C. Piscati)*

Etapa finală

1. Cercul $x^2 + y^2 = 2$ și parabola cubică $y = x^3$ se reprezintă față de aceleași axe XOY. Punctele lor de intersecție se notează cu A, $B(y_A < 0)$.

a) Fie M, N două puncte de aceeași abscisă x, situate, primul pe cerc și celălalt pe parabolă, astfel ca segmentul $[MN]$ să fie interior cercului, iar $y_M > y_N$.

Să se studieze funcția $f(x) \doteq MN$. Se notează cu y_A, y_M, y_N ordonatele punctelor respective.

b) Să se calculeze diferența dintre maximul relativ și minimul relativ al acestei funcții cu trei zecimale exacte.

c) Se notează cu $[AA']$ coarda cercului paralelă cu OY. Să se studieze funcția $g(x) \doteq$ aria$(AA'PMNQA)$, unde punctul P este situat pe arcul AM al cercului, iar Q aparține arcului AN al parabolei cubice.

d) Să se calculeze valoarea cea mai mare a funcției $g(x)$.

e) Să se studieze funcția $f_1(x)$ definită prin expresia analitică a lui $f(x)$, dar pe domeniul ei maxim de definiție. Să se explice geometric apariția celei mai mari valori a funcției $f_1(x)$. *(T. Roman)*

2. Se consideră în același plan, unghiurile drepte $\widehat{MAN}$ și $\widehat{MBN}$ care se rotesc independent unul de altul, în jurul vîrfurilor fixe A și B.

a) Să se afle locul geometric al mijlocului P al segmentului $[MN]$.

b) Să se arate că dacă unghiurile $\widehat{MAN}$ și $\widehat{MBN}$ se rotesc în așa fel încît N să descrie o dreaptă D paralelă cu AB, atunci M descrie o parabolă care trece prin A și B. Să se precizeze ce descrie punctul P în acest caz

c) Se cere locul intersecției tangentei în A cu normala în B la parabola de la punctul b cînd dreapta D variază.

d) Fiind dată o dreaptă oarecare E în planul celor două unghiuri drepte, să se afle locul geometric al punctelor M și N în cazul cînd cercul $AMBN$ este tangent dreptei E. Să se cerceteze în mod special cazul cînd se impune condiția ca unghiurile $\widehat{AMB}$ și $\widehat{ANB}$ să fie suplementare.

e) La punctele a și d se cer și soluții geometrice. *(P. Cernescu, Gh. D. Simionescu)*

Anul 1966

Etapa regională

1. Pe axele perpendiculare XOY, se iau punctele A pe OX, B pe OY și fie D o dreaptă oarecare din planul axelor. Vîrfurile triunghiului AOB se proiectează pe D în punctele A', O', B' iar din aceste proiecții se duc perpendiculare pe laturile opuse OB, AB, OA' ale triunghiului.

a) Să se arate că perpendicularele duse din A', O', B' sînt concurente într-un punct K.

b) Dacă dreapta D se mișcă paralel cu o direcție fixă, să se găsească locul geometric al punctului K.

c) Dacă punctele A, B se mișcă pe axele OX, OY dar segmentul $[AB]$ rămîne constant ca lungime, să se arate că locul lui K este un cerc, căruia să i se afle raza (dreapta D este fixă). *(I. Teodorescu)*

2. Se consideră funcția $f(x) = \frac{|x|-1}{|x|+1} \cdot \ln \frac{x^2+1}{x+1}$.

a) Să se arate că f este continuă pe domeniul maxim de definiție.

b) Să se scrie derivata funcției pentru $x = 0$ și să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. *(A. Halanay, Al. Lalescu)*

Etapa finală

1. Se consideră funcțiile: $f_1(x) = 2\sqrt{|x|} + \sqrt{4|x| - x^2}$, $f_2(x) = 2\sqrt{|x|} - \sqrt{4|x| - x^2}$, $f_3(x) = -2\sqrt{|x} - \sqrt{4|x| - x^2}$ și $f_4(x) = -2\sqrt{|x|} - \sqrt{4|x| - x^2}$ definite pentru $|x| \leqslant 4$.

a) Să se construiască graficele acestor funcții.

b) Fie $M_1(x_0, f_1(x_0))$, $M_2(x_0, f_2(x_0))$, $x_0 > 0$, situate pe graficele funcțiilor f_1 și f_2. Să se găsească valoarea x pentru care segmentul $[M_1M_2]$ are lungimea maximă. Cum sînt tangentele la cele două grafice în punctele M_1 și M_2?

c) Să se calculeze aria domeniului mărginit de graficele funcțiilor f_1, f_2, f_3 și f_4. *(I. Teodorescu)*

2. Se dă cercul $\mathcal{C}$ și dreapta D de ecuații: $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ și $bx - ay = 0$, $a, b \neq 0$. Din mulțimea punctelor de intersecție ale tangentelor la cercul $\mathcal{C}$ cu paralelele la dreapta D considerăm acele puncte M pentru care avem $MT = MP$ și punctele N pentru care $NT = NQ$ (unde s-a notat cu T punctul de tangență, iar cu P și Q punctele unde o paralelă la D taie, respectiv, axele $x'x$ și $y'y$.)

a) Punctul M aparține unei hiperbole (H) cu unul din focare F pe OX, iar punctul N unei hiperbole (H_1) cu F_1 pe OY.

b) Cercul cu centrul în F și raza OF și cercul cu centrul în F_1, raza OF_1 sînt tangente respectiv la (H_1) și (H), iar dreptele care unesc punctele de contact de pe fiecare hiperbolă, împreună cu D sînt trei drepte concurente pe cercul $\mathcal{C}$. *(Gh. Bazacov)*

Anul 1967

Etapa regională

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 6$.

a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ este mulțimea numerelor naturale) expresia $\dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 6}{f(x)}$ nu este un număr întreg.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{95n}{6} - \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\right]$.

c) Să se studieze derivabilitatea funcției g $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma:

$$g(x) = \begin{cases} f^2(x), \text{ dacă } x < -2, \\ \ln^2(1 + f(x)), \text{ dacă } x \geqslant -2. \end{cases}$$

d) Să se calculeze pentru $x \geqslant -2$, derivata de ordinul n a funcției $\ln f(x)$. *(T. Cohal)*

2. $A \cap B \subset A \cap C$ și $A \cup B \subset A \cup C$ este echivalent cu $A \subset C$.

3. Într-un cerc de rază R se dă patrulaterul convex înscris $ABCD$, cu latura $[BC]$ fixă și egală cu l_3 (latura triunghiului echilateral înscris în acest cerc) și latura $[AD] = l_6$ (latura hexagonului regulat înscris), punctele A și D fiind mobile și situate pe arcul mare $\widehat{BmC}$.

a) Să se afle locul geometric al punctelor P, P' de intersecție a dreptelor BD cu AC și respectiv AB cu DC. Se cere și soluția geometrică.

b) Să se arate că dreapta PP' trece printr-un punct fix. Să se arate, de asemenea, că paralela dusă prin P' la dreapta ce trece prin P și mijlocul lui $[BC]$, trece printr-un punct fix.

c) Să se afle minimum și maximum lungimii segmentului $[PP']$. *(C. Caragea)*

Etapa finală

1. a) Să se studieze natura rădăcinilor polinomului $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$, unde a este un parametru real.

b) Să se studieze și să se traseze graficul funcțiilor $h(x) = \sqrt{f(x)}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$.

c) Să se calculeze aria limitată de graficul funcției $h(x)$ și axa x-lor pentru $a = 4$. *(T. Roman)*

2. a) Fiind cunoscute coordonatele unui punct L de pe elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor paralele cu OL și să se calculeze coordonatele punctelor C și D de intersecție a acestui loc geometric cu elipsa.

b) Punctul L fiind mobil pe elipsă, să se demonstreze că mulțimea punctelor care sînt mijloacele segmentelor $[LC]$ este identică cu mulțimea punctelor care sînt mijloacele segmentelor $[LD]$. *(I. Moisee)*

3. Se consideră funcția $f(x) = \dfrac{x \ln x}{mx + \sqrt{1 - |x^2 - 2x|}}$, $m > 0$. Să se arate că pe intervalul $(1, 2]$ funcția f admite o funcție inversă. *(I. V. Maftei)*

Anul 1968

Etapa județeană

1. Față de sistemul de axe ortogonale XOY se consideră cercul $\mathcal{C}$ variabil situat în primul cadran și tangent axelor OX, OY respectiv în M și N. Fie d o dreaptă mobilă care trece prin M și are direcția constantă. Fie P al doilea punct de intersecție a dreptei d cu cercul $\mathcal{C}$. Se cere:

a) ecuația cercului variabil $\mathcal{C}$;

b) locul geometric al punctului P;

c) locul geometric al punctelor situate pe dreapta MN din care se pot duce tangente perpendiculare la cercul variabil $\mathcal{C}$. *(Gh. D. Simionescu)*

2. a) Să se arate că tangentele la curbele reprezentate de ecuațiile $y_1(x) = \arccos(e^{a-x} \cos b)$ și $y_2(x) = \arcsin(e^{a-x} \sin b)$ respectiv în punctele A și B de intersecție ale acestor curbe cu dreapta $y = d$, sînt perpendiculare. Ce valori poate lua d?

b) Presupunînd $b \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, să se arate că cele două curbe trec prin punctul $M(a, b)$ și să se scrie ecuațiile tangentelor în M la cele două curbe.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{y_1(x) - y_2(a)}{-a}$ în cazul $b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Se dau funcțiile $f_i : A_i \to \mathbf{R}$, $f_i = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^i - 1}}$, $i = 1, \ldots, n$.

a) Să se determine domeniul lor maxim de definiție.

b) Să se calculeze

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + f_1(x) & 1 \\ & & \\ 1 & 1 & 1 + f_n(x) \end{vmatrix}.$$

c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x - 1) f(x)$. *(N. Bebea)*

Etapa finală

1. a) Să se rezolve sistemul matricial:

$$\begin{cases} AX - BY = C \\ BX - AY = C, \end{cases}$$

unde A, B, C, X, Y sînt matrici pătrate, iar $A + B$ și $A - B$ sînt matrici nesingulare.

b) Să se găsească soluția în cazul particular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Considerăm funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, f derivabilă pe (a, b) și f continuă în punctele a și b. Considerînd funcția auxiliară $F(x) = e^{f(x)}(x - a)(x - b)$, să se arate că există $c \in (a, b)$, astfel încît $f'(c) = \dfrac{a + b - 2c}{(c - a)(c - b)}$. *(Gh. Rizescu)*

3. Se dă funcția $f(x) = x - \sin^2 x$ definită pe intervalul $[0, h]$. Știind că $f(h) - f(0) = hf'(ah)$, să se arate că $0 < a < 1$ și să se calculeze limita lui a cînd h tinde la zero. *(C. Ionescu-Țiu)*

4. Se dă elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Dintr-un punct M exterior elipsei se duc tangentele MA și MB (A și B fiind punctele de tangență ale căror coordonate pot fi exprimate și parametric). Fie N mijlocul segmentului $[AB]$. Se cere:

a) Să se arate că O, M și N sînt coliniare;

b) dacă M se mișcă pe elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - k^2 = 0$, k fiind o constantă mai mare ca 1, să se arate că aria triunghiului AMB este constantă, A și B fiind punctele de tangență ale tangentelor duse din punctul M la elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

(I. Moisev)

5. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + \ldots + 2nx_n = 0, \\ \\ kx_1 + 2kx_2 + 3kx_3 + \ldots + (1 + k^2)x_k + \ldots + nkx_n = 0, \\ \\ nx_1 + 2nx_2 + 3nx_3 + \ldots + (1 + n^2)x_n = 0. \end{cases}$$ *(Gh. Rizescu)*

Anul 1969

Etapa județeană

1. Fie funcția $f : E \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 - |x - 2|}{|x - 2| + 2}}.$$

a) Să se determine domeniul maxim de definiție E.

b) Să se studieze continuitatea funcției f.

c) Să se afle intervalele pe care funcția f este derivabilă.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 2} [f(x)]^{\frac{2}{|x-2|}}$

Să se cerceteze și existența limitei $\lim\limits_{x \to 2} [f(x)]^{\frac{2}{x-2}}$. *(M. Dabija)*

2. Punctul $A(a, 0)$ se proiectează în B pe prima bisectoare a axelor de coordonate xOy, iar B se proiectează în C pe axa yy'. Considerăm cercul $\mathcal{C}_1$ circumscris triunghiului ABC și cercul $\mathcal{C}_2$ circumscris triunghiului AOC. Tangentele la cercul $\mathcal{C}_1$ duse în A și C se întîlnesc într-un punct I. Se cere să se arate că:

a) patrulaterul $AOCI$ este inscriptibil;

b) cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ se taie sub un unghi de 45°;

c) considerînd un diametru mobil (MM') al cercului $\mathcal{C}_2$ să se calculeze locul geometric al punctului P, intersecția dreptelor MO și $M'A$. *(Gh. Bazacov)*

3. Fie A o matrice pătrată de ordinul $n (n \geqslant 2)$ nesingulară.

a) Să se demonstreze egalitatea: $(A^*)^* = [\det(A)]^{n-2}A$.

b) Care sînt matricile nesingulare pentru care $(A^*)^* = A$? (S-a notat cu A^* reciproca matricii A.) *(L. Pîrșan)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se consideră funcția $f : E \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{4x+1}} - mx.$$

a) Să se afle domeniul ei maxim de definiție.

b) Să se calculeze limita funcției în punctul $x = -\frac{1}{4}$.

c) Să se determine numărul real m astfel ca funcția să aibă o limită finită cînd $x \to +\infty$.

d) Să se determine numărul real m astfel ca funcția să aibă o limită finită cînd $x \to -\infty$. *(D. Ogrezeanu)*

Etapa finală

1. Se dă funcția $f \; E \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arccos 2x$, E fiind domeniul maxim de definiție.

a) Să se afle domeniul maxim de definiție al derivatelor de ordinul n, $n+1$ și $n+2$ și să se stabilească o relație între derivatele de ordinul n, $n+1$, $n+2$.

b) Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției în punctul $x = 0$.

(D. Ogrezeanu)

2. Fie cercul cu centrul $\mathcal{C}(0, b)$, cu $b > 0$, care taie axa absciselor în punctul $A(a, 0)$. Se consideră, de asemenea, familia de elipse raportate la axele de simetrie, ce au ca semiaxă segmentul (OA).

a) Să se determine elipsa din familie pentru care tangenta dusă în punctul din cadranul I, unde prima bisectoare a axelor taie elipsa, este perpendiculară pe tangenta la cerc în punctul A.

b) Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor determinate prin intersectarea elipsei de la punctul a cu o dreaptă mobilă ce trece prin centrul cercului.

c) Să se demonstreze că locul geometric aflat la punctul b este o parte dintr-o elipsă. *(Gr. Bănescu)*

3. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + mz = m + 2, \\ 3x - 4y + (m + 4)z = m + 8, \\ (m - 4)x \quad (m - 1)y + (m - 2)z = m, \end{cases}$$

știind că $m \in \mathbf{R}$. Discuție. *(L. Pîrșan)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Să se afle limita șirului

$$a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 \quad 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdots \frac{(n + 1)^3 - 1}{(n + 1)^3 + 1}.$$

2. Se dă o hiperbolă echilaterală și un punct M mobil pe hiperbolă. Să se demonstreze că:

a) tangenta în M formează cu asimptotele un triunghi a cărui arie este constantă.

b) dacă M_1 și M_2 sînt două puncte fixe pe hiperbolă, P_1 și P_2 punctele de intersecție ale dreptelor MM_1, respectiv MM_2 cu o asimptotă, segmentul (P_1P_2) are o lungime constantă.

Anul 1970

Etapa județeană

1. Se dă funcția $f \quad D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$, D fiind domeniul maxim de definiție.

a) Pe baza definiției derivatei într-un punct, să se determine $f'(x_0)$, $x_0 \in D$.

b) Se dă funcția $g : D \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$. Să se calculeze $g'(x)$ și $g''(x)$.

(Șt. Mușta)

2. Să se calculeze

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n} \left[\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(a + \frac{2}{n}\right)^2 + \left(a + \frac{3}{n}\right)^2 + \quad + \left(a + \frac{n - k}{n}\right)^2 \right] \right\}^2,$$

unde $a \in \mathbf{R}$; $n, k \in \mathbf{N}$. *(C. Ionescu-Țiu)*

3. Într-un plan se consideră cercul $\mathcal{C}(O, r)$, un punct fix A și unul mobil M exterior cercului $\mathcal{C}$. Dreapta perpendiculară în O pe OA intersectează cercul $\mathcal{J}$ determinat de punctele O, A, M pentru a doua oară în punctul N, iar dreapta AM intersectează pe ON în P.

a) Să se arate că tangenta în O la cercul $\mathcal{J}$ este paralelă cu coarda comună (d) a cercurilor $\mathcal{C}$ și $\mathcal{J}$.

b) Să se afle locul lui M astfel încît $ON \cdot OP = k$, unde k este constant.

(P. Voiculescu)

4. Să se găsească matricile pătrate reale de ordinul 2 de forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ care verifică relația $X^2 - 2aX + (a^2 + b^2)I = 0$, unde I și O sînt, respectiv, matricea unitate și matricea nulă. *(Gh. Popescu)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se dă

$$a_k = \log_{\frac{1}{2}} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \text{ și } b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Să se arate că șirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict crescător și mărginit. *(I. V. Maftei)*

2. Tangenta într-un punct M mobil pe cercul $x^2 + y^2 = a^2$ intersectează axele de coordonate în P și Q ($P \in Qx$, $Q \in Oy$). OM intersectează cercul a doua oară în punctul N. Paralela prin M la axa Oy intersectează cercul în E iar perpendiculara din O pe QN intersectează tangenta în M la cerc în punctul F.

a) Să se arate că punctele E, F, N sînt coliniare.

b) Secanta comună cercului circumscris triunghiului POQ și cercului dat intersectează axele de coordonate în A și B. Să se arate că segmentul (AB) are o lungime constantă. *(I. V. Maftei)*

3. Să se rezolve sistemul

$$X + Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

unde X și Y sînt matrici pătrate de ordinul 2. *(Gh. Voicu)*

4. Să se calculeze

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(2 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x}\right)^{\frac{1}{\sin x - \cos x}}. \qquad \textit{(I. V. Maftei)}$$

5. Să se deducă formula sumei

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \dots + \frac{n}{x^{n+1}},$$

unde $x \neq 0$, din egalitatea

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n} = \frac{x^n - 1}{x^n(x-1)}, \quad x \neq 1, \quad x \neq 0. \qquad \textit{(V. Radu)}$$

6. Se dă expresia

$E(x) = (1 + m) \arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}$, unde $x^2 < \frac{1}{2}$. Să se determine m în așa fel ca expresia dată să nu depindă de x.

7. Se dă determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 + a_3 & a_3 + a_4 & a_4 + a_5 \\ a_6 + a_7 & a_7 + a_8 & a_8 + a_9 & a_9 + a_{10} \\ a_{11} + a_{12} & a_{12} + a_{13} & a_{13} + a_{14} & a_{14} + a_{15} \\ a_{16} + a_{17} & a_{17} + a_{18} & a_{18} + a_{19} & a_{19} + a_{20} \end{vmatrix}.$$

a) Să se calculeze determinantul în cazul cînd $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ sînt în progresie aritmetică.

b) Să se calculeze determinantul în cazul cînd $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ sînt în progresie geometrică. *(I. V. Maftei)*

Etapa finală

1. Se dau funcțiile

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_1(x) = \arccos \frac{2ax}{a^2 + x^2},$$

$$f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_2(x) = \arcsin \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2},$$

$$f_3 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ f_3(x) = 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{x}$$

$$f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_4(x) = -2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

unde a este un parametru real strict pozitiv.

a) Să se afle derivatele lor, precizînd și domeniile de derivabilitate.

b) Să se stabilescă intervalele pe care există o relație de forma $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = k$ (k constantă reală), stabilind valorile constantelor. *(D. Ogrezeanu)*

2. Fie elipsa (E) raportată la axele ei, cu semiaxa mare $OA = 2a$ și semiaxa mică $OB = a$. Fie, de asemenea, cercul $\mathcal{C}$ cu raza a și tangent axei xx' în origine. Se notează cu P unul din punctele în care o dreaptă d ce trece prin origine și cu coeficientul unghiular λ intersectează elipsa (E) și cu Q punctul diferit de origine în care aceeași dreaptă intersectează cercul $\mathcal{C}$.

a) Să se determine poziția dreptei (d) astfel încît $OP \cdot OQ = k$. Discuție pentru $k \in \mathbf{R}$.

b) Să se determine poziția punctului Q de pe cercul $\mathcal{C}$ astfel încît să existe relația $AQ = h \cdot OQ$, unde h este un număr real dat. Discuție.

c) Dacă (OP_1) este un segment perpendicular pe OP, $P_1 \in$ (E), să se arate că expresia

$$S = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OP_1^2}$$

nu depinde de poziția dreptei d. Să se calculeze valoarea expresiei S. *(D. Ogrezeanu)*

3. Să se discute limita

$$E = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos a_1 x + \cos a_2 x + \cos a_3 x}{\cos b_1 x + \cos b_2 x + \cos b_3 x} \right)^{\frac{1}{x^p}}$$

unde a_i, b_i ($i = 1, 2, 3$) sînt constante reale, iar $p > 0$ un parametru real.

(Gh. D. Simionescu)

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se dă funcția $f(x) = \frac{1}{2} \ln (x^2 - 2x \cos \alpha + 1)$ definită pe domeniul ei maxim.

a) Să se determine valoarea parametrului $\alpha \in [0, 2\pi]$ pentru care panta tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 0$ are valoarea 1.

b) Să se afle panta tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 1$.

c) În cazul cînd $\alpha = \pi$ să se stabilească domeniul de definiție al funcției f, punctele de discontinuitate, punctele de intersecție ale graficului cu axele de coordonate și concavitatea graficului.

2. Să se dezvolte determinantul

$$\begin{vmatrix} a+b & -a+b-c & b+c \\ a-b-c & a+b & a+c \\ a+c & b+c & -a-b+c \end{vmatrix},$$

iar rezultatul să se scrie sub formă de produs. *(V. Popescu)*

3. Se dau funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = e^x \sin x$. Să se arate că graficele celor două funcții pe același sistem de axe de coordonate au puncte comune (nu se cere construcția graficelor) și să se arate că în fiecare punct comun celor două grafice există cîte o tangentă comună ambelor curbe.

4. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} &2mx + 3y = 21, \\ &3x + my = 15, \\ &21x - 15y = 2m, \\ &x^2 + y^2 + m^2 \geqslant 100. \end{aligned}$$

(C. Ionescu-Țiu)

5. Să se studieze convergența șirului cu termenul general

$$a_n = \left(\frac{(n+k+1)(n+k+2)\dots(n+2k)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}\right)^{n^\alpha}$$

unde k este număr dat, iar $\alpha > 0$ un parametru real. *(Gh. D. Simionescu)*

6. Să se discute sistemul

$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a+3, \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b+3, \\ x + \lambda y + \lambda^2 z = \lambda^3, \end{cases}$$

unde a, b, λ sînt parametri reali. Să se rezolve în cazul cînd este compatibil și determinat. *(Gh. D. Simionescu)*

7. În raport cu sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră mulțimea elipselor

$$(\mathrm{E}) \quad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 k^2} - 1 = 0$$

și mulțimea cercurilor $\mathcal{C}$ $x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$, unde $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ este un parametru variabil și k un număr pozitiv subunitar.

a) Să se arate că tangentele comune la elipsa (E) și cercul $\mathcal{C}$ se mișcă paralele cu direcții fixe, care se vor determina.

b) Tangentele la elipsa (E) duse din centrul cercului intersectează cercul $\mathcal{C}$ în punctele M și M'. Să se afle locul geometric al punctelor de contact al tangentelor duse din M și M' la elipsa (E).

c) Să se arate că nu există valori ale lui λ în așa fel ca elipsa (E) și cercul $\mathcal{C}$ să fie ortogonale. *(I. V. Maftei)*

Anul 1971

Etapa județeană

1. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, crescătoare. Se presupune că pentru orice x_1, x_2, x_3 cu $0<x_1<x_2<x_3<1$ avem

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

a) Să se arate că în orice punct $0<x_0<1$ funcția f este continuă.

b) Se consideră funcția f exprimată prin

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{pentru } 0\leqslant x<1,\\ 1 & \text{pentru } x=1.\end{cases}$$

Să se arate că f are toate proprietățile cerute și nu este continuă în punctul $x=1$. *(D. Voiculescu)*

2. a) Să se arate că dacă matricile pătrate de același ordin A și B verifică $AB=BA$, atunci

$$(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+\ldots+C_n^{n-2}A^2B^{n-2}+C_n^{n-1}AB^{n-1}+B^n.$$

b) Fie

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $(A+B)^n$.

c) Fie $p_1(x)=x+a$, $p_2(x)=x^2+bx+c$. Să se calculeze

$$\begin{vmatrix}1 & p_1(x_1) & p_2(x_1)\\ 1 & p_1(x_2) & p_2(x_2)\\ 1 & p_1(x_3) & p_2(x_3)\end{vmatrix}.$$

3. Să se găsească locul geometric al centrelor cercurilor ortogonale cu două cercuri date. Discuție.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Să se demonstreze că punctele ale căror coordonate îndeplinesc condițiile

$$x=\frac{2ab}{a^2+b^2},\quad y=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

sînt egal depărtate de originea axelor de coordonate.

b) Să se afle această distanță.

2. Se consideră trei puncte A_0, A_1, A_2 pe dreapta d.

a) Să se arate că

$$\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_0}=0.$$

b) Folosind relația demonstrată la punctul a să se arate că dacă $A_0, A_1, \ldots, A_n\in$ d, atunci

$$\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_0}=0.$$

Etapa finală

1. Fie o funcție definită pe segmentul $[-1, 1]$ cu valori reale dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{dacă } x = \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{în toate celelalte puncte.} \end{cases}$$

Să se arate că f este derivabilă în $x = 0$ și să se calculeze $f'(0)$.

2. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir mărginit de numere pozitive. Pentru $\varepsilon > 0$ fie $N_\varepsilon(n)$ numărul acelora dintre numerele $a_1, \ldots, a_n$ care sînt cel mult egale cu ε. Să se arate că dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_\varepsilon(n)}{n} = 1, \text{ atunci } \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 0.$$

3. Să se determine mulțimea valorilor funcției f definită pe $[-\pi, \pi]$ cu valori reale, dată prin $f(x) = \cos 2x + (5 - a^2)\sin x + a^2$, unde a este un număr real.

4. Să se arate că sistemul $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = 0$, $i = 1, \ldots, 4$, $|a_{ij}| = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j, \end{cases}$ a_{ij} numere reale, admite numai soluția nulă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

5. Să se afle locul geometric al simetricului focarului față de o tangentă la parabolă.

LICEE DE SPECIALITATE

1. În raport cu sistemul de axe rectangulare xOy se consideră dreptele

$$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$\Delta_3 : A_3x + B_3y + C_3 = 0,$$

cu condiția să formeze un triunghi.

a) Să se găsească condiția necesară și suficientă ca punctul $M(\alpha, \beta)$ să fie situat în interiorul triunghiului cu laturile Δ_1, Δ_2, Δ_3.

b) Să se deducă de aici că suma distanțelor unui punct interior unui triunghi echilateral la laturile sale este constantă.

c) Reciproca este adevărată? *(I. V. Maftei)*

2. Se consideră funcția

$$g(\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda^2 - \frac{3}{2}}, & \lambda < 1 \\ a\lambda^3 + b\lambda + c, & \lambda \geqslant 1 \end{cases}$$

Să se determine a, b, c astfel ca funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ să fie de două ori derivabilă pe toată axa numerelor reale. *(I. V. Maftei)*

3. Se consideră șirul

$$a_n = \log_{\frac{1}{3}} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{3k(k+1)}.$$

Să se calculeze limita șirului $b_n = n(a_n - 1)$. *(I. V. Maftei)*

4. Fie funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $g(x) = xf(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Presupunînd că g este derivabilă pe $\mathbf{R}$, să se arate că f este derivabilă în punctul 1. Rezultă că f este derivabilă pe $\mathbf{R}$?

Anul 1972

Etapa județeană

1. Fie f o funcție continuă. $f:[-a, a] \to [-a, a]$. Să se arate că există cel puțin un punct $b \in [-a, a]$ astfel încît $f(b) = b$ și cel puțin un punct $c \in [-a, a]$ astfel încît $f(c) = -c$.

2. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{cînd } x \text{ este rațional,} \\ 0 & \text{cînd } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției f. *(G. Gussi)*

3. Se dă familia de drepte $m^2x + 2(m+1)y - (m+2)^2 = 0$, $m \in \mathbf{R}$. Să se determine regiunea din plan acoperită de dreptele acestei familii. *(L. Panaitopol)*

4. Pentru orice două matrici pătrate din ordinul 3 ($A, B \in \mathcal{M}_3$) notăm $[A, B] = AB - BA$. Să se arate că oricare ar fi $A, B, C \in \mathcal{M}_3$ avem

a) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.

b) Dacă notăm cu $D_A : \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_3$, funcția definită prin $D_A(B) = [A, B]$, să se arate că

$$D_A(BC) = D_A(CB) + [D_A(B), C] + [B, D_A(C)].$$

c) Calculîndu-se suma elementelor de pe diagonala principală a lui $[A, B]$, să se arate că $[A, B] \neq U$ în care U este matricea unitate. *(N. Manolache)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se dă șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, unde $x_1 = a$, $a > 1$, și $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$.

a) Să se arate că șirul este monoton și mărginit.

b) Să se calculeze limita șirului. *(R. Gabriel)*

2. Știind că funcția $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ dată prin relația $f(x) = \sin x$ are ca inversă $f^{-1}:[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția dată de relația $f^{-1}(x) = \arcsin x$ sau că funcția $g:[0, \pi] \to [-1, 1]$ dată prin relația $g(x) = \cos x$, are ca inversă $g^{-1}:[-1, 1] \to [0, \pi]$ dată prin relația $g^{-1}(x) = \arccos x$, să se afle inversa funcției $h:\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ dată prin relația $h(x) = \sin x$. *(C. Ottescu)*

3. Între numerele reale x și y există relația

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0.$$

Să se arate că:

a) $\frac{x-2}{y-1} \in [0, +\infty)$;

b) $12 - 8\sqrt{2} \leqslant (x-2)^2 + (y-1)^2 \leqslant 12 + 8\sqrt{2}$;

c) $7 - 2\sqrt{2} \leqslant x + y \leqslant 7 + 2\sqrt{2}$;

d) care este cea mai mică valoare pe care o poate lua produsul $(x-2)(y-1)$ și pentru care valori ale lui x și y se realizează acest minim? *(C. Ionescu-Țiu)*

4. Să se rezolve şi să se discute sistemul

$$\begin{aligned} &2x + 2y + mxy = 5, \\ &(m-1)(x+y) + xy = 1, \quad m \in \mathbf{R}. \\ &3x + 3y - xy = m + 1 \end{aligned}$$

5. Elementele fiecărei linii ale unui determinant sint termenii consecutivi ai unor progresii geometrice. Să se găsească condiţia necesară şi suficientă ca acest determinant să fie 0.

Etapa finală

1. Se dă funcţia $f(x) = x^3$ definită pe $x \in [-1, 1]$. Există oare un şir de polinoame $P_n(x)$ astfel încît şirul de funcţii $f_n(x) = P_n(x^2)$ să verifice egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pentru orice $x \in [-1, 1]$?

2. *Teoremă.* Fie $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata întîi continuă. Ştiind că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Demonstraţie. Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul $[x, x+1]$. Deci există $\xi \in (x, x+1)$ astfel încît

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x + 1 - x},$$

deci $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$ astfel încît, trecînd la limită, $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$. Cînd $x \to \infty$ şi $\xi \to \infty$; atunci din continuitatea lui f' rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

a) Studiaţi funcţia $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$ pentru $x > 0$ şi arătaţi că teorema este falsă.

b) Găsiţi greşeala din demonstraţie.

c) Adăugînd condiţia că $f(x)$ este de două ori derivabilă şi că $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^*$ să se arate că concluzia este adevărată. *(C. Foiaş, L. Panaitopol, C. Ottescu)*

3. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice singulară ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$), diferită de O_2. Să se arate că există o funcţie $f : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ astfel încît $A^n = f(a, b, c, d, n)A$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. *(L. Panaitopol)*

4. a) Să se afle aria maximă a unui paralelogram înscris într-o elipsă.

b) Să se arate că maximul este atins pentru o infinitate de paralelograme.

Anul 1973

Etapa judeţeană

1. Dîndu-se şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relaţia $a_n = \sqrt{a_{n-1}} + k$ (în care se dă $a_0 > 0$; $k > 0$).

a) Să se arate că şirul este convergent.

b) Să se calculeze limita şirului. *(I. Drăghicescu)*

2. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \text{ este raţional,} \\ -x & \text{dacă } x \text{ nu este raţional.} \end{cases}$$

a) Să se arate că f nu este monotonă pe nici un interval.
b) Este f inversabilă?
c) Să se studieze continuitatea lui f. *(C. Niță)*

3. Se dau patru drepte concurente dintre care două sînt perpendiculare. O dreaptă variabilă le taie pe acestea din urmă în A și N și pe celelalte două în M și B.

a) Să se arate că $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NA}$ este constant.

b) Dar dacă ON și OA nu sînt perpendiculare, se menține afirmația de la punctul precedent?

4. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții periodice care îndeplinesc condiția $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0$. Să se arate că

a) f și g au perioadele egale.
b) f și g sînt egale.

5. Fie $\mathcal{M}_3$ mulțimea matricilor cu trei linii și trei coloane de elemente reale.
a) Să se determine matricile A din $\mathcal{M}_3$ astfel încît $AX = XA$ pentru orice matrice X cu $\det X \neq 0$.
b) Generalizare.

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se dau punctele $O(0, 0)$ și $A(1, 0)$. Să se determine coordonatele celorlalte patru puncte care împreună cu cele date constituie vîrfurile unui hexagon regulat convex. *(L. Pîrșan)*

2. Se consideră polinomul cu coeficienți complecși

$$a(X) = X^3 + pX^2 + qX + r.$$

a) Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile polinomului dat, să se determine p, q și r astfel încît polinomul avînd ca rădăcini pe x_1^2, x_2^2, x_3^2 să coincidă cu polinomul dat.
b) Să se arate că polinoamele astfel determinate verifică relația

$$a(X^2) = -a(X)a(-X). \quad (D. \ Radu)$$

Etapa finală

1. Fie $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ un număr fixat și $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă avînd următoarele proprietăți:

$$f''(x) \neq 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R};$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există c depinzînd de x astfel că $f(x + a) - f(x) = af'(c)$, $f'(x + a) - f'(x) = af''(c)$.
Se cere:
a) să se arate că corespondența $x \to c$ este o funcție notată cu $c(x)$;
b) f are derivată de orice ordin și pentru orice n natural,

$$f^{(n)}(x + a) - f^{(n)}(x) = af^{(n+1)}(c(x)). \quad (L. \ Panaitopol)$$

2. Fie $\mathcal{C}$ un cerc fix de centru O, pe care se iau două puncte fixe A și B astfel încît $m(\widehat{AOB}) = 90°$. Fie două cercuri variabile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ tangente în A (respectiv B) cercului $\mathcal{C}$ și tangente între ele în punctul M. Se cere locul geometric al punctului M. *(L. Panaitopol)*

3. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{x} \text{ cînd } x \neq 0, \\ 0 \text{ cînd } x = 0. \end{cases}$$

Să se arate că deşi f nu este continuă în 0, pentru orice interval închis $I \subset \mathbf{R}$, $f(I)$ este un interval închis. *(C. Niţă)*

4. Fie A o matrice cu n linii şi m coloane $(m < n)$. Se notează cu A^τ matricea transpusă (adică matricea obţinută prin schimbarea liniilor în coloane). Să se arate că $\det(AA^\tau) = 0$. *(L. Panaitopol)*

5. Fie (a_n) un şir mărginit verificînd inegalitatea

$$a_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}).$$

a) Să se arate că şirul (A_n) definit de relaţia $A_n = \max(a_n, a_{n+1})$ este convergent.

b) Să se deducă de aici că şirul (a_n) este convergent.

Anul 1974

Etapa judeţeană

1. Fie funcţiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, f derivabilă în x_0 şi g continuă în x_0, $x_0 \in \mathbf{R}$, cu proprietatea că produsul lor $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ este funcţie derivabilă în x_0. Se face următoarea afirmaţie: funcţia g este de asemenea derivabilă în x_0.

Demonstraţie.

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0},$$

de unde

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

sau

$$h'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Am folosit faptul că h este derivabilă în x_0; de asemenea şi g este continuă în x_0, deci $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$; $f(x_0)$ fiind o constantă rezultă că $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ există şi este finită, deci g este derivabilă în x_0.

a) Studiaţi derivabilitatea funcţiei $h(x) = x|x|$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Comparaţi rezultatul cu afirmaţia făcută la început.

c) Formulaţi o condiţie în plus astfel ca afirmaţia să fie adevărată. *(C. Ottescu)*

2. Se consideră șirul de termen general

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}.$$

Pentru fiecare k natural se consideră șirul $(b_n^{(k)})$,

$$b_n^{(k)} = \frac{n}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{k-1} + (n-k+1)\sqrt{k}}.$$

a) Să se arate că pentru orice $k \leqslant n$ avem $a_n < b_n^{(k)}$.

b) Folosind definiția limitei să se arate că șirul (a_n) are limită *(M. Țena)*

3. Un pătrat $ABCD$ de latură variabilă are punctele A și B respectiv pe axa Ox și Oy și centrul său P de abscisă o constantă. Știind că pătratul se află în cadranul întîi:

a) să se demonstreze că centrul pătratului este fix;

b) să se găsească locul geometric al punctelor C și D;

c) care este latura maximă a pătratului $ABCD$ și care este cea minimă?

(C. Ottescu)

4. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}$.

5. Căutați matricile X care verifică relația $AX - XA = E$, unde A este o matrice de ordinul 2 și E matricea unitate de ordinul 2.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Să se determine mulțimea funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite astfel încît $f^2(x) = x^2$.

b) Care dintre funcțiile de mai sus sînt continue în orice punct?

c) Care dintre funcțiile de mai sus sînt derivabile în orice punct?

2. Să se găsească polinoamele care au proprietatea că $|P(x)| \leqslant x$ pentru orice x real.

3. Se consideră polinoamele P_n definite recurent prin relațiile

$$P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X), \quad P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X.$$

a) Ce grad are P_n?

b) Ce coeficient are termenul de grad maxim în P_n?

c) Care este valoarea lui $P_n(1)$?

Etapa finală

1. Se dau două șiruri de termen general a_n și respectiv b_n astfel încît

$$a_0 < b_0, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + 3b_{n-1}}{4},$$

$$b_n = \frac{3a_{n-1} + 2b_{n-1}}{5}.$$

Se consideră șirurile de termen general c_n respectiv c'_n definite astfel:

$$c_n = \begin{cases} a_n \text{ pentru } n \text{ par} \\ b_n \text{ pentru } n \text{ impar} \end{cases}, \quad c'_n = \begin{cases} a_n \text{ pentru } n \text{ impar,} \\ b_n \text{ pentru } n \text{ par.} \end{cases}$$

a) Şirul de termen general c_n este crescător şi cel de termen general c_n' este descrescător.

b) Şirurile (a_n) şi (b_n) au aceeaşi limită.

c) Să se afle această limită. *(N. Micu)*

2. Fie funcţia f definită pe $(0, \infty)$, cu valori în $\mathbf{R}$.

a) Să se arate că dacă $\frac{f(x)}{x}$ este descrescătoare, atunci are loc relaţia (1) $f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2)$ pentru orice $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

b) Să se arate că dacă f verifică relaţia (1) şi în plus pentru orice $t \in [0, 1]$ şi $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$, atunci $\frac{f(x)}{x}$ este descrescătoare.

c) Dîndu-se funcţia $g(x) = e^{f(x)}$ unde $\frac{f(x)}{x}$ este descrescătoare, să se arate că $4g(x) \leqslant [g(x-u) + g(u)]^2$ pentru orice $u \in (0, x)$.

3. În triunghiul ABC cu laturile $c < a < b$ două puncte mobile M şi N pornesc din A, respectiv B, parcurgînd cu aceeaşi viteză triunghiul în sensul A, B, C pînă cînd M ajunge din nou în A şi N din nou în B. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului (MN). *(C. Ottescu)*

4. a) Să se determine matricile formate din 0 şi 1 care prin înmulţire să transforme matricea coloană $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ în matricea $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

b) Să se determine o matrice care să transforme prin înmulţire matricea coloană $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ în matricea coloană $\begin{pmatrix}3\\1\\2\\4\end{pmatrix}$. *(Lucreţia Carp)*

Anul 1975

Etapa judeţeană

1. Să se arate că orice număr iraţional scris cu zecimale are:

a) cel puţin o cifră care se repetă de o infinitate de ori;

b) cel puţin două cifre care se repetă de o infinitate de ori;

c) există numere iraţionale pentru care numai două cifre se repetă de o infinitate de ori.

2. Fie A, B, C matrici pătratice de ordinul 2 astfel încît

$$A^2 = BC, \quad B^2 = CA, \quad C^2 = AB.$$

a) Să se arate că $A^3 = B^3 = C^3$.

b) Daţi exemple de trei matrici A, B, C diferite, care satisfac simultan condiţiile din ipoteză. *(L. Panaitopol)*

3. Fie şirul $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + k}{n^3 + k}$; $n \in \mathbf{N}$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$. *(A. Ghioca)*

4. a) Fiind date două drepte concurente D_1 şi D_2 în plan, determinaţi măsura unghiului lor $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încît să aibă loc următoarea proprietate: fie A un

punct din plan; A_1 simetricul lui A față de D_1; A_2 simetricul lui A_1 față de D_2; A_3 simetricul lui A_2 față de D_1 și A_4 simetricul lui A_3 față de D_2. Punctul A_4 coincide cu A.

b) Dîndu-se familia (F) de drepte $p^2x + 2py + 2 = 0$, p real, să se arate că prin fiecare punct $M_0(x_0, y_0)$, unde $x_0 < 0$, trec două drepte diferite din familie.

c) Arătați că dacă aceste drepte satisfac punctele a și b, atunci M_0 se află pe dreapta $2x + 1 = 0$. *(V. Matrosenco, C. Ottescu)*

5. Un rezervor este umplut la o sursă cu debit variabil între orele 8 și 12. Același rezervor este golit prin scurgere a doua zi tot între orele 8 și 12. Să se arate că există o oră h în ambele zile, la care apa este la același nivel. *(C. Ottescu)*

LICEE INDUSTRIALE ȘI ECONOMICE

1. Se consideră funcția $f:[0, \infty) \to \mathbf{R}$ dată de relația $f(t) = [t] \cdot \left|\cos (2t+1) \frac{\pi}{2}\right|$, $[t]$ este partea întreagă din t. Să se studieze:

a) continuitatea funcției f;

b) derivabilitatea funcției f. *(S. Anița)*

2. Se consideră șirul de funcții

$$f_0(x) = e^x,$$
$$f_1(x) = f_0(x + h) - f_0(x),$$
$$\dots$$
$$f_n(x) = f_{n-1}(x + h) - f_{n-1}(x),$$

unde h este o constantă reală.

a) Să se exprime $f_n(x)$ cu ajutorul lui $f_0(x)$ și h.

b) Să se studieze convergența șirului cu termenul general

$$a_n(x) = \frac{f_n(x)}{e^x}$$ *(B. B. Ionescu)*

Etapa finală

1. Orice punct de pe o elipsă este vîrful unui triunghi și numai al unuia înscris în elipsă avînd centrul de greutate în centrul de simetrie al elipsei.

b) Să se arate că toate aceste triunghiuri au aceeași arie.

c) Se cere locul geometric al mijloacelor laturilor acestor triunghiuri. *(N. Micu)*

2. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) Să se arate că dacă f este periodică, atunci și derivata ei f' este periodică și funcțiile f și f' au aceeași perioadă principală.

b) Dacă f' este periodică, rezultă că f este periodică? *(S. Anița, L. Panaitopol)*

3. Fie un determinant de ordinul 3 cu elemente reale a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, astfel încît $|a_{ij}| = i + j$ dacă $i \neq j$ și $|a_{ij}| = i$ dacă $i = j$. Să se arate că determinantul este nenul. *(L. Panaitopol)*

4. Fie (a_n) un șir de numere reale astfel încît: pentru orice n natural, $n \geqslant 2$, există un k natural, $\frac{n}{2} \leqslant k < n$, pentru care $a_n = \frac{a_k}{2}$. Să se arate că șirul este convergent către 0. *(R. Gologan)*

5. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, f neconstantă și $f(x + rT) = f(x)$ oricare ar fi x real și oricare ar fi r rațional, $T > 0$ dat. Să se arate că f este discontinuă în fiecare punct.

1. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\pi} (\cos a_1x \cos a_2x \dots \cos a_nx)^{\frac{1}{(x-\pi)^2}}$, $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ fiind numere întregi, pare, nenule.

2. Se consideră polinomul $P(x)$ de gradul n cu proprietatea

$$P(\cos \alpha) = \cos n\alpha, \quad (\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

a) Să se arate că $P(1) = 1$, $P(-1) = (-1)^n$.
b) Să se determine coeficientul lui x^n.
c) Să se determine rădăcinile ecuațiilor

$$P(x) - 1 = 0, \quad P(x) + 1 = 0.$$

d) Să se deducă relația $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. *(E. Constantinescu)*

Anul 1976

Etapa județeană

1. Se dau $a_0, b_0, c_0 \in \mathbf{R}$. Se definesc șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, $(c_n)_{n\geq 0}$ așa încît $a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n)$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n)$, $c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Să se arate că șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, $(c_n)_{n\geq 0}$ sînt convergente către $\frac{1}{3}(a_0+b_0+c_0)$.
(E. Onofraș)

2. Să se calculeze $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbf{N}^*$. *(A. Doboșan)*

3. Se consideră, pentru fiecare λ real, tripletul de drepte

$$(a - \lambda)x + by + c = 0,$$
$$bx + (c - \lambda)y + a = 0,$$
$$cx + ay + b - \lambda = 0,$$

în care a, b, c sînt numere reale pozitive fixate.

a) În ce caz cele trei drepte sînt paralele?

b) Dacă a, b, c sînt astfel încît nu putem avea cazul de la punctul a pentru nici un λ, să se arate că există trei triplete distincte formate fiecare din trei drepte concurente.

c) Să se arate că în cazul de la punctul b cele trei puncte de concurență obținute sînt distincte. *(V. Matrosenco)*

4. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ un șir de numere reale diferite de 0. Să se arate că acest șir formează o progresie aritmetică, dacă și numai dacă pentru orice $3 \leq k \leq n$ avem relația

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \dots + \frac{1}{x_{k-1}x_k} = \frac{k-1}{x_1x_k}.$$

5. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + a^x)}{\ln(1 + b^x)}$, unde $a > 0$, $b > 0$.

6. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

a) Să se arate că f are cel mult două puncte de continuitate.

b) Să se arate că f are cel mult un punct de derivabilitate. Care este relația dintre a și b în ipoteza existenței acestui punct?

c) Construiți o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuă numai în punctele $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ și discontinuă pe $\mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}$.

d) Construiți o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabilă în $x = 1$ și $x = 2$ și discontinuă pe $\mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$. *(S. Brener)*

Etapa finală

1. Fie șirurile reale a_n, $b_n = [a_n]$, $c_n = a_n - b_n$, unde $[a_n]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a_n, adică cel mai mare întreg mai mic sau egal cu a_n. Care din următoarele afirmații sînt adevărate?

a) (a_n) crescător și convergent $\Rightarrow (b_n)$ și (c_n) convergente;

b) (a_n) convergent $\Rightarrow (b_n)$ și (c_n) convergente;

c) există (a_n) convergent astfel încît (b_n) să fie divergent;

d) există (a_n) divergent astfel încît (b_n) să fie convergent. *(H. Banea)*

2. Se dă șirul $(a_n)_{n \geq 2}$, $a_n = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} a_{n-i}$.

a) Să se arate că șirul este periodic pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $2 \leq k \leq n$;

b) Pentru $k = 2$, să se arate că termenul general al șirului poate fi pus sub forma $a_n = a \cos nx + b \sin nx$, unde a și b depind numai de a_1 și a_2, iar x este un număr din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, independent de a_1, a_2 și n. *(I. Gherșașie)*

3. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție neconstantă care satisface egalitatea $f(x + y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$ oricare ar fi x, y reali.

a) Să se arate că f este impară și că $f(\mathbf{R}) \subset (-1, 1)$.

b) Dacă f este continuă în punctul 0, să se arate că f este continuă pe $\mathbf{R}$.

c) Să se arate că dacă f este derivabilă în 0, atunci ea este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

(D. Radu)

4. În planul raportat la axele dreptunghiulare Ox și Oy se consideră un cerc fix de centru $C(a, b)$ și de rază r și o dreaptă variabilă d ce trece prin origine și face cu axa Ox unghiul de măsură t. Se desemnează prin D mulțimea punctelor din plan de pe cerc sau din interiorul cercului, adică $D = \{P \mid CP \leq r\}$. Se notează cu $L(t, P)$ mărimea segmentului orientat $\overrightarrow{OQ}$, unde Q este proiecția punctului P pe dreapta d. Fie funcția reală $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, definită de relația $f(t) = \max L(t, P)$, adică $f(t)$ reprezintă cea mai mare valoare pentru $L(t, P)$ cînd P parcurge mulțimea D. Să se arate că:

a) f este mărginită;

b) pentru orice $P(x, y) \in D : x \cos t + y \sin t \leq f(t)$;

c) dacă t_1, t_2, t_3 din intervalul $[0, 2\pi]$ satisfac inegalitățile $t_1 < t_2 < t_3$, $t_2 - t_1 < \pi$, $t_3 - t_2 < \pi$, atunci

$$\begin{vmatrix} f(t_1) & \cos t_1 & \sin t_1 \\ f(t_2) & \cos t_2 & \sin t_2 \\ f(t_3) & \cos t_3 & \sin t_3 \end{vmatrix} \geq 0. \quad \textit{(I. Beju)}$$

5. Să se construiască o funcție elementară ce are ca domeniu maxim de definiție reuniunea tuturor intervalelor de forma $\left(\frac{1}{12n+1}, \frac{1}{12n-1}\right)$ oricare ar fi n din mulțimea $\mathbf{Z}^*$. (Se reamintește că funcția $f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } 0 < x < 1, \\ 2x, & \text{pentru } 2 < x < 3, \end{cases}$ nu este o funcție elementară.) *(I. Cuculescu)*

Anul 1977

Etapa județeană

1. Fie A_1 și A_2 două mulțimi așa încît $A_1 \subset A_2 = \mathbf{N}$ și $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, există $a, b \in \mathbf{N}$, $a > n$, $b > n$ așa încît $\{a, b, a+b\} \subset A_1$ sau $\{a, b, a+b\} \subset A_2$. *(M. Cavachi)*

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a^p + p & a^p & a^p \\ a^p & a^p + p & a^p \\ a^p & a^p & a^p + p \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{N}$. Să se determine A^n, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$. Dacă $p = 0$, să se calculeze det (A^n). *(I. Nănuți, V. Drulă)*

3. Se consideră următoarele proprietăți ce le poate avea un șir de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$:

$P_1 : \lim\limits_{n \to \infty} n(a_{n+1} - a_n) = a$, a finit; $P_2 : \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = b$, b finit;

$P_3 : (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent. Să se arate că:

a) P_1 nu implică P_3;

b) P_2 nu implică P_3;

c) P_1 și P_2 implică P_3. *(L. Panaitopol)*

4. Fie funcțiile $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, unde $f_1(x) = -x^2 + 2x$, iar pentru orice $n \in \mathbf{N}$ și $n \geqslant 2$, $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Să se demonstreze că pentru orice valoare a lui $x \in [0, 1]$ șirul $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ este convergent și să se reprezinte grafic funcția $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definită prin $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. *(P. Dályay)*

Etapa finală

1. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$. Să se arate că oricare ar fi punctul $M(\alpha, \beta)$ de pe dreapta AB, cu $\alpha \notin [a, b]$ există cel puțin un punct $x_0 \in (a, b)$ așa încît tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 să treacă prin M. *(E. Popa)*

2. Se consideră o matrice pătrată A de ordinul n și A' matricea care se obține prin schimbarea liniilor respective în coloane. Dacă suma elementelor matricii AA' este 0, atunci det $(A) = 0$. *(M. Dădîrlat)*

3. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele naturale $n, k \in \mathbf{N}^*$, $k \leqslant n$, există inegalitatea: $\ln C_n^k \leqslant k(n-k)$. *(D. Anca)*

4. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geqslant 0}$ dat de relația de recurență $a_{n+1} - 4a_n + 4a_n^2 = 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Dacă $a_{1977} = -1$, să se afle toate valorile lui a_0. *(N. Cavachi)*

Anul 1978

Etapa județeană

1. Este sau nu adevărată propoziția: fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de numere naturale cu proprietatea că $x_{x_n} = n^4$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$? Argumentație. *(S. Rădulescu)*

2. Se consideră o matrice pătrată de ordinul n cu elemente reale, $A = (a_{ij})$. Fie X matricea pătrată de ordinul n ce are toate elementele egale cu numărul real x. Să se arate că

$$\det(A + X)\det(A - X) \leqslant (\det A)^2. \quad (M.\ Dădîrlat)$$

3. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții așa încît f este continuă, g monotonă iar f și g coincid pe $\mathbf{Q}$. Atunci ele coincid peste tot. *(S. Popa)*

4. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă, x_0 un punct din intervalul $[a, b]$ și $y_0 > f(x_0)$. Să se arate că există un polinom P de gradul 2 așa încît $P(x_0) < y_0$ și $f(x) < P(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$. *(I. Rașa)*

Etapa finală

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ dacă x este irațional și $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q^3}$ dacă $p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$ și fracția $\frac{p}{q}$ este ireductibilă. Să se arate că f are derivată în fiecare punct irațional x_0 de forma $x_0 = \sqrt{k}$, $k \in \mathbf{N}$. *(R. Gologan)*

2. Presupunem că $(c_n)_{n\geqslant 1}$ este următorul șir de numere naturale: fiecare c_n este egal cu cel mai mic întreg de forma 4^k care este mai mare sau egal cu n. Punem $b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n - \frac{1}{5}$.

a) Exprimați $\frac{b_n}{n^2}$ în funcție de $\frac{c_n}{n}$.

b) Arătați că pentru oricare număr real $d \in \left[\frac{4}{5}, \frac{5}{4}\right]$ există un șir de numere naturale $n_k \to \infty$ așa încît $\lim\limits_{n_k\to\infty} \frac{b_{n_k}}{n_k^2} = d$. *(I. Tomescu)*

3. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x\,|x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale fixate. Indicați condiția ca funcția f să fie derivabilă pe întreaga dreaptă reală.

4. Considerăm o matrice 3×3 cu elemente inițial necunoscute. Două persoane A și B dau alternativ cîte o valoare reală pentru cîte un element al matricii și acea valoare rămîne fixată. Să se arate că oricare ar fi persoana care începe jocul, persoana A poate proceda astfel încît matricea finală să fie singulară. *(S. Popa)*

Anul 1979

Etapa județeană

1. Fie A, B două matrici pătratice de ordinul 3, cu elementele numere reale, așa încît $\det(A) = \det(B) = \det(A + B) = \det(A - B) = 0$. Să se arate că $\det(xA + yB) = 0$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$. *(M. Martin)*

2. Fie $P_n = a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n \in \mathbf{R}[X]$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că dacă o funcție $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$ are proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(\alpha) = f(\alpha)$, $(\forall)\, \alpha \in [0, 3]$, atunci f este funcție polinomială. *(R. Gologan)*

3. Să se arate că un șir $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale care verifică condiția $(n+1)x_{n+2} - nx_{n+1} - x_n = 0$, oricare ar fi $n \geq 0$, este convergent. *(S. Rădulescu)*

4. Se consideră o funcție mărginită $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Să se arate că $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ există polinoame P_n, Q_n de gradul n, cu coeficienți reali, așa încît $P_n(x) \leq f(x) \leq Q_n(x)$, $(\forall) x \in [a, b]$. *(D. Bușneag)*

Etapa finală

1. Fie $A \subset \mathbf{N}$. Notăm $a_A(n)$ numărul elementelor lui A mai mici sau egale cu $n \in \mathbf{N}$ și cu $b_A(n) = \dfrac{1}{n} a_A(n)$.

a) Să se arate că oricare ar fi $c \in [0, 1]$ există o mulțime de numere naturale A așa încît $\lim\limits_{n\to\infty} b_A(n) = c$.

b) Să se construiască o mulțime $A \subset \mathbf{N}$ pentru care șirul $b_A(n)$ are două subșiruri convergente cu limitele respectiv $\dfrac{1}{2}$ și $\dfrac{1}{3}$. *(R. Gologan)*

2. Să se arate că nu există funcții continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că $f(x)$ este rațional dacă și numai dacă $f(x+1)$ este irațional oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. *(L. Panaitopol, H. Pop)*

3. Fie M mulțimea matricilor pătratice de numere reale $A = (a_{ij})$ de ordinul 3 cu proprietatea că $a_{1i_1} + a_{2i_2} + a_{3i_3} = 0$ pentru orice permutare (i_1, i_2, i_3) a mulțimii $\{1, 2, 3\}$.

a) Să se arate că pentru orice $A \in M$ avem $\det A = 0$.

b) Să se demonstreze că există patru matrici E_1, E_2, E_3, E_4 din mulțimea M, așa încît orice element A din M se scrie în mod unic sub forma $A = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4$, unde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$. *(M. Martin)*

4. Să se arate că oricare ar fi matricea pătratică de ordinul n cu elemente numere reale are loc inegalitatea $\det(I + A^2) \geq 0$, unde I este matricea unitate de ordinul n.

Anul 1980

Etapa județeană

1. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că ecuația $x^2 = u$ nu are soluții în mulțimea permutărilor lui $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. 1) Se consideră un determinant de ordinul n.

a) Care este semnul produsului elementelor de pe diagonala neprincipală în dezvoltarea determinantului (adică semnul lui $a_{1n}a_{2n-1} \quad a_{n1}$).

b) Să se arate că dacă mai mult de $n^2 - n$ elemente ale determinantului sînt nule, atunci determinantul este nul.

2) Fie $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbf{R})$ mulțimea matricilor pătratice cu elemente numere reale de tipul $n \times n$ și I_n matricea unitate de ordinul n. Există două matrici $A, B \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbf{R})$, $A \neq B$, așa încît $AB - BA = I_n$?

3. Se consideră șirul de numere reale definit astfel:

$$x_1 = a > 0,\ x_{n+1} = \frac{x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n}{n},\quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Este acest șir mărginit?

4. Se consideră funcția $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ satisfăcînd condițiile:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x(f(x) - 1) = 1$;

b) $f(1) = 2$;

c) $(x + 2)f(x + 2) - 2(x + 1)f(x + 1) + xf(x) = 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

i) Să se arate că există $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ și $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$.

ii) Știind că există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, să se calculeze această limită.

(D.M. Bătinețu-Giurgiu, I. V. Maftei)

Etapa finală

1. Se consideră o matrice pătratică de ordinul 4 avînd toate elementele numere reale și astfel încît trei și numai trei din elementele ei să fie nule. Se notează cu N numărul termenilor nenuli din dezvoltarea determinantului acelei matrici. Care sînt valorile posibile ale lui N?

2. Fie A, B două matrici pătrate de ordinul $n (n \geqslant 1)$ avînd elementele numere reale și $C = AB - BA$. Presupunem că există φ, $\varphi \neq k\pi$, k întreg, astfel încît $A^2 + B^2 = (\operatorname{ctg} \varphi)C$. Să se arate că $(\sin n\varphi) \det C = 0$, unde $\det C$ reprezintă determinantul matricii C. *(I. V. Maftei)*

3. a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e$.

b) Un șir $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de numere reale are proprietatea că $x_{n+1} = (n + 1)x_n - 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$. Să se determine x_1 astfel încît șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ să fie convergent.

4. Se consideră o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $|f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{|x - y|}$, $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$. Să se arate că:

a) $(\exists)\ a \in \mathbf{R}_+$ astfel încît $|x| \leqslant a$ să implice $|f(x)| \leqslant a$;

b) $(\exists) u \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(u) = u$. *(S. Rădulescu)*

Anul 1981

Etapa județeană

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ de numere reale astfel încît $a^2 + b^2 < 1$. Să se arate că puterile A^n, $n \geqslant 1$, sînt de forma $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, unde șirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sînt convergente la zero.

2. Un determinant D de ordinul 3 are elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{1}{2}$, iar suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană egală cu 1. Să se arate că $D > 0$. *(M. Bencze)*

3. Se consideră un sistem ortogonal xOy, punctul $A(0, -1)$ și dreptele $D_1 : x - y + 1 = 0$, $D_2 : 2x - y = 0$. Să se determine punctele $B \in D_1$, $C \in D_2$ astfel încît dreptele D_1 și D_2 să fie mediane în triunghiul ABC.

4. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un şir de numere reale astfel încît $a_{n+1}+a_{n-1}=\sqrt{2}\,a_n$ pentru orice întreg $n\in\mathbf{N}^*$. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este mărginit.

(D. M. Bătineţu-Giurgiu)

Etapa finală

1. Fie $\mathcal{M}$ mulţimea matricilor pătrate de ordinul 2 cu elemente reale. Pentru orice $A, B\in\mathcal{M}$ se notează $[A, B]=AB-BA$. Să se arate că oricare ar fi $A, B, C, D\in\mathcal{M}$, matricea $[A, B]^2$ este de forma λI_2, cu $\lambda\in\mathbf{R}$, I_2 matricea unitate de ordinul 2 şi că $[A, B]\cdot[C, D]+[C, D]\cdot[A, B]$ comută cu orice matrice din $\mathcal{M}$. *(C. Năstăsescu)*

2. Se consideră elipsa (E) de ecuaţie $x^2+4y^2-4=0$ şi mulţimile $A_1=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2 \mid (x-2)^2+(y-4)^2=1\}$, $A_2=\left\{(x, y)\in\mathbf{R}^2 \mid (\exists)(a, b)\in(\mathrm{E})\right.$ astfel încît $\left.(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{1}{4}\right\}$. Să se determine distanţa $d(A_1, A_2)$ dintre mulţimile A_1, A_2, dacă se defineşte $d(A_1, A_2)=\inf\limits_{\substack{x\in A_1\\ y\in A_2}} d(x, y)$. *(I. V. Maftei, M. Nica)*

3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_p\in\mathbf{R}$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_p\in[0, 1]$, cu $b_i\leqslant b_{i-1}$ pentru orice $2\leqslant i\leqslant p$. Se consideră şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin

$$\alpha_0=\max_{1\leqslant k\leqslant p}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \text{ şi } \alpha_n=\max_{1\leqslant k\leqslant p}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^n\right| \text{ pentru } n\in\mathbf{N}^*.$$

a) Să se arate că $\alpha_1\leqslant\alpha_0$.

b) Să se deducă proprietatea că şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton şi mărginit şi să se calculeze limita sa. *(V. Preda)*

4. Să se arate că:

a) dacă $f:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}_+$ este o funcţie continuă şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$;

b) rezultatul de la punctul a nu rămîne valabil pentru o funcţie continuă $f:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}_+^*$. *(S. Rădulescu)*

Anul 1982

Etapa judeţeană

1. Fie ABC un triunghi echilateral fixat şi d o dreaptă variabilă din planul triunghiului. Fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile vîrfurilor A, B, C pe dreapta d. Să se determine minimul sumei $AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2$ în funcţie de lungimea laturii triunghiului şi să se precizeze mulţimea dreptelor din planul triunghiului care realizează acest minim. *(M. Chiriţă)*

2. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de numere reale nenule. Pentru fiecare $n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}$ considerăm dreptele h_n de ecuaţie $a_nx+a_{n-1}y+1=0$.

a) Să se determine şirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ pentru care h_n şi h_{n+1} sînt ortogonale oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}$ şi să se arate că aceste şiruri sînt divergente.

b) Să se determine şirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ pentru care h_n şi h_{n+1} sînt paralele oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}$ şi să se precizeze dacă aceste şiruri sînt convergente sau nu.

c) Se consideră punctul $M_0(1, 1)$. Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este astfel încît distanţa de la M_0 la h_n este 1 pentru orice $n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}$, să se precizeze cîte drepte distincte există printre dreptele h_n, $n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}$. *(C. Udrişte)*

3. Se consideră o funcție $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ despre care se știe că $f(x) \cdot e^{f(x)} = x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}_+$.

a) Să se demonstreze că f este monotonă.

b) Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

c) Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\ln x} = 1$. *(L. Panaitopol)*

4. Matricile pătratice A, B, C de același ordin, cu elemente numere reale, satisfac relația $ABC + AB + BC + AC + A + B + C = 0$. Să se demonstreze că dacă A și $B + C$ comută, atunci și matricile A și BC comută. Să se demonstreze și reciproca. *(I. V. Maftei)*

Etapa finală

1. Matricile pătrate A și B sînt de același ordin și satisfac relațiile $AB - B^2A^2 = U$, $A^3 + B^3 = 0$, unde U este matricea unitate, iar 0 este matricea zero. Să se arate că dacă una dintre matricile A sau B este inversabilă, atunci există relația $BA - A^2B^2 = U$. Să se demonstreze că egalitatea are loc și fără ipoteza de inversabilitate a lui A sau B. *(I. V. Maftei)*

2. Se consideră dreapta variabilă

$d_m : (m^2 + 2m + 1)x + (m^2 + 2m - 1)y + m^2 + 2m - 1 = 0, \quad m \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că $\{(d_m) \mid m \in \mathbf{R}\}$ nu este un fascicol de drepte.

b) Fie $D = \bigcup\limits_{m\in\mathbf{R}} d_m$. Să se determine infimumul expresiei $(x - 2)^2 + (y + 2)^2$ cînd parametrul $M(x, y)$ aparține mulțimii D. *(C. Udrişte)*

3. a) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Să se arate că proprietatea $f \circ f \circ f = 1_{\mathbf{R}}$ implică $f = 1_{\mathbf{R}}$. Generalizare.

b) Să se dea un exemplu de funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ diferită de $1_{\mathbf{R}}$ care verifică relația $f \circ f \circ f = 1_{\mathbf{R}}$. *(P. Dályáy)*

4. Fie $P_0, P_1, P_2, \quad P_n \in \mathbf{R}[X]$ și funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = P_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mid P_k(x) \mid$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Să se arate că dacă f este injectivă, atunci f este surjectivă. *(S. Rădulescu)*

Anul 1983

Etapa județeană

1. Fie matricile $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A_a = \begin{pmatrix} \cos 2a\pi & -\sin 2a\pi \\ \sin 2a\pi & \cos 2a\pi \end{pmatrix}$ cu $a \in \mathbf{R}$. Să se arate că:

a) există un număr întreg $k > 0$ astfel încît $A_a^k = I$ dacă și numai dacă $a \in \mathbf{Q}$;

b) fiind dat un număr natural $n > 0$, avem

$n = \min \{k > 0 \mid A_a^k = I\} \Leftrightarrow a = \dfrac{b}{n}$, cu $b \in \mathbf{Z}$, $(b, n) = 1$. *(I. D. Ion)*

2. Să se determine toate perechile (p, q) de numere reale pentru care are loc relația

$$2^{px} + 3^{qx} = p \cdot 2^{x+p-1} + q \cdot 3^{x+q-1},$$

oricare ar fi x număr real. *(I. V. Maftei, M. Bălună)*

3. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere reale care satisfac relația de recurență $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4$. Dacă $0 < x_0 < 1$, să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent și să se calculeze limita sa. *(M. Rădulescu)*

4. In plan se fixează reperul cartezian xOy şi se dă mulţimea

$$E = \left\{(x, y) \mid x = \frac{(1+t)^2}{4t - t^2},\ y = \frac{1+6t}{4t - t^2},\ t \in \mathbf{R}^* \setminus \{4\}\right\}.$$

a) Să se arate că E este reuniunea a două semidrepte.

b) O semidreaptă h din E are originea A pe axa Oy. Să se determine ecuaţiile semidreptelor cu originea în A, laturi ale unui unghi cu măsura egală cu 60°, pentru care h este bisectoare. *(C. Udrişte)*

Etapa finală

1. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$ şi $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $|a| > n - 1$. Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ este o matrice ale cărei elemente sînt definite prin $a_{ij} = a$, dacă $i = j$ şi $a_{ij} = \varepsilon_{ij}$ dacă $i \neq j$, unde $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 1\}$, să se arate că $\det A \neq 0$.

2. Se dau numerele $a, b \in (0, 1/2)$ şi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă care satisface condiţia $f(f(x)) = af(x) + bx$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Să se arate că $f(0) = 0$. *(M. Piticari)*

3. Fie A o mulţime de numere reale şi $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Prin definiţie spunem că A şi f satisfac proprietatea (P) dacă oricare ar fi şirul $(x_j)_{j \geqslant 1}$ de numere din A, există un subşir al său $(x_{j_k})_{k \geqslant 0}$ şi un număr $x_0 \in A$ astfel încît limita şirului $(f(x_{j_k}))_{k \geqslant 0}$ să existe şi să satisfacă inegalitatea $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{j_k}) \geqslant f(x_0)$.

a) Să se construiască un exemplu de mulţime infinită A şi de funcţie neconstantă $f : A \to \mathbf{R}$ pentru care are loc proprietatea (P).

b) Să se demonstreze că A şi f satisfac proprietatea (P) dacă şi numai dacă există un punct x_0 de minim pentru f relativ la A. *(V. Preda)*.

4. Într-un plan raportat la un sistem de coordonate xOy se consideră dreapta D de ecuaţie $y = mx$. Să se arate că există o infinitate de puncte P avînd ambele coordonate numere întregi şi care nu aparţin dreptei (D), astfel încît simetricele lor P' faţă de dreapta D să aibă de asemenea ambele coordonate numere întregi, dacă şi numai dacă $m \in \mathbf{Q}$. *(I. Tomescu)*

Anul 1984

Etapa judeţeană

1. Să se arate că orice şir $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de numere reale cu proprietatea că $x_0 > 0$ şi $x_{n+1} x_n - 2x_n = 3$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, este convergent. *(D. M. Bătineţu-Giurgiu)*

2. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţii periodice de perioade a şi respectiv b aşa încît $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = u \in \mathbf{R}$ şi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = v \in \mathbf{R}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f((3+\sqrt{7})^n a)}{g((2+\sqrt{2})^n b)}$.

(D. M. Bătineţu-Giurgiu, I. V. Maftei)

3. Fie A şi B două matrici de ordinul $n \geqslant 2$ cu elemente numere reale şi cu proprietatea că $A^2 + B^2 = 0$. Să se arate că:

a) dacă $n = 4k$, $k \in \mathbf{N}$, atunci $\det(AB - BA) \geqslant 0$;

b) dacă $n = 4k + 2$, $k \in \mathbf{N}$, atunci $\det(AB - BA) \leqslant 0$;

c) dacă $n = 4k + 1$ sau $n = 4k + 3$, $k \in \mathbf{N}$, atunci $\det(AB - BA) = 0$.

(S. Rădulescu)

4. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele $ABD((AB) \equiv (BD))$ şi ACE $((AC) \equiv (CE))$. Să se arate că înălţimea din A a triunghiului ABC şi dreptele CD şi BE sînt concurente.

Etapa finală

1. Fie p un număr natural prim. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi, nu toate nule, să se arate că determinantul matricii

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_n \\ pa_n & a_1 & a_2 \ldots a_{n-1} \\ pa_{n-1} & pa_n & a_1 \ldots a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ pa_2 & pa_3 & pa_4 \ldots a_1 \end{pmatrix}$$

este diferit de zero. *(M. Becheanu)*

2. Să se arate că $a_1e^x \sin x + a_2e^{2x} \sin 2x + \ldots + a_ne^{nx} \sin nx = 0$, oricare ar fi $x \in (-1, 1)$, dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \quad = a_n = 0$. *(I. V. Maftei)*

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 6^{x^2} = 5^x + 5^{x^2}$. *(M. Chiriță)*

4. Se consideră familiile de cercuri $\mathcal{C}_m : (x-m)^2+y^2 = \frac{1}{2} m^2$ și $\mathcal{D}_m : x^2+y^2 = m^2$, $m \in \mathbf{R}^*$.

a) Cîte cercuri $\mathcal{C}_m$ trec printr-un punct dat al planului? Discuție.

b) Să se delimiteze în plan regiunea acoperită de tangentele comune la cercurile $\mathcal{C}_m$ și $\mathcal{D}_m$ pentru $m \in [-1, 1] \cap \mathbf{R}^*$. *(I. V. Maftei, C. Udrişte)*

Anul 1985

Etapa județeană

1. Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de numere reale așa încît șirurile $(x_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$, $(x_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$ sînt convergente. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent.

2. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir de numere reale strict crescător convergent către a. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ așa încît pentru orice $n \in \mathbf{N}$ și orice $x \in (a_n, a_{n+1}]$ să avem $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$.

3. Se consideră mulțimea matricilor

$$M = \left\{ A \mid A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_n \\ a_n & a_1 & a_2 \ldots a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 \ldots a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2 & a_3 & a_4 \quad a_1 \end{pmatrix} \right\}$$

și $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Să se arate că $BA = AB$ oricare ar fi $A \in M$ dacă și numai dacă $B \in M$. *(L. Panaitopol)*

4. Fie p și q două numere reale așa încît $p^2 - 4q < 0$. Să se arate că dacă n este un număr natural impar și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, atunci

$$A^2 + pA + qI_n \neq O_n,$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul n și O_n este matricea nulă de ordinul n. *(T. Andreescu, I. D. Ion)*

Etapa finală

1. a) Fie $g:(-1, 1) \to \mathbf{R}$, $g(t) = t^2$. Cîte funcții continue $f:(-1, 1) \to \mathbf{R}$ există așa încît $f^2(t) = g^3(t)$, $(\forall)\ t \in (-1, 1)$? Care sînt acele funcții?

b) Fie $f, g:(-1, 1) \to \mathbf{R}$ așa încît $f^2(t) = g^3(t)$, $(\forall)\ t \in (-1, 1)$, $f(0)=0$, ambele funcții derivabile în punctul $t = 0$. Să se arate că $f'(0) = g'(0) = 0$. *(V. Mașek)*

2. Fie $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ strict crescătoare așa încît $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. Să se arate că dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x}$, atunci această limită este zero. *(D. Andrica)*

3. a) Dacă I_n este matricea unitate de ordinul n, să se dea un exemplu de matrice pătratică A de ordinul 2 neinversabilă așa încît $I_2 + A$ să fie inversabilă.

b) Dacă A și B sînt două matrici pătratice de ordinul n și dacă matricea $I_n - AB$ este inversabilă, să se demonstreze că și $I_n - BA$ este inversabilă.

4. a) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, $a_{ij} = 1$ dacă $i \neq j$ și $a_{ij} = -1$ dacă $i = j$. Să se calculeze det A.

b) Să se demonstreze că dacă o matrice pătratică de ordinul $n \in \mathbf{N}^*$ este formată cu elemente egale fiecare cu 1 sau cu -1, atunci determinantul său se divide cu 2^{n-1}. *(C. Năstăsescu, E. Păltănea)*

Anul 1986

Etapa județeană

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ care verifică relația $f(x) \ln f(x) = e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{x}} \quad \textit{(I.V. Maftei)}$$

2. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă așa încît $f(f(x)) = x^2$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că:

a) f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}_+$;

b) $f(0) = 0$;

c) $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. *(S. Rădulescu)*

3. Fie A o matrice pătratică de ordinul $n \in \mathbf{N}^*$ care verifică relația $A^3 = A + I$, unde I este matricea unitate de ordinul n. Să se arate că det $A > 0$. *(C. Cocea)*

4. Să se rezolve în mulțimea permutărilor de gradul 7 ecuația

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad \textit{(I. Moisev)}$$

Etapa finală

1. Să se determine toate polinoamele $P \in \mathbf{R}[X]$ pentru care $P(\sin x) = P(\operatorname{tg} x)\, P(\cos x)$, oricare ar fi $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. *(V. Mașek)*

2. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și $x_0 \in \mathbf{R}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

3. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$. Să se arate că rang $(A) \leqslant 1$ dacă și numai dacă există $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbf{R}$ și $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ așa încît $a_{ij} = x_i y_j$, oricare ar fi $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$.

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ cu $AB = BA$. Să se arate că det $(A + B) \geqslant 0$ dacă și numai dacă det $(A^n + B^n) \geqslant 0$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

Anul 1987

Etapa județeană

1. Fie $a \geqslant 1$ dat. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$, presupus mărginit și satisfăcînd condiția $x_n \leqslant x_{n+1} a^{\frac{a-1}{a^n}}$, pentru orice $n \geqslant 1$.

2. Să se determine funcțiile continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = f(2x + 1)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

3. Pentru o permutare σ a numerelor $1, 2, \ldots, n$ se notează $s_n(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\sigma(k)}$. Să se arate că $s_n(\sigma)$ este minimă pentru permutarea identică și apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(\sigma)$.

4. Să se determine matricile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ cu proprietatea că $(A^*)^* = A$, unde A^* este matricea reciprocă asociată matricii A. *(M. Piticari)*

5. Se consideră punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $0 < a \leqslant b$, relativ la un reper ortogonal xOy și o dreaptă d oarecare trecînd prin origine, de pantă α. Fie P, Q proiecțiile ortogonale ale punctelor A, B pe d. Să se traseze graficul funcției $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $f(\alpha) = PQ$ și să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $[PQ]$.

Etapa finală

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și mărginită. Să se arate că dacă pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $f(x)f'(x) \geqslant \sin x$, atunci nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. *(M. Chiriță)*

2. Să se arate că:

a) dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ este singulară (det $A = 0$), atunci există $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, nenulă, astfel încît $AB = BA = 0$.

b) o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ este singulară dacă și numai dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, nenulă, astfel încît pentru orice $p \in \mathbf{N}^*$, $(A + B)^p = A^p + B^p$. *(I. Savu)*

3. Fie $n \geqslant 3$ întreg și

$$s = \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n}{x_n + x_1},$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$. Să se arate că $s < n - 1$. Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui s cînd $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variază în $\mathbf{R}_+^*$. *(O. Stănășilă)*

4. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Definim $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ prin $g(x) = \sup f([a, x])$, $(\forall)\ x \in [a, b]$. Să se arate că $g([a, b])$ este un interval. *(G. Dincă)*

Anul 1988

Etapa județeană

1. Pentru ce numere naturale n există limita $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}-2}{x^n}$?

2. Considerăm șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1}=\sqrt{nx_n+1}$, $(\forall)\ n\in \mathbf{N}$. Să se arate că șirurile $(y_n)_{n\geq 1}$ și $(z_n)_{n\geq 1}$ definite de $y_n=\dfrac{x_n}{n}$, $z_n=n-x_n$, $(\forall)\ n\in \mathbf{N}^*$, sînt convergente și să se afle limitele lor.

(L. Panaitopol)

3. Fie $A\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ o matrice cu proprietatea că pentru orice $t\in \mathbf{R}$, $\det(tA+I)=\det(A+tI)$, unde I este matricea unitate. Să se arate că dacă n este par, atunci $\det(-tA+I)=\det(-A+tI)$ și $\det(tA^2+I)=\det(A^2+tI)$, $(\forall)t\in \mathbf{R}$. *(M. Becheanu)*

4. Fie un triunghi ABC. Să se afle locul geometric al punctelor M, interioare triunghiului pentru care $d(M, BC)=d(M, AB)+d(M, AC)$.

Etapa finală

1. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$, cu $a+d>2$. Să se arate că oricare ar fi $n\in \mathbf{N}^*$, $A^n\neq I_2$. *(L. Panaitopol, I. Tomescu)*

2. Fie un triunghi ABC și un punct M în planul său. Notăm cu $s(M)$ suma pătratelor distanțelor punctului M la laturile triunghiului și cu $S(M)$ suma pătratelor distanțelor punctului M la vîrfurile triunghiului. Să se arate că $4s(M)\geq S(M)$ pentru orice punct M din plan, dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

(L. Panaitopol)

3. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 2}$ definit astfel:

$$a_n=\max_{k\in\{1,2,\dots,n\}}(k-1)^{n-k}.$$

a) Să se arate că ecuația $x+(x-1)\ln(x-1)=n (n\geq 2)$ admite o soluție unică x_n și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\dfrac{n}{\ln n}}=1.$$

b) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{\dfrac{n}{\ln n}}=\frac{1}{e}.$$ *(I. Tomescu)*

4. Se consideră șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=1$. Să se arate că șirul $(z_n)_{n\geq 1}$,

$$z_n=\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\dots+x_ny_1}{n},\quad n\geq 1$$

are, de asemenea, limita egală cu 1.

Anul 1989

Etapa județeană

1. Fie un triunghi ABC și P un punct variabil în planul triunghiului. Se notează cu A', B', C' simetricele punctului P față de mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Să se arate că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente într-un punct notat M, iar dreapta PM trece printr-un punct fix care se cere precizat. (Se cere soluție analitică.)

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, $A \neq \lambda I_2$, $(\forall)\lambda \in \mathbf{R}$. Să se arate că ecuația $X^{-1} \cdot {}^tX = A$ admite soluții $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ dacă și numai dacă există $p \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ astfel încît $A^2 + I_2 = pA$.

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ definit prin relația $x_{n+1} + e^{x_{n+1}} = x_n + 1$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, unde $x_0 > 0$.

i) Să se arate că șirul este bine definit.

ii) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ este convergent și să se găsească limita sa.

4. Fie $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietățile:

a) $f(x) + f(y) \leqslant f(x + y)$, $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}_+$;

b) există $M > 0$ astfel încît $|f(x)| \leqslant Mx$, $(\forall) x \geqslant 0$.

Să se arate că:

i) dacă pentru un șir $(x_n)_{n \geqslant 0}$ avem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ și $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n)}{x_n} = l$, atunci $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant l$, $(\forall)\, x > 0$;

ii) există $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Etapa finală

1. Fie $p > 0$ un număr real și $[AB]$ un segment fix în plan. Se consideră în același plan perechile de puncte distincte (C, D) astfel încît triunghiurile ABC și ABD au perimetrele egale cu $2p$, iar punctele A, B, C, D sînt conciclice. Să se determine locul geometric al mijloacelor segmentelor $[CD]$. *(M. Becheanu)*

2. 1) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Să se arate că dacă $A^tA = 0$, atunci $A = 0$.

ii) Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Să se arate că dacă $BA^tA = CA^tA$, atunci $BA = CA$.

iii) Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ cu proprietatea că există $A' \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ astfel încît $AA'A = A$. Să se arate că ecuația matricială $AX = B$, unde $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ este compatibilă dacă și numai dacă $AA'B = B$. În acest caz să se arate că mulțimea soluțiilor ecuației considerate este $\{A'B + Y - A'AY \mid Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\}$. *(E. Popa)*

3. Considerăm o funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $a < b$, derivabilă de două ori și cu derivata a doua continuă și satisfăcînd relația $f(a) = f(b) = 0$. Notăm

$$M = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)| \text{ și } g : [a, b] \to \mathbf{R},\ g(x) = \frac{1}{2}(x - a)(b - x).$$

i) Folosind o funcție auxiliară de forma $f - \lambda g$, cu $\lambda \in \mathbf{R}$ convenabil, să se arate că pentru fiecare $x \in [a, b]$, există $c_x \in (a, b)$ astfel încît $f(x) = -f''(c_x)g(x)$.

ii) Să se arate că dacă există $x_0 \in (a, b)$ astfel încît $|f(x_0)| = Mg(x_0)$, atunci $f = Mg$ sau $f = -Mg$. *(E. Popa)*

4. i) Fie $C \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime nevidă și $(x_n)_{n \geqslant 0}$ un șir de numere reale cu următoarele proprietăți:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y|$ există și este finită, pentru orice $y \in C$;

b) limita oricărui subșir convergent $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ aparține lui C.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

ii). Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și crescătoare avînd proprietatea că ecuația $f(x) = 0$ admite cel puțin o soluție. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ șirul definit de relația

$$x_{n+1} + c_n f(x_{n+1}) = x_n, (\forall)\ n \geq 0,$$

unde $c_n > 0$, $(\forall)\ n \geq 0$ și $x_0 \in \mathbf{R}$ este dat. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. *(V. Barbu)*

Anul 1990

Etapa județeană

1. Să se construiască două funcții $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care există și sînt finite limitele $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$, $\lim\limits_{y\to l} g(y) = L$, $\lim\limits_{x\to 0} (g \circ f)(x) = L'$ și în plus $L \neq L'$.

2. În planul cartezian se consideră punctele A (pe axa Ox) și B (pe axa Oy), ambele diferite de originea O. Fie și $k \in \mathbf{R}$. Se cere locul geometric al punctelor M din plan pentru care $MA^2 \cdot OB^2 + MB^2 \cdot OA^2 - MO^2 \cdot AB^2 = 2kOA^2 \cdot OB^2$. Interpretare în cazul $k = 0$.

3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere complexe ($n \geq 2$). Să se arate că ecuațiile $x^n - 1 = 0$ și $a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_nx^{n-1} = 0$ au cel puțin o rădăcină comună dacă și numai dacă determinantul

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 \ldots a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 \ldots a_1 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_n & a_1 \ldots a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & a_2 \ldots a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

este nul.

4. Fie $p \geq 2$ un număr natural și $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ numere reale. Definim funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată prin

$$f(x) = \pi^p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \ldots + a_1x + a_0.$$

a) Să se arate că există un număr real A cu proprietatea că $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \geq A$.

b) Fie n_0 un număr natural astfel încît $n_0 \geq A$. Definim șirul $(x_n)_{n\geq n_0}$ prin $x_n = \sin \sqrt[p]{f(n)}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq n_0}$ este convergent dacă și numai dacă numărul $\dfrac{a_{p-1}}{p\pi^p}$ este întreg.

Etapa finală

1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ o matrice astfel încît $A^n = \alpha A$, unde α este un număr real, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq -1$. Să se arate că matricea $B = A + I_n$ este inversabilă. *(C. Cocea)*

2. Să se determine polinoamele $P \in \mathbf{R}[X]$ știind că, oricare ar fi numerele reale x și y, are loc egalitatea

$$(P(x))^2 - (P(y))^2 = P(x+y)P(x-y). \text{ (M. Becheanu)}$$

3. Fie $\mathcal{P}$ mulțimea punctelor din plan și $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ o transformare astfel încît pentru oricare trei puncte A, B, C necoliniare, punctele $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ și $C' = T(C)$ sînt vîrfurile unui triunghi cu proprietatea că perimetrele triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ sînt egale. Să se arate că transformarea T este o izometrie. *(L. Panaitopol)*

4. Să se arate că orice șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea

$$\frac{1}{8}(6a_n - a_{n-1}) \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{6}(5a_n - a_{n-1}), \ (\forall)\ n \geq 1,$$

este convergent cu limita zero. *(M. Chiriță)*

CLASA A XII-A

Anul 1969

Etapa județeană

1. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = x \operatorname{arctg} x,$$
$$g(x) = \ln(1 + x^2).$$

a) Să se arate că f și g sînt integrabile pe $[0, 1]$ și apoi să se calculeze

$$\int_0^1 f(x)\,dx \text{ și } \int_0^1 g(x)\,dx.$$

b) Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $f(x) \geqslant g(x)$ și apoi să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficele funcțiilor f, g și dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

c) Folosind rezultatele de la punctul a să se calculeze limitele șirurilor ce au ca termen general

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(k \operatorname{arctg} \frac{k}{n} + \frac{\pi}{4} n \right);$$

$$b_n = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \ln (k^2 + n^2) - 2(n - 1) \ln n \right]. \textit{ (T. Cohal)}$$

2 Fie $Q[X]$ inelul polinoamelor cu coeficienți raționali și fie $g \in Q[X]$. Să se arate că dacă $g(1+X^2)$ este polinomul identic nul, atunci și $g(X)$ este polinomul identic nul. *(D. Radu)*

3. Împărțim primele douăsprezece numere naturale în trei grupe a cîte patru numere și înregistrăm fiecare grupă pe cîte un bilet. Dintr-o urnă conținînd douăsprezece bile numerotate de la 1 la 12 se extrag, pe rînd, cîte o bilă. Se cere:

a) probabilitatea ca din șase extrageri patru numere să fie conținute pe un același bilet, presupunînd că bilele extrase nu sînt întoarse în urnă.

b) probabilitatea de a obține cele patru numere ale unui bilet din șase extrageri, presupunînd că după fiecare extragere bila este reîntoarsă în urnă. *(N. Peligrad)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Să se găsească un polinom $P(X)$ de gradul 4 astfel încît $P(X) + 1$ să admită rădăcina triplă $x = 1$, iar $P(X) - 1$ să admită pe $x = -1$ ca rădăcină dublă. *(Z. Bogdanof)*

2. Să se rezolve sistemul

$$8bcx + 2acy - 4abz = 0,$$
$$10bcx + 6acy - 8abz = -2abc,$$
$$9bcx + 6acy - 3abz = 12abc,$$

unde $abc \neq 0$.

3. Pe laturile (AB), (BC), (CA) ale unui triunghi de vîrfuri $A(4, 0)$, $B(0, 3)$, $C(1, 4)$ se iau, respectiv, punctele M, N, P astfel încît

$$\frac{MA}{MB} = -a, \quad \frac{NB}{NC} = -b, \quad \frac{PC}{PA} = -\frac{1}{ab},$$

(a, $b > 0$, segmentele fiind orientate).

a) Să se arate că dreptele AN, BP, CM sînt concurente și să se găsească coordonatele punctului D de concurență.

b) Pentru ce valori ale lui a și b distanțele punctului D la cele trei laturi ale triunghiului ABC sînt egale între ele? *(L. Pîrșan)*

Etapa finală

1. Se consideră polinomul $p \in \mathbf{Z}[X]$ dat de relația

$$p = X^5 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4,$$

care admite rădăcini întregi. Să se arate că dacă rădăcina x_1 divide oricare alte trei rădăcini ale polinomului, atunci x_1^i divide pe $a_i (i = 1, 2, 3, 4)$. *(D. Radu)*

2. Fie polinomul $f = X^4 + kX^3 + 28X^2 + 48X + 64$, $f \in \mathbf{R}[X]$, unde k este real.

a) Să se determine valoarea lui k astfel ca polinomul să aibă o rădăcină dublă rațională.

b) Să se determine valoarea lui k în cazul cînd polinomul f are două rădăcini complexe, care au raportul modulelor egal cu 2. *(N. Peligrad)*

3. Să se determine numărul n astfel ca volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \cos(n \arccos x)$$

în jurul axei Ox să fie egal cu $\frac{2\pi}{3}$. *(Gh. Popescu-Lugoj)*

4. Patru vînători trag simultan, cîte un foc într-o țintă. Știind că în condițiile în care are loc tragerea, fiecare vînător atinge ținta de două ori din cinci focuri, care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel puțin un vînător?

Anul 1970

Etapa județeană

1. Se consideră funcția $f : D \to \mathbf{R}$,

$f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin^2 x}$, D fiind domeniul maxim de definiție.

a) Să se studieze variația funcției f în intervalul $(0, \pi)$ și să se reprezinte grafic.

b) Să se calculeze aria mărginită de graficul funcției f, axa OX și dreptele $x = \frac{\pi}{4}$ și $x = \frac{3\pi}{4}$. *(Laura Constantinescu)*

2. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{\sqrt{3(n+1)^2+1^2}}+\frac{2}{\sqrt{3(n+1)^2+2^2}}+\dots+\frac{n}{\sqrt{3(n+1)^2+n^2}}\right]\right\}.$$

(C. Ionescu-Țiu)

3. Fie $P(x) = 0$, o ecuație de gradul n cu coeficienți reali care nu admite pe -1 ca rădăcină.

a) Dacă $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației date, să se calculeze produsul

$$P = \frac{1}{1+x_1}\cdot\frac{1}{1+x_2}\cdot\frac{1}{1+x_3}\cdot\ \cdot\frac{1}{1+x_n}.$$

b) Folosindu-se, eventual, relația stabilită la punctul precedent pentru ecuația $x^n - 1 = 0$, să se deducă că dacă n este un număr natural impar, atunci

$$\cos\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{2\pi}{n}\ \cos\frac{3\pi}{n}\ \cdot\cos\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}.$$ *(D. Radu)*

4. La un concurs de matematică trei candidați primesc cîte un plic care conține n ($n > 3$) bilete cu probleme de algebră și geometrie. Cele trei plicuri conțin respectiv cîte 1, 2, 3 subiecte de algebră. Fiind examinați, cei trei candidați extrag fiecare cîte un bilet din plic. Extragerea făcîndu-se la întîmplare, să se afle probabilitățile următoarelor evenimente:

a) toți candidații să fie examinați la geometrie;

b) nici un candidat să nu fie examinat la geometrie;

c) cel puțin un candidat să fie examinat la algebră. *(Gh. Popescu-Lugoj)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se consideră funcția $f : D \to \mathbf{R}$,

$f(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{1-\ln(e-x)}$, D fiind domeniul maxim de definiție.

a) Să se arate că funcția este continuă pe D.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f_1 : D_1 \to \mathbf{R}$, $f_2 : D_2 \to \mathbf{R}$, D_1, D_2 fiind domeniile maxime de definiție și

$$f_1(x) = \sqrt{x(x-4)},\quad f_2(x) = \sqrt{x-5}.$$

Să se arate că funcția $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ este inversabilă. *(V. Radu)*

3. Se consideră polinomul

$P = X^3 + aX^2 + bX + c$, unde a, b, c sînt parametri reali.

a) Știind că acest polinom are rădăcini reale să se determine aceste rădăcini în cazul cînd avem $b^2 = 2ac$.

b) Dacă $a = 0$, $b = -1$ și x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $P(x) = 0$, să se arate că expresia

$$E(x_1, x_2, x_3) = \frac{P(x_2 + x_3)}{x_1} + \frac{P(x_1 + x_3)}{x_2} + \frac{P(x_1 + x_2)}{x_3}$$

nu depinde de c.

c) Dacă $f(x) = 0$ admite rădăcini întregi și $b, c \in \mathbf{Z}$ iar $a = 0$, să se calculeze expresia

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3(x_3^3 + x_2^3) + x_2^3(x_1^3 + x_3^3) + x_3^3(x_1^3 + x_2^3).$$ *(I. V. Maftei)*

4. Fie xOy un sistem de coordonate carteziene. Pe Ox se consideră punctul fix A și pe Oy punctul mobil M. Se construiește în cadranul I pătratul $AMNP$. Fie N' și P' proiecțiile punctelor N și P pe axa Ox.

a) Să se arate că aria triunghiului POA este constantă.

b) A' fiind simetricul punctului A față de originea sistemului de coordonate și punctul B situat pe axa Oy în așa fel că $OB = OA$, să se arate că punctele A', B, N sînt coliniare.

c) Să se scrie ecuațiile tangentelor la cercul circumscris pătratului, perpendiculare pe dreapta d, unde d este simetrica dreptei AM în raport cu prima bisectoare a axelor de coordonate. *(I. V. Maftei)*

5. Se consideră polinomul

$P(X) = X^3 + mX + n$, unde m, n sînt parametri reali.

a) Să se determine forma generală a polinoamelor P în așa fel ca să admită o rădăcină dublă exprimată printr-un număr întreg.

b) Utilizînd rezultatul de la punctul a să se determine polinomul P în așa fel ca rădăcina dublă să fie $x = 1$.

c) Să se arate că expresia

$$\frac{P(x_2 + x_3)}{x_1} + \frac{P(x_3 + x_1)}{x_2} + \frac{P(x_1 + x_2)}{x_3}$$

nu depinde de n, unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile polinomului. *(I. V. Maftei)*

Etapa finală

1. În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră curbele (C) care au următoarea proprietate: lungimea segmentului de dreaptă situat pe tangenta la curbă, cuprins între punctul de tangență și punctul în care tangenta taie a doua bisectoare a axelor, este egală cu distanța de la punctul de tangență la originea axelor.

a) Să se stabilească ecuația diferențială a curbelor (C) avînd proprietatea enunțată.

b) Să se integreze ecuația diferențială obținută și să se determine conica (C_1) care trece prin punctul de coordonate (5, 4).

c) Să se arate că există în familia de curbe (C) două drepte d_1 și d_2 simetrice față de Ox. Intersecția lor cu conica (C_1) determină pe aceasta două arce care subîntind coardele a_1 și a_2. Să se determine d_1 și d_2 astfel ca segmentele de conică mărginite de coardele a_1 și a_2 rotite în jurul axei Ox să dea în total un volum egal cu 36π. *(Gr. Bănescu)*

2. Fie $\mathcal{M}$ mulțimea matricilor de forma

$$A = \begin{pmatrix} m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp & 0 \\ q & m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp \end{pmatrix},$$

unde $m, n, p, q \in \mathbf{Z}$.

a) Să se arate că înmulțirea matricilor este o lege de compoziție internă în $\mathcal{M}$.

b) Să se determine cea mai mare submulțime $N \subset \mathcal{M}$ care față de această lege de compoziție este înzestrată cu o structură de grup.

c) Să se arate că în situația de la punctul b, numerele m, n, p satisfac una din ecuațiile: $x^3 \pm x^2 - mnp = 0$. *(D. Radu)*

3. Un zar este construit astfel: o față este marcată cu un punct, două fețe cu cîte două puncte și trei fețe cu cîte trei puncte, deci o aruncare cu zarul poate conduce la rezultatele 1, 2 sau 3. Zarul se aruncă de două ori și se notează cele două rezultate obținute.

a) Care este probabilitatea ca cele două rezultate să fie egale?

b) Care este probabilitatea ca suma celor două rezultate să fie patru?

4. Dacă $x^3 + ax^2 + bx + a = (x - \operatorname{tg} A)(x - \operatorname{tg} B)(x - \operatorname{tg} C)$, unde $b \neq 1$, să se arate că oricare ar fi x real, iar a și b parametri:

a) suma $S = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$ nu depinde de a.

b) Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi ascuțitunghic sînt necesare și condițiile $a < 0$, $b > 1$ și $a^2 \geqslant 27$. *(C. Ionescu-Țiu)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Să se afle locul geometric al simetricului punctului $P(m, 0)$ față de dreapta (d) : $2mx + y - (1 + m^2) = 0$, unde m este un parametru. *(V. Popescu)*

2. În mulțimea **R** a numerelor reale se definește legea de compoziție internă notată cu $*$, astfel:

$$a * b = \frac{1}{2}(a + b - ab + 1), \text{ unde } a, b \in \mathbf{R}.$$

a) Să se arate că există un element neutru e pentru legea $*$ și să se determine e în acest caz.

b) Să se arate că orice element din **R**, afară de unul care se va determina, admite un simetric.

c) Este legea $*$ asociativă? Determină această lege pe **R** o structură de grup?

3. a) Să se rezolve ecuația $x^3 + ax^2 + bx + a = 0$ știind rădăcinile $x_1 = -\sqrt{3}$ și $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

b) Să se formeze o ecuație de gradul 3 în y ale cărei rădăcini sînt

$$y_1 = \frac{1}{1 + x_1^2}, \quad y_2 = \frac{1}{1 + x_2^2}; \quad y_3 = \frac{1}{1 + x_3^2},$$

iar x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației

$$ax^3 - x^2 + abx - 1 = 0, \quad b \neq 1. \quad \textit{(C. Ionescu-Țiu)}$$

4. a) Să se reprezinte grafic funcția

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} - 1 = 0, \quad 0 < b < a.$$

b) Să se cerceteze dacă graficul funcției date are tangentele paralele cu dreapta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0. \quad \textit{(Gh. D. Simionescu)}$$

5. Să se discute limita

$$E = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos^2 a_1 x + \cos^2 a_2 x + \cos^2 a_3 x}{\cos^2 b_1 x + \cos^2 b_2 x + \cos^2 b_3 x} \right)^{\frac{1}{x^3}},$$

unde a_i, b_i $(i = 1, 2, 3)$ sînt constante reale. *(Gh. D. Simionescu)*

6. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile întregi ale ecuației

$$x^3 - 10x^2 + mx + n = 0, \ m, \ n \text{ parametri întregi.}$$

Să se determine m și n astfel încît

$$x_2^2 = x_1^2 + x_3^2. \quad \textit{(I. V. Maftei)}$$

Anul 1971

Etapa județeană

1. Se face următoarea ipoteză:

(I) Dacă a, b, c sînt numere întregi care satisfac relația $a^4 + b^4 = c^4$, atunci $a = 0$ sau $b = 0$.

a) Fie $\mathbf{Z}[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți întregi, iar $p, q, r \in \mathbf{Z}[X]$ trei polinoame care satisfac relația

$$[p(X)]^4 + [q(X)]^4 = [r(X)]^4.$$

Folosind ipoteza (I) ce se poate spune despre polinoamele p, q, r?

b) Fie $\mathbf{R}'[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali care admit numai rădăcini reale, iar $p, q, r \in \mathbf{R}'[X]$ trei polinoame care satisfac relația de la punctul a. Ce se poate spune despre polinoamele p, q, r în acest caz? *(D. Radu)*

2. a) Fie p un polinom cu coeficienți reali astfel încît $p(aX^2 + bX + c)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, este polinomul identic nul. Rezultă de aici că polinomul p este polinomul identic nul?

b) Fie $p(X) = X^5 - 1$. Să se arate că singura descompunere în factori cu coeficienți raționali a polinomului p este

$$X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1). \quad \textit{(Gr. Bănescu, D. Radu)}$$

3. Se consideră funcția $f : E \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \int_0^{\operatorname{arctg} x} e^{\operatorname{tg} t}\, dt, \ E \text{ fiind domeniul maxim de definiție.}$$

a) Să se arate că $E = \mathbf{R}$.

b) Să se arate că f este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și să se calculeze derivata ei.

c) Să se deducă relația

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{x^2}\, dx + \frac{1}{2e} \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}. \quad \textit{(N. Manolache)}$$

4. O urnă conține N bile numerotate de la 1 la N. Din această urnă se extrag n bile. Să notăm prin X cel mai mic număr scris pe bilele extrase și cu Y cel mai mare. Considerînd extracțiile cu și fără întoarcere, să se calculeze:

a) $P(X > x)$, $P(X = x)$;

b) $P(Y \leqslant y)$, $P(Y = y)$. *(V. Craiu)*

1. Fie mulțimea $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, înzestrată cu adunarea și înmulțirea din $\mathbf{R}$.

a) Să se arate că $\{A, +, \ \}$ formează un inel.

b) Să se studieze dacă inelul definit la punctul a are divizori ai lui zero.

c) Fie mulțimea $B = \{a - b\sqrt{2} \mid a, b, \in \mathbf{Q}\}$ înzestrată cu adunarea și înmulțirea din $\mathbf{R}$. Să se arate că funcția $f : A \to B$,

$$f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

este un izomorfism de inele.

2. Să se integreze ecuația diferențială

$$\sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}y = \sqrt{y(1-y)}\,\mathrm{d}x.$$

Etapa finală

1. Se consideră mulțimea

$$\mathbf{Z}^3 = \{\alpha \mid \alpha = (a_1, a_2, a_3),\ a_i \in \mathbf{Z}\}.$$

În $\mathbf{Z}^3$ se definește o operație algebrică astfel:

dacă $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^3$, $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)$, atunci

$$\alpha \circ \beta = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,\ a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3,\ a_3b_1 + a_1b_2 + a_2b_3).$$

a) Să se studieze asociativitatea și comutativitatea operației introduse. Admite această operație element neutru?

b) Se definește o funcție $T : \mathbf{Z}^3 \to \mathbf{Z}$ în modul următor: dacă $\alpha \in \mathbf{Z}^3$, $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, atunci

$$T(\alpha) = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1a_2a_3.$$

Să se arate că $T(\alpha \circ \beta) = T(\alpha)\ T(\beta)$. *(D. Radu)*

2. a) În aceeași mulțime suport două legi de compoziție interne definesc cîte o structură de grup. Este posibil ca una din aceste legi să fie distributivă față de cealaltă?

b) Mulțimea funcțiilor continue pe segmentul $[-1, 1]$ formează un inel față de operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor. Are acest inel divizori ai lui zero?

c) Să se determine toate izomorfismele corpului complex în el însuși care invariază corpul numerelor reale. *(D. Radu)*

3. Fie f o funcție continuă, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, și k un număr real, astfel ca

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}[f(x) + k],\quad (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

a) Să se demonstreze că $f(0) = k$.

b) Să se arate că singurele funcții continue care satisfac relația din enunț sînt funcțiile de tipul

$$f(x) = cx + k.\ \textit{(L. Panaitopol)}$$

4. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continuă și fie $l, k \in \mathbf{R}$, $l > 0$, astfel încît

$$\int_x^{x+l} f(t)\,\mathrm{d}t = k,\ (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că f este periodică. *(D. Radu)*

5. O urnă conține bile albe și bile negre. Din această urnă se fac extracții cu întoarcere, adică înainte de extragerea unei bile, bila extrasă anterior se pune înapoi în urnă. Fie p probabilitatea de a extrage o bilă albă și $q = 1 - p$ probabilitatea de a extrage o bilă neagră. Se cere:

a) probabilitatea ca prima bilă albă să se obțină la extracția k;

b) se fac extracții pînă se obțin l bile negre. Fie $l + x$ numărul necesar de extracții. Care este probabilitatea ca $x = m$? Ce se poate spune despre suma acestor probabilități pentru $m = 0, 1, \ldots$? *(V. Craiu)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă satisfăcînd relația

$$f(x) = \lambda(1 + x^2)\left[1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2}\,dt\right], \ (\forall)\, x \in \mathbf{R},\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

a) Să se arate că f este derivabilă în orice punct $x \in \mathbf{R}$.

b) Să se arate că există o singură funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, satisfăcînd condiția de mai sus. *(I. V. Maftei)*.

2. a) Să se determine mulțimea polinoamelor $P(X)$ cu coeficienți reali care satisfac condiția

$$(X - 4)P(X + 1) - XP(X) + 20 = 0.$$

b) Din mulțimea găsită la punctul a să se determine polinoamele care verifică relația $P(0) = 29$. Indicație: se poate folosi substituția $P(X) = Q(X) + 5$. *(I. V. Maftei)*

3. Utilizînd eventual relațiile lui Viète pentru o ecuație de gradul 4, să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} a^3x - a^2y + az - t &= a^4, \\ b^3x - b^2y + bz - t &= b^4, \\ c^3x - c^2y + cz - t &= c^4, \\ d^3x - d^2y + dz - t &= d^4, \end{aligned}$$

unde a, b, c, d sînt numere reale distincte. Generalizare. *(I. V. Maftei)*

4. a) Fie funcția $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabilă și satisfăcînd condiția

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y),\ (\forall)x, y \in [a, b].$$

Să se demonstreze că avem

$$\Phi(t) = kt,\ (\forall)k \in \mathbf{R}.$$

b) Se consideră funcția $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ derivabilă și satisfăcînd condiția

$$f(x) + f(y) = f\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right),\ (\forall)x,\ y \in [0, 1].$$

Să se determine mulțimea funcțiilor f satisfăcînd condiția precedentă. *(I. V. Maftei)*

5. Fie A o mulțime pe care s-a definit o lege de compoziție internă $*$, asociativă dar necomutativă, care are proprietatea că pentru orice $a \in A$, există $n \in \mathbf{N}$, astfel că $a_n \neq a$, unde $a_n = a * a * \ldots * a$ de n ori. Să se arate că există un element $b \neq a$ astfel încît să avem $a * b = b * a$. *(I. V. Maftei)*

6. Fie ecuația

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Să se formeze ecuația avînd ca rădăcini

$$y_1 = x_1^2 - k, y_2 = x_2^2 - k, y_3 = x_3^2 - k, y_4 = x_4^2 - k, y_5 = x_5^2 - k.$$ *(I. V. Maftei)*

Anul 1972

Etapa județeană

1. Fie f o funcție reală continuă într-un interval $[a, b]$. Să se arate că

a) Dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

b) Dacă există un punct $x_0 \in [a, b]$, cu $f(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care funcția f este nenulă.

c) Dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a,b]$ și $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, atunci funcția f este nulă. *(D. Radu)*

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \int_1^2 \frac{\sin xt}{t}\,dt.$$

Să se arate că în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ funcția f este strict crescătoare. *(D. Radu)*

3. Se consideră ecuația cu coeficienți întregi $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ale cărei rădăcini sînt x_1, x_2, x_3 și se notează $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ are loc relația

$$S_{n+3} + aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0.$$

b) Să se deducă de aici că există o infinitate de triplete (x_1, x_2, x_3) de numere iraționale cu proprietatea că pentru orice astfel de triplet și orice număr natural n, numărul S_n să fie întreg. *(N. Manolache)*

4. Fie $p(z) = a_0z^k + a_1z^{k-1} + \ldots + a_k$ un polinom cu coeficienți complecși, iar $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, n numere complexe care sînt vîrfurile unui polinom regulat cu n laturi al cărui centru de simetrie este situat în originea sistemului cartezian de axe din planul complex. Să se arate că are loc egalitatea

$$\frac{p(z_0) + p(z_1) + \ldots + p(z_{n-1})}{n} = a_k, \quad k < n. \quad \textit{(D. Radu)}$$

5. Într-o urnă sînt 8 bile albe și 2 bile negre. Se extrag n bile. Să se determine n, astfel ca probabilitatea ca între bilele extrase să fie cel puțin o bilă neagră, să fie mai mare decît $\frac{8}{15}$. *(Lucia Tene)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se știe că orice funcție continuă pe un interval închis este integrabilă pe acest interval. Reciproca acestei afirmații este adevărată? *(D. Radu)*

2. Să se determine limita șirului

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{(2k-1)^2 + (2k)^2}}.$$

$\left(\text{Se poate folosi definiția integralei Riemann pentru funcția } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

(Șt. Musta)

3. Se consideră mulțimile

$$M_1 = \{x \mid x \in \mathbf{C},\ x^3 - mx + 2 = 0\},$$
$$M_2 = \{x \mid x \in \mathbf{C},\ x^2 + mx + 2 = 0\},$$

unde prin $\mathbf{C}$ s-a notat mulțimea numerelor complexe, iar m este un parametru real.

a) Să se determine m astfel încît $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

b) În acest caz să se determine mulțimile M_1 și M_2. *(H. Ene)*

4. Fie $p(X)$ un polinom cu coeficienți reali a cărui derivată este

$$p'(X) = (X+1)^2 (X-1)^3 (X-2)^4.$$

Să se arate că ecuația $p(x) = 0$ nu poate avea decît cel mult o rădăcină reală multiplă. *(E. Onofraș)*

5. Într-o urnă sînt 5 bile roșii, 3 bile albe și 2 bile negre.

a) Se extrag două bile. Care este probabilitatea ca o bilă să fie albă și cealaltă neagră?

b) Se extrag două bile. Care este probabilitatea ca să nu fie amîndouă negre?

c) Se extrag n bile. Să se determine n astfel ca probabilitatea ca între bilele extrase să fie cel puțin o bilă neagră, să fie mai mare ca $\frac{8}{15}$. *(Lucia Țene)*

6. Fie f o funcție reală monotonă într-un interval $[a, b]$. Se notează

$$r_n = \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Să se arate că

$$|r_n| \leqslant \frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)|. \quad \textit{(E. Isac)}$$

7. Se consideră ecuația cu coeficienți reali $x^3 + px + q = 0$ ale cărei rădăcini x_1, x_2, x_3 sînt presupuse nenule.

a) Să se formeze ecuația care are ca rădăcini pe

$$(x_1 - x_2)^2,\ (x_2 - x_3)^2,\ (x_3 - x_1)^2.$$

b) Să se deducă de aici o condiție necesară ca ecuația inițială să admită rădăcini reale.

c) Este această condiție suficientă? *(St. Musta)*

8. Pentru orice număr real x se notează prin $[x]$ cel mai mare număr întreg inferior lui x. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $x^5 - [x] - 5 = 0$. *(D. Radu)*

Etapa finală

1. Fie C^0 grupul aditiv al funcțiilor reale continue pe toată dreapta reală, iar C^1 grupul aditiv al funcțiilor derivabile și cu derivată continuă pe toată dreapta reală. Oricărei funcții $\varphi \in C^0$ i se asociază o altă funcție $T(\varphi)$ definită pe toată dreapta prin relația

$$(T(\varphi))(x) = \int_0^x t\varphi(t)\,dt.$$

a) Să se demonstreze că asocierea $\varphi \to T(\varphi)$ definește o funcție de la C^0 în C^1, iar această funcție este un omomorfism de grupuri.

b) Să se arate că omomorfismul T este injectiv.

c) Fie K acea submulțime a lui C^1 formată din toate funcțiile avînd următoarele proprietăți:

i) $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$;

ii) funcția α admite derivată de ordinul 2 în origine. Să se arate că $C^1 \neq K$.

d) Pentru orice $\alpha \in K$ se consideră funcția

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha'(x)}{x} & \text{pentru } x \neq 0, \\ \alpha''(0) & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Să se arate că $\varphi_\alpha \in C^0$ și să se determine $T(\varphi_\alpha)$.

e) Folosind rezultatul de la punctul precedent, să se demonstreze egalitatea de mulțimi $T(C^0) = K$. *(D. Radu)*

2. Fie f un izomorfism al corpului numerelor reale pe el însuși.

a) Să se determine $f(0)$, $f(1)$ și $f(-1)$.

b) Să se arate că pentru orice număr rațional q are loc egalitatea $f(q) = q$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, rezultă $f(\varepsilon) > 0$. Să se deducă de aici că f este o aplicație strict crescătoare.

d) Folosind rezultatele stabilite la punctele precedente, să se demonstreze că singurul izomorfism al corpului numerelor reale pe el însuși este aplicația identică. *(D. Radu)*

3. Într-o urnă sînt a bile albe și b bile negre. Se extrage cîte o bilă, fără a se pune la loc în urnă, pînă ce se obțin x bile albe. Să se afle repartiția variabilei aleatoare Y ce dă numărul de bile extrase din urnă pînă ce s-au obținut x bile albe. *(V. Craiu)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se consideră funcția

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} & \text{pentru } x = -1, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt & \text{pentru } x \in (-1, 1), \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{pentru } x = 1. \end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției φ.

b) Să se reprezinte grafic variația funcției φ pentru $x \in [-1, 1]$.

c) Să se calculeze aria mărginită de graficul funcției φ și axa Ox. *(D. Radu)*

2. Se consideră funcția I_α, $I_\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbf{R}$, dată de relația

$$I_\alpha(x) = \int_0^x \frac{dt}{\alpha^3 + t^3}, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \ \alpha > 1.$$

a) Să se arate că ecuația $I_\alpha(x) = 0$ admite totdeauna o singură rădăcină reală și să se reprezinte grafic funcția I_α într-o vecinătate a acestei rădăcini.

b) Să se arate că, printr-o schimbare de variabilă convenabilă, se poate exprima funcția I_α cu ajutorul funcției I_1. *(D. Radu)*

3. Se consideră polinomul

$$p(x) = kX^k - (X^{k-1} + X^{k-2} + \quad + X + 1), \ k \in \mathbf{N}, \ k \geq 1.$$

a) Să se demonstreze că pentru orice număr complex Z, $|Z| \geqslant 1$, are loc inegalitatea

$$|Z^{k-1} + Z^{k-2} + \ldots + Z + 1| < k\,|Z|^k.$$

Să se deducă de aici că rădăcinile polinomului p au modulul mai mic decît 1.

b) Să se arate că dacă $|Z| = 1$ și $Z \neq 1$, atunci pentru $k \geqslant 2$ are loc inegalitatea

$$|Z^{k-1} + Z^{k-2} + \ldots + Z + 1| < k.$$

Folosind acest rezultat să se demonstreze că rădăcinile polinomului p, diferite de 1, au modulul mai mic decît 1.

c) Se consideră polinomul q definit de relația $q(X) = (X - 1)p(X)$. Să se arate că singura rădăcină dublă pe care o poate avea polinomul q este $x = 1$.

d) Folosind rezultatele de la punctele precedente să se caracterizeze rădăcinile complexe ale polinomului p. *(D. Radu)*

4. Într-o cutie se află cîte patru cartoane însemnate cu literele A, B, C și D. Se extrag la întîmplare patru cartoane. Să se determine probabilitatea următoarelor evenimente:

a) toate cele patru cartoane să fie însemnate cu litere diferite;

b) cel puțin unul din cartoane să fie însemnat cu litera A.

c) exact două cartoane să fie însemnate cu aceeași literă;

d) cele patru cartoane să se prezinte în formația $AAAD$.

5. Se consideră funcția reală $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = x(1 + e^{-x}).$$

a) Să se studieze variația funcției f și să se reprezinte grafic.

b) Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de graficul funcției f, dreapta $y = x$ și dreapta $x = 1$.

c) Să se calculeze limita șirului al cărui termen general este

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt[n]{e^k}} \qquad \textit{(D. Radu)}$$

6. În planul raportat la un sistem ortogonal de axe xOy se consideră un punct P de coordonate (x, y) și punctul P_t ale cărui coordonate sînt cele date de relațiile

$$\begin{aligned} x_t &= xe^t \cos t - ye^t \sin t \\ y_t &= xe^t \sin t + ye^t \cos t \end{aligned}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

a) Să se arate că dacă punctul P descrie o dreaptă D, atunci punctul P_t descrie de asemenea o dreaptă D_t pe care o vom numi transformata lui D.

b) Dacă ω este unghiul format de dreptele D și D′ să se determine unghiul ω_t format din transformatele lor D_t și D_t'. Ce concluzie se poate trage de aici, referitor la transformările a două drepte paralele sau perpendiculare?

c) Există vreo dreaptă din plan care să coincidă cu transformata ei?

d) Să se arate că dacă punctul P descrie un cerc $\mathcal{C}$, atunci punctul P_t descrie de asemenea un cerc $\mathcal{C}_t$ — transformatul cercului $\mathcal{C}$.

e) Să se determine pentru ce valori ale parametrului t transformatul cercului de ecuație $x^2 + y^2 = e^{\frac{\pi}{2}}$ coincide cu cercul dat.

f) Pentru valorile lui t determinate la punctul precedent să se studieze dacă mai există sau nu și alte cercuri în plan care coincid cu transformatele lor. *(D. Radu)*

7. Fie $p_k(Z) = Z^k + a_1 Z^{k-1} + \ldots + a_k$ un polinom cu coeficienții complecși ale cărui rădăcini sînt situate în exteriorul cercului $|Z| = 1$. Se consideră numerele

complexe $Z_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ care reprezintă vîrfurile unui poligon regulat înscris în cercul $|Z| = 1$. $\left(\text{Punctele sînt dispuse pe cerc în așa fel încît unghiul format de axa reală și dreapta ce unește originea cu punctul } Z_1 \text{ este } \frac{2\pi}{n}\right)$. Se notează

$$u_n = \sqrt[n]{|p_k(Z_1)| \dots |p_k(Z_n)|}.$$

a) Pentru $k = 1$ să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = |a_1|$.

b) Să se deducă de aici că pentru orice număr natural k, $k \geqslant 1$, are loc egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = |a_k|$. *(D. Radu)*

8. Se consideră matricile

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze y^2, y^3 și y^4.

b) Se consideră mulțimea

$$\mathcal{M} = \{M \mid M = I + ay + by^2,\ a,\ b \in \mathbf{R}\}.$$

Să se arate că înmulțirea matricilor este o lege de compoziție în $\mathcal{M}$ și că față de această lege de compoziție $\mathcal{M}$ este un grup comutativ. *(D. Radu)*

9. Fie E o mulțime finită în care s-a definit o operație algebrică asociativă și care admite element neutru e cu proprietatea că oricare ar fi $x \in E$, $x^n = e$.

a) Să se arate că E este grup.

b) Dacă numărul de elemente al mulțimii E este par, atunci există un număr impar de elemente diferite de elementul neutru și egale cu propriul lor invers.

c) Pentru orice element $a \in E$ se definește aplicația σ_a, $\sigma_a : E \to E$, dată de relația $\sigma_a(x) = ax$. Să se arate că σ_a este o bijecție a grupului E pe el însuși.

d) Se notează cu T_E mulțimea tuturor bijecțiilor σ_a mai sus definite. În T_E se consideră ca operație algebrică compunerea funcțiilor. Să se arate că, față de această operație, T_E este un grup izomorf cu grupul E.

e) Să se arate că dacă $a^2 = e$ în grupul E, atunci $\sigma_a^2 = \sigma_e$. *(D. Radu)*

10. Fie $\mathbf{Z}_p$ corpul claselor de resturi modulo p.

a) Ce formă are formula de dezvoltare a binomului lui Newton în $\mathbf{Z}_p$?

b) Să se determine p știind că formula de rezolvare a ecuației de gradul 2 în $\mathbf{Z}_p$ nu este valabilă. *(D. Radu)*

Anul 1973

Etapa județeană

1. Se consideră funcția f, $f:[1, +\infty) \to \mathbf{R}$, dată de relația

$$f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

a) Să se arate că funcția f este pozitivă și descrescătoare pe domeniul său de definiție.

b) Să se stabilească relația $f(x + 1) = xf(x) - \frac{1}{e}$.

c) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, are loc egalitatea

$$f(n+1) = n! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} A_n^k,$$

unde A_n^k reprezintă aranjamentele de n obiecte luate cîte k.

d) Folosind cele stabilite anterior, să se arate că șirul cu termenul general

$$a_n = n! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} A_n^k \text{ este convergent. } (D.\ Radu)$$

2. Fie $f:[1, +\infty) \to (0, +\infty)$ o funcție descrescătoare și continuă. Se consideră funcția F, $F:[1, +\infty) \to [0, +\infty)$ dată de relația

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

a) Să se arate că dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ și este finită, atunci șirul $a_n = f(1) + f(2) + \quad + f(n)$ este convergent.

b) Alegînd în mod convenabil funcția f și folosind rezultatul anterior, să se arate că șirul

$$x_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \quad + \frac{1}{n^\alpha} \text{ este convergent pentru } \alpha > 1.$$

3. Se consideră polinomul cu coeficienți întregi

$$p(X) = X^2 - 3X + 2.$$

a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, există o pereche unică de numere întregi (a_n, b_n) astfel încît polinomul $q_n(X) = X^n - a_nX - b_n$, să se dividă prin $p(X)$.

b) Să se arate că numerele a_n și b_n satisfac relațiile de recurență

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n,\ b_{n+1} = -2a_n,\ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

c) Să se arate că șirul $x_n = a_n + b_n$ este convergent și să i se determine limita. *(D. Radu)*

4. Într-un depozit sînt gata de recepție 100 piese noi fabricate. Se știe de la un control anterior, că 4 piese sînt defecte și restul sînt bune. Se extrage de 4 ori cîte o piesă care nu se mai repune. Să se calculeze probabilitatea ca la prima extragere să fie o piesă cu defecte și apoi de trei ori consecutiv să se extragă numai piese bune. *(C. Ionescu-Țin)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Fie $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\ }{2}\right)$

a) Să se calculeze $\int_{-\theta}^{\theta} \frac{x\,dx}{\cos x}$.

b) Folosind rezultatul precedent să se evalueze integrala

$$\int_{\theta}^{2\theta} \frac{x\,dx}{|\cos(x-\theta)|}. \quad (D.\ Radu)$$

2. Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ se consideră funcțiile

$$f_n(x) = (\cos x)^{2x+2n\pi}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Se notează $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\, dx$. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent. *(D. Radu)*

3. Să se rezolve ecuația cu coeficienți reali

$$2x^4 - 4x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$$

știind că are toate rădăcinile reale. *(C. Ionescu-Țiu)*

4. Fie $M_0(x_0, y_0)$, iar θ un număr real $\theta \neq k\pi$. Se consideră șirul de puncte $M_n(x_n, y_n)$ definit astfel:

$$x_n = x_{n-1} \cos\theta + y_{n-1} \sin\theta,$$

$$y_n = x_{n-1} \sin\theta - y_{n-1} \cos\theta, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

a) Să se arate că dacă punctul M_0 aparține cercului de rază unitate cu centru în origine, atunci orice punct M_n aparține aceluiași cerc.

b) Să se arate că oricare ar fi punctul M_0, dacă șirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt convergente, atunci ele au aceeași limită. *(D. Radu)*

5. Fie D mulțimea punctelor din plan situate în interiorul sau pe cercul de ecuație: $x^2 + y^2 = 1$. Oricărui punct din plan îi asociem numărul real $f(x, y)$ definit astfel:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } (x, y) \in D, \\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) \text{ dacă } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

a) Să se reprezinte grafic funcția $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată de relația

$$\varphi(x) = f(x, 0).$$

b) Să se calculeze aria mărginită de graficul funcției φ, axa Ox și dreptele de ecuație $|x| = \lambda$. Pentru ce valori ale lui λ aria este nulă? *(D. Radu)*

6. Fie f, $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcție continuă. Se consideră funcția $\varphi: (0, \infty) \to (0, \infty)$, dată de relația

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t)\, dt}{\int_0^x f(t)\, dt}.$$

a) Să se arate că pentru orice $x > 0$, are loc inegalitatea $\varphi(x) \leqslant x$.

b) Să se demonstreze că φ este derivabilă și să se calculeze derivata ei.

c) Folosind rezultatele anterioare, să se arate că φ este o funcție crescătoare. *(D. Radu)*

7. Se consideră mulțimea

$$E = \{p \mid p(X) = aX^2 + bX + c,\ a, b, c \in \mathbf{R}\}.$$

a) Să se arate că pentru orice $p \in E$, se pot determina în mod unic trei numere a', b', c' astfel încît

$$p(X) = a'(X-1)^2 + b'(X-1) + c'.$$

b) Să se determine matricea M cu trei linii și trei coloane care verifică egalitatea

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

c) Oricărui polinom $p \in E$ i se asociază polinomul $\varphi(p)$ definit astfel:

$$(\varphi(p))(X) = 2(X+1)p(X) - (X^2 + \lambda X + 1)p'(X),$$

unde p' este derivata polinomului p. Să se arate că $\varphi(E) \subset E$.

d) Dacă a'', b'', c'' sînt coeficienții polinomului $\varphi(p)$ (exprimați în funcție de coeficienții lui p), să se determine matricea N care satisface o egalitate analoagă celei de la punctul b.

e) Să se determine valorile lui λ pentru care există polinoame $p \in E$, neidentic nule, astfel încît $\varphi(p)$ să fie totuși polinomul identic nul. *(D. Radu)*

Etapa finală

1. Fie $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția dată de relația $\varphi(t) = \max(t, t^2)$. Să se determine funcțiile reale f, derivabile pe toată dreapta reală care satisfac egalitatea

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) f(t)\, dt \quad x \in \mathbf{R}. \quad \textit{(D. Radu)}$$

2. Fie f o funcție reală continuă în intervalul $[a, b]$ și care are proprietățile:

$$\text{i) } f(a) > 0; \quad \text{ii) } \int_a^b f(t)\, dt < 0.$$

a) Să se arate că există $\xi \in (a, b)$ astfel încît $f(\xi) = 0$.

b) Să se arate că există $\eta \in (a, b)$ astfel încît $\int_a^\eta f(t)\, dt = 0$.

c) Presupunînd că ξ, a cărui existență a fost demonstrată la punctul a, este unic, să se arate că $\xi < \eta$. *(C. Foiaş)*

3. Fie f o funcție reală continuă într-un interval $[a, b]$.

a) Presupunînd că marginile funcției sînt atinse în interiorul intervalului, să se arate că există $\xi \in (a, b)$ astfel încît

$$\int_a^\xi f(t)\, dt = f(\xi)(\xi - a).$$

b) Să se arate că dacă $f(a) = f(b)$, atunci proprietatea rămîne adevărată chiar dacă se renunță la ipoteza restrictivă de la punctul precedent. *(D. Radu)*

4. Fie $\mathcal{M}$ mulțimea matricilor de forma

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

În $\mathcal{M}$ se consideră structura de inel determinată de adunarea și înmulțirea obișnuită a matricilor. Fie $\mathcal{M}^*$ cea mai mare submulțime a lui $\mathcal{M}$ care este corp și fie N mulțimea punctelor din plan care au proprietatea că $(a, b) \in N$ dacă și numai dacă $M(a, b) \in \mathcal{M}^*$.

a) Să se determine mulțimea N.

b) În N să se definească în mod convenabil două operații algebrice astfel încît, față de aceste operații, mulțimea să fie dotată cu o structură de corp izomorfă cu cea a mulțimii $\mathcal{M}^*$. Este acest corp comutativ? *(D. Radu)*

5. Fie G grupul aditiv al polinoamelor cu coeficienți reali de grad cel mult 3 și $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbf{R}$ arbitrare, însă fixate.

a) Să se arate că pentru orice polinom $p \in G$, există un polinom $\varphi_p \in G$ și numai unul care satisface ecuația diferențială $\varphi_p'' + a\varphi_p' + b\varphi_p = p$.

b) Polinomul p fiind dat, să se determine polinomul φ_p.

c) Asocierea $p \to \varphi_p$ definește o funcție $\varphi : G \to G$. Să se arate că φ este un izomorfism al grupului G cu el însuși. *(D. Radu)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, să se stabilească inegalitățile

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$.

2. Folosind identitatea

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1} + \frac{x^{2n}}{1+x};$$

să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$. *(D. Radu)*.

3. Fie $a \in \mathbf{R}$, iar f o funcție reală continuă în intervalul $[a, \infty)$. Se consideră funcția $I(f)$, $I(f) : [a, \infty) \to \mathbf{R}$, dată de relația

$$I(f)(x) = \int_a^x e^t f(t)\,dt.$$

a) Să se studieze derivabilitatea acestei funcții.

b) Să se studieze existența soluțiilor ecuației

$I(f) = kf$, unde k este un parametru real. *(D. Radu)*

4. Să se arate că pentru orice numere naturale m și n polinomul $p(x) = mx(1 - x^n) - nx(1 - x^m)$ este divizibil prin $(1 - x)^2$. Să se determine cîtul. *(M. Becheanu)*

5. Se presupune cunoscut faptul că numerele $\omega = \sqrt[3]{2}$ și $\omega^2 = \sqrt[3]{4}$ sînt iraționale.

a) Să se arate că nu există nici un polinom cu coeficienți raționali, de grad strict inferior lui 3, care să aibă pe ω ca rădăcină.

b) Să se deducă de aici că orice egalitate de tipul $q_0 + q_1\omega + q_2\omega^2 = 0$, unde $q_0, q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ atrage după sine faptul că $q_0 = q_1 = q_2 = 0$. *(D. Radu)*

6. Se consideră funcția f, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată de relația

$$f(t) = \int_t^{2t} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^4 + \theta^2 + 1}}.$$

a) Să se arate că f este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție și să i se calculeze derivata.

b) Pentru $\theta \in (0, +\infty)$ să se stabilească inegalitățile

$$\frac{1}{\theta^2 + 1} < \frac{1}{\sqrt{\theta^4 + \theta^2 + 1}} < \frac{1}{\theta^2}.$$

c) Să se demonstreze, de asemenea, inegalitățile

$$\operatorname{arctg} 2t - \operatorname{arctg} t < f(t) < \frac{\ }{2t},$$

pentru orice $t \in (0, +\infty)$.

d) Se consideră funcția φ definită în intervalul $(0, \infty)$ prin relația

$$\varphi(x) = \int_0^x (\operatorname{arctg} 2t - \operatorname{arctg} t)\, dt.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$.

e) Folosind rezultatele stabilite anterior să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \left(\int_t^{2t} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^4 + \theta^2 + 1}} \right) dt. \quad \textit{(D. Radu)}$$

7. Se consideră ecuația cu coeficienți reali

$$2x^3 - 2mx^2 + (m^2 - 2m - 1)x + n = 0.$$

a) Presupunînd că ecuația admite rădăcina $x_1 = 2$, să se determine în ce intervale pot varia rădăcinile x_2 și x_3 în ipoteza că acestea sînt reale.

b) Presupunînd că rădăcinile x_1, x_2, x_3 sînt reale și că $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, să se determine intervalele în care pot varia rădăcinile x_1, x_2 și x_3. *(C. Ionescu-Țiu)*

8. Oricărui punct $m(x, y)$ din plan i se asociază punctul $T(m)$ de coordonate (x_{Tm}, y_{Tm}), numit transformatul punctului $m(x, y)$, în modul următor

$$x_{Tm} = x + ay, \quad y_{Tm} = bx + 2y, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

a) Să se determine punctele care coincid cu transformatele lor. Discuție.

b) Presupunînd $2a + b = 0$, să se determine locul geometric al punctelor $T(m)$ atunci cînd punctul m descrie cercul de rază unitate cu centrul în originea axelor.

c) Există valori ale parametrilor a și b astfel încît distanța între orice două puncte din plan să coincidă cu distanța între transformatele lor? *(D. Radu)*

Anul 1974

Etapa județeană

1. Să se construiască un polinom f, de gradul 3, cu coeficienți în $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}^*$, astfel încît $f(x)$ să fie întreg pentru orice x întreg. *(Gr. Bănescu)*

2. Fie $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, de două ori derivabilă, astfel încît $f(0) = 0$ și $f''(x) > 0$, $(\forall)\, x \in (0, \infty)$. Să se demonstreze că:

a) există $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$;

b) $\dfrac{f(x)}{x} < f'(x)$, $(\forall)\, x \in (0, \infty)$;

c) funcția $F: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt$, este strict convexă.

3. Să se determine probabilitatea ca dintr-o școală cu 1 096 de elevi să existe cel puțin 4 elevi care să-și serbeze ziua de naștere în aceeași zi a anului. (Se va considera anul cu 365 de zile.) *(I. Tomescu)*

4. O urnă conține a bile albe și b bile negre. Din urnă se scot una cîte una $x + y$ bile, fie

a) punîndu-se de fiecare dată bila extrasă înapoi, fie

b) nepunîndu-se niciodată bila extrasă înapoi.

Se notează cu p_1, respectiv p_2, probabilitățile obținerii de x bile albe și y negre în variantele a), respectiv b). Să se arate că dacă $a = b$ și $x = y$, atunci $p_1 \leqslant p_2$. *(H. Müller)*

5. Se consideră ecuația $x^5 + 5x^3 + 5x - 2m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că, pentru orice m real, ecuația are o singură rădăcină reală.

b) Să se determine această rădăcină în funcție de m, scriind-o sub forma $u + v$, unde $u, v \in \mathbf{R}$ și $uv = -1$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. Să se construiască un polinom de gradul 3 cu coeficienți raționali, nu toți întregi, care să ia valori numere naturale pentru orice x natural.

2. a) Dacă f și g sînt funcții continue pe (a, b), să se arate că trinomul

$$t^2 \int_a^b g^2(x)\, dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)\, dx + \int_a^b f^2(x)\, dx$$

este nenegativ pentru orice t real.

b) Să se deducă inegalitatea

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

c) Să se folosească această inegalitate pentru a deduce inegalitatea

$$\ln \frac{2n}{n+1} \leqslant \frac{n-1}{\sqrt{2n(n+1)}}.$$

3. Un recipient de tablă este compus dintr-un cilindru, un con și o emisferă, sudate la bazelelor. Raza sferei se notează cu x și înălțimea cilindrului cu y; înălțimea conului se ia egală cu x.

a) Să se calculeze în funcție de x și y capacitatea recipientului și suprafața totală a tablei din care este confecționat.

b) Să se dimensioneze recipientul astfel încît capacitatea să fie de $1 m^3$, iar cantitatea de tablă să fie minimă.

4. Să se arate că $0 < \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arctg} x \, dx < \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$. *(C. Ottescu)*

Etapa finală

1. a) Fie $f: (a, b) \to \mathbf{R}$, de două ori derivabilă. Să se arate că f este convexă dacă și numai dacă $f''(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$.

b) Fie $f: \mathbf{R} \to (0, \infty)$, de două ori derivabilă, astfel încît $f''(x) \leqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că f este constantă.

c) Rămîne adevărată concluzia de la punctul b dacă se înlocuiește $\mathbf{R}$ cu $(0, \infty)$?

2. a) Fie $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că funcția $g: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ este descrescătoare. Să se arate că

$$f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2), \quad (\forall)\ x_1, x_2 \in (0, \infty) \tag{1}$$

b) Să se demonstreze că dacă funcția $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ este convexă și verifică (1), atunci funcția $g: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, este descrescătoare.

3. Fie $g: (0, \infty) \to (0, \infty)$ astfel încît $g(x_1 + x_2) \leqslant g(x_1)\, g(x_2)$, $(\forall)\, x_1, x_2 \in (0, \infty)$ și pentru care există $M \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că

$$\int_0^x g(t)\, dt \leqslant M, \ (\forall)\ x \in (0, \infty).$$

Să se arate că:

a) $4g(x) \leqslant [g(x - u) + g(u)]^2$, $(\forall)\ u \in (0, x)$;

b) $\sqrt{g(x)} \leqslant \frac{M}{x}$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$.

4. Dacă rădăcinile polinomului $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + (-1)^n$, au același modul, să se arate că $f(-1) \in \mathbf{R}$. *(N. Micu)*

5. Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt evenimente astfel încît $A_i \subset \bigcup_{j \neq i} A_j$ și $1 \leqslant i < j < k \leqslant n \Rightarrow A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$, să se arate că

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad \textit{(N. Micu)}$$

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se consideră

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ pentru } 0 < x \leqslant 1, \\ 2x \text{ pentru } 1 < x \leqslant 2, \\ -2x + 8 \text{ pentru } 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$$

și se cere:

a) să se traseze curba $y = f(x)$;

b) să se determine funcția $F(x)$ astfel încît pentru orice $x_0 \in (0, 4]$ $F(x_0)$ să reprezinte aria suprafeței plane delimitate de axele Ox, Oy, curba $y = f(x)$ și dreapta $x = x_0$;

c) să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeței plane delimitate de axa Ox, axa Oy și curba $y = f(x)$.

Anul 1975

Etapa județeană

1. Fie $f, g: [a, b] \to \mathbf{R}$, f, g continue. Știind că

$$\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b g(t)\,dt = k, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{Q}$$

să se arate că:

a) $\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b g(t)\,dt = k, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}$;

b) $f(x) = g(x)$. *(L. Panaitopol)*

2. Să se arate că nu există nici o funcție rațională (raport de polinoame) $F(x)$ care să verifice egalitatea

$$F(n) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \quad + \frac{1}{n!},$$

pentru orice n natural. *(D. Vuza)*

3. Într-o urnă sînt n bile numerotate cu $1, 2, \ldots, n$. Din această urnă se extrage o bilă.

a) Care este probabilitatea ca numărul obținut să fie un cub perfect sau un multiplu de 9 micșorat cu 2?

b) Care este probabilitatea ca numărul obținut să fie cub perfect sau un multiplu de 9 micșorat cu 1? *(N. Micu)*

4. Se consideră polinomul $P(x)$ satisfăcînd relația

$$(1 + 2x)P(2x) = (1 + 2^{n+1}x)P(x).$$

a) Să se arate că dacă P nu este identic nul, atunci este de gradul n.

b) Să se determine toate polinoamele $P(x)$. *(V. Matrosenco)*

5. Se consideră polinoamele

$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \quad + a_n$, $Q(x) = x^{n+1} + b_1x^n + \ldots + b_{n+1}$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectiv $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$. Să se arate că $P(x'_1)\,P(x'_2) \quad P(x'_{n+1}) = Q(x_1)\,Q(x_2) \quad Q(x_n)$. *(N. Micu)*

Etapa finală

1. Să se arate că oricare ar fi polinomul $P \in \mathbf{R}[X]$,

$$P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \quad + a_{n-1}X + a_n, \text{ unde } a_i \in [-1, 1],$$
$$i = 1, 2, \quad n, \; n \geqslant 1,$$

$P(X)$ are toate rădăcinile de modul strict mai mic decît 2. *(D. Schwarz)*

2. Fie o funcție definită pe $[0, 1]$ cu valori reale definită prin $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n}$ pentru n natural și $f(x) = 0$ pentru $\in [0, 1]$, $x \neq \frac{1}{n}$ pentru orice n natural. Să se arate că f este integrabilă pe $[0, 1]$ și să se calculeze $\int_0^1 f(t)\, dt$. *(D. Schwarz)*

3. Se dă funcția $f(x) = P(x) \sum_{i=1}^{n} | x - i |$, unde $P(x)$ este un polinom de gradul n. Știind că f este derivabilă pe $\mathbf{R}$, se cere:

a) să se rezolve ecuația $P(x) = 0$;

b) să se arate că dacă n este par graficul lui f admite o axă de simetrie, iar dacă n este impar graficul lui f admite un centru de simetrie. *(V. Matrosenco)*

4. Se dau evenimentele independente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cu probabilitățile de realizare $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Care este probabilitatea să se realizeze un număr impar de evenimente? *(N. Micu, H. Müller)*

5. a) Fie $g: I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe intervalul I. Să se demonstreze că dacă $f: I \to \mathbf{R}$ este derivabilă și satisface relația $f'(x) = f(x)\, g(x)$, pentru orice x din I, atunci dacă f se anulează într-un punct, ea este identic nulă.

b) Să se arate că în condițiile punctului a există o singură funcție f care satisface condiția $f(x_0) = y_0$, unde $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{R}$. *(P. Dályay)*

LICEE DE SPECIALITATE

1. Să se calculeze integrala $\int_0^1 \frac{x^2 e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$.

2. Să se găsească o funcție continuă $f: [0, \infty) \to \mathbf{R}$ cu următoarele proprietăți:

a) există M astfel încît, pentru orice $x > M$, $f(x) < 0$;

b) $\int_0^x f(t)\, dt > 0$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Anul 1976

Etapa județeană

1. Fie $P, Q \in \mathbf{R}_+^*[X]$ așa încît gradul polinomului P să fie mai mic decît gradul polinomului Q. Fie $f, g: [0,1] \to \mathbf{R}_+$, f, g, continue, așa încît

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{P(n) + x}\, dx = \int_0^1 \frac{g(x)}{Q(n) + x}\, dx, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$. *(R. Gologan)*

2. Fiind dat polinomul $Q = X^2 + 3X + 1$ să se determine polinomul R, de grad minim posibil, astfel încît restul împărțirii lui QR cu $X^2 - 2$ să fie 1. Aplicație la raționalizarea lui

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + 3\sqrt[3]{2} + 1}. \quad \textit{(I. Cuculescu)}$$

3. Asupra unei ţinte trag simultan trei trăgători. Primul nimereşte ţinta cu probabilitatea $\frac{1}{2}$, al doilea cu $\frac{5}{6}$, iar al treilea cu $\frac{2}{5}$. Se cere:

a) probabilitatea ca ţinta să fie nimerită de cel puţin un trăgător;

b) probabilitatea ca ţinta să fie nimerită numai de un trăgător.

4. Se consideră ecuaţia $t^3 + 3t + x = 0$, unde $x \in \mathbf{R}$ este un parametru.

a) Să se arate că $(\forall) x \in \mathbf{R}$ ecuaţia are o singură rădăcină reală.

b) Fie $t(x)$ rădăcina reală a acestei ecuaţii. Să se precizeze domeniul de derivabilitate al funcţiei t şi să se calculeze $t'(4)$.

c) Să se traseze graficul funcţiei t de variabilă x.

5. Fiind dat polinomul $P = aX^2 + bX + c$, dacă egalitatea

$$\int_0^1 x^n P(x)\, dx = 1 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

are loc pentru $n \in \{1, 2, 3\}$, atunci ea este adevărată $(\forall) n \in \mathbf{N}$. *(M. Chiriţă)*

Etapa finală

1. Se consideră funcţia $H: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $H(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)g(t)\, dt}{\int_0^x f(t)\, dt}$.

Să se arate că dacă f şi g sînt două funcţii definite pentru $t \in [0, x]$ avînd proprietăţile: f şi g continue, f strict pozitivă, g este crescătoare, atunci funcţia H este crescătoare. *(Gh. Vernic)*

2. Fie funcţia $f: [-1, 1] \to \mathbf{R}$ continuă şi cu proprietatea

$$f(x) + f(-x) = \pi, \quad (\forall)\, x \in [-1, 1].$$

a) Să se calculeze $I_n = \int_0^{2(n+1)\pi} f(\cos x)\, dx$, $n \in \mathbf{N}$.

b) Să se verifice rezultatul de mai sus pentru $f(x) = \arccos x$. *(Anca Bănică)*

3. Se dă ecuaţia

$$x^{n+1} + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0, \text{ unde } a_i (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

sînt numere complexe şi fie x_i rădăcinile ecuaţiei. Să se arate că dacă $r = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, atunci $|x_i|(|x_i| - 1) \leqslant r$. *(M. Chiriţă)*

4. Să se determine funcţiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, avînd derivatele f' şi g' continue, satisfăcînd relaţiile

$$f^2 + g^2 = f'^2 + g'^2 \text{ şi } f + g = g' - f'$$

şi aşa încît ecuaţia $f = g$ să aibă două rădăcini reale, cea mai mică din ele fiind zero. *(V. Matrosenco)*

5. Fie $k > 0$ dat. Se defineşte pe mulţimea $A = (-k, k)$ legea care asociază perechii $(a, b) \in A^2$ elementul

$$a * b = \frac{k^2(a+b)}{k^2 + ab}.$$

a) Precizați dacă mulțimea A înzestrată cu această lege formează grup.

b) Pentru orice $t \in A$ se definește funcția $f: (-k, k) \to \mathbf{R}$, $f(t) = \int_0^t \frac{1}{k^2 - x^2}\, dx$.

Să se arate că f este un izomorfism de la A la $\mathbf{R}$. *(I. Cuculescu)*

Anul 1977

Etapa județeană

1. Fie $\mathbf{R}[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali. Se consideră $p_1, p_2, \ldots, p_n$ și q polinoame din această mulțime care satisfac relația

$$p_1^2(x) + p_2^2(x) + \ldots + p_n^2(x) = q^2(x), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

Ce se poate afirma despre polinoamele p_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci cînd q admite numai rădăcini reale? *(Gh. Vamvu)*

2. Fie funcția $f: (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \int_0^{\arcsin x} \ln(1 + \sin^2 t)\, dt$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\, dx$. *(T. Pigli)*

3. Fie $P \in \mathbf{Z}[X]$ un polinom de gradul n, care are cel puțin o rădăcină rațională și cu proprietatea că există două numere întregi $e_1 < e_2$ așa încît $|P(e_k)| = 1$, $k = 1, 2$.

a) Să se arate că $e_2 - e_1 \leqslant 2$.

b) Demonstrați că dacă P nu are rădăcini multiple, atunci el are o singură rădăcină rațională și găsiți această rădăcină. *(Al. Lupaș)*

Etapa finală

1. Fie P un polinom de forma $P(X) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + ib_k)X^k$, $a_k, b_k \in \mathbf{R}$, cu proprietatea că $P(z)$ este real dacă și numai dacă z este real. Să se arate că gradul lui P este egal cu 1 și că P are toți coeficienții reali. *(S. Holoteson)*

2. Se dă ecuația cu coeficienți reali

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_{2n} = 0$$

în care $a_k = a_{2n-k}$ pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$.

a) Să se arate că prin substituția $x + \frac{1}{x} = y$, se obține o ecuație de grad n în y.

b) Dacă în plus avem $a_0 = a_{2n} = 1$ și $|a_n| \leqslant 2$, atunci să se arate că ecuația are cel puțin două rădăcini complexe. *(S. Buzețeanu)*

3. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuă astfel încît pentru orice $a \neq b$,

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \geqslant f(a).$$

Să se arate că f este constantă. *(N. Anghel)*

4. Dacă $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă și $2\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, atunci există $x_0 \in (0, 1)$, astfel încît $f(x_0) = x_0$. *(N. Mateescu)*

Anul 1978

Etapa județeană

1. Se consideră polinoamele P, $P_1 \in \mathbf{R}[X]$, $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, $P_1 = X^3 + a_1X^2 + b_1X + c_1$. Să se demonstreze că următoarele trei afirmații sînt echivalente:

a) polinoamele P, P_1 au cel puțin două rădăcini comune (reale sau complexe);

b) există două polinoame Q, Q_1 de gradul 1 așa încît $PQ = P_1Q_1$;

c) matricea

$$\begin{pmatrix} a-a_1 & 1 & 1 \\ b-b_1 & a & a_1 \\ c-c_1 & b & b_1 \\ 0 & c & c_1 \end{pmatrix}$$

are toți determinanții de ordinul 3 nuli. *(M. Martin)*

2. Fie $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu derivata descrescătoare, așa încît $f(0) = 0$, $f'(1) > 0$. Să se arate că

$$\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)+1} \leqslant \frac{f(1)}{f'(1)}.$$

Poate avea loc egalitatea? *(R. Gologan)*

3. Se consideră polinomul $P = 4X^3 + 8aX^2 + 4bX + 1$, $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că:

a) dacă x_0 este o rădăcină reală a lui P, atunci $x_0 \leqslant b^2 - 2a$;

b) dacă x_1, x_2 sînt rădăcini distincte ale lui P, ambele rădăcini fiind reale sau ambele complexe nereale, atunci $x_1x_2 \geqslant b - a^2$. *(E. Onofraș)*

4. Dacă $P: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ (a_k reale, $0 \leqslant k \leqslant n$), să se arate că există $c \in (0, 1)$ așa încît

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \quad + \frac{a_n}{n+1} = P(c). \quad \textit{(A. Coța)}$$

Etapa finală

1. Fie $P \in \mathbf{C}[X]$. Să se arate că $(P \circ P \circ \ldots \circ P)(X) - X$ este divizibil cu $P(X) - X$, unde compunerea este luată de n ori, $n \geqslant 1$. *(M. Dădîrlat)*

2. Fie P și Q două polinoame nenule cu coeficienți complecși. Să se arate că P și Q au aceleași rădăcini, cu aceleași ordine de multiplicitate pentru rădă-

cinile corespunzătoare, dacă și numai dacă funcția $f: \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = |P(x) - Q(x)|$ are semn constant pe întreg $\mathbf{C}$, putîndu-se și anula. *(M. Țena)*

3. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) \int_0^x f(t)\, dt$. Arătați că dacă funcția g este descrescătoare, atunci $f = 0$ pe $\mathbf{R}$. *(S. Rădulescu)*

4. a) Care sînt toate valorile posibile ale integralelor $\int_0^1 xf(x)\, dx$ cînd f parcurge mulțimea F a tuturor funcțiilor continue $f: [0, 1] \to [0, 2]$, așa încît

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1?$$

b) Să se arate că dacă f și f^2 aparțin lui F, atunci funcția f este constantă. *(L. Panaitopol)*

Anul 1979

Etapa județeană

1. Fie $h, n \in \mathbf{N}^*$, și x_0 cea mai mare soluție a ecuației $x(x-1) \ldots (x-h+1) = n$. Să se arate că:

a) $x_0 \geqslant n^{\frac{1}{h}} + \frac{h-1}{2}$;

b) $x_0(x_0 - h + 1) < n^{\frac{2}{h}}$;

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(x_0 - n^{\frac{1}{h}} - \frac{h-1}{2}\right) = 0$. *(I. Tomescu)*

2. Se consideră un polinom $P = \sum_{k=1}^{n} a_k (X + b_k)^n$, unde $b_k \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sînt distincte două cîte două și $a_k \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Să se arate că dacă gradul lui P este zero, atunci P este polinomul nul. *(A. Ghioca)*

3. Fie $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și monotonă. Să se arate că $\int_0^1 |f(x) - a|\, dx \geqslant \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| dx$, pentru orice $a \in \mathbf{R}$. *(B. Berceanu)*

4. Se consideră funcția $f: [1, 5] \to \mathbf{R}$, $f(x) = [x]^{[x]}$.

a) Să se arate că f este integrabilă și să se calculeze $\int_1^5 f(x)\, dx$.

b) Să se afle valorile lui a, $1 \leqslant a \leqslant 4$, pentru care funcția f admite primitivă pe intervalul $[a, a+1)$. *(S. Rădulescu)*

Etapa finală

1. Fie $P \in \mathbf{C}[X]$ așa încît oricare ar fi $Q \in \mathbf{C}[X]$, un polinom de gradul 2, restul împărțirii lui P la Q este un polinom de gradul 1. Să se arate că P este un polinom de gradul 1. *(M. Țena)*

2. Să se demonstreze că dacă o funcție $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este continuă și există $a \in \mathbf{R}_+^*$ așa încît

$$a \int_0^x f^2(t)\, dt \leqslant \left(\int_0^x f(t)\, dt \right)^2, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R},$$

atunci $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

3. Fie $P \in \mathbf{C}[X]$. Să se demonstreze că funcția polinomială asociată este pară dacă și numai dacă există $Q \in \mathbf{C}[X]$ așa încît $P(x) = Q(x)Q(-x)$, $(\forall)x \in \mathbf{C}$. *(M. Țena)*

4. Să se determine funcțiile continue $f: [1, \infty) \to \mathbf{R}$ așa încît

$$\int_x^{x^2} f(t)\,dt = \int_1^x tf(t)\,dt, \ (\forall)x \in [1, \infty). \ \textit{(L. Panaitopol)}$$

Anul 1980

Etapa județeană

1. Fie $(K, \cdot)$ un grup cu patru elemente, $K = \{e, a, b, c\}$ așa încît $x^2 = e$, $(\forall)x \in K$, unde e este elementul unitate.

a) Întocmiți tabla operației lui $(K, \cdot)$.

b) Arătați că grupul $(K, \cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbf{Z}_4, +)$.

c) Dacă G este un grup cu patru elemente, atunci $G \simeq K$ sau $G \simeq \mathbf{Z}_4$. Dați un exemplu de grup izomorf cu K. *(I.D. Ion, H. Pop)*

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și n un număr natural. Spunem că un element $a \in G$ are ordinul n (ord $a = n$) dacă $a^n = e$ și $a^k = e$, $k \in \mathbf{Z}$ implică n divide k.

a) Arătați că numărul complex $\xi_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$ este element de ordinul n al grupului $(\mathbf{C}, \cdot)$.

b) Dacă numerele naturale m și n sînt prime, atunci $\xi_m \xi_n$ este element de ordinul mn al grupului $(\mathbf{C}, \cdot)$.

3. Se consideră funcția $f: [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0, \\ 5x, & x \in [-1, 0). \end{cases}$

a) Să se arate că f este integrabilă și că pentru orice $x, y \in [-1, 1]$, așa încît $x < y$, are loc relația $\int_x^y f(t)\,dt = \frac{1}{2}(yf(y) - xf(x))$.

b) Să se determine toate funcțiile integrabile $f: [-1, 1] \to \mathbf{R}$ așa încît pentru orice $x, y \in [-1, 1]$ cu proprietatea $x < y$ are loc relația

$$\int_x^y f(t)\,dt = \frac{1}{2}(yf(y) - xf(x)). \ \textit{(N. Boboc, M. Chiriță)}$$

4. Se consideră n bile numerotate de la 1 la n. Se introduc la întîmplare în trei urne. Care este probabilitatea ca într-o urnă să fie trei bile pe care sînt înscrise trei numere care să fie multipli de trei? *(M. Chiriță)*

Etapa finală

1. Să se determine toate polinoamele $P \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea că $P(x^2) = P^2(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

2. Să se arate că grupul aditiv al unui inel integru nu este izomorf cu grupul multiplicativ al elementelor sale inversabile. (Inel integru este un inel comutativ cu element unitate și fără divizori ai lui zero.)

3. Să se arate că $\int_0^1 f^2(t)\,dt \geq \frac{1}{3}$ pentru orice funcție continuă $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că $\int_x^1 f(t)\,dt \geq \frac{1-x^2}{2}$. *(D. Tănăsie)*

4. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și periodică, de perioadă $T > 0$. Să se arate că:

a) pentru orice $a \in \mathbf{R}$ avem $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$;

b) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(nx)dx = \frac{b-a}{T}\int_a^T f(x)\,dx$, pentru orice $a, b \in \mathbf{R}(a < b)$.

Anul 1981

Etapa județeană

1. Să se determine primitivele funcției $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$.

2. Fie A un inel cu cinci elemente. Să se arate că 5 este cel mai mic $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + 1}_{n \text{ ori}} = 0$ și pe baza acestui rezultat să se demonstreze că inelul A este comutativ.

3. Se consideră mulțimea C a tuturor funcțiilor reale continue pe $\mathbf{R}$, $C = \{f: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ continuă}\}$ înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor. Pentru $k, m \in \mathbf{R}$ se notează $H_k = \{f \in C \mid f(k + x) + f(k - x) = 0, (\forall)x \in \mathbf{R}\}$ și $G_m = \{g \in C \mid g(m) = 1$ și $g(m + x)g(m - x) = 1, (\forall)\ x \in \mathbf{R}\}$. Să se arate că $(H_k, +)$ și $(G_m, \cdot)$ sînt grupuri izomorfe. *(E. Păltănea)*

4. Folosind faptul că orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acest interval, să se arate că dacă funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție care admite primitive, atunci funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = |x|f(x)$ admite primitive. *(M. Rădulescu)*

Etapa finală

1. Fie A un inel cu proprietatea că $x^6 = x$ pentru orice $x \in A$. Atunci $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$.

2. a) Să se arate că produsul elementelor nenule ale unui corp finit comutativ este egal cu -1.

b) Să se deducă de aici că pentru orice număr prim p, numărul p divide pe $(p-1)! + 1$.

3. Fie $f, g: (a, b) \to \mathbf{R}$ două funcții continue diferite și funcția $h: (a, b) \to \mathbf{R}$ definită prin

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \cap (a, b), \\ g(x) & \text{dacă } x \in (a, b) \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Să se demonstreze că h nu admite primitive pe (a, b).

4. Fie $a \geqslant 1$ și $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Să se arate că următoarea limită există și să se calculeze valoarea ei:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right|^a + \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right)\right|^a + \quad + \left|f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f\left(\frac{n}{n}\right)\right|^a}{n}.$$

(S. Rădulescu)

Anul 1982

Etapa județeană

1. Fie $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale strict pozitive cu proprietatea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{a_1 + a_2 + \quad + a_n} = 0.$$

Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{a_1 + a_2 \ldots + a_k}{a_1 + a_2 + \quad + a_n}\right) \frac{a_k}{a_1 + a_2 + \quad + a_n} = \int_0^1 f(x)\, dx$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} kf\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\, dx$. *(M. Rădulescu)*

2. Se consideră funcțiile $f_n: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite astfel:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^n \frac{1}{x} & \text{pentru } x \in \mathbf{R}^*, \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \text{ unde } n \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

a) Să se arate că f_2 nu are primitivă pe $\mathbf{R}$ și că f_3 are primitivă pe $\mathbf{R}$.

b) Să se arate că f_n are primitivă pe $\mathbf{R}$ dacă și numai dacă $n \in 2\mathbf{N} + 1$.

3. Se consideră $K = \{0, 1, a, b\}$ un corp cu patru elemente. Să se arate că:

a) $ab = ba = 1$;

b) $a^2 = b$, $a^3 = 1$, $a^2 + a + 1 = 0$;

c) $1 + 1 = 0$.

Să se întocmească tabla de adunare. *(I.D. Ion)*

4. Fie A un inel cu proprietatea că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$ ecuația $x^n = 0$ are în A numai soluția $x = 0$. Să se arate că:

a) dacă $ab = 0$, unde $a, b \in A$, atunci $ba = 0$ și $axb = 0$ pentru orice $x \in A$;

b) dacă $a_1a_2a_3 = 0$, unde $a_1, a_2, a_3 \in A$, atunci $a_2a_3a_1 = a_3a_1a_2 = 0$;

c) dacă $a_1a_2 \ldots a_n = 0$, ($a_k \in A$ pentru $1 \leqslant k \leqslant n$), atunci $a_{i_1}a_{i_2} \ldots a_{i_n} = 0$ oricare ar fi permutarea $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Etapa finală

1. Fie d_1 și d_2 doi întregi liberi de pătrate și $f: \mathbf{Q}(\sqrt{d_1}) \to \mathbf{Q}(\sqrt{d_2})$ un izomorfism de corpuri.

a) Să se arate că $d_1 = d_2$.

b) Să se determine automorfismele corpului $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, unde d este un număr întreg liber de pătrate.

2. Să se determine funcțiile continue $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ pentru care

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,dx. \text{ (T. Andreescu)}$$

3. Fie A un inel cu proprietatea că pentru orice $x \in A$, $x^2 = 0$ implică $x = 0$. Se definește centrul lui A ca fiind mulțimea $Z_A = \{x \in A \mid xy = yx, (\forall)\, y \in A\}$. Să se arate că:

a) dacă $x \in A$ și $z^2 = z$, atunci $zxz - xz = 0$;

b) orice element idempotent din A aparține centrului lui A.

4. Fie $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$. Să se arate că există $x_0 \in (0, 1)$ astfel încît

$$\frac{1}{1 + x_0} < f(x_0) < \frac{1}{2x_0}. \text{ (M. Chiriță)}$$

Anul 1983

Etapa județeană

1. Pe mulțimea M se definește o operație notată multiplicativ, cu proprietatea $x(yx) = y$, oricare ar fi $x, y \in M$. Să se demonstreze că fiecare din ecuațiile $ax = b$ și $xa = b$, unde $a, b \in M$ au soluție unică în M. (M. Mogoșanu)

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Dacă există un număr întreg $n > 0$ astfel încît aplicațiile $f: G \to G$, $f(x) = x^n$, oricare ar fi $x \in G$, $g: G \to G$, $g(x) = x^{n+1}$, oricare ar fi $x \in G$, sînt morfisme surjective de grupuri, atunci G este comutativ. (M. Chiriță)

3. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă astfel încît

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

a) Să se arate că funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f'\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pentru } x \neq 0. \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbf{R}$.

b) Utilizînd funcția $f(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$, să se arate că funcția $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} & \text{pentru } x \neq 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbf{R}$. (L. Panaitopol)

4. Fie funcțiile $f, g: [a, b] \to \mathbf{R}$ și $k > 0$, $c \geqslant 1$, cu proprietatea $|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|g(x) - g(y)|^c$, oricare ar fi $x, y \in [a, b]$. Să se arate că dacă g este integrabilă Riemann, atunci și f este integrabilă Riemann. (S. Rădulescu)

Etapa finală

1. Fie $\mathbf{Z}_p$ corpul claselor de resturi modulo p ($p \geqslant 2$ număr prim), $(\mathbf{Z}_p, +)$ grupul aditiv al corpului, iar $(\mathbf{Z}_p, \cdot)$ grupul multiplicativ al elementelor sale nenule. Să se determine morfismele de grup de la $(\mathbf{Z}_p, +)$ la $(\mathbf{Z}_p, \cdot)$. *(C. Niță)*

2. Fie polinomul $f(X) = \hat{a} + \hat{b}X \in \mathbf{Z}_n[X]$, unde $n = p^r$ cu p număr prim și $r \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se arate că $f(X)$ este element inversabil al inelului $\mathbf{Z}_n[X]$ dacă și numai dacă p nu divide a și p divide b.

b) Cîte polinoame de grad cel mult 1 din inelul $\mathbf{Z}_n[X]$ sînt inversabile? *(I.D. Ion)*

3. Fie $f(x) = \dfrac{1}{3 + \sin x + \cos x}$,

a) Să se afle o primitivă a funcției f pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Să se afle primitivele funcției f pe intervalul $[0, 2\pi]$. *(I. Bârză)*

4. Fie $f_0 : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și f_{n+1} primitiva lui f_n pe intervalul $[0, 1]$ care se anulează în origine, $n \in \mathbf{N}$. Dacă $f_{1982}(1) = \dfrac{1}{1983!}$, să se demonstreze că există $x_0 \in [0, 1]$ astfel încît $f_0(x_0) = x_0$. *(T. Andreescu)*

Anul 1984

Etapa județeană

1. Fie G un grup cu $2n$ elemente, $n \geqslant 2$. Dacă G are două subgrupuri H_1 și H_2, fiecare cu n elemente, așa încît $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, să se demonstreze că:

a) pentru orice $x_1 \in H_1 \setminus \{e\}$ și orice $x_2 \in H_2 \setminus \{e\}$, avem $x_1 x_2 = c$, unde $\{c\} = G \setminus (H_1 \cup H_2)$;

b) numărul n este egal cu 2 și G este izomorf cu grupul lui Klein;

c) grupul lui Klein verifică ipotezele enunțului. *(T. Albu, I.D. Ion, C. Ursu)*

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $A = \mathbf{Z} \times G$. Pe mulțimea A se definește legea de compoziție $(n, x) * (m, y) = (n + m, xy)$, $(\forall)\ (n, x), (m, y) \in A$. Să se demonstreze că:

a) $(A, *)$ este grup;

b) $(\mathbf{Z}, +)$ este izomorf cu $(A, *)$ dacă și numai dacă G are un singur element. *(T. Albu)*

3. Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ admite primitive, atunci funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x(1 + |x|))$ admite primitive pe $\mathbf{R}$. *(M. Piticari)*

4. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ așa încît f este integrabilă Riemann și g admite primitiva G pe $[a, b]$. Să se arate că dacă $f \leqslant g$ pe $[a, b]$, atunci:

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leqslant G(b) - G(a)$;

b) dacă $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a)$, atunci g este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

(S. Rădulescu)

Etapa finală

1. Fie A un inel și funcția $f: A \times A \to A$ definită prin $f(x, y) = (xy)^2 - x^2y^2$.

a) Să se calculeze valoarea expresiei $E(x, y) = f(1 + x, 1 + y) - f(1 + x, y) - f(x, 1 + y) + f(x, y)$, unde $1 \in A$ este elementul unitate al inelului A.

b) Dacă inelul A are proprietatea că $x + x = 0$ implică $x = 0$ și dacă $(xy)^2 - (yx)^2 = x^2y^2 - y^2x^2$, $(\forall)\ x, y \in A$, atunci A este comutativ. *(Ș. Buzețeanu, C. Niță)*

2. Fie A un inel cu 8 elemente. Notăm cu 0 și 1 elementul zero, respectiv elementul unitate din A. Să se arate că

a) $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{8 \text{ ori}} = 0$ și $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ ori}} = 0$, oricare ar fi k impar.

b) dacă există $a \in A$, așa încît $a^3 + a + 1 = 0$, atunci $a \neq 0$, $a \neq 1$, $1 + 1 = 0$, $a^7 = 1$ și A este corp. *(I.D. Ion)*

3. Fie funcția $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$. Dacă f este derivabilă pe $[0, 1]$ și există $a \in (0, 1]$ așa încît $\int_0^a f(x)\, dx = 0$, să se arate că $\left| \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leqslant \frac{1 - a}{2} \sup\limits_{x \in (0, 1)} |f'(x)|$. Poate avea loc egalitatea? *(R. Gologan)*

4. Să se determine funcțiile $f: [0, 1] \to \mathbf{R}_+$ continue și monoton descrescătoare pe tot domeniul de definiție, care satisfac simultan condițiile

$$\int_0^1 f(x)\, dx \leqslant 1 \text{ și } \int_0^1 f(x^3)\, dx \leqslant 3\left(\int_0^1 xf(x)\, dx\right)^2. \text{ (I.V. Maftei)}$$

Anul 1985

Etapa județeană

1. Fie G un grup cu proprietatea următoare: G se poate scrie ca reuniunea a trei subgrupuri diferite de G dintre care două au cîte două elemente. Să se arate că G este izomorf cu grupul lui Klein.

2. Fie A un inel așa încît $1 + 1 = 0$ și pentru orice $x \in A$, $x^2 = 0$ sau $x^2 = 1$.

a) Să se demonstreze că inelul A este comutativ.

b) Să se dea un exemplu de inel cu patru elemente avînd proprietățile de mai sus. *(T. Albu, L. Panaitopol)*

3. Să se arate că pentru orice funcție inversabilă, derivabilă și cu derivata continuă $f: [a, b] \to [c, d]$, unde $a < b$ și $c < d$, avem

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\, dy = bf(b) - af(a)$$

și apoi să se deducă inegalitatea $\int_1^e \sqrt{\ln x}\, dx \leqslant e - \frac{4}{3}$.

4. Fie $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă Riemann și $(b_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leqslant M \text{ pentru orice } n \geqslant 1.$$

Să se demonstreze că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_k = 0. \text{ (S. Rădulescu)}$$

Etapa finală

1. Fie A un inel și 1 elementul său unitate.

a) Dacă $x \in A$ și $1 + 1 = 0$, să se exprime $(x + 1)^n$ ca sumă de puteri ale lui x, pentru $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

b) Dacă există $n \in \mathbf{N}^*$ așa încît $x^{n+1} = x^n$, $(\forall)\, x \in A$, să se arate că $1 + 1 = 0$ și că $x^2 = x$, $(\forall)\, x \in A$. *(L. Panaitopol)*

2. Fie $p \in \mathbf{N}^*$ un număr prim și $K = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Z}_p\right\}$. Să se demonstreze că mulțimea K înzestrată cu legile de adunare și înmulțire a matricilor este corp dacă și numai dacă $p \equiv 3 \pmod 4$. *(T. Albu)*

3. Dacă $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție de două ori derivabilă așa încît $f''(x) \in \mathbf{R}^*$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\, dx \neq (b - a)\, f\left(\frac{a + b}{2}\right). \quad \textit{(T. Andreescu)}$$

4. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ și $h: [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă așa încît

$$|h(x)| \leqslant \left|\int_a^x h(t)\, dt\right|, \ (\forall)\, x \in [a, b],$$

atunci $h(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$. *(M. Chiriță, C. Rădulescu)*

Anul 1986

Etapa județeană

1. Pentru orice $k \in \mathbf{Z}$ se consideră mulțimea de matrici

$$A_k = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Z}\right\}.$$

a) Să se demonstreze că A_k este inel comutativ față de adunarea și înmulțirea matricilor.

b) Pentru ce valori ale lui k, inelul A_k are divizori ai lui zero?

c) Să se demonstreze că inelele A_k și A_p sînt izomorfe dacă și numai dacă $p = k$. *(T. Albu)*

2. Fie G un grup multiplicativ cu proprietățile $(xy)^3 = x^3y^3$, $(xy)^4 = x^4y^4$, $(xy)^5 = x^5y^5$, $(\forall)\, x, y \in G$. Să se arate că grupul G este comutativ.

3. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx$.

4. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție care admite primitiva F. Să se arate că dacă f are proprietatea $f(x) \leqslant \dfrac{|x|}{1 + |x|}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, atunci există un unic $x_0 \in \mathbf{R}$ așa încît $F(x_0) = x_0$. *(S. Rădulescu)*

Etapa finală

1. Fie $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Să se arate că funcția $g: [0, 1] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x^2)$ este integrabilă. *(S. Rădulescu)*

2. Să se arate că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{2} (1 + \sin x \cos^2 x) \, dx.$$

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup necomutativ cu 8 elemente și e elementul său neutru, $a \in G$ un element de ordinul 4 și $b \in G \setminus \{e, a, a^2, a^3\}$. Să se arate că $G = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$; $ab = ba^3$ și $b^2 \in \{e, a^2\}$.

4. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural. Să se arate că următoarele afirmații sînt echivalente:

a) numărul elementelor inversabile ale inelului $\mathbf{Z}_n$ este egal cu numărul elementelor neinversabile;

b) există $k \in \mathbf{N}$ așa încît $n = 2^k$. *(M. Țena)*

Anul 1987

Etapa județeană

1. Să se calculeze $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos nt \, dt$, $n \in \mathbf{N}$.

2. Să se arate că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$ admite pe intervalul $I = [2, \infty)$ o primitivă de forma $F(x) = \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, cu P, Q funcții polinomiale cu coeficienți întregi. Dar pe intervalul $J = (-\infty, 2]$?

3. Fie $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă și $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale nenegative. Să se arate că pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ există $c \in [a, b]$ astfel încît

$$\sum_{k=1}^{n} a_i \int_c^{x_i} f(t) \, dt = 0.$$

4. Să se arate că un inel A astfel încît $(\forall)\, x, y \in A$, $(x^2 - x)y = y(x^2 - x)$ este comutativ.

5. Fie A un inel comutativ unitar. Se consideră următoarele două afirmații:

a) există $a \in A$ unic, astfel încît $a^2 = -1$;

b) $1 + 1 = 0$ și pentru orice $a \in A$ există $b \in A$ cu proprietatea că $a = b^2$.

Să se arate că dacă A este finit, atunci afirmațiile a) și b) sînt echivalente. Este adevărat acest rezultat în cazul inelului $A = \mathbf{Z}_2[X]$? *(M. Țena)*

Etapa finală

1. Fie $I = \mathbf{R}_+^*$ și $f: I \to I$ o funcție care admite o primitivă F pe I astfel încît $F(x) \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$, $(\forall)\, x \in I$. Să se arate că funcția $g: I \to I$, $g(x) = F(x) \cdot F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ este constantă și să se determine apoi funcția f.

2. Fie K un corp (comutativ sau nu). Dacă K_1, K_2, K_3 sînt subcorpuri ale lui K astfel încît $K_i \neq K$, $(\forall)\, i = \overline{1, 3}$, atunci $\bigcup_{i=1}^{3} K_i \neq K$. *(C. Năstăsescu)*

3. Se consideră ecuația $\int_0^1 |t + x(1-t)^m|\, dt = \frac{1}{2}$, în care necunoscuta este x, iar m este un parametru real.

a) Să se rezolve ecuația în cazul $m = 1$.

b) Să se arate că pentru orice $m > 0$, ecuația admite exact două rădăcini. *(O. Stănăşilă)*

4. Fie $n \geq 2$ un număr întreg și fie G grupul multiplicativ al elementelor inversabile ale inelului $\mathbf{Z}_n$. Dacă orice element $x \in G$ satisface condiția $x^{-1} = x$, se cere:

a) să se arate că numărul elementelor lui G este o putere a lui 2;

b) să se determine n.

Anul 1988

Etapa județeană

1. Să se determine o primitivă a funcției $f: (0, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}).$$

2. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu următoarea proprietate: oricare ar fi funcția continuă $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, funcția $h = f + g$ are proprietatea lui Darboux. Rezultă în mod necesar că f este continuă? *(L. Panaitopol)*

3. Fie $M = (1, \infty)$ și „$\circ$" o lege de compoziție pe M, $\circ : M \times M \to M$, definită astfel:

$$x \circ y = xy + ax + by + c, \quad a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Să se determine a, b, c știind că $(M, \circ)$ este grup și să se arate că $(M, \circ)$ este izomorf cu grupul $(\mathbf{R}, +)$. *(L. Panaitopol)*

4. Fie G un subgrup nenul al grupului $(\mathbf{R}, +)$ cu proprietatea că $G \cap (-a, a)$ este o mulțime finită, oricare ar fi $a \in \mathbf{R}_+^*$. Să se arate că grupul $(G, +)$ este izomorf cu grupul $(\mathbf{Z}, +)$. *(I.D. Ion)*

Etapa finală

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se calculeze partea întreagă a numărului

$$\sum_{k=1}^{2^n} k^{\frac{1}{n}-1}.$$

2. Fie $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$. Să se arate că există $x_0 \in [0, 1]$, astfel încît

$$\int_0^{x_0} f(t)\, dt = (f(x_0))^3. \quad \textit{(J. Crînganu)}$$

3. Fie G un grup finit de ordin n și $f: G \to G$ un omomorfism cu proprietățile: i) $f \circ f = 1_G$; ii) $f(x) = x$ implică $x = e$. Să se arate că:

a) $\{f(x)x^{-1} \mid x \in G\} = G$;

b) G este abelian;

c) n este impar.

4. Să se demonstreze că dacă polinomul $P \in \mathbf{R}[X]$, de grad n, are n rădăcini reale, atunci, oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$, polinomul $Q(X) = P(X + ia) + P(X - ia)$ are, de asemenea, n rădăcini reale.

Anul 1989

Etapa județeană

1. Fie $n > 2$ un număr natural și $p \in \mathbf{N}$, $p < n$. Să se arate că există un număr natural unic x, $1 < x < 2^n$, astfel încît 2^n divide pe $(1 + 2^p + 2^{n-p})x - 1$.

2. Fie p un număr natural prim și mulțimile de numere complexe

$$T = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\},\ U = \{z \in \mathbf{C} \mid (\exists)\ n \in \mathbf{N}^*,\ z^n = 1\},$$

$$V = \{z \in \mathbf{C} \mid (\exists)\ t \in \mathbf{N},\ z^{p^t} = 1\}.$$

i) Să se arate că T, U, V sînt subgrupuri ale lui $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ și să se precizeze forma elementelor lor.

ii) Să se arate că orice subgrup propriu al lui V este ciclic și finit, dar V nu este ciclic.

iii) Să se dea exemple de grupuri izomorfe cu T

iv) Să se găsească morfisme de grupuri $f, g: (\mathbf{C}^*, \cdot) \to (\mathbf{C}^*, \cdot)$ astfel încît $\operatorname{Im} f = T$ și $\{z \in \mathbf{C}^* \mid g(z) = 1\} = T$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită de

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{1 + t^2}}\, dt,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că pentru orice $y \in \mathbf{R}$ ecuația $f(x) = y$ admite o singură rădăcină $x \in \mathbf{R}$.

4. Să se arate că dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ are limită finită în orice punct din $[a, b]$, atunci este integrabilă.

Etapa finală

1. Fie $P = X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n$ un polinom cu coeficienți reali și care are toate rădăcinile reale și conținute în intervalul $[0, 1]$. Să se demonstreze inegalitatea

$$a_k - a_{k+1} + a_{k+2} - \ldots + (-1)^{n-k} a_n \geqslant 0,\ (\forall)\ k,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

(M. Becheanu)

2. Fie K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 corpuri nu neapărat comutative și nu neapărat distincte. Să se arate că inelele produs $K_1 \times K_2 \times K_3$ și $K_4 \times K_5$ nu sînt izomorfe. *(T. Albu)*

3. Fie $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Să se arate că:

i) pentru fiecare $\alpha \in (0, 1)$ există cel puțin un element $c \in (a, b]$ astfel ca

$$\alpha \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx;$$

ii) dacă f este continuă pe (a, b) și $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$, atunci pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ există n numere distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ astfel ca

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{n(b-a)}{\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \quad + \frac{1}{f(x_n)}}. \quad (T.\ Precupan)$$

4. Fie $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și crescătoare astfel încît $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Să se arate că dacă există o funcție $\varphi: [0, 1] \to \mathbf{R}$ continuă, descrescătoare și neconstantă, astfel încît $\int_0^1 f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$, atunci $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [0, 1]$. *(V. Barbu)*

Anul 1990

Etapa județeană

1. Să se determine o primitivă a funcției $f\ (-1, 1) \to \mathbf{R}$ dată prin $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

2. Fie $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ și $F = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

a) Să se arate că pentru orice $\lambda \in F$, $a \in D$ și $z \in D$ avem $\lambda \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \in D$.

b) Pentru orice $\lambda \in F$ și $a \in D$ definim aplicația $\varphi_{\lambda, a}: D \to D$ dată prin

$$\varphi_{\lambda, a}(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Să se arate că mulțimea $G = \{\varphi_{\lambda, a} \mid \lambda \in F,\ a \in D\}$ înzestrată cu operația de compunere a funcțiilor este grup.

3. Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu o operație internă asociativă $*$. Să se arate că există o mulțime nevidă T și o aplicație $f: X \to \mathcal{F}(T)$, (unde $\mathcal{F}(T)$ este mulțimea tuturor funcțiilor $h: T \to T$) avînd proprietatea $f(x*y) = f(x) \circ f(y)$, $(\forall)\, x, y \in X$.

4. Fie $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții derivabile cu proprietatea că funcțiile f', $g': \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt continue. Presupunem că

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ și } f' \text{ este mărginită.}$$

Mai presupunem că $g(x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$ și $g'(0) \neq 0$. Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ definim funcția $h_a: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată prin

$$h_a(x) = \begin{cases} f'\left(\dfrac{1}{g(x)}\right) & \text{dacă } x \neq 0, \\ a & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se arate că funcția h_a admite primitivă dacă și numai dacă $a = 0$. *(I. Chițescu)*

Etapa finală

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup, $x \in G \setminus \{e\}$, $y \in G$ și $k \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}$, astfel încît $x^k = e$ și $xy = y^n x$. Să se demonstreze că:

a) pentru orice $p \in \mathbf{N}$, avem $y^{n^p} = x^p y x^{-p}$;

b) oricare ar fi numerele naturale $b_1, b_2, \ldots, b_k$, există un număr natural a astfel încît să avem

$$y^{b_k} x^{-1} y^{b_{k-1}} x^{-1} \ldots y^{b_1} x^{-1} = y^a. \quad (M.\ Becheanu)$$

2. Fie $K \subset \mathbf{C}$, astfel încît K este un corp în raport cu adunarea și înmulțirea din $\mathbf{C}$. Să se demonstreze că următoarele afirmații sînt echivalente:

a) ecuația $x^2 = a^2 + 1$ are soluții în K, oricare ar fi $a \in K$;

b) ecuația $x^2 = a^2 + a + 1$ are soluții în K, oricare ar fi $a \in K$.

Dați un exemplu de corp K, $K \neq \mathbf{C}$, pentru care una din afirmațiile de mai sus este adevărată. *(V. Alexandru)*

3. Fie $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă. Să se demonstreze că:

a) pentru orice $x \in [0, 1]$, avem

$$f(x) = \int_0^1 f(t)\, dt + \int_0^x t f'(t)\, dt + \int_x^1 (t-1) f'(t)\, dt.$$

b) are loc inegalitatea

$$\int_0^1 |f(t)|\, dt - \left| \int_0^1 f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{3} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f'(t)|. \quad (S.\ Istratc)$$

4. Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ notăm

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + x + x^n}\, dx \text{ și } J_n = \int_0^1 \frac{1}{1 - x + x^n}\, dx.$$

Să se arate că șirurile $(I_n)_{n \geqslant 1}$ și $(J_n)_{n \geqslant 1}$ au limită. Să se calculeze limitele acestor șiruri. *(L. Panaitopol)*

Partea a doua
SOLUȚII

CLASA A VIII-A
Anul 1950

Etapa I

1. a) $x_1 = a$, $x_2 = 1$, $y(x_1) = a - b$, $y(x_2) = b - a = -y(x_1)$. b) Avem $Y(x) = (x - a)(x - b)$, $Y(x_1) = \left(\frac{b-a}{2} + m\right)\left(\frac{a-b}{2} + m\right) = Y(x_2)$.

c) Avem $\Delta = (a - b)^2 + 4k^2 \geqslant 0$.

2. a) $m(\widehat{ADC}) = 135°$ Din $AB' \equiv BB'$ și $AB \equiv BE \equiv AD$ rezultă $B'D \equiv B'E$. Deci $m(\widehat{ADE}) = 45°$ și $m(\widehat{EDC}) = 180°$; b) Fie O centrul cercului înscris în triunghiul dreptunghic isoscel ABB' Avem $\triangle AOB \equiv \triangle BOE$ deoarece OB este latură comună, $AB \equiv BE$ și $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{EBO}) = \frac{45°}{2}$. Atunci $m(\widehat{BOE}) = m(\widehat{AOB}) = 135°$ și patrulaterul $OBCE$ este inscriptibil deoarece $m(\widehat{BOE}) + m(\widehat{BCE}) = 180°$.

Etapa a II-a

1. a) Dacă cele trei localități sînt coliniare, atunci orice dreaptă paralelă cu dreapta determinată de ele corespunde unei soluții. Dacă nu sînt coliniare se consideră triunghiul ABC și fie D piciorul înălțimii dusă prin A. Dreapta care trece prin mijlocul segmentului $[AD]$ și este paralelă cu BC este o soluție. Se obțin trei soluții corespunzătoare celor trei înălțimi; b) Dacă se notează cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, atunci O trebuie să aparțină unei drepte egal depărtate de cele trei vîrfuri. Se duce prin O paralela la BC, notată cu d și fie, respectiv, A', B', C' proiecțiile punctelor A, B, C pe d. Atunci $AA' \equiv BB' \equiv CC'$ și $\triangle AA'O \equiv \triangle BB'O \equiv \triangle CC'O$ deoarece mai avem $OA \equiv OB \equiv OC$. Rezultă că $OA' \equiv OB' \equiv OC'$ și deci punctul A' trebuie să coincidă cu unul din punctele B' sau C'. Dacă A' coincide cu B', atunci $AB \perp$ d sau $AB \perp BC$. Deci triunghiul ABC este dreptunghic. Se constată că pentru orice triunghi dreptunghic, paralela la o catetă dusă prin mijlocul ipotenuzei este soluție a problemei.

2. Fie O centrul cercului, AB coarda, C mijlocul lui AB și D intersecția semidreptei OC cu cercul. Atunci $CD + AB = 2R$ și dacă se notează $x = OC$ avem $CD = R - x$, $AB = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Din ecuația obținută rezultă $x = \frac{3}{5}R$.

Anul 1951

Etapa I

1. a) $\triangle BAE \equiv \triangle DAG$; b) Patrulaterul $AGEY$ este inscriptibil deoarece $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{AGD})$; c) $m(\widehat{EYG}) = m(\widehat{EAG})$; d) Din $m(\widehat{AGD}) = m(\widehat{AEB})$, rezultă $m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{BAG}) + m(\widehat{AEB}) = 180° - m(\widehat{EAG}) = 90°$.

2. Se notează cu L, l, h dimensiunile camerei și se obține sistemul $h^2 = L^2 + l^2$, $L + l = 7$, $Ll + Lh + lh = 47$. Soluție: $L = 4$, $l = 3$, $h = 5$.

Etapa a II-a

1. $$E(x_1, x_2) = \frac{x_1 - a}{x_2 - a} + \frac{x_1 - b}{x_2 - b} = \frac{2x_1x_2 - (a + b)(x_1 + x_2) + 2ab}{(x_2 - a)(x_2 - b)} = 0.$$

Dacă x_1, x_2 sînt cuprinși între a și b, atunci

$$(x_1 - a)(x_2 - b) < 0, \quad (x_1 - b)(x_2 - a) < 0,$$

$$E(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - a)(x_2 - b) + (x_1 - b)(x_2 - a)}{(x_2 - a)(x_2 - b)} \neq 0.$$

Pentru ca $E(x_1, x_2)$ să aibă sens trebuie ca ecuația inițială să nu admită rădăcina a sau b. În ambele cazuri se obține $a = b$. (Se poate presupune că $m^2 \neq 1$, căci altfel nu avem ecuație de gradul 2.)

2. a) Se notează cu O_1 mijlocul segmentului $[AP]$ și cu O_2 mijlocul segmentului $[PB]$. Atunci O_1O_2NM este trapez dreptunghic. Avem

$$m(\widehat{MPN}) = 180° - m(\widehat{O_1PM}) - m(\widehat{O_2PN}) = 180° - \frac{1}{2}[180° - m(\widehat{MO_1P})] -$$

$$- \frac{1}{2}[180° - m(\widehat{PO_2N})] = \frac{1}{2}[m(\widehat{MO_1P}) + m(\widehat{PO_2N})] = 90°.$$

$$m(\widehat{AYB}) = 180° - m(\widehat{MAB}) - m(\widehat{ABN}) = 90°;$$

b) Locul geometric al lui Y este semicercul de diametru $[AB]$; c) Se notează cu R_1 și R_2 razele celor două cercuri și presupunem $R_1 > R_2$. Ducem $O_2\varphi \perp MO_1$, $\varphi \in MO_1$ și din triunghiul $O_1O_2\varphi$ obținem

$$l^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2.$$

Deci avem sistemul $R_1R_2 = \frac{l^2}{4}$, $R_1 + R_2 = \frac{a}{2}$. Notînd $2R_1 = x = AP$, se obține ecuația

$$x^2 - ax + l^2 = 0 \text{ cu soluțiile } x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4l^2}}{2}.$$

Valoarea $b = \sqrt{a^2 - 4l^2}$ este lungimea catetei unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de lungime a și o catetă de lungime $2l$. Apoi $x = \frac{a + b}{2}$; d) Construcția este posibilă dacă $0 < l \leqslant \frac{a}{2}$, deci valoarea maximă a lui l este $\frac{a}{2}$ și atunci P este mijlocul segmentului $[AB]$.

Anul 1952

Etapa I

1. a) $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{AED}) = m(\widehat{EAB})$, $m(\widehat{CBF}) = m(\widehat{CFB}) = m(\widehat{FBA})$. b) Ducem $DD' \perp AE$, $D' \in AE$, $CC' \perp BF$ $C' \in BF$. Avem $\triangle EPF \equiv \triangle DD'E \equiv$ $\equiv \triangle FC'C \equiv \triangle ADD' \equiv \triangle CC'B$. c) $m(\widehat{APB}) = 180° - \dfrac{m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ABC})}{2} =$ $= 90°$, deci P descrie semicercul de diametru $[AB]$. d) Se duce prin E paralela la AD care intersectează pe AB în E'. Deoarece $AE' \equiv DE$, rezultă că E' este fix iar segmentul $[E'E]$ are lungimea constantă b. Locul geometric al punctului E este un semicerc de centru E' și rază b. Analog pentru F.

Etapa a II-a

1. Se notează cu $\{P\} = BC \cap AD$, cu M mijlocul segmentului $[AB]$ și N mijlocul segmentului $[CD]$. Avem

$$AB = 2PM = 2(MN + PM) = 2MN = CD.$$

Se construiește un semicerc de diametru $AB = 2MN + CD$. Din $\dfrac{PA}{AD} =$ $= \dfrac{AB}{AB - CD} = \dfrac{AB}{2MN}$ se determină lungimea corzii $[PA]$ și deci poziția punctului P. Apoi, se determină poziția punctului D pe AP și se duce paralela prin D la AB care intersectează pe BP în punctul C.

Anul 1954

Etapa I

1. Se notează cu x cantitatea de alcool care s-a scos prima dată și cu y cantitatea scoasă a doua oară. Avem $128 - x - y = 98$. După prima înlocuire avem situația:

128 l amestec conțin $128 - x$ l alcool;
x l amestec conțin y l alcool,

mărimile care intervin fiind direct proporționale. Deci $\dfrac{128}{x} = \dfrac{128 - x}{y}$. Rezolvînd sistemul și știind că $x < 128$, se găsește $x = 16$ l și $y = 14$ l.

2. Avem $m(\widehat{BMB'}) = m(\widehat{BMO}) - m(\widehat{B'MO}) = \dfrac{1}{2}(\widehat{OB} - \widehat{OB'}) =$

$$= \frac{1}{2}(m(\widehat{OBM}) - \widehat{BM} - m(\widehat{OB'M}) + \widehat{B'M}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{OBM}) - m(\widehat{OB'M})),$$

deoarece $\widehat{BM} = \widehat{B'M} = 2m(\widehat{BOM})$. De asemenea,

$$m(\widehat{CMC'}) = m(\widehat{OCM}) - m(\widehat{OC'M}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{OBM}) - m(\widehat{OB'M})).$$

Rezultă că $\triangle BMB' \equiv \triangle CMC'$ și $(BB') \equiv (CC')$.

Etapa a II-a

1. a) Se aplică teorema lui Menelaus în triunghiul ADE pentru secanta BM. Avem $\frac{ME}{MD}\cdot\frac{BD}{AB}\cdot\frac{AC}{CE}=1$. b) Se aplică teorema lui Menelaus în triunghiul ABC pentru secanta MD. Avem

$$\frac{MC}{MB}\cdot\frac{BD}{AD}\cdot\frac{AE}{BC}=1 \text{ sau } \frac{1}{2}=\frac{AB-BD}{AC-BD}, \text{ de unde } BD=2AB-AC.$$

2. Se notează cu t intervalul de timp (în ore) de la plecarea primelor maşini, în care cea de a treia maşină o ajunge pe prima, (cea care merge cu 40 km/h) şi cu x viteza celei de-a treia maşini. Se obţine sistemul $40t=x\left(t-\frac{1}{2}\right)$, $50\left(t+\frac{3}{2}\right)=x(t+1)$, cu soluţia: $x=60$ km/h, $t=1$ h 30 min.

Anul 1955

Etapa regională

1. Se obţine sistemul $p+q=-p$ şi $pq=q$, cu soluţiile $p=0$, $q=0$ şi $p=1$, $q=-2$, deci ecuaţiile sînt: $x^2=0$ şi $x^2+x-2=0$.

2. a) $m(\widehat{MCB})=90^\circ-\frac{m(\hat{D})}{2}=\frac{m(\hat{C})}{2}=m(\widehat{NCB})$; b) Din asemănarea triunghiurilor CDQ şi BCP, rezultă $BP\cdot DQ=CD\cdot BC$; c) Se aplică teorema sinusurilor în triunghiurile CNQ şi CPM ţinînd seama că $m(\widehat{QNC})=180^\circ-m(\widehat{PMC})$.

3. Se obţine $(x-a)/(x-b)$.

Etapa finală

1. a) Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice CFD şi ABC rezultă $DF=ac/(b+c)$, iar din teorema bisectoarei $BD=ac/(b+c)$. Din congruenţa triunghiurilor dreptunghice BDE şi CDF rezultă $CD=DE$. b) E este ortocentrul triunghiului BFC, iar F este ortocentrul triunghiului BEC şi proprietatea este cunoscută. c) $m(\widehat{EBF})=m(\widehat{ECF})=90^\circ-m(\widehat{CEB})$, iar din asemănarea triunghiurilor dreptunghice ACE şi ABF se deduce $AE\cdot BF=AF\cdot CE$.

2. Rezultatul este $(x-\sqrt{5}-\sqrt{3})(x+\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

3. Ecuaţia dată este echivalentă cu $x^2+a(3-2\lambda)x+a^2(1-\lambda)=0$. Folosind relaţiile lui Viète condiţia $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{1}{a}$ conduce la ecuaţia $6\lambda^2-18\lambda+13=0$ cu rădăcinile $\lambda_{1,2}=(9\pm\sqrt{3})/6$.

Anul 1956

Etapa regională

1. Notînd $DN=x$, din teorema înălţimii într-un triunghi dreptunghic deducem $QN=\sqrt{x(15-x)}$ şi $MP=\sqrt{(x+13)(28-x)}$, ceea ce conduce la ecuaţia $120^2=x(x+13)(15-x)(28-x)$. Notînd $-x^2+15x=t$ se obţine

ecuația de gradul al doilea $t^2 - 364t - 120^2 = 0$. Convine soluția $t_1 = 36$, ceea ce conduce la $x_1 = 12$ și $x_2 = 3$, soluții care se corespund printr-o simetrie față de axa de simetrie a trapezului isoscel.

2. Expresiile AB'^2 și AC'^2 se obțin prin aplicarea teoremei cosinusului în triunghiurile ABB', respectiv ACC', ținînd seama de expresia lui $\cos B$ și $\cos C$ în funcție de laturile triunghiului ABC. Prima egalitate este o consecință a ultimelor două.

Etapa finală

1. Adunînd membru cu membru cele două ecuații se obține $(x + y)^3 = -64$, deci $x + y = -4$. Substituind valoarea lui y în prima ecuație a sistemului, se găsește ecuația $x^2 + 12x + 27 = 0$. Deci soluțiile reale ale sistemului sînt $x_1 = -9$, $y_1 = 5$ și $x_2 = -3$, $y_2 = -1$.

2. a) $O_1O_2 = 2\sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}$. b) Notînd cu E intersecția diagonalelor dreptunghiului, din condiția ca triunghiul BEO_2 să fie dreptunghic se deduce, folosind reciproca teoremei lui Pitagora, că $a^2 - ab - b^2 = 0$. Convine soluția $a = b(1 + \sqrt{5})/2$. c) Din considerente de arii se deduce că distanța h de la B la O_1O_2 este $h = a(2b + a)/\sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}$. Punînd condiția $h = a$, se deduce relația $a^2 - 2ab - 3b^2 = 0$, de unde $a = 3b$.

Anul 1957

Etapa regională

1. Notînd cu x, y, z timpul necesar tractorului A, B, respectiv, C pentru a ara tot terenul dacă ar lucra singur, se obține sistemul

$$a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1,$$

$$b\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + c\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1,$$

$$b\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{e}{} = 1,$$

care are soluția $x = \dfrac{ace}{(a - b)(c - d)}$,

$y = \dfrac{ace}{(a - b)(d + e - c)}$, $z = \dfrac{ac}{b + c - a}$.

2. a) $\dfrac{GA}{GD} = \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{BC}{BD}$, deci $[BP$ este bisectoarea unghiului $\widehat{CBD}$. Bisectoarele $[CA$, $[BP$ și $[DM$ ale triunghiului BCD se intersectează în L, centrul cercului înscris în triunghi (vezi fig. 5).

Unghiurile $\widehat{CBF}$ și $\widehat{CDM}$ au aceeași măsură deoarece au laturile perpendiculare

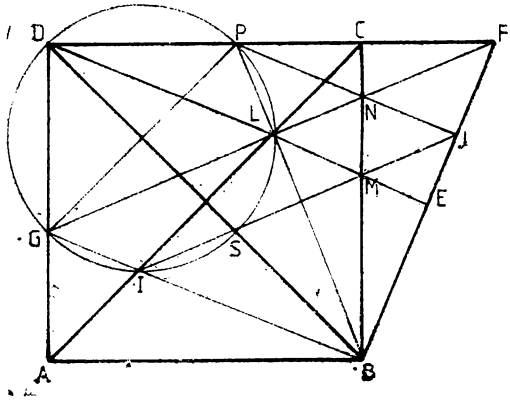


Fig. 5.

două cîte două, deci triunghiurile CBF, BCP și BAG sînt congruente. Prin urmare, $BG = BF$ și triunghiului FBG este isoscel. Rezultă că bisectoarea $[BP$ este și mediană, deci $GL = LF$. Deoarece CA este paralelă cu PG și $PC = CF$, rezultă că CA împarte segmentul $[GF]$ în părți congruente. Deci BP și AC sînt concurente în mijlocul L al segmentului $[GF]$ și $L \in DM$, de unde rezultă că FG și BP trec prin L. b) În triunghiul LMN obținem $m(\widehat{LMN}) = \frac{135°}{2}$, $m(\widehat{LNM}) = \frac{135°}{2}$ (este complementar cu $\widehat{LBN}$), deci $m(\widehat{MLN}) = 45°$ atunci $BG = BP$, deci triunghiul BGP este isoscel și $m(\widehat{GBP}) = 45°$, $m(\widehat{BGP}) = m(\widehat{BPG}) = \frac{135°}{2}$. c) I și L sînt simetrice față de BD și la punctul a s-a demonstrat că $m(\widehat{GLP}) = 90°$, deci I și L se află pe cercul de diametru $[PG]$. d) $m(\widehat{LDP}) = \frac{45°}{2}$, deci $m(\widehat{PL}) = m(\widehat{GI}) = 45°$. Deci $m(\widehat{IL}) = 90°$ și S fiind mijlocul acestui arc, rezultă că $\widehat{GI}$, $\widehat{IS}$, $\widehat{SL}$ și $\widehat{LP}$ au aceeași măsură. e) Avem $m(\widehat{IG}) = m(\widehat{SL})$, deci IS este paralelă cu GF. În triunghiul dreptunghic isoscel BCD, bisectoarele $[BP$ și $[DM$ sînt simetrice față de AC, deci $LP = LM$. Dar $LP = GI$, deci $GI = LM$. Deoarece $m(\widehat{GBF}) = 90°$ se deduce că GI este paralelă cu LM. Deci $GIML$ este paralelogram și IM este paralelă cu GF. În triunghiul isoscel BFP dreptele FL și PJ sînt înălțimi, deci NJ este paralelă cu LE. Mai avem $NJ = NL = LM$ (triunghiul LMN este isoscel), deci $LMJN$ este romb și MJ este paralelă cu GF. Deoarece IS, IM și MJ sînt paralele cu GF, rezultă că I, S, M, J sînt coliniare și dreapta lor suport este paralelă cu FG.

Etapa finală

1. a) Patrulaterul $ABCD$ este înscris în cercul cu diametrul $[AD]$. Dreapta AD este axa de simetrie a figurii, deci bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABD}$ și $\widehat{ACD}$ sînt concurente într-un punct O pe AD, care este egal depărtat de laturile patrulaterului. Deci există un cerc înscris cu centrul O. b) Fie E mijlocul laturii $[BC]$, deci $\{E\} = AD \cap BC$, M proiecția lui E pe AB și N intersecția dreptelor CD și ME. În triunghiul dreptunghic AEB avem $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{AEM})$. Dar $m(\widehat{AEM}) = m(\widehat{DEN})$ și $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ADC})$, deci triunghiul DEN este isoscel. La fel se arată că triunghiul ENC este isoscel, deci $EN = DN = NC$, de unde N este mijlocul lui $[CD]$. Printr-un raționament analog rezultă că perpendiculara din E pe CD trece prin mijlocul lui $[AB]$. c) Fie Q intersecția dreptelor AB și CD iar P proiecția lui E pe CD. Patrulaterul $QMEP$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{MQP}) = m(\widehat{PEN})$. Fie F mijlocul arcului $\widehat{MEP}$. Rezultă că cele două bisectoare sînt QF și EF care sînt perpendiculare deoarece QE este diametrul cercului $MQPE$. Dacă $F \equiv E$ proprietatea este imediată. d) Cercul de diametru $[AB]$ din care se elimină punc-

tele A şi B care corespund unor cazuri degenerate. e) Centrul cercului înscris în patrulaterul $ABCD$ se află pe bisectoarea unghiului drept $\widehat{ABD}$. Locul geometric este format din două segmente fără extremităţi, situate pe bisectoarea interioară, respectiv exterioară a unghiului drept $\widehat{ABD}$ şi delimitate de punctul B, respectiv de intersecţiile acestor bisectoare cu perpendiculara în A pe AB.

2. a) $P(3) = 0$ şi $P(-3) = 0$ formează un sistem incompatibil în a şi b. b) Din $P(-2) = 0$ se obţine $b = 12 - 4a$ şi $\frac{P(x)}{x+2} = x^2 + (a-2)x + 2(3-a)$. Rădăcinile sînt egale pentru $a_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{6}$. c) $a \geq 3$. d) $a > 3$.

Anul 1958

Etapa regională

1. 0.

2. Daca $3a \neq b(2 \pm \sqrt{7})$ se obţine $x = a - b$, $y = a$, $z = a + b$. În caz contrar sistemul este nedeterminat.

3. a) Se obţine $m(\widehat{PMC}) = m(\widehat{DCM})$, deci $CDPM$ este un trapez isoscel. Rezultă $DM = PC$; b) Fie N mijlocul lui $[AB]$. Punctul P se găseşte pe DN deoarece $BCDN$ este paralelogram. $ADCN$ este paralelogram şi punctul I de intersecţie al dreptelor AC şi DN se află la mijlocul fiecărei diagonale $[AC]$ şi $[DN]$. Paralela dusă prin M la AB trece prin I.

Etapa finală

1. $E(x_1) + E(x_2) = a + c$ deoarece $x_1x_2 = -1$.

2. $EMFH$ este paralelogram, deci $[EM]$ şi $[FM]$ sînt înălţimi în triunghiul AEF, adică M este ortocentrul triunghiului AEF; b) Fie $\{O\} = AM \cap BN$. Avem $m(\widehat{BAO}) = 90° - m(\hat{C}) = m(\widehat{ABO})$, deci O se găseşte pe mediatoarea laturii $[AB]$ şi $m(\widehat{AOB}) = 2m(\hat{C})$, adică O este centrul cercului ABC. Deci dreptele AM, BN, CP sînt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC; c) Cercul DEF trece şi prin mijloacele A', B', C' ale laturilor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ (*cercul lui Euler* al triunghiului ABC). Deci centrul cercului DEF se află pe mediatoarele segmentelor $[DA']$, $[EB']$, $[FC']$, adică la mijlocul lui $[HO]$.

3. a) Fie $[PS$ bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{CPD}$, deci $[AB$ este bisectoarea exterioară. Cele două bisectoare intersectează dreapta CD în punctele S şi R, conjugate armonic faţă de C şi D. Deci se consideră $\{R\} = AB \cap CD$, conjugatul S al lui R faţă de C şi D şi se construieşte SP perpendicular pe AB. Analog pentru Q. b) Avem $m(\widehat{PDQ}) = 90° - \frac{m+n}{2}$.

Anul 1959

Etapa regională

1. a) $E = \sqrt{ab}$. b) $E = 1$.

2. a) CC' și DD' trec prin M, mijlocul lui $[AA']$. b) $EM = \frac{DE}{2}$, deci $BM = \frac{AB}{2}$, adică $AB = BB' = A'B'$. c) Pentru $B = B'$

Etapa finală

1. a) $m(\widehat{IMA}) = m(\widehat{IBA}) = m(\widehat{IMM'}) = m(\widehat{IOM'}) = 45°$, deci patrulaterul $OMIM'$ este inscriptibil. Prin urmare, $m(\widehat{MIM'}) = 90°$ și $m(\widehat{MM'I}) = m(\widehat{IMM'}) = 45°$, adică triunghiul MIM' este dreptunghic și isoscel. Analog pentru NIN' b) Fie J al doilea punct de intersecție dintre cercul AIB și dreapta OZ. Avem $m(\widehat{IJA}) = m(\widehat{IMA}) = 45°$, deci JA este paralelă cu OX, de unde se deduce că J este fix. c) Deoarece $m(\widehat{BJA}) = 90°$, centrul cercului AIB se găsește pe mediatoarea segmentului $[AJ]$. Dacă nu se pune condiția de existență a punctelor M și N, respectiv ca B să fie în interiorul unghiului, locul geometric este întreaga mediatoare; în caz contrar se obține cîte o semidreaptă avînd ca suport mediatoarea lui $[AJ]$.

2. a) Se notează cu a numărul de panouri mari și cu b numărul de panouri mici într-un ansamblu, și cu u și v numărul de ansambluri conținute de cele două laturi ale dreptunghiului. Se obțin sistemele: $(u + v)(a + b) = 52$; $(u + v)(3a + 2b) = 120$ pentru montajul cu 104 de panouri și $(u + v)(a + b) = 44$; $(u + v)(3a + 2b) = 120$ pentru sistemul cu 88 de panouri. Dacă terenul nu este pătrat ($u \neq v$; $u, v \geqslant 1$), ținînd seama de descompunerile în factori ale numerelor 52 și $16 = a(u + v)$, respectiv 44 și $32 = a(u + v)$, se obțin soluțiile: $u_1 = 1$, $v_1 = 3$, $a_1 = 4$, $b_1 = 9$, deci 32 de panouri mari și 72 de panouri mici; $u_2 = 1$, $v_2 = 3$, $a_2 = 8$, $b_2 = 3$, deci 64 de panouri mari și 24 de panouri mici. b) Lungimea este egală cu 91 m și lățimea cu 31 m.

Anul 1960

Etapa regională

1. Se notează cu x viteza autobuzului, cu y viteza trenului și cu z cea a autoturismului. Se obține sistemul

$$\frac{18}{x} + \frac{24}{y} + \frac{30}{z} = 1{,}75,$$

$$\frac{15}{x} + \frac{30}{y} + \frac{20}{z} = 1{,}5,$$

$$\frac{27}{x} + \frac{18}{y} + \frac{16}{z} = 1{,}6.$$

Se notează $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$, $\frac{1}{z} = w$ și se obține în final $x = 30$ km/h, $y = 60$ km/h, $z = 40$ km/h.

2. $x \in (-\infty, -1] \cup \{1\}$.

3. a) Fie D, E, F proiecțiile lui M pe BC, CA, respectiv AB. În triunghiul MPQ, DE este linie mijlocie, deci DE este paralelă cu PQ. Analog pentru celelalte laturi; b) $AM = AQ$ și $AM = AR$, deci $AQ = AR$ și AQR este triunghi isoscel, deci mediatoarea laturii $[QR]$ trece prin A; c) Fie S mijlocul segmentului $[QR]$. Patrulaterul $ARFS$ este inscriptibil deoarece $m(\widehat{AFR}) = m(\widehat{ASR}) = 90°$, deci $m(\widehat{SAF}) = m(\widehat{SRF}) = m(\widehat{EFM})$. Patrulaterul $AFME$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{EFM}) = m(\widehat{MAE})$. Rezultă $m(\widehat{SAF}) = m(\widehat{MAE})$.

Etapa finală

1. Se notează $\frac{1}{x+y-1} = u$, $\frac{1}{y+z-3} = v$, $\frac{1}{z+x-2} = w$ și se obține $u = v = w = \frac{1}{4}$ deci $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

2. a) Fie PT tangenta în P la cercul BMP și QU tangenta în Q la cercul CMQ. $m(\widehat{TPM}) = m(\hat{B}) = m(\widehat{QMC}) = m(\widehat{UQC})$, deci PT și QU sînt paralele deoarece MP și AC sînt paralele. b) —d) Fie O, O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, BMP, respectiv, CMQ. Rezultă că B, O_1 și O; C, O_2 și O sînt respectiv coliniare. Avem $m(\widehat{O_1BM}) = 90° - m(\hat{A}) = m(\widehat{O_2CM})$. Locurile geometrice ale lui O_1 și O_2 sînt segmentele $[OB]$, respectiv $[OC]$ fără extremitățile B și C, care corespund unor cazuri degenerate. $m(\widehat{BNC}) = m(\widehat{BNM}) + m(\widehat{MNC}) = 2m(\hat{A})$, deci locul geometric al lui N este arcul de cerc $\widehat{BOC}$. Se observă că cercurile BMP și ABC sînt omotetice cu centrul de omotetie B, iar cercurile CMQ și ABC sînt omotetice cu centrul de omotetie C, deci tangentele de la punctul a sînt paralele cu tangenta în A la cercul ABC.

Anul 1961

Etapa regională

1. Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, $a \neq b$, se obține soluția $x = a + b$, $y = a - b$ și $z = ab$. Dacă $a = 0$ și $b = 0$ sistemul este compatibil nedeterminat: orice numere $x, y, z \in \mathbf{R}$ formează o soluție; pentru $a = 0$ și $b \neq 0$ soluția este $x \in \mathbf{R}$, $y = -b$ și $z = 0$, sistemul fiind compatibil nedeterminat; dacă $a \neq 0$ și $b = 0$, sistemul este de asemenea compatibil nedeterminat, avînd soluția $x = a + \frac{z}{a}$, $y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}$.

2. a) 6 km/h; b) 10 km/h.

3. a) Din congruența triunghiurilor ODR și OBN rezultă $ON = OR$. $ARCN$ este paralelogram deoarece diagonalele se intersectează în părți egale. Dacă $ARCN$ este dreptunghi, atunci $RO = AO = OC$. b) Deoarece $OP = OM$ rezultă $PR = 2PO$, deci P este centrul de greutate al triunghiului ARC. Secanta RN trebuie

dusă astfel încît $AD = DR$. c) P și M sînt centrele de greutate ale triunghiurilor ARC, respectiv ANC, deci AP și CM trec prin mijloacele segmentelor $[CR]$, respectiv $[AN]$. Se observă că BR trece prin mijlocul lui $[CD]$ deoarece $BCRD$ este paralelogram ($DR = AD = BC$). Analog pentru DN și $[AB]$.

Etapa finală

1. Numărul se scrie $2a \cdot 10^3 + 2b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b = 3 \cdot 67(10a + b)$. Un număr de șase cifre cu aceeași proprietate se scrie $2a \cdot 10^5 + 2b \cdot 10^4 + 2c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 2001(100a + 10b + c)$. Deoarece $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, rezultă că printre divizorii săi se găsesc factorii primi 3, 23 și 29.

2. a) Notînd $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$, $\frac{1}{z} = w$ $(xyz \neq 0)$, se rezolvă sistemul liniar obținut și se deduce $x = (a - b)(a - c)$, $y = (b - a)(b - c)$, $z = (c - a)(c - b)$. Sistemul are soluție numai pentru $a, b, c \in \mathbf{R}$, diferite două cîte două. b) Se scriu inegalitățile $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$ care conduc la $a(a - b - c) + b(b - a - c) + c(c - b - a) < 0$ sau $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca < 0$, de unde $(a - b)(a - c) + (b - a)(b - c) + (c - a)(c - b) < ab + bc + ca$.

3. a) Fie D intersecția bisectoarei din A cu cercul. Deoarece PQ și AD sînt perpendiculare, rezultă $m(\widehat{AP}) + m(\widehat{CD}) + m(\widehat{CQ}) = m(\widehat{AQ}) + m(\widehat{PB}) + m(\widehat{BD})$, deci $m(\widehat{AQ}) = m(\widehat{CQ})$ deoarece $m(\widehat{AP}) = m(\widehat{PB})$ și $m(\widehat{CD}) = m(\widehat{BD})$. b) PR este perpendiculară pe bisectoarea exterioară a unghiului $\hat{A}$ și deci formează un triunghi isoscel cu laturile acestui unghi. c) Fie O centrul cercului dat. Avem $m(\widehat{PQ}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{AB}) + m(\widehat{AC})) = 180° - m(\hat{A})$, care este constantă. Rezultă că lungimea PQ este constantă și distanța d de la centrul cercului la coardă este de asemenea constantă pentru A variabil pe arcul situat deasupra corzii $[BC]$, deci mijlocul lui $[PQ]$ descrie un arc de cerc cu centrul O și rază d. Fie E punctul de pe cerc diametral opus lui D. Atunci cînd A tinde către B, respectiv C, pozițiile extreme ale corzii $[PQ]$ sînt $[BE]$, respectiv $[CE]$. Deci locul geometric al mijlocului lui $[PQ]$ este format din două arce de cerc: unul este tangent corzilor $[BE]$ și $[EC]$ și este delimitat de mijloacele acestor corzi; celălalt este tangent corzilor $[BD]$ și $[CD]$ și este delimitat de mijloacele lor, corespunzătoare cazurilor cînd A se află pe arcul de deasupra, respectiv de dedesubtul corzii $[BC]$. Extremitățile corzilor loc geometric nu aparțin locului, deoarece corespund unor cazuri degenerate. Un raționament analog se aplică pentru mijlocul lui $[PR]$.

Anul 1962

Etapa regională

1. a) Avem
$$\sum b^3c^3(a + b)(a + c) = \sum b^3c^3(a^2 + ab + ac + bc) = \sum b^3c^3a^2 = a^2b^2c^2 \sum ab = 0.$$
b) $E = \frac{3x - \Sigma a}{3x - 2\Sigma a}$ c) $E = \sqrt{2}$.

2. a) Din relațiile $m(\widehat{BAC}) = 180° - 2m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DBC})$ și $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{BMC}) - m(\widehat{BAC})$, rezultă $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{MBD})$. b) În triunghiul ABD cu $[BM$ bisectoare, se aplică teorema bisectoarei și se obține $MD = \frac{1}{2} MA = \frac{1}{2} MC$.

Etapa finală

1. Notînd cu x indicele de îndeplinire a normei în lunile martie și aprilie, cu y numărul de zile lucrate în lunile martie sau mai și cu z salariul tarifar orar se obține sistemul

$$7y + 8xyz = 1570{,}4,$$
$$7(y-1) + 8x(y-1)z = 1510,$$
$$7y + 8(x-0{,}2)yz = 1385{,}28.$$

Din primele două ecuații se obține $xz = \frac{53{,}4}{8}$, valoare care substituită în prima ecuație ne conduce la $y=26$ zile. Din a treia ecuație se deduce apoi $z=4{,}45$ lei/oră și $= \frac{53{,}4}{8z} = 1{,}5$. Deci în martie s-au efectuat 208 ore, în aprilie 200 ore și în mai 208 ore; salariul tarifar orar 4,45 lei/oră, iar indicii de îndeplinire a normei au fost: 1,5; 1,5; 1,3.

2. a) Triunghiurile ABC și ADC sînt congruente. Se formează un număr de patru paralelograme cu diagonala comună $[O_1O_2]$. Dacă O_1ACO_2 este romb, atunc ABC este isoscel și cele două romburi se reduc la segmente de dreaptă. b) M se va afla la intersecția cercului circumscris triunghiului CO_1O_2 cu dreapta CD. c) $T_1T_2 = AC - 2CT_1 = a - b$ $(a > b)$.

Anul 1963

Etapa regională

1. Pentru $m \in \{-2, 1\}$ sistemul este compatibil nedeterminat; pentru $m = 6$ sistemul este incompatibil.

2. a) Dacă $M \in [BC]$ rezultă $[B'T] \equiv [C'S] \equiv \frac{1}{2}[AM]$, iar segmentele $[B'T]$ și $[C'S]$ sînt paralele deoarece dreptele lor suport sînt paralele. Se observă că dacă M coincide cu C sau cu B, sau $C \in [BM]$ sau $B \in [MC]$, concluzia problemei rămîne adevărată (vezi fig. 6). b) Pentru ca paralelogramul $B'C'ST$ să fie romb este suficient ca $[B'T] \equiv [B'C']$, echivalent cu $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AN$, echivalent cu $[BC] \equiv [AM]$. *Discuție.* 1° Dacă $d(A, BC) > BC$ nu există nici un punct M cu proprietatea cerută. 2° Dacă $d(A, BC) = BC$, atunci există un singur punct M. 3° Dacă $d(A, BC) < BC$ atunci există două puncte. c) Patrulaterul $A'B'NS$ este paralelogram deoarece $[SN] \equiv [A'B] \equiv \frac{1}{2}[AB]$, deci diagonala $[NA']$ trece prin mijlocul diagonalei $[SB']$.

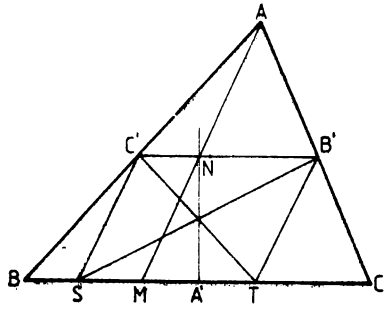


Fig. 6.

Etapa finală

1. a) Presupunem că $[AB]$ nu este diametru și M aparține arcului de cerc mare. Patrulaterul $PMON$ este inscriptibil deoarece $m(\widehat{PMO}) + m(\widehat{PNO}) = 180°$ Patrulaterul $CMPN$ este inscriptibil deoarece

$$m(\widehat{MPN}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{MBN}) - m(\widehat{MxN})) = -\frac{1}{2}m(\widehat{AyB}) + \frac{1}{2}m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{MCA}).$$

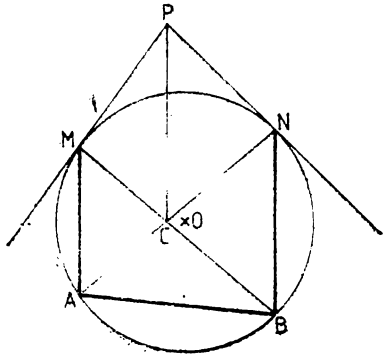


Fig.

Cercul circumscris pentagonului are centrul situat la mijlocul segmentului $[OP]$. Se analizează cazurile cînd $M \equiv A$, $M \equiv B$ și M aparține arcului de cerc mic. Se analizează cazul cînd $[AB]$ este diametrul cercului (vezi fig. 7). *Altă soluție.*

$$m(\widehat{MON}) = m(\widehat{MxN}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{MxN}) + m(\widehat{AyB})) = m(\widehat{ACB}).$$

Rezultă că $MCON$ este inscriptibil și $MPNO$ este inscriptibil, deci cele cinci puncte se găsesc pe cercul determinat de punctele M, O, N; b) $m(\widehat{TMA}) = m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{TPC})$; rezultă $MA \parallel PC$. c) Ținînd cont de rezultatul de la punctul b, pentru ca $AMPC$ să fie paralelogram trebuie ca $AC \parallel MP$, adică $m(\widehat{TMA}) = m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{AyB})$; rezultă $AB = MN$. În acest caz $CMPN$ este trapez și fiind inscriptibil ținînd cont de punctul a rezultă că este un trapez isoscel; d) $m(\widehat{MPN}) = 180° - m(\widehat{MON}) = 180° - m(\widehat{ACB}) = \text{const}$; rezultă că locul geometric al punctului P este cercul cu centrul în O și raza $[OP]$.

2. Notăm cu x, y și z numărul de capsule, respectiv de tipul 1, 2 și 3; obținem

$$0{,}5x + 0{,}2y + 0{,}1z = 13,$$
$$0{,}5x + 0{,}4y + 0{,}3z = 24.$$
$$x \geqslant 10,\ y \geqslant 10,\ z \geqslant 10.$$

Rezolvînd sistemul format din primele ecuații în raport cu obținem: $x = \frac{20 + z}{5}$, $y = 55 - z$. Din $x \geqslant 10$, $y \geqslant 10$ deducem că $z \in [30, 43] \cap N$. Pentru ca $x \in N$ rezultă $z = 5m$, adică $z \in \{30, 35, 40, 45\}$, deci

x	10	11	12	13
y	25	20	15	10
z	30	35	40	45

3. Se elimină numitorii și se obține ecuația (1) $x^2 - (a + b + A^2 + B^2)x + aB^2 + bA^2 + ab = 0$. Discriminantul ecuației este $\Delta = (a - b + A^2 - B^2)^2 +$

$\Delta = 4AB > 0$, deoarece $A \neq 0$ și $B \neq 0$. Ecuația (1) nu admite rădăcinile $x \in \{a, b\}$ în ipoteza $a \neq b$ și $A \neq 0$ și $B \neq 0$. Deci ecuația admite numai două soluții reale diferite. *Generalizare* Funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \to \mathbf{R}$, de forma $f(x) = \frac{A_1^2}{x - a_1} + \frac{A_2^2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n} - M$, unde $M > 0$, are n zerouri numere reale. Pentru aceasta se observă că funcția este continuă pe domeniul de definiție și din tabelul

	$-\infty$		a_1		a_2	$\ldots$	a_{n-1}	$\ldots$	a_n		∞
$f(x)$	$-M$	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞		$-\infty$	∞	$-\infty$	∞	$-M$

se constată că ecuația $f(x) = 0$ admite n rădăcini. S-a presupus că $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Anul 1964

Etapa regională

1. Notăm $\sqrt{a} = x$ și $\sqrt{b} = y$ $(x, y > 0)$. După înlocuire și efectuarea calculelor se obține $E = \frac{2(a + b + \sqrt{ab})}{a - b}$ $a \neq b$.

2. a) Fie $\{M\} = AC \cap PQ$, $\{N_1\} = AA_1 \cap PQ$, $\{P_1\} = AB \cap PQ$, $\{E\} = A_1Q \cap AC$ și $\{D\} = A_1P \cap AB$. Deoarece A_1 se găsește pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ rezultă că $A_1Q = A_1P$, deci triunghiul PA_1Q este isoscel. Se observă că triunghiurile AA_1E și AA_1D sînt congruente, deci AA_1 este bisectoarea unghiului $\widehat{PA_1Q}$. Din faptul că triunghiul PA_1Q este isoscel și A_1A bisectoarea unghiului $\widehat{PA_1Q}$ rezultă că A_1A este mediatoarea segmentului $[PQ]$ (vezi fig. 8). b) Din $QN \parallel AB$ rezultă $\widehat{PQN} \equiv \widehat{AP_1M}$. Din $PN \parallel AC$ se deduce $\widehat{QPN} \equiv \widehat{PMA}$ și triunghiul AP_1M este isoscel; obținem că triunghiul NPQ este isoscel; rezultă că AN_1 trece prin N. c) A_1 este ortocentrul triunghiului PNQ; rezultă (1) $FG \parallel PQ$. În triunghiul PA_1Q avem (2) $DE \parallel PQ$. Din (1) și (2) deducem că $GF \parallel DE$. În triunghiul PGA_1, unghiul $\hat{G}$ este drept și din $[GD]$ mediană rezultă (3) $GD = \frac{1}{2} AP$. La fel se raționează în triunghiul FA_1Q și obținem (4) $FE = \frac{1}{2} A_1Q$. Din (3) și (4) deducem $GD = FE$.

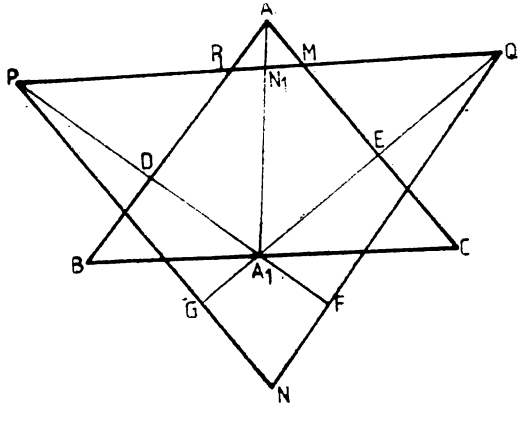


Fig. 8

3. a) $E(x) = x^2 + 9x + 9 + \frac{19}{x - 2}$.

b) $E \in \mathbf{Z}$ implică $x - 2 = \pm 1, \pm 19$; rezultă $x \in \{1, 3, 21\}$.

Etapa finală

1. a) După eliminarea lui x între cele trei ecuații se obține un sistem în necunoscutele y și z de forma

$$by(b-a)+cz(c-a)=2bc-2a^2,$$
$$yb(2c-a-b)+zc(a-2b+c)=2(c-b)(a+b+c).$$

În final se obține $y=\frac{a+c}{b}$ $z=\frac{a+b}{c}$, $x=\frac{b+c}{a}$ cu condiția ca $abc(ab+bc+$ $+ac-a^2-b^2-c^2)\neq 0$. b) Ne bazăm pe inegalitatea cunoscută $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$, $(\forall)\, x>0$. c) $x+1=\frac{a+b+c}{a}$, $y+1=\frac{a+b+c}{b}$, $z+1=\frac{a+b+c}{c}$ și evident $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$.

2. a) Mediatoarele segmentelor $[BA'']$ și $[CA']$ trec prin mijlocul segmentului $[BC]$, care este un punct fix. b) $BA'=AC=CA''$ Patrulaterul $BCA''A'$ este un trapez isoscel. Locul geometric al mijlocului segmentului $[A'A'']$ este mediatoarea segmentului $[BC]$. c) $OA_1A''M$ este dreptunghi și deci $OP=\frac{OA}{2}=\frac{BC}{4}$. Locul geometric al punctului P este semicercul cu centrul în O situat în semiplanul în care nu se află punctul A.

CLASA A IX-A

Anul 1950

Etapa I

1. a) $2\pi r + 2\alpha$: $2\sqrt{\alpha^2 - h^2} + 2\pi(r + h) - 2h \arccos\frac{h}{\alpha}$ $2\sqrt{\alpha^2 - 4h^2} +$ $+ 2\pi(r + 2h) - 4h \arccos\frac{2h}{\alpha}$ b) $1 - 1 + \frac{h}{r} - 1 + \frac{2h}{r}$.

2. Se aplică formula de simplificare a radicalilor suprapuși: $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} \pm 1)$ și se obține că expresia dată este egală cu $28 - 19\sqrt{2}$.

Etapa a II-a

1. a) Se notează, în cele două cercuri, $m(\widehat{A_1A}) = 2\alpha$, $m(\widehat{A_2B}) = 2\beta$, $m(\widehat{AB}) = 2\gamma$, $m(\widehat{B_1B_2}) = 2x$, $m(\widehat{BB_2}) = 2y$, $m(AB_1) = 2z$. Din patrulaterele inscriptibile ABA_2A_1 și ABB_2B_1 obținem relațiile: (1) $\alpha + \gamma = x + y$, $\beta + \gamma = x + z$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că dreptele A_1A_2 și AB nu sînt paralele, deci $AA_1 \neq A_2B$. Fie, de exemplu, $AA_1 < A_2B$, cazul cînd are loc inegalitatea de sens contrar tratîndu-se analog. Ținînd seama de (1) obținem că $\alpha < \beta$, deci $y < z$, deci $BB_2 < AB_1$ și atunci există inegalitatea $\frac{AA_1}{AB_1} < \frac{A_2B}{BB_2}$, ceea ce contrazice ipoteza, care afirmă că aceste două rapoarte sînt egale. Deci $A_1A_2 \parallel AB$. Rezultă că $m(\widehat{ABB_2}) = m(\widehat{BAB_1})$, deci $AB \parallel B_1B_2$. b) În acest caz punctele A_1 și A_2 coincid cu intersecția mediatoarei segmentului AB cu cercul respectiv. Se deduce că $\frac{m}{n} = \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{2}}$, unde R și r sînt lungimile razelor celor două cercuri, iar α și β sînt măsurile arcelor $\widehat{AB}$ în cele două cercuri. Se poate ține seama și de relația $R\sin\frac{\alpha}{2} = r\sin\frac{\beta}{2}$.

2. Fie $\{M_a\} = AM \cap BC$, $\{M_b\} = BM \cap AC$, $\{M_c\} = MC \cap AB$ și să notăm cu h_a, h_b, h_c și cu h'_a, h'_b și h'_c lungimile înălțimilor triunghiului ABC și respectiv distanțele punctului M la laturile BC, AC și AB. Putem scrie

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AM}{AM_a} \text{ și } \frac{\sigma[BMC]}{\sigma[ABC]} = \frac{h'_a}{h_a} = \frac{MM_a}{AM_a} = 1 - \frac{AM}{AM_a}, \text{ deci } 1 =$$

$$= \frac{\Sigma\sigma[BMC]}{\sigma[ABC]} = 3 - \sum\frac{AM}{AM_a}, \text{ deci } \frac{DE}{BC} + \frac{FG}{AC} + \frac{HI}{AB} = \sum\frac{AM}{AM_a} = 2.$$

Anul 1951

Etapa I

1. a) Raza reflectată din M_1 este paralelă cu OA. Deci, dacă se notează cu M_2 intersecția ei cu latura DE, atunci AEM_2M_1 este trapez isoscel și M_2 este mijlocul segmentului $[DE]$. În continuare raza se reflectă paralel cu OD și ajunge în M_3, mijlocul segmentului $[HG]$, apoi, succesiv, în M_4 mijlocul segmentului $[BC]$, M_5 mijlocul segmentului $[EF]$, M_6 mijlocul segmentului $[AH]$, M_7 mijlocul segmentului $[CD]$, M_8 mijlocul segmentului $[FG]$ și în M_1, trecînd prin M. b) M_1M_2 este linie mijlocie în trapezul $AEDB$ și $m(\widehat{BOD}) = \frac{\pi}{2}$. Deci $M_1M_2 = \frac{r(2+\sqrt{2})}{2}$ și lungimea unui parcurs întreg este $4r(2+\sqrt{2})$. c) Pentru ca să ajungă în E se consideră dreapta simetrică cu M_1E față de OM_1 și M va fi intersecția acestei drepte cu OA. Dacă $\{T\} = M_1E \cap OB$, atunci $[BT] \equiv [AM]$ și $[OT] \equiv [OM]$. În trapezul dreptunghic M_1OEB, avem $\frac{OT}{BT} = \frac{OM_1}{BE} = \frac{1}{2}$, deci M este pe segmentul $[AO]$ astfel ca $\frac{OM}{AO} = \frac{1}{3}$.

2. $\frac{\sigma[ABEF]}{\sigma[FECD]} = \frac{3AB+CD}{3CD+AB}$, $\frac{\sigma[ABI]}{\sigma[IDC]} = \frac{AB^2}{CD^2}$. Relația dată este echivalentă cu $(CD-AB)(CD^2+4AB\cdot CD+AB^2) > 0$.

Etapa a II-a

1. a) Se notează, respectiv, cu E și F punctele în care segmentul $[AB]$ intersectează cercul cu centrul în A și cercul cu centrul în B. Din relațiile $m(\widehat{CAE}) + m(\widehat{DBF}) = \pi$, $m(\widehat{AEC}) = \frac{\pi - m(\widehat{CAE})}{2}$, $m(\widehat{DFB}) = \frac{\pi - m(\widehat{DBF})}{2}$, rezultă că $CE \perp DF$ și $m(\widehat{CEA}) = m(\widehat{CDF})$. Cercul de diametru $[CD]$ trece prin punctul $\{G\} = CE \cap DF$ și paralela la AB prin G este tangentă la acest cerc. Dacă cercurile cu centrele în A și B sînt exterioare, atunci cercul de diametru $[CD]$ intersectează segmentul $[AB]$. Dacă cele două cercuri sînt tangente exterioare și $E \equiv F$, atunci cercul de diametru $[CD]$ trece prin E și este tangent dreptei AB. Dacă cele două cercuri se intersectează, atunci cercul de diametru $[CD]$ nu are punct comun cu dreapta AB. b) Dacă O este mijlocul segmentului $[CD]$, atunci $AM \cdot AN = AO^2 - OC^2 = R^2$ și $BN \cdot BM = BO^2 - OD^2 = r^2$. c) Din relațiile de mai sus, dacă se notează $AM = x$, $AN = y$, se obține sistemul simetric $xy = R^2$, $(d-x)(d-y) = r^2$, care conduce la ecuația $t^2 - t\frac{d^2+R^2-r^2}{d} + R^2 = 0$ al cărei discriminant este $\Delta = (d-R-r)(d-R+r)(d+R-r)(d+R+r)$. Condiția ca să existe punctele M și N este $d \leqslant R+r$, care din punct de vedere geometric înseamnă că cercurile sînt exterioare. **2.** Cantitatea de alcool dintr-un litru de soluție, după n operații, este $\left(\frac{a-1}{a}\right)^n$ și $n > \frac{\log 0{,}5}{\log\frac{a-1}{a}}$.

Anul 1952

Etapa I

1. a) Fie O centrul cercului și R raza. Din $AO^2 = AC^2 + OC^2$ se obține $R = 16,9$; b) $\sin(\widehat{AOD}) = \frac{12}{R}$ $l_{AB} = 2R \arcsin \frac{12}{R}$ c) În triunghiul MON avem: $ON^2 = OM^2 + MN^2 - 2OM \cdot MN \cos(\widehat{OMN})$, de unde $MN = \sqrt{10,9 \cdot 22,9} - 11,9$.

2. a) $x = a \pm \sqrt{a^2 - l^2}$. b) $l_{max} \neq a$.

Etapa a II-a

1. Fie O centrul cercurilor mari, O_1 centrul unui cerc mic, A punctul de tangență cu cercul de rază r. B punctul de tangență cu cercul de rază R și OT tangenta din O la cercul de centru O_1 (T punctul de tangență). a) $\sin(\widehat{AOT}) = \frac{\quad}{r + x}$, $\widehat{AOT} = \arcsin \frac{x}{r}$. Din condiția $n \cdot 2 \arcsin \frac{x}{r + x} = 2\pi$ se obține $\frac{x}{r + x} = \sin \frac{\pi}{n}$. Ținând cont și de relația $R - r = 2x$, avem $\frac{r}{R} = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$. b) i) Pe cercul de centru O și rază r se consideră două puncte M, N astfel ca $m(\widehat{MON}) = \frac{2\pi}{n}$. Bisectoarea unghiului $\widehat{MON}$ intersectează cercul în P și fie φ piciorul perpendicularei din P pe OM. Raza x se determină din relația $\frac{x}{x + r} = \frac{P\varphi}{r}$;

ii) Se consideră punctele analoage M', N' P' pe cercul de centru O și rază R și φ' piciorul perpendicularei din P' pe OM' Raza x se determină din $\frac{x}{R - x} = \frac{P'\varphi'}{R}$. c) Raza este $OT = \sqrt{r(r + 2x)}$.

2. $OA = a$, $OB = a \sin \alpha$, $OC = OB \sin \alpha = a \sin^2 \alpha$, $OD = OC \sin \alpha = a \sin^3 \alpha, \ldots$

Anul 1954

Etapa I

1. Se notează, respectiv, cu x și y spațiul parcurs de trăsură și de automobil după t secunde. Atunci $x = 80 + 3t$, $y = 8t - \frac{1}{2} \cdot 0,1\, t^2$ și $t_1 = 20$ s.

2. Se notează cu A și B punctele de intersecție ale celor două cercuri ($A \in CD$) și cu $\{M\} = CO_1 \cap DO_2$. Din $m(\widehat{ACO_2}) = m(\widehat{O_1AC})$ și $m(\widehat{ADO_2}) = m(\widehat{O_2AD})$ rezultă că $m(\widehat{CMD}) = m(\widehat{O_1AO_2}) = m(\widehat{O_1BO_2})$. Locul geometric al punctului M va fi arcul $\widehat{O_1BO_2}$ din cercul circumscris triunghiului O_1BO_2. Se arată că pentru orice punct M al acestui arc există o secantă corespunzătoare CD.

Etapa a II-a

1. a) Avem $\triangle ODE \equiv \triangle ODF$ și prin asemănare $\triangle OAB \equiv \triangle OAC$, deci $[AB] \equiv [AC]$. b) În ipoteza de la punctul precedent avem $[OB] \equiv [OC]$ și $[OE] \equiv [OF]$, deci $EF \parallel BC$ și $\frac{EF}{BC} = \frac{OE}{OB}$. Deoarece $\frac{OE}{OA} = \frac{DE}{AB}$, din $[EF] \equiv [DE]$ rezultă relația dată. c) Mijlocul segmentului BD, O_1, este centrul cercului circumscris patrulaterului $ABED$, iar O_2, mijlocul segmentului $[DC]$ este centrul cercului circumscris patrulaterului $ACFD$. Perpendiculara în O_1 pe planul OAB și perpendiculara în O_2 pe planul OAC se intersectează într-un punct M (sînt conținute într-un plan paralel cu P). M este centrul unei sfere care conține punctele A, B, C, D, E, F, deci $BCFE$ este inscriptibil fiind inclus în intersecția unui plan cu o sferă.

2. Termenii primei progresii sînt $a_m = 1 + 4m$, iar ai celei de a doua $b_n = 4 + 11n$. Termenii comuni sînt soluția ecuației diofantiene $11n - 4m + 3 = 0$. Din algoritmul lui Euclid avem $11 - 3 \cdot 4 + 1 = 0$ sau $3 \cdot 11 - 9 \cdot 4 + 3 = 0$, deci o soluție este $n_0 = 3$, $m_0 = 9$. Soluția generală este $n = 3 + 4k$, $m = 9 + 11k$. Termenii comuni se obțin din $1 + 4(9 + 11k) = 37 + 44k$, care formează o progresie aritmetică.

Anul 1955

Etapa regională

1. Calculînd măsurile unghiurilor triunghiurilor ALB, ARL, AFR se deduce $AL = LB = RL = FR = l/\sqrt{3}$. Din triunghiul dreptunghic ANB se obține $AN = \sqrt{l^2 + 4l^2/3} = l\sqrt{7/3}$. ($AE \cap BF = \{R\}$ și $AC \cap BF = \{L\}$).

2. Ținînd seama că $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ se obține $E = \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)(5+\operatorname{tg}^2 x)}{3\operatorname{tg} x} - \frac{5}{\operatorname{tg} x}$.

3. Deoarece $\frac{A_2B_1}{A_1B_1} = \frac{1}{3}$ și $\frac{A_2B_2}{A_2B_1} = 2$ se obține $A_2B_2 = \frac{2}{3} A_1B_1$, deci lungimile segmentelor $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ... formează o progresie geometrică cu rația $\frac{2}{3}$ a cărei sumă este $a/\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 3a = A_1M$.

Etapa finală

1. Fie $a_1 - 3r$, $a_1 - r$, $a_1 + r$, $a_1 + 3r$ și $\frac{b_1}{q^3}$, $\frac{b_1}{q}$, b_1q, b_1q^3 cele două progresii. Condițiile date conduc la sistemul

$$a_1 - 3r + \frac{b_1}{q^3} = 18,$$

$$a_1 - r + \frac{b_1}{q} = 18,$$

$$a_1 + r + b_1q = 26,$$

$$a_1 + 3r + b_1q^3 = 58.$$

Substituind pe a_1 și r din primele două ecuații în celelalte două ecuații ale sistemului se deduce sistemul:

$$\frac{b_1}{q^3}(1 + q^4 - 2q^2) = 8, \quad \frac{b_1}{q^3}(q^6 - 3q^2 + 2) = 40.$$

De aici rezultă ecuația $8(q^6 - 3q^2 + 1) = 40(q^4 - 2q^2 + 1)$. Făcînd substituția $q^2 = t$ rezultă $t^3 - 5t^2 + 7t - 3 = 0$ cu soluțiile $t_{1,2} = 1$ și $t_3 = 3$. Convine numai $t_3 = 3$, deoarece pentru $q^2 = 1$ numitorul lui b_1 se anulează. Se obține $q = \pm\sqrt{3}$, $b_1 = \pm 6\sqrt{3}$, $r = -2$, $a_1 = 10$. Deci cele două progresii sînt, respectiv, 16, 12, 8, 4 și 2, 6, 18, 54.

2. a) Folosind proprietățile proporțiilor derivate se adună numitorii la numărători, apoi se scad numărătorii din numitori, obținîndu-se $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}$. Această egalitate se scrie sub forma

$$\frac{\sin a \sin d}{\cos a \cos d} = \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c},$$

de unde rezultă, utilizîndu-se aceleași operații cu rapoarte, cealaltă egalitate care trebuia demonstrată. b) Se dezvoltă sinusurile de diferență de unghiuri, se înlocuiește $\sin^2 a - 1 = -\cos^2 a$, se dă factor comun $\cos a$ și se obține $E = -\cos a \cos(a - b - c)$.

3. a) Se duc prin M și N paralele la AB, și anume GH în planul $ABCD$ ($G \in AD$) și IJ în planul $ABEF$ ($I \in AF$). Rezultă că $AG = AI$, deci planul $GHIJ$, care conține dreapta MN, este paralel cu planul $CDEF$, deci MN este paralelă cu planul $CDEF$. b) Fie U mijlocul lui $[MN]$. Proiecția lui U pe AB este punctul V mijlocul segmentului $[AB]$. Punctul U se află la distanțe egale de cele două plane perpendiculare, deci locul geometric al lui U este segmentul $[VW]$, unde W este mijlocul segmentului $[CF]$. Acest segment se găsește pe bisectoarea unghiului drept cu vîrful în V, corespunzător diedrului format de cele două pătrate. c) Notînd lungimea segmentului $[AM]$ cu x ($0 \leqslant x \leqslant a$) se găsește $MN^2 = x^2 + (a - x\sqrt{2})^2 = 3x^2 - 2a\sqrt{2}x + a^2$. Această expresie este minimă pentru $x = a\sqrt{2}/3$, deci M se află la o treime din diagonala $[AC]$ și N la o treime din diagonala $[BF]$. Rezultă că $MN_{min} = a/\sqrt{3}$, iar în acest caz $AM^2 = x^2 = \frac{2a^2}{9}$, $AN^2 = \frac{5a^2}{9}$, deci $AN^2 = AM^2 + MN^2$. Rezultă că MN este perpendiculară pe AC. Analog se arată că MN este perpendiculară pe BF. Dreapta DE se găsește în planul BDE care este perpendicular pe AC, iar DE se găsește și în planul ADE care este perpendicular pe BF. Rezultă că DE este perpendiculară pe BF și pe AC, deci DE este paralelă cu perpendiculara comună MN a dreptelor AC și BF. d) $a/\sqrt{3}$.

Anul 1956

Etapa regională

1. Prin logaritmare se obține $\log E = \log \log x$, deci $E = \log x$.

2. $\sigma[MPNQ] = \frac{1}{3}\sigma[ABCD]$.

3. Avem $\frac{\cos x + \cos 5x - \cos 3x}{\cos 3x} = 4\cos^2 x - 3 = \frac{\cos 3x}{\cos x}$, deci $\frac{A + C - B}{B} = \frac{B}{A}$, adică $A(A - B + C) = B^2$. De asemenea,

$$\frac{\sin x + \sin 5x - \sin 3x}{\sin 3x} + 2 = \frac{\sin 3x}{\sin x}, \text{ deci } \frac{L + N - M}{M} + 2 = \frac{M}{L} \text{ sau}$$

$$L(L + M + N) = M^2.$$

4. a) $\frac{OD}{OA} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{5}}$. b) Rezultă $\frac{1}{\cos a} - \cos a = 1$ sau $\sin^2 a = \cos a$ sau $\sin a = \operatorname{ctg} a$ și $\cos a = (\sqrt{5}-1)/2$. Apoi, $\sin^3 a = \sin^2 a \sin a = \cos a \sin a = (\sin 2a)/2$, deci $\sin^3 a + 2\operatorname{ctg} 2a = \frac{\sin^2 2a + 4\cos 2a}{2\sin 2a} = 0$ deoarece $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2 - \sqrt{5}$.

Etapa finală

1. b) Se notează $\hat{B} = \widehat{ABM}$. Cu teorema cosinusului aplicată în triunghiul MBC deducem $c^2 = b^2 + m^2 + 2mb \sin B$. Din triunghiul ABM găsim $\cos B = (b^2 + m^2 - a^2)/2mb$. Scriind că $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ se obține tocmai relația căutată. g) Dacă se duce perpendiculara în B pe MB și se ia într-un sens convenabil ales punctul M' astfel încît $M'B = MB$, rezultă că $CM' = a$, deci a, c și m sînt distanțele punctului C la trei vîrfuri M, B, M' ale unui pătrat de latură b. Deci relația de la punctul b se conservă prin transpoziția $[b, m]$, adică este simetrică în raport cu b și m.

Anul 1957

Etapa regională

1. $\log_{30} 8 = 3\log_{30} 2 = 3\log_{30}\frac{30}{15} = 3(1 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5) = 3(1 - a - b)$.

2. a) Coeficienții lui sînt egali deoarece $1 + 13 = 5 + 9$. b) Cele patru rădăcini sînt a, $a + r$, $a + 2r$, $a + 3r$, unde $2a + 3r = p$, $a(a + 3r) = q$, $(a+r)(a+2r) = q'$. Eliminînd pe a și r se obține $2p^2 + q = 9q'$. c) Cele patru rădăcini sînt a, as, as^2, as^3. Se obține $q = q'$ și mai trebuie eliminați a și s din relațiile $as(1 + s) = p$, $a(1 + s^3) = p'$, $a^2 s^3 = q$. Din ultimele două egalități se deduce $a + \frac{q}{a} = p'$, unde $a = \frac{p'}{1 + s^3}$ și s se obține prin rezolvarea ecuației de gradul 2: $ps^2 - (p + p')s + p = 0$, rezultată din primele două egalități. În acest mod se obține o a doua relație între coeficienții celor două ecuații în condițiile date.

3. a) Aplicînd teorema medianei în triunghiul $A'IM$ se deduce $IL^2 = \frac{3a^2}{4} - A'L^2$, deci $IL^2 + A'L^2 = \frac{3a^2}{4}$, unde a este lungimea muchiei cubului. b) $A'N = IM = \frac{a}{2}$ și locul geometric este cercul din planul $A'B'C'D'$ cu centrul A' și lungimea razei egală cu $\frac{a}{2}$.

Etapa finală

1. a) Se deduce că $a_n = 3^{n-1}$ și $b_n = (-2)^{n-1}$ pentru $n \geqslant 1$. Deci $c_n = a_n + b_n = 3^{n-1} + (-1)^{n-1} 2^{n-1}$ pentru $n \geqslant 1$. Dar $3^{n-1} + (-1)^{n-1} 2^{n-1} = 3^{n-2} + (-1)^{n-2} 2^{n-2} + 6 \cdot 3^{n-3} + 6(-1)^{n-3} 2^{n-3} = c_{n-1} + 6c_{n-2}$. b) — c) Avem $a_n = a_1 q^{n-1}$ și $b_n = b_1 r^{n-1}$. Obținem $c_n = a_1 q^{n-1} + b_1 r^{n-1} = a_1(q^{n-2} + q^{n-3}) + b_1(r^{n-2} + r^{n-3})$ pentru $n \geqslant 3$, de unde punem condiția $q^{n-1} = q^{n-2} + q^{n-3}$ și $r^{n-1} = r^{n-2} + r^{n-3}$. Se obțin prin simplificare ecuațiile $q^2 - q - 1 = 0$ și $r^2 - r - 1 = 0$.

Deci q și r sînt rădăcini ale ecuației $x^2 - x - 1 = 0$, care are soluțiile $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. În cazul de la punctul b avem sistemul $a_1 + b_1 = 1$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} a_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} b_1 = 1$, de unde $a_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ și $b_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ progresiile fiind $a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$, respectiv $b_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ cu suma șirul lui Fibonacci F_n.

2. a) În planul MOA se consideră punctul A' pe OA astfel încît $NA' = MA = a$. Punctele B și C se găsesc la intersecția dintre cercul $\mathcal{C}$ din planul P cu centrul în O și lungimea razei $[OA']$ cu planul dus prin N perpendicular pe MA. Fie L piciorul perpendicularei din N pe MA și D intersecția dintre dreptele NL și OA. Perpendiculara dusă în D pe OA intersectează cercul $\mathcal{C}$ în punctele B și C. Într-adevăr, BC este perpendiculară pe planul MOA, deci MA este perpendiculară pe planul dreptelor ND și BC, deci pe NB și NC. Condiția de existență a două puncte distincte B, C se traduce prin $OD < OA'$ sau $ON \operatorname{tg} x < \sqrt{MA^2 - ON^2} = \sqrt{\frac{OM^2}{\sin^2 x} - ON^2}$, adică $ON^2 (\operatorname{tg}^2 x + 1) < \frac{OM^2}{\sin^2 x}$ sau $\frac{ON}{OM} < \operatorname{ctg} x = \frac{OA}{OM}$. Relația se verifică deoarece $ON < OA$. b) În triunghiul OAB teorema lui Pitagora generalizată conduce la $AB^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OD$. Dar $OA = a \cos x$, $OB = a \cos y$, $OD = ON \operatorname{tg} x = a \sin y \operatorname{tg} x$, ceea ce conduce la expresia căutată. c) Avem $AB^2 = a^2 (2 - \sin^2 x - \sin^2 y + 2 \sin x \sin y) = a^2 (2 - (\sin x - \sin y)^2) \leqslant 2a^2$, deci $AB \leqslant a\sqrt{2}$.

Anul 1958

Etapa regională

1. $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

2. Cunoscîndu-se a și R, se construiește cercul $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului ABC, care trece prin punctele B și C, care se găsesc la distanța a. Dacă $\frac{m}{n} = 1$, atunci vîrful A se găsește la intersecția dintre $\mathcal{C}$ și mediatoarea lui $[BC]$. Dacă $\frac{m}{n} \neq 1$, atunci vîrful A se găsește la intersecția dintre $\mathcal{C}$ și cercul lui Apollonius, de diametru $[EF]$, unde E și F sînt cele două puncte, interior și exterior, care împart segmentul $[BC]$ în raportul $\frac{m}{n}$. Problema are două soluții.

3. $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BAD})$ și $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{BDA})$. Din asemănarea triunghiurilor ABC și ABD se deduce $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$, deci $AB^2 = BC \cdot BD$ și $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{BC^2}{BC \cdot BD} = \frac{BC}{BD}$.

Etapa finală

1. Punctele B, C și O se găsesc pe un cerc cu centrul în A și lungimea razei R, deci pe un cerc congruent cu (O). Fie LN' coarda comună celor două cercuri (N' de aceeași parte cu O față de AD). Vom demonstra că $N' \equiv N$. Cercurile avînd raze de aceeași lungime, rezultă că LN' trece prin mijlocul segmentului $[AO]$, deci $LN' = R\sqrt{3}$ (lungimea laturii triunghiului echilateral înscris în cercul (O)). Deci $m(\widehat{OAN'}) = 60°$ și cum $m(\widehat{OAD}) = 30°$ rezultă $m(\widehat{N'AD}) = 90°$, deci triunghiul CAN' este dreptunghic și isoscel ($AC = AN' = R$). Deducem că $m(\widehat{N'CA}) = 45°$, deci $N \equiv N'$. Triunghiul ABN este isoscel ($AB = AN = R$) și $m(\widehat{BAN}) = 30°$, deci $m(\widehat{ABN}) = 75° = m(\widehat{CMA}) = m(\widehat{BMN})$. Rezultă că și triunghiul BMN este isoscel, deci $MN = BN$. Deoarece $m(\widehat{BAN}) = 30°$ rezultă că $BN = MN$ este lungimea laturii dodecagonului regulat convex (l_{12}) înscris în cercul BCO, deci și în cercul (O) congruent cu el. Se poate arăta și că $NP = MN = l_{12} = R\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

2. a) Avem $\dfrac{\sigma[AB_1C_1]}{S} = \dfrac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \quad AC} = \dfrac{m}{(m+1)^2}$ și analog $\sigma[BA_1C_1] = \sigma[CB_1A_1] = \dfrac{mS}{(m+1)^2}$. Rezultă $\sigma[A_1B_1C_1] = S - \sum \sigma[AB_1C_1] = \dfrac{m^2-m+1}{(m+1)^2} S$.

b) Fie $\dfrac{m^2-m+1}{(m+1)^2} = x$, de unde $(x-1)m^2 + (2x+1)\,m + x - 1 = 0$. Ecuația în m are rădăcini reale, deci $(2x+1)^2 - 4\,(x-1)^2 \geqslant 0$ sau $x \geqslant \dfrac{1}{4}$. Valoarea minimă a lui x este $\dfrac{1}{4}$, adică $S_1 \geqslant \dfrac{1}{4}\,S$. În caz de egalitate rezultă $m = 1$.

c) Dacă $S_1 = 7S$ se obține $2\,m^2 + 5\,m + 2 = 0$, de unde $m_1 = -2$ și $m_2 = -\dfrac{1}{2}$. În acest caz punctele A_1, B_1, C_1 sînt exterioare segmentelor $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$.

3. Dacă $\log_8 40 = x$ avem $8^x = 40$ și $20^a = 50$, deci $2^{3x-3} = 5$ și $2^{2a-1} = 5^{2-a}$. Rezultă $2^{2a-1} = (2^{3x-3})^{2-a}$, deci $2a - 1 = (3x-3)\,(2-a)$ sau $x = \log_8 40 = \dfrac{a-5}{3(a-2)}$.

Anul 1959

Etapa regională

1. Se obține ecuația $n^2 + n = 222\,a$, deci $n = \dfrac{-1+\sqrt{1+888a}}{2}$. Singura valoare a lui a ($1 \leqslant a \leqslant 9$) pentru care $888\,a + 1$ este pătrat perfect este $a = 6$, pentru care $n = 36$. Deci $1 + 2 + \ldots + 36 = 666$.

2. a) Fie F a doua intersecție a cercului ADE cu latura $[CD]$. Rezultă $m(\widehat{DFE}) + m(\widehat{DAE}) = 180°$, deci $m(\widehat{DFE}) = m(\widehat{CBA})$, adică F se găsește pe cercul BCE.

b) $m(\widehat{AID}) = m(\widehat{AFD}) = m(\widehat{CFJ}) = m(\widehat{CBJ})$ și $m(\widehat{ADI}) = m(\widehat{AEI}) = m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{BJC})$, deci triunghiurile ADI și BCJ sînt asemenea și $\frac{AD}{CJ} = \frac{AI}{BC}$. Trapezele $ADFE$ și $BCFE$ sînt isoscele, deci $AD = BC = EF$ și $AI \cdot CJ = EF^2 = BC^2$.

c) $m(\widehat{DIC}) = m(\widehat{DAE})$ și $m(\widehat{AJB}) = m(\widehat{FCB})$, deci punctul I descrie un arc de cerc, capabil de unghiul $\widehat{DAB}$, care trece prin C și D, iar J descrie un arc de cerc, capabil de același unghi, care trece prin A și B. Deoarece $E \in [AB]$ locul geometric al punctului I este porțiunea din arcul de cerc amintit cuprinsă între dreptele AC și BC (se elimină extremitatea de pe AC care corespunde unui caz degenerat). Discuție analoagă pentru locul geometric al punctului J.

Etapa finală

1. a) În primele $n-1$ linii se află $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ termeni. În linia a n-a se află termenii de indice $n(n-1)/2 + 1$, $n(n-1)/2 + 2, \ldots, n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$. b) $a_k = 2k - 1$ pentru $k \geqslant 1$, deci termenii din linia a n-a sînt $n(n-1) + 1$, $n(n-1) + 3, \ldots, n(n+1) - 1$, a căror sumă este n^3. c) Termenul al p-lea din linia a n-a este $n(n-1) + 2p - 1$, deci dacă 21 715 se găsește în linia a n-a, atunci $n(n-1) < 21\,715 < n(n+1)$. Obținem $n = 147$, deoarece $[\sqrt{21\,715}] = 147$ și $p = \frac{21\,715 - n(n-1) + 1}{2} = 127$.

2. a) Fie H intersecția dreptelor BC și AF. Avem $m(\widehat{AHB}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{BAH})$, deci triunghiul ABH este isoscel. Deoarece $BE = ED$ rezultă că $HF = FA$, deci BF și AH sînt perpendiculare sau $m(\widehat{FBD}) = 90°$. În mod analog se deduce că $m(\widehat{EBG}) = 90°$. b) Dacă $a = c$, atunci două din cele trei drepte coincid și sînt paralele cu a treia. Fie $a > c$. Se notează cu I și J intersecțiile dreptei FG cu AC', respectiv $A'C$. Se obține $\frac{AA'}{BI} = \frac{A'C'}{BC'} = \frac{a-c}{a}$ deoarece $\frac{BA'}{BC'} = \frac{c}{a}$. Deci $BI = \frac{a \cdot AA'}{a-c}$. În mod analog se deduce $BJ = \frac{c \cdot CC'}{a-c}$, dar $\frac{AA'}{a} = \frac{CC'}{a}$, deci $BI = BJ$ și CA', AC' și FG sînt concurente.

Anul 1960

Etapa regională

1. a) $P = -\frac{x^2}{a} + 2x + 4a$. b) $x > 0$ și $2a - \frac{x^2}{a} \geqslant 0$, deci $x \in (0, a\sqrt{2})$. c) $x = a$. d) Un arc de parabolă de ecuație $y = -x^2 + 2x + 4$ pentru $0 < x < \sqrt{2}$.

2. $\Delta = m^2 - 3m - 4 \geqslant 0$, deci $m \in (-\infty, -1] \cup [4, \infty)$. Dacă rădăcinile ecuației sînt reale, condiția ca o singură rădăcină să fie în intervalul $(-2, 3)$ este echivalentă cu $P(-2)P(3) \leqslant 0$ și $-2, 3$ să nu fie simultan rădăcini ale ecuației date. Dar $P(-2)P(3) \leqslant 0$ se scrie $(m+1)(m-4) \geqslant 0$, condiție care este îndeplinită.

Dacă ecuația are rădăcinile -2 și 3 rezultă $2(m-1)=1$ și $m+5=-6$, relații care sînt incompatibile.

3. a) —b) Proprietatea rezultă imediat din teorema cosinusului. O demonstrație geometrică se poate da ducînd înălțimile B_1D_1 și B_2D_2 în cele două triunghiuri și evaluînd pe A_1D_1, respectiv A_2D_2 cu teorema lui Pitagora generalizată.

Etapa finală

1. a) $y=\dfrac{x^2+3x+4}{x^2+7x+12}$. b) Relația anterioară se scrie $(y-1)x^2+(7y-3)x+12y-4=0$, ecuație care are rădăcini reale pentru $y^2+22y-7\geqslant 0$. Maximul lui y este $-11-8\sqrt{2}$ și se atinge pentru $x=-2-\sqrt{2}$, iar minimul lui y este $-11+8\sqrt{2}$ și se realizează pentru $x=-2+\sqrt{2}$ (extreme locale).

2. a) Se notează cu O centrul celor două cercuri și cu A și B proiecțiile lui O pe dreptele MM', respectiv NN'. Avem $MM'^2=4(r^2-OA^2)$ și $NN'^2=4(R^2-OB^2)$, deci $MM'^2+NN'^2=4(R^2+r^2-OF^2)$. b) Suma dată se mai scrie $S=(FM'-FM)^2+(FN'+FN)^2+2FM\cdot FM'-2FN\cdot FN'=MM'^2+NN'^2+2(FM\cdot FM'-FN\cdot FN')=MM'^2+NN'^2+2(FO^2-r^2)-2(R^2-OF^2)=2(R^2+r^2)$, ținînd seama de punctul a. c) Dacă M este ortocentrul triunghiului $M'N'M$, atunci A și B se află pe cercul lui Euler și o proprietate cunoscută afirmă că $[AB]$ este un diametru al acestui cerc. Notînd cu ρ raza cercului circumscris triunghiului $NN'M'$ deducem $AB=OF=\rho$ deoarece raza cercului lui Euler este $\rho/2$. Fie Q centrul cercului $NN'M'$. O proprietate clasică afirmă că $QB=\dfrac{1}{2}MM'$ iar din triunghiul dreptunghic QBN se deduce $\rho^2=\dfrac{1}{4}NN'^2+QB^2=(NN'^2+MM'^2)/4=R^2+r^2-\rho^2$ conform cu punctul a. Deci $\rho=\sqrt{(R^2+r^2)/2}$ și punctul F trebuie să se afle pe un cerc concentric cu cercurile date și cu raza $OF=\sqrt{\dfrac{R^2+r^2}{2}}$. d) Dacă notăm cu I mijlocul segmentului $[M'N']$ cu teorema medianei se obține $OI^2=\dfrac{R^2+r^2}{2}-\dfrac{M'N'^2}{4}$. Din triunghiul dreptunghic $FM'N'$ deducem $FI=\dfrac{1}{2}M'N'$, deci $OI^2+IF^2=\dfrac{1}{2}(R^2+r^2)=\text{const}$ și locul geometric al punctului I este un arc dintr-un cerc cu centrul în mijlocul segmentului $[OF]$, delimitat de mijloacele segmentului $[M'N']$ în cazurile cînd dreapta FM este tangentă cercului de rază r (cînd $M\equiv M'$). Concluzii analoage rezultă pentru mijloacele celorlalte segmente.

Anul 1961

Etapa regională

1. a) Se notează $b=aq$, $c=aq^2$ și egalitățile se verifică prin calcul direct. b) $\Delta=b^2-4ac=-3a^2q^2<0$. Vîrfurile celor două parabole au coordonatele $V_1\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{3c}{4}\right)$ și $V_2\left(\dfrac{b}{2a},\dfrac{3c}{4}\right)$. c) Notînd $\dfrac{ax^2+bx+c}{ax^2-bx+c}=m$ se obține ecuația

$a(1-m)x^2+b(1+m)x+c(1-m)=0$ sau $(1-m)x^2+q(1+m)x+$ $+q^2(1-m)=0$ cu discriminantul $q^2(-3m^2+10m-3)\geqslant 0$, deci $m\in\left[\frac{1}{3},3\right]$ deoarece $q^2>0$. Se procedează analog pentru cea de a doua fracție.

2. Construcția se poate baza pe proprietatea lungimii segmentului delimitat de laturile neparalele ale unui trapez pe o paralelă la baze dusă prin intersecția diagonalelor de a fi medie armonică a lungimilor bazelor.

Etapa finală

1. a) Din asemănarea triunghiurilor ABB' și ADD' se deduce $AB'=\frac{az}{h}$. În triunghiul dreptunghic ABB' avem $AB'^2+x^2=a^2$, de unde se obține relația cerută. Fie F intersecția dintre dreapta CC' și o paralelă la L dusă prin D. Din asemănarea triunghiurilor CDF și ABB' se deduce $y=z+\frac{bx}{a}$. b) Fie M' mijlocul segmentului $[BD]$ și M' proiecția sa pe L. Obținem $MM'=\frac{x+z}{2}=y=CC'$, deci trebuie ca L să fie paralelă cu MC. Pentru ca L să aibă comun cu trapezul în acest caz numai vîrful A trebuie ca $a>2b$, condiție care se deduce considerînd paralela dusă prin M la AD. c) În condițiile de la punctul b dreptele BE, CM și L sînt paralele, de unde se deduce proprietatea.

2. a) Coordonatele lui A verifică ecuația parabolelor pentru orice $m\in\mathbf{R}$. Vîrful este în A dacă $m+1=-\frac{3}{2}$; ecuația parabolei corespunzătoare este $y=$ $=-x^2-3x-\frac{17}{2}$. b) Coordonatele vîrfului oricărei parabole sînt $x=m+1$, $y=m^2+5m$ și ele verifică ecuația dată.

3. a) Condiția ca $(u_n)_{n\geq 0}$ să formeze o progresie aritmetică este ca $bu_{n-1}+c=$ $=\frac{u_{n-1}(b^2+1)+c(b+1)}{2}$ pentru orice $n\geqslant 1$. Rezultă $b=\frac{b^2+1}{2}$ și $c=\frac{c(b+1)}{2}$ deoarece un polinom de gradul cel mult egal cu unu nu poate avea mai multe rădăcini distincte decît dacă este polinomul nul. Deci $b=1$ și $c\in\mathbf{R}$, c arbitrar.

$$s_1=a+(a+c)+\ldots+(a+nc)=\frac{(2a+nc)(n+1)}{2}.$$

b) Obținem $(u_n-d)^2=(u_{n-1}-d)(u_{n+1}-d)$ sau $2b(c-d)u_{n-1}+(c-d)^2=$ $=(bc+c-d-b^2d)u_{n-1}+d^2-cd-bcd$, de unde se deduce $cd(1-b)=c^2$ și $d(b-1)^2=c(1-b)$. De aici rezultă: cazul I. $b=1$, $c=0$, $d\in\mathbf{R}$, d arbitrar: cazul II. $b\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$, $c\in\mathbf{R}$, $d=\frac{c}{1-b}$. În cazul I avem $s_2=a(n+1)$. În cazul II progresia geometrică are rația $\frac{u_1-d}{u_0-d}=\left(ab+c-\frac{c}{1-b}\right)\Big/\left(a-\frac{c}{1-b}\right)=b$, deci $s_2=(u_0-d)+\ldots+(u_n-d)+(n+1)d=\left(a-\frac{c}{1-b}\right)\cdot\frac{b^{n+1}-1}{b-1}+(n+$ $+1)\frac{c}{1-b}$.

Anul 1962

Etapa regională

1. a) $T_1T_2 = 2\sqrt{R_1R_2}$. b) $T_1T_2 = T_1A + AT_2$ sau $\sqrt{R_1R_2} = \sqrt{R_1R_3} + \sqrt{R_2R_3}$, deci $R_3 = R_1R_2/(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2$. c) $8R_1R_2/(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2 \leqslant 2\sqrt{R_1R_2}$ sau $(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2 \geqslant 0$. Egalitatea are loc cînd $R_1 = R_2$. d) $AT_1/AT_2 = \sqrt{R_1}/\sqrt{R_2}$.

2. a) x, y, z sînt soluțiile ecuației de gradul 3: $t^3 - mt^2 + mt - 1 = 0$. Obținem $t_1 = 1$ și $t_{2,3} = (m - 1 \pm \sqrt{(m-3)(m+1)})/2$. În general se obțin șase soluții în x, y, z prin permutarea acestor numere în toate modurile posibile. b) $m \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

Etapa finală

1. a)

$$m_1^3 + m_2^3 = (m_1 + m_2)^3 - 3m_1m_2(m_1 + m_2) = \frac{(a+c-b)(a^2+b^2+c^2-ac-2ab-2bc)}{a^3}.$$

b) Pentru $a > 0$ expresia dată este minimă pentru $m = \dfrac{a+c-b}{2a}$ și pentru $a < 0$ expresia este maximă pentru aceeași valoare a lui m. c) Deoarece $a > 0$ valoarea expresiei pentru $m = \dfrac{a+c-b}{2a}$ este minimă. Dacă demonstrăm că acest minim este pozitiv, problema este rezolvată. Calculînd găsim valoarea $(2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2)/4a$. Putem scrie $a = m + n$, $b = m + p$, $c = n + p$, deci numărătorul devine $4(mn + mp + np) > 0$.

2. a) Triunghiurile ART, BTS, CRS fiind isoscele rezultă că mediatoarele laturilor $[RT]$, $[TS]$, $[SR]$ sînt în același timp bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. b) $PT_1 = PT_2$ și triunghiul APB este dreptunghic cu înălțimea $[PT]$. c) $TA^2 - TB^2 = a^2 + x^2 - (b^2 + x^2) = AB(CA - CB)$. d) $x = \sqrt{abc/(a+b+c)}$. e) $IA^2 - IB^2$ este constantă. Locul geometric este o perpendiculară pe segmentul $[AB]$. Punctul T aparține locului geometric.

Anul 1963

Etapa regională

1. a) Se studiază semnul discriminantului $\Delta = (m-2)(m-6)$, sumei $S = m$ și produsului $P = 2m - 3$. Obținem

m	$-$			0		$\frac{3}{2}$		2		6			$+\infty$
Δ	$+$			$+$		$+$		0	...	0	$+$	$+$	$+$
P	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
S	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Întocmim tabelul următor

m	Δ	P	S	Concluzii
$m < 0$	$+$	$-$	$-$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $\lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$
$m = 0$	$+$	$-$	0	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $\lvert x_1\rvert = \lvert x_2\rvert$
$0 < m < \frac{3}{2}$	$+$	$-$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $\lvert x_2\rvert > \lvert x_1\rvert$
$m = \frac{3}{2}$	$+$	0	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$
$\frac{3}{2} < m < 2$	$+$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
$m = 2$	0	$+$	$+$	$x_1 = x_2 > 0$
$2 < m < 6$	$-$	$+$	$+$	rădăcini complex conjugate
$m = 6$	0	$+$	$+$	$x_1 = x_2 > 0$
$m > 6$	$+$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

b) $V = f_{min} = f\left(\frac{m}{2}\right) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}m^2 + 2m - 3$. c) $V_{max} = +4$. d) $m \in [2, 6]$.

2. a) —b) $\frac{m_c}{b} = \frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{c}$ este echivalent cu $\frac{m_c^2}{b^2} = \frac{m_a^2}{a^2} = \frac{m_b^2}{c^2}$ ceea ce este echivalent cu

$$\frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4b^2} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4a^2} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4c^2} = \frac{3}{4}.$$

Din acest sistem obținem $2a^2 = c^2 + b^2$, deci b^2, a^2, c^2 formează o progresie aritmetică. c) Se determină c din $2a^2 = b^2 + c^2$.

Etapa finală

1. Ținînd seama de egalitatea $x = a^{\log_a x}$, $x, a > 0$, $a \neq 1$, obținem sistemul $xy = a - x^2$, $y = a^2 + xy - 1$. Obținem $y = (a - x^2)/x$ și ecuația de gradul al III-lea $x^3 - x^2 + x(1 - a - a^2) + a = 0$ cu o soluție $x_1 = -a$, $x_{2,3} = (a + 1 \pm \pm \sqrt{a^2 + 2a - 3})/2$. $x_{2,3}$ sînt reale pentru $a \in (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$. Trebuie puse și condițiile $x^2 < a$ și $a^2 + xy - 1 > 0$. Pentru $x = -a$, $y = a - 1$, aceste condiții nu sînt verificate.

2. a) Se duce MP tangenta comună celor două cercuri. Se observă că $PM = PB = PA$, deci triunghiul AMB este dreptunghic în M și avem $MA^2 + MB^2 = AB^2 = (r + r')^2 - (r - r')^2 = 4rr'$. În triunghiul OCO' se aplică teorema lui Stewart, $OC^2 \cdot r' - OO' \cdot CM + O'C^2 \cdot r = rr'(r + r')$. Rezultă $CM^2 = \frac{2rr'^2}{r + r'}$.

Analog se arată că $MD^2 = \frac{2r^2r'}{r \quad r'}$. Rezultă că $\frac{MA^2 + MB^2}{MC^2 + MD^2} = 2$. b) $\sigma[OABO'] = \frac{(r + r') \cdot AB}{2} = a\sqrt{rr'}$ În triunghiul OAB și $O'AB$ se calculează OB, respectiv $O'A'$; avem $OB = \sqrt{r^2 - 4rr'}$ și $O'A' = \sqrt{r'^2 + 4rr'}$. Din $\sigma[OABO'] = k \cdot OB \cdot O'A$ rezultă $a\sqrt{rr'} = k\sqrt{r(a + 3r')}\sqrt{r'(a + 3r)}$, echivalent cu $a = k\sqrt{(a + 3r)(a + 3r')}$, echivalent cu $a^2 = k^2(4a^2 + 9rr')$, echivalent cu $9rr' = \frac{a^2(1 - 4k^2)}{k^2}$. Pentru ca ultima egalitate să fie adevărată, trebuie să avem $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Din $rr' = \frac{a^2(1 - 4k^2)}{9k^2}$ și $r \quad r' = a$ obținem ecuația de gradul al doilea (1) $x^2 - ax + a^2\frac{1 - 4k^2}{9k^2} = 0$ care admite rădăcini reale dacă $k \in \left[\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$. Pentru $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$, ecuația (1) devine $x^2 - ax + \frac{a}{18} = 0$. Rezultă $x_{1,2} = \frac{a}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$, deci punctul M are două poziții O, O' simetrice față de mijlocul segmentului $[O\,O']$. c) $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Anul 1964

Etapa regională

1. a) $m = 3$. b) $x \in (2, 6)$. c) Se studiază semnul expresiei $E(m) = -\frac{\Delta}{4a} + 1 = \frac{8m^2 - 22m - 3}{2(m - 2)}$.

2. Presupunem că $b > c$. a) $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ACB})$ și $m(\widehat{AE_1C}) = m(\widehat{BEC})$. Rezultă $m(\widehat{AE_1C}) = m(\widehat{ABE})$, deci $BE \parallel E_1C$ și triunghiul AE_1C este asemenea cu triunghiul ABE. b) $AB^2 = AE \cdot AC$; rezultă $AE = \frac{c^2}{b}$ și $EC = \frac{b^2 - c^2}{b}$. Din $AE_1 \cdot AB = AC^2$ rezultă $AE_1 = \frac{b^2}{c}$ și $E_1B = \frac{b^2 - c^2}{c}$. c) Din $ABC \sim AE_1C$ rezultă (1) $E_1C = \frac{a \cdot b}{c}$. $\triangle ABE \sim \triangle AE_1C$; rezultă (2) $BE = \frac{ac}{b}$. Din (1) și (2) rezultă $E_1C \cdot BE = a^2$.

Etapa finală

1. a) $f(p) - f(q) = (ap^2 + bp + c) - (aq^2 + bq + c) = (p - q)[a(p + q) + b] = (p - q)\left(a \cdot \frac{-b}{a} + b\right) = 0$. b) $f(p) + f(q) = a(p^2 + q^2) + b(p + q) + 2c = a[(p + q)^2 - 2pq] + b(p + q) + 2c = [a(x_1 + x_2)^2 - 2pq] + b(x_1 + x_2) + 2c = 2(c - apq)$. Deci $f(p) + f(q) = 2(c - apq)$. Deoarece $p + q = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ rezultă că produsul pq admite un maxim și $(pq)_{max} = \frac{b^2}{4a^2}$. Dacă $a < 0$, atunci

$f(p)+f(q)$ admite un maxim egal cu $\frac{1}{2a}(4ac-b^2)$. Dacă $a>0$, atunci $f(p)+f(q)$ admite un minim egal cu $\frac{1}{2a}(4ac-b^2)$. Deci $f(p)+f(q)$ admite un extrem și el coincide cu extremul funcției f.

2. a) Deoarece $m\in(0,1)$ rezultă $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-2}>2$, de unde $x>13+4\sqrt{7}$. b) Avem

$$\log_{108}3=\frac{\log_3 3}{\log_3 108}=\frac{1}{3+2\log_3 2}=a, \text{ deci } \log_3 2=\frac{1-3a}{2a}.$$

Obținem $\log_{24}2=\log_3 2/\log_3 24=\log_3 2/(1+3\log_3 2)=(1-3a)/(3-7a)$.

3. a) Pe cercul cu centrul O și rază R se iau punctele B și C astfel încît $m(\widehat{BC})=2\,m(\hat{A})$. Prin B și C se duce arcul capabil de unghi $90^\circ+\frac{m(\hat{A})}{2}$ care intersectează dreapta $d\parallel BC$, dusă la distanța r de BC și este situată în același semiplan cu punctul A, în punctele I și I_1, simetrice față de mediatoarea segmentului $[BC]$. Se consideră E mijlocul arcului $\widehat{BC}$. Dreapta EI taie cercul cu centrul în O și raza R a doua oară în punctul A, vîrful triunghiului căutat ABC. *Discuție.* Notăm cu h distanța de la mijlocul arcului capabil de $90^\circ+\frac{m(\hat{A})}{2}$ la BC. Dacă $h<r$, atunci d taie arcul în două puncte I și I_1, deci există două triunghiuri. Dacă $h=r$ există un singur triunghi. Dacă $h>r$ nici un triunghi. b) Din $\frac{1}{R-d}+\frac{1}{R+d}=\frac{1}{r}$ rezultă $R^2-d^2=2Rr$. Puterea punctului I față de cercul $\mathcal{C}(O,R)$ este $IA\cdot IA'=R^2-OI^2$; rezultă $OI^2=R^2-IA\cdot IE$. Fie $IK\perp AC$. În triunghiul AIK avem $IA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$. Se observă că triunghiul IEC este isoscel cu baza $[IC]$; rezultă

$$IE=EC=2R\cdot\sin\frac{A}{2}. \text{ Calculăm } OI^2=R^2-\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\cdot 2R\sin\frac{A}{2}=R^2-2Rr.$$

Observație. Relația $R^2-2Rr=OI^2$ se numește *relația lui Euler*. Din această relație rezultă inegalitatea $R\geqslant 2r$. Egalitatea are loc cînd triunghiul este echilateral.

c) Avem $\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AP^2}+\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AQ^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AP^2}+\frac{1}{AQ^2}=\frac{1}{AH_1^2}+\frac{1}{AI^2}=\text{const.}$

Anul 1965

Etapa regională

1. a) $m\in(-\infty,-5-\sqrt{32})\cup(-5+\sqrt{32},+\infty)$. b). Din enunțul problemei deducem că $0<a<1$ și $4<b<8$ sau $0<\frac{m-1}{2(m+1)}<1$, $4<\frac{-m^2-10m+7}{4}<8$. Rezolvînd acest sistem obținem $m\in(-9,-5)\cup(-5,-3)$.

2. Deoarece $1 \leqslant x \leqslant 2$ avem

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}+1}+$$
$$+\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1}=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=$$
$$=\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2.$$

Se mai poate rezolva folosind formula de transformare a radicalilor suprapuși.

3. a) $\triangle DAC$ este isoscel, deci $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{DAC})$ și $\triangle AEF$ isoscel implică $m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{ABF})$, deci patrulaterul $DBFC$ este inscriptibil; rezultă $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{ADF})$. b) $AD = \dfrac{b}{2\cos A}$, $DC_1 = \left|\dfrac{b}{2\cos A} - \dfrac{c}{2}\right|$; $FC_1 = \dfrac{c}{2}\operatorname{tg} A$. Dar $FD^2 = DC_1^2 + C_1F^2 = \left(\dfrac{b}{2\cos A} - \dfrac{c}{2}\right)^2 + \dfrac{c^2}{4}\operatorname{tg}^2 A = \dfrac{a^2}{4\cos^2 A}$; rezultă $FD = \dfrac{a}{2|\cos A|}$, unde C_1 și B_1 sînt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. *Observație.* Dacă $A = \dfrac{\pi}{2}$, punctele F și D sînt aruncate la infinit și problema nu are sens. Dacă $m(\hat{A}) = 60°$, atunci $\triangle ADF \equiv \triangle ABC$; rezultă $DF = BC$.

Etapa finală

1. Din $2x - 1 \geqslant 0$ rezultă $x \geqslant \dfrac{1}{2}$. Prin ridicare la pătrat egalitatea dată devine $x^2 - 2(y+2)x + y^2 + 2y + 2 = 0$. Considerînd această ecuație în x, rădăcinile ei trebuie să fie mai mari sau egale cu $\dfrac{1}{2}$. Punînd aceste condiții se obține $y_{min} = -1$ pentru $x = 1$. *Observație.* Acest rezultat este imediat dacă se folosește derivata.

2. $\log_a n! = \log_a 1 + \log_a 2 + \quad + \log_a n = \dfrac{1}{\log_2 a} + \dfrac{1}{\log_3 a} + \quad + \dfrac{1}{\log_n a}$

3. $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Ecuația $a * b^x - b * a^x = 2(\log_a b - \log_b a)$ este echivalentă cu ecuația $\left(x + \dfrac{1}{x} - 2\right)(\log_a b - \log_b a) = 0$. Dacă $a = b$, atunci $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Dacă $a \neq b$, atunci $x = 1$.

4. a) Arcele mici $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CD}$ au măsura 72° 120° respectiv 60°, deci măsura arcului mic $\widehat{CD}$ este 108°, adică $[CD]$ este latura decagonului stelat înscris în cerc, deci $CD = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. b) Fie $\{N\} = [AC] \cap [BD]$, $m(\widehat{BNC}) = 90°$; rezultă $BD \perp AC$. Dar $AC = AN + NC = \dfrac{1}{2}AB + \dfrac{\sqrt{3}}{2}DC = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{3}(\sqrt{5}+1)\right)$. c) Triunghiul AEC este isoscel deoarece $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{AEC}) = 30°$; rezultă $AE = AC$. Se folosește puterea punctului E față de $\mathcal{C}(O, 1)$ de unde se deduce EO. d) Dreptele AB și CD nu sînt paralele. Fie N punctul de intersecție al dreptei d, simetrica dreptei AB față de punctul O, cu dreapta DC, iar $\{M\} = CD \cap OM$.

Anul 1966

Etapa regională

1. a) $x \geq 1$, $E_1 = \sqrt{x-1} + 1$, $E_2 = |\sqrt{x-1} - 1|$. b) Se verifică prin ridicare la pătrat în ambii membri, ținînd seama că $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2$ c) $E_1\left(\frac{7}{3}\right) + E_2\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $E_1\left(\frac{5}{3}\right) + E_2\left(\frac{5}{3}\right) = 2$.

2. a) $m(\widehat{AQL}) = m(\widehat{APL}) = 90°$, deoarece $LF \parallel AB$ și $EQ \parallel AC$. b) $m(\widehat{NDB}) = m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{DAM})$ și $m(\widehat{MDC}) = m(\widehat{FDA}) = m(\widehat{NAD})$; rezultă că $m(\widehat{NDM}) + m(\widehat{NAM}) = 180°$. Se observă că $m(\widehat{BDN}) = m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{END})$; rezultă $NE \parallel BC$, deci $AD \perp NE$.

Etapa finală

1. a) $E = \dfrac{6\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$. b) $a = 4$, $b = 2$ și $E = \dfrac{12}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$.

2. Ecuația se mai scrie

$$\frac{(b-c)[(x-a)+2a]}{x-a} + \frac{(c-a)[(x-b)+2b]}{x-b} + \frac{(a-b)[(x-c)+2c]}{x-c} = 0$$

sau $(b-c) + \dfrac{2a(b-c)}{x-a} + (c-a) + \dfrac{2b(c-a)}{x-b} + (a-b) + \dfrac{2c(a-b)}{x-c} = 0$

sau $\dfrac{a(b-c)}{x-a} + \dfrac{b(c-a)}{x-b} + \dfrac{c(a-b)}{x-c} = 0$. De aici rezultă $x = 0$.

3. a) Se folosește proprietatea că lungimile tangentelor duse dintr-un punct la un cerc sînt egale. b) Triunghiul DEF este simetricul triunghiului JKL față de centrul cercului. c) Se folosește proprietatea că simetria față de un punct păstrează concurența. d) $\triangle MAM' \sim \triangle ABC$; rezultă că $\dfrac{R_a}{R} = \dfrac{h_a - 2r}{h_a}$ și alte două relații analoage. Se mai folosește egalitatea $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$

Anul 1967

Etapa regională

1. a) $E(x) = \sqrt[6]{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3} + \sqrt[4]{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{(2x-1)^2}$, deci $x \geq \frac{1}{2}$

Avem $E(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2}} + \sqrt{x - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2x - 1) = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}(2x-1)$;

b) $x_0 = (a+1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. $E(x_0) = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2a^2+4a+3-1} - \frac{1}{2}(2a^2+4a+3-1) = 2|a+1| - (a+1)^2$.

2. a) 27 elevi; b) 6 elevi.

3. a) Triunghiul ABO fiind echilateral rezultă $Ba \perp AO$. Triunghiul BOC fiind isoscel rezultă că $OI \perp BC$. Deci $OaBI$ este inscriptibil; b) Patrulaterul $IObB$ inscriptibil; rezultă $m(\widehat{aBD}) + m(\widehat{aID}) = 30°$. Patrulaterul $IadC$ este inscriptibil; rezultă $m(\widehat{OID}) = m(\widehat{Ocd}) = 30°$, deci (1) $m(\widehat{aId}) = 60°$. $\triangle aBI \equiv \triangle dIC$ deoarece $[aB] \equiv [cd]$, $[BI] \equiv [CI]$ și $m(\widehat{IBa}) = m(\widehat{Icd})$; rezultă (2) $[Ia] \equiv [Id]$. Din (1) și (2) rezultă că $\triangle Iad$ este echilateral.

Etapa finală

1. $4(x_1 + x_2) = x_1x_2$.

2. a) $z_2 = \dfrac{1 - x_1 + iy_1}{1 + x_1 - iy_1} = \dfrac{(1 - x_1 + iy_1)(1 + x_1 + iy_1)}{(1 + x_1)^2 + y_1^2} = \dfrac{1 - y_1^2 - x_1^2}{(1 + x_1)^2 + y_1^2} + \dfrac{2iy_1}{(1 + x_1)^2 + y_1^2}$, deci $y_1y_2 \geqslant 0$; b) Se calculează suma $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$. Deoarece y_1 și y_2 au același semn, $y_1 + y_2$ este zero dacă și numai dacă $y_1 = y_2 = 0$.

3. Egalitatea are sens dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$. Dacă $m \in \mathbf{R} \setminus \{1, 4\}$, $x = \dfrac{6}{4 - m}$. Dacă $m \in \{1, 4\}$ ecuația nu are soluție.

4. Notăm cu x, y și z numărul de pescari din grupa întîi, a doua, respectiv a treia; obținem $13x + 5y + 4z = 113$, $x + y + z = 16$, $x, y, z \in \mathbf{N}$; rezultă $x = 5$, $y = 4$, $z = 6$.

5. a) Se consideră cercul circumscris triunghiului ABC. Considerăm simetricul cercului ABC față de laturile AC, respectiv AB. Cele două arce cerute de problemă sînt $\widehat{AB'C}$ și $\widehat{AC'B}$. Fie $\{A'\} = BC' \cap CB'$. $m(\widehat{C'A'B'}) = m(\widehat{BAC})$ deoarece $m(\hat{B'}) = m(\hat{B})$ și $m(\hat{C'}) = m(\hat{C})$. Deci locul geometric va fi simetricul arcului $\widehat{BAC}$ față de BC. b) Se știe că simetricul ortocentrului unui triunghi față de o latură a triunghiului se găsește pe cercul circumscris triunghiului. Deci toate cele trei cercuri trec prin H. Se observă că am obținut problema „piesei de 5 lei" a lui Țițeica. c) Centrele C_1, C_2, C_3 sînt simetricele lui O față de laturile triunghiului dat. În $\triangle OC_1C_2$, $C'B' = \dfrac{C_2C_1}{2}$; rezultă $[C_1C_2] \equiv [BC]$ etc. Deci $\triangle C_1C_2C_3 \equiv \triangle ABC$; rezultă $\triangle C_1C_2C_3 \sim \triangle ABC$.

6. a) Fie d dreapta ce trece prin A. Oricare ar fi $M \in$ d, perpendiculara în A are o direcție fixă pe care o notăm cu d′ deci $T(\text{d}) \subset \text{d}'$. Fie $M' \in \text{d}'$. Unim M' cu B și ducem perpendiculara în B pe BM' ce întîlnește dreapta d în M. Deci $T(\text{d}) = \text{d}'$. *Observație.* Dacă d $\equiv AB$, atunci $T(\text{d})$ este dreapta aruncată la infinit. b) Se observă că transformatul punctului M care aparține cercului ce trece prin A și B se găsește tot pe acest cerc.

Anul 1968

Etapa județeană

1. $A = \{2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{1, 3, 4, 5\}$.

2. Pentru ca $E(x, y)$ să aibă sens în $\mathbf{R}$ trebuie ca $x \in [1, \infty)$ și $y \in [-1, +\infty)$. Calculăm $x - 1 = \dfrac{(a-1)^2}{a^2+2} \geqslant 0$ și $y + 1 = \dfrac{(a-2)^2}{a^2+2} \geqslant 0$. Deci $E(x, y) = \dfrac{|a-1| - |a-2|}{|a-1| + |a-2|}$.

3. Ecuația este echivalentă cu $x^2 - 2x - 2|x - 1| - 2 = 0$, care este echivalentă cu ecuația $(x - 1)^2 - 2|x - 1| - 3 = 0$, echivalentă cu $|x - 1| = 3$ sau $|x - 1| = -1$. Ultima ecuație nu admite soluții, deci $x_1 = 4$ sau $x_2 = -2$.

4. Pentru ca ecuația să admită rădăcini reale trebuie ca $\Delta = 4(p^2 - q) \geqslant 0$ sau $p^2 - q \geqslant 0$, echivalent cu $p^2 \geqslant q$. Dacă $q \leqslant 0$, adică $q \in \{-2, -1, 0\}$, inegalitatea $p^2 \geqslant q$ este satisfăcută pentru orice $p \in \{-1, 0, 1, 2\}$. Dacă $q = 3$, atunci $p = 2$. Deci din cele 16 ecuații de gradul 2 pe care le putem forma 13 ecuații au rădăcini reale.

5. a) Deoarece patrulaterul $BCDE$ este inscriptibil rezultă că (1) $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BED})$. Dar (2). $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AmB}) = m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{DBE})$. Din (1) și (2) rezultă că $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{DBE})$. b) Pentru a arăta că ED este tangentă la cercul circumscris triunghiului ACE este necesar și suficient ca (3) $m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{CED})$. Dar patrulaterul $BCDE$ este inscriptibil, de unde rezultă că $m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CED})$. Și cum $m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{BAC})$ rezultă egalitatea cerută. c) $m(\widehat{AGD}) = 180° - m(\widehat{ADG}) - m(\widehat{GAD}) = 180° - m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{GAD}) = 180° - \frac{1}{2} m(\widehat{AnC}) - \frac{1}{2} m(\widehat{CpH}) = 90°$. Deci $AG \perp ED$.

Etapa finală

1. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $Y = \{1, 2, 4, 6\}$.

2. Se observă că $\Delta = (2a - b)^2 + 4a^2b^2 \geqslant 0$, ecuația admite mereu rădăcini reale. Dacă $b = 0$ ecuația devine $ax^2 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = x_2 = 0 < 3$. Dacă $b \neq 0$, ecuația se mai scrie $(ax - b)^2 + b^2(x - 3) = 0$. Ca această sumă să se anuleze trebuie ca $x - 3 \leqslant 0$ sau $x \leqslant 3$.

3. a) $m(\widehat{PAQ}) = 2m(\widehat{M_1AM}) + 2m(\widehat{MAM_2}) = 180°$. b) $PQ = 2AM$. Deci $PQ_{max} = 2AM_{max} = 4R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC. c) Dreapta PQ este tangentă la $\mathcal{C}(O, R)$ dacă și numai dacă $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CAQ}) = m(\widehat{MAC})$. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{MAC})$ dacă și numai dacă $AM \perp BC$. d) Se observă că $m(\widehat{PMQ}) = 90°$ și PA este mediană în triunghiul PBQ. Patrulaterul $BMQP$ este inscriptibil dacă și numai dacă $m(\widehat{PBQ}) = m(\widehat{PMQ}) = 90°$, adică $m(\widehat{PBQ}) = 90°$ dacă și numai dacă lungimea medianei $BA = \frac{1}{2} PQ$. Dar $PQ = 2AM$, deci $BA = AM$.

Anul 1969

Etapa județeană

1. a) $P_1 = (a + 1)(a - 2)^2$, $P_2 = (a + 1)(a + 2)^2$, P_1 și P_2 sînt divizibile cu $(a + 1)$; b) $E(a) = \dfrac{|a - 2| + |a - 1|}{|a + 1| - |a + 2|}$; pentru $a \in (1, 2)$, $E(a) = -1$.

2. Din $0 < y < x < 1$ se obține $y + 1 - \sqrt{1 - y^2} > 0$ și inegalitatea devine echivalentă cu $y + x\sqrt{1 - y^2} > x + y\sqrt{1 - x^2}$, prin ridicare la pătrat obținîndu-se $1 - y^2 > 1 - x^2$, inegalitate adevărată pentru $x > y > 0$, din ipoteză.

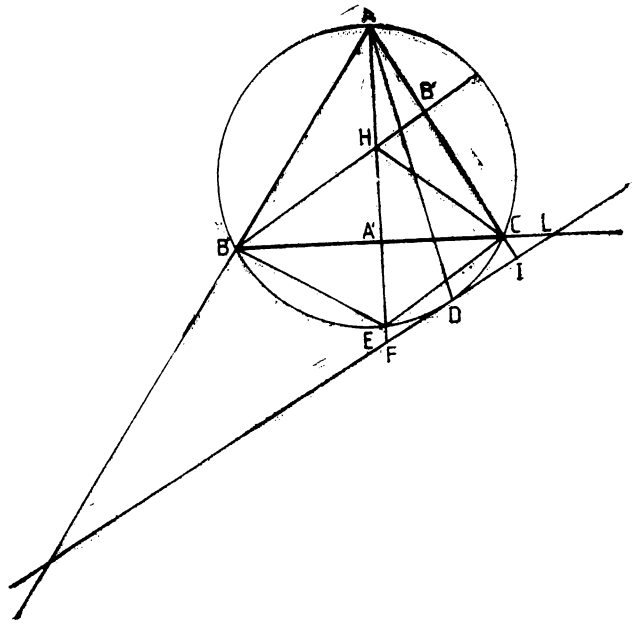


Fig. 9.

3. $A = \{-2, 1\}$, $B = \{-1, 3\}$.

4. a) Triunghiul ABC fiind isoscel (vezi fig. 9) rezultă (1) $BH = HC$ și (2) $BE = EC$; (BA' este bisectoare și înălțime în triunghiul HBE și (3) $BH = BE$; din (1), (2) și (3) rezultă că $BHCE$ este romb; b) $m(\widehat{BLF}) = m(\widehat{BAF})$ și deci $ABFL$ este patrulater inscriptibil; c) $BHCE$ fiind romb, se obține condiția $m(\widehat{CBE}) = 30^\circ = m(\widehat{EAC})$, adică triunghiul ABC este echilateral; d) Dacă $CI = LI$, atunci triunghiul $AA'C$ devine dreptunghic isoscel, de unde rezultă că și ABC este dreptunghic isoscel; nu poate avea loc $CI = CL$ sau $LI = CL$.

Etapa finală

1. a) $\Delta = a^2(a-2)^2 + 4(a-1)^2 > 0$, $(\forall) a \in \mathbf{R}$; $x_{1,2} = \dfrac{a(a-2) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$.
b) $x_1 + x_2 = a(a-2)$, $x_1x_2 = -(a-1)^2$, inegalitatea devine $2|a-2| - 3|a-1| \geqslant 0$ cu soluția $a \in \left[0, \dfrac{6}{5}\right]$. c) Pornind de la inegalitatea evidentă $(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$, rezultă $\sqrt{xy}\,(x+y) \geqslant 2xy$, $2\sqrt{xy}\,(x+y) \geqslant 4xy$. d) (1) $3(ab + bc + ca) \leqslant 1 \Leftrightarrow 3(ab + bc + ca) \leqslant (a+b+c)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$, inegalitate evidentă; dar

$$(1) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow 1 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2);\ 4(ab+bc) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{ab+bc} \Leftrightarrow 2b(1-b) \leqslant \sqrt{b(1-b)} \Leftrightarrow (2b-1)^2 \geqslant 0;$$

$$2\sqrt{ab+bc} \leqslant 1 \Leftrightarrow 4b(a+1) \leqslant 1 \Leftrightarrow (2b-1)^2 \geqslant 0;$$

analog se demonstrează și ultimele două inegalități.

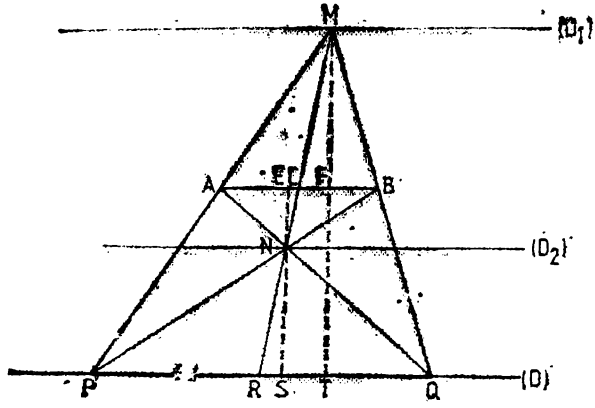


Fig. 10

3. a) $\triangle MAC \sim \triangle MPR$, $\triangle MBC \sim \triangle MQR$, $\triangle ACN \sim \triangle QRN$, $\triangle BCN \sim \triangle PRN$ (vezi fig. 10), de unde rezultă $AC = BC$, $PR = RQ$, adică MN trece prin mijlocul C, fix, al segmentului $[AB]$. b) Dacă $a < l$ și $ES \perp AB$, $FT \perp AB$, $F \in (MT)$, $N \in (ES)$, din șirul de rapoarte egale $\frac{MF}{MT} = \frac{MC}{MR} = \frac{a}{l} = \frac{CN}{NR} = \frac{EN}{NS}$, se obține $MF = \frac{ad}{l-a}$ și $EN = \frac{ad}{l+a}$, deci M și N aparțin dreptelor D_1 și D_2, paralele cu AB, la distanțele $\frac{ad}{l-a}$ și, respectiv, $\frac{ad}{l+a}$ de AB, situate în semiplanele opuse determinate de dreapta AB, D și D_2 fiind în același semiplan determinat de AB. Dacă $a > l$, $MF = \frac{ad}{a-l}$, D_1, D_2 și D fiind situate pe același semiplan față de AB, dar D_2 și D_1 în semiplanele opuse determinate de D. Dacă $a = l$, $EN = \frac{a}{2}$ și $M \in \emptyset$. c) N fiind centrul cercului înscris, $[AN$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAM}$, triunghiul APQ este isoscel și din triunghiul dreptunghic APP' $(PP' \perp AB)$, se obține $l = \frac{-a + \sqrt{3d^2 + 4a^2}}{3}$ iar din condiția $l < a$ se obține $d < 2a$, condiția ca problema să admită soluție.

Anul 1970

Etapa județeană

1. a) Din $x \in A \cap B$ se obține $2n - 1 = 501 - 3m$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m = 2k$, $k \leqslant 83$ și $x = 501 - 6k \in C$, adică $(*)$ $A \cap B \subseteq C$. b) Din $x \in C$ rezultă $x = 501 - 6p = 501 - 3 \cdot 2p = 501 - 3m \in B$, $x = 501 - 6p = 2(251 - 3p) - 1 \in C$, deci $x \in A \cap B$ și $(**)$ $C \subseteq A \cap B$. Relațiile $(*)$ și $(**)$ implică $A \cap B = C$.

2. $A = 2$, $B = \frac{2}{3}$, $E = \frac{9}{8}$.

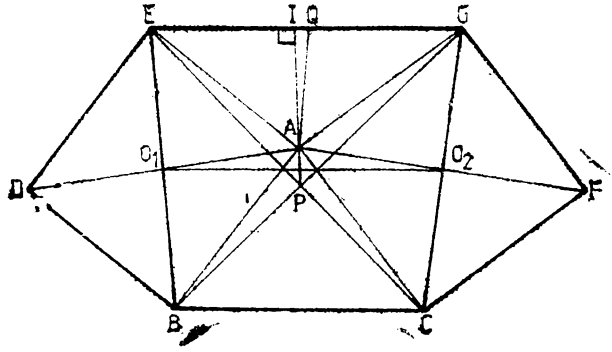


Fig. 11

3. a) $\triangle EAC \equiv \triangle BAG$ (L.U.L.); b) Patrulaterele $AEBP$ și $ACFG$ sînt inscriptibile, de unde se obține (vezi fig. 11) $m(\widehat{EPA}) = m(\widehat{EBA}) = 45^\circ = m(\widehat{ACG}) = m(\widehat{APG})$; c) Fie $Q \in (EG)$ astfel încît $\widehat{EAQ} \equiv \widehat{ABC}$. Atunci $\triangle EAQ \equiv \triangle ABM$ (U.L.U.), $\triangle GAQ \equiv \triangle ACM$, deci $BM = AQ = CM$ și $EQ = AM = GQ$; d) Se obține din punctul b; e) $O_1A = O_1P$, $O_2A = O_2P$.

4. Notînd ecuația $P(x) = 0$ se obține că discriminantul lui P este pozitiv, iar $P(0) > 0$ și $P(1) < 0$ pentru orice $m > 0$.

Etapa finală

1. a) Din patrulaterele înscrise (vezi fig. 12) $BPMR$ și $CQMR$ se obține $\widehat{PMB} \equiv \widehat{QMC}$, (1) $\widehat{PMQ} \equiv \widehat{BMC}$, $\widehat{QMR} \equiv \widehat{ACB}$, $\widehat{RMT} \equiv \widehat{ABC}$ și (2) $\widehat{PMQ} \equiv \widehat{BAC}$. Din (1) și (2) rezultă $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{BAC}) = \text{const}$, deci M aparține arcului capabil de unghi $\widehat{BAC}$; b) Dacă $d_1 \parallel d_2$, fie RT tangentă în R la cercul circumscris

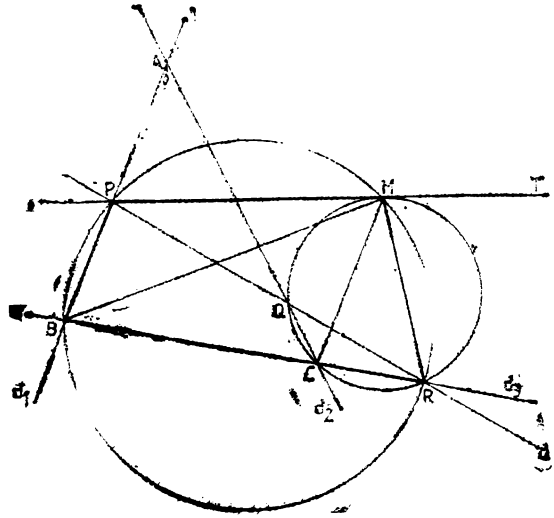


Fig. 12

triunghiului CQE. Atunci $\widehat{CRT} \equiv \widehat{CQR} \equiv \widehat{BPR}$ și RT este tangentă și la cercul circumscris triunghiului BPR, deci cele două cercuri sînt tangente; c) Aplicînd teorema cosinusului în triunghiurile MBC, MAC, MAB, se obține, după poziția punctului M, una din relațiile $MA = MB + MC$, $MB = MA + MC$, $MC = MA + MB$.

2. $X = \{1, 2, 5, 6\}$.

3. $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y + z) + 3xz(x + y + z) + 3yz(y + z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

4. $E = -1$.

Anul 1971

Etapa județeană

1. a) Avem

$$m(\widehat{CUM}) = \frac{m(\widehat{CE}) + m(\widehat{BE}) + m(\widehat{AF})}{2} = \frac{m(\widehat{CE}) + m(\widehat{GF})}{2} = m(\widehat{CGM}) \text{ (vezi fig. 13).}$$

b) Avem $\widehat{UGM} \equiv \widehat{UCM} \equiv \widehat{MEV}$, $\triangle UGM \equiv \triangle VEM$ (U.L.U.). c) $\widehat{QFG} \equiv \widehat{GCD} \equiv \widehat{QUG}$ pentru că patrulaterul $GCDF$ este înscris iar $CGUM$ este inscriptibil. Rezultă $QGUF$ inscriptibil. d) $\widehat{GQU} \equiv \widehat{GFU} \equiv \widehat{GEC} \equiv \widehat{MPE}$, de unde rezultă, în baza cazului L.U.U., că $\triangle MEP \equiv \triangle MGQ$.

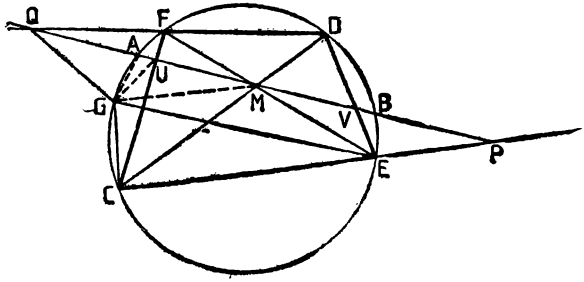


Fig. 13

2. b) Folosind identitățile de la punctul a, din $(a^2 + b^2)(A^2 + B^2) - (aA + bB)^2 = 0$ și $(a^2 + b^2 + c^2)(A^2 + B^2 + C^2) - (aA + bB + cC)^2 = 0$ se obține $(aB - bA) = (aC - cA) = (bC - cB) = 0$ și echivalențele cerute. c) — d) Polinoamele p_1, p_2, p_3 sînt pătrate perfecte dacă discriminanții lor, respectiv, Δ_1, Δ_2, Δ_3 sînt egali cu zero. Din această condiție, se obține, aplicînd echivalențele de la punctul b, $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \Leftrightarrow \Delta = 0$, condiție necesară și suficientă pentru ca polinomul p să fie pătrat perfect (Δ fiind discriminantul polinomului p). e) $p_1 + p_2 + p_3 = 2p$; dacă p este pătrat perfect, atunci $\sqrt{2p} \notin \mathbb{Z}$, deci $\sqrt{p_1 + p_2 + p_3} \notin \mathbb{Z}$.

Etapa finală

1. a) Din

$$\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sqrt{x+1} & \text{dacă } x \in [-1, 0] \\ -1 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}, \text{ rezultă } M' = \{-1\}.$$

b) $M = [-1, 1]$, $M \setminus M' = (-1, 1]$.

2. Se rezolvă în $\mathbf{R}$ sistemul de ecuații $x^2 - y^2 = 3x - 4y$, $2xy = 4x + 3y$. Avem $M_1 \cap M_2 = \{(0, 0), (3, 4)\}$, $M = \{0, 25\}$.

3. a) Diagonalele $[MP]$ și $[NQ]$ ale rombului fiind perpendiculare în O, centrul de simetrie al dreptunghiului, patrulaterul $ONCP$ este inscriptibil, $\widehat{MNO} \equiv \widehat{ONP} \equiv \widehat{OCP} \equiv \widehat{ODP}$, deci $m(\widehat{MNP}) = \text{const.}$ b) Dacă $A' = pr_{ox}A$, $A'' = pr_{oy}A$, ținînd cont că patrulaterul $MANO$ este inscriptibil într-un cerc de diametru $[MN]$, și că $MN \geqslant AO = A'A''$, se obține $P_{AMN} = AM + AN + MN \geqslant AA'' + AA' + A'A'' = P_{AA'A''}$, egalitatea avînd loc numai dacă $M \equiv A''$ și $N \equiv A'$, triunghiul de perimetru minim fiind $AA'A''$. c) Patrulaterul $ABCD$ fiind convex, $(AC) \cap (BD) = \{0\}$, $O \in \text{Int } ABCD$; din inegalitățile date se obține $\sigma[AOB] \leqslant \sigma[COD]$, $\sigma[COD] \leqslant \sigma[AOB]$; rezultă $\sigma[COD] = \sigma[AOB]$; $\sigma[ABC] = \sigma[BCD]$, de unde $AD \parallel BC$, $[AD]$ fiind baza mare a trapezului $ABCD$.

Anul 1972

Etapa județeană

1. a) Notînd $\sqrt{a} + \sqrt{b} = s$, $\sqrt{ab} = p$, se obține $N_1 + N_2 = s^3 - 3ps + p$, $N_1 \cdot N_2 = p(s^3 - 3ps + p^2 + p)$. b) Rezultă din punctul a. c) Presupunînd $N_1, N_2 \in \mathbf{Q}$, $N_1 = \frac{p}{q}$, $N_2 = \frac{m}{n}$, prin ridicare la pătrat se obține $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$.

2. Inecuația este echivalentă cu $\frac{(m+1)(x-1)}{1-mx} \geqslant 0$, avînd, în raport cu parametrul m, soluțiile: dacă $m \in (-\infty, -1)$, $x \in \left(\frac{1}{m}, 1\right]$; dacă $m = -1$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$; dacă $m \in (-1, 0)$, $x \in \left(-\infty, \frac{1}{m}\right) \cup [1, +\infty)$; dacă $m = 0$, $x \in [1, +\infty)$; dacă $m \in (0, 1)$, $x \in \left[1, \frac{1}{m}\right)$; dacă $m = 1$, $x \in \emptyset$; dacă $m \in (1, +\infty)$, $x \in \left(\frac{1}{m}, 1\right]$.

3. a) Din condițiile impuse ordinului radicalului, $36 - x^2 \geqslant 2$, $36 - x^2 \in \mathbf{N}$, se obține $M = \{\pm\sqrt{k} \mid \alpha \in \mathbf{N}^*, k \leqslant 34\}$; adăugînd și condiția $x \geqslant 0$, pentru k număr par, radicalul există, dacă $x \in \{\sqrt{k} \mid k \in \mathbf{N}, k \leqslant 34\} \cup \{-\sqrt{2k+1} \mid k \in \mathbf{N}, k \leqslant 16\}$. b) $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

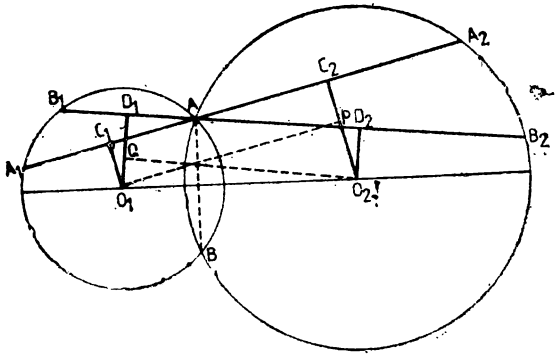


Fig. 14

4. a) Se construiește $O_1C_1 \perp A_1A_2$, $O_2C_2 \perp A_1A_2$, $O_1D_1 \perp B_1B_2$, $O_2D_2 \perp B_1B_2$, $O_1P \parallel A_1A_2$, $O_2Q \perp B_1B_2$ (vezi fig. 14). Atunci $A_1A_2 = 2C_1C_2 = 2O_1P$, $B_1B_2 = 2D_1D_2 = 2O_2Q$ iar din $\triangle O_1O_2P \equiv \triangle O_2O_1Q$ rezultă că $A_1A_2 = B_1B_2$. b)-c) Din $A_1A_2 = 2O_1P = l$ și pentru că triunghiul O_1O_2P este dreptunghic în P, re-

zultă că $AB < l < 2O_1O_2$, P aparţinînd cercului de diametru (O_1O_2) astfel încît $O_1P = \frac{l}{2}$ iar $A_1A_2 \parallel O_1P$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. $x \in [-1, 1]$.

2. Fie $y \in \mathbf{Z}$, $y = \frac{2x^2 + 5x + 9}{2x + 3} \Leftrightarrow 2x^2 + x(5 - 2y) + 9 - 3y = 0$, $\Delta = (2y + 1)^2 - 48 = (2k + 1)^2$, $k \in \mathbf{Z}$; se obţine ecuaţia $(y-k)(y+k+1) = 12$, cu soluţiile întregi $y \in \{-7, -4, 3, 6\}$.

3. $[AP]$ fiind mediană în triunghiul ABC şi $PP' \parallel AB$, $PP'' \parallel AC$, $[PP']$ şi $[PP'']$ sînt linii mijlocii în triunghi, deci P' şi P'' sînt mijloacele segmentelor $[AC]$, respectiv $[AB]$.

Etapa finală

1. a) Patrulaterele $ABMQ$ şi $ABNP$ sînt înscrise în cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$. Avem $\widehat{CQA} \equiv \widehat{ABM}$ şi $\widehat{CPA} \equiv \widehat{ABN}$, de unde rezultă că $AQCP$ este patrulater inscriptibil şi $\widehat{CQP} \equiv \widehat{CAP} \equiv \widehat{MNP}$, deci patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil. b) Intersecţia mediatoarelor segmentelor $[AQ]$ şi $[AP]$ este centrul cercului circumscris patrulaterului $AQCP$, deci aparţine mediatoarei segmentului $[CA]$. Locul geometric este porţiunea din această mediatoare delimitată de segmentele $[CQ]$ şi $[CP]$. c) Din teorema sinusurilor în triunghiul AMN, se obţine $2R = \frac{AM}{\sin \widehat{ANM}}$; deci $2R$ este maxim pentru $[AM]$ diametru, caz în care şi $[AN]$ este diametru şi rezultă că $MN \parallel O_1O_2$.

2. Dacă $n = 2k + 1$, $n > 2$, $x_1 = \frac{a + b}{2}$, $x_2 = \frac{3^n a - b}{3^n - 1}$ cu condiţia $a \neq b$; dacă $n = 2k$, $n \geqslant 2$, $x = \frac{a + b}{2}$ cu condiţia $a > b$.

3. 1) Vom demonstra că $(p_1) \Rightarrow (p_2) \Rightarrow (p_3) \Rightarrow (p_1)$. $(p_1) \Rightarrow (p_2)$: Să notăm cu x_1 rădăcina întreagă a ecuaţiei. Dacă presupunem (p_1) adevărată, vom demonstra că $x_1 \mid b$. Conform relaţiilor lui Viète obţinem $x_2 = \frac{b}{x_1}$. Deoarece $b, x_1 \in \mathbf{Z}$ rezultă $x_2 \in \mathbf{Q}$. Dar (p_1) implică $x_2 \in \mathbf{Z}$, adică $x_1 \mid b$. $(p_2) \Rightarrow (p_3)$: Fie x_1 o rădăcină întreagă a ecuaţiei. Deducem $x_2 = \frac{b}{x_1}$. Deoarece are loc (p_2) rezultă că $x_1 \mid b$, deci $x_2 \in \mathbf{Z}$. $(p_3) \Rightarrow (p_1)$: Fie x_1 rădăcina raţională a ecuaţiei date. Vom demonstra că dacă (p_3) este adevărată, atunci $x_1 \in \mathbf{Z}$. Deoarece $x_1 \in \mathbf{Q}$, rezultă $x_1 = \frac{p}{q}$ cu p, $q \in \mathbf{Z}$, p şi q prime între ele. Rezultă că $p^2 + apq + bq^2 = 0$. Deoarece p nu divide pe q^2, rezultă $p \mid b$. Dar $x_2 = \frac{bq}{p}$. Cum $p \mid b$ rezultă că $x_2 \in \mathbf{Z}$. Deoarece (p_3) este adevărată rezultă $x_1 \in \mathbf{Z}$.

2) Propozițiile (p_1), (p_2) și (p_3) sînt toate adevărate. Vom demonstra că (p_2) este adevărată. Să presupunem că x_1 este o rădăcină întreagă a ecuației date. Rezultă că $x_1(x_1 + a) = -b$. Deoarece $x_1 + a \in \mathbf{Z}$ rezultă că $x_1 | b$, ceea ce demonstrează (p_2).

4. a) Se descompune pătratul în patru pătrate congruente de latură $\frac{1}{2}$. Din cele cinci puncte, cel puțin două aparțin aceluiași pătrat deci distanța maximă dintre ele este mai mică decît diagonala acestui pătrat, adică $\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) Să se arate că oricum am considera șapte puncte interioare unui hexagon regulat cu latura 1, există cel puțin două astfel încît distanța dintre ele să fie mai mică decît 1. Se descompune hexagonul în șase triunghiuri echilaterale congruente.

Anul 1973

Etapa județeană

1. a) $E(x) = |\sqrt{2x+3} - 4| + |\sqrt{2x+3} - 2|$, $A = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

b) Dacă $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right]$, $\sqrt{2x+3} \in [2, 4]$ și $E(x) = 2$.

2. Presupunînd $m \neq k$ se obține $x = y = \frac{10}{k+m}$; $k + m \in \{1, 2, 5, 10\}$. Dacă $m = k$, se obține ecuația $x + y = \frac{10}{m}$ cu soluții întregi pentru $m \in \{1, 2, 5, 10\}$.

3. Condițiile $3x - 1 \geqslant 2$, $8 - 3x \geqslant 2$, $5x \geqslant 2$, $3x - 1 \in \mathbf{N}$, $8 - 3x \in \mathbf{N}$, $5x \in \mathbf{N}$, admit soluțiile $x = 1$ și $x = 2$, egalitatea fiind verificată numai pentru $x = 2$.

4. a) Triunghiul BDC fiind ascuțitunghic, centrul O al cercului $\mathcal{C}$ circumscris aparține interiorului său iar unghiul $\hat{B}$ fiind drept, E este diametral opus lui C, deci $E \in [BA$; $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) < 180°$ rezultă $A \notin \text{int}\ \mathcal{C}$ și deci $E \in [BA]$.
b) Patrulaterul $BCDE$ este inscriptibil, triunghiul BCD este isoscel, de unde rezultă $\widehat{AED} \equiv \widehat{BCD} \equiv \widehat{BDC} \equiv \widehat{BEC}$ (vezi fig. 15) și deci $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ECB} \equiv \widehat{EDB}$. c) (1) $\frac{EA}{EB} = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{BC}$; (2) $\frac{EA}{EB} = \frac{MD}{BM}$, $\widehat{ADM} \equiv \widehat{MBC}$, rezultă că $\triangle ADM \sim \triangle CBM$, deci $\widehat{AMD} \equiv \widehat{BMC}$ și A, M, C sînt coliniare.

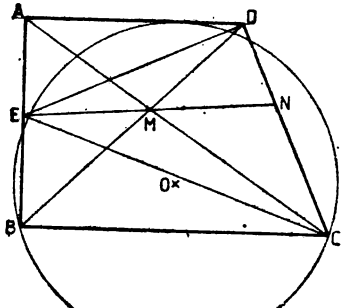


Fig. 15

5. Fie $\mathcal{C}$, cercul tangent la d în M; atunci $m(\widehat{AMB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$. Dacă $M' \neq M$, $M' \notin d$, $m(\widehat{AM'B}) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2} < m(\widehat{AMB})$.

6. Suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui poligon convex este $S_n = 360°$; dacă mai mult de trei unghiuri exterioare sînt obtuze se obține $S_n > 360°$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. $\frac{1}{2}(a^3 - 2a^2 + 3a - 1) = \frac{1}{2}[(a-1)^3 + a^2]$, $a - 1$, $a \in \mathbf{Z}$, dar sînt de parități diferite.

2. Dacă $a = 0$, sistemul revine la $x = \frac{b}{c}$, $b^2 = c^2$, $bz + cy = 0$, care pentru $b = c$ devine $x = 1$, $z + y = 0$ și pentru $b = -c$, $x = -1$, $z - y = 0$, sisteme compatibile nedeterminate, deci $a \neq 0$ și, analog, $abc \neq 0$. În acest caz $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Etapa finală

1. Ținînd cont că $x_1^2 = 3x_1 - 4$, $x_2^2 = 3x_2 - 4$, se obține

$$E = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. a) Este suficient să se arate că $S_2 + S_4 < S_1 + S_3$ (vezi fig. 16). Avem $S_2 + S_4 = \frac{MI \cdot h_1}{2} + \frac{MI \cdot h_2}{2} + \frac{NI \cdot h_1}{2} + \frac{NI \cdot h_2}{2} = \frac{MN \cdot h}{2}$, unde $h = h_1 + h_2$. $S_1 + S_3 = S - (S_1 + S_2) = \frac{(a+b)h}{2} - \frac{MN \cdot h}{2}$. Relația $S_2 + S_4 < S_1 + S_3$ este echivalentă cu $MN < \frac{a+b}{2}$. Dar $MN = \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$. b) $S_2 = S_4 = \frac{MN \cdot h}{4} = \frac{abS}{(a+b)^2}$, $h_1 = \frac{ab}{a+b}$;

$h_2 = \frac{bh}{a+b}$, $S_1 = \frac{a^2S}{(a+b)^2}$, $S_3 = \frac{b^2S}{(a+b)^2}$.

c) $S_a = \frac{a^2(a+3b)S}{(a+b)^3}$;

$S_b = \frac{b^2(b+3a)S}{(a+b)^3}$.

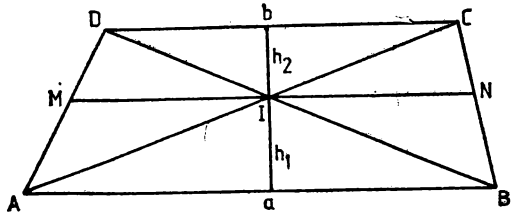


Fig. 16

3. Prin ridicare la pătrat se obține condiția $m = \frac{1}{4}$ și ecuația $|x - 2| + |x + 2| = 2x$ cu soluția $x \in [2, +\infty)$.

4. a) $\sigma[ABC] = \frac{AB \cdot BC \sin B}{2}$, $\sigma[A'B'C'] = \frac{A'B' \cdot B'C' \sin B'}{2}$, $AB \cdot BC \sin B \geqslant A'B' \cdot B'C' \sin B'$; dar $AB \cdot BC \leqslant A'B' \cdot B'C'$, deci $\sin B \geqslant \sin B'$, $\hat{B} \geqslant \hat{B}'$ deoarece sînt unghiuri ascuțite. La fel, $A \geqslant A'$, $C \geqslant C'$. Dacă o inegalitate este

strictă, atunci $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}'$, ceea ce nu este posibil, deci $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Atunci $AB \cdot BC \geqslant A'B' \cdot B'C'$ și $AB \leqslant A'B'$, $BC \leqslant B'C'$, implică $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. b) Nu, deoarece din $\sin B \geqslant \sin B'$ nu rezultă $\hat{B} \geqslant \hat{B}'$.

5. Rădăcina comună este $x = c$ iar celelalte rădăcini sînt, respectiv, $x_1 = b$, $x_2 = a$, care verifică relația $b + c = -a$ și ecuația $x^2 + cx + ab = 0$.

Anul 1974

Etapa județeană

1. a) Dacă $x = [x] + \alpha$, $\alpha \in [0, 1)$, $[x + m] = [[x] + m + \alpha] = [x] + m$. b) $(a * b) * c = (a + [b]) * c = a + [b] + [c]$, $a * (b * c) = a * (b + [c]) = a + [b + [c]] = a + [b] + [c]$, legea este asociativă. c) Legea nu este comutativă.

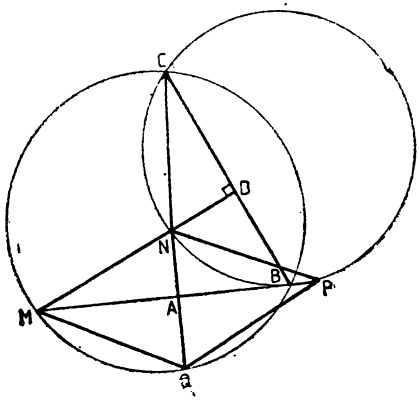


Fig. 17

2. a) $CNBP$ și $CBQM$ sînt patrulatere înscrise iar $ANDB$ este inscriptibil, de unde rezultă $\widehat{BPN} \equiv \widehat{BCN} \equiv \widehat{BMQ} \equiv \widehat{BMN}$ (vezi fig. 17), deci $MQ \parallel NP$, $MQ = NP = MN$. b) $m(\widehat{QMN}) = 2m(\widehat{ABC}) = \text{const.}$ c) Isoscel.

3. $(n - 1)n(n + 1) = n^3 - n = k^3$, $k \in \mathbf{N}$, $(n - k)(n^2 + nk + k^2) = n$, în contradicție cu $n^2 + nk + k^2 > n$.

4. a) Fie $G \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, r)$ și diametrul $[MN]$, $G \in [MN]$. Dacă $MG \geqslant GN$, se consideră $P \in [MN]$, $\frac{GN}{GP} = 2$ și coarda $AB \perp MN$, $P' \in AB$; G este centrul de greutate al triunghiului ABN. Dacă $MG \leqslant GN$, se repetă construcția, schimbînd M cu N. b) Fie $M \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, r)$ și $\{A\} = (OM \cap \mathcal{C}(O, r)$. Dacă bisectoarele triunghiului isoscel ABC se intersectează în M, se notează $AM = a$, $MD = x$; atunci din $\frac{a}{x} = \frac{AB}{BD}$ și $AB = \sqrt{2r(a + x)}$, $BD = \sqrt{(a + x)(2r - a - x)}$ se obține ecuația $2rx^2 + a^2x + a^2(a - 2r) = 0$ cu soluția convenabilă $x = \frac{a(2r - a)}{2a}$. Se arată că pentru $a \in (0, r)$, $a + x \in (a, 2r)$. c) Dacă $H \in \text{Int}\, \mathcal{C}(O, r)$, fie $\{A'\} = (OH \cap \mathcal{C}(O, r)$, $\{A\} = (HO \cap \mathcal{C}(O, r)$ și D mijlocul segmentului $[HA']$. Triunghiul isoscel ABC, $D \in [BC]$ are pe H ca ortocentru pentru că $\widehat{HBC} \equiv \widehat{BCA'} \equiv \widehat{HAC}$ și triunghiul ABC este ascuțitunghic. Dacă $H \in \mathcal{C}(O, r)$, fie (AB) un diametru al cercului; HAB este triunghiul dreptunghic înscris cu H ortocentru. d) Se arată în mod analog ca orice punct aparținînd coroanei circulare determinate de cercurile $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O, 3r)$ sînt ortocentrele triunghiurilor obtuzunghice înscrise în $\mathcal{C}(O, r)$.

5. Pentru orice submulțime $A \subset \mathbf{R}$, funcția $f_A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_A(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ -x, & x \in \mathbf{R} \setminus A \end{cases}$$

îndeplinește condiția cerută și pentru orice funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, cu proprietatea din enunț, există o mulțime A astfel încît $f = f_A$.

Etapa finală

1. a) $E(a, b) = 2[a^2 + (b+1)^2] - 1 \geqslant -1$; $E(a, b) = -1$ pentru $a = 0$, $b = -1$. b) Dacă $a \in [-4, -2]$ și $b \in [2, 3]$, $a^2 \in [4, 16]$, $(b+1)^2 \in [9, 16]$ și $E(a, b) \in [25, 63]$; valoarea minimă se obține pentru $a = -2$, $b = 2$.

2. Presupunînd că $x = \alpha > 0$, se obține $\sqrt{a + b\alpha} > \sqrt{a - c\alpha}$, $\sqrt{b + c\alpha} > \sqrt{b - a\alpha}$, $\sqrt{c + a\alpha} > \sqrt{c - b\alpha}$, inegalități care prin adunare arată că ecuația nu admite rădăcină pozitivă. Analog pentru $x = \alpha < 0$.

3 E, F, G, H fiind mijloacele laturilor pătratului $ABCD$, $PP' \perp AB$ (vezi fig. 18), $PP' = \frac{BN}{2}$, $P'E = BE - BP' = \frac{AB - BM}{2} = \frac{BM}{2}$, rezultă că triunghiul EPP' este isoscel și $P \in [EF]$, deci locul geometric este format din punctele pătratului $EFGH$. Reciproc, orice punct Q al pătratului $EFGH$ este mijlocul unui segment $[M'N']$, $M' \in [AB]$ și $N' \in [BC]$ dacă $Q \in [EF]$, $M' \in [BC]$ și $N' \in [CD]$ dacă $Q \in [FG]$, $M' \in [CD]$ și $N' \in [DA]$ dacă $Q \in [GH]$, $M' \in [AD]$ și $N' \in [AB]$ dacă $Q \in [HE]$, punctele M' și N' obținîndu-se, de exemplu, ca în fig. 18, $QQ' \perp CD$, $N'D = 2QQ'$, $CM' = N'D$.

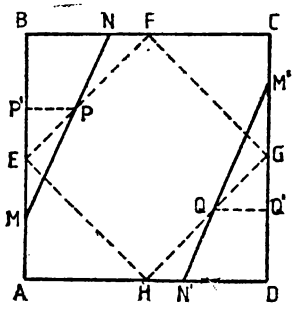


Fig. 18

4. Dreptunghiurile există numai dacă A și B sînt în cadrane diferite sau unul dintre ele este pe Oy, deci $x_A \cdot x_B \leqslant 0$ sau $b(a+b) \leqslant 0$. În acest caz perimetrele dreptunghiurilor înscrise sînt egale cu $2k$.

Anul 1975

Etapa județeană

1. $n = (a-b)^2 + (a+b)^2 + b^2$.

2. Ducem prin P o paralelă la AB care taie pe (BC) în T. Deci $\triangle MAB \sim \triangle MPT$ și rezultă că (1) $\frac{MP}{AM} = \frac{MT}{BM} = \frac{PT}{AB} = \frac{1}{5}$. Din faptul că $\frac{MT}{BM} = \frac{1}{5}$ rezultă că $\frac{BT}{BC} = \frac{2}{5}$. Triunghiurile NBC și PBT sînt asemenea deoarece au un unghi comun și $\frac{PB}{BN} = \frac{BT}{BC} = \frac{2}{5}$, de unde deducem că $PT \parallel NC$ și (2) $PT = \frac{2}{5} NC$. Din (1) și (2) rezultă că $PT \parallel AB$, $PT \parallel DC$, de unde $AB \parallel DC$. Din faptul că $PT = \frac{1}{5} AB$ și $PT = \frac{1}{5} DC$ rezultă că $AB = DC$. Am demonstrat

că patrulaterul $ABCD$ are o pereche de laturi opuse congruente și paralele, de unde deducem că este un paralelogram.

3. Să analizăm mai întîi cazul cînd $b = b'$. În aceste condiții există un punct $M \in (CB$ astfel încît $MC = B'C'$. Rezultă deci că triunghiurile ACM și $A'C'B'$ sînt congruente. Să analizăm poziția punctului M pe $(CB$. Dacă $B \in (MC)$, atunci $\frac{BC}{MC} = \frac{a}{a'} < 1$, contradicție, deoarece prin ipoteză $\frac{a}{a'} \geqslant \frac{b}{b'} = 1$. Dacă $M \in (BC)$, atunci unghiul $\widehat{AMB}$ este obtuz, ținînd cont de ipoteza problemei, deci în triunghiul ABM avem $\widehat{ABM} < \widehat{AMB}$ și $c' < c$, adică $\frac{c}{c'} > 1$, contradicție, deoarece prin ipoteză $\frac{c}{c'} \leqslant \frac{b}{b'} = 1$. Rezultă că punctul M coincide cu punctul B, de unde deducem că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt congruente și deci sînt asemenea. Să considerăm acum cazul cînd $b \neq b'$. Mai întîi cazul cînd $b > b'$ (analog se demonstrează și cazul cînd $b < b'$). Vom face demonstrația reducînd problema la cazul $b = b'$. Deoarece $b > b'$ rezultă că și $a > a'$, deci există un punct $P \in (AC)$ astfel încît $PC = A'C'$. Considerăm pe (CB) punctul M astfel încît $MC = B'C'$. Rezultă deci că triunghiurile $A'B'C'$ și CPM sînt congruente. Ducem prin P o paralelă la AB care taie pe BC în N. Deci triunghiurile ABC și PCN sînt asemenea. Din construcția triunghiurilor rezultă că avem rapoartele $\frac{a}{MC} \geqslant \frac{b}{PC} \geqslant \frac{c}{PM}$ și $\frac{b}{PC} = \frac{a}{CN} = \frac{c}{PN}$, de unde găsim că $\frac{a}{b} = \frac{CN}{PC} \geqslant \frac{MC}{PC}$ și $\frac{b}{c} = \frac{PC}{PN} \geqslant \frac{PC}{PM}$, și de unde deducem inegalitățile $\frac{CN}{MC} \geqslant \frac{PC}{PC} \geqslant \frac{PN}{PM}$, adică triunghiurile PCH și PCM verifică condițiile primului caz analizat, deci $\triangle PCN \sim \triangle PCM$ și acum, ținînd cont de modul de construcție a triunghiurilor, rezultă că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt asemenea.

4. Coordonatele punctului de minim sînt $x_{min} = p - k$ și $y_{min} = p(2k - p)$, de unde rezultă sistemul de inegalități $0 < p - k \leqslant 2$, $-2p \leqslant p(2k - p) \leqslant 0$; de aici deducem $k \leqslant p \leqslant k + 2$ și $-2 \leqslant 2k - p \leqslant 0$. Rezolvînd acest sistem în numere naturale găsim că $p \in \{2, 3, 4\}$.

5. Evident, $f(x) \geqslant 0$, $(\forall) a \in \mathbf{R}$ și trebuie găsite valorile lui a pentru care f ia și valoarea 0. Funcția f ia valoarea 0 atunci și numai atunci cînd $x^2 - 3x + 2 = 0$ și $x - a = 0$, de unde rezultă $a \in \{1, 2\}$.

Etapa finală

1. a) Putem scrie

$$pf(x_1) + qf(x_2) - f(px_1 + qx_2) = p(x_1^2 + ax_1 + b) + q(x_2^2 + ax_2 + b) - (px_1 + qx_2)^2 - a(px_1 + qx_2)^2 - b = p(1 - p)x_1^2 + q(1 - q)x_2^2 - 2pqx_1x_2 + b(p + q - 1) = pq(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = pq(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0,$$

de unde rezultă inegalitatea cerută. b) Avem de analizat mai multe cazuri, după poziția pe care o are abscisa punctului de minim $x_m = -\frac{a}{2}$ față de punctele -1 și 1.

Cazul 1. Dacă $x_m < -1$, atunci $-\frac{a}{2} < -1$, adică $a > 2$, deci $\max f(x) = 1 + a + b$ și $\min f(x) = 1 - a + b$, adică $\operatorname{Im} f = [1 - a + b, 1 + a + b]$.

Cazul 2. Dacă $x_m = -1$, atunci $a = 2$ și $\min f(x) = b - 1$, $\max f(x) = b + 3$ și deci $\operatorname{Im} f = [b - 1, b + 3]$.

Cazul 3. Dacă $x_m \in (-1, 0)$, atunci $a \in (0, 2)$ și $\max f(x) = 1 + a + b$, $\min f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4b - a^2}{4}$ și deci $\operatorname{Im} f = \left[\frac{4b - a^2}{4}, 1 + a + b\right]$.

Cazul 4. Dacă $x_m = 0$, atunci $a = 0$ și $\min f(x) = b$, $\max f(x) = b + 1$ și deci $\operatorname{Im} f = [b, b + 1]$.

Cazul 5. Dacă $x_m \in (0, 1)$, atunci $a \in (-2, 0)$ și $\max f(x) = 1 - a + b$, $\min f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4b - a^2}{4}$ și deci $\operatorname{Im} f = \left[\frac{4b - a^2}{4}, 1 - a + b\right]$.

Cazul 6. Dacă $x_m = 1$, atunci $a = -2$ și $\min f(x) = b - 1$, $\max f(x) = b + 3$ și deci $\operatorname{Im} f = [b - 1, b + 3]$.

Cazul 7. Dacă $x_m > 1$, atunci $\frac{-a}{2} > 1$, adică $a < -2$ și $\min f(x) = 1 + a + b$, $\max f(x) = 1 - a + b$ și deci $\operatorname{Im} f = [1 + a + b, 1 - a + b]$.

2. a) Fie $x_1, x_2 \in [a, b]$ cu $x_1 < x_2$. Atunci

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1 - a} + \sqrt{b - x_1} - \sqrt{x_2 - a} - \sqrt{b - x_2} =$$

$$= (x_1 - x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1 - a} + \sqrt{x_2 - a}} - \frac{1}{\sqrt{b - x_1} + \sqrt{b - x_2}}\right) = \tag{1}$$

$$= (x_1 - x_2)\frac{(\sqrt{b - x_1} + \sqrt{b - x_2}) - (\sqrt{x_1 - a} + \sqrt{x_2 - a})}{(\sqrt{x_1 - a} + \sqrt{x_2 - a})(\sqrt{b - x_1} + \sqrt{b - x_2})}.$$

Dacă $x_1 < x_2 \leqslant \frac{a + b}{2}$, atunci $2x_1 < a + b$ și $2x_2 \leqslant a + b \Rightarrow x_1 - a < b - x_1$ și $x_2 - a \leqslant b - x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1 - a} < \sqrt{b - x_1}$ și $\sqrt{x_2 - a} \leqslant \sqrt{b - x_2}$ și, ținînd cont de (1), rezultă că $f(x_1) < f(x_2)$, deci funcția f este crescătoare pe $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.

Dacă $\frac{a + b}{2} \leqslant x_1 < x_2$, atunci $2x_1 \geqslant a + b$ și $2x_2 > a + b \Rightarrow x_1 - a \geqslant b - x_1$ și $x_2 - a > b - x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1 - a} \geqslant \sqrt{b - x_1}$ și $\sqrt{x_2 - a} > \sqrt{b - x_2}$ și, ținînd cont de (1), rezultă că $f(x_1) > f(x_2)$, deci funcția f este descrescătoare pe $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

b) Punctul de maxim va fi atins pentru $x = \frac{a + b}{2}$ și se obține $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{2(b - a)}$. Punctul de minim trebuie căutat într-unul din capetele intervalului $[a, b]$ și se observă că $f(a) = f(b) = \sqrt{b - a}$.

3. a) Fie E mijlocul segmentului $[CD]$. Dreptele AC și BD se întîlnesc în T. În paralelogramul $TCMD$, cînd variază M, E descrie linia mijlocie a triunghiului TAB, fără capete. Punctul G fiind centrul de greutate al triunghiului CDM, rezultă că el împarte segmentul $[EM]$ în raportul $\frac{1}{2}$, adică $\frac{EG}{GM} = \frac{1}{2}$. Ținînd cont că $(ME) \equiv (TE)$ rezultă că $\frac{GM}{GT} = \frac{1}{2}$, de unde deducem că locul geometric al lui G este o paralelă situată la o treime de bază și la două treimi de vîrful T. Locul geometric este un segment de dreaptă fără capete, situat pe paralela dusă

la AB și delimitat de intersecțiile acesteia cu AT și BT. b) Dacă notăm $CM = x$ și $AB = a$ rezultă că $MD = a - x$. Aria triunghiului CMD calculată în funcție de x va fi $\sigma[CMD] = \frac{1}{2}x(a - x)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2 + ax)$. Se obține aria maximă pentru $x = \frac{a}{2}$, deci atunci cînd M este mijlocul lui $[AB]$.

4. Deoarece într-un trapez punctul de intersecție a diagonalelor determină pe paralela dusă prin el la baze segmente congruente, rezultă $(ME) \equiv (PM)$. Dar $(ME) \equiv (DA) \equiv (BC)$, deci P descrie o paralelă la DC cînd M este pe segmentul deschis (DC). Cînd M se află în D, respectiv C, P se află în U, respectiv V. Deci locul geometric este segmentul (UV) fără capete $(UV \parallel DC)$, la care se adaugă punctele C și D.

5. Din relația $a + b = k$ obținem $b = k - a$ și deci $E = f(a) = 2a^2 - 2ak + k^2$, unde a și k sînt numere naturale. Funcția f nu admite un minim pentru $a = \frac{k}{2}$ deoarece ar rezulta că $a = b$, contradicție. Rezultă că valoarea pentru care se atinge minimul lui f trebuie căutată printre numerele întregi apropiate de $\frac{k}{2}$.

Distingem două cazuri, după cum k este par sau impar.

Cazul 1. Dacă numărul k este par, $k = 2n$, $n \in \mathbf{N}$, atunci putem lua $a = n - 1$ și $b = n + 1$ sau $a = n + 1$ și $b = n - 1$. Să arătăm că pentru aceste valori se obține valoarea minimă pentru E. Fie $h \in \mathbf{N}$, $h > 1$, și fie $a = n - h$; atunci $b = n + h$. Rămîne de arătat că $(n - 1)^2 + (n + 1)^2 < (n + h)^2 + (n - h)^2 \Leftrightarrow n^2 + 1 < n^2 + h^2$, evident.

Cazul 2. Dacă numărul k este impar, $k = 2n + 1$, $n \in \mathbf{N}$, atunci putem lua $a = n$ și $b = n + 1$ sau $a = n + 1$ și $b = n$. Să arătăm că pentru aceste valori se obține valoarea minimă pentru E. Fie $h \in \mathbf{N}$, $0 < h < n$, și fie atunci $a = n + h$, $b = n - h + 1$. Rămîne de arătat că $n^2 + (n + 1)^2 < (n + h)^2 + (n - h + 1)^2 \Leftrightarrow n^2 + h^2 - 2h > 0$, ceea ce este adevărat deoarece $h^2 > h$ și $n^2 > h^2 > h$.

Anul 1976

Etapa județeană

1. a) Putem scrie că $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DN}$ și $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EN}$ care adunate dau $2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GE}$. Analog din $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OL}$ și $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FL}$ se obține $2\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$. La fel din $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OR}$ și $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GR}$ se obține $2\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{FO} \quad \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG}$. Dar $2\overrightarrow{ON} \quad 2\overrightarrow{PL} + 2\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG} = \vec{O}$, de unde rezultă că $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{MR} = \vec{O}$, adică vectorii $\overrightarrow{ON}$ $\overrightarrow{PL}$, $\overrightarrow{MR}$ pot forma un triunghi. b) Să presupunem că $MP \parallel AB$. Deoarece $MP \parallel AB$ și $(FM) \equiv (MD)$, $(GP) \equiv (PE)$ rezultă că $FG \parallel AB$ și (1) $\frac{AO}{FA} = \frac{BO}{BG}$. Dar $DF \parallel BO$ și deci (2) $\frac{AO}{FA} = \frac{AB}{AD}$. Analog din $GE \parallel AO$ re-

zultă (3) $\frac{BO}{BG} = \frac{AB}{BE}$. Din relațiile (1), (2), (3) rezultă că $(AD) \equiv (BE)$. Reciproc, să presupunem că $(AD) \equiv (BE)$. Din (2) și (3) rezultă relația (1), adică $\frac{AO}{FA} = \frac{BO}{BG}$, deci $FG \parallel AB$. Și cum $[MP]$ este linie mijlocie în trapezul $DFGE$ rezultă că $MP \parallel AB$.

2. Dintr-un calcul simplu rezultă că $A = [-7, 7]$ și $B = \{-4, 10\}$, deci $A \cup B = [-7, 7] \cup \{10\}$, $A \setminus B = [-7, -4) \cup (-4, 7]$ și $B \setminus A = \{10\}$, $A \cap B = \{-4\}$.

3. Se observă că $g(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in [a, b] \cup [c, d], \\ -1 \text{ dacă } x \in (b, c), \end{cases}$ și deci

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ dacă } x \in [a, b] \cup [c, d], \\ -f(x) \text{ dacă } x \in (b, c). \end{cases}$$

4. a) Observăm că pentru $x = a$, $f(a) = g(a) = 0$, deci $(a, 0)$ este un punct comun al celor două grafice. Dacă $x > a$, atunci din $(x - a)^2 = m(x - a)$ rezultă că $x = a + m$; numai pentru $m > 0$ graficele mai prezintă încă un punct comun. Dacă $x \leqslant a$, atunci din $(x - a)^2 = m(x - a)$ rezultă că $x = a - m$. La fel, numai pentru $m > 0$, graficele mai prezintă un punct comun. În concluzie, pentru $m > 0$, graficele celor două funcții au trei puncte comune. b) Din condițiile

$$\begin{cases} x \leqslant a \\ -(x - a)^2 \geqslant m(x - a) \end{cases}$$

rezultă că

$$\begin{cases} x - a \leqslant 0 \\ (x - a)(x - a + m) \leqslant 0 \end{cases}$$

și ele sînt simultan îndeplinite pentru $x \in [a - m, a]$ dacă $m > 0$ și pentru $x = a$ dacă $m \leqslant 0$. Din condițiile

$$\begin{cases} x > a, \\ (x - a)^2 \geqslant m(x - a), \end{cases} \text{ rezultă că } \begin{cases} x - a > 0, \\ (x - a)(x - a - m) \geqslant 0, \end{cases}$$

și ele sînt simultan îndeplinite pentru $x \in [a + m, \infty)$ dacă $m > 0$ și pentru $x \in [a, \infty)$, dacă $m \leqslant 0$. În concluzie $f(x) \geqslant g(x)$ pentru $x \in [a - m, a] \cup [a + m, \infty)$ dacă $m > 0$, respectiv pentru $x \in [a + m, \infty)$ dacă $m \leqslant 0$.

5. a) $f(x) = 10a^2x^2 - 2(a_1 + a_2 + \quad + a_{10})ax + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2$; valoarea minimă a funcției f este

$$f_{min} = -\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10})^2 - 10(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2)}{10}$$

și nu depinde de a. b) Deoarece $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, rezultă că și $f_{min} \geqslant 0$, deci dacă $a_1^2 + a_2^2 + \quad + a_{10}^2 = 1$, atunci $-(a_1 + a_2 + \quad + a_{10})^2 + 10 \geqslant 0$ și rezultă că $|a_1 + a_2 + \quad a_{10}| \leqslant \sqrt{10}$.

6. Notăm $g(x) = ax + b$, $g: (2, 3] \to [1, 2)$. Deci trebuie ca $g(3) = 1$ și $g(2) = 2$ și obținem sistemul $3a + b = 1$, $2a + b = 2$, cu soluția $a = -1$, $b = 4$; rezultă că $g(x) = -x + 4$.

1. Fie $f(x) = \frac{\sqrt{(x^2+1)^2}+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, unde $x^2+1>0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Notăm $a = \sqrt{x^2+1} > 0$ și atunci considerăm funcția $g(a) = a + \frac{1}{a}$. Deoarece $(a-1)^2 \geqslant 0$, $(\forall)a \in \mathbf{R} \Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geqslant 0 \Rightarrow a^2 + 1 \geqslant 2a$ și deoarece $a > 0$ rezultă că $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, deci $f(x) \geqslant 2$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, adică $f(x) \in [2, \infty)$. S-a arătat că $f(\mathbf{R}) \subset [2, \infty)$. Este necesar să se arate și $[2, \infty) \subset f(\mathbf{R})$. Fie $u \in [2, \infty)$ și să considerăm ecuația $f(x) = u$. Din $u = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$, găsim $u\sqrt{x^2+1} = x^2+2$ și, respectiv, de aici $x^4 + (4-u^2)x^2 + 4 - x^2 = 0$. Rezolvînd această ecuație găsim soluția $x = \sqrt{\frac{u^2-4+u\sqrt{u^2-2}}{2}}$. Deci $(\forall)\, u \in [2, \infty)$, $(\exists)x = \sqrt{\frac{u^2-4+u\sqrt{u^2-2}}{2}}$ astfel încît $f(x) = u$ și deci $[2, \infty) \subset f(\mathbf{R})$. Din cele două incluziuni demonstrate rezultă că $f(\mathbf{R}) = [2, \infty)$.

2. Deoarece minimul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + a^n$ este a^n și se obține pentru $x = 0$, iar minimul funcției $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(y) = y^2 + a^{n+1}$ este a^{n+1} și se obține pentru $y = 0$, rezultă că

$$\sqrt[n]{x^2+a^n} + \sqrt[n+1]{y^2+a^{n+1}} \geqslant \sqrt[n]{a^n} + \sqrt[n+1]{a^{n+1}} = a + |a|.$$

Din faptul că $a + |a| = \begin{cases} 2a \text{ pentru } a \geqslant 0 \\ 0 \text{ pentru } a < 0 \end{cases}$ rezultă că singura soluție este $x = 0$, $y = 0$.

3. a) Din $m(\widehat{ABB_1}) = 180° - (m(\widehat{AB_1B}) + m(\widehat{BAB_1})) = 180° - 90° = 90°$ și $m(\widehat{A_1BA_2}) = m(\widehat{A_1BC}) + m(\widehat{CBA_2}) = 30° + 60° = 90°$ rezultă că (1) $m(\widehat{ABB_1}) = m(\widehat{A_1BA_2})$. Din ipoteză $m(\widehat{BAB_1}) = m(\widehat{BA_2A_1}) = 30°$ și, ținînd cont de (1), rezultă că triunghiurile ABB_1 și BA_2A_1 sînt asemenea, deci (2) $\frac{AB_1}{A_1A_2} = \frac{BB_1}{BA_1} = \frac{AB}{BA_2}$, de unde găsim (3) $\frac{AB}{BB_1} = \frac{BA_2}{BA_1}$. Deoarece $m(\widehat{ABA_2}) = m(\widehat{B_1BA_1})$, ținînd cont de (3), rezultă că triunghiurile ABA_2 și ABB_1 sînt asemenea și deci putem scrie (4) $\frac{AB}{BB_1} = \frac{BA_2}{BA_1} = \frac{AA_2}{A_1B_1}$. În mod analog se demonstrează că triunghiurile ACC_1 și CA_2A_1 sînt asemenea, de unde vom deduce, la fel ca mai sus, că triunghiurile ACA_2 și ACC_1 sînt asemenea; obținem egalitățile (5) $\frac{AC}{CC_1} = \frac{CA_2}{CA_1} = \frac{AA_2}{A_1C_1}$. Ținînd cont că $(BA_2) \equiv (CA_2)$ și că $(BA_1) \equiv (CA_1)$, din (4) și (5) rezultă că $(A_1B_1) \equiv (A_1C_1)$. b) Avem $m(\widehat{B_1A_1C_1}) = m(\widehat{B_1A_1B}) + m(\widehat{BA_1C}) + m(\widehat{CA_1C_1}) = m(\widehat{BA_2A_1}) + 120° + m(\widehat{A_1A_2C}) = 120° + m(\widehat{BA_2C}) = 120° + 60° = 180°$, de unde rezultă că punctele B_1, A_1 și C_1 sînt coliniare. c) Fie D intersecția drep-

telor AA_2 și B_1C_1. Deoarece $m(\widehat{BA_1B_1}) = m(\widehat{BA_2D})$ rezultă că patrulaterul BA_1DA_2 este inscriptibil și cum $m(\widehat{A_1BA_2}) = 90°$ rezultă că și $m(\widehat{A_1DA_2}) = 90°$ și deci dreptele AA_2 și B_1C_1 sînt perpendiculare.

4. Considerăm punctele $A(-2, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 2)$ și $D(1, 4)$. Dacă punctele A și B ar aparține dreptei $y = cx + d$, atunci $f(0) = 1$ și minimul nu ar fi 2. Dacă punctele A și C ar aparține dreptei $y = cx + d$, atunci $f(-1) > 1$. Dacă punctele B și C ar aparține dreptei $y = cx + d$, atunci $f(1) < 4$. Dacă punctele B și D ar aparține dreptei $y = cx + d$, atunci $f(-1) < 1$. Dacă punctele C și D ar aparține dreptei $y = cx + d$, atunci $f(-1) < 1$. Rezultă deci că singura posibilitate este ca A și D să aparțină dreptei $y = cx + d$, de unde găsim $c = 1$, $d = 3$ și, apoi, $a = 2$ și $b = 2$. Rezultă, în final, că

$$f(x) = \min(x^2 + 2x + 2,\ x + 3) =$$

$$= \begin{cases} x + 3 \text{ pentru } x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right), \\ x^2 + 2x + 2 \text{ pentru } x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

5. Ținînd cont de faptul că produsul scalar este comutativ, putem scrie $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}) + \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) = 0$, deci vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ pot forma un triunghi. Calculînd produsul scalar și ținînd cont de comutativitatea lui, avem $\vec{u}\cdot\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) - (\vec{c}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) = 0$, deci $\vec{u} \perp \vec{c}$. Analog găsim că

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{a}) = 0, \text{ deci } \vec{v} \perp \vec{a};$$

$$\vec{w}\cdot\vec{b} = (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b}) - (\vec{b}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{b}) = 0, \text{ deci } \vec{w} \perp \vec{b}.$$

Deoarece triunghiul format din vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ are laturile respectiv perpendiculare pe laturile triunghiului format de vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rezultă, în consecință, că triunghiul format din vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ este asemenea cu triunghiul format de vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Anul 1977

Etapa județeană

1. a) Discriminantul asociat parabolei (P_1) este $\Delta_1 = (m+4)^2 - 2m(m+1) = -m^2 + 6m + 16$, iar cel asociat parabolei (P_2) este $\Delta_2 = (m+3)^2 - 15(m+3) = m^2 - 9m - 36$. Semnul celor doi discriminanți este dat în tabelul

m	$-\infty$		-3		-2		-1		8		12		∞
Δ_1	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
Δ_2	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

Dacă (P_1) taie axa Ox, avem $\Delta_1 \geqslant 0$, dar atunci se vede că $\Delta_2 < 0$, deci (P_2) nu taie axa Ox. Reciproc, dacă (P_2) taie axa Ox avem $\Delta_2 \geqslant 0$, dar atunci $\Delta_1 < 0$ și deci (P_1) nu taie axa Ox. b) Fie V_1 vîrful parabolei (P_1) și V_2 vîrful parabolei (P_2). Să presupunem că ar exista $m_1 \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ și $m_2 \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$ cu proprietatea că vîrful V_1 (corespunzător valorii m_1) coincide cu vîrful V_2 (corespunzător valorii m_2). Atunci egalitatea absciselor acestor puncte se scrie $x_{V_1} = x_{V_2} \Leftrightarrow \frac{m_1+4}{m_1+1} = 1$, care este o ecuație imposibilă. Deci nu pot exista vîrfuri comune la două parabole, cîte una din fiecare familie. c) Abscisa vîrfului V_1 al parabolei (P_1) este $x_{V_1} = \frac{m+4}{m+1} = 1 + \frac{3}{m+1}$; avem $x_{V_1} \in \mathbf{Z}$ pentru valorile $m \in \mathbf{Z}$ pentru care $m+1 \mid 3$, adică pentru $m \in \{-4, -2, 0, 2\}$ (iar dacă $x_{V_1} \in \mathbf{Z}$ avem evident și $y_{V_1} \in \mathbf{Z}$). Punctele obținute sînt $V_1^{(1)}(0, -8)$, $V_1^{(2)}(-2, 0)$, $V_1^{(3)}(4, -16)$, $V_1^{(4)}(2, -8)$. Pantele dreptelor $V_1^{(1)}V_1^{(2)}$ și $V_1^{(3)}V_1^{(4)}$ sînt, respectiv, $k_1 = \frac{0-(-8)}{-2-0} = -4$, $k_2 = \frac{-8-(-16)}{2-4} = -4$, ceea ce arată că dreptele respective sînt paralele. Avem apoi,

$$V_1^{(1)}V_1^{(2)} = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-(-8))^2} = 2\sqrt{17},$$

$$V_1^{(3)}V_1^{(4)} = \sqrt{(2-4)^2 + (-8-(-16))^2} = 2\sqrt{17}.$$

Patrulaterul $V_1^{(1)}V_1^{(2)}V_1^{(3)}V_1^{(4)}$ avînd două laturi opuse paralele și congruente, este un paralelogram. d) Avem $V_2(1, -m+12)$, unde $m \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$. Rezultă că locul geometric al punctului V_2 este dreapta de ecuație $x = 1$, mai puțin punctul $(1, 15)$.

2. a) Teorema sinusurilor în triunghiurile AMB și AMC se scrie

$$\frac{BM}{\sin\beta} = \frac{AM}{\sin B}, \quad \frac{MC}{\sin\gamma} = \frac{AM}{\sin C}.$$

Împărțind cele două egalități membru cu membru și ținînd seama că $BM = MC$, obținem relația din enunț; b) Prezentăm soluția dată de V. Nistor de la Liceul de Informatică din București. Fie M', C' proiecțiile punctelor M, C pe dreapta AB, respectiv M'', B'' proiecțiile punctelor M, B pe dreapta AC. Rezultă, folosind proprietățile liniei mijlocii, că M' este mijlocul lui $[BC']$, iar M'' este mijlocul lui $[B''C]$. Atunci, folosind și triunghiurile dreptunghice care apar, avem

$$AM' = \frac{AB + AC'}{2} = \frac{c + b\cos A}{2} = AM\cos\beta,$$

$$AM'' = \frac{AC + AB'}{2} = \frac{b + c\cos A}{2} = AM\cos\gamma.$$

Împărțind ultimele egalități membru cu membru, se obține relația din enunț. Această soluție este valabilă, indiferent dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic; c) Vom da o soluție vectorială. Avem:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM\ c\cos\beta, \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = AM\ b\cos\gamma.$$

Adunînd, și ținînd seama că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$, obținem $2AM^2 = AM(c\cos\beta + b\cos\gamma)$, de unde prima egalitate din enunț. De asemenea, putem scrie

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{ca}{2} \cos B$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{ba}{2} \cos C$ sau, echivalent, $-\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = \frac{ac}{2} \cos B$, $-\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = \frac{ab}{2} \cos C$, sau încă $-MA \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha + \frac{a^2}{4} = \frac{ac}{2} \cos B$, $MA \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha + \frac{a^2}{4} = \frac{ab}{2} \cos C$. Scăzînd din a doua relație pe prima, obținem $MA \cos \alpha = \frac{b \cos C - c \cos B}{2}$, adică a doua relație din enunț.

3. Fie $A = a^2 + b^2$, $B = c^2 + d^2$ cu $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Atunci $AB = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, deci produsul AB este sumă de două pătrate. Scriind $AB = m^2 + n^2$ și $C = p^2 + q^2$, vom avea la fel: $ABC = m^2p^2 + m^2q^2 + n^2p^2 + n^2q^2 = (mp - nq)^2 + (mq + np)^2$, deci și produsul ABC este sumă de două pătrate.

4. a) Vom nota, pe scurt, măsurile (în grade) ale unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$, respectiv, cu A și B. Din $A \leqslant B$ și $A + B = 180°$, rezultă $0 < A \leqslant 90°$. Mai notăm $AB = a$, $AD = b$. Determinăm mulțimea valorilor lui A pentru care propoziția (p) este adevărată, respectiv pentru care propoziția (q) este adevărată. Propoziția (p) este adevărată dacă și numai dacă $(AM \subset \text{Int } \widehat{DAB}$, $(BM \subset \text{Int } \widehat{ABC}$, $MN < DE$, unde N, E sînt proiecțiile lui M și D pe dreapta AB. Ținînd cont de teorema semidreptei interioare, cele trei condiții devin:

$$1)\ A > 60°;\ 2)\ B > 60°;\ 3)\ \frac{a\sqrt{3}}{2} < b \sin A.$$

Cum $B \geqslant A$, condițiile 1) și 2) sînt echivalente cu 1). Așadar, (p) este adevărată dacă și numai dacă se îndeplinesc 1) și 3). Mulțimea valorilor lui A pentru care (p) este adevărată, va fi

$$\mathcal{M}_p = \left\{A \in (60°, 90°] \mid \sin A > \frac{a\sqrt{3}}{2b}\right\}.$$

Analog, mulțimea valorilor lui A pentru care (q) este adevărată, va fi

$$\mathcal{M}_q = \left\{A \in (60°, 90°] \mid \sin A > \frac{b\sqrt{3}}{2a}\right\}.$$

Rezultă că mulțimea valorilor lui A pentru care „(p) sau (q)" este adevărată, este

$$\mathcal{M}_{p \vee q} = \left\{A \in (60°, 90°] \mid \sin A > \min\left(\frac{a\sqrt{3}}{2b}, \frac{b\sqrt{3}}{2a}\right)\right\} = (60°, 90°],$$

deoarece pentru orice $A \in (60°, 90°]$ avem $\sin A > \frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant \min\left(\frac{a\sqrt{3}}{2b}, \frac{b\sqrt{3}}{2a}\right)$.

b) Propoziția „(p) și (q)" este adevărată dacă $A \in (60°, 90°]$ și $\sin A > \frac{a\sqrt{3}}{2b}$, $\sin A > \frac{b\sqrt{3}}{2a}$. Rezultă $\frac{\sqrt{3}}{2 \sin A} < \frac{a}{b} < \frac{2 \sin A}{\sqrt{3}}$ (și să observăm că pentru $A \in (60°, 90°]$ avem inegalitatea $\frac{\sqrt{3}}{2 \sin A} < \frac{2 \sin A}{\sqrt{3}}$). Așadar, pentru A fixat în

mulțimea de la punctul a, vom avea drept condiție necesară și suficientă pentru propoziția „(p) și (q)":

$$\frac{a}{b} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sin A}, \frac{2\sin A}{\sqrt{3}}\right).$$

Etapa finală

1. Adunînd membru cu membru toate ecuațiile și scriind totul în membrul stîng, avem

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = 0$$

sau, echivalent,

$$x_1^2 + (a-1)x_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + x_2^2 + (a-1)x_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + \dots + x_n^2 + (a-1)x_n +$$

$$+ \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = 0$$

sau încă

$$\left(x_1 + \frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{a-1}{2}\right)^2 + \dots + \left(x_n + \frac{a-1}{2}\right)^2 = 0,$$

de unde condiția necesară (1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1-a}{2}$. Această condiție este și suficientă, în sensul că verifică toate ecuațiile. Așadar, sistemul admite soluția unică (cu componente reale) dată de (1).

2. Inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$\frac{3 + \cos^2 A}{2} > \cos^2 B + \cos^2 C \Leftrightarrow \frac{3 + 1 - \sin^2 A}{2} > 1 - \sin^2 B + 1 - \sin^2 C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A > 0.$$

Ultima inegalitate se arată ușor, folosind teorema sinusurilor (notațiile sînt cele obișnuite):

$$2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A = \frac{2b^2}{4R^2} + \frac{2c^2}{4R^2} - \frac{a^2}{4R^2} = \frac{m_a^2}{R^2} > 0.$$

3. Fie A și B nodurile rețelei prin care trece cercul, $AB = 1$. Centrul O al cercului aparține mediatoarei segmentului $[AB]$. Să presupunem prin absurd că cercul mai trece printr-un alt nod C al rețelei. Notăm cu E mijlocul segmentului $[AB]$ și observăm că $O \neq E$ $\left(\text{dacă am avea } O = E, \text{ atunci } r = \frac{1}{2} \notin \mathbf{N}^*\right)$. Fie G piciorul perpendicularei din C pe dreapta OE; nu putem avea $G = O$ (căci atunci $r = OC \in \mathbf{N}^*$) și, de asemenea, nu putem avea $G \equiv E$ (căci atunci A, B, C ar fi coliniare, adică o dreaptă ar intersecta un cerc în trei puncte distincte). Din cele de mai sus rezultă că punctele O, G, E sînt distincte două cîte două și să presupunem că $G \in (OE)$ (orice altă ordonare se discută analog). Mai notăm cu F intersecția

dreptei CG cu paralela prin B la OE și observăm că $F \in (CG)$ (într-adevăr, punctele G, F, C sînt coliniare, $F \in (GC$ și $GF < GC)$. Notînd $CF = x \in \mathbf{N}^*$, avem $CG = CF + FG = x + \frac{1}{2}$ și din triunghiul dreptunghic OGC rezultă $OG = \sqrt{r^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$. Din triunghiul dreptunghic OEB avem $OE = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}$ și atunci $GE = OE - OG = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}} - \sqrt{r^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{4r^2 - 1} - \sqrt{4r^2 - (2x + 1)^2}) \in \mathbf{N}^*$. Rezultă $\sqrt{4r^2 - 1} - \sqrt{4r^2 - (2x + 1)^2} = 2k$, cu $k \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow \sqrt{4r^2 - 1} = 2k + \sqrt{4r^2 - 4x^2 - 4x - 1} \Leftrightarrow 4r^2 - 1 = 4k^2 + 4r^2 - 4x^2 - 4x - 1 + 4k\sqrt{4r^2 - 4x^2 - 4x - 1} \Leftrightarrow k\sqrt{4r^2 - 4x^2 - 4x - 1} = x^2 + x - k^2$. De aici rezultă că $\sqrt{4r^2 - (2x + 1)^2}$ este rațional și cum radicalul se extrage dintr-un număr întreg, rezultă că valoarea sa va fi chiar număr întreg (mai mult, chiar număr natural). Cum $\sqrt{4r^2 - 1} = 2k + \sqrt{4r^2 - (2x + 1)^2}$, rezultă că și $\sqrt{4r^2 - 1}$ este număr natural. Notînd $\sqrt{4r^2 - 1} = n \in \mathbf{N}^*$, rezultă $4r^2 - 1 = n^2$ sau $(2r + n)(2r - n) = 1$, de unde, unica posibilitate, $2r + n = 1$ și $2r - n = 1$. De aici obținem $r = \frac{1}{2}$, contradicție. Așadar, presupunerea este falsă, deci cercul nu mai trece prin nici un alt nod al rețelei.

4. I) Să presupunem că P este pe arcul mic $\widehat{BD}$ (distinct însă de capetele B și D). Aplicînd teorema lui Menelaus în patrulaterul $BCDP$ obținem (1) $a \cdot PD + a \cdot PB = a \cdot PC$, adică $PC = PB + PD$. Notăm cu M mijlocul lui $[BC]$, care este totodată și mijlocul lui $[AD]$ și scriem teorema medianei în triunghiurile BPC și APD:

$$PM^2 = \frac{2(PB^2 + PC^2) - a^2}{4} = \frac{2(PA^2 + PD^2) - 3a^2}{4}.$$

Rezultă $PA^2 = PB^2 + PC^2 - PD^2 + a^2 \overset{(1)}{=} PB^2 + (PB + PD)^2 - PD^2 + a^2 = 2PB^2 + 2PB \cdot PD + a^2 = 2PB(PB + PD) + a^2 = 2\,PB \cdot PC + a^2$.

II) Dacă P este pe arcul mic $\widehat{DC}$, rezultatul este același.

III) Dacă P este pe arcul mic $\widehat{BC}$, teorema lui Menelaus conduce la (2) $PB + PC = PD$, iar teorema medianei se scrie

$$PM^2 = \frac{2(PB^2 + PC^2) - a^2}{4} = \frac{2(PA^2 + PD^2) - 3a^2}{4}.$$

Rezultă

$$PA^2 = PB^2 + PC^2 - PD^2 + a^2 \overset{(2)}{=} PB^2 + PC^2 - (PB + PC)^2 + a^2 = -2PB \cdot PC + a^2,$$

adică relația din enunț.

IV) Dacă $P \in \{B, C, D\}$ relațiile din enunț se verifică imediat. Cu aceasta problema este complet rezolvată.

Anul 1978

Etapa judeţeană

1. a) Pentru simplitate, vom nota cu A, B, C măsurile (în grade) ale unghiurilor $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ ale triunghiului ABC. Din patrulaterul convex $ABCC_2$ deducem că $C_2 \in \text{Int } \widehat{ABC}$ şi atunci ($BC_2 \subset \text{Int } \widehat{ABC}$; analog ($CB_2 \subset \text{Int } \widehat{ABC}$. Din triunghiurile isoscele AB_2C şi ABC_2, în care $\widehat{B_2AC} \equiv \widehat{BAC_2}$, deducem că $\widehat{AB_2C} \equiv \widehat{ACB_2} \equiv \equiv \widehat{ABC_2} \equiv \widehat{AC_2B}$ şi fie α măsura acestor unghiuri. Folosind axioma de adunare a unghiurilor, deducem că $m(\widehat{SBC}) = B - \alpha$, $m(\widehat{SCB}) = C - \alpha$ şi atunci din triunghiul SBC, avem (1) $m(\widehat{BSC}) = 180° - (B - \alpha + C - \alpha) = A + 2\alpha$. Dar din triunghiul AB_2C avem $A + 90° + 2\alpha = 180°$, adică (2) $A + 2\alpha = 90°$. Din (1) şi (2) rezultă că $m(\widehat{BSC}) = 90°$. Atunci punctul S este pe cercul de diametru $[BB_2]$, care este cercul circumscris dreptunghiului ABB_1B_2 şi deci patrulaterul B_1BSB_2 este inscriptibil. De aici rezultă $\widehat{BSB_1} \equiv \widehat{BB_2B_1}$; analog $\widehat{C_1SC_2} \equiv \widehat{C_1CC_2}$ şi, cum $\widehat{BB_2B_1} \equiv \widehat{C_1CC_2}$, deducem $\widehat{BSB_1} \equiv \widehat{C_1SC_2}$. Conform teoremei reciproce a unghiurilor opuse la vîrf, rezultă că punctele B_1, S, C_1 sînt coliniare.

b) Din patrulaterul convex $ABPC$ deducem $A \in \text{Int } \widehat{BPC}$. În triunghiurile congruente AB_2B şi ACC_2 înălţimile din A sînt congruente; aceasta înseamnă că A este egal depărtat de dreptele PB şi PC şi, fiind punct interior unghiului $\widehat{PBC}$, va aparţine bisectoarei acestui unghi. Altfel spus, $[PA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BPC}$. Unghiurile $\widehat{B_2BA}$ şi $\widehat{ACC_2}$ sînt complementare (deoarece $\widehat{ACC_2} \equiv \widehat{BB_2A}$) şi atunci suplementele lor $\widehat{ABP}$ şi $\widehat{ACP}$ sînt unghiuri ale căror măsuri însumează $270°$. Din patrulaterul convex $ABPC$ rezultă atunci $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BPC}) = 90°$.

2. Pentru $x = 1$ avem $g(1) \leqslant h(1) \leqslant f(1)$, adică $4 \leqslant h(1) \leqslant 4$, deci $h(1) = 4$. Desenînd graficele funcţiilor f, g, h se observă că parabolele corespunzătoare sînt tangente două cîte două în punctul de coordonate $(1, 4)$. Atunci ecuaţia de gradul 2 $h(x) = g(x)$ are pe $x = 1$ rădăcină dublă. Deci $(\exists)\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încît (1) $h(x) - g(x) = \lambda(x - 1)^2$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Dar $f(x) - g(x) = (x - 1)^2$ şi relaţia (1) devine $h(x) - g(x) = \lambda(f(x) - g(x))$ sau $h(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Rămîne să mai arătăm că $\lambda \in [0, 1]$. Din condiţia $g(x) \leqslant h(x) \leqslant f(x)$ deducem $0 \leqslant h(x) - g(x) \leqslant f(x) - g(x)$ sau, ţinînd seama de (1) şi de definiţiile lui f şi g, obţinem $0 \leqslant \lambda(x - 1)^2 \leqslant (x - 1)^2$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, adică $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

3. Ultimele patru cifre trebuie să dea suma 4. Atunci există cinci categorii de numere, după cum ultimele cifre sînt (abstracţie făcînd de ordinea acestor cifre):

I. 4; 0; 0; 0; II. 3; 1; 0: 0; III. 2; 1; 1; 0; IV. 2; 2; 0; 0; V. 1; 1; 1; 1.

În categoria I sînt evident 4 numere. În categoria a II-a, cifra 3 se poate aşeza în patru moduri, iar cifra 1 se poate aşeza pe celelalte trei locuri rămase în trei moduri, deci în această categorie sînt $4 \times 3 = 12$ numere. În categoria a III-a cifra 2 se poate aşeza în patru moduri, iar cele două cifre de 1 se pot aşeza pe celelalte trei locuri rămase în trei moduri, deci şi în această categorie sînt $3 \times 4 = 12$ numere. În categoria a IV-a cele două cifre se pot aşeza în şase moduri, deci există

șase numere în această categorie. În sfîrșit, categoria a V-a are evident un număr. Prin urmare există în total $4 + 12 + 12 + 6 + 1 = 35$ numere de tipul celor căutate.

4. Ecuația se scrie succesiv

$$xy + y^2 + 5x + 5y - 2xy - 2y - 4x - 4 = 0,\ y^2 - xy + x + 3y - 4 = 0,$$
$$y^2 - 1 - xy + x + 3y - 3 = 0,\ (y - 1)(y + 1 - x + 3) = 0.\ (y - 1)(y - x + 4) = 0.$$

Rezultă două posibilități: $y = 1$ și $x \in \mathbf{Z}$ arbitrar; $x \in \mathbf{Z}$ arbitrar și $y = x - 4$. Mulțimea soluțiilor va fi $\{(x, 1) \mid x \in \mathbf{Z}\} \cup \{(x, x - 4) \mid x \in \mathbf{Z}\}$.

Etapa finală

1. Notînd $f(a) = \sqrt{a^2 + a + 1} - \sqrt{a^2 - a + 1}$, se vede că $f(a)$ are sens pentru orice a real. Observăm că $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ și că $f(-a) = -f(a)$. Atunci este suficient să determinăm mulțimea valorilor expresiei pentru $a > 0$. Fie $a > 0$ fixat; avem

$$f(a) = \frac{(a^2 + a + 1) - (a^2 - a + 1)}{\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1}} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1}}.$$

Se vede imediat că $f(a) > 0$ și arătăm că $f(a) < 1$. Într-adevăr, această inegalitate se scrie succesiv

$$2a < \sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \Leftrightarrow 4a^2 < 2(a^2 + 1) + 2\sqrt{a^4 + a^2 + 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 1 < \sqrt{a^4 + a^2 + 1} \Leftrightarrow a^2 - 1 < \sqrt{(a^2 - 1)^2 + 3a^2}$$

care este evidentă. Am arătat deci că $\{f(a) \mid a > 0\} \subset (0, 1)$. Vom arăta și incluziunea cealaltă, arătînd că $(\forall) x \in (0, 1)$ există $a > 0$ astfel încît $f(a) = x$. Fie $x \in (0,1)$. Egalitatea $f(a) = x$ este echivalentă succesiv cu

$$\sqrt{a^2 + a + 1} - \sqrt{a^2 - a + 1} = x \Leftrightarrow 2(a^2 + 1) - 2\sqrt{a^4 + a^2 + 1} = x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a^2 + 1) - x^2 = 2\sqrt{a^4 + a^2 + 1} \Leftrightarrow 4(a^2 + 1)^2 - 4x^2(a^2 + 1) + x^4 =$$
$$= 4(a^4 + a^2 + 1) \Leftrightarrow 4a^2(1 - x^2) = 4x^2 - x^4 \Leftrightarrow a^2 = \frac{x^2(4 - x^2)}{1 - x^2},\ \text{de unde}$$
$$a = x\sqrt{\frac{4 - x^2}{1 - x^2}} > 0.$$

Așadar, am dovedit egalitatea $\{f(a) \mid a > 0\} = (0,1)$. Ținînd seama că $f(0) = 0$ și că $f(-a) = -f(a)$, rezultă $\{f(a) \mid a \in \mathbf{R}\} = (-1,1)$.

2. Notînd $x = a$, $y - 1 = b$, $z - 2 = c$, rezultă $x = a^2$, $y = b^2 + 1$, $z = c^2 + 2$. Ecuația devine $2a + 2b + 2c = a^2 + b^2 + c^2 + 3$ sau $(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c + 1)^2 = 0$. Deducem $a = b = c = 1$ și de aici $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

3. Cum $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$ rezultă $7n^2 - m^2 > 0$. Să notăm $k_0 = \min\{7n^2 - m^2 \mid m, n \in \mathbf{N}^*,\ 7n^2 - m^2 > 0\}$ și fie $k_0 = 7n_0^2 - m_0^2$, ceea ce este echivalent cu $m_0^2 + k_0 = 7n_0^2$. Deoarece

$$(1)\quad k_0 \in \{k \in \mathbf{N}^* \mid m_0^2 + k = \mathrm{M}7\} \overset{\text{not}}{=} A,$$

deducem $k_0 \geqslant \min A$. Observăm ușor că dacă $m_0 = \mathrm{M}7$, atunci $\min A = 7$; dacă $m_0 = \mathrm{M}7 \pm 1$, atunci $\min A = 6$; dacă $m_0 = \mathrm{M}7 \pm 2$, atunci $\min A = 3$; în sfîrșit, dacă $m_0 = \mathrm{M}7 \pm 3$, atunci $\min A = 5$. Ținînd seama și de (1), rezultă

$k_0 \geqslant 3$. Astfel rezultă inegalitatea $7n^2 - m^2 \geqslant 3$, care se mai scrie $7 \geqslant \frac{m^2+3}{n^2}$, de unde $\sqrt{7} \geqslant \frac{\sqrt{m^2+3}}{n}$ și atunci (2) $\sqrt{7} - \frac{m}{n} \geqslant \frac{\sqrt{m^2+3} - m}{n}$.

Arătăm acum că pentru $m > 1$ avem inegalitatea (3) $\frac{\sqrt{m^2+3} - m}{n} > \frac{1}{mn}$.

Într-adevăr, aceasta este echivalentă succesiv cu

$$\sqrt{m^2+3} > \frac{1}{m} + m \Leftrightarrow m^2 + 3 > \frac{1}{m^2} + 2 + m^2 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{m^2},$$

ceea ce este evident. Din (2) și (3) tragem concluzia că $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$ pentru orice m, n cu proprietatea din enunț și $m > 1$. Să mai observăm că pentru $m = 1$ această inegalitate este evidentă, fiind echivalentă cu $\sqrt{7} > \frac{2}{n}$ sau $n > \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Cu aceasta problema este complet rezolvată.

4. a) Notăm $\frac{MC}{AC} = k$, deci $k \in (0, 1)$. Avem evident $\frac{MP}{AB} = \frac{MC}{AC} = k \Rightarrow$ $\Rightarrow MP = k\,AB$, $\frac{MQ}{DC} = \frac{AM}{AC} = 1 - \frac{MC}{AC} = 1 - k \Rightarrow MQ = (1-k)CD$. Atunci $MP^2 + MQ^2 = k^2 AB^2 + (1-k)^2 DC^2 = (AB^2 + DC)^2 k^2 - 2DC^2\, k + DC^2$. Minimul acestei funcții de gradul 2 în k se atinge pentru $k = \frac{DC^2}{AB^2 + DC^2} \in (0,1)$ și are valoarea $\frac{AB^2 \cdot DC^2}{AB^2 + DC^2}$. Obținem așadar inegalitatea $MP^2 + MQ^2 \geqslant \frac{AB^2 \cdot DC^2}{AB^2 + DC^2}$, cazul de egalitate avînd loc atunci cînd $\frac{MC}{AC} = \frac{DC^2}{AB^2 + DC^2}$. b) Fie F, S, N, R, E respectiv mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BQ]$, $[PQ]$, $[CQ]$, $[CD]$. Deci E, F sînt puncte fixe, S, N, R mobile și ne interesează locul geometric al punctului N. Evident, punctul N aparține liniei mijlocii $[SR]$ a triunghiului BQC. Folosind raporturile de asemănare create, precum și teorema lui Thales, avem

$$\frac{SN}{NR} = \frac{BP}{PC} = \frac{MA}{MC} = \frac{AQ}{QD} = \frac{FS}{RE}, \text{ adică } \frac{SN}{NR} = \frac{FS}{RE}.$$

Cum $\widehat{FSN} = \widehat{NRE}$ (alterne interne) rezultă că $\triangle FSN \sim \triangle ERN$ și de aici deducem că $\widehat{FNS} \equiv \widehat{ENR}$. Punctele S, N, R fiind coliniare rezultă că și F, N, E sînt coliniare, adică N aparține dreptei EF. Cum $N \in (PQ) \subset \text{Int } ABCD$, rezultă că $N \in EF \cap \text{Int } ABCD = (EF)$. Cu aceasta am arătat că locul geometric este inclus în segmentul (EF). Vom dovedi acum incluziunea reciprocă. Fie $N \in (EF)$; considerăm $M \in (AC)$ cu proprietatea că $\frac{MA}{MC} = \frac{NF}{NE}$. Paralelele prin M la AB, respectiv CD, intersectează BC, respectiv AD, în P și Q. Considerăm, ca și mai înainte, mijloacele segmentelor $[BQ]$ și $[CQ]$, notate S, respectiv R. Avem $\frac{FS}{RE} = \frac{AQ}{QD} = \frac{MA}{MC} = \frac{NF}{NE}$, deci $\frac{FS}{RE} = \frac{NF}{NE}$ și, cum $\widehat{SFN} \equiv \widehat{NER}$ (alterne in-

terne), rezultă $\triangle FSN \sim \triangle ERN$. De aici deducem $\widehat{FNS} \equiv \widehat{RNE}$ și, cum F, N, E sînt coliniare, rezultă că S, N, R sînt coliniare, adică $N \in SR$. Trapezul $FSER$ este patrulater convex, deci diagonalele se intersectează și atunci $N \in (SR)$. Cum (SR) este linie mijlocie în triunghiul BQC, rezultă că N este mijlocul lui (PQ), adică altfel spus N aparține locului geometric. Am arătat astfel că locul geometric al lui N este segmentul (EF).

Anul 1979

Etapa județeană

1. Din inegalitatea secundă se obține $f(x) \geqslant x - 1$ și din prima, $f(x) \leqslant x - 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci $f(x) = x - 1$.

2. a) Fie $E = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $F = \mathbf{R} \setminus \{2, 3\}$. Atunci f_0 are domeniul maxim de definiție E, iar f_n, $n \geqslant 1$, au F ca domeniu maxim de definiție (trebuie observat că $f_3 = f_0$, $f_4 = f_1$, $f_5 = f_2$ pe F etc.) b) Se observă că $f_{1979}(x) = f_2(x) = 3 - x$ pentru orice $x \in F$. Dacă ar exista o funcție $h: E \to \mathbf{R}$ ca în enunț, ar rezulta $f_2(h(x)) = f_0(x)$ pentru orice $x \in E$, adică $3 - h(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $h(x) = \dfrac{3x-7}{x-2}$. Dar pentru $x = 3$ se obține $h(3) = 2$, iar $f_2(2)$ nu este definită. În concluzie, o funcție h cu proprietatea din enunț nu există.

3. Rezultă dintr-o proprietate cunoscută a unui triunghi isoscel (suma distanțelor de la un punct fix de pe bază la laturile congruente este constantă).

4. a) Avem $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \vec{O}$, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{A'M} = \vec{O}$ și adunînd aceste egalități rezultă $2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B'A'} = \vec{O}$, deci $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'})$; b) Din relația anterioară, rezultă $MN \leqslant \dfrac{1}{2}(AB + A'B')$; adunînd cele trei inegalități astfel obținute, rezultă afirmația cerută.

Etapa finală

1. Observăm că $f(x) = x^2 - ax + a^2 + \dfrac{9}{x^2 - ax + a^2}$. Deoarece $x^2 - ax + a^2 > 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, putem aplica inegalitatea mediilor, deci

$$f(x) = x^2 - ax + a^2 + \frac{9}{x^2 - ax + a^2} \geqslant 2\sqrt{(x^2 - ax + a^2)\cdot\frac{9}{x^2 - ax + a^2}} = 6.$$

Rezultă că valoarea minimă a funcției este 6. Valoarea minimă este atinsă cînd $x^2 - ax + a^2 = \dfrac{9}{x^2 - ax + a^2} \Leftrightarrow (x^2 - ax + a^2)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{3(4 - a^2)}}{2}$ și acestea există deoarece $4 - a^2 \geqslant 0$, $a \neq 0$.

2. a) Să presupunem că $x = \sqrt[3]{3}$ ar fi o rădăcină a ecuației date. Fie $y = \sqrt[3]{9}$ și $x = \sqrt[3]{3}$; atunci avem sistemul: $ay + by = -c$, $by + cx = -3a$. Dacă $b^2 \neq ac$, atunci $x = \dfrac{bc - 3a^2}{ac - b^2}$, adică $\sqrt[3]{3}$ ar fi rațional, ceea ce este

absurd. Dacă $b^2 = ac$, atunci $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm ib\sqrt{3}}{2a}$, de unde rezultă că dacă $b = 0$, atunci $\sqrt[3]{3} = 0$ absurd, iar dacă $b \neq 0$, atunci $\sqrt[3]{3} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, absurd. Prin urmare $\sqrt[3]{3}$ nu poate fi rădăcină a ecuației date.

b) Să demonstrăm mai întîi că există două numere $n, m \in \mathbf{N}^*$, pentru care (1) $-0{,}1 < m\sqrt[3]{3} - n < 0{,}1$, adică $\frac{10n-1}{10m} < \sqrt[3]{3} < \frac{10n+1}{10m}$ sau $\left(\frac{10n-1}{10m}\right)^3 < 3 < \left(\frac{10n+1}{10m}\right)^3$ Se observă că

$$\left(\frac{n-1}{m}\right)^3 < \left(\frac{10n-1}{10m}\right)^3 < 3 < \left(\frac{10n+1}{10m}\right)^3 < \left(\frac{n+1}{m}\right)^3$$

Deci dacă luăm $m = 25$ și $n = 36$ conform (1) avem $-0{,}1 < 625\sqrt[3]{3} - 36 < 0{,}1$. Ridicînd la pătrat ultima relație obținem $0 < 625\sqrt[3]{9} - 1800\sqrt[3]{3} + 1296 < 0{,}01$, deci $a = 625$, $b = -1800$, $c = 1296$.

3. Să considerăm că de o parte a dreptei, adică într-un semiplan, sînt situate vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_n$, adică n vîrfuri, iar de cealaltă parte, adică în celălalt semiplan determinat de dreaptă, sînt situate vîrfurile $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Dacă presupunem că $n > k$, atunci din vîrfurile A_i pleacă $2n$ laturi, care revin două cîte două celor k vîrfuri B_j și deci există vîrfurile B_m cărora nu le corespund laturi care pleacă din vîrfurile A_i. Contradicție. Analog demonstrăm că $n < k$ duce la contradicție. Rezultă că $n = k$ și poligonul are $2n$ vîrfuri și deci un număr par de laturi.

4. Calculînd pe contururi poligonale găsim că $\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{RF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{RE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$. Deoarece $\overrightarrow{RF} = -\overrightarrow{RE}$ și $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{CN}$, adunînd cele două relații obținem (1) $2\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$. Analog găsim (2) $2\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ și (3) $2\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$. Adunînd relațiile (1), (2) și (3) obținem: $\overrightarrow{RN} = -\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{PS}$. Să înmulțim această relație scalar cu ea însăși. Obținem $RN^2 = MQ^2 + PS^2 + 2MQ \cdot PS \cos(\widehat{\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{SP}})$.

a) Dacă presupunem că $\overrightarrow{MQ}$ și $\overrightarrow{PS}$ sînt perpendiculari, atunci $\cos(\widehat{\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{SP}}) = 0$, deci $RN^2 = MQ^2 + PS^2$. b) Reciproc, dacă presupunem că $RN^2 = MQ^2 + PS^2$ rezultă că $\cos(\widehat{\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{SP}}) = 0$, deci $\overrightarrow{MQ}$ și $\overrightarrow{SP}$ sînt perpendiculari.

Anul 1980

Etapa județeană

1. Soluție și generalizare. Fie $u, v, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $g \circ g = 1_{\mathbf{R}}$ și $u(x)(u \circ g)(x) - v(x)(v \circ g)(x) \neq 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Să se determine funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $uf + (v \circ g)(f \circ g) = h$. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem (1)

$u(x)f(x) + v(g(x)) = h(x)$. Relația (2) se obține din (1) pentru $x \to g(x)$. Considerînd (1) și (2) ca un sistem cu necunoscutele $f(x)$ și $f(g(x))$ obținem

$$f(x) = \frac{u(g(x))h(x) - v(g(x))h(g(x))}{u(x)u(g(x)) - v(x)v(g(x))}.$$

Pentru $u(x) = a$, $v(x) = b$, $g(x) = 1 - x$, $h(x) = x$ se obține problema dată la concurs, adică $f(x) = \dfrac{x}{(a-b)} - \dfrac{b}{a^2 - b^2}$.

2. Conform enunțului pentru orice $y \in \operatorname{Im} f$ există $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{a+b}{2}\right\}$ astfel încît $f(x) = y$, adică $y = \dfrac{x^2 - ab}{2x - a - b} \Leftrightarrow x^2 - 2yx + (a+b)y - ab = 0$. Pentru ca x să fie real, trebuie ca $\Delta(y) \geqslant 0$, adică (1) $y^2 - (a+b)y + ab \geqslant 0$. Este evident că dacă $a \neq b$, atunci $(a+b)/2 \in (\min(a, b), \max(a, b))$. Dacă $a \neq b$, atunci (1) are sens oricare ar fi $y \in (-\infty, \min(a, b)] \cup [\max(a, b), +\infty)$, iar dacă $a = b$, atunci (1) are sens pentru $y \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$. Deci $\operatorname{Im} f = (-\infty, \min(a, b)] \cup [\max(a, b), +\infty)$ dacă $a \neq b$ și $\operatorname{Im} f = \mathbf{R} \setminus \{a\}$ dacă $a = b$.

3. Soluție și generalizare. Fie $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ și $m \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$; atunci funcția $f: \mathbf{N} \to [0, 1)$, $f(n) = \{m^n\alpha\}$ este injectivă. Într-adevăr, să presupunem că f nu ar fi injectivă. Atunci există $u, v \in \mathbf{N}$, $u \neq v$, astfel încît $f(u) = f(v) \Leftrightarrow \{m^u\alpha\} = \{m^v\alpha\} \Leftrightarrow m^u\alpha - [m^u\alpha] = m^v\alpha - [m^v\alpha] \Leftrightarrow \alpha(m^u - m^v) = [m^u\alpha] - [m^v\alpha] \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{[m^u\alpha] - [m^v\alpha]}{m^u - m^v} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbf{Q}$, ceea ce contrazice $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Deci f este injectivă. Pentru $\alpha = \sqrt{2}$ se obține problema din enunț. Funcția $f: \mathbf{N} \to [0, 1)$, $f(n) = \{m^n\alpha\}$ nu este nici surjectivă deoarece $f(\mathbf{N})$ este o mulțime numărabilă iar $[0, 1)$ este o mulțime infinită și nenumărabilă și prin urmare $[0, 1) \setminus f(\mathbf{N}) \neq \emptyset$.

4. ($\Rightarrow$) Dacă $ABCD$ este un patrulater convex, atunci $A \in \operatorname{Int} \widehat{BCD}$ și deoarece $B \in (CB$, $D \in (CD$ rezultă că (1) $(CA \cap (BD) \neq \emptyset$. Analog rezultă (2) $(AC) \cap (DB = \emptyset$. Din (1) și (2) rezultă că $(AC) \cap (BD) \neq \emptyset$. În patrulaterul $ABCD$ avem $(AC) \cap (BD) \neq \emptyset$. Fie $\{O\} = (AC) \cap (BD)$. Considerăm dreapta AC și din faptul că $(BD) \cap (AC) \neq \emptyset$ rezultă că $(BD) \cap AC \neq \{O\}$, deci punctele B și D sînt în semiplane diferite (semiplane determinate de AC). Analog rezultă că A și C sînt situate în semiplane diferite (semiplane determinate de dreapta BD). Să considerăm dreapta DC. Deoarece $(BO) \cap DC = \emptyset$ și $(AO) \cap DC = \emptyset$ rezultă că punctele A, O, B se găsesc de aceeași parte a dreptei DC. Analog se arată că punctele A, O, D se găsesc de aceeași parte a dreptei BC, punctele C, O, D se găsesc de aceeași parte a dreptei AB. De aici rezultă că patrulaterul $ABCD$ este convex.

Etapa finală

1. Fie $F = \{f: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(x) = a_1|x + b_1| + a_2|x + b_2|, f$ este injectivă$\}$. Vom arăta că mulțimea F este vidă, adică $(\forall)\, f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a_1|x + b_1| + a_2|x + b_2|$; $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ atunci f nu este injectivă. Vom deosebi mai multe cazuri. i) $b_1 = b_2 = b$. Atunci $f(x) = (a_1 + a_2)|x + b| = a|x + b|$, unde $a = a_1 + a_2$. Avem subcazurile: i_1) dacă $a = 0$, atunci $f(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, și evident nu este injectivă; i_2) dacă $a \neq 0$, atunci $(\exists)\, c \in \mathbf{R}^*$ astfel încît $f(x) = c$ pentru două valori distincte ale lui $x \in \mathbf{R}$. Într-adevăr, $f(x) = c \Leftrightarrow a|x + b| = c \Leftrightarrow |x + b| = \dfrac{c}{a} \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow x \in \left\{-b - \dfrac{c}{a}, -b + \dfrac{c}{a}\right\}$ și deci $x_1 = -b - \dfrac{c}{d}$,

$x_2 = -b + \frac{c}{a}$, $x_1 \neq x_2$, cu $f(x_1) = f(x_2) = c$, ceea ce ne arată că f nu este injectivă în acest subcaz. Prin urmare în acest caz f nu poate fi injectivă. (ii) Mai departe, putem presupune $b_1 < b_2$ și atunci avem de analizat subcazurile: ii$_1$) $a_1 = a_2 = a$. Dacă $a = 0$, atunci $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, și evident f nu este injectivă. Dacă $a_1 = a_2 = a \neq 0$, atunci $(\exists)\, c \in \mathbf{R}^*$ astfel încît $f(x) = c$ pentru două valori distincte ale lui $x \in \mathbf{R}$. Într-adevăr, (1) $f(x) = c \Leftrightarrow a(|x + b_1| + |x + b_2|) = c \Leftrightarrow |x + b_1| + |x + b_2| = \frac{c}{a} = d \in \mathbf{R}_+^*$. Pentru $x < b_1$ ecuația (1) devine (2) $-2x - (b_1 + b_2) = d \Leftrightarrow x = \frac{-d - b_1 - b_2}{2}$. Pentru $x > b_2$ ecuația (1) devine (3) $2x + (b_1 + b_2) = d \Leftrightarrow x = \frac{d - b_1 - b_2}{2}$. Ecuația (1) va avea două rădăcini reale distincte dacă și numai dacă $x_1 = -\frac{b_1 + b_2 + d}{2} < b_1$ și $x_2 = \frac{d - b_1 - b_2}{2} > b_2 \Leftrightarrow -b_1 - b_2 - d - 2b_1 < 0$ și $d - b_1 - b_2 - 2b_2 > 0 \Leftrightarrow -(3b_1 + b_2) < d$ și $d > b_1 + 3b_2 \Leftrightarrow d > \max(-3b_1 - b_2, b_1 + 3b_2)$. Prin urmare orice valoare $c \in \mathbf{R}^*$ pentru care $d = \frac{c}{a} > \max(-3b_1 - b_2, b_1 + 3b_2)$ este luată de către f în două puncte distincte $x_1 < b_1$, $x_2 > b_2$ date de (2), respectiv (3); ii$_2$) $a_1 < a_2$. În acest caz $(\exists)\, c \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = c$ pentru două valori distincte ale lui $x \in \mathbf{R}$. Într-adevăr, (4) $f(x) = c \Leftrightarrow a_1|x + b_1| + a_2|x + b_2| = c$. Pentru $x < b_1$ ecuația (4) devine

$$(5)\quad -(a_1 + a_2)x - (a_1b_1 - a_2b_2) = c \Leftrightarrow (a_1 + a_2)x = -(c + a_1b_1 + a_2b_2).$$

Dacă $a_1 + a_2 = 0$, atunci pentru $c = -(a_1b_1 + a_2b_2)$ avem $f(x) = c$, $(\forall)\, x \in (-\infty, b_1)$ și deci f nu poate fi injectivă în acest caz. Mai departe, vom presupune în (4) că $a_1 + a_2 \in \mathbf{R}^*$ și atunci din (5) rezultă (6) $x = -\frac{c + a_1b_1 + a_2b_2}{a_1 + a_2}$. Pentru $x > b_2$ ecuația (4) devine

$$(7)\quad (a_1 + a_2)x + a_1b_1 + a_2b_2 = c \Leftrightarrow (a_1 + a_2)x = c - a_1b_1 - a_2b_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{c - a_1b_1 - a_2b_2}{a_1 + a_2}.$$

Ecuația (4) va avea două rădăcini reale distincte dacă și numai dacă

$$x_1 = -\frac{c + a_1b_1 + a_2b_2}{a_1 + a_2} < b_1 \text{ și } x_2 = \frac{c - a_1b_1 - a_2b_2}{a_1 + a_2} > b_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{c}{a_1 + a_2} < \frac{b_1(2a_1 + a_2) + a_2b_2}{a_1 + a_2} \text{ și}$$
$$\frac{c}{a_1 + a_2} > \frac{a_1b_1 + b_2(a_1 + 2a_2)}{a_1 + a_2} \Leftrightarrow \frac{c}{a_1 + a_2} > \max\left(-\frac{b_1(2a_1 + a_2) + a_2b_2}{a_1 + a_2},\right.$$
$$\left.\frac{a_1b_1 + b_2(a_1 + 2a_2)}{a_1 + a_2}\right) \Leftrightarrow c > \max(-b_1(2a_1 + a_2) + a_2b_2, a_1b_1 + b_2(a_1 + 2a_2))$$

dacă $a_1+a_2>0$ sau $c<\min(-b_1(2a_1+a_2)+a_2b_2, a_1b_1+b_2(a_1+2a_2))$ dacă $a_1+a_2<0$. Cu aceasta am demonstrat că în subcazul ii_2) f nu este injectivă; iii_3) $a_1 > a_2$. Acest subcaz se tratează analog ca subcazul ii_2). Prin aceasta am demonstrat că $(\forall)\, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ mulțimea F este vidă. Prin urmare cerințele acestei probleme sînt fără obiect în sensul că nu există funcții cu proprietățile enunțate.

2. $a, b, c \in 2\mathbf{Z}+1 \Rightarrow a \in \mathbf{Z}^*$ și deci $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a^2x^2+bax+ca=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (ax)^2+b(ax)+ac=0$, unde $b, ac \in 2\mathbf{Z}+1$. Notînd $ax=y$, ecuația devine (1) $y^2+by+ac=0$. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației din enunț; $x_1, x_2 \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow y_1, y_2 \in \mathbf{Q}$. Coeficientul dominant al ecuației $y^2+by+ac=0$ fiind egal cu 1 și $ac \in 2\mathbf{Z}+1 \Rightarrow y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$. Presupunem deci prin absurd că $x_1, x_2 \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$. Formulele lui Viète pentru ecuația (1) ne dau $y_1+y_2=-b$ și $y_1y_2=ac$. Din $y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$, $y_1y_2=ac \in 2\mathbf{Z}+1 \Rightarrow y_1y_2 \in 2\mathbf{Z}+1 \Rightarrow y_1+y_2 \in 2\mathbf{Z} \Rightarrow b \in 2\mathbf{Z}$, ceea ce contrazice $b \in 2\mathbf{Z}+1$. Deci ecuația (1) nu admite rădăcini întregi și prin urmare ecuația din enunț nu admite rădăcini raționale.

3. Fără a restrînge generalitatea putem presupune $AC \geqslant AB$. Dar $AC \geqslant AB \Leftrightarrow AC > AB$ sau $AC = AB$. Dacă $AC = AB$, atunci triunghiul ABC este isoscel și deci bisectoarea și mediana din A coincid, ceea ce ne arată că ele au lungimi egale. Dacă $AC > AB$, fie $H, D, M \in (BC)$ astfel încît $AH \perp BC$, $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DAC}$, $BM = MC$. Vom deosebi două cazuri pentru a demonstra că $AD = l_a < AM = m_a$.

Cazul I. Unghiul $\hat{B}$ este ascuțit. Din $AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow \widehat{BAH} =$ $= 1\text{ dr} - \hat{B} < 1\text{ dr} - \hat{C} = \widehat{HAC} \Rightarrow H \in [BD]$. Conform teoremei bisectoarei avem $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{c}{b}$ și dacă ținem seama că $b > c$ rezultă $DB < DC \Leftrightarrow BD < DC \Rightarrow$ $\Rightarrow D \in [BM]$. Din teorema lui Pitagora avem

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 < AH^2 + HM^2 = AM^2 \Leftrightarrow l_a^2 < m_a^2 \Leftrightarrow l_a < m_a.$$

Cazul II. Unghiul $\hat{B}$ este obtuz sau drept. În acest caz, $B \in (HD)$ sau $B = H$. Se demonstrează ca și în cazul precedent că $D \in (BM)$ și deci

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 < AH^2 + HM^2 = AM^2 \Leftrightarrow l_a^2 < m_a^2 \Leftrightarrow l_a < m_a.$$

4. Fie propozițiile:

(p): ABC este un triunghi echilateral;

(q): ABC este un triunghi cu proprietatea că $(\forall) M, N \in \operatorname{Int} ABC$, atunci $MN < \min(AB, BC, CA)$.

Problema constă în a demonstra că $v(p) = 1 \Leftrightarrow v(q) = 1$, unde v este funcția valoare de adevăr. i) $v(p) = 1 \Rightarrow v(q) = 1$. Cu alte cuvinte, să demonstrăm că $(p) \Rightarrow (q)$, $v(p) = 1 \Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral $\Leftrightarrow \min(AB, BC, CA) =$ $= AB = BC = CA$. Să demonstrăm deci că $(\forall) M, N \in \operatorname{Int} ABC \Rightarrow MN < BC$. Avem $M, N \in \operatorname{Int} ABC$ și $\operatorname{Int} ABC$ mulțime convexă $\Rightarrow (MN) \subset \operatorname{Int} ABC$. De asemenea, $MN \cap \operatorname{Int} ABC = (PQ)$, unde $P \in (AB)$ și $Q \in (AC)$, sau $P \in (AC)$ și $Q \in (AB)$. Vom trata numai cazul $P \in (AB)$ și $Q \in (AC)$, celălalt caz fiind analog. Vom deosebi și aici două cazuri: i_1) $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$. Este evident că $(MN) < (PQ) \cap \operatorname{Int} ABC$. Ducem prin B paralela BR la MN care taie pe (AC) în R. Dacă $MN \parallel BC$, atunci $\{C\} = \{R\}$ și conform asemănării triunghiurilor APQ și ABC avem $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{AP}{AB} < 1 \Rightarrow PQ < BC \Rightarrow MN < PQ < BC$. Dacă MN nu este paralelă cu BC, atunci $R \in (AC)$ și din asemănarea triunghiurilor

APQ și ABR rezultă $\frac{PQ}{BR} = \frac{AP}{AB} < 1 \Rightarrow MN < PQ < RB$. În triunghiul BCR avem (1) $\widehat{RBC} < \widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{RBC}$. Din (1) rezultă $m(\widehat{RBC} + \widehat{RCB}) < 120° \Rightarrow m(\widehat{BRC}) = 180° - m(\widehat{RBC} + \widehat{RCB}) > 180° - 120° = 60°$. Deci $\widehat{RBC} < \widehat{RCB} < \widehat{BRC} \Rightarrow RC < BR < BC$ și atunci din (1) obținem că $MN < BC$;
i_2) $\{P\} = \{B\}$, $Q \in (AC)$. În acest caz este evident că $MN < PQ = RQ$ și procedînd ca mai sus rezultă $MN < BQ < BC$. Cu aceasta am demonstrat că $v(p) = 1 \Rightarrow v(q) = 1$.

ii) Reciproc. $v(q) = 1 \Rightarrow v(p) = 1$. Vom demonstra de fapt că $v(p) = 0 \Rightarrow v(q) = 0$, adică $\neg p \Rightarrow \neg q$.

$\neg q$: Dacă ABC este un triunghi, atunci $(\exists)\, M, N \in \text{Int}\, ABC$ astfel încît $MN \geqslant \min(AB, BC, CA)$.

$\neg p$: Triunghiul ABC nu este echilateral.

Vom demonstra deci că dacă ABC nu este echilateral, atunci $(\exists)\, M, N \in \text{Int}\, ABC$ astfel încît $NM \geqslant \min(AB, BC, CA)$. Fie triunghiul ABC în care $\min(AB, BC, CA) = BC$, și anume $AB \geqslant AC > BC$. Este evident că $AB \geqslant AC \Leftrightarrow \hat{C} \geqslant \hat{B}$. $(\exists)\, D \in (AB)$ astfel încît $BD = BC$ și atunci $\widehat{BDC} \equiv \hat{B}$ și $(\exists)\, E \in (DA)$. Din $\widehat{BDC} \equiv \hat{B}$ rezultă $m(\widehat{ADC}) = 180° - m(\hat{B}) \Rightarrow m(\widehat{ADC}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C})$. Din $E \in (DA)$ rezultă (2) $m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{ECA}) + m(\hat{A})$ cu $m(\widehat{ECA}) < m(\hat{C})$. Din (1) și (2) rezultă $\widehat{ADC} > \widehat{DEC}$ și deci din triunghiul DEC rezultă $EC > DC = BC$. Există atunci $P, Q \in (EC)$ astfel încît $PQ = DE = BC$ și $(PE \cap (QC = \emptyset$. Prin urmare $(\exists)\, M \in (EP)$ și $N \in (QC)$ astfel încît $MN \geqslant PQ = BC$. Cu aceasta problema este rezolvată.

Anul 1981

Etapa județeană

1. Ecuația dată nu are rădăcini reale dacă și numai dacă

$$(1) \quad (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b + c - a)(b + c + a)(b - c - a)(b - c + a) < 0.$$

Deoarece într-un triunghi lungimea unei laturi este strict mai mică decît suma lungimilor celorlalte două laturi rezultă că, în condițiile enunțului, (1) este satisfăcută și deci ecuația dată nu are rădăcini reale.

2. Pentru orice $x < -1$ avem $-x > 1$ și deci pentru orice $x < -1$ avem (1) $2f(-x) + f(x) = -x + 3$. Pentru orice $x \geqslant -1$ avem $-x \leqslant 1$ și deci pentru orice $x \geqslant -1$ rezultă (2) $2f(-x) + f(x) = x - 3$. Din (1) și (2) deducem

$$(3) \qquad 2f(-x) + f(x) = \begin{cases} -x + 3 \text{ pentru } x < -1, \\ x - 3 \text{ pentru } x \geqslant -1. \end{cases}$$

Înmulțind egalitatea dată în enunț cu -2 rezultă:

$$(4) \qquad -4f(x) - 2f(-x) = \begin{cases} 2x + 6 \text{ pentru } x \leqslant 1. \\ -2x - 6 \text{ pentru } x > 1. \end{cases}$$

Adunînd (3) cu (4) parte cu parte rezultă

$$-3f(x) = \begin{cases} x + 9 \text{ pentru } x < -1 \\ 3(x + 1) \text{ pentru } x \in [-1, 1] \\ -x - 9 \text{ pentru } x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - 3 \text{ dacă } x < -1, \\ -x - 1 \text{ dacă } x \in [-1, 1], \\ \frac{1}{3}x + 3 \text{ dacă } x > 1. \end{cases}$$

3. Vom face demonstrația prin metoda reducerii la absurd. Presupunem deci că $AB \geqslant AC$. Din triunghiul ABC rezultă atunci că $\widehat{ACB} \geqslant \widehat{ABC}$ (într-un triunghi la latura mai mare se opune unghiul mai mare). Din $AB + BD < AC + CD$ și din $AB \geqslant AC$ rezultă $BD < CD$. Pe baza ultimei inegalități din triunghiul BCD rezultă $\widehat{DCB} < \widehat{DBC}$. Pe de altă parte, ținînd seama că patrulaterul este convex rezultă că $\widehat{ACB} \leqslant \widehat{DCB}$ și $\widehat{DBC} \leqslant \widehat{ABC}$. Pe baza ultimelor inegalități și a celor precedente obținem $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$. Inegalitățile $\widehat{ACB} \geqslant \widehat{ABC}$ și $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$ sînt contradictorii. Contradicția provine din presupunerea că $AB \geqslant AC$ și deci $AB < AC$.

4. Fie a, b, c, d, e cinci numere întregi luate la întîmplare. Se constată ușor că $(\forall)\, x \in \mathbf{Z}$, avem $x^2 = 7m + k$, unde $m \in \mathbf{Z}$ iar $k \in \{0, 1, 2, 4\}$, adică resturile pe care le dau pătratele perfecte la împărțirea cu 7 sînt 0, 1, 2 sau 4. Deoarece avem cinci numere a, b, c, d, e și cele cinci pătrate ale lor nu pot da la împărțirea cu 7 decît unul din resturile 0, 1, 2, 4, rezultă conform principiului lui Dirichlet că cel puțin două dintre aceste cinci pătrate dau la împărțirea cu 7 același rest. Deci există $x, y \in \{a, b, c, d, e\}$ astfel încît $x^2 - y^2$ se divide cu 7, adică $7 \mid (x - y)(x + y)$ și deoarece 7 divide un produs de numere întregi rezultă că el divide cel puțin unul dintre factori, adică $7 \mid x + y$ sau $7 \mid x - y$. Cu aceasta problema este rezolvată.

Etapa finală

1. Se observă că ecuația $x^2 = x$ admite rădăcinile $x_1 = 1$ și $x_2 = 0$. Inegalitatea din enunț fiind satisfăcută pentru orice $x \in \mathbf{R}$ rezultă că $4f(1) - 4f^2(1) \geqslant 1 \Leftrightarrow 0 \geqslant (2f(1) - 1)^2$, de unde deducem $f(1) = \frac{1}{2}$ și analog $f(0) = \frac{1}{2}$. Deci, dacă o funcție satisface enunțul, atunci $f(0) = f(1)$ și deci nu poate fi injectivă.

2. Cu ajutorul celor cinci puncte date se pot forma $C_5^2 = C_5^3 = 10$ triunghiuri distincte. Dintre aceste triunghiuri să notăm cu ABC triunghiul cu proprietatea că Int ABC conține cel mai mare număr de puncte dintre cele rămase (fie D și E cele două puncte rămase). Dreptele AB, BC și CA împart planul în trei tipuri de regiuni: tipul I este interiorul triunghiului ABC; tipul II este compus din interioarele unghiurilor opuse la vîrf unghiurilor triunghiului ABC și tipul III este compus din interioarele unghiurilor triunghiului ABC din care se scoate triunghiul ABC și interiorul său. Avem următoarele cazuri posibile: a) $D, E \in$ Int $ABC = \mathrm{I}$.

Conform ipotezei dreapta DE nu trece prin nici un vîrf al triunghiului ABC. Rezultă deci că DE intersectează două dintre laturile triunghiului ABC. Patrulaterul format din capetele laturii pe care o intersectează DE și din punctele D, E este un patrulater convex. Prin urmare în acest caz problema este rezolvată. b) Cel puțin unul dintre punctele D, E se află într-o regiune de tipul III. În acest caz punctul în cauză împreună cu punctele A, B, C determină un patrulater convex și deci problema este rezolvată în această situație.

Aceste două cazuri sînt singurele posibile în cadrul condițiilor date în enunțul problemei. Într-adevăr, au mai rămas două cazuri posibile de analizat, și anume: c) $D \in \text{Int}\, ABC$, $E \in \text{II}$ (de exemplu, $E \in \text{II}_A$, adică aparține regiunii de tipul II cu vîrful în A). În această situație A, $D \in \text{Int}\, EBC$, ceea ce contrazice proprietatea triunghiului ABC. d) D, $E \in \text{II}$. Vom deosebi două subcazuri de analizat: i) D, $E \in \text{II}_A$. În această situație $A \in \text{Int}\, DBC$, $A \in \text{Int}\, EBC$, ceea ce contrazice alegerea triunghiului ABC. ii) $D \in \text{II}_A$ și $E \in \text{II}_B$. În această situație este evident că $A \in \text{Int}\, DBC$ și $B \in \text{Int}\, EAC$ iar D, $E \notin \text{Int}\, ABC$, adică triunghiul ABC nu are proprietatea prin care a fost ales.

3. a) Conform condițiilor din enunț rezultă că $a + c = -b$ și $ac = \frac{1}{2}((a+c)^2 - a^2 - c^2) = \frac{1}{2}(b^2 - (1 - b^2)) = b^2 - \frac{1}{2}$. Deci trinomul $f = T^2 + bT + b^2 - \frac{1}{2}$ are rădăcinile a și c. Deoarece $a \leqslant b \leqslant c$ rezultă că $f(b) \leqslant 0$, adică $b^2 + b^2 + b^2 - \frac{1}{2} \leqslant 0$, de unde deducem $b^2 \leqslant \frac{1}{6}$.

b) Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $a \leqslant b \leqslant c$ și atunci $\max\{c - a,\ c - b,\ b - a\} = c - a = u$. Se observă că se poate exprima b și c în funcție de a și u, și anume $c = a + u$, $b = -(2a + u)$. Înlocuind în relația $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ deducem $a^2 + (a+u)^2 + (2a+u)^2 = 1 \Leftrightarrow 6a^2 + 6au + 2u^2 - 1 = 0$. Deoarece $a \in \mathbf{R}$ discriminantul ecuației precedente trebuie să fie pozitiv, adică $9u^2 - 12u^2 + 6 \geqslant 0$, de unde $u^2 \leqslant 2$.

4. Fie $M \in (BC)$, $M' \in (B'C')$ astfel încît $(BM) \equiv (MC)$, $(B'M') \equiv (M'C')$ și fie $N \in (AB)$ în așa fel încît $A'N \parallel AC$. Avem

$$(1) \qquad \frac{BA'}{CA'} = \frac{CB'}{AB'} = \frac{AC'}{BC'} = k \Leftrightarrow \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{AC} = \frac{AC'}{AB} = \frac{k}{k+1}.$$

Conform teoremei lui Thales avem (2) $\frac{BA'}{BC} = \frac{MN}{AB}$. Din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{CB'}{AC} = \frac{BN}{AB} \Leftrightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AB'}{AC}$ și deci, conform reciprocei teoremei lui Thales, deducem că $B'N \parallel BC$. Prin urmare patrulaterul $A'NB'C$ este paralelogram și atunci există $M' \in (CN)$ astfel încît $(NM') \equiv (M'C)$ (diagonalele paralelogramului se înjumătățesc). Rezultă deci că (MM') este linie mijlocie în triunghiul CBN, de unde rezultă că $M'M \parallel AB$ și $2M'M = BN$. Din $M'M \parallel AB$, $M' \in \text{Int}\, \widehat{BAC}$ și $C' \in \text{Int}\, \widehat{ACB}$ rezultă că $(AM \subset \text{Int}\, \widehat{BAM'}$ iar din $C' \in (AB$, $M' \in (AM'$ deducem că $(AM \cap (C'M' \neq \emptyset$. Fie $\{G\} = (AM \cap (C'M') = (AM) \cap (C'M') \subset \text{Int}\, \widehat{ABC}$. Din (1) și (2) se mai deduce că $\frac{BN}{AB} = \frac{AC'}{AB}$, de unde obținem (3) $BN = AC'$. În triunghiurile AGC' și MGM' avem $\widehat{AGC'} \equiv \widehat{MGM'}$ ca opuse la vîrf și $\widehat{GAC'} \equiv \widehat{GMM'}$ ca alterne interne și prin

urmare $\Delta AGC' \sim \Delta MGM'$, de unde deducem (4) $\frac{AG}{MG} = \frac{GC'}{GM'} = \frac{AC'}{MM'}$. Din (3) și (4) rezultă (5) $\frac{AG}{MG} = \frac{GC'}{GM'} = \frac{BN}{MM'} = 2$. Am obținut deci că $2GM' = GC'$ și $2GM = GA$, ceea ce ne arată că G este centrul de greutate comun celor două triunghiuri.

Anul 1982

Etapa județeană

1. Fie Δ_1, Δ_2 discriminanții celor două trinoame. Avem

$$\Delta_1 + \Delta_2 = p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 = (p_1 - p_2)^2 \geqslant 0.$$

Deoarece $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbf{R}$ și $\Delta_1 + \Delta_2 \geqslant 0$ rezultă că sau Δ_1 sau Δ_2 este nenegativ și deci cel puțin unul dintre cele două trinoame are rădăcinile reale.

2. Se știe că dacă $f: A \to B$, $g: B \to C$ sînt funcții astfel încît $g \circ f: A \to C$ este bijectivă, atunci f este injectivă iar g este surjectivă.

a) Este evident că funcția $h: (0, \infty) \to \mathbf{R}_+^*$, $h(x) = x^2$ este bijectivă și atunci f este injectivă și surjectivă, deci bijectivă.

b) Să notăm: $h: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ funcția identitate a lui $\mathbf{R}_+^*$, adică $k(x) = x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$. Avem $f \circ f = h$ și cum h este inversabilă admite o inversă $h^{-1}: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$, $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$. Din $f \circ f = h$ deducem $h^{-1} \circ f \circ f = k$ și $f \circ f \circ h^{-1} = k$ și de aici $h^{-1} \circ f = f^{-1}$, $f \circ h^{-1} = f^{-1}$, de unde rezultă că $h^{-1} \circ f = f \circ h^{-1}$, ceea ce este echivalent cu $h^{-1}(f(x)) = f(h^{-1}(x))$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$, adică

$$f(\sqrt{x}) = \sqrt{f(x)},\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*.$$

3. Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$ rădăcinile trinomului T. Avem $T = (X - x_1)(X - x_2)$ și deci $T(c) = (c - x_1)(c - x_2) = 13$. Totodată să observăm că $T(c - 1) + T(c + 1) = 2 \cdot 13 + 2$, iar $T(c - 13) + T(c + 13) = 2 \cdot 13 + 2 \cdot 13^2$, $T(c) = (c - x_1)(c - x_2) = 13 \Leftrightarrow (|c - x_1| = 1 \wedge |c - x_2| = 13) \vee (|c - x_1| = 13 \wedge |c - x_2| = 1) \Leftrightarrow (x_1 = c \pm 1 \wedge x_2 = c \pm 13) \vee (x_1 = c \pm 13 \wedge x_2 = c \pm 1)$. Prin urmare din $T(x_1) = T(x_2) = 0$ rezultă $T(c + 1) = 0$ sau $T(c - 1) = 0$ și deoarece $T(c - 1) + T(c + 1) = 28$ rezultă că $\max\{T(c - 1), T(c + 1)\} = 28$. În același mod din $T(x_1) = T(x_2) = 0$ rezultă $T(c - 13) = 0$ sau $T(c + 13) = 0$ și deoarece $T(c - 13) + T(c + 13) = 2 \cdot 13(13 + 1)$ deducem că $\max\{T(c + 13), T(c - 13)\} = 2 \cdot 13(13 + 1) = 364$.

4. a) Pe semidreapta $(AC$ luăm punctul E astfel încît $AE = AC$ și prin E ducem o paralelă la BC, fie aceasta dreapta d. Pe semidreapta $(BC$ se consideră punctul F astfel încît $C \in (BF)$ și $BC = CF$. Să notăm cu $\{G\} = d \cap AF$ și cu U intersecția paralelei din C la AB cu dreapta AF, iar V intersecția paralelei din E la AB cu dreapta AF. Din asemănarea triunghiurilor ACF și AEG rezultă că $EG = CF = BC$ și că $\widehat{AEG} \equiv \widehat{ACF}$. Totodată se observă că $\widehat{A'HB'} \equiv \widehat{AEG}$ deoarece $m(\widehat{A'HB'}) = m(\widehat{AEG}) = m(\widehat{ACF}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$. Deoarece $AE = HA'$, $EG = HB'$ și $\widehat{AEG} \equiv \widehat{A'H'B'}$ rezultă că $\Delta A'HB' \equiv \Delta AEG$. Deoarece C este mijlocul segmentului (FB) și CU este paralelă cu AB deducem că $CU = PA$,

iar din faptul că (PC) este linie mijlocie în triunghiul ABF rezultă că $CP = AU$ și prin urmare $AU = UF = CP = m_c$. Din asemănarea triunghiurilor ACF și AEG obținem

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AF}{AG} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{2m_c}{AG} \Leftrightarrow AG = 2m_c.$$

Prin urmare $A'B' = AG = 2m_c$. Din asemănarea triunghiurilor ACU și AEV rezultă că $\frac{AC}{AE} = \frac{AU}{AV}$, de unde deducem că $AV = m_c$ și deci V este mijlocul segmentului (AG). Analog rezultă și celelalte egalități din enunț.

b) Fie $\{W\} = CH \cap A'B'$. Este evident că $\widehat{WHA'} \equiv \hat{B}$ și că $\widehat{VEG} \equiv \hat{B}$, de unde deducem că $\widehat{WHA'} \equiv \widehat{VEG}$. Triunghiurile VEG și WHA' sînt congruente deoarece $EG = HA'$, $\widehat{VEG} \equiv \widehat{WHA'}$ și $\widehat{WA'H} \equiv \widehat{AGE}$. Din congruența lor rezultă că $WA' = VG = VA$ și dacă ținem seama că $A'B' = AG$ deducem că $WB' = WA'$ și deci $C'H$ este mediană în triunghiul $A'B'C'$. În același mod se arată că $A'H$ și $B'H$ sînt mediane în triunghiul $A'B'C'$, de unde rezultă că H este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

Etapa finală

1. Să arătăm mai întîi că numerele a, b, c sînt nenule. Dacă prin absurd cel puțin unul din ele ar fi nul, de exemplu $c = 0$, condiția din enunț devine (1) $a^6 + b^6 < \frac{31}{63}(a^3 + b^3)^2$. Pe de altă parte este imediată inegalitatea (2) $a^6 + b^6 \geqslant \frac{1}{2}(a^3 + b^3)^2$, și cum $\frac{1}{2} > \frac{31}{63}$, relațiile (1) și (2) sînt contradictorii. Să arătăm acum că cel puțin una din ecuațiile considerate nu are rădăcini reale. Presupunem prin absurd că toate ecuațiile au rădăcini reale, adică $b^2 \geqslant 4ac$, $c^2 \geqslant 4ab$, $a^2 \geqslant 4bc$. Ridicînd la cub aceste inegalități și adunîndu-le obținem

$$a^6 + b^6 + c^6 \geqslant 64(a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3) = 64 \cdot \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2 - (a^6 + b^6 + c^6)}{2},$$

de unde (3) $a^6 + b^6 + c^6 \geqslant \frac{32}{33}(a^3 + b^3 + c^3)^2$. Din condiția din enunț avem însă (4) $a^6 + b^6 + c^6 < \frac{31}{63}(a^3 + b^3 + c^3)^2$, și cum $\frac{31}{63} < \frac{32}{33}$, relațiile (3) și (4) sînt contradictorii.

2. Dacă patrulaterul este dreptunghi, suma respectivă este constantă și egală cu semiperimetrul dreptunghiului. Reciproc, fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil avînd proprietatea că suma distanțelor oricărui punct M (interior sau de pe laturi) la laturile sale este constantă și egală cu S. Notăm $x = AB$, $y = BC$, $z = CD$, $t = DA$ și fie A_1, A_2 proiecțiile lui A pe dreptele BC, CD, respectiv C_1, C_2 proiecțiile lui C pe dreptele AD, AB. Pentru $M = A$ avem $S = AA_1 + AA_2 = x\sin B + t\sin D = (x + t)\sin B$. Pentru $M = C$ avem $S = CC_1 + CC_2 = y\sin B + z\sin D = (y + z)\sin B$. Rezultă (1) $x + t = y + z$. Analog, făcînd $M = B$ și $M = D$ se găsește (2) $x + y = z + t$. Scăzînd (2) din (1) vom obține $t = y$ și apoi va rezulta $x = z$. Rezultă că $ABCD$ este paralelogram și fiind inscriptibil, va fi dreptunghi.

3. ($\Rightarrow$) Presupunem φ surjectivă. Atunci $(\exists)(x_0, f(x_0)) \in G_g$ cu proprietatea $\varphi(x_0, f(x_0)) = 0$, adică $|x_0| + |f(x_0)| = 0$, de unde $x_0 = 0$ și $f(x_0) = 0$; aceasta înseamnă că $f(0)=0$, sau $c=0$. ($\Leftarrow$) Presupunem acum că $c=0$, deci $f(x) = ax^2+bx$. Luînd elementul $0 \in [0, \infty)$ avem $\varphi(0, f(0)) = 0$; pentru a arăta că φ este surjectivă mai rămîne să arătăm că $(\forall)\ k>0$, $(\exists)(x, f(x)) \in G_f$ astfel încît $\varphi(x, f(x)) = k$, adică $|x| + |f(x)| = k$. Fie $k > 0$; a arăta cele de mai sus, revine la a arăta că sistemul

$$(1) \qquad \begin{aligned} &|x| + |y| = k, \\ &y = ax^2 + bx, \end{aligned}$$

are soluție în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Distingem două cazuri: $a > 0$ și $a < 0$, fiecare cu cîte trei subcazuri, și anume $b < 0$, $b = 0$, $b > 0$.

i) *Cazul* $a > 0$. 1) *Subcazul* $b < 0$. Arătăm că $(\exists)\ (x_0, y_0)$ soluție a sistemului (1) cu $x_0 < 0$ și $y_0 > 0$. Într-adevăr, pentru $x < 0$, $y > 0$, sistemul (1) devine

$$(2) \qquad \begin{aligned} &-x + y = k, \\ &y = ax^2 + bx, \end{aligned}$$

de unde $ax^2 + bx = k + x$ sau $ax^2 + (b-1)x - k = 0$. Considerînd funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = ax^2 + (b-1)x - k$, avem $g(-k) = ak^2 - bk > 0$ și $g(0) = -k < 0$. Analizînd în general semnul unei funcții de gradul al doilea, se constată că dacă aceasta ia valori de semne contrare în două puncte, atunci între cele două puncte funcția se anulează (observație esențială). Atunci $(\exists) x_0 \in (-k, 0)$ cu $g(x_0) = 0$ și luînd $y_0 = k + x_0 > 0$, deducem că (x_0, y_0) este soluție pentru (2).

2) *Subcazul* $b = 0$ nu diferă mult de precedentul. Vom arăta la fel că $(\exists)\ (x_0, y_0)$ soluție pentru (1) cu $x_0 < 0$ și $y_0 > 0$. Într-adevăr, dacă $x < 0$, $y > 0$ sistemul (1) devine

$$(3) \qquad \begin{aligned} &-x + y = k, \\ &y = ax^2, \end{aligned}$$

de unde $ax^2 = x + k$, adică $ax^2 - x - k = 0$. Luînd $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = ax^2 - x - k$ avem $h(-k) = ak^2 > 0$, $h(0) = -k < 0$, deci $(\exists)\ x_0 \in (-k, 0)$ cu $h(x_0) = 0$; luînd $y_0 = x_0 + k > 0$, deducem că (x_0, y_0) este soluție pentru (3).

3) *Subcazul* $b > 0$. Arătăm că $(\exists)\ (x_0, y_0)$ soluție pentru (1) cu $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. În cazul $x > 0$, $y > 0$, sistemul (1) devine

$$(4) \qquad \begin{aligned} &x + y = k, \\ &y = ax^2 + bx. \end{aligned}$$

Rezultă $ax^2 + bx = k - x$, deci $ax^2 + (b+1)x - k = 0$. Luînd $t: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t(x) = ax^2 + (b+1)x - k$, rezultă $t(0) = -k < 0$ și $t(k) = ak^2 + bk > 0$, deci $(\exists) x_0 \in (0, k)$ cu $t(x_0) = 0$; luînd $y_0 = k - x_0 > 0$ rezultă că (x_0, y_0) este soluție pentru (4).

ii) *Cazul* $a < 0$ este complet analog.

Interpretare geometrică. Locul geometric al punctelor $M(x, y)$ pentru care $|x| + |y| = k$ este frontiera pătratului $ABCD$, unde $A(k, 0)$, $B(0, k)$, $C(-k, 0)$, $D(0, -k)$. A rezolva (1) revine la a realiza intersecția dintre acest pătrat și parabola $y = ax^2 + bx$, parabolă care trece prin centrul pătratului. Intuitiv, este clar că această intersecție este nevidă.

4. a) Demonstrăm mai întîi inegalitatea din stînga. Se știe că dacă $m(\hat{A}) \geqslant 90°$, atunci $AM \leqslant \dfrac{BC}{2}$, unde cu M am notat mijlocul laturii $[BC]$. Dacă $P \equiv M$, atunci $\min(MA, MB, MC) = AM \leqslant \dfrac{BC}{2}$. Dacă $P \in [BC] \setminus \{M\}$,

atunci evident $\min(PA, PB, PC) < \frac{BC}{2}$. Dacă $P \in [AB]$ sau $P \in [AC]$ avem $\min(PA, PB, PC) \leqslant \frac{AB}{2}$, respectiv $\min(PA, PB, PC) < \frac{AC}{2}$ și cum $AB \leqslant BC$, $AC < BC$ rezultă $\min(PA, PB, PC) < \frac{BC}{2}$. Fie acum $P \in \text{Int } ABC$. Dacă $P \in (AM)$, atunci $\min(PA, PB, PC) < AM \leqslant \frac{BC}{2}$.

Dacă $P \in \text{Int } ABM$, deoarece $m(\widehat{APB}) < 180°$, rezultă că cel puțin unul din unghiurile $\widehat{BPM}$ sau $\widehat{APM}$ este obtuz; dacă $m(\widehat{BPM}) > 90°$, atunci $PB < BM = \frac{BC}{2}$, iar dacă $m(\widehat{APM}) > 90°$, atunci $AP < AM \leqslant \frac{BC}{2}$, deci în ambele situații avem $\min(PA, PB, PC) < \frac{BC}{2}$. Cazul cînd $P \in \text{Int } ACM$ se tratează complet analog.

b) Demonstrăm acum inegalitatea din dreapta. Dacă $P \equiv M$, atunci evident $\max(PA, PB, PC) \geqslant MB = \frac{BC}{2}$. Dacă $P \in [BC] \setminus \{M\}$, atunci $\max(PA, PB, PC) > \frac{BC}{2}$. Dacă $M \notin [BC]$, atunci cel puțin unul din unghiurile $\widehat{BMP}$ sau $\widehat{CMP}$ are măsura $\geqslant 90°$. Fixînd ideile, să presupunem că $m(\widehat{PMC}) \geqslant 90°$. Atunci $PC > MC = \frac{BC}{2}$, deci și $\max(PA, PB, PC) > \frac{BC}{2}$. Cu aceasta problema este complet rezolvată.

Anul 1983

Etapa județeană

1. Conform enunțului avem $\Delta = a + 1$, $P = \frac{c}{a} = a + 2$, $S = -\frac{b}{a} = a + 3$, de unde rezultă $c = a(a + 2)$, $b = -a(a + 3)$ și $\Delta = b^2 - 4ac = a + 1$, iar de aici deducem că $a^4 + 2a^3 + a^2 - a = 1$ și deoarece $a \in \mathbf{Z}$ urmează că a trebuie să fie divizor al lui 1. Prin urmare $a \in \{-1, 1\}$ și deoarece numai $a = -1$ verifică relația $a^4 + 2a^3 + a^2 - a - 1 = 0$, rezultă că unica posibilitate este $a = -1$, $\Delta = 0$, $b = 2$, $c = -1$. Deci unica funcție care verifică enunțul este $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

2. Vom trata problema mai generală: Să se determine funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică inegalitatea $f(xy) + f(xz) - f(x)f(yz) \geqslant 1$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbf{R}$. Pentru $x = y = z = 0$ obținem

(1) $$2f(0) - (f(0))^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow (f(0) - 1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

Pentru $x = y = z = 1$ deducem:

(2) $$2f(1) - (f(1))^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow (f(1) - 1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Fie $y = z = 0$ și $x \in \mathbf{R}$ arbitrar. Conform enunțului avem

(3) $$2 - f(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow f(x) \leqslant 1, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $y = z = 1$ și orice $x \in \mathbf{R}$ avem $f(x) - f(x) \cdot f(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow f(x) \geqslant 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Pe baza relațiilor (3) și (4) deducem (4) $f(x) = 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

3. Deoarece $\triangle ABN \sim \triangle ACM$ rezultă că $\frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$, de unde deducem că $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ și de aici obținem că $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB}$. Dacă vom arăta că $AB > AN$ din relația precedentă deducem că $MN < BC$ și deci enunțul. Faptul că $AB > AN$ este echivalent cu $\widehat{BNA} > \widehat{ABN}$. Să demonstrăm deci că $\widehat{BNA} > \widehat{ABN} \Leftrightarrow m(\widehat{BNA}) > m(\widehat{ABN})$. Deoarece $m(\widehat{BNA}) = m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{NBC})$ rezultă $\widehat{BNA} > \widehat{BCA}$ $\widehat{MCA} \equiv \widehat{ABN}$ și cu aceasta proprietatea este demonstrată.

4. Fie $DP \perp AB$, $DQ \perp AC$. Distingem patru cazuri:

i) $P \in (AB)$ și $Q \in (AC)$. Deoarece $[AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ deducem că $(DP) \equiv (DQ)$. Dar $(DB) \equiv (DC)$ și deci $\triangle DPB \equiv \triangle DQC$. Rezultă atunci că $m(\hat{B}) = m(\widehat{DPB}) - 45° = m(\widehat{DCQ}) - 45°$ $m(\hat{C})$ și deci triunghiul ABC este isoscel.

ii) $P \in AB$ și $B \in (AP)$ iar $Q \in AC$ și $C \in (AQ)$. În acest caz $\triangle DPB \equiv \triangle DQC$ și deci $\widehat{DPB} \equiv \widehat{DCQ}$. Prin urmare, $m(\hat{B}) = 180° - (45° + m(\widehat{DBP})) = 135° - m(\widehat{DCQ}) = m(\hat{C})$, ceea ce arată că triunghiul ABC este isoscel.

iii) $P \in AB$ și $B \in (AP)$ iar $Q \in (AC)$ sau $P \in (AB)$ iar $Q \in AC$ și $C \in (AQ)$. În acest caz avem $\triangle DBP \equiv \triangle DQC$ și deci $\widehat{DPB} \equiv \widehat{DCQ}$. Prin urmare $m(\hat{B}) = 135° - m(\widehat{DBP}) = 135° - (45° + m(\hat{C})) = 90° - m(\hat{C})$, adică $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90°$, de unde rezultă că $m(\hat{A}) = 90°$, adică triunghiul ABC este dreptunghic în A.

iv) $\{Q\} = \{C\}$. În acest caz $m(\hat{C}) = 90° - 45° = 45°$ Presupunînd că $\{P\} \neq \{B\}$ din congruența triunghiurilor dreptunghice ADC și APD (ipotenuza comună și cîte o catetă congruentă) rezultă că $(PD) \equiv (CD) \equiv (BD)$. Deoarece $DP \perp AB$ deducem că B coincide cu P. Prin urmare $m(\hat{B}) = 45°$ și deci triunghiul ABC este dreptunghic isoscel. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

Etapa finală

1. Fie mai întîi $x \in \mathbf{R}^* \setminus \{1\}$. Considerînd funcția $g: \mathbf{R}^* \setminus \{1\} \to \mathbf{R}^* \setminus \{1\}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$, se stabilește ușor că $(g \circ g)(x) = \frac{1}{1-x}$ și $(g \circ g \circ g)(x) = x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}^* \setminus \{1\}$. Relația din enunț devine

(1) $$f(g(x)) \cdot f(x) = \frac{1}{x} - 1, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R}^* \setminus \{1\}.$$

Înlocuind x cu $g(x)$ și apoi x cu $(g\circ g)(x)$, obținem, respectiv,

$$(2)\qquad f((g\circ g)(x)) + f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} - g(x) + 1,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}^*\setminus\{1\},$$

$$(3)\qquad f(x) + f((g\circ g)(x)) = \frac{1}{(g\circ g)(x)} - (g\circ g)(x) + 1,\ (\forall) x \in \mathbf{R}^*\setminus\{1\}.$$

Relațiile (1), (2), (3) constituie un sistem cu necunoscutele $f(x)$, $f(g(x))$, $f((g\circ g)(x))$. Rezolvîndu-l se obține $f(x) = 1 - x$, $(\forall)x \in \mathbf{R}^*\setminus\{1\}$. Așadar cunoaștem deocamdată restricția funcției f la mulțimea $\mathbf{R}^*\setminus\{1\}$ rămînînd să determinăm valorile funcției în punctele 0 și 1. Dacă facem $x = 1$ în relația din enunț, obținem $f(0) + f(1) = 1$, ceea ce arată că dacă punem $f(0) = \lambda$, atunci $f(1) = 1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Așadar funcțiile căutate sînt de tipul $f_\lambda\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda & \text{dacă } x = 0, \\ 1 - \lambda & \text{dacă } x = 1, \\ 1 - x & \text{dacă } x \in \mathbf{R}^*\setminus\{1\}. \end{cases}$$

2. Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu

$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - x - y)^2 + x^2 + y^2 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2$ sau, înmulțind-o cu 3,

$$(1)\quad 3((a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - x - y)^2 + x^2 + y^2) \geqslant 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2).$$

Pentru a stabili (1), vom arăta că

$$(2)\quad 3((a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - x - y)^2 + x^2 + y^2) \geqslant (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5)^2,$$

și apoi utilizăm inegalitatea din ipoteză. Rămîne așadar de demonstrat inegalitatea (2). Notînd $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 = \alpha$, inegalitatea (2) este echivalentă cu $3((\alpha - x - y)^2 + x^2 + y^2) \geqslant \alpha^2$ sau $\dfrac{(\alpha - x - y)^2 + x^2 + y^2}{3} \geqslant \left(\dfrac{(\alpha - x - y) + x + y}{3}\right)^2$, care este tocmai inegalitatea lui Jensen aplicată funcției $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t) = t^2$ și numerelor $\alpha - x - y$, x, y. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

3. Notăm $\mathcal{C}(A, r_1) \cap (AB) = \{M\}$, $\mathcal{C}(A, r_1) \cap (AC) = \{N\}$, $\mathcal{C}(B, r_2) \cap (AB) = \{S\}$, $\mathcal{C}(B, r_2) \cap (BC) = \{R\}$, $\mathcal{C}(C, r_3) \cap (AC) = \{P\}$, $\mathcal{C}(C, r_3) \cap (BC) = \{Q\}$. Să presupunem mai întîi că punctele M, N, P, Q, R, S sînt conciclice și să arătăm că atunci există relațiile din enunț. Ținînd seama de puterea punctului A față de cercul ce trece prin cele șase puncte, putem scrie $AM \cdot AS = AN \cdot AP$, adică $r_1(c - r_2) = r_1(b - r_3)$ sau $b - r_3 = c - r_2$. Analog, ținînd seama de puterea punctului C față de cercul amintit, obținem $a - r_2 = b - r_1$. Reciproc, să presupunem adevărate egalitățile $a - r_2 = b - r_1$ și $b - r_3 = c - r_2$ și să arătăm că atunci punctele M, N, P, Q, R, S sînt conciclice, ceea ce revine la a spune că hexagonul $MNPQRS$ este inscriptibil. Pentru a arăta aceasta, demonstrăm că mediatoarele laturilor sale sînt concurente. Mediatoarele laturilor $[MN]$, $[PQ]$, $[RS]$ sînt totodată bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC, deci sînt concurente într-un punct O; arătăm că O aparține și celorlalte trei mediatoare. Fie K, L, I, respectiv, proiecțiile punctului O pe dreptele BC, AC, AB. Cum punctul O este pe mediatoarea lui $[PQ]$ avem $(OP) \equiv (OQ)$ și cum această mediatoare este și bisectoarea unghiului $\hat{C}$, avem $(OL) \equiv (OK)$. Așadar, $\triangle OLP \equiv \triangle OKQ$ și în mod analog $\triangle OKR \equiv \triangle OIS$ și $\triangle OIM \equiv \triangle OLN$. Rezultă $OK = LP \overset{\text{def}}{=} x$, $RK = SI \overset{\text{def}}{=} y$, $MI = NL \overset{\text{def}}{=} z$. Dar din ipoteză $a - r_2 = b - r_1$, deci $CR = CN$ și de aici rezultă mai departe (1) $RQ = PN$ sau $x + y = x + z$. Analog din ipoteza $b - r_3 = c - r_2$, care înseamnă $AP = AS$, deducem (2) $MS = NP$ sau $y + z =$

$= x + z$. Din (1) și (2) rezultă $x = y = z$, ceea ce înseamnă că OL, OK, OI sînt mediatoarele laturilor $[NP]$, $[RQ]$, $[SM]$ ale hexagonului din problemă. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

4. a) Din $\frac{CD}{CB} = k$ rezultă $\frac{CD}{BD} = \frac{k}{1-k}$. Fie $E \in (AD$ astfel încît $\frac{ED}{AD} = \frac{k}{1-k}$. Din reciproca teoremei lui Thales rezultă $CE \parallel AB$, deci $\triangle CED \sim \triangle ABD$, de unde $\frac{CE}{AB} = \frac{k}{1-k}$. În triunghiul ACE avem $AE < CE + AC$, deci, altfel scris, $AD + ED < CE + AC$, sau $AD + \frac{k}{1-k} AD < \frac{k}{1-k} AB + AC$ și această inegalitate este echivalentă cu cea din enunț.

b) Aplicînd teorema bisectoarei deducem $k = \frac{AC}{AB + AC}$ și folosind punctul a rezultă $AD < \frac{AC}{AB + AC} AB + \left(1 - \frac{AC}{AB + AC}\right) AC \Leftrightarrow AD < \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC}$.

Anul 1984

Etapa județeană

1. *Necesitatea.* Presupunem că $(\exists)\ h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ așa încît $g = foh = hof$. Deoarece g este bijecție, din $g = foh$ rezultă că f este surjecție și h este injecție, iar din $hof = g$ rezultă h surjecție și f injecție. Deci h și f sînt bijecții. Presupunem $a \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci f este strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$. Pentru ca f să fie bijecție trebuie să fie strict crescătoare și pe $(1, \infty)$ și în plus $a + b = c + d$. Condiția f crescătoare pe $(1, \infty)$ este echivalentă cu $c > 0$, de unde $ac > 0$. Analog, dacă $a \in \mathbf{R}_-^*$, găsim că $c < 0$ și $a + b = c + d$. Să notăm $k = foh$. Rezultă $h = f^{-1}ok$. Înlocuind în $hof = g$ deducem $g = f^{-1}okof$, de unde (1) $fog = kof$. De asemenea, compunînd la dreapta cu f în relația $k = foh$, obținem (2) $kof = fohof = gof$. Din relațiile (1) și (2) rezultă $fog = gof$. Avem

$$(gof)(x) = \begin{cases} 2(ax + b) - 1, & x \leq 1 \\ 2(cx + d) - 1, & x > 1. \end{cases} \qquad (fog)(x) = \begin{cases} a(2x - 1) + b, & x \leq 1, \\ c(2x - 1) + d, & x > 1. \end{cases}$$

Ținînd seama că $gof = fog$, rezultă ușor că $a + b = c + d = 1$. *Suficiența.* Presupunem $a + b = c + d = 1$, $ac \in \mathbf{R}_+^*$. Din $ac \in \mathbf{R}_+^*$ și $a + b = c + d$ deducem că f este bijecție, de asemenea, condiția $a + b = c + d = 1$ și $ac \in \mathbf{R}_+^*$ implică $fog = gof$. Dacă $h = f^{-1}og$, atunci $foh = fof^{-1}og = g$ și $hof = f^{-1}ogof = f^{-1}ofog = g$, deci $foh = hof = g$.

2. a) Demonstrăm că f este injectivă $\Rightarrow B \cap C = \emptyset$. Presupunem că există $x \in B \cap C$ și fie $X \in P(A)$ cu $x \notin X$. Atunci $X_1 = X \setminus \{x\} \neq X$ și $X_1 \cup B = X \cup B$, $X_1 \cup C = X \cup C \Rightarrow f(X_1) = f(X)$, ceea ce contrazice injectivitatea funcției f. b) Demonstrăm că $B \cap C = \emptyset \Rightarrow f$ este injectivă. Fie $X_1, X_2 \in P(A)$ cu $f(X_1) = f(X_2)$. Atunci $X_1 \cup B = X_2 \cup B$ și $X_1 \cup C = X_2 \cup C$. Dacă $X_1 \neq X_2$, atunci $(\exists) y \in (X_1 \setminus X_2) \cup (X_2 \setminus X_1)$. Fie, de exemplu, (1) $y \in X_1 \setminus X_2$. Atunci $y \in X_1 \cup B = X_2 \cup B$ și folosind (1) deducem $y \in B$; de asemenea, $y \in X_1 \cup C = X_2 \cup C$ și tot din (1) rezultă $y \in C$, de unde obținem că $y \in B \cup C$, absurd. Analog se tratează cazul $y \in X_2 \setminus X_1$.

3. Folosim faptul că dreapta determinată de intersecția laturilor neparalele ale unui trapez și punctul de intersecție a diagonalelor trece prin mijlocul bazelor trapezului, arătăm că fiecare din dreptele AP, CQ și RN trece prin mijlocul seg-

mentului $[EF]$. Într-adevăr. $MEFD$ este trapez, ale cărui laturi neparalele se intersectează în A iar diagonalele în P. deci AP trece prin mijlocul lui $[EF]$. De asemenea, $BDFE$ este trapez. laturile neparalele se intersectează în C iar diagonalele în Q, deci CQ trece prin mijlocul segmentului $[EF]$. Analog, $BMFE$ este trapez, laturile neparalele se intersectează în R iar diagonalele în N. Rezultă că și dreapta RN trece prin mijlocul lui $[EF]$. Deci cele trei drepte sînt concurente.

4. a) Sistemul de numere $(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, y'_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_n)$ trebuie să verifice ecuația

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = nx_1x_2 \ldots x_n, \tag{1}$$

adică

$$x_1'^2 + \ldots + x_{i-1}'^2 + y_i'^2 + x_{i+1}'^2 + \quad + x_n'^2 = nx_1' \quad x_{i-1}'y_i'x_{i+1}' \ldots x_n' \tag{2}$$

Scăzînd membru cu membru relația (1) scrisă pentru $x'_1, \ldots, x'_n$ și (2) obținem

$$x_i'^2 - y_i'^2 = nx_1' \quad x_{i-1}'x_{i+1}' \quad x_n'(x_i' - y_i').$$

Deoarece $x'_i \neq y'_i$ putem simplifica cu $x'_i - y'_i$ și obținem $x'_i + y'_i = nx_1' \ldots x_{i-1}'x_{i+1}' \ldots x_n'$, adică

$$y_i' = nx_1' \ldots x_{i-1}'x_{i+1}' \ldots x_n' - x'. \tag{3}$$

Deci, dacă y'_i este dat de (3), sistemul de valori $(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, y'_i, x'_{i+1}, \ldots x'_n)$ verifică ecuația dată. Să arătăm că putem alege indicele i astfel încît $y'_i \neq x'_i$ sau $nx'_1 \ldots x'_{i-1}x'_{i+1} \ldots x'_n \neq 2x'_i$. Pentru aceasta este suficient să alegem indicele i astfel încît $|x'_i| = \min(|x'_1|, \ldots, |x'_n|)$ și deoarece $n \geqslant 3$ obținem

$$n|x'_1 \ldots x'_{i-1}x'_{i+1} \ldots x'_n| \geqslant 3|x'_i| > 2|x'_i|, \text{ adică } y'_i \neq x'_i.$$

b) Vom determina toate soluțiile (x', y', z') ale ecuației

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \tag{4}$$

astfel încît $\max(x', y', z') < 200$ și care nu se obțin una din cealaltă printr-o permutare a componentelor. Conform relației (3), scrise pentru $n = 3$, rezultă că dacă (x, y, z) este un triplet care verifică ecuația (4), atunci $t_1(x, y, z) = (3yz - x, y, z)$, $t_2(x, y, z) \quad (x, 3xz - y, z)$ și $t_3(x, y, z) = (x, y, 3xy - z)$ verifică de asemenea ecuația (4). Notînd cu i transformarea identică definită prin $i(x, y, z) = (x, y, z)$, se observă că $t_1t_1 = t_2t_2 = t_3t_3 = i$. Tripletul $(1, 1, 1)$ este o soluție a ecuației (4). Făcînd transformarea t_1 găsim tripletul $(2, 1, 1)$, apoi prin transformarea t_3 găsim tripletul $(2, 1, 5)$ ș.a.m.d., scriind numai tripletele care nu se obțin unul din celălalt printr-o permutare a componentelor. Astfel se generează șapte soluții cu componente mai mici decît 200, scrise în ordine crescătoare, și anume: $(1, 2, 5)$, $(2, 5, 29)$, $(2, 29, 169)$, $(1, 15, 13)$, $(1, 13, 34)$, $(5, 13, 194)$ și $(1, 34, 89)$. Vom arăta că acestea sînt singurele soluții care satisfac condiția dată. Fie (x, y, z) o soluție astfel încît $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$. Dacă $x = y = z$, din (4) rezultă $x^2 = x^3$, adică $x = 1$ sau $x = y = z = 1$. Presupunînd că $(x, y, z) \neq (1, 1, 1)$ obținem $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$ și cel puțin una dintre inegalitățile $x \leqslant y$ și $y \leqslant z$ este strictă. Vom arăta că $3xy - z < z$, deci aplicînd transformarea t_3, a treia componentă a soluției scade strict. Trebuie deci demonstrat că $2z > 3xy$ sau $2z^2 > 3xyz = x^2 + y^2 + z^2$, deci condiția $2z > 3xy$ este echivalentă cu $z^2 > x^2 + y^2$. Să presupunem mai întîi că $x \geqslant 2$. Dacă are loc inegalitatea contrară $z^2 \leqslant x^2 + y^2$, obținem $3xyz = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$, deci $4y^2 \geqslant 2(x^2 + y^2) \geqslant$ $\geqslant 3xyz \geqslant 3xy^2$, adică $4y^2 \geqslant 3xy^2$ sau $x \leqslant \frac{4}{3}$ ceea ce contrazice ipoteza $x \geqslant 2$. Dacă

1 și $z \quad y \quad 1$ ecuația dată devine $1 \quad 2y^2 \quad 3y^2$, deci $y \quad 1$, ceea ce contrazice inegalitatea $y \quad 1$. Ultimul caz rămas este $\quad 1$ și $\quad y$, deci $z \geqslant y \quad 1$ sau

$z^2 \geqslant y^2 + 2y + 1$, ceea ce implică $z^2 > y^2 + 1 = y^2 + x^2$ și inegalitatea $2z > 3xy$ are loc și în acest caz. Deoarece soluțiile au numai componente întregi, rezultă că după un număr finit de transformări t_i ajungem la soluția (1, 1, 1). Există deci indicii $i_1, \ldots, i_r$ astfel încît $i_1, \ldots, i_r \in \{1, 2, 3\}$ și $t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_r}(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Deoarece $t_1^2 = t_2^2 = t_3^2 = \iota$, rezultă că

$$(x, y, z) = t_{i_r} t_{i_{r-1}} \ldots t_{i_1}(1, 1, 1),$$

deci orice soluție cu componente pozitive se poate obține plecînd de la soluția inițială (1, 1, 1) prin aplicarea de un număr finit de ori a transformărilor t_1, t_2 sau t_3. Deci cele șapte soluții sînt toate soluțiile căutate. Să mai observăm că dacă (x, y, z) este o soluție a ecuației (4), atunci z și $z_1 = 3xy - z$ sînt cele două rădăcini ale ecuației (4) considerate ca ecuație de gradul al II-lea în z. Într-adevăr, $z + z_1 = 3xy$ și $zz_1 = 3xyz - z^2 = x^2 + y^2$. Pornind de la această observație se poate da o nouă demonstrație faptului că dacă (x, y, z) este o soluție a ecuației (4), $(x, y, z) \neq (1, 1, 1)$ și $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$, atunci $z_1 < z$. Notînd $P(z) = z^2 - 3xyz + x^2 + y^2$ vom arăta că $P(y) < 0$ pentru $(x, y, z) \neq (1, 1, 2)$. Într-adevăr, $P(y) = x^2 + 2y^2 - 3xy^2 < 0$ deoarece

$$3xy^2 \geqslant 3y^2 = 2y^2 + y^2 \geqslant 2y^2 \quad x^2,$$

egalitatea avînd loc numai pentru $x = 1$ și $y = x$, deci $x = y = 1$, ceea ce implică $z^2 - 3z + 2 = 0$, adică $z = 1$ sau $z = 2$. Pentru (1, 1, 2) proprietatea se verifică direct deoarece $z_1 = 3 - 2 = 1 < z = 2$. Pentru că y se găsește între rădăcinile trinomului $P(z)$ de gradul 2 în z și $z \geqslant y$ rezultă că $z_1 < y < z$, adică $z_1 < z$. (A se consulta I. Tomescu, *Asupra unei ecuații diofantice*, Gazeta Matematică, nr. 7, XC (1985), 237—238).

Etapa finală

1. Vom folosi metodele din articolul *Despre funcții care comută și puncte fixe*, de D.M. Bătinețu-Giurgiu, Gazeta Matematică, nr. 4 (1974), 195—198. Demonstrăm deci că dacă $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ au proprietatea că $f \circ g = g \circ f$ iar g are unul sau două puncte fixe, atunci $f \circ f$ are cel puțin un punct fix. Într-adevăr, fie $u \in \mathbf{R}$ un punct fix al lui g. Avem $f(g(u)) = f(u) = g(f(u))$, ceea ce arată că $f(u)$ este punct fix al lui g. Din $f(u) = g(f(u))$ deducem că $f(f(u)) = f(g(f(u))) = g(f(f(u)))$, ceea ce arată că și $f(f(u))$ este punct fix al lui g. Deoarece g are cel mult două puncte fixe rezultă că:

i) $u = f(u) \Rightarrow f(f(u)) = f(u) = u$, adică u este punct fix pentru $f \circ f$.

ii) $u = f(f(u)) \Rightarrow (f \circ f)(u) = u$, adică u este punct fix pentru $f \circ f$.

iii) $f(f(u)) = f(u)$, de unde deducem că f are punctul fix $v \quad f(u)$ și deci $f(f(v)) = f(v) = v$, adică v este punct fix pentru $f \circ f$. Pentru punctul b al problemei considerăm $g(x) = ax^2 + bx + \quad$ și atunci $f \circ g = g \circ f \Rightarrow f(ax^2 + bx + c) = af^2(x) + bf(x) + c$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Dacă $a = 0$ și $b \neq 1$, atunci g are un punct fix unic $u = c(1 - b)^{-1}$. Dacă $a = 0$ și g are cel puțin un punct fix, atunci ecuația $ax^2 + bx \quad c = x$ are cel puțin o rădăcină reală, ceea ce este echivalent cu $4ac \leqslant (b - 1)^2$. Prin urmare g are cel mult două puncte fixe și cel puțin un punct fix, deci proprietatea de la punctul a se păstrează.

2. Fie $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ și $E_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Presupunem prin absurd că $\bigcup_{k=1}^{s} E_k = X$; atunci există $E_{k_{n-1}}$ și E_{k_n} cu $1 < k_{n-1}, k_n \leqslant s$ astfel încît $x_{n-1} \in E_{k_{n-1}}$ și $x_n \in E_{k_n}$. Dacă $k_{n-1} \neq k_n$, atunci $E_1 \cup E_{k_{n-1}} \cup E_{k_n} = X$, ceea ce contrazice ipoteza problemei. Dacă $k_{n-1} \quad k_n$, atunci există $j \notin \{1, k_{n-1}\}$ astfel încît $E_1 \cup E_{k_{n-1}} \cup E_j = X$, adică iarăși în contradicție cu enunțul. Cu aceasta problema este rezolvată.

3. Considerăm $S \in (DA$ astfel încît $AS = AQ$ și $A \in (QS)$. Deoarece $AP = CD$, $AS = BC$ și $\widehat{SAP} \equiv \widehat{BCD}$ deducem că triunghiurile SAP și BCD sînt asemenea iar din asemănarea lor obținem $\widehat{ASP} \equiv \widehat{CBD}$. Totodată $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CBD}$ ca unghiuri care subîntind același arc. Rezultă deci că unghiurile $\widehat{ASP}$ și $\widehat{CAP}$ sînt congruente, ceea ce arată că PS este paralelă cu AC și cum A este mijlocul lui (SQ) rezultă că $[AM]$ este linie mijlocie în triunghiul SBQ, deci $QM = MP$. Din congruența triunghiurilor SAP și BCD rezultă că medianele din A și C sînt congruente, deci $AR = NC$, unde R este mijlocul lui (SP). Prin urmare $AR = \frac{1}{2} PQ$, de unde rezultă $CN = \frac{1}{2} PQ$. Cu aceasta problema este rezolvată.

4. Prin A ducem AD paralelă cu BC, $D \in d$ și fie $\{E\} = BC \cap d$. Este evident că există, și este unic, un punct $F \in (BC)$ astfel încît (1) $\frac{BF}{FC} = \frac{v}{u} \Leftrightarrow BF = \frac{v}{u+v} BC$. Fie $\{G\} = (AF) \cap d$. Din asemănarea de triunghiuri $AMD \sim BME$, $NAD \sim CNE$ și $AGD \sim FGE$ rezultă, respectiv, (2) $\frac{AD}{BE} = \frac{MA}{MB} = m$, (3) $\frac{AD}{CE} = \frac{NA}{NC} = n$, (4) $\frac{AD}{EF} = \frac{GA}{GF}$. Din (2) și (3) deducem $BE = \frac{AD}{m}$, $CE = \frac{AD}{n}$ și atunci relația (4) devine $\frac{GA}{GF} = \frac{AD}{BE \quad BF} = \frac{AD}{BF + \frac{AD}{m}}$, de unde dacă ținem seama de (1) rezultă

$$(5)\ \frac{GA}{GF} = \frac{AD}{\frac{v}{u+v} BC + \frac{AD}{m}} = \frac{AD}{\frac{v}{u+v}(CE - BE) + \frac{AD}{m}} = \frac{AD}{\frac{v}{u+v}\left(\frac{AD}{n} - \frac{AD}{m}\right) + \frac{AD}{m}} =$$

$$= \frac{mn(u+v)}{v(m-n) + n(u+v)} = \frac{mn(u+v)}{vm - vn + un + vn} = \frac{mn(u+v)}{un + vm}$$ Pe baza condiției din enunțul problemei rezultă $un + vm = mn$ și atunci din (5) rezultă $\frac{GA}{GP} = u + v$, ceea ce arată că raportul $\frac{GA}{GF}$ nu depinde de poziția dreptei d și deoarece F este un punct fix rezultă că și G este un punct fix. Pentru $u = v = 1$ rezultă că punctul fix G este chiar centrul de greutate al triunghiului ABC.

Anul 1985

Etapa județeană

1. i) Dacă ecuația $P(P(x)) = 0$ are două rădăcini reale y_1 și y_2, atunci ecuația $P(x) = 0$ are rădăcinile reale $P(y_1)$ și $P(y_2)$, deci $\Delta \geq 0$. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $P(X) = 0$; rezultă că ecuațiile

(1) $$P(x) = x_1 \Leftrightarrow x^2 + ax + b - x_1 = 0,$$

(2) $$P(x) = x_2 \Leftrightarrow x^2 + ax + b - x_2 = 0,$$

nu pot avea ambele rădăcini reale și diferite, iar dacă una din ecuații admite rădăcini confundate, este necesar ca cealaltă ecuație să admită deasemenea rădăcini

confundate. Aceste condiții revin la următoarele condiții puse asupra discriminanților ecuațiilor (1) și (2):

(3) $$a^2 - 4(b - x_1) \geqslant 0 \text{ și } a^2 - 4(b - x_2) \leqslant 0$$

sau

(4) $$a^2 - 4(b - x_1) \leqslant 0 \text{ și } a^2 - 4(b - x_2) \geqslant 0.$$

Din (3) rezultă că $x_1 \geqslant -\frac{\Delta}{4}$ și $x_2 \leqslant -\frac{\Delta}{4}$, iar din (4) rezultă că $x_1 \leqslant -\frac{\Delta}{4}$ și $x_2 \geqslant -\frac{\Delta}{4}$ $\left(\text{egalitatea se obține pentru } x_1 = x_2 = -\frac{\Delta}{4}\right)$, și deci în orice caz polinomul dat are o singură rădăcină în intervalul $\left[-\frac{\Delta}{4}, \infty\right)$.

ii) Să demonstrăm mai întîi că dacă $P(b) = 0$ și $P(X)$ are o rădăcină în intervalul $(0, 1)$, atunci are loc a) sau b). Să presupunem că $P(X)$ are o singură rădăcină în intervalul $(0, 1)$; rezultă că $P(0)P(1) < 0 \Leftrightarrow b(a + b + 1) < 0$. Din (1) și (2) obținem că $(b - x_1)(b - x_2) = b^2 - (x_1 + x_2)b + x_1x_2 = b^2 + ab + b = b(a + b + 1) < 0$, de unde deducem că numerele $b - x_1$ și $b - x_2$ au semne contrare. Să presupunem că $b - x_1 < 0$ și $b - x_2 > 0$. În acest caz ecuația (1) are discriminantul $a^2 - 4(b - x_1) > 0$ și are două rădăcini reale y_1 și y_2 pentru care $y_1y_2 = b - x_1 < 0$, de unde se deduce că o rădăcină a ecuației este pozitivă și cealaltă rădăcină este negativă. Pentru ecuația (2) avem de analizat două posibilități. Dacă ecuația (2) nu are rădăcini reale, atunci ținînd cont că ecuația (1) are o rădăcină pozitivă și una negativă rezultă deci că polinomul $P(P(X))$ are o rădăcină pozitivă și alta strict negativă. Dacă ecuația (2) are rădăcini reale, fie y_3 și y_4 aceste rădăcini. Deoarece $y_3y_4 = b - x_2 > 0$, deducem că rădăcinile y_3 și y_4 au același semn, prin urmare polinomul $P(P(X))$ are trei rădăcini de un semn și a patra de celălalt semn. La fel se analizează cazul $b - x_1 > 0$ și $b - x_2 < 0$. Din $b - x_2 < 0$ deducem că $a^2 - 4(b - x_2) > 0$ și deci ecuația (2) are două rădăcini reale. Fie aceste rădăcini y_1 și y_2; atunci din $y_1y_2 = b - x_2 < 0$, deducem că o rădăcină este strict pozitivă iar cealaltă strict negativă. Dacă ecuația (1) are rădăcini complexe, atunci rezultă că $P(P(X))$ are o rădăcină strict pozitivă și o rădăcină strict negativă. Dacă ecuația (1) are rădăcini reale, fie y_3 și y_4 aceste rădăcini. Deoarece $y_3y_4 = b - x_1 > 0$ rezultă că y_3 și y_4 au același semn, prin urmare polinomul $P(P(X))$ are trei rădăcini de un semn și a patra de celălalt semn. În concluzie, în orice situație este îndeplinită sau condiția a sau condiția b. Să demonstrăm acum implicația reciprocă. Să presupunem că $P(P(X))$ îndeplinește condițiile a sau b ale problemei. Avem de analizat mai multe cazuri. Polinomul $P(P(X))$ poate să aibă două rădăcini reale și două rădăcini complexe. Să presupunem că ecuația (1) are rădăcinile reale y_1 și y_2 și ecuația (2) are rădăcinile complexe conjugate y_3 și y_4. Ținînd cont de relațiile lui Viète obținem

$y_3y_4 = b - x_2$, dar $y_3y_4 = y_3\bar{y}_3 = |y_3|^2 \geqslant 0$, deci $b - x_2 \geqslant 0$. Deoarece $P(P(X))$ îndeplinește condițiile a sau b deducem că o rădăcină a ecuației (1) este pozitivă iar cealaltă este negativă și deci $y_1y_2 = b - x_1 \leqslant 0$. Obținem $(b - x_1)(b - x_2) = b^2 - (x_1 + x_2)b + x_1x_2 = b(b + a + 1) \leqslant 0$. Cum prin ipoteză $P(b) \neq 0$, rezultă $b(b + a + 1) \neq 0$, de unde deducem că $b(b + a + 1) < 0$ sau $P(0)P(1) < 0$, adică $P(X)$ are o rădăcină în intervalul $(0, 1)$. Polinomul $P(P(X))$ poate să aibă toate rădăcinile reale. Ținînd cont că $P(P(X))$ îndeplinește condițiile a sau b rezultă că o rădăcină este strict pozitivă și celelalte trei negative sau o rădăcină strict negativă și celelalte trei pozitive, ceea ce arată că o ecuație dintre (1) și (2) are rădăcinile de semne contrare, iar cealaltă ecuație are rădăcinile de același semn. Să presupunem

că (1) are rădăcinile de semne contrare iar (2) are rădăcinile y_3 și y_4 de același semn. Deci $y_1y_2 = b - x_1 \leqslant 0$ și $y_3y_4 = b - x_2 \geqslant 0$ și rezultă $(b - x_1)(b - x_2) = b(b + a + 1) \leqslant 0$. Ținînd cont că $P(b) = b(a + b + 1) \neq 0$ rezultă $b(b + a + 1) < 0$ sau $P(0)P(1) < 0$, ceea ce arată că ecuația are o rădăcină în $(0, 1)$. Prin urmare se poate trage concluzia că dacă $P(P(X))$ îndeplinește condițiile a sau b, atunci $P(X)$ are o rădăcină în intervalul $(0, 1)$. Cu aceasta problema este complet rezolvată.

2. Fie α o rădăcină a ecuației date; atunci $f^2(\alpha) = a\alpha$ și deoarece $f(\alpha) \leqslant a - a\alpha$ rezultă, adunînd cele două relații, că $f^2(\alpha) + f(\alpha) - a \leqslant 0$. Notînd $f(\alpha) = t$ avem $t^2 + t - a \leqslant 0$. Trinomul $f(t) = t^2 + t - a$ are $\Delta = 1 + 4a \leqslant 0$, deci $t^2 + t - a \geqslant 0$. Deducem deci că $t^2 + t - a = 0$, ecuație care are rădăcini reale doar pentru $a = \frac{1}{4}$. În acest caz $t_1 = t_2 = -\frac{1}{2}$ deci $f(\alpha) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\alpha$ și rezultă $\alpha = -1$.

În concluzie, dacă $a < -\frac{1}{4}$ atunci ecuația $f^2(x) = ax$ nu are soluții, iar dacă $a = -\frac{1}{4}$ atunci $\alpha = -1$ este singura soluție, care este independentă de a.

3. Notăm cu Q proiecția punctului P pe AB, O mijlocul lui (MP) și L proiecția lui O pe AB. Deoarece $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MBP}) = 90°$ patrulaterul $APBM$ este inscriptibil, $[MP]$ este diametru și O este centrul cercului în care este înscris patrulaterul $APBM$. $[AB]$ fiind coardă în acest cerc, L este mijlocul său. Dreptele MI, OL și QP sînt echidistante, de unde deducem că L este mijlocul segmentului $[IQ]$. Din faptul că L și I sînt fixe, rezultă că și Q este fix (este simetricul lui I față de mijlocul L al segmentului $[AB]$). Rezultă deci că P se găsește pe perpendiculara în Q pe AB, fie această dreaptă d. Să demonstrăm acum implicația reciprocă. Fie un punct $P \in d \setminus \{Q\}$. Pe cercul circumscris triunghiului APB se ia punctul M diametral opus lui P. Fie I' proiecția lui M pe AB. Notăm cu L mijlocul lui $[AB]$. Avem $PQ \perp AB$, $OL \perp AB$, $MI' \perp AB$, deci $MI' \parallel OL \parallel OP$ și cum $OM = OP$ paralelele MI', OL, QP sînt echidistante, deci $LQ = LI'$; prin urmare $\{I\} = \{I'\}$ și deci P aparține locului geometric. Deci locul geometric este mulțimea $d \setminus \{Q\}$.

4. a) Teorema bisectoarei aplicată pe rînd în triunghiurile AMB, BMC și CMA implică relațiile

$$(1) \qquad \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{MA}{MC}, \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{MC}{MB}, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{MB}{MA}.$$

Înmulțind cele trei relații termen cu termen și simplificînd obținem

$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$, de unde rezultă că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente conform reciprocei teoremei lui Ceva. b) Aplicînd teorema lui Van Aubel (valabilă pentru cevienele AA_1, BB_1, CC_1 concurente în P) în triunghiul ABC pentru fiecare ceviană obținem

$$(2) \qquad \frac{PA}{PA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}, \quad \frac{PB}{PB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A}, \quad \frac{PC}{PC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Din relațiile (1) și (2) obținem

$$(3) \qquad \frac{PA}{PA_1} + \frac{PB}{PB_1} + \frac{PC}{PC_1} = \left(\frac{AM}{BM} + \frac{AM}{CM}\right) + \left(\frac{BM}{AM} + \frac{BM}{CM}\right) + \left(\frac{CM}{AM} + \frac{CM}{BM}\right).$$

($\Leftarrow$) Fie M centrul cercului circumscris triunghiului ABC; atunci evident $AM = BM = CM$ și ținînd cont de (3) obținem $\frac{PA}{PA_1} \cdot \frac{PB}{PB_1} \cdot \frac{PC}{PC_1} = 8$.

($\Rightarrow$) Presupunem că (4) $\frac{PA}{PA_1} \cdot \frac{PB}{PB_1} \cdot \frac{PC}{PC_1} = 8$. Notăm $AM = BM = y$, $CM = z$ și atunci din (2) și (4) obținem $\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{y}{z}\right)\left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y}\right) = 8$, sau (5) $(x + y)(y + z)(z + x) = 8xyz$. Inegalitatea mediilor aplicată numerelor x și y ne conduce la $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$ egalitatea obținîndu-se dacă și numai dacă $x = y$. În mod analog găsim $y + z \geqslant 2\sqrt{yz}$ și $z + x \geqslant 2\sqrt{xz}$ egalitățile obținîndu-se pentru $y = z$ și $z = x$. Deci înmulțind aceste ultime inegalități obținem $(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8xyz$, de unde deducem că relația (5) are loc numai cînd $x = y = z$, adică dacă $AM = BM = CM$, ceea ce este echivalent cu faptul că M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Etapa finală

1. a) Fie $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ cu $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Deoarece f este strict crescătoare rezultă că este injectivă. Din faptul că M este finită și f injectivă rezultă că f este surjectivă și deci bijectivă. Prin urmare $f(M) = M$ și de aici deducem $f(x) = x$, $(\forall)\ x \in M$, adică $f = 1_M$. b) $xf(y) = yf(x)$, $(\forall)\ x, y \in M \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$, $(\forall)\ x, y \in M$, adică funcția $g: M \to M$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ este o constantă $g(x) = c \in \mathbf{R}^*$. Rezultă deci că $f(x) = cx$, $(\forall)\ x \in M$. Dacă presupunem $c > 1$ rezultă $f(x) > x$, $(\forall)\ x \in M$, de unde $f(x_n) > x_n$, unde $x_n = \max M$, ceea ce este absurd. Dacă presupunem $c < 1$ rezultă $f(x) < x$, $(\forall)\ x \in M \Rightarrow f(\min M) < \min M$, ceea ce este absurd. Deci $c = 1$ și $f(x) = x$ $(\forall)\ x \in M \Leftrightarrow f = 1_M$.

2. a) Ecuația cu necunoscuta $a \in \mathbf{R}$ este $a^2 - xa + x^2 - bx + b^2 + \frac{1}{2} = 0$ care pentru $-3x^2 + 4bx - 4b^2 + 2 \geqslant 0$ admite soluțiile $a_{1,2} = \frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{-3x^2 + 4bx - 4b^2 + 2}\right)$.

b) Să presupunem că ecuația admite o rădăcină $x_0 \in \mathbf{Z}$. Ecuația dată se mai scrie $\left(a - \frac{1}{2}x_0\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}x_0\right)^2 + \frac{1}{2}x_0^2 = \frac{1}{2}$ de unde deducem imediat că $x_0^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow x_0 \in \{-1, 0, 1\}$. Pentru $x_0 = 0$ rezultă $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ pentru $x_0 = 1$ deducem $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ deci $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$, iar pentru $x_0 = -1$ avem $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, de unde deducem $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$. Prin urmare condiția $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ este necesară ca ecuația din enunț să aibă cel puțin o soluție $x_0 \in \mathbf{Z}$. Condiția este și suficientă deoarece dacă $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ ecuația admite rădăcina $x_0 = 0 \in \mathbf{Z}$.

c) Conform cu cele demonstrate la punctul precedent avem de analizat trei cazuri:

i) cele două rădăcini întregi sînt 0 și 1. În acest caz deducem că $a = b = \frac{1}{2}$;

ii) cele două rădăcini întregi sînt 0 și -1. În acest caz deducem $a = b = -\frac{1}{2}$;

iii) cele două rădăcini sînt 0 și 0. În acest caz rezultă $ab < 0$ și $|a| = |b| = \frac{1}{2}$.

3. a) Fie $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O_i, R)$, $i \in \{1, 2, ..., 6\}$ cele șapte cercuri din enunț. Deoarece $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O_i, R)$ sînt secante pentru $i \in \{1, 2, ..., 6\}$ deducem că $0 < OO_i < 2R$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, ..., 6\}$, ceea ce înseamnă că $O_i \in \operatorname{Int} \mathcal{C}(O, 2R)$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, ..., 6\}$. Pentru a demonstra cele solicitate de enunț va trebui să demonstrăm că există cel puțin două puncte O_i și O_j, $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, ..., 6\}$ așa încît $0 < O_iO_j < 2R$. Evident că pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., 6\}$, $i \neq j$, avem $O_iO_j > 0$ și deci rămîne de arătat că există $i, j \in \{1, 2, ..., 6\}$, $i \neq j$, așa încît $O_iO_j < 2R$. Presupunem prin absurd că pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., 6\}$, $i \neq j$ avem $O_iO_j \geqslant 2R$. Este evident că nu există două puncte O_i, O_j situate pe o aceeași rază a cercului $\mathcal{C}(O, 2R)$ deoarece ar rezulta $O_iO_j < 2R$ și deci, notînd cu $P_i = (OO_i \cap \mathcal{C}(O, 2R)$, $i \in \{1, 2, ..., 6\}$, punctele P_i, $i \in \{1, 2, ..., 6\}$ vor fi șase puncte distincte pe cercul $\mathcal{C}(O, 2R)$. Vom renota punctele O_i în așa fel încît punctele P_i să fie situate pe cercul $\mathcal{C}(O, 2R)$ în „sens trigonometric" în ordinea $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. În triunghiul OO_1O_2 avem $OO_1 < 2R$, $OO_2 < 2R$ și $O_1O_2 \geqslant 2R$ (această ultimă inegalitate rezultînd din presupunerea $O_iO_j \geqslant 2R$, $(\forall)\ i, j \in \{1, 2, ..., 6\}$, $i \neq j$). Prin urmare $[O_1O_2]$ este latura cea mai lungă a triunghiului OO_1O_2 și atunci unghiul $\widehat{O_1OO_2}$ este unghiul cel mai mare al triunghiului. Prin urmare, dacă ținem seama că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180° deducem că $m(\widehat{O_1OO_2}) > 60°$ și analog deducem că $m(\widehat{O_2OO_3}) > 60°$ $m(\widehat{O_3OO_4}) > 60°$, $m(\widehat{O_4OO_5}) > 60°$, $m(\widehat{O_5OO_6}) > 60°$ și $m(\widehat{O_6OO_1}) > 60°$. De aici obținem $\sum_{k=1}^{6} m(\widehat{O_kOO_{k+1}}) > 360°$, $O_7 = O_1$. Totodată, $m(\widehat{O_kOO_{k+1}}) = m(\widehat{P_kP_{k+1}})$, $k \in \{1, 2, ..., 6\}$, $P_7 = P_1$ și deoarece P_k sînt așezate în sens trigonometric rezultă $\sum_{k=1}^{6} m(\widehat{P_kP_{k+1}}) = 360°$. Conform celor de mai sus rezultă $360° > 360°$, ceea ce este o contradicție. Rezultă atunci că presupunerea făcută este falsă și deci enunțul este adevărat. b) Vom demonstra că putem găsi trei cercuri $\mathcal{C}(O_k, R)$, $k \in \{1, 2, 3\}$ secante cu cercul $\mathcal{C}(O, R)$ în așa fel ca cele trei cercuri $\mathcal{C}(O_k, R)$ să fie exterioare două cîte două. Într-adevăr, construim cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și fie $a \in \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}, 2R\right)$. În cercul $\mathcal{C}(O, a)$ înscriem un triunghi echilateral de vîrfuri O_1, O_2, O_3 și fie $\mathcal{C}(O_i, R)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Pentru orice $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ avem $O_iO_j = a\sqrt{3} > 2R$, ceea ce arată că cercurile $\mathcal{C}(O_i, R)$, $\mathcal{C}(O_j, R)$ sînt exterioare. Pentru patru cercuri vom considera ca și mai înainte $\mathcal{C}(O, R)$ și $a \in \left(\frac{2R}{\sqrt{2}}, 2R\right)$. În cercul $\mathcal{C}(O, a)$ înscriem un pătrat de vîrfuri O_k, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ și considerăm cercurile $\mathcal{C}(O_k, R)$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Pentru orice $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$, avem $O_iO_j > O_1O_2 = a\sqrt{2} > 2R$, ceea ce arată că cercurile $\mathcal{C}(O_i, R)$ și $\mathcal{C}(O_j, R)$ sînt exterioare. Se poate arăta că și pentru cinci cercuri afirmația enunțului nu este adevărată. Prin urmare numărul șase este minimal în sensul cerinței din enunț.

4. Fie X, Y, Z mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Este evident că $p_{XYZ} = \frac{1}{2} p_{ABC}$ și că $M \in [YZ]$, $N \in [XZ]$ și $P \in [XY]$. În triunghiul MNP observăm că se formează trei triunghiuri XNP, YPM și ZMN iar în aceste triunghiuri avem $NP < XN + XP$, $PM < YP + YM$ și $MN < ZM + ZN$. Prin adunarea ultimelor trei inegalități deducem $MN + NP + PM < XN + XP + YP + YM + ZM + ZN = XY + YZ + ZX \Leftrightarrow 2p_{MNP} < 2p_{XYZ} = p_{ABC}$ și enunțul este demonstrat.

Anul 1986

Etapa județeană

1. Ecuația dată se mai scrie $x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0$ și deci considerînd-o ca ecuație în x ea admite rădăcini reale dacă și numai dacă $(y+1)^2 - 4y^2 + 4y \geqslant 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow y \in \left[\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right]$, de unde dacă ținem seama că $y \in \mathbf{Z}$ deducem că $y \in \{0, 1, 2\}$. Dacă pentru fiecare $y \in \{0, 1, 2\}$ rezolvăm ecuația în x deducem soluțiile căutate.

2. Condițiile necesare și suficiente pentru ca ecuația dată să admită rădăcini reale distincte în intervalul $(0, 2)$ sînt:

$$\begin{array}{ll} b^2 - 4ac > 0, & (1)\ b^2 - 4ac > 0, \\ af(0) > 0, & (2)\ c > 0, \\ af(2) > 0, & \Leftrightarrow\ (3)\ 4a + 2b + c > 0, \\ 0 < -\frac{b}{2a} < 2, & (4)\ 4a + b > 0, \\ & (5)\ b < 0, \end{array}$$

unde $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Din faptul că $a > 0$ și $a \in \mathbf{Z}$ rezultă $a \geqslant 1$. Din (2) avem că $c > 0$ și deoarece $c \in \mathbf{Z}$ rezultă $c \geqslant 1$. Din (1) avem $b^2 > 4ac \geqslant 4$, de unde deducem $|b| > 2$ și dacă ținem seama de (5) rezultă $b < -2$ și datorită faptului că $b \in \mathbf{Z}$ deducem $b \leqslant -3$. Să arătăm acum că $a \geqslant 2$. Presupunem că $a = 1$. Atunci din (4) rezultă $b > -4$ și cum $b < -2$ rezultă $b = -3$. În acest caz din (1) deducem $4c < 9$ iar din (3) deducem $c > 2$ și cum $c \in \mathbf{Z}$ rezultă o contradicție. Prin urmare presupunerea că $a = 1$ este absurdă și deci $a \geqslant 2$.

3. Este evident că $BG = \frac{2}{3} BN = \frac{2}{3} m_b$. Aplicînd teorema lui Menelaus în triunghiul BAN tăiat de transversala CP deducem

$$\frac{BQ}{QN} \cdot \frac{CN}{CA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \Leftrightarrow \frac{BQ}{QN} = \frac{CN}{2NC} \cdot \frac{2PB}{PB} = 1 \Rightarrow BQ = QN,$$

adică $BQ = \frac{1}{2} BN = \frac{1}{2} m_b$. Pe baza condiției din enunț avem

(1) $BM \cdot BP = BQ \cdot BG \Leftrightarrow \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{3} = \frac{m_b}{2} \cdot \frac{2m_b}{3} \Leftrightarrow ac = 2m_b^2 \Leftrightarrow 2ac = 4m_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 \Leftrightarrow b^2 = (a - c)^2 = a^2 + c^2$. Dacă AB este perpendiculară pe BC,

atunci $b^2 = a^2 + c^2$ și din (1) deducem $a = c$; iar dacă $a = c$, atunci tot din (1) rezultă $a^2 + c^2 = b^2$, adică triunghiul ABC este dreptunghic în B și deci AB este perpendiculară pe BC.

4. Fără a restrînge generalitatea, vom presupune că $c \leqslant b$ și atunci pe baza ipotezei rezultă imediat că $AE \geqslant AB$ și $AD \leqslant AC$. Fie F punctul în care bisectoarea interioară a unghiului $\hat{A}$ intersectează pe CE. Avem

$$(1) \qquad BE = AE - AB = \frac{2bc}{b+c} - c = \frac{c(b-c)}{b+c},$$

$$(2) \qquad CD = AC - AD = b - \frac{2bc}{b+c} = \frac{b(b-c)}{b+c}.$$

Din teorema bisectoarei aplicată în triunghiul ACE pentru bisectoarea $[AF$ deducem (3) $\frac{EF}{FC} = \frac{2c}{b+c}$. În conformitate cu relațiile (1), (2) și (3) avem $\frac{EF}{FC} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{AB}{BE} = 1$ și dacă aplicăm reciproca teoremei lui Ceva în triunghiul ACE, pe baza relației precedente deducem că cevienele $[BC$, $[AF$ și $[ED$ sînt concurente, ceea ce demonstrează enunțul.

Etapa finală

1. Ecuația dată se scrie sub forma echivalentă

$$(1) \qquad (a^2 + b^2)x^2 - (4ab + 1)x + a^2 + b^2 = 0.$$

Dacă $a = b = 0$ ecuația (1) este de gradul întîi și are unica soluție $x_1 = 0$. Să presupunem acum că $a \geqslant 0$ sau $b \geqslant 0$ nu ambele nule; în acest caz ecuația (1) este de gradul al doilea cu rădăcinile x_1, x_2 unde $x_1 \in \mathbf{Z}$. Deoarece $x_1 = (ax_1 - b)^2 + (bx_1 - a)^2$ deducem că $x_1 \in \mathbf{N}$. Deoarece rădăcinile sînt reale rezultă că discriminantul ecuației este pozitiv, adică $(4ab + 1)^2 - 4(a^2 + b^2)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (1 - 2(a - b)^2)(1 + 2(a + b)^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 2(a - b)^2 \geqslant 0$ și deoarece $(a - b)^2 \in \mathbf{N}$ rezultă în mod necesar $(a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$. Ecuația (1) devine

$$(2) \qquad 2a^2x^2 - (4a^2 + 1)x + 2a^2 = 0,$$

și conform relațiilor lui Viète deducem $x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2}$, $x_1x_2 = 1$. Am văzut că $x_1 \in \mathbf{N}$, dar se observă imediat că $x_1 = 0$ nu poate fi rădăcină pentru ecuația (2) și de asemenea $x_1 = 1$ nu poate fi rădăcină pentru ecuația (2). În concluzie, $x_1 \geqslant 2$. Deoarece $x_2 = x_1^{-1} > 0$, deducem că $x_1 < x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2} < 3$. Prin urmare $2 \leqslant x_1 < 3$, de unde rezultă $x_1 = 2$. Deci, $x_2 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2}$. Înlocuind valorile obținute în egalitatea $x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2}$ rezultă $a^2 = 1$, de unde deducem $a \in \{-1, 1\}$. Așadar, în cazul $a \geqslant 0$ sau $b \geqslant 0$, singura posibilitate pentru a fi satisfăcută ecuația din enunț este $a = b = 1$ și rădăcinile ecuației sînt $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

2. Fie ABC triunghiul dat, I centrul cercului înscris și M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Să notăm cu $T \in (BC)$ punctul de contact al cercului

înscris cu latura $[BC]$, cu S punctul diametral opus lui T în cercul înscris și, în sfîrșit, fie $D \in BC$ piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC. Este clar că toate punctele cercului înscris, cu excepția celor trei puncte de contact cu laturile triunghiului, aparțin interiorului triunghiului. Deoarece S aparține cercului înscris și nu este punct de contact (dacă S ar fi punct de contact cu $[AB]$ sau cu $[AC]$, ar rezulta $AB \parallel BC$ sau $AC \parallel BC$, ceea ce nu se poate) deducem că $S \in \operatorname{Int} ABC$. Deci $TS < AD$, ceea ce este echivalent cu $TI < \frac{1}{2} AD$. Aceasta înseamnă că I aparține semiplanului deschis limitat de dreapta PN, care conține punctul M. Analog, I aparține semiplanelor deschise limitate de MP și MN, conținînd respectiv punctele N și P. În concluzie I aparține intersecției celor trei semiplane deschise amintite, care este tocmai interiorul triunghiului ABC.

3. ($\Leftarrow$). Să presupunem $c = 0$ și $a \geqslant d$. Atunci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ putem scrie

$$f(n+1) = \left[\frac{a(n+1)+b}{d}\right] = \left[\frac{an+b}{d} + \frac{a}{d}\right] \geqslant \left[\frac{an+b}{d} + 1\right] = \left[\frac{an+b}{d}\right] + 1 = f(n) + 1 > f(n).$$

Prin urmare, $f(n+1) > f(n)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, ceea ce arată că f este strict crescătoare pe $\mathbf{N}^*$ și deci este injectivă. ($\Rightarrow$). Să presupunem că f este injectivă și să demonstrăm că $c = 0$ și $a \geqslant d$. a) Demonstrăm că $c = 0$. Presupunem prin absurd că $c \neq 0$. Atunci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ avem

$$\frac{an+b}{cn+d} = \frac{a+bn^{-1}}{c+dn^{-1}} \leqslant \frac{a+b}{c} \quad \text{deci } f(n) = \left[\frac{an+b}{cn+d}\right] \leqslant \left[\frac{a+b}{c}\right],\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*,$$

ceea ce arată că $\operatorname{Im} f \subset \left\{0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{a+b}{c}\right]\right\}$. Prin urmare $\operatorname{Im} f$ este o mulțime finită, ceea ce este o contradicție (căci funcția f fiind injectivă și avînd drept domeniu de definiție o mulțime infinită, atunci și $\operatorname{Im} f$ este o mulțime infinită). Deci $c = 0$. b) Demonstrăm că $a \geqslant d$. În primul rînd, datorită faptului că $c = 0$, avem

$$f(n) = \left[\frac{an+b}{d}\right] = [and^{-1} + bd^{-1}],\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Funcția $g : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $g(n) = and^{-1} + bd^{-1}$ este strict crescătoare (fiind restricția la $\mathbf{N}^*$ a funcției de gradul întîi $\bar{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\bar{g}(x) = ad^{-1}x + bd^{-1}$ în care $ad^{-1} > 0$) și cum funcția parte întreagă este de asemenea crescătoare, deducem că funcția f este crescătoare. Deoarece f este injectivă, deducem că ea este strict crescătoare. Avem $f(1) \geqslant 0$; atunci $f(2) > f(1)$ și cum $f(2) \in \mathbf{N}^*$ deducem $f(2) \geqslant 1$; la fel, $f(3) > f(2)$, deci $f(3) \geqslant 2$ ș.a.m.d. Prin urmare $f(n) \geqslant n-1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, adică $[and^{-1} + bd^{-1}] \geqslant n-1$ și atunci, cu atît mai mult, vom avea $and^{-1} + bd^{-1} \geqslant n-1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Ultima inegalitate se mai poate scrie sub forma echivalentă:

$$(1) \qquad (1 - ad^{-1})n \leqslant 1 + bd^{-1},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă am avea $a < d$, atunci $1 - ad^{-1} > 0$ și alegînd $n > \dfrac{1+bd^{-1}}{1-ad^{-1}}$ inegalitatea (1) nu ar mai fi satisfăcută. Dacă $a \geqslant d$.

4. Vom demonstra că dreptele MQ, NR, PS trec prin ortocentrul H al triunghiului ABC. Deoarece triunghiul este ascuțitunghic, punctul H este în interiorul triunghiului. Se știe că simetricele ortocentrului față de laturile triunghiului

sînt puncte situate pe cercul circumscris, deci în cazul problemei noastre punctele A', B', C' vor fi simetricele lui H, respectiv, față de BC, CA, AB. Atunci triunghiul HPB' este isoscel și deci (1) $\widehat{B'HP} \equiv \widehat{HB'P}$ Dar $\widehat{HB'P} \equiv \widehat{BAA'}$ (unghiuri înscrise care subîntind arcul mic $\widehat{A'B}$), apoi $\widehat{BAA'} \equiv \widehat{C'CB}$ (unghiuri ascuțite, avînd laturile respectiv perpendiculare) în sfîrșit, $\widehat{C'CB} \equiv \widehat{C'B'B}$ (unghiuri înscrise care subîntind arcul mic $\widehat{BC'}$) Prin urmare (2) $\widehat{HB'P} \equiv \widehat{C'B'B}$ Din (1) și (2) avem (3) $\widehat{B'HP} \equiv \widehat{C'B'B}$. Să observăm că $\widehat{SBH} \equiv \widehat{ACC'}$ (unghiuri înscrise care subîntind arcul mic $\widehat{AC'}$), deci în definitiv avem $\widehat{SBH} \equiv \widehat{HA'S}$, ceea ce înseamnă că patrulaterul $BA'HS$ este inscriptibil. Rezultă atunci (4) $\widehat{SHB} \equiv \widehat{SA'B}$ Dar (5) $\widehat{SA'B} \equiv \widehat{C'B'B}$, (unghiuri înscrise care subîntind arcul mic $\widehat{BC'}$). Din (4) și (5) avem (6) $\widehat{SHB} \equiv \widehat{C'B'B}$. În sfîrșit, din (3) și (6) avem $\widehat{B'HP} \equiv \widehat{SHB}$ și deoarece punctele B, H, B' sînt coliniare, deducem că și S, H, P snt coliniare, adică dreapta SP trece prin H. În mod asemănător se arată că dreptele NR și MQ trec prin H și cu aceasta demonstrația se încheie.

Anul 1987

Etapa județeană

1. Presupunem Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 \in \mathbf{R}_+$. Atunci $a^2 \geqslant 2bc$, $b^2 \geqslant 2ca$, $c^2 \geqslant 2ab$, de unde prin înmulțirea deducem $a^2b^2c^2 \geqslant 8a^2b^2c^2 \Leftrightarrow 1 \geqslant 8$ ceea ce este absurd. Prin urmare există $i \in \{1, 2, 3\}$ astfel încît $\Delta_i < 0$, ceea ce arată că cel puțin una dintre ecuații nu admite rădăcini reale.

2. Ecuația în a se scrie $xa^2 - 2(x^2+1)a + x^3 + x + 2 = 0$. Deoarece $x = 0$ implică $a = 1$, rezultă că în condițiile problemei avem $x \neq 0$. Rezolvînd ecuația în a, obținem

$$a = \frac{x^2 + 1 \pm (x-1)}{x} \Leftrightarrow a = x + 1 \text{ sau } a = \frac{x^2 - x + 2}{x}.$$

Rezultă că ecuația în x va avea soluțiile $x_1 = a - 1$, $x_{2,3} = \dfrac{a+1 \pm \sqrt{a^2+2a-7}}{2}$.
Din faptul că $a > 2$ rezultă $a^2 + 2a - 7 > 0$ și atunci rezultă ordinea

$$\frac{a+1-\sqrt{a^2+2a-7}}{2} < a - 1 < \frac{a+1+\sqrt{a^2+2a-7}}{2} \Leftrightarrow x_2 < x_1 < x_3.$$

3. Deoarece numerele $1 + 2 + \quad + n$ și $n + (n-1) + \quad + 2 + 1$ sînt egale între ele și egale cu $\dfrac{n(n+1)}{2}$, rezultă că $\dfrac{n(n+1)}{2} < x \leqslant \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Deci $n^2 + n - 2x < 0$ și $n^2 + 3n + 2 - 2x \geqslant 0$. Rădăcinile ecuației $n^2 + n - 2x = 0$ sînt $n_{1,2} = \dfrac{-1 + \sqrt{1+8x}}{2}$ iar ale ecuației $n^2 + 3n + 2 - 2x = 0$ sînt $n_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1+8x}}{2}$ Dacă $1 \leqslant x \leqslant 3$ se ia $n = 1$ iar dacă $x > 3$, atunci

$\frac{\sqrt{1+8x}-3}{2} \leqslant n < \frac{\sqrt{1+8x}-1}{2}$ Diferența capetelor fiind 1, rezultă existența și unicitatea lui n, și anume $n = \left[\frac{\sqrt{1+8x}-1}{2}\right]$. Avem

$$n = k^2,\ n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow k^2 \leqslant \frac{\sqrt{1+8x}-1}{2} < k^2+1 \Leftrightarrow \frac{k^4+k^2}{2} \leqslant x < \frac{k^4+3k^2+2}{2}$$

și atunci $x \in \bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} \left[\frac{k^4+k^2}{2}, \frac{k^4+3k^2+2}{2}\right]$.

4. Deoarece $DO \perp OA$ cercul de diametru $[DA]$ trece prin O și intersectează dreapta d în M_1 și M_2. Conform teoremei catetei avem (1) $M_1A^2 = AF \cdot AD = M_2A^2$. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice AFE și AOD deducem (2) $AF \cdot AD = AO \cdot AE$. Din relațiile (1) și (2) rezultă $M_1A^2 = M_2A^2 = AO \cdot AE$ și deci răspunsul este afirmativ.

5. Presupunem că $BE \perp AF$ și fie $DF = kFE$, de unde rezultă $kDE = (k+1)DF$. Apoi $\widehat{DBN} \equiv \widehat{MAN}$ și deci triunghiurile BEC și AFD sînt asemenea, de unde

$$\frac{EC}{BC} = \frac{DF}{AD} = \frac{k}{k+1},\ \frac{DE}{AD} = \frac{k}{k+1}\sqrt{\frac{AE \cdot EC}{AE \cdot AC}} = \frac{k}{k+1}\sqrt{\frac{EC}{AC}}.$$

Rezultă $EC \cdot AC = \frac{k^2}{(k+1)^2} BC^2$. Dar $EC \cdot AC = CD^2$ și atunci $\frac{DC}{BC} = \frac{k}{k+1}$, $\frac{DC}{BD} = k$. Reciproc, să presupunem că $\frac{DF}{FE} = \frac{DC}{BD} = k$. Rezultă că triunghiurile BEC și AFD sînt asemenea $\left(\widehat{BCE} \equiv \widehat{ADF}\right.$ și $\left.\frac{EC}{BC} = \frac{FD}{AD}\right)$, de unde deducem că $\widehat{DBN} \equiv \widehat{MAN}$ și de aici că $AM \perp BE$.

Etapa finală

1. Dacă M este un punct interior lui $\mathcal{C}(O, R)$, există o coardă $[AB]$ care trece prin M astfel încît M este mijlocul coardei. Dacă $P \in$ d atunci centrul de greutate G al triunghiului PAB este situat pe $[PM]$ astfel încît $PG = 2GM$. Fie $P' \in [OP]$ astfel încît $PP' = 2OP'$. Rezultă că $GP' = \frac{2}{3} OM \leqslant \frac{2}{3} R$. Deci G aparține interiorului cercului $\mathcal{C}\left(P', \frac{2}{3} R\right)$. Este suficient să vedem ce se întîmplă cu cercul $\mathcal{C}\left(P', \frac{2}{3} R\right)$ atunci cînd $P \in$ d. Păstrînd punctul O fix rezultă că P' parcurge o dreaptă d' paralelă cu d situată la distanța $\frac{2}{3}$ din distanța dintre O și d și o distanță de $\frac{1}{3}$ de punctul O din distanța dintre O și d. Rezultă că mulți-

mea interioarelor cercurilor $\mathcal{C}\left(P', \frac{2}{3}R\right)$ coincide cu mulțimea punctelor situate de o parte și de alta a dreptei d' la o distanță mai mică decît $\frac{2}{3}R$.

2. $(x, y) \in A \circ B \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbf{R}$ astfel încît $z = x - [x]$ și $z = y - [y]$. Deci $(x, y) \in A \circ B \Leftrightarrow x - [x] = y - [y] \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$. Prin urmare $A \circ B$ este mulțimea punctelor care verifică ecuații de forma $y = x + n$, $n \in \mathbf{Z}$ și graficul lui $A \circ B$ este reuniunea dreptelor paralele cu prima bisectoare cu intersecții întregi cu axele de coordonate.

$(x, y) \in A \circ A \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbf{R}$ astfel încît $z = x - [x]$ și $y = z - [z]$. Deoarece $z = x - [x]$ rezultă că $z = 0$ și deci $y = z = x - [x]$. Prin urmare $A \circ A = \{(x, x - [x]) \mid x \in \mathbf{R}\}$ și atunci graficul lui $A \circ A$ este graficul funcției parte fracționară a unui număr real.

$(x, y) \in B \circ A \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbf{R}$ astfel încît $(x, z) \in B$ și $(z, y) \in A \Leftrightarrow x = z - [z]$ și $y = z - [z] \Leftrightarrow x = y = z - [z]$. Deci $B \circ A = \{(x, x) \mid x \in [0, 1)\}$ iar graficul este porțiunea din prima bisectoare, adică segmentul $[OD)$, unde D este punctul de coordonate $(1, 1)$.

$(x, y) \in B \circ B \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbf{R}$ astfel încît $(x, z) \in B$ și $(z, y) \in B \Leftrightarrow (\exists)\, z \in \mathbf{R}$ astfel încît $x = z - [z]$ și $y = z - [y]$. Din $z = y - [y]$ rezultă $z \in [0, 1)$ și atunci $[z] = 0$. Deci $x = z = y - [y]$ iar graficul este graficul funcției parte fracționară în care rolul axei Ox îl joacă Oy și reciproc rolul axei Oy îl joacă Ox.

Deoarece orice funcție strict monotonă este injectivă, vom arăta că f este strict crescătoare. Este suficient să arătăm deci că $f(n) < f(n+1)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Se vede imediat că $f(0) = 0 < \sqrt{3} - 1 = f(1)$. Mai departe trebuie arătat că $n(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) < (n+1)(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1})$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Într-adevăr, inegalitatea precedentă este echivalentă cu

$$\frac{n}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}} < \frac{n+1}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}},$$

$$(\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2n+1}}{n} + \frac{\sqrt{2n-1}}{n} > \frac{\sqrt{2n+3}}{n+1} + \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}.\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Se demonstrează ușor că $\frac{\sqrt{2n+1}}{n} > \frac{\sqrt{2n+3}}{n+1}$ și $\frac{\sqrt{2n-1}}{n} > \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$ și cu aceasta este demonstrat că f este strict crescătoare și deci injectivă.

4. Fie $k = \frac{AB}{A'B'}$ raportul de asemănare dintre cele două triunghiuri și t valoarea comună a rapoartelor date în enunț, adică $\frac{AA''}{A'A''} = t$. Se arată fără dificultate că unghiurile formate de laturile omoloage în asemănarea triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ sînt congruente și au măsura comună u. Considerăm separat patrulaterul $ABB'A'$ în care (1) $AB = kA'B'$. Fie $P \in (A'B)$ astfel încît $\frac{PA'}{PB} = \frac{A'A''}{AA''} = t$ iar $m(\widehat{A''PB''}) = 180^\circ - u$. Avem, de asemenea, $\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{A''P} + \overrightarrow{PB''}$

și deci $\overrightarrow{A''B''} = \frac{t}{t+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{t+1}\overrightarrow{B'A'}$. Prin urmare, $A''B''^2 = \overrightarrow{A''B''}\,\overrightarrow{A''B''} =$

$= \frac{t^2}{(t+1)^2}AB^2 + \frac{1}{(t+1)^2}A'B'^2 - 2\frac{t}{(t+1)^2}AB \cdot A'B' \cos(\widehat{A''PB''})$, de unde folosind relația (1) deducem că $\frac{A''B''}{AB} = \frac{\sqrt{t^2+1-2t\cos u}}{t+1}$ și analog pentru celelalte rapoarte, ceea ce demonstrează enunțul.

Anul 1988

Etapa județeană

1. Cum $0 < x \leqslant y \leqslant z$ deducem $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z} > 0$ și deci $\frac{4}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{x}$. Rezultă $0 < x \leqslant \frac{15}{4}$ dacă $x \in \{1, 2, 3\}$. Cum $\frac{1}{x} < \frac{4}{5} \Rightarrow x > \frac{5}{4} > 1$, deci $x \in \{2, 3\}$. Distingem cazurile:

I) $x = 2$. Atunci $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$. Cum $2 \leqslant y \leqslant$ rezultă $\frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}$ și deci $\frac{3}{10} \leqslant \frac{2}{y}$, de unde $y \leqslant \frac{20}{3}$. Cum $\frac{1}{y} < \frac{3}{10}$ rezultă $y > \frac{10}{3} > 3$ și deci $y \in \{4, 5, 6\}$. Dacă $y = 4$ rezultă $z = 20$; dacă $y = 5$ rezultă $z = 10$ iar dacă $y = 6$ rezultă că $z = \frac{15}{2} \notin \mathbf{Z}$.

II) $x = 3$. Atunci $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15}$. Cum $3 \leqslant y \leqslant$ rezultă $\frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}$ și deci $\frac{7}{15} \leqslant \frac{2}{y}$, de unde $y \leqslant \frac{30}{7}$. Mai mult, $\frac{1}{y} < \frac{7}{15} \Rightarrow y > \frac{15}{7} > 2$, deci $y \in \{3, 4\}$. Dacă $y = 3$, rezultă $z = \frac{15}{2} \notin \mathbf{Z}$, iar dacă $y = 4$ rezultă că $z = \frac{60}{13} \notin \mathbf{Z}$. Deci tripletele care verifică relațiile din enunț sînt: (2, 4, 20) și (2, 5, 10).

2. a) Fie $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Presupunem că există funcții f cu proprietatea din enunț, deci (*) $a^2f^2[(a^2+1)x] - 2af(x^2+a^2) + 1 \leqslant 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Înlocuind în (*) pe x cu a^2 se obține: $0 \geqslant a^2f^2(a^4+a^2) - 2af(a^4+a^2) + 1$ sau $0 \geqslant [af(a^4+a^2) - 1]^2$, de unde (**) $f(a^4+a^2) = \frac{1}{a}$. Înlocuind în (*) pe x cu 1 se obține $0 \geqslant a^2f^2(a^2+1) - 2af(a^2+1) + 1$ sau $0 \geqslant [af(a^2+1) - 1]^2$, de unde (***) $f(a^2+1) = \frac{1}{a}$. Cum f este injectivă, din (**) și (***) obținem $a^4 + a^2 = a^2 + 1$, de unde $a^4 = 1$ și $a =$ 1. b) Dacă $a = 1$, funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{2}$, îndeplinește condițiile enunțului, iar dacă $a = -1$, atunci $f(x) = -\frac{x}{2}$ satisface condițiile cerute.

3. Fie $BC = a$, $AC = b$ și $AB = c$ și I punctul de intersecție al bisectoarelor. Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiul ABC, pentru bisectoarea BB', obținem $\frac{B'C}{B'A} = \frac{a}{c}$ sau $\frac{B'C}{b} = \frac{a}{a+c}$, de unde $B'C = \frac{ab}{a+c}$. Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiul $B'CB$ pentru bisectoarea CI, obținem $\frac{B'I}{BI} = \frac{B'C}{BC}$, de unde $\frac{B'I}{BI} = \frac{b}{a+c} < 1$. Cum $B'I < BI$, rezultă $B'' \in (BI)$. Analog $\frac{C'I}{CI} = \frac{c}{a+b} < 1$, deci $C'' \in (CI)$. Cum dreapta $C'B''$ taie (BI) și nu taie (CI), ea va intersecta (BC) în T. Aplicînd teorema lui Menelaus în triunghiul BIC cu transversala $C'B''T$, obținem $\frac{IB''}{B''B} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{CC'}{C'I} = 1$, de unde (1) $\frac{BT}{TC} = \frac{C'I}{CC'} \cdot \frac{B''B}{IB''}$. Cum $\frac{C'I}{CI} = \frac{c}{a+b}$, rezultă $\frac{C'I}{CC'} = \frac{c}{a+b+c}$. Cum $\frac{B'I}{BI} = \frac{b}{a+c}$, rezultă $\frac{B'B'' - B''I}{BB'' + B''I} = \frac{b}{a+c}$, de unde $\frac{B''B}{B''I} = \frac{a+b+c}{a-b+c}$. Înlocuind în (1) obținem $\frac{BT}{TC} = \frac{c}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{a-b+c} = \frac{c}{a-b+c}$. Printr-un raționament analog, dacă $\{S\} = B'C \cap (BC)$, atunci $\frac{CS}{SB} = \frac{b}{a+b-c}$, de unde $\frac{SB}{SC} = \frac{a+b-c}{b}$. Cum S și $T \in (BC)$, atunci $S = T$ dacă și numai dacă $\frac{c}{a-b+c} = \frac{a+b-c}{b}$ dacă și numai dacă $bc = a^2 - (b-c)^2$, echivalent cu $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Din teorema cosinusului $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, deci $S = T$ dacă și numai dacă $\cos A = \frac{1}{2}$, echivalent cu $m(\hat{A}) = 60°$.

4. a) Fie A', B' și C' mijloacele laturilor (BC), (AC) și (AB) și M un punct arbitrar în plan. Cum MC' este mediană în triunghiul MAB, avem (1) $MC'^2 = \frac{2(MA^2 + MB^2) - AB^2}{4}$. Aplicînd relația lui Stewart în triunghiul CMC' cu ceviana MG, avem $MC'^2 \cdot CG + MC^2 \cdot C'G - MG^2 \cdot CC' = CC' \cdot CG \cdot C'G$. Dar $CG = 2C'G$ și $CC' = 3C'G$, atunci $2MC'^2 + MC^2 - 3MG^2 = CC' \cdot CG$. Cum $CC' = \frac{3CG}{2}$, obținem $2MC'^2 + MC^2 - 3MG^2 = \frac{3}{2} CG^2$ și ținînd cont de (1) avem

(2) $$\frac{2(MA^2 + MC^2) - AB^2}{2} + MC^2 - 3MG^2 = \frac{3}{2} CG^2 \text{ sau}$$

$$2 \sum MA^2 - AB^2 - 6MG^2 = 3CG^2.$$

Analog obținem relațiile

(3) $$2 \sum MA^2 - BC^2 - 6MG^2 = 3AG^2,$$

(4) $$2 \sum MA^2 - AC^2 - 6MG^2 = 3BG^2.$$

Adunînd relațiile (2), (3) și (4) obținem

(5) $$6 \sum MA^2 - \sum AB^2 - 18MG^2 = 3 \sum AG^2.$$

Dar $\sum AG^2 = \frac{4}{9} \sum m_a^2 = \frac{\sum AB^2}{3}$, de unde $\sum AB^2 = 3 \sum AG^2$. Înlocuind în (5), obținem $6 \sum MA^2 = 18MG^2 + 6 \sum AG^2$ sau $\sum MA^2 = 3MG^2 + \sum AG^2$, adică relația din enunț. b) Dacă ABC este echilateral de latură 1, atunci

$$\sum MA^2 \geqslant \sum AG^2 = \frac{\sum AB^2}{3} = 1.$$

Etapa finală

1. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \leqslant$ $\leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Putem scrie: $A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \geqslant \frac{1}{3}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)^2$, deci este suficient să demonstrăm că $\frac{1}{3}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)^2 \geqslant \frac{3}{4}$, ceea ce este echivalent cu $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \geqslant \frac{3}{2}$. Însă această inegalitate este o consecință a proprietății următoare: dintre toate triunghiurile înscrise într-un triunghi ascuțitunghic triunghiul ortic are perimetrul minim.

2. Din faptul că tangentele din B și C la cercul circumscris triunghiului AMN sînt congruente, rezultă că (1) $BM \cdot BA = CN \cdot CA$. Mijlocul S al segmentului $[BN]$ se află pe linia mijlocie paralelă cu AC a triunghiului ABC, iar mijlocul R al lui $[CM]$ pe linia mijlocie paralelă cu AB, deci notînd cu C' mijlocul lui $[AB]$ și cu B' mijlocul lui $[AC]$, rezultă că mijlocul lui $[BC]$ se află pe prelungirile laturilor opuse $C'S$ și $B'R$ ale patrulaterului $C'SRB'$. Notînd cu A' mijlocul lui $[BC]$, obținem $A'R = \frac{1}{2} BM$, $A'S = \frac{1}{2} CN$, $A'C' = \frac{1}{2} AC$, $A'B' = \frac{1}{2} AB$ și din relația (1) deducem $A'R \cdot A'B' = A'S \cdot A'C'$, de unde rezultă că patrulaterul $C'SRB'$ este inscriptibil.

3. Să presupunem că prin împărțirea lui m la n se obține cîtul q și restul r. Pentru ca egalitatea din enunț să fie adevărată, deoarece părțile întregi din membrul stîng pot diferi prin cel mult o unitate, trebuie ca cei mai mici termeni din membrul stîng să fie egali cu q, iar r dintre ei să fie egali cu $q + 1$. Vom demonstra că dacă $r \neq 0$, atunci $x = q + s$, unde $s \in \left[\frac{r-1}{r}, \frac{r}{r+1}\right)$, iar dacă $r = 0$, atunci $x = q - 1 + s$, unde $s \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$. Într-adevăr, fie h cel mai mare număr din mulțimea $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ pentru care $s - \frac{1}{h} \geqslant 1$, adică (1) $s + \frac{1}{h} \geqslant 1$ și $s + \frac{1}{h+1} < 1$ sau, echivalent, $s \in \left[\frac{h-1}{h}, \frac{h}{h+1}\right)$. Obținem $[x + 1] =$ $= k + 1, \ldots$, $\left[x + \frac{1}{h}\right] = k + 1$, $\left[x + \frac{1}{h+1}\right] = k$, $\left[x + \frac{1}{n}\right] = k$, de unde rezultă $h(k+1) + (n-h)k = m$ sau, echivalent, $nk + h = m$. Fiind date numerele naturale m și n, $n \neq 0$, teorema împărțirii cu rest ne asigură existența și unicitatea numerelor q și r astfel încît $m = nq + r$, deci soluțiile căutate sînt $x = q + s$,

unde $\frac{r-1}{r} \leqslant s < \frac{r}{r+1}$, ținînd seama de relațiile (1). Dacă $r = 0$, atunci $m = kn$ și se verifică imediat că egalitatea $[x+1] + \left[x + \frac{1}{n}\right] = qn$ nu poate avea loc decît în cazul în care toate părțile întregi din membrul stîng sînt egale cu q, deci $x = q - 1 + s$, unde $s \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$.

4. a) Presupunem că există funcții $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ cu proprietatea din enunț. Atunci $(f \circ f)(x) = x + 1$, de unde $f((f \circ f)(x)) = f(x+1)$, adică $(f \circ f)(f(x)) = f(x+1)$, sau $f(x) + 1 = f(x+1)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{Z}$. De aici deducem succesiv: $f(1) = f(0) + 1$, $f(2) = f(1) + 1, \ldots, f(n) = f(n-1) + 1$, de unde, prin adunare, rezultă că (1) $f(n) = n + f(0)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Pentru n suficient de mare, $n \geqslant -f(0)$, avem $f(n) \in \mathbf{N}$, deci din (1) rezultă $f(f(n)) = f(n) + f(0) = n + 2f(0)$. Pe de altă parte, $f(f(n)) = n + 1$, deci $f(0) = \frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$, absurd. b) Să observăm mai întîi că funcțiile g cu proprietatea din enunț sînt impare: $(g \circ g)(x) = -x$ implică $g((g \circ g)(x)) = g(-x)$ sau $(g \circ g)(g(x)) = g(-x)$, adică $-g(x) = g(-x)$, $(\forall) x \in \mathbf{Z}$. În particular, $g(0) = 0$. De asemenea, dacă $a \in \mathbf{Z}$ și $g(a) = b$, atunci $g(b) = -a$ și $g(-a) = -b$. Deoarece g este impară, este suficient să-i cunoaștem valorile pentru argumentul număr natural. Vom face următoarea construcție: Fie un număr fixat $p \in \mathbf{N}^*$. Definim $g_p : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ astfel: $g_p(0) = 0$, $g_p(1) = p + 1$, $g_p(2) = p + 2, \ldots, g_p(p) = 2p$. Ținînd seama de observațiile făcute, $g_p(p+1) = -1$, $g_p(p+2) = -2, \ldots, g_p(2p) = -p$. În continuare vom defini: $g_p(2p+1) = 3p+1$, $g_p(2p+2) = 3p+2, \ldots, g_p(3p) = 4p$ și vom mai avea de aici: $g_p(3p+1) = -(2p+1)$, $g_p(3p+2) = -(2p+2), \ldots, g_p(4p) = -3p$. Se deduce ușor că $(g_p \circ g_p)(x) = -x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{N}$. Pentru argument număr natural, g_p este deci definită sub forma

$$g_p(k) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } k = 0, \\ k + p \text{ pentru } k \in \{1, \ldots, p\} \cup \{2p+1, \ldots, 3p\} \cup \{4p+1, \ldots, 5p\} \cup \ldots \\ p - k, \text{ pentru } k \in \{p+1, \ldots, 2p\} \cup \{3p+1, \ldots, 4p\} \cup \{5p+1, \ldots, 6p\} \cup \ldots \end{cases}$$

iar pentru $k \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, $g_p(k) = -g_p(-k)$. Deoarece p este arbitrar, obținem o infinitate de astfel de funcții.

Anul 1989

Etapa județeană

1. a) Dacă $f(X) = f(Y)$, cu $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, atunci $X \cap A = Y \cap A$ și $X \cup A = Y \cup A$. Deoarece $X \setminus A = Y \setminus A$, rezultă că $X = Y$, adică f este injectivă. b) Dacă $(M, N) = f(X) = (X \cap A, X \cup A)$, atunci evident $M \subset A \subset N \subset E$ și deci $(M, N) \in \mathcal{A}$. Dacă $(M, N) \in \mathcal{A}$, atunci, notînd $X = M \cup (N \setminus A)$, avem $X \cap A = (M \cup (N \cap (E \setminus A))) \cap A = (M \cap A) \cup (N \cap (E \setminus A) \cap A) = M$ și $X \cup A = M \cup (N \setminus A) \cup A = A \cup (N \cap (E \setminus A)) = (A \cup N) \cap E = N$. Deci ecuația $f(X) = (M, N)$ are soluția $X = M \cup (N \setminus A)$. c) Funcția f_0 este bine definită deoarece $f(X) \in \mathcal{A}$, $(\forall) X \in \mathcal{P}(E)$. De la punctul b rezultă că f este surjectivă iar de la punctul a că f este injectivă. Deci f_0 este bijectivă. Am văzut la punctul b că $f(X) = (M, N)$ are soluția $X = M \cup (N \setminus A)$ și deci $f_0^{-1}(M, N) = M \cup (N \setminus A)$.

2. Deoarece $y \in \mathbf{R}_+^*$ inegalitatea $f(x, y) \leqslant 0$, $(\forall) x \geqslant 1$ și $(\forall) y \geqslant 2$ este echivalentă cu $(m-5)t^2 - 2(m+1)t - m \leqslant 0$, unde $t = xy^{-1}$ și $t > 0$. Deci tre-

buie să găsim $m \in \mathbf{R}$ astfel încît $(m - 5)t^2 - 2(m + 1)t - m \leqslant 0$, $(\forall)t > 0$. Avem următoarele cazuri: i) $m = 5$. Atunci inegalitatea devine $-12t - 5 \leqslant 0$, $(\forall)t > 0$, care este adevărată. Deci $m = 5$ este soluție; ii) $m \neq 5$. Atunci în mod necesar $m < 5$. Dacă $\Delta = (m + 1)^2 + m(m - 5) > 0$ trebuie ca $2m^2 - 3m + 1 > 0$, $m + 1 \geqslant 0$, $m > 0$, și astfel obținem $m \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 5)$. În cazul $\Delta \leqslant 0$ se obține $m \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Deci $m \in [0, 5]$ este soluția problemei.

3. Se duce paralela prin O la AB care intersectează pe (BC) în E și pe (AC) în D. Din asemănarea triunghiurilor DCE și ACB deducem $\frac{DC}{AC} = \frac{CE}{BC} = \frac{DE}{AB}$. De aici rezultă că $DE \leqslant CE \leqslant DC$. Pe de altă parte, $OB < OE + BE$ și $OA < OD + AD$. Deci $OA + OB + OC < AD + OD + OE + BE + OC$. Datorită faptului că $OC < \max(DC, CE) = DC$ se obține $OA + OB + OC < AC + DE + BE < AC + EC + BE = AC + BC$ și problema este rezolvată.

4. a) Dacă ducem prin C paralela la AB și notăm cu P punctul de intersecție al acestei paralele cu AD, din asemănarea triunghiurilor AFE și CEP, deducem $AF = \frac{1}{3} CP = \frac{1}{3} AB$ (deoarece $AB = CP$) (Se poate folosi și teorema lui Menelaus.) Dacă patrulaterul $BDEF$ este inscriptibil, atunci, exprimînd puterea punctului A față de cercul circumscris acestui patrulater, rezultă $3AD^2 = 2AB^2$. La fel dacă $AFDC$ este inscriptibil și exprimăm puterea punctului B față de cercul circumscris acestui patrulater, se obține $4AB^2 = 3BC^2$. Pe de altă parte, avem $4AD^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2$ (teorema medianei). Combinînd toate aceste relații se obține $AB = AC$. b) Punctul a admite mai multe reciproce dintre care menționăm următoarele: i) dacă $BDEF$ este patrulater inscriptibil și $AB = AC$, atunci patrulaterul $AFDC$ este inscriptibil; ii) dacă patrulaterul $AFDC$ este inscriptibil și $AB = AC$, atunci patrulaterul $BDEF$ este inscriptibil. Demonstrațiile reciprocelor se bazează pe relațiile stabilite la punctul a inversînd implicațiile.

Etapa finală

1. Prin calcul direct obținem următoarele echivalențe:

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leqslant 2 - \frac{x^a}{b} \quad (\forall)\, x \in (0, 1] \Leftrightarrow \frac{x^a}{b} \leqslant \frac{1-x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{x}{1+\sqrt{1-x}};$$

$$(\forall)x \in (0, 1] \Leftrightarrow \frac{x^{a-1}}{b} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} - \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{(1+\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1+x})},$$

$$(\forall)x \in (0, 1] \Leftrightarrow \frac{x^{a-2}}{b} \leqslant \frac{2}{(1+\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})},$$

$$(\forall)x \in (0, 1] \Leftrightarrow b \geqslant \frac{1}{2} x^{a-2}(1+\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}),$$

$(\forall)x \in (0, 1]$.

Să notăm $f(x) = (1 + \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1+x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$, unde $x \in [0, 1]$. Din inegalitățile $1 \leqslant 1 + \sqrt{1-x} \leqslant 2$, $2 \leqslant 1 + \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \sqrt{2}$, $1 \leqslant \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leqslant 1 + \sqrt{2}$ se deduce $2 \leqslant f(x) \leqslant 2(1 + \sqrt{2})^2$, $(\forall)\, x \in [0, 1]$. Dacă $a \geqslant 2$ obținem că $\frac{1}{2} x^{a-2} f(x) \leqslant 2(1 + \sqrt{2})^2 \frac{1}{2}$. Pentru a

satisface această inegalitate este suficient să luăm $b \geq (1+\sqrt{2})^2$. Dacă $0 < a < 2$ se ajunge la inegalitatea $x \geq \left(\frac{1}{b}\right)^{1/(2-a)}$ $(\forall)$ $x \in (0, 1]$, ceea ce este contradictoriu. În concluzie cel mai mic număr pozitiv este $a = 2$. Pentru $a = 2$ proprietatea din enunț este echivalentă cu $b \geq \frac{1}{2} f(x)$, $(\forall) x \in (0, 1]$. Să arătăm că funcția f este strict descrescătoare pe $[0, 1]$. Într-adevăr, funcția $g(x) = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$ este strict descrescătoare, deci și funcția $h(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ este strict descrescătoare. De asemenea, funcția $k(x) = (1+\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1+x}) = 1 + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2} = 1 + \sqrt{1-x^2} + h(x)$ este strict descrescătoare, deci și f este strict descrescătoare, ca produs de funcții strict descrescătoare și pozitive pe intervalul $[0, 1]$. Deci cel mai mic număr b este $b = \frac{1}{2} f(0) = 4$.

2 i) Presupunem că cele două trinoame au o rădăcină comună x_0. Scăzînd membru cu membru relațiile $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ și $ax_0^2 + dx_0 + e = 0$, găsim $(b-d)x_0 + (c-e) = 0$. Condiția din enunț conduce la $b \neq d$ și deci $x_0 = \frac{e-c}{b-d}$. Notînd primul trinom cu g și al doilea cu h, obținem $g(x_0) = a\left(\frac{e-c}{b-d}\right)^2 + b\,\frac{e-c}{b-d} + c = \frac{a(e-c)^2 - (b-d)(cd-be)}{(b-d)^2} < 0$, deci g și h nu au rădăcini comune. Deoarece $a > 0$ și $g(x_0) < 0$, trinomul g are două rădăcini reale și distincte. Analog, trinomul h are două rădăcini reale și distincte, deoarece $a > 0$ și $h(x_0) < 0$. Deci cele patru rădăcini ale trinoamelor sînt reale și diferite două cîte două; ii) Notînd $y = \frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 + dx + e}$ obținem ecuația $a(1-y)x^2 + (b-dy)x + c - ey = 0$ cu discriminantul $\Delta = (b-dy)^2 - 4a(1-y)(c-ey)$. Trebuie demonstrat că pentru orice $y \in \mathbf{R}$ avem

$$(d^2 - 4ac)y^2 - 2(bd - 2ac - 2ae)y + b^2 - 4ac \geq 0.$$

Deoarece $d^2 - 4ac > 0$ trebuie ca $(bd - 2ac - 2ae)^2 - (d^2 - 4ac)(b^2 - 4ac) \leq 0$ sau, echivalent, $4a(a(c-e)^2 - (cd-be)(b-d)) < 0$, inegalitate adevărată conform ipotezei.

3. Din enunț $\sigma[OQAM] = \sigma[OMBN] = \sigma[ONCP] = \sigma[OPDQ] = \frac{1}{4}\sigma[ABCD]$. Deci $\sigma[OQAM] + \sigma[OPDQ] = \sigma[OMBN] + \sigma[ONCP] = \frac{1}{2}\sigma[ABCD]$. Dar $\sigma[AMPD] = \sigma[MBCP] = \frac{1}{2}\sigma[ABCD]$. Să presupunem că $O \in \operatorname{Int}(AMPD)$. Atunci

$$\sigma[OQAM] + \sigma[OPDQ] < \sigma[AMPD] = \frac{1}{2}\sigma[ABCD],$$

contradicție. Cazul $O \in \operatorname{Int}(MBCP)$ se tratează analog. Deci $O \in [MP]$ și deci punctele O, M, P sînt coliniare.

4. Fie M un punct care îndeplinește condițiile din enunț și T_1, T_2 respectiv punctele de tangență cu cele două cercuri a două tangente duse din M la cele două

cercuri. Din ipoteză rezultă $\Delta T_1MO_1 \sim \Delta T_2MO_2$ și deci $\frac{MO_1}{MO_2} = \frac{R_1}{R_2} = k$. Presupunînd de exemplu că $R_1 \leqslant R_2$ deducem că parametrul $k \in (0, 1]$. De asemenea, punctele O_1 și O_2 sînt fixe, iar M este exterior celor două cercuri. Fie $P = \left\{ M \,\middle|\, \frac{MO_1}{MO_2} = k \right\}$. Locul geometric căutat este $L = P \setminus (\bar{\mathcal{C}}_1 \cup \bar{\mathcal{C}}_2)$, unde $\bar{\mathcal{C}}_i$ este discul de centru O_i și rază R_i, $i = 1, 2$. Trebuie să mai determinăm mulțimea P. În cazul $k = 1$, mulțimea P este mulțimea punctelor mediatoarei segmentului $[O_1O_2]$. Presupunem $0 < k < 1$ și considerăm punctele $A_1, A_2 \in O_1O_2$ astfel încît $\frac{O_1A_i}{O_2A_i} = k$ pentru $i = 1, 2$. Putem considera, de exemplu, că $A_1 \in (O_1O_2)$ și $O_1 \in (A_2O_2)$. Este clar că $A_1, A_2 \in P$. Fie $M \in P \setminus O_1O_2$. Din teorema bisectoarei pentru triunghiul MO_1O_2 rezultă că $[MA_1$ este bisectoare interioară, iar $[MA_2$ este bisectoare exterioară. Deci $MA_1 \perp MA_2$, ceea ce demonstrează că M aparține cercului de diametru $[A_1, A_2]$. Reciproc, să presupunem că M aparține cercului de diametru $[A_1A_2]$ și să demonstrăm că $M \in P$. Cazurile $M = A_1$ sau $M = A_2$ sînt evidente. Să considerăm cazul cînd $M \notin O_1O_2$. Construim $O_1E \parallel A_2M$ și $O_1F \parallel MA_1$, cu E, F pe dreapta O_2M. Rezultă că $\frac{ME}{MO_2} = \frac{A_2O_1}{A_2O_2} = \frac{A_1O_1}{A_1O_2} = \frac{MF}{MO_2}$, de unde se deduce $ME = MF$. Deoarece MO_1 este mediană în triunghiul dreptunghic O_1EF, obținem $O_1M = MF = ME$ și deci $\frac{MO_1}{MO_2} = \frac{ME}{MO_2} = k$. În concluzie $M \in P$ și deci P este mulțimea punctelor cercului de diametru $[A_1A_2]$. Pozițiile punctelor A_1 și A_2 depind numai de raportul razelor și de pozițiile punctelor O_1 și O_2. De aceea locul geometric poate fi întregul cerc de diametru $[A_1A_2]$ sau o parte a sa (eventual mulțimea vidă).

Anul 1990

Etapa județeană

1. Discriminantul ecuației trebuie să fie pătrat perfect, adică $\Delta = (a^2 + b^2)^2 - 4ab = k^2$, $k \in \mathbf{N}$. Dacă $ab > 0$, atunci $k \leqslant a^2 + b^2 - 1$ și obținem $(a^2 + b^2)^2 - 4ab \leqslant (a^2 + b^2 - 1)^2 \Leftrightarrow 2(a - b)^2 \leqslant 1$, adică $a = b$. În acest caz $\Delta = 4a^2(a^2 - 1)$, de unde deducem că $a^2 - 1 = m^2$, cu $m \in \mathbf{N}$, relație care are loc dacă și numai dacă $a \in \{-1, 1\}$. Deci $a = b = 1$ sau $a = b = -1$, cazuri în care ecuația are rădăcini întregi. Dacă $ab < 0$, atunci $k > a^2 + b^2 + 1$ și prin urmare $(a^2 + b^2)^2 - 4ab \geqslant (a^2 + b^2 + 1)^2 \Leftrightarrow 2(a + b)^2 + 1 < 0$, ceea ce este imposibil. Prin urmare ecuația are rădăcini întregi dacă și numai dacă $a = b = 1$ sau $a = b = -1$.

Altă soluție. Fie u, v soluțiile întregi ale ecuației date. Avem $u + v = a^2 + b^2$ și $uv = ab$. Din aceste relații deducem (1) $u + v \geqslant 2uv$, (2) $u + v \geqslant -2uv$. Dacă $ab > 0$, atunci $u, v \in \mathbf{N}^*$ și avem $2uv = uv + uv \geqslant u + v$, cu egalitate dacă $u = v = 1$. Ținînd seama de (1) obținem $u = v = 1$ și apoi, imediat, $a = b = 1$ sau $a = b = -1$. Dacă $ab < 0$, atunci $u < 0$, $v > 0$ și $v > |u|$. În aceste condiții deducem $u + v < v < 2v \leqslant -2uv$, ceea ce contrazice (2). Prin urmare avem $a = b = 1$ sau $a = b = -1$.

2. Vom folosi relația evidentă (1) $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$. Dacă în enunț schimbăm x cu y obținem $f(y + x) = \max(f(y), x) + \min(f(x), y)$, relație

pe care o adunăm cu cea din enunț și deci, folosind relația (1), deducem $2f(x+y) = x + y + f(x) + f(y)$. Pentru $y = 0$ rezultă $f(x) = x + f(0)$ și deci, notînd $f(0) = a \in \mathbf{R}$, deducem $x + y + a = \max(x + a, y) + \min(y + a, x)$. Dacă aici punem $x = 0$ și $y = -a$ obținem $0 = \max(a, -a) + 0$, de unde deducem $a = 0$. În concluzie $f(x) = x$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

3. Fie M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[DC]$ și O intersecția diagonalelor. Presupunem că AB este paralelă cu CD și demonstrăm că M, N, O sînt coliniare. Din asemănarea triunghiurilor DOC și AOB deducem $\frac{NC}{AM} = \frac{OC}{OA}$ și $\widehat{DCO} \equiv \widehat{AOM}$. Prin urmare și triunghiurile NOC și MOA sînt asemenea, de unde rezultă $\widehat{NOC} \equiv \widehat{MOA}$. Din această ultimă relație se deduce imediat că punctele M, O, N sînt coliniare. Reciproc, presupunem că M, O, N sînt coliniare și să arătăm că AB și CD sînt paralele. Prin absurd, presupunem că AB nu este paralelă cu CD. Ducem AE paralelă cu CD, $E \in (BD)$ și fie P mijlocul lui $[AE]$. Conform primei părți a demonstrației rezultă că N, O, P sînt coliniare, ceea ce probează că punctele M, O, N, P sînt coliniare. Deoarece MP este paralelă cu BE (linie mijlocie) ajungem la o contradicție și deci problema este rezolvată.

4. a) Notăm $BA' = x$, $CB' = y$, $AC' = z$ și avem:

$$BM^2 - CM^2 = x^2 - (a - x)^2,$$
$$CM^2 - AM^2 = y^2 - (a - y)^2,$$
$$AM^2 - BM^2 = z^2 - (a - z)^2.$$

Prin însumarea acestor relații obținem imediat $x + y + z = \frac{3}{2}a$. b) Cu notațiile de la punctul precedent condiția de concurență (teorema lui Ceva) este

$$(1)\quad \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{a-y} \cdot \frac{z}{a-z} = 1 \Leftrightarrow xyz = a^3 - a^2(x + y + z) + a(xy + yz + zx) - xyz.$$

Folosind faptul că $2(x + y + z) = 3a$, egalitatea (1) devine

$$4xyz - 2a(xy + yz + zx) + a^3 = 0 \Leftrightarrow 8xyz - 4a(xy + yz + zx) + 2a^2(x + y + z) -$$
$$- a^3 = 0 \Leftrightarrow (2x - a)(2y - a)(2z - a) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \text{ sau } y = \frac{a}{2} \text{ sau } z = \frac{a}{2},$$

ceea ce este echivalent cu faptul că M se află pe una din înălțimi.

Etapa finală

1. Vom demonstra mai întîi că sistemul

$$y + z + t = p,$$
$$y^2 + z^2 + t^2 = q,$$

unde $p, q \in \mathbf{R}$ are soluții reale dacă și numai dacă $p^2 \leqslant 3q$. Într-adevăr, dacă sistemul are soluția (y_0, z_0, t_0), atunci $p^2 = (y_0 + z_0 + t_0)^2 \leqslant 3(y_0^2 + z_0^2 + t_0^2) = 3q$. Reciproc, dacă $p^2 \leqslant 3q$, sistemul are soluția

$$y = z = \frac{1}{3}\left(p + \sqrt{\frac{3q - p^2}{2}}\right),\quad t = \frac{1}{3}\left(p - 2\sqrt{\frac{3q - p^2}{2}}\right).$$

Mulțimea cerută, pe care o notăm M, este mulțimea valorilor lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul format din ecuațiile $y + z + t = a - m$ și $y^2 + z^2 + t^2 = b - m^2$ are

soluții reale, deci conform rezultatului anterior avem $m \in M \Leftrightarrow (a-m)^2 \leqslant 3(b-m^2) \Leftrightarrow 4m^2 - 2am + a^2 - 3b \leqslant 0$. Deoarece $\Delta = 12(4b - a^2)$, distingem cazurile: i) $b < \frac{a^2}{4}$; rezultă $M = \emptyset$; ii) $b \geqslant \frac{a^2}{4}$ și $M = \left[\frac{a - \sqrt{3(4b - a^2)}}{4}, \frac{a + \sqrt{3(4b - a^2)}}{4}\right]$.

2. Pentru $x \neq 0$, obținem $\left|a + b\frac{1}{x} + c\frac{1}{x^2}\right| \leqslant \left|c + b\frac{1}{x} + a\frac{1}{x^2}\right|$, deci $|a + by + cy^2| \leqslant |c + by + ay^2|$, $(\forall) y \in \mathbf{R}^*$. Astfel rezultă că $|ax^2 + bx + c| = |cx^2 + bx + a|$ $(\forall) x \in \mathbf{R}^*$. Considerînd un interval nedegenerat I pe care trinoamele $ax^2 + bx + c$ și $cx^2 + bx + a$ au semne constante, obținem că $ax^2 + bx + c = cx^2 + bx + a$, $(\forall) x \in I$, sau $ax^2 + bx + c = -cx^2 - bx - a$, $(\forall) x \in I$. În primul caz se obține $a = c$ și $b \in \mathbf{R}$, iar în al doilea caz $a = -c$ și $b = 0$ și ambele variante verifică ipoteza. *Alte soluție.* Ipoteza este echivalentă cu $(cx^2 + bx + a)^2 - (ax^2 + bx + c)^2 \geqslant 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, sau $(c - a)(x^2 - 1)((a + c)x^2 + 2bx + a + c) \geqslant 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Sînt posibile cazurile: i) $c = a$ și $b \in \mathbf{R}$; ii) $c \neq a$ și $f(x) = (x^2 - 1)((a + c)x^2 + 2bx + a + c) \geqslant 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ (respectiv $f(x) \leqslant 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$). Dacă $a + c \neq 0$, cele două trinoame trebuie să aibă aceleași rădăcini, deci $\frac{a + c}{a + c} = \frac{-1}{1}$, imposibil. Dacă $a + c = 0$, $f(x) = 2bx(x^2 - 1)$, deci $b = 0$.

3. Fie $AM \perp BC$, $A_2N \perp BC$ $(M, N \in BC)$. Deoarece $\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{AM}{A_2N}$, valoarea minimă a acestui raport se obține atunci cînd A_2N este maxim, adică atunci cînd A_2 este mijlocul arcului $\widehat{BC}$ care nu îl conține pe A, deci cînd $(AA_1$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Deci valoarea minimă a sumei date se obține atunci cînd $(AA_1$, $(BB_1$, $(CC_1$ sînt bisectoarele triunghiului ABC, care evident sînt concurente.

4. Fie Q' simetricul lui Q față de d. Deoarece $PX + XQ = PX + XQ' \geqslant PQ'$, $(\forall)$ $X \in$ d, deducem că $f(P, Q) = PQ'$. Astfel, locul geometric cerut este mulțimea L a punctelor din S pentru care $MA' = MB'$ (A', B' fiind simetricele punctelor A și B față de d). Dacă $A' = B'$ (deci $A = B$), atunci $L = S$. Dacă $A' \neq B'$ și $A'B' \perp$ d (deci $A \neq B$, $AB \perp$ d), atunci $L = \emptyset$. Dacă nu are loc una dintre situațiile precedente, L este semidreapta obținută prin intersecția mediatoarei segmentului $(A'B')$ cu semiplanul S.

CLASA A X-A

Anul 1950

Etapa I

1. a) $BD = R \sin x$, $DD' = R \sin x \cos x$, $AE' = 2R \cos^2 x$. b) $\frac{\pi R^3}{2} \sin^2 2x$.

c) $x = \frac{\pi}{4}$.

2. $x_1 = \pm \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $x_2 = k\frac{\pi}{9}$, $x_3 = \pm\pi + 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Etapa a II-a

1. b) $\frac{4a^2(7+\sqrt{3})}{9}$, $\frac{19}{27}a^3$; c) $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$; d) $\frac{2a\sqrt{3}}{9}$.

2. Se notează cu x distanța și cu α măsura unghiului sub care se vede soclul. Din relațiile $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}}$ și $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}$ rezultă $x = b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ și $\sin\alpha = \sqrt{\frac{a-b}{2a}}$. Dacă se notează cu h distanța dintre cele două poziții se obține $h = a\sqrt{\frac{a-b}{2a}}$.

Anul 1951

Etapa I

1. $\frac{4\pi h^3}{3}$.

Etapa a II-a

1. a) Presupunem că unghiurile $\widehat{BCM}$ și $\widehat{BCN}$ sînt ascuțite. Fie P un punct pe semidreapta $[CB$. Din P se duc perpendiculare pe BC în cele două semiplane care intersectează semidreptele $[CM$ și $[CN$ în M_1 respectiv N_1.

Avem

(1) $$M_1N_1^2 = M_1C^2 + N_1C^2 - 2M_1C \cdot N_1C \cos \varphi,$$

(2) $$M_1N_1^2 = M_1P^2 + N_1P^2.$$

Dar (3) $M_1P = M_1C \sin \alpha$ și $N_1P = N_1C \sin \beta$. Din (1), (2) și (3) se obține

$$(M_1C \cos \alpha - N_1C \cos \beta)^2 + 2M_1C \cdot N_1C(\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) = 0.$$

Deoarece $PC = M_1C \cos \alpha = N_1C \cos \beta$ rezultă relația dată. Dacă unghiurile $\widehat{BCM}$ și $\widehat{BCN}$ sînt ambele obtuze se alege P pe semidreapta $[CA$. Dacă unul este ascuțit și celălalt obtuz, atunci se înlocuiește unul din semiplane cu semiplanul complementar. Dacă unul dintre unghiuri este drept, relația este evidentă. b) În acest caz relația (2) de la punctul precedent devine

$$M_1N_1^2 = M_1P^2 + N_1P^2 - 2M_1P \cdot N_1P \cos \gamma.$$

Restul raționamentului se păstrează și se obține

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \cos \varphi.$$

Anul 1952

Etapa I

1. a) $a = \sqrt{3} \cdot \sqrt{l^2 - h^2}$. Pentru $h=0$, $a = l\sqrt{3}$ este latura triunghiului echilateral în funcție de raza cercului circumscris; b) $u = 2 \arcsin \frac{a}{2l}$; $u = \frac{\pi}{2}$ cînd $a = l\sqrt{2}$ și atunci $l = h\sqrt{3}$; c) $u = 2 \arcsin \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{l^2 - h^2}}{2l}$; u este maxim cînd $h = 0$ și $u_{max} = \frac{2\pi}{3}$; d) $\cos v = \frac{3h^2 - l^2}{3h^2 + l^2}$; $v = \frac{\pi}{2}$ pentru $l = h\sqrt{3}$, caz în care se obține un tetraedru tridreptunghic.

Etapa a II-a

1. a) AD este perpendiculară pe planul (VBC) și BE este perpendiculară pe planul (VAC). b) Este perpendiculară pe $[VA]$ și $[VB]$. d) $OP = \frac{a\sqrt{15}}{15}$.

Anul 1954

Etapa I

1. (1) $$\frac{\sigma[ABC]}{\sigma[ACG]} = \frac{\sigma[ACD] + \sigma[ABD]}{\sigma[ACD] + \sigma[CDG]} = \frac{1 + \frac{BD}{DC}}{1 + \frac{DG}{AD}} = p, \quad AC = 2R \cos x,$$

$AD = \frac{\sqrt{3}}{2} R$, $CD^2 = \frac{R^2}{4}(1 + 8 \sin^2 x)$, $BD = \frac{AD \cdot DG}{CD} = \frac{3}{4} \frac{R^2}{CD}$. Înlocuind în (1) se obține $\sin^2 x = \frac{3 - p}{2(4p - 3)}$ și $p \in (1, 3)$.

Etapa a II-a

1. $B = \arccos \frac{a}{2b}$, $c = \frac{a^2 - b^2}{b}$.

2. a) C_{10}^{20}. b) $20! = 2^{18} \cdot 5^4 \cdot n \cdot 40 \cdot 39 \ldots 21 = 2^{21} \cdot 5^5 \cdot m$, unde m și n nu au divizorii 2 și 5. Rezultă $C_{10}^{20} = 2^3 \cdot 5 \cdot k$, și deci se termină cu un zero. c) Produsul $n \cdot m$ cînd $n+m=2k+1$ este maxim pentru $n=k$, $m=k+1$; 12 cifre.

3. Se notează cu E piciorul perpendicularei coborîte din A pe planul (BCD). Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că unghiurile $\widehat{EBD}$ și $\widehat{ECD}$ sînt drepte, deci patrulaterul $BCDE$ este inscriptibil.

Anul 1955

Etapa regională

1. a) Punînd condiția ca discriminantul ecuației în x să fie nenegativ, se găsește $y^2 - 2y - 11 \leqslant 0$, deci $y \in [1 - 2\sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}]$. c) $y_{min} = 1 - 2\sqrt{3}$ pentru $x = 3 - \sqrt{3}$ și $y_{max} = 1 + 2\sqrt{3}$ pentru $x = 3 + \sqrt{3}$.

2. $m(\hat{A}) = 120^0$ și $BD = 3\sqrt{31}$ m.

Etapa finală

1. a) Se notează $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ și $m(\widehat{COD}) = \beta$ și se obține sistemul

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

$$2\sqrt{2}\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 1,$$

cu soluțiile care convin problemei $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, deci triunghiul AOB este echilateral și $[CD]$ este latura dodecagonului înscris în cerc. Rezultă $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, $CD = \sqrt{3} - 1$; b) Se generează două conuri și un trunchi de con. Aria este egală cu $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6})$; c) Volumul este $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}(7 + 2\sqrt{3})$.

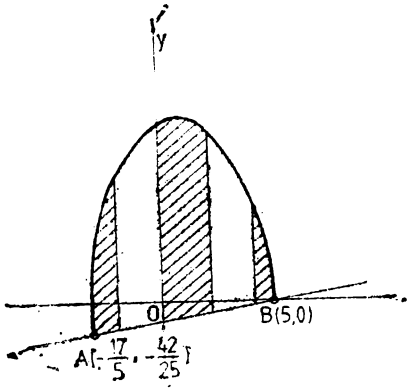


Fig. 19

2. Soluțiile sistemului se găsesc în reuniunea celor trei domenii definite de inegalitățile: $x \in \left[-\frac{17}{5}, -2\right)$ și $\frac{x}{5} - 1 < y \leqslant \frac{1}{2}(-x^2 + 2x + 15)$; $x \in [0, 2)$ și $\frac{x}{5} - 1 < y \leqslant \frac{1}{2}(-x^2 + 2x + 15)$; $x \in [4, 5]$ și $\frac{x}{5} - 1 < y \leqslant \frac{1}{2}(-x^2 + 2x + 15)$. Punctele corespunzătoare se găsesc în domeniul haşurat din fig. 19, în care se includ punctele situate pe

parabola de ecuație $y = \frac{1}{2}(-x^2 + 2x + 15)$ și pe dreptele $x = 0$ și $x = 4$, dar nu se includ punctele dreptelor $x - 5y = 5$, $x = 2$, $x = -2$.

3. Un hexagon cu muchiile opuse paralele două cîte două.

Anul 1956

Etapa regională

1. a) $xy = 2x + 8y$; b) $PN = (y^2 + 6y)/(y - 2) = (x^2 - 6x)/(x - 8)$; c) Punînd condiția $-7 < (y^2 + 6y)/(y - 2) < 2$ obținem $y \in (-14, -2) \cup (-2, 1)$. Dacă $PN = 2$ se deduce $y_{1,2} = -2$ și pentru $PN = -7$ găsim $y_{3,4} = -14; 1$; d) $PN = 0$ pentru $y = 0$ și pentru $y = -6$. Cînd $y = 2$ dreptele MA și Ox sînt paralele.

2. Se notează cu D' proiecția lui D pe diametrul $[AB]$ și fie $BD' = x$. Volumul corpului generat prin rotirea suprafeței $(CBDC)$ se compune din suma volumelor unui con și al unei calote sferice și este egal cu $\frac{4\pi x}{3}(30 - x)$. Volumul corpului generat prin rotirea suprafeței $(ACDA)$ este deci egal cu

$$\frac{4\pi 6^3}{3} - \frac{4\pi x}{3}(30 - x) = \frac{4\pi}{3}(216 - 30x + x^2).$$

Condiția problemei ne conduce la ecuația $x^2 - 30x + 81 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 3$ și $x_2 = 27$. Convine soluția $x_1 = 3$ cm. b) $\sigma(COD) = 6\sqrt{3}$ cm^2.

3. Se face substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ și se obține ecuația $\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = 2 - t$. Ținînd seama de definiția funcției modul se obțin ecuațiile $t^2 = 3$ pentru $(t-1)(t+1) \geqslant 0$ și $t^2 - 2t - 1 = 0$ pentru $(t-1)(t+1) \leqslant 0$. Soluția $\sqrt{2} + 1$ nu verifică condiția pusă, deci mai rămîn soluțiile: $t_1 = \sqrt{3}$, $t_2 = -\sqrt{3}$, $t_3 = 1 - \sqrt{2}$. Ecuația în x are soluțiile: $x = \frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi$, $x = \frac{-2\pi}{3} + 2k_2\pi$, $x = 2\operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2}) + 2k_3\pi$, unde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$.

Etapa finală

1. Se obțin relațiile: $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 1$; $(x_1 - x_2)x_3 + (x_1 - x_2)x_4 + x_1x_2 + x_3x_4 = \frac{a}{4}$; $x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -\frac{27}{4}$; $x_1x_2x_3x_4 = \frac{9}{2}$. Notînd $x_1x_2 = u$, $x_3x_4 = v$ se obține sistemul $u + v = -\frac{27}{4}$, $uv = \frac{9}{2}$, cu soluțiile $u = -6$, $v = -\frac{3}{4}$; $u = -\frac{3}{4}$, $v = -6$. Deducem că $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -6$ și $x_3 + x_4 = 1$, $x_3x_4 = -\frac{3}{4}$. Deci rădăcinile ecuației sînt -2, 3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ și $a = -23$.

2. Ecuația se scrie

$$\frac{1-\cos(2x+2a)}{2}=\frac{\cos(2b-2c)-\cos(2x+2b+2c)}{2} \text{ de unde}$$

$$\sin(2x+a+b+c)=\frac{\sin^2(b-c)}{\sin(b+c-a)}.$$

Ecuația are soluție dacă $\left|\frac{\sin^2(b-c)}{\sin(b+c-a)}\right|\leqslant 1$. În cazul particular avem $\sin(2x+50^\circ)=\frac{1}{2}$ cu soluțiile $x=50^\circ+180^\circ k_1$, $x=-10^\circ+180^\circ k_2$, $k_1, k_2\in\mathbf{Z}$. Dacă $\sin(b+c-a)=0$ atunci: 1) dacă $\sin(b-c)\neq 0$ ecuația nu are soluții; 2) dacă $\sin(b-c)=0$, atunci orice $x\in\mathbf{R}$ este soluție.

3. a) Fie A', B' proiecțiile punctelor A, respectiv B pe planul (P) și $AA'=a$, $BB'=b$. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice AMA' și BMB' se deduce $\frac{MA'}{MB'}=\frac{a}{b}$. Deci locul geometric al punctului M este cercul de diametru $[CD]$, unde C, D sînt cele două puncte, unul interior și celălalt exterior, care împart segmentul $[A'B']$ în raportul $\frac{a}{b}$ *(cercul lui Apollonius)*. b) Dacă $m(\widehat{AMB})=90^\circ$, punctul M aparține cercului $\mathcal{C}_1$ de secțiune a sferei de diametru $[AB]$ cu planul (P). Deci M se găsește la intersecția dintre cercul $\mathcal{C}_1$ și cercul cu diametrul $[CD]$ (două puncte simetrice față de $A'B'$ sau unul singur pe $A'B'$ sau nici unul). c) Se ține seama că $\mathcal{C}_1$ are centrul în mijlocul lui $[A'B']$ și se găsește $d\geqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}$. Într-adevăr, notînd cu O' proiecția centrului sferei de diametru $[AB]$ pe planul (P) și cu F punctul de intersecție al acestei sfere cu dreapta $A'B'$, situat de aceeași parte cu C și D față de mijlocul segmentului $[A'B']$, trebuie să avem $O'F\geqslant O'C$. Dar $O'F=\frac{1}{2}\sqrt{d^2-(a+b)^2}$ și

$$O'C=A'C-A'O'=\frac{a}{a+b}A'B'-\frac{1}{2}A'B'=\frac{a-b}{2(a+b)}\sqrt{d^2-(a-b)^2}$$

Făcînd calculele se obține $d\geqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}$, condiție care implică de asemenea $d\geqslant a+b$, deci existența punctului F în planul (P) este asigurată.

Anul 1957

Etapa regională

1. a) Dacă notăm $m(\widehat{ACM})=\theta$ se obține $m(\widehat{AMC})=45^\circ-\theta$ și $m(\widehat{AMB})=\alpha+\theta=45^\circ-\theta$ deoarece $\alpha=45^\circ-2\theta$. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiurile AMC și AMB se deduce $AC=\frac{l\sin(45^\circ-\theta)}{\sin\theta}$ și $AB=\frac{l\sin(45^\circ-\theta)}{\cos\theta}$ care, înlocuite în relația $AC-AB=l\sqrt{2}$ conduc la ecuația $\sin 2\theta=\frac{1}{2}$, deci $\theta=15^\circ$. Rezultă $m(\widehat{MBA})=75^\circ$, $m(\widehat{AMC})=m(\widehat{AMB})=30^\circ$, $\alpha=15^\circ$;

b) Deoarece $\theta = 15°$ se obține $AC = 2l\cos 15° = \frac{l(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$; $AB = 2l\sin 15° = \frac{l(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$.

2. a) $V = \frac{abc}{6}$. b) $\frac{6}{27}$. c) $h = \frac{2abc}{\sqrt{(m+n+p)(m+n-p)(m-n+p)(n+p-m)}}$, unde $m = \sqrt{a^2+b^2}$, $n = \sqrt{b^2+c^2}$, $p = \sqrt{a^2+c^2}$. d) Aplicînd teorema lui Stewart se deduce $OG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, iar cu teorema cosinusului obținem

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

unde α, β, γ sînt măsurile unghiurilor formate de $[OG]$ cu muchiile $[OA]$, $[OB]$, respectiv $[OC]$ ale piramidei.

3. Se substituie în $E: x^3 = 1 - x$, $x^4 = x - x^2$, $x^5 = x^2 + x - 1$ și se obține $E = 3$.

Etapa finală

1. $P(x) = (x^2+x+5)(x^3+mx^2+nx+p)+3x+2$. Punînd condițiile $P(1) = 5$, $P(-2) = -4$ și $P(-3) = 4$, se deduc valorile $m = \frac{17}{4}$, $n = \frac{5}{4}$, $p = -\frac{13}{2}$ deci $P(x) = x^5 + \frac{21}{4}x^4 + \frac{21}{2}x^3 + 16x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{61}{2}$. Obținem

$$P(x) - 3x - 2 = (x^2+x+5)(x-1)(x+2)\left(x+\frac{13}{4}\right)$$

deoarece $Q(1) = Q(-2) = 0$, unde $Q(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$.

2. a) Se obține $2R(\sin B + \sin C) = l$, de unde $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{l}{a}\sin\frac{A}{2}$. Trebuie ca $l > a$ și $\frac{l}{a}\sin\frac{A}{2} \leqslant 1$. Se deduce: $m(\hat{B}) = 90° - m\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + \arccos\left(\frac{l}{a}\sin\frac{A}{2}\right)$ și $m(\hat{A}) = 90° - m\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) - \arccos\left(\frac{l}{a}\sin\frac{A}{2}\right)$, $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$. De asemenea, $\sigma(ABC) = 2R^2\left(\frac{l^2}{a^2}-1\right)\sin A\sin^2\frac{A}{2}$; $r = \frac{2S}{a+l} = \frac{4R^2}{a^2}(l-a)\sin A\sin^2\frac{A}{2}$.

b) Fie $D \in (CA$ astfel încît $AD = c$. Se obține $m(\widehat{BDC}) = \frac{A}{2}$. Punctul D se determină prin intersecția arcului capabil de unghiul cu măsura $\frac{A}{2}$ construit pe $[BC]$ cu cercul cu centrul în C de rază $l = b + c$. Aceste două cercuri se intersectează în unul sau două puncte dacă și numai dacă $l \leqslant 2R_1 = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}}$, unde R_1 este raza cercului din care face parte arcul capabil de unghiul $\frac{A}{2}$ care se spri-

jină pe $[BC]$. Din inegalitatea triunghiului se mai deduce că $l > a$. Punctul A se găsește pe $[CD]$ astfel încît $AC = b$. c) Se obține $m(\hat{B}) = 105°$, $m(\hat{C}) = 15°$, $b = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cos 15° = \frac{a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2\sqrt{3}}$, $c = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin 15° = \frac{a(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2\sqrt{3}}$.

3. a) Dacă notăm $BC = a$, $CD = b$, $BD = c$, $AD = \alpha$, $AB = \beta$, $AC = \gamma$ și cu M intersecția bisectoarelor unghiurilor $\widehat{BAC}$ și $\widehat{BDC}$, din teorema bisectoarei rezultă $\frac{b}{c} = \frac{\gamma}{\beta}$ sau $\beta b = \gamma c$. Relația se mai scrie $\frac{c}{\beta} = \frac{b}{\gamma}$, ceea ce arată că și bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABD}$ și $\widehat{ACD}$ intersectează muchia $[AD]$ în același punct. b) Se obține analog $\gamma c = \alpha a$, deci $\alpha a = \beta b = \gamma c$, ceea ce demonstrează că oricum am considera două muchii oarecare, bisectoarele unghiurilor opuse muchiei comune sînt concurente pe acea muchie. c) Tetraedrele cu proprietățile de la punctele a și b sînt caracterizate prin proprietatea că produsul lungimilor muchiilor opuse este constant. Reciproca este adevărată, deoarece raționamentul este valabil și în sens invers. d) Fie punctele L și L' pe $[BD]$ astfel încît ML este paralelă cu CD și NL' este paralelă cu AB. Deducem $\frac{LB}{LD} = \frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}$ și $\frac{L'B}{L'D} = \frac{NA}{ND} = \frac{\beta}{\gamma}$. Condiția necesară și suficientă pentru ca dreptele MN, ML și NL' să fie coplanare este ca $L = L'$, adică $\beta b = c^2$. Dar $\beta b = \gamma c = c^2$ deoarece $AC = BD$. Deci planul (MNL') este paralel cu AB și CD.

Anul 1958

Etapa regională

1. a) Plecînd de la identitatea $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$, valabilă pentru orice $p > 0$, deducem

$$P(x) = \frac{1}{n-1} x^n + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) x^{n-1} + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2}\right) x^{n-2} + \ldots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) x^3 +$$

$$+ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) x^2 - 1 = \frac{x^{n-1}}{n-1}(x-1) + \frac{x^{n-2}}{n-2}(x-1) + \ldots + \frac{x^2}{2}(x-1) + x^2 - 1.$$

b) Citul este egal cu $1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k}$

2. a) Ariile bazelor sînt $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, respectiv $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, iar lungimea m a muchiei laterale $m = \frac{a-b}{2\cos c}$. Proiectînd vîrful A' și centrul O' al bazei mici pe planul (ABC) al bazei mari deducem lungimea înălțimii trunchiului de piramidă

$$h^2 = m^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{(a-b)^2(3 - 4\cos^2 c)}{12\cos^2 c},$$

deci volumul $V = \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{3 - 4\cos^2 c}}{24\cos c}$. b) Trebuie ca $3 - 4\cos^2 c > 0$

sau $0 < \cos c < \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\frac{\pi}{6} < c < \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{pentru } c = \frac{\pi}{2}\right.$ trunchiul de piramidă devine prismă dreaptă$\left.\right)$. c) Relația $m = \frac{a-b}{2\cos c}$ rămîne adevărată, dar razele cercurilor circumscrise bazelor sînt $R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ și $r = \frac{b}{2\sin\frac{\pi}{n}}$, deci

$$h = \frac{(a-b)\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{n} - \cos^2 c}}{2\cos c\sin\frac{\pi}{n}}.$$ Trebuie ca $\sin^2\frac{\pi}{n} > \cos^2 c$ sau $0 < \cos c < \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$, adică $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} < c < \frac{\pi}{2}$.

3. a) $\operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{ctg} 15^\circ = 1$ și la fel $\operatorname{tg} 35^\circ \operatorname{tg} 55^\circ = 1$. b) $\operatorname{tg}(85^\circ + x) = \operatorname{ctg}(5^\circ - x)$ și $\operatorname{tg}(65^\circ + 2x) = \operatorname{ctg}(25^\circ - 2x)$, deci ecuația devine $\operatorname{tg}(45^\circ - 3x)\operatorname{tg} kx = 1$ sau $\operatorname{tg} kx = \operatorname{tg}(45^\circ + 3x)$, cu soluțiile $x = \frac{4n+1}{k-3}45^\circ$ $(n \in \mathbf{Z})$ pentru $k \neq 3$. Pentru $k = 3$ ecuația nu are soluții.

4. Se obține $3625 = 5^3 \cdot 29$. Pentru $n = 0$, $E = 0$, deci proprietatea se verifică. Dacă $n \geqslant 1$, $E = 5^{n+2}(7^{2n} - 2^{2n}5^n)$ și E se divide cu 5^3. De asemenea, $7^{2n} - 2^{2n}5^n = 49^n - 20^n = 29(49^{n-1} + 49^{n-2} \cdot 20 + \ldots + 20^{n-1})$, deci E se divide și cu 29.

Etapa finală

1. a) Deoarece $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$ este suficient să arătăm că $(x-1)P(x)$ este divizibil cu $x^4 - 1$. Înlocuind pe x^4 cu 1 în polinomul $(x-1)P(x)$ se obține zero. O altă demonstrație constă în a arăta că $P(x)$ admite rădăcinile $x_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$ pentru $k = 1, 2, 3$, care sînt rădăcini complexe de ordinul 4 ale unității, ceea ce rezultă prin calcul direct, ținînd seama de relațiile lui Viète pentru ecuația $x^4 - 1 = 0$. b) $Q(x) = x^{nm_1} + x^{nm_2+1} + \ldots + x^{nm_n+n-1}$, unde $m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{N}$. c) $P(x)$ este de gradul 9 pentru $m_2 = 2$, $m_3 = 0$ sau 1, $m_4 = 0$ sau 1, $m_1 = 0$, 1 sau 2. Rezultă 12 ecuații de gradul 9. Două dintre ele sînt $x^9 + x^8 + x^7 + x^6 = x^6(x+1)(x^2+1) = 0$ și $x^9 + x^7 + x^6 + x^4 = x^4(x^2 + x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$, care se rezolvă în modul cunoscut.

2. Să notăm cu a măsura unghiului diedru pe care îl face o față a piramidei cu planul bazei, cu R lungimea razei cercului circumscris bazei, cu a_n, A_n lungimile apotemei poligonului de bază, respectiv a apotemei piramidei, cu I lungimea înălțimii piramidei și cu σ aria poligonului de bază. Avem $\sigma = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$, $A_n = \frac{a_n}{\cos a}$, aria laterală este $\frac{\sigma}{\cos a}$, deci $s = \sigma\frac{1+\cos a}{\cos a} = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\frac{1+\cos a}{\cos a}$. Dar $I = a_n \operatorname{tg} a = R\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg} a$ și deci $V = \frac{\sigma I}{3} = \frac{n}{6}R^3\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg} a$. Eliminînd pe R între expresiile pentru s și V se obține

$$\frac{s^3}{V^2} = \frac{9n}{2}\,\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}(1+\cos a)^3}{\cos^2\frac{\pi}{n}\cos a\sin^2 a}.$$

Notînd $k = \dfrac{2s^3 \cos^2 \frac{\pi}{n}}{9V^2 n \sin \frac{2\pi}{n}}$ se deduce că $\dfrac{(1+\cos a)^2}{\cos a\,(1-\cos a)} = k$, de unde rezultă ecuația $(1+k)\cos^2 a + (2-k)\cos a + 1 = 0$ cu soluțiile $\cos a = (k-2 \pm \sqrt{k(k-8)})/2(k+1)$. Deoarece $k > 0$ trebuie ca să avem $k \geqslant 8$, cînd ambele rădăcini sînt pozitive, iar cea mai mare dintre ele, $(k-2+\sqrt{k(k-8)})/2(k+1) < 1$. Pentru $k > 8$ se obțin două valori $\cos a_1$, $\cos a_2 > 0$ și $a_1, a_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a_1 \neq a_2$. Pentru $k = 8$ se obține $\cos a = \frac{1}{3}$, deci problema are două soluții numai în cazul cînd $k > 8$, adică $a \neq \arccos \frac{1}{3}$. Este clar că pentru s și n dați există cel puțin o piramidă regulată cu n laturi și arie totală egală cu s, deoarece k poate fi făcut mai mare sau egal cu 8 alegînd volumul V suficient de mic, adică I și R suficient de mici. b) Dacă s și n sînt dați, V este maxim pentru k minim, deci $k = 8$ și $\cos a = \frac{1}{3}$. Rezultă

$$R = \sqrt{\frac{s}{2n \sin \frac{2\pi}{n}}} \text{ și } I = \sqrt{\frac{2s}{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}}.$$

c) Se deduce $k = \frac{81}{4}$, deci $\cos a_1 = \frac{4}{5}$ și $\cos a_2 = \frac{1}{17}$. În continuare $R_1 = 4\sqrt{2}$, lungimea laturii bazei egală cu 8 și $I_1 = 3$; $R_2 = 2$, lungimea laturii pătratului de bază $2\sqrt{2}$ și $I_2 = 24$.

3. a) Considerăm funcția $\operatorname{arcctg} x : \mathbf{R} \to (0, \pi)$, care este injectivă (strict descrescătoare) pe $\mathbf{R}$, deci pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg}(x+1) \in (0, \pi)$. Notînd $a = \operatorname{arcctg} x$, $b = \operatorname{arcctg}(x+1)$ și $c = \operatorname{arcctg}(1+x+x^2)$, trebuie arătat că $a - b = c$, ceea ce este echivalent cu $\operatorname{ctg}(a-b) = \operatorname{ctg} c = 1 + x + x^2$. Dar $\operatorname{ctg}(a-b) = \dfrac{1+\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b}{\operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} a} = \dfrac{1+x(x+1)}{x+1-x} = 1+x+x^2$. b) $S_n = \operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arcctg}(n+1)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$ deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arcctg}(n+1) = 0$.

Anul 1959

Etapa regională

1. a) Scriind că $x^m + a^m = (x+b)(x+c) + \alpha x + \beta$, apoi făcîndu-l pe $x = -b$, respectiv $x = -c$, se obține restul $\alpha x + \beta$, unde $\alpha = (-1)^{m+1}(b^{m-1} + b^{m-2}c + b^{m-3}c^2 + \ldots + bc^{m-2} + c^{m-1})$ și $\beta = a^m + (-1)^{m+1}bc(b^{m-2} + b^{m-3}c + b^{m-4}c^2 + \ldots + bc^{m-3} + c^{m-2})$. b) Restul căutat este $(-1)^{m+1}ma^{m-1}x + a^m(1 + (-1)^{m+1}(m-1))$. c) Pentru $x = 12$ și $a = 1$ restul împărțirii expresiei $12^m + 1$ la 169 este egal cu $(-1)^{m+1}(13m-1) + 1$, deci restul împărțirii lui $12^m + (-1)^m(13m-1)$ la 169 este zero.

2. a) Volumul tetraedrului regulat este $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, unde a este lungimea muchiei. Din triunghiul dreptunghic AGD rezultă $a = 2d$, deci $V = \frac{2\sqrt{2}}{3} d^3$.

b) $v = m(\widehat{MGD}) = m(\widehat{MDG})$, deci $\operatorname{tg} v = \frac{AG}{GD} = \sqrt{2}$. Fie E mijlocul muchiei $[BC]$ și F pe $[AD]$ astfel încît EF este paralelă cu MG. Avem $u = m(\widehat{AEF})$, deci $m(\widehat{AED}) = u + v$. Rezultă $\operatorname{tg}(u + v) = \frac{AG}{EG} = 2\operatorname{tg} v$. De asemenea, $2\operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$, de unde $\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg} v}{1 + 2\operatorname{tg}^2 v} = \frac{\sqrt{2}}{5}$, deci $\operatorname{tg}(u + v) = 10 \operatorname{tg} u$.

c) Deoarece $EG = \frac{GD}{2}$ rezultă $FM = \frac{MD}{2} = AF$. Deci MG intersectează planul ABC în punctul simetric al lui A față de E.

3. Relația se mai scrie $\operatorname{tg}^2 b = \frac{\operatorname{tg}^2 a + 1}{\operatorname{tg}^2 a - 1} = -\frac{1}{\cos 2a}$ sau $\frac{\sin^2 b}{1 - \sin^2 b} = \frac{1}{2\sin^2 a - 1}$, deci $2\sin^2 a \sin^2 b = 1$ sau $\sin a \sin b \in \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Etapa finală

1. Se fac substituțiile $b = a \sin B$, $c = a \cos B$ și ecuația devine

$$4 \sin (x + B) \sin (x + C) = 1 + 2 \sin 2B \text{ sau}$$

$$2\left(\cos (B - C) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 + 2 \sin 2B.$$

Dar $\cos (B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C = \sin 2B$ pentru $B + C = \frac{\pi}{2}$ și $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x$. Se obține $2 \sin 2x = 1$, deci $x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12}$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Soluțiile cuprinse între 0 și 2π sînt: $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$.

2. a) Fie $AB = x \cdot AC = 2a$, deci $x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Rezultă $h = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sigma(ABCDEF) = \frac{6a^2}{\sqrt{3}}$ și $V = \frac{4a^3}{3}\sqrt{2}$. b) Aria totală este egală cu $2a^2(\sqrt{3} + \sqrt{11})$.

3. a) Se scrie că x_1, x_2, x_3 verifică ecuația $E(x) = 0$ și se adună cele trei relații obținute. Deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = -p$ se găsește relația (1). O altă cale folosește identitatea

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3)$$

și relațiile lui Viète. b) $p^2 - 2q = q$, deci $p^2 = 3q$. c) $E(1) = 0 = p + q + r + 1$, deci $x_1 = 1$; $x_2 + x_3 = -p - 1$, $x_2x_3 = -r$ și $x_{2,3} = \frac{-(p + 1) \pm \sqrt{(p + 1)^2 + 4r}}{2}$.

Anul 1960

Etapa regională

1. a) $E = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = a^2(1 - 2mn)$. b) Ecuația de gradul 2 are rădăcinile complexe dacă $1 - 2mn < 0$, deci dacă $a \neq 0$ avem $E < 0$, adică ecuația dată are o singură rădăcină reală și două complexe conjugate.

2. a) Din $2a = b + c$ se obține $2\sin A = \sin B + \sin C$ sau $2\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2}$ după simplificare cu $\cos\frac{A}{2}$. Relația se mai scrie $2\cos\frac{B+C}{2} = \cos\frac{B-C}{2}$, de unde dezvoltînd $\cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$ și $\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right)$ se obține $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$. b) $2\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2}$, deci $0 < \sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ și deci $0 < m(\hat{A}) \leqslant \frac{\pi}{3}$.

3. a) În triunghiul AB_2M avem $PC = \frac{1}{2}AM = \frac{b}{4}$ și PC este paralelă cu AM, deci $CB_2 = BC = a$. În triunghiul BA_2N există relațiile $\frac{PC}{BN} = \frac{1}{3} = \frac{CA_2}{BA_2}$, de unde $\frac{CA_2}{BC} = \frac{1}{2}$ sau $CA_2 = \frac{a}{2}$. Dacă E este mijlocul laturii $[BC]$, triunghiurile CA_2B_2 și CAE sînt congruente, deci $m(\widehat{CA_2B_2}) = 90°$. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că NA_2 este perpendiculară pe D, deci $\widehat{BA_2N}$ este unghiul plan corespunzător unghiului diedru format de planele (ABC) și (MNP). b) Deoarece ABC este proiecția triunghiului MNP, iar unghiul celor două plane este de măsură $\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{2a}\right)$, rezultă $\sigma(MNP) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. Dar $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$, deci $\sigma(MNP) = \frac{a\sqrt{3}}{8}\sqrt{4a^2 + b^2}$.

Etapa finală

1. a) $\frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$, deci $m = \frac{3n}{n+3} = 3 - \frac{9}{n+3}$, de unde $n = 6$ și $m = 2$. Termenii sînt $\frac{1}{2\cdot 3}, \ldots, \frac{1}{5\cdot 6}$. b) $m = \frac{2n}{n+2} = 2 - \frac{4}{n+2}$. Se deduce $n = 2$ și $m = 1$, ceea ce corespunde termenului unic $\frac{1}{1\cdot 2}$. c) $(n+3)^2 < n^2 + 8n < (n+4)^2$ pentru $n \geqslant 5$ și $(n+5)^2 < n^2 + 12n < (n+6)^2$ pentru $n \geqslant 13$. Pentru $1 \leqslant n \leqslant 4$, respectiv pentru $1 \leqslant n \leqslant 12$, proprietatea se verifică direct prin enumerarea tuturor cazurilor.

2. a) Avem $l_5 = 2r\sin\frac{\pi}{5}$ și $a_5 = r\cos\frac{\pi}{5}$. Înălțimea piramidei este de lungime $h = \sqrt{R\left(R - 2r\cos\frac{\pi}{5}\right)}$. Pentru existența piramidei trebuie îndeplinită condiția $R_2 > 2r\cos\frac{\pi}{5}$. Aria bazei este $\frac{5}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $V = \frac{5r^2}{24}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{R\left(R-2r\cos\frac{\pi}{5}\right)}$. b) Aria laterală este egală cu $5r\sin\frac{\pi}{5}\left(R - r\cos\frac{\pi}{5}\right)$. c) Fie a măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei și b măsura unghiului plan corespunzător unghiului diedru format de o față laterală cu baza piramidei. Se deduce

$$\cos b = \frac{r\cos\frac{\pi}{5}}{R - r\cos\frac{\pi}{5}} \text{ și } \cos a = \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\frac{\pi}{5}}}.$$

d) Aria laterală este maximă pentru $-r^2\cos\frac{\pi}{5} + Rr$ maximă, adică pentru $r = \frac{R}{2\cos\frac{\pi}{5}}$ sau $R = 2r\cos\frac{\pi}{5}$, deci R este dublul apotemei pentagonului regulat $A'B'C'D'E'$ înscris în cercul de rază r.

Anul 1961

Etapa regională

1 a) $S(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{12}(3n - 3 + 4a)$. b) $E = 3n - 3 + 4a$. c) $a_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3n+1}$.

2. a) Se ține seama de proprietatea că raportul volumelor a două piramide asemenea este egal cu cubul raportului de asemănare și se obține $z = H\left(1 - \sqrt[3]{1 - \left(\frac{h}{H}\right)^3}\right)$. b) Da, cu condiția ca verticala locului să fie perpendiculară pe planul bazei piramidei. c) $z = 8\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)$ cm $\approx 0{,}34828$ cm.

3. Dacă $n \neq 1$ și $\sin 2b \neq 0$ obținem

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\sin 2(a+c) + \sin 2b}{\sin 2(a+c) - \sin 2b} = \frac{\operatorname{tg}(a+b+c)}{\operatorname{tg}(a \quad b \quad c)}.$$

Dacă $\sin 2b = 0$ rezultă $\sin 2(a + c) = 0$ și $b = \frac{k_1\pi}{2}$, $a + c = \frac{k_2\pi}{2}$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, deci $\operatorname{tg}(a + b + c)$ și $\operatorname{tg}(a - b + c)$ pot să nu fie definite. Dacă $n = 1$ expresia $\frac{n+1}{n-1}$ nu este definită. Deci egalitatea de demonstrat are loc pentru $(n - 1)\sin 2b \neq 0$.

Etapa finală

1. a) Avem $MQ \parallel CD \parallel PN$ și $MN \parallel AB \parallel PQ$. Deoarece într-un tetraedru regulat muchiile opuse sînt perpendiculare două cîte două, rezultă că QM este perpendiculară pe QP și deci $MNPQ$ este dreptunghi. b) EF este perpendiculara comună a dreptelor AB și CD. Fie $\{G\} = MQ \cap AF$ și $\{H\} = PN \cap BF$. Rezultă că G și H sînt mijloacele laturilor $[MQ]$ și $[PN]$ și mediana $[FE]$ în triunghiul ABF trece prin mijlocul lui $[GH]$, adică prin centrul dreptunghiului. c) Fie $k = \frac{AM}{MD}$. Se obține $\sigma[MNPQ] = \frac{ka^2}{(k+1)^2}$, din triunghiul ABF deducem $EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ și notînd cu d distanța de la A la planul $(MNPQ)$ obținem $\frac{d}{EF} = \frac{k}{k+1}$, deci $d = \frac{ka\sqrt{2}}{2(k+1)}$, $BP = AM = \frac{ka}{k+1}$ iar înălțimea tetraedrului regulat este $a\sqrt{\frac{2}{3}}$, deci

$$V_{ABPNMQ} = V_{ABPN} + V_{AMNPQ} = \frac{k^2a^3\sqrt{2}(k+3)}{12(k+1)^3} = \frac{1}{2}\, V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$

Obținem ecuația în k: $k^3 + 3k^2 - 3k - 1 = 0$ sau $(k - 1)(k^2 + 4k + 1) = 0$ cu singura rădăcină pozitivă $k = 1$. d) Notînd $\sigma[MNPQ] = y = \frac{ka^2}{(k+1)^2}$ deducem $yk^2 + (2y - a^2)k + y = 0$, ecuație care are discriminantul $\Delta = a^4 - 4a^2y \geqslant 0$ sau $y \leqslant \frac{a^2}{4}$. Deci aria maximă este $\frac{a^2}{4}$ și ea se realizează pentru $k = 1$.

2. Dacă x_1, x_2, x_3 sînt cele trei rădăcini pozitive ale ecuației date, atunci inegalitatea dintre mediile aritmetică și armonică se mai scrie: $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \geqslant 9$. Inegalitatea din enunț se obține folosind relațiile lui Viète.

3. a) Notînd cu E și F proiecțiile centrului O al celor două cercuri pe KL, respectiv pe AB, se deduce $\cos a = \frac{AB - KL}{2FE} = \operatorname{tg}(90° - m(\widehat{KAB})) = \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} - 45°\right)$, deoarece $m(\widehat{KAB}) = 135° - \frac{u}{2}$. Deci $\cos a = \left(\operatorname{tg}\frac{u}{2} - 1\right)\Big/\left(\operatorname{tg}\frac{u}{2} + 1\right)$; de unde $\operatorname{tg}\frac{u}{2}\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} = 1$. b) $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = 3$, deci $\operatorname{tg} u = -\frac{3}{4}$.

Anul 1962

Etapa regională

1. a) $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc$ și $b = d = 0$. b) $M_1M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. c) Se consideră $I(a, b)$ cu a și b constante. Calculăm $IM^2 = \left(a - \frac{3 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 + \left(b - \frac{2t^2 - 4t + 2}{1 + t^2}\right)^2$ se aplică rezultatul de la punctul a și se obține $I(1, 2)$.

2. a) Necesitatea condiției rezultă din faptul că două plane paralele determină pe un al treilea drepte paralele, iar condiția $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ rezultă din asemănarea triunghiurilor. Reciproc, rezultă că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 și DD_1 sînt fie concurente, fie paralele (pentru $a = a_1$ și $b = b_1$). b) Se obține $\cos y = \frac{a - a_1}{\sqrt{4h^2 + (a - a_1)^2}}$ și $\cos x = \frac{b - b_1}{\sqrt{4h^2 + (b - b_1)^2}}$ de unde se deduce relația cerută.

3. $E = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{3 \sin 3x}{\cos 3x} = -\frac{2\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x \cos 3x}$.

Etapa finală

1. a) Fie $VABCD$ piramida și M, N mijloacele laturilor $[AB]$ și $[CD]$. Din enunț rezultă că triunghiul VMN este echilateral și acesta se rotește în jurul lui V, rămînînd în planul vertical (VMN) care taie planul orizontal ce trece prin V după dreapta VX. Fie $VM'N'$ noua poziție a triunghiului VMN și $A'B'C'D'$ poziția corespunzătoare pentru bază (vezi fig. 20). Planul orizontal ce trece prin $A'B'$ determină

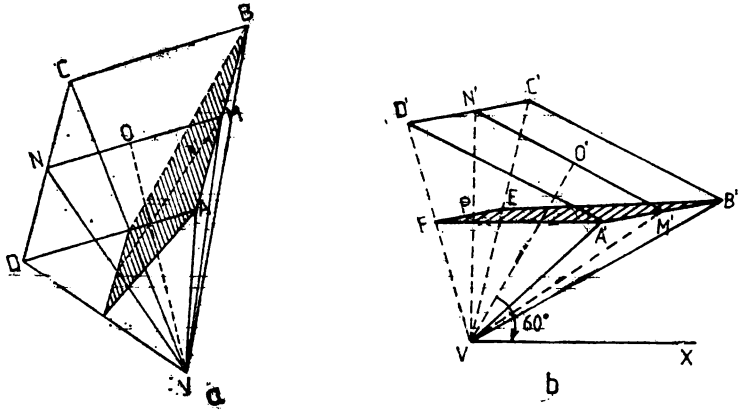


Fig. 20

în triunghiul echilateral $VM'N'$ înălțimea $M'P$. După un calcul simplu obținem volumul de apă care se varsă egal cu $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3} - \frac{a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{6}a^3\sqrt{3}$. b) Notăm $A'A = M'M_1$ distanța de la A' la planul orizontal care trece prin V și cu $C'C_1 = N'V$ distanța de la C' la același plan. Triunghiurile $VA'A_1$ și $VC'C_1$ sînt

dreptunghice cu ipotenuza egală cu $a\sqrt{5}$. Deci unghiurile formate cu planul orizontal sînt complementare.

2. a) $I(x)=(x-\cos a-i\sin a)(x-\cos a+i\sin a)$. Aplicînd teorema lui Bézout rezultă că $P(x)$ se divide cu $I(x)$. b) $E(a)=\frac{n}{2}\sin(n-1)a$. Avem $E(a)=0$ pentru $a=k\pi/(n-1)$, $k=1,\quad n-2$. c) $\sum_{k=2}^{n}\sin^2(k-1)a=\sum_{k=2}^{n}(1-\cos 2(k-1)a)/2=$ $=(n-1)/2-(\sin(n-1)a\cos na)/2$.

Anul 1963

Etapa regională

1. a) Calculăm

$$=\left|\frac{1\quad i\lambda}{1-i\lambda}\right|=\frac{|1+i\lambda|}{|1-i\lambda|}=1.$$ Se poate demonstra și reciproc, adică dacă $=1$, atunci există $\lambda\in\mathbf{R}$ astfel încît $z=\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$. Din faptul că $=1$ deducem că $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\alpha=\arg z\in[0,2\pi)$ sau $z=\cos\alpha+$ $+i\sin\alpha=\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$ cu $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$ și $\lambda=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; rezultă $\alpha=2\operatorname{arctg}\lambda$ dacă $\lambda>0$ sau $\alpha=2\pi-2\operatorname{arctg}\lambda$ dacă $\lambda<0$. Locul geometric al punctului $M(z)$ cu $|z|=1$ este un cerc cu centrul în origine și de rază 1. b) Punem numărul z sub formă trigonometrică: $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ și $\bar{z}=\cos(2\pi-\alpha)+i\sin(2\pi-\alpha)$. Calculăm

$$z^n+(\bar{z})^n=2\cos n\alpha=\begin{cases}2\cos(2n\operatorname{arc\,tg}\lambda) & \text{dacă } \lambda\geqslant 0.\\ 2\cos((2\pi-2\operatorname{arc\,tg}\lambda)n) & \text{dacă } \lambda<0.\end{cases}$$

c) Calculăm $$z_1-z_2=\left|\frac{1+i\lambda_1}{1-i\lambda_1}-\frac{1+i\lambda_2}{1-i\lambda_2}\right|=\left|\frac{2i(\lambda_1-\lambda_2)}{(1-i\lambda_1)(1-i\lambda_2)}\right|=$$

$$=\frac{2|\lambda_1-\lambda_2|}{\sqrt{1+(\lambda_1-\lambda_2)^2+2\lambda_1\lambda_2+\lambda_1^2\lambda_2^2}}=$$

$$=\frac{2|\lambda_1-\lambda_2|}{\sqrt{1+(\lambda_1-\lambda_2)^2+2\frac{\lambda_1-\lambda_2-k}{k}+\frac{1}{k^2}(\lambda_1-\lambda_2)^2-2\frac{1}{k}(\lambda_1-\lambda_2)+1}}=\frac{2|k|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

2. a) Facem desenul secțiunii cu un plan perpendicular pe planul orizontal. Notăm $AD=h$. Din triunghiul MD_1C rezultă că $MD_1=a$ și $MC_1=2a$. Dacă $M\in[A_1D_1]$ atunci $V_{gol}=\frac{3a^3}{2}=3a^2x$; rezultă $x=\frac{a}{2}$. Dacă $A_1\in[D_1M]$, atunci avem $PB=h\sqrt{3}$. $V_{lichid}=\frac{3ah^2}{2}$, $V_{gol}=3a^2h-\frac{3ah^2}{2}=\frac{3ah}{2}(2a-h)=$ $3a^2x$, de unde rezultă $x=\frac{h}{2a}(2a-h)$. b) 1) Dacă $M_1\in[MA_1]$,

atunci $C_1M_1 = 2a\sqrt{3}$, $M_1D_1^2 = 9a^2$, de unde $M_1D_1 = 3a$. Calculăm $\sigma[MM_1C_1] = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$; $V_{\text{lichid}} = a^2\sqrt{3}\, a\sqrt{3} = 3a^3$. Dacă $A_1 \in [MM_1]$, $PB = \frac{h}{\sqrt{3}}$, $V_{\text{lichid rămas}} = \frac{ah^2}{2}$. Deci $V_{\text{lichid scos}} = 3a^2\left(h - \frac{a}{2}\right) - \frac{ah^2}{2} = \frac{a^2(5h-3a)}{2}$.

3. Avem $E = \dfrac{(1-\cos 4x)m + \cos 2x + \cos 4x}{m\sin^2 x + \frac{1}{4} - \sin^2 x}$ Se observă că expresia E este cîtul a două polinoame de gradul întîi în m. Pentru ca expresia E să nu depindă de m oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ este necesar și suficient să existe proporționalitatea coeficienților acestor polinoame în m, adică

$$(1) \qquad \frac{1-\cos 4x}{\sin^2 x} = \frac{\cos 2x + \cos 4x}{\frac{1}{4} - \sin^2 x}.$$ Calculăm

$$(2) \qquad \frac{1-\cos 4x}{\sin^2 x} = \frac{2\sin^2 2x}{\sin^2 x} = \frac{8\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x} = 8\cos^2 x \text{ și}$$

$$(3) \qquad \frac{\cos 2x + \cos 4x}{\frac{1}{4} - \sin^2 x} = \frac{8\cos^2 3x \cdot \cos x}{1 - 4(1-\cos^2 x)} = 8\cos^2 x.$$

Din (2) și (3) rezultă (1) și în plus $E = 8\cos^2 x$.

Etapa finală

1. a) Notăm $\{A'\} = A_2B_1 \cap A_1B_2$, $\{B'\} = A_2B_1 \cap B_2C_1$, $\{C'\} = B_2C_1 \cap D_1C_2$ și $\{D'\} = D_1C_2 \cap A_1D_2$ și fie O' centrul pătratului $A'B'C'D'$. Obținem $A'B' = a + 2\sqrt{2}m\sin\frac{x}{2}$ și $VO' = \sqrt{m^2\cos x - \frac{a^2}{2} - \sqrt{2}am\sin\frac{x}{2}}$. Deci $h - VO' = \sqrt{m^2 - \frac{a^2}{2}} - \sqrt{m^2\cos x - \frac{a^2}{2} - \sqrt{2}am\sin\frac{x}{2}}$ unde h este înălțimea piramidei $VABCD$. b) $\sigma[A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2] = \sigma[A'B'C'D'] - 4\sigma[A'A_1A_2] = a^2 + 4\sqrt{2}am\sin\frac{x}{2} + 4m^2\sin^2\frac{x}{2}$ de unde rezultă imediat volumul piramidei octogonale.

2. a) Din $3B + 2C = 180°$ și $A + B + C = 180°$ rezultă $B + 2A = 180°$ și $C = 360° - 3A$, deci $A \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$. Se aplică teorema sinusurilor în triunghiul ABC; obținem: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ sau $\frac{a}{\sin A} = -\frac{b}{\sin 2A}$ adică $a = -\frac{b}{2\cos A}$. Ținînd cont de teorema cosinusului avem $a(a^2 - b^2 - c^2) = b^2c$. b) Deoarece $A \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ și triunghiul ABC este isoscel, rezultă numai cazul $\hat{B} \equiv \hat{C}$. În aceste condiții obținem $A = 108°$ $B = C = 36°$. Relația de demonstrat devine

$$R^2 = 8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(R + 8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$64\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1=0;$$

rezultă $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{16}$. Dar

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin 54^\circ\sin^2 18^\circ=\cos 36^\circ\frac{1-\cos 36^\circ}{2}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\,\frac{3-\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{5}-1}{16}.$$

3. a) $f(n)$ este par $(\forall)\ n\in\mathbf{Z}$ dacă p este impar și q este par. Demonstrația o facem prin inducție completă; $f(0)=q$ adevărată. Presupunem că $f_1(n)\in 2\mathbf{Z}$; atunci $f_1(n+1)=f_1(n)+2n,\ p+q+1\in 2\mathbf{Z}$. Dacă p este par și q este impar, atunci $f_1(n)$ este impar pentru orice n. Demonstrația se face la fel. b) $f(n)=n^3+pn+q$ este multiplu de 3 dacă și numai dacă $q=3m$ și $p=3m+2$, $m\in\mathbf{Z}$. Demonstrația se face prin inducție completă.

Anul 1964

Etapa regională

1. a) Presupunem că B' și C' sînt în același semispațiu determinat de planul P. Fie A mijlocul segmentului $[B'C']$ și G centrul de greutate al triunghiului $AB'C'$, adică $2GA_1=GA$. Notăm cu A', G' proiecțiile punctelor A, respectiv G pe planul ABC. Cum prin proiecție raportul se păstrează, înseamnă că G' este centrul de greutate al triunghiului ABC. Deci locul geometric este dreapta care trece prin G' perpendiculară pe planul P. *Observație.* Dacă B' și C' sînt în semispații diferite, printr-un raționament analog se obține că locul geometric este aceeași dreaptă. b) Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul $B'AC'$ obținem

$$\cos\alpha=\frac{AB'^2+AC'^2-B'C'^2}{2AB'\cdot AC'}=\frac{AB^2+b^2+AC^2+c^2-BC^2-(b-c)^2}{\sqrt{AB^2+b^2}\ \sqrt{AC^2+c^2}}=$$

$$=\frac{bc}{\sqrt{(AB^2+b^2)(AC^2+c^2)}}\geqslant 0.$$

Din $\cos\alpha\geqslant 0$ și $\alpha\in(0,\pi)$ rezultă $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Dacă $b=0$ sau $c=0$ rezultă că $\alpha=90^\circ$. c) Avem

$$V[ABCC'B']=\frac{1}{3}\,\sigma[BCC'B']\cdot AA_1=\frac{1}{3}\,\frac{(b+c)\,BC}{2}\,AA_1=\frac{1}{3}\,(b+c)\,\sigma[ABC],$$

deci $\frac{V[ABCC'B']}{b+c}=\frac{1}{3}\,\sigma[ABC]=\text{const.}$ d) Avem $\cos\varphi=\frac{\sigma[ABC]}{\sigma[A'B'C']}=$

$$=\frac{AB\cdot AC}{AB'\cdot AC'\sin\alpha}=\frac{AB'\cos\beta\ AC'\cos\gamma}{AB'\ \ AC'\sin\alpha}\quad\text{adică}\quad\cos\varphi\sin\alpha=\cos\beta\cos\gamma.$$

2. a) Se calculează

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = a_0 \sum_{i=1}^{n} i^3 + a_1 \sum_{i=1}^{n} i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} i + na =$$

$$= \frac{a_0 n^4}{4} + \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3}\right) n^3 + \left(\frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\right) n^2 + \left(\frac{a_1}{6} + \frac{a^2}{2} + a_3\right) n.$$

Din $\sum_{i=1}^{n} P(i) = n^4$ rezultă $a_0 = 4$, $a_1 = -6$, $a_2 = 4$, $a_3 = -1$, deci $P(X) = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 1$. b) $P(1) = 1$. Presupunem că $P(n) = n^4$; să demonstrăm că implicația $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ este adevărată. Calculăm

$$P(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} P(i) = \sum_{i=1}^{n} P(i) + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 =$$

$$= n^4 + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 = (n+1)^4.$$

Etapa finală

1. a) Se folosesc relațiile lui Viète. Calculăm expresia

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = b^2 - 2ac.$$

b) Ecuația $ax^2 + 2bx + 2c = 0$ are rădăcini complexe dacă $b^2 - 2ac < 0$. Ținînd cont de rezultatele precedente deducem că $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 < 0$, ceea ce demonstrează că nu toate numerele x_1, x_2, x_3 pot fi reale. Deoarece o ecuație de grad impar cu coeficienți numere reale admite cel puțin o rădăcină reală, deducem că ecuația are o singură rădăcină reală. c) Expresia

$$E = \sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2} = \sqrt{b^2 - 2ac} \in \mathbf{Q}$$

dacă $b^2 - 2ac = k^2$, $k \in \mathbf{Q}$.

2. a) Se observă că $AC \perp BF$, deci patrulaterul $OACF$ este inscriptibil. Deci punctul C se găsește pe cercul cu diametrul $[AF]$. Se arată că oricărui punct de pe cercul menționat îi corespunde un punct M din planul XOZ cu proprietatea amintită. b) Unghiul plan corespunzător diedrului format de (XOY) și (FBD) este $\widehat{ACM}$, $m(\widehat{ACM}) = n$. Din faptul că triunghiurile ABC și BOF; ABM și BOD sînt asemenea, rezultă (1) $MA = \frac{BA \cdot OD}{BO}$ și (2) $AC = \frac{AB \cdot OF}{BF}$. Ținînd cont de (1) și (2) avem

$$\operatorname{tg}^2 n = \left(\frac{BA \cdot OD}{BO}\right)^2 \frac{BF}{AB \cdot OF} = \frac{OD^2 \cdot BC}{BO^2 \cdot OF^2} = \frac{OD^2 (OB^2 + OF^2)}{BO^2 \cdot OF^2} =$$

$$= \frac{OD^2}{OF^2} + \frac{OD^2}{BO^2} = \operatorname{tg}^2 m + \operatorname{tg}^2 p.$$

c) Se observă că $V[FADB] = V[FBOD] - V[FAOD] = \frac{1}{6} OB \cdot bc - \frac{1}{6} abc = \frac{abc}{3}$;

rezultă $OB = 3a$, deci $MA = \frac{2}{3} c$.

3. a) $\frac{1}{2}(\sin(8x - 40^\circ) + \sin(22x + 100^\circ)) = \frac{1}{2}(\sin(8x - 40^\circ) + \sin(22x - 260^\circ)) = \sin(15x - 150^\circ)\cos(-7x + 110^\circ) = \sin(15x - 150^\circ)\sin(7x - 20^\circ)$.
b) Din $12^\circ \leqslant x \leqslant 20^\circ$ rezultă $30^\circ \leqslant 15x - 150^\circ \leqslant 150^\circ$ și $60^\circ \leqslant 7x - 20^\circ \leqslant 120^\circ$

Din faptul că $\sin\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ dacă $30^\circ \leqslant \alpha \leqslant 150^\circ$ și $\sin\beta \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ dacă $60^\circ \leqslant \beta \leqslant 120^\circ$ rezultă că $E \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Pentru $x = 20^\circ$ rezultă $E = \sin 150^\circ \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Anul 1965

Etapa regională

1. a) $z_1 = \left|\frac{1 - im}{1 - im}\right| = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{1 + m^2}} = 1$ și $= \left|\frac{m + i}{m - i}\right| = 1$. Deci (*) $= = 1$. Din $z_1 = \frac{1}{z_2}$ rezultă că (**) $\arg(z_1) + \arg(z_2) = \pi$. Ținînd cont de (*) și (**) deducem că imaginile celor două numere complexe sînt simetrice față de axa OY. O altă demonstrație poate fi dată ținînd seama că numerele $z_1 = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} + \frac{2m}{1 + m^2}i$ și $z_2 = \frac{m^2 - 1}{1 + m^2} + \frac{2m}{1 + m^2}i$ au aceeași parte imaginară, iar părțile reale sînt egale în modul și de semne contrare.
b) $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_2 = \cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha)$, $\bar{z}_1 = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$, $\bar{z}_2 = \cos(-\pi + \alpha) + i\sin(-\pi + \alpha)$. Se calculează $z_1^{2n} + z_2^{2n}$ și $(\bar{z}_1)^{2n} + (\bar{z}_2)^{2n}$ și se obține aceeași valoare $2\cos 2n\alpha$.

2. a) Deoarece patrulaterul A_1OC_1M este înscriptibil, rezultă că $m(\widehat{O_1MA}) = \pi - 3x \geqslant \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{s-a ținut cont de condiția } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}\right)$. În triunghiul PMN unghiurile $\widehat{MPN}$ și $\widehat{MNP}$ sînt ascuțite deoarece $m(\hat{M}) = \pi - 3x \geqslant \frac{\pi}{2}$ Din relația $\sin\widehat{MPN} = \cos\widehat{MNP}$, care este echivalentă cu $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{MPN}\right) = \cos\widehat{MNP}$, deducem că $m(\widehat{MNP}) + m(\widehat{MPN}) = \frac{\pi}{2}$, adică triunghiul PMN este dreptunghic în M, deci $\pi - 3x = \frac{\pi}{2}$, echivalent cu $3x = \frac{\pi}{2}$ sau $x = \frac{\pi}{6}$. b) Deoarece $ON = OM = OP$ rezultă că punctele N, M și P se află pe un cerc de centru O și rază OP. Ținînd seama de expresia de calcul a unei coarde, deducem $PN = 2OP\sin 3x$ și $MN = 2OP\sin x$. Înlocuind valorile acestea în $PN = OP + MN$, deducem că $2OP\sin 3x = OP + 2OP\sin x$ sau $2(\sin 3x - \sin x) = 1$. c) Se ține cont de rezultatele de la punctul b.

3. Fie $G \in \text{Int}\,\triangle ABC$. Notăm $\{A_1\} = AG \cap BC$, $\{B_1\} = BG \cap AC$ și $\{C_1\} = CG \cap AB$. Din faptul că triunghiurile A_1AV și A_1GM sînt asemenea rezultă $\frac{GM}{VA} = \frac{A_1G}{AA_1}$. La fel se arată că $\frac{GN}{VB} = \frac{B_1G}{BB_1}$ și $\frac{GP}{VC} = \frac{C_1G}{CC_1}$. Calculăm

$$\frac{GM}{VA} + \frac{GN}{VB} + \frac{GP}{VC} = \frac{A_1G}{AA_1} + \frac{B_1G}{BB_1} + \frac{C_1G}{CC_1} = \frac{\sum \sigma[GAB]}{\sigma[ABC]} = 1.$$

Etapa finală

1. a) Folosind relațiile lui Viète obținem $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - b(x_1 + x_2 + x_3) - 3c = -a^3 + 3ab - 3c$ și $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - c(x_1 + x_2 + x_3) = a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$. Din $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (x_1 + x_2 + x_3)^4$ deducem că $4ac = 4a^2b - 2b^2$. Deoarece $a \neq 0$ obținem $c = ab - \frac{b^2}{2a}$. b) Ecuația în a, $2a^2b - 2ac - b^2 = 0$ trebuie să admită rădăcini raționale. Aceasta are loc atunci cînd $c^2 = k^2 - 2b^2$, $k \in \mathbf{Q}$ și $k \geqslant \sqrt{2}\, b$

2. a). Avem

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1 =$$
$$= -2\cos C(\cos(A - B) - \cos C) - 1 = -4\cos A \cos B \cos C - 1.$$

b) Se aplică formula $\sin^4 \alpha = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}$ și obținem

$$\sum \sin^4 \frac{A}{2} = \frac{9}{8} - \frac{1}{2}\sum \cos A + \frac{1}{8}\sum \cos 2A =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos A \cos B \cos C\right).$$

c) Deoarece A, B, C sînt unghiuri ascuțite deducem că expresia $\cos A \cos B \cos C > 0$ și din relația precedentă deducem inegalitatea cerută.

3. a) Deoarece planele (BDG) și (ECF) sînt paralele și $[DC] \parallel [BE] \parallel [GF]$ și sînt congruente două cîte două, rezultă că figura $BDGECF$ este prismă oblică cu secțiunea dreaptă GBC. Avem $V[BDGECF] = \sigma[BCG] \cdot BE = \frac{1}{2}a^3$.

b) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. c) $x = \frac{24ak}{7}$.

Anul 1966

Etapa regională

1. Expresia

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{6}\right)}} = \sqrt{2 + \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{12}}} = \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{12}\right)} =$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{24} \quad \text{iar} \quad \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2\sin\frac{\pi}{24}.$$

2. a) Fie $\{K\} = MN \cap DB$. Pe muchia $[DD']$ se ia un punct S astfel încît $m(\widehat{DKS}) = \alpha \in \left[0, \operatorname{arctg} \frac{DD'}{KD}\right]$. Fie $\{F\} = MN \cap DC$ și $\{E\} = MN \cap AD$. Avem $\{T\} = FS \cap CC''$ și $\{Q\} = AA' \cap ES$. Notăm $AA' = a$. b) Din faptul că $\triangle SDF \sim \triangle TCF$ rezultă $TC = \frac{CF \cdot SD}{FD} = \frac{a\sqrt{2}\ \operatorname{tg}\alpha}{4}$. Din triunghiul TCN rezultă $NT = \frac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Se observă că perimetrul pentagonului $QMNTS$ este $P = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{3a}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Deci $P_{min} = \frac{a\sqrt{2}+6a}{2}$ și $P_{max} = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Calculăm $\sigma[AMNCD] = \sigma[MQSTN]\cos\alpha$ sau $\sigma[MQSTN] = \frac{\sigma[AMNCD]}{\cos\alpha} = \frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. Deci $\sigma_{max}[MQSTN] = \frac{7a^2}{8\cos 45^\circ} = \frac{7a^2}{4\sqrt{2}}$ și $\sigma_{min}[MQSTN] = \frac{7a^2}{8}$. c) $V[MQSTN] = V[SDEF] - 2V[EAMQ] = \frac{9a^2}{24}SD - \frac{a^3\sqrt{2}}{24}\operatorname{tg}\alpha$.

3. Se aplică inducția matematică.

Etapa finală

1. a) Se observă că ecuația are rădăcini nenule. Facem transformarea $y = \frac{1}{x}$ și obținem ecuația $y^3 - y^2 - (a^3 - 4a^2 + 5a - 2) = 0$ sau $y^2(y-1) = (a-1)^2(a-2)$. Se observă că $y = a - 1$ este soluție. Se aplică schema lui Horner și obținem ecuația $y^2 + (a-2)y + (a-1)(a-2) = 0$. Rădăcinile ecuației în x se obțin folosind transformarea $y = \frac{1}{x}$. *Observație.* S-a lucrat în ipoteza $a \neq 1$ și $a \neq 2$. În cazul cînd $a = 1$ sau $a = 2$, atunci ecuația devine $x - 1 = 0$. b) $a \in \left[\frac{2}{3}, 2\right) \setminus \{1\}$.

2. Exprimînd deîmpărțitul și împărțitorul în funcție de $\sin x$, obținem $D = 7\sin^{31}x + 8\sin^{13}x - 5\sin^9 x - 2$ și $I = \sin^4 x + \sin^3 x + \sin^2 x + \sin x + 1$. Avem (1) $D = I \cdot C + R$. Pentru $\sin^5 x = 1$ cu $\sin x \neq 1$, (1) devine $7\sin x + 8\sin^3 x - 5\sin^4 x - 2 = R_1$. Din $\sin^5 x = 1$ și $\sin x \neq 1$ rezultă $\sin^4 x = -\sin^3 x - \sin^2 x - \sin x - 1$. Deci

$R = 7\sin x + 8\sin^3 x + 5\sin^3 x + 5\sin^2 x + 5\sin x + 5 - 2 = 13\sin^3 x + 5\sin^2 x + 12\sin x + 3$.

3. a) Avem $VA_2 \perp B_1C_1$, $VB_2 \perp A_1C_1$, $VC_1 \perp A_1A_2$ iar $VH \perp (A_1B_1C_1)$, unde $[AA_2]$, $[BB_2]$, $[CC_2]$ sînt înălțimi. Avem

$$VA_2 = \frac{ha}{2} = R\sin B\sin C,\ AH = \frac{AB_2}{\sin C} = 2R\cos A,$$

$$A_2H = 2R(\sin B\sin C - \cos A) = 2R\cos B\cos C,$$

$$\cos\alpha = \frac{2\cos A - \sin B\sin C}{\sin B\ \sin C} = 1 - 2\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C.$$

b) Înălțimea VH a tetraedrului este

$$VH = R\sqrt{|(\sin^2 B \sin^2 C - 2(\cos A - \sin B \sin C)^2)|} = 2R\sqrt{|\cos A \cos B \cos C|}.$$

$$\sigma[A_1B_1C_1] = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

De unde rezultă $V = \frac{1}{3} R^3 \sin A \sin B \sin C \sqrt{|\cos A \cos B \cos C|}$.

Anul 1967

Etapa regională

1. a) $AB = r$, $MI = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ și $MC = r\sqrt{5}$. b) Se verifică teorema lui Pitagora în triunghiurile MCI și MID, de unde rezultă că $IM \perp (Q)$. c) În triunghiul CMD se aplică teorema cosinusului și obținem (1) $\cos x = -\frac{3}{5}$. Notăm cu F proiecția punctului M pe planul (P). Din egalitatea $\sigma[CRI] = \sigma[CMI] \cos y$ rezultă $\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Se calculează (2) $\cos 2y = -\frac{3}{5}$. Din (1), (2) și faptul că x, $2y \in (0, \pi)$ rezultă $x = 2y$.

2. a) Fie $x \in B$. Rezultă că $x \in A \cup B \subset A \cup C$, deci $x \in A \cup C$. Dacă $x \in C$ demonstrația incluziunii $B \subset C$ este încheiată. În caz contrar $x \in A \setminus C$, ceea ce este imposibil, deoarece $x \in A \cap B$ și $x \notin A \cap C$, ceea ce contrazice ipoteza $(A \cap B \subset A \cap C)$. b) Fie $x \in A \cup B$. Dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cup C$. Dacă $x \in B$ rezultă că $x \in C$ deoarece $B \subset C$ și deci $x \in A \cup C$. Deci prima incluziune este demonstrată. Fie acum $x \in A \cap B$. Se deduce că $x \in A$ și $x \in B \subset C$, deci $x \in A$ și $x \in C$, deci $x \in A \cap C$.

3. Termenul general al sumei se mai poate scrie sub forma

$$\frac{1}{(a + (k-1)b)(a + kb)} = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{a + (k-1)b} - \frac{1}{a + kb}\right], \quad k = 1, \quad n; \text{ obținem}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a + (k-1)b)(a + kb)} = \frac{n}{(a + nb)a}.$$

4. a) $E(x) = (2m - n)\cos^4 x + (n - 2m)\cos^2 x + m$. Notăm $y = \cos^2 x \in [0, 1]$ și obținem $E(y) = (2m - n)y^2 + (n - 2m)y + m$, unde $y \in [0, 1]$, de unde rezultă $E_{min} = E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2m + n}{4}$ și $E_{max} = E(0) = m$. b) Se rezolvă ecuațiile $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ și $\cos^2 x = 0$. c) $m = 1$, $n = -6$.

Etapa finală

1. a) Deoarece $BA \perp (AA'M)$ și $BI \perp A'M$ rezultă $AI \perp A'M$. Deci P coincide cu I. În triunghiul MAA' avem $AI = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$, $BI = \sqrt{AB^2 + AI^2} =$

$$= \sqrt{b^2 + \left(\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{a^2 + c^2}}.$$ c) $\sigma[DD'C] = \sigma[A'MB] \cos \theta$;

rezultă $\cos\theta = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$. d) Dacă $M \in [AD]$ locul geometric este un arc de cerc, care face parte din cercul cu diametrul $[AA']$, cuprins între punctul A și $[A'D]$. Dacă $M \in AD$, atunci locul geometric este tot cercul.

2. $x \in \left(\dfrac{\pi}{5}; \dfrac{3\pi}{5}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{5}; \dfrac{9\pi}{5}\right)$.

3. Din $b^2 + c^2 = \dfrac{4m_a^2 + a^2}{2}$ și $b^2+c^2=a^2+2bc\cos A$ rezultă $bc = \dfrac{4m_a^2 - a^2}{4\cos A}$.

Deci $\sigma[ABC] = \dfrac{bc}{2}\sin A = \dfrac{4m_a^2 - a^2}{8\cos A}\sin A = \dfrac{4m_a^2 - a^2}{8}\operatorname{tg} A$.

4. a) Avem

$$\left(\frac{x^2\sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x\sin y + 1}\right)^2 - 1 = -\frac{(1-\sin y)(1+\sin y)(x-1)^2(x-1)^2}{(x^2 - 2x\sin y + 1)^2} =$$

$$= -\frac{(x^2-1)^2\cos^2 y}{(x^2 - 2x\sin y + 1)^2} \leqslant 0.$$

b) Ecuația se mai poate scrie $|x^2 - 9| - 2|x^2 - 1| + |x| + x + 7 = 0$ etc. c) Se folosesc relațiile lui Viète. d) $y_V = -m^2 - 3m - 4$; rezultă $y_{V_{max}} = y\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

Anul 1968

Etapa județeană

1. a) $x_1 = \dfrac{m+2}{m-1}$, $x_2 = \dfrac{m-2}{m+1}$, $m \neq \pm 1$. b) $m \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right)$. În cazul cînd $m \in \left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$ obținem rădăcina $x = -1 \in [-1, 1]$. c) $m \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. d) Punctul fix este $M(1, -9)$.

2. Ecuația trigonometrică se mai scrie

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(4x+60°) - \cos(x+45°)}} - \frac{1}{\sqrt{\cos(4x+60°) + \cos(x+45°)}} =$$

$$= \frac{1}{1+\cos(x+45°)} - \frac{1}{1-\cos(x+45°)} \text{ sau}$$

$$2\cos(x+45°)\left[\frac{1}{\cos(4x+60°) - \cos^2(x+45°)} + \frac{1}{\sin^2(x+45°)}\right] = 0.$$

Se obține

$$x \in \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \left\{k\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{36}\right\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{12}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}.$$

Condițiile de existență a ecuației sînt satisfăcute numai de $x \in \left\{k\pi - \dfrac{5\pi}{36}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$.

3. a) $\triangle BCD$ este isoscel și CN este mediană; rezultă $CN \perp BD$. $\triangle ABD$ este isoscel și AN este mediană; rezultă $AN \perp BD$. Deci $BD \perp (ANC) \supset MN$; rezultă $MN \perp BD$. La fel se arată că $MN \perp AC$. b) Fie P și Q proiecțiile punctelor M respectiv E pe planul (ABD). Deoarece $m(\widehat{ERQ}) = m(\widehat{MRP})$ din ipoteză și $m(\widehat{EQR}) = m(\widehat{MPR}) = 90°$, rezultă că $\triangle MPR \sim \triangle EQR$; rezultă $\frac{RP}{RQ} = \frac{MP}{EQ} = \text{const}$ deoarece punctele M și E sînt fixe. În planul (ABD) punctul R se bucură de proprietatea că $\frac{RP}{RQ} = \text{const}$, deci locul geometric este cercul lui Apollonius.

Observație. Problema rămîne adevărată indiferent de poziția punctelor E și M exterioare planului (ABD). c) Avem $MN = a\sqrt{2}$, $DE = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$ și $CF = \frac{2a\sqrt{3}}{2}$.

Etapa finală

1. a) Avem $m \in [-1, 1]$ și $x_{min}(m) = \sqrt{1 - m^2}$ și $y_{min}(m) = m \in [-1, 1]$; rezultă $y_{min} = -1$. b) Se elimină parametrul $m \in [-1, 1]$ din ecuațiile $x_{min} = \sqrt{1 - m^2}$, $y_{min} = m$ și se obține un cerc cu centrul în origine și rază 1.

2. a) Rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 + 3x + 3 = 0$ sînt rădăcini și pentru ecuația $(x + 1)^3 = 1$. Din $x_i^2 = -3(x_i + 1)$ rezultă $x_i^6 = -27(x_i + 1)^3$, deci $x_i^6 = -27$, $i = 1, 2$; b) Notăm cu $S_k = x_1^k + x_2^k$. Se observă că

$$S_3 = -3S_2 - 3S_1 = 0,$$

$$S_{6n+3} = (x_1^3)^{2n+1} + (x_2^3)^{2n+1} = (x_1^3 + x_2^3)\, Q(x_1, x_2) = 0$$

(s-a ținut cont de faptul că $x_1^3 + x_2^3 = 0$); c) Se folosește relația de recurență $S_n + 3S_{n-1} + 3S_{n-2} = 0$, $n \geqslant 2$.

3. a) Din $BC \perp (VAB)$ și $AA_1 \subset (VAB)$ rezultă $AA_1 \perp BC$. Din $AA_1 \perp VB$ și $AA_1 \perp BC$ se deduce $AA_1 \perp (VBC)$. Deci $AA_1 \perp CV$. Deoarece $VC \perp AA_1$ și $VC \perp AA_2$ obținem $VC \perp (AA_1A_2)$. În mod analog se arată că $VC \perp (AA_2A_3)$. Deci $CV \perp A_2A_1$ și $CV \perp A_2A_3$; rezultă $CV \perp (A_1A_2A_3)$. b) Din $CV \perp (AA_1A_2)$ și $CV \perp (AA_2A_3)$ obținem că A, A_1, A_2 și A_3 sînt coplanare. Din $AA_1 \perp (VBC)$ și $A_1A_2 \subset (VBC)$ rezultă $AA_1 \perp A_1A_2$. În mod analog se arată că $AA_3 \perp A_3A_2$. Deci patrulaterul $AA_1A_2A_3$ este inscriptibil.

4. Din faptul că A, B și C sînt unghiurile unui triunghi și $2A + 3B = 180°$ rezultă $B = 2C - 180°$ și $A = 360° - 3C$, cu $C \in (90°, 120°)$. Calculăm

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = -4\cos^2 C - 2\cos C + 1.$$

Se consideră funcția $f: \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$. Deoarece $x_{max} = -\frac{1}{4} \in [-1, 1]$ rezultă că $1 < f(x) \leqslant f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$. Deci $1 < \frac{a + b}{c} \leqslant \frac{5}{4}$ sau $4c < 4(a + b) \leqslant 5c$.

Anul 1969

Etapa județeană

1. a) $A'C'=\sqrt{b^2-a^2}=A'B'$. b) $B'C'=\sqrt{b^2-4a^2}$, $\sigma[A'B'C']=\frac{b}{4}\sqrt{3(b^2-4a^2)}$.
c) $\sigma[A'B'C']=\sigma[ABC]\cdot\cos 60^\circ$, $\frac{b}{a}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

2. a) $\sin(x\pm y)=2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\pm y}{2}\geqslant 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=$
$=\sin x-\sin y>0$. b) $\frac{\sin^2 x}{\sin^2 y}=\frac{1+\cos x}{1+\cos y}\,\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{y}{2}}$; dar în condițiile ipotezei are loc $\frac{1+\cos x}{1+\cos y}<\frac{1+\sin x}{1+\sin y}$.

3. a) $V\left(\frac{1-m}{m+1},\ \frac{3m-1}{m+1}\right)$ cu condițiile $\frac{1-m}{m+1}\in(0,1)$, $\frac{3m-1}{m+1}\in(0,1)$ îndeplinite pentru $m\in\left(\frac{1}{2};1\right)$. b) $\frac{1-m}{m+1}=\frac{3m-1}{m+1}$, $m=\frac{1}{2}$ și $f(x)=\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$.
c) Sistemul de condiții este: $\Delta\geqslant 0$, $x_1+x_2>-1$, $(m+1)f\left(-\frac{1}{2}\right)>0$, cu soluția $m\in\left(-1,\ \frac{1}{3}\right]$.

Etapa finală

1. a) Din $\log_3 N=\log_3 108^a=a(3+2\log_3 2)$ și $\log_3 N=\log_3 72^b=$
$=b(2+3\log_3 2)$ se obține $\log_3 2=\frac{3a-2b}{3b-2a}$, $\log_2 3=\frac{3b-2a}{3a-2b}$; de unde rezultă $\log_3 N=\frac{5ab}{3b-2a}$ și $\log_2 N=\frac{5ab}{3a-2b}$. b) $\frac{1}{\log_{x^n y^m} A}=n\log_A x+$
$+m\log_A y=\frac{n}{\log_x A}+\frac{m}{\log_y A}$.

2. a) $E=(\cos x+\cos a-1)^2+(\sin x-\sin a)^2\geqslant 0$. $E=0$ dacă $\sin x-$
$-\sin a=0$ și $\cos x+\cos a-1=0$, sistem care are soluția $\cos a=\frac{1}{2}$;
$a=\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$. b) Avem $E=3+$
$+2[\cos(a+x)+\cos(-a)+\cos(-x)]\leqslant 9$. $E=0$ pentru $a_1=x_1=\frac{\pi}{3}$ și $a_2=x_2=\frac{5\pi}{3}$; $E=9$ pentru $a\in\{0,2\pi\}$, $x\in\{0,2\pi\}$.

3. a) D fiind mijlocul muchiei $[BC]$ rezultă că $pr_{(BCC')} AB' = B'D$ și $N \in B'D$; $A'N \subset (A'B'D)$, $MA'' \subset (AB'C')$, deci $P \in (A'B'D) \cap (AB'C') = B'Q$, unde $\{Q\} = A'E \cap AC'$; E este mijlocul muchiei $[AC]$ (vezi fig. 21); pentru că $P \in \text{Int } ABCA'B'C'$ rezultă că $P \in (B'Q)$. Reciproc, fie $P \in (B'Q)$, $AP \cap B'D = \{N\}$ și $NM \parallel A'A''$, $M \in AB'$; din asemănarea triunghiurilor MPN și $A''PA'$ rezultă că M, P și A'' sînt coliniare. b) $MN = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $V_{MBNB'} = \frac{1}{3}\sigma[BNB']\,MN = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

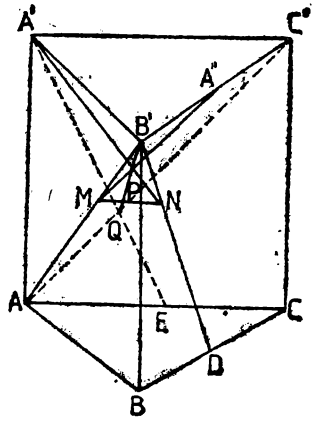


Fig. 21

Anul 1970

Etapa județeană

1. Se consideră funcția de gradul 2, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2(m+2)^2x^2 - 2(m+1)(m+2)x - m = 0$, $m > 0$; pentru că $f(0) = -m < 0$ și $f(1) = m + 6 > 0$, rezultă că există $x_1 \in (0, 1)$ astfel încît $f(x_1) = 0$.

2. Ecuația $2\cos^2 x - 3\cos x + m = 0$ admite soluții reale numai pentru $m \in \left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$; ecuația asociată, $2y^2 - 3y + m = 0$ admite soluții subunitare numai în cazurile: *i*) dacă $m \in [-5, 1)$, o rădăcină subunitară; *ii*) dacă $m \in \left[1, \frac{9}{8}\right]$, ambele rădăcini subunitare.

3. a) Se notează $\frac{\cos x}{a} = k$; rezultă $a = \frac{\cos x}{k}$, $b = \frac{\cos 3x}{k}$, $c = \frac{\cos 5x}{k}$ și se obține $\frac{a+c}{a+b} = \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{b}{a}$. b) Din $a + c = b$ se obține ecuația $\cos x + \cos 5x = \cos 3x$ cu soluția $x \in \left\{k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

4. a) Din $\frac{PM}{AB} = \frac{OM}{OB}$ și $OA^2 = OM \cdot OB$ se obține $PM = \frac{AB \cdot OA^2}{OB^2} = \frac{2a}{3}$ (vezi fig. 22). Avem $AL^2 = AM^2 - LM^2 = \frac{4a^2}{9}$, $AL = \frac{2a}{3}$. b) Fie α măsura unghiului diedru al planelor (AMN) și (ABC) și $MM' \perp AB$, $NN' \perp AD$; atunci din $\sigma[AM'N'] = \sigma[AMN]\cos\alpha$ se obține $\cos\alpha = \frac{\sigma[AM'N']}{\sigma[AMN]} = \frac{2a^2}{9} \cdot \frac{9}{2a^2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde rezultă că $\alpha = 45°$.

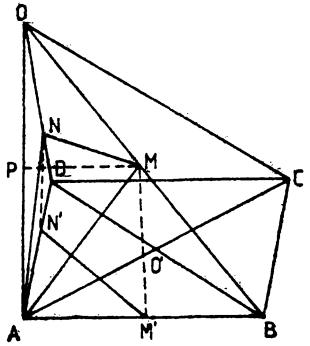


Fig. 22

1. a) $f(x_i - m) = x_i^2 - m = x_i^2 - mx_i + m - 4 = -2mx_i$, $i = 1, 2$, $x_1x_2 = m - 4$, $x_1 + x_2 = -m$. Dacă $m > 4$ rădăcinile x_1 și x_2 sînt negative și $E = |x_1| f(x_2 - m) + |x_2| f(x_1 - m) = -x_1(-2mx_2) - x_2(-2mx_1) = 4mx_1x_2 = 4m(m - 4)$. b) $x_1 + x_2 = 2$ și $x_1 + x_2 = -m$ implică $m = -2$ și ecuația devine $x^2 - 2x - 6 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = 1 - \sqrt{7}$, $x_2 = 1 + \sqrt{7}$. c) $V\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2 - 4m + 16}{4}\right)$.

Ordonata $-\frac{m^2 - 4m + 16}{4} = -\left(\frac{m-2}{2}\right)^2 - 3 \leqslant -3$; egalitatea are loc pentru $m = 2$, cînd se obține parabola $f(x) = x^2 + 2x - 2$ de vîrf $V(-1, -3)$.

2. a) Fie $D'D'' \perp BD$; proiecția patrulaterului $ABDC$ pe planul P este trapezul dreptunghic $ABD''C'$ (vezi fig. 23). Notînd $\alpha = (\widehat{p, q})$, din triunghiurile ACC' și BDD' se obține $\sin\alpha = \frac{c}{a} = \frac{DD'}{b}$, de unde $DD' = \frac{bc}{a}$ și $BD'^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$; din teorema catetei aplicată în $\triangle BD'D'$, rezultă $BD'' = b\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$. Avem

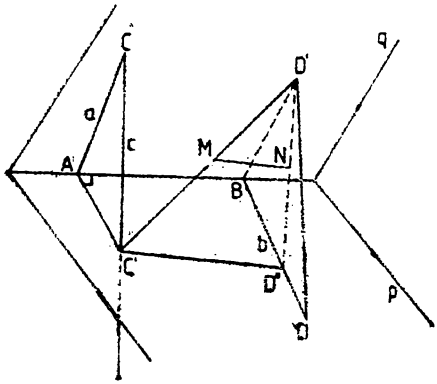


Fig. 23

$$\sigma[ABD''C'] = \frac{(AC' + BD'')\,AB}{2} = \frac{a}{6}\left[\sqrt{a^2 - c^2} + b\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\right] = \frac{1}{6a}\left[a^2 \cdot \sqrt{a^2 - c^2} + b(a^2 - c^2)\right].$$

b) M și N fiind mijloacele segmentelor $[C'D']$ respectiv $[D'D'']$, are loc $MN \parallel C'D''$, deci M aparține planului mediator al segmentului $[D'D'']$.

3. a) Se notează $AM = a$ și $BC = y$, $b > c$, iar din sistemul $x^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - y^2}{4}$, $c^2 = x^2 + \frac{y^2}{4} - 2x \cdot \frac{y}{2} \cos 60°$ se determină $y = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3b^2 - c^2} \pm \sqrt{3c^2 - b^2}\right)}{2}$;

b) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - y^2}{2bc} = \pm\frac{\sqrt{(3b^2 - c^2)(3c^2 - b^2)}}{2bc}$, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{2bc}$; c) $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{3}$, $y = 3 \pm 1$; se disting două cazuri, pentru $y = 4$ și $y = 2$, obținîndu-se triunghiurile cu medianele $x = 1$, respectiv $x = 2$, în ultimul caz triunghiul fiind dreptunghic.

Etapa finală

1. a) $AF \perp (ABCD)$, $EN \perp MC$ rezultă $FN \perp MC$, deci N aparține cercului de diametru $[FC]$. Ținînd cont că dacă $M \in (AF)$, rezultă $m(\widehat{FMC}) < 90°$ și $N \in \text{Int}\,AFC$ iar dacă $M \in (BF)$ rezultă că $m(\widehat{FMC}) > 90°$ și $M \in (NC)$, locul

geometric al punctului N este arcul de cerc de diametru (FC), inclus în Int $\widehat{ACB}$.
b) (MO) este mediană în triunghiul EMC în care $EC^2 = 8a^2$, $M'E^2 = x^2 + 4a^2 - 2ax$, $M'C^2 = 4a^2 + x^2$ și deci $MO^2 = \dfrac{2(2x^2 + 8a^2 - 2ax) - 8a^2}{4} = x^2 + 2a^2 - ax$.
c) OF, OB și OH sînt mediane în triunghiurile dreptunghice EFC, respectiv EBC și EHC. d) $MO = \sqrt{x^2 - ax + 2a^2}$; funcția $f: [0, 2a] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - ax + 2a^2$ își atinge valoarea minimă pentru $x = \dfrac{a}{2}$, $f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{7a^2}{4}$, și valoarea maximă pentru $x = 2a$, $f(2a) = 4a^2$; în cele două cazuri se obține $MO_{min} = \dfrac{\sqrt{7}\,a}{2}$ și $MO_{max} = 2a$.

2. Ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$(\sin x + \cos x)(\cos a \cos x - \cos a \sin x + 1) = 0$$

din care se obțin ecuațiile $\operatorname{tg} x = -1$ și $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos a}$, cu soluțiile

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{(-1)\arcsin^k \frac{1}{\sqrt{2}\cos a} + \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},$$

dacă $|\cos a| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Pentru $a = \dfrac{\pi}{12}$, $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. a) Ținînd cont că din $0 < 2b < 2a < \dfrac{\pi}{4}$ rezultă $0 < \sin 2b < \sin 2a$ și $\cos 2b > \cos 2a > 0$, se obține

$$\frac{\cos 2a}{\cos 2b} < 1 < \frac{\sin 2a}{\sin 2b} = \frac{\sin a \cos a}{\sin b \cos b},$$

$$\frac{\sqrt{1 + \sin 4a} - \sqrt{\cos 4a}}{\sqrt{1 + \sin 4b} - \sqrt{\cos 4b}} = \frac{\sin 2a + \cos 2a - \sqrt{\cos 4a}}{\sin 2b + \cos 2b - \sqrt{\cos 4b}} > \frac{\sin 2a}{\sin 2b}.$$

3. $17^5 < 18^5 = 2^5 \cdot 3^{10} < 2^7 \cdot 3^7 \cdot 3^3 < 6^7 \cdot 6^2 = 6^9$, de unde rezultă $5 \log 17 < 9 \log 6$ sau $\dfrac{5}{9} < \dfrac{\log 6}{\log 17}$;

$$17^{13} > 16^5 \cdot 17^8 = 2^{20}(289)^4 > 2^{20}(243)^4 = 6^{20},$$

de unde rezultă $13 \log 17 > 20 \log 6$ sau $\dfrac{\log 6}{\log 17} < \dfrac{13}{20}$.

Anul 1971

Etapa județeană

1. Condițiile problemei devin: $|x_2 - x_1| = 6$ și $-\dfrac{\Delta}{4a} = 8$ sau $\dfrac{\sqrt{b^2 + 32a}}{a} = 6$ și $-\dfrac{b^2 + 32a}{4a} = 8$, cu soluțiile $a = \dfrac{-8}{9}$; $b = \pm\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$.

2. a) $x_1 = (2+\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} + (2-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} = a + b$, $a = (2+\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$,

$b = (2-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$, $ab = 1$.

$x_1^3 - 3x_1 - 14 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) - 3(a+b) - 14 = a^3 + b^3 - 14 = 0$.

c) Folosind formulele lui Viète se obține

$$x_2 + x_3 = -x_1,\ x_2x_3 + x_1(x_2 + x_3) = -3,$$

de unde rezultă $x_2x_3 = x_1^2 - 3$; cele două rădăcini se obțin rezolvînd ecuația $x^2 + x_1x + x_1^2 - 3 = 0$, pentru care $\Delta = 12 - 3x_1^2 = 3(4 - x_1^2) < 0$, deci rădăcinile x_2 și x_3 nu sînt reale.

3. Dreptele d_1 și d_2 fiind paralele determină un plan (P). Fie (Q) planul paralel cu (P_1) și (P_2), situat la distanțe egale între ele. Planul (Q) intersectează planul (P) după o dreaptă d. Rezultă că dreapta d este fixă, deoarece d_1, d, d_2 sînt paralele și echidistante. Punctul L, mijlocul segmentului $[MN]$ aparține planului (Q). Fie E mijlocul segmentului $[AB]$. $[EL]$ este linia mijlocie a trapezului $ANMB$, deci EL este perpendiculară pe (P_1), (P_2) și (Q). Deoarece punctul E este fix, dreapta EL generează un plan (R), căci trece prin E și rămîne perpendiculară pe dreapta fixă d. Planul (R) intersectează dreapta d în F. Deoarece EL este perpendiculară pe LF, segmentul fix $[EF]$ se vede din L sub un unghi cu măsura de 90°, deci locul geometric al punctului L este cercul de diametru $[EF]$ situat în planul (R).

4. a) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \dfrac{3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; notînd $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ se obține $t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$ și $g(t) = \dfrac{3t^2+1}{2t}$. Fie $t_1, t_2 \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$, $t_1 < t_2$; rezultă că $g(t_2) - g(t_1) = \dfrac{(t_2 - t_1)(3t_1t_2 - 1)}{2t_1t_2} > 0$, deci g este strict crescătoare, ceea ce implică f strict crescătoare și în consecință bijectivă. b) Se rezolvă ecuația $y = \dfrac{3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, cu necunoscuta x și se obține $x = 2\operatorname{arctg}\dfrac{y + \sqrt{y^2 - 3}}{3}$, funcția inversă funcției date fiind $f^{-1}: [\sqrt{3}, 2] \to \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = 2\operatorname{arctg}\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 3}}{3}$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. Din inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz, pentru cazul $n = 2$, se obține

$$(xy + ab)^2 \leqslant (x^2 + a^2)(y^2 + b^2) \Leftrightarrow |xy + ab| \leqslant mn \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -mn \leqslant -(xy + ab) \leqslant mn \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m - n)^2 \leqslant (x - y)^2 + (a - b)^2 \leqslant (m + n)^2.$$

Egalitatea are loc pentru $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$.

Etapa finală

1. a) $\Delta = -4(m^2 + 4m + 2)$, rădăcinile sînt reale pentru $m \in [-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$. Avem:

$$x_1 + x_2 = -m,\ x_1 + x_2 \in [2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}];$$

$$x_1x_2 = \frac{(m+1)^2}{2};\quad x_1x_2 \in \left[0,\ \frac{3}{2}+\sqrt{2}\right];\ x_1^2 + x_2^2 = -2m - 1,$$

$x_1^2 + x_2^2 \in [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$. b) Se elimină m din relațiile $x_1x_2 = \frac{(m+1)^2}{2}$ și $x_1 + x_2 = -m$; se obține $(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 = 1$, de unde rezultă $(x_i-1)^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow |x_i - 1| \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x_i \leqslant 2$ pentru $i = 1, 2$. c) Din $x_1x_2 = 2$ rezultă $m = 1$ și $m = -3$ care conduc la ecuațiile $2x^2 + 2x + 4 = 0$, respectiv $2x^2 - 6x + 4 = 0$. Din $x_1 = 2x_2$ se obține $x_1 = -\frac{2m}{3}$, $x_2 = -\frac{m}{3}$, $m = -3$ și $m = -\frac{3}{5}$, deci soluțiile $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, respectiv $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{1}{5}$. Din $x_1 - x_2 = 1{,}4$ rezultă $m_1 = -2{,}2$ și $m_2 = -1{,}8$ și ecuațiile $2x^2 - 4{,}4x + 1{,}44 = 0$, respectiv $2x^2 - 3{,}6x + 0{,}64 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 0{,}4$ și $x_2 = 1{,}8$, respectiv $x_1 = 0{,}2$ și $x_2 = 1{,}6$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x$; $f(3) = 0$; folosind monotonia funcției exponențiale cu baza subunitară rezultă că pentru $x < 3, f(x) > 0$, iar pentru $x > 3, f(x) < 0$, deci $x = 3$ este singura soluție a ecuației.

3. a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{DG}{GA'} = \frac{3h}{h_a} = \frac{3h_a}{2S}$ și analog $\operatorname{tg}\beta = \frac{3h_b}{2S}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{3h_c}{2S}$; s-a notat cu S aria triunghiului ABC, cu a, b, c, lungimile laturilor sale, cu h_a înălțimea din A a triunghiului iar cu h înălțimea tetraedrului $ABCD$.

Are loc

$$\frac{9h^2}{4S^2}a^2 = \frac{9h^2}{4S^2}(b^2 + c^2),\ a^2 = b^2 + c^2, \text{ adică } m(\widehat{BAC}) = 90°.$$

b) $S = \sigma[BCG] + \sigma[ACG] + \sigma[ABG] = S_1\cos\alpha + S_2\cos\beta + S_3\cos\gamma$. Dar $\sigma[BCG] = \sigma[ACG] = \sigma[ABG] = \frac{1}{3}S$, deci $S_1 = \frac{S}{3\cos\alpha}$, $S_2 = \frac{S}{3\cos\beta}$, $S_3 = \frac{S}{3\cos\gamma}$; din punctul a rezultă $\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} = \frac{1}{\cos^2\alpha} + 1$ și deci $S_2^2 + S_3^2 - S_1^2 = \frac{S^2}{9}\left(\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{S^2}{9}$.

4. Presupunem că

$$S = \sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \quad \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n.$$

Demonstrăm prin inducție completă:

$$n = 1 \Rightarrow \cos a_1 + \cos(-a_1) = 2\cos a_1.$$

$$n = 2 \Rightarrow \cos(a_1 + a_2) + \cos(a_1 - a_2) + \cos(-a_1 + a_2) + \cos(-a_1 - a_2) =$$
$$= 4\cos a_1 \cos a_2 = 2^2\cos a_1 \cos a_2.$$

Presupunînd $P(n)$ adevărată, adică

$$\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \quad \pm a_n) = 2^n\cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n,$$

să demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată, adică

$$2^{n+1}\cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_{n+1} = \sum \cos(a_1 \pm a_2 \pm a_3 + \quad \pm a_n \pm a_{n+1}).$$

Avem:

$$2^{n+1}\cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n \cos a_{n+1} = 2(2^n\cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n) \cos a_{n+1} =$$
$$= 2\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \quad \pm a_n)\cos a_{n+1} = \sum 2\cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) \cos a_{n+1} =$$
$$= \sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \quad \pm a_n \pm a_{n+1}).$$

Din enunțul problemei rezultă existența lui $k \in \{1, 2, \quad, n\}$ astfel încît $\cos a_k = 0$, deci $a_k = \frac{(2p+1)\pi}{2}$, $p \in \mathbf{Z}$. Reciproc, pentru $k \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{Z}$, $a_k = \frac{(2p+1)\pi}{2}$, $\cos a_k = 0$ și rezultă evident $S = 0$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) $\Delta = 4(-m^2 + 2m + 1)$, rădăcinile sînt reale dacă $m \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$; $x_1 + x_2 = m + 1$; rezultă că $x_1 + x_2 \in [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$; $x_1x_2 = \frac{m^2}{2}$ $x_1x_2 \in$ $\in \left[0, \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\right]$, $x_1^2 + x_2^2 = 2m + 1$, $x_1^2 + x_2^2 \in [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$. b) Dacă $x_1 = \sqrt{2}$ rezultă că $m_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$ și $x_2 = 1 + \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$ sau $m_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$ și $x_2 = 1 - \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$.

2. Ecuația este echivalentă cu (1) $(x + y)^2 - 2x = 0$, care are soluții numai pentru $x \geqslant 0$; din (1) se obțin ecuațiile $y = \sqrt{2x} - x$ și $y = -\sqrt{2x} - x$; de aici rezultă că $y \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

3. Să demonstrăm dubla inegalitate $1 < \frac{4m_c^2}{a^2} \leqslant 5$. Aplicînd formula corespunzătoare medianei m_c vom reține în final $\frac{4m_c^2}{a^2} = 2 + 2\frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2}$. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul ABC și ținînd seama de faptul că $B = 2A$ obținem $\frac{b}{a} = 2\cos A$, $\frac{c}{a} = 4\cos^2 A - 1$. Avem de dovedit dubla inegalitate $1 < 4\sin^2 2A + 1 \leqslant 5$, ceea ce este evident.

4. $\sigma[VAB] = \sigma[VAC] = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $\sigma[VBC] = \sigma[ABC] = \frac{BC \cdot VA'}{2}$, unde din $VO \perp (ABC)$ și $VA' \perp BC$ rezultă $AA' \perp BC$. Din teorema cosinusului, aplicată

în triunghiul ABC, rezultă $BC^2 = \frac{8a^2}{3}$. $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ și $\sigma[ABC] = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

$\sigma_{\text{totală}} = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

Anul 1972

Etapa județeană

1. $f(x) = \left[\frac{(1 - |\sin a|)^2}{1 + \sin^2 a}\right]^x$ se observă că $a \neq \frac{k\pi}{2}$ implică $0 < \frac{(1 - |\sin a|)^2}{1 + \sin^2 a} < 1$.

2. $x_1 + x_2 = -2\cos 72^\circ \cos 36^\circ = 2x_1x_2$ și $x_1 = 2x_2^2 - 1$, $x_2 = 2x_1^2 - 1$; prin scădere se obține $x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$ și deci $x_1x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{4}$. Ecuația este $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

3. $AA' = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = MA'$; $MM' \cdot AA' = MA \cdot A'A''$, $A'A'' \perp MA$, de unde rezultă că $MM' = \frac{MA \cdot A'A''}{AA'} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} - 1}}{\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = a\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}$.

4. a) Abscisa vîrfului este $x = -\frac{m}{2}$. Eliminîndu-l pe m se obține ecuația unei parabole $y = 2x^2 - 8x + 3$. b) Focarul are coordonatele $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$, deci $x_F = -\frac{m}{2}$ și $y_F = \frac{1}{8}(4m^2 + 32m + 25)$. Prin eliminarea lui m se obține $y = 2x^2 - 8x + \frac{25}{8}$, care este ecuația locului geometric al focarelor parabolelor.
c) Rădăcinile sînt reale cînd $-m^2 - 8m - 6 \geq 0$, deci $m \in [-4 - \sqrt{10}, -4 + \sqrt{10}]$. Obținem $x_1x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3)$. Acest trinom are un minim pentru $m = -2$, deci $x_1x_2 \geq -\frac{1}{2}$, iar valoarea maximă o are pentru abscisa cea mai depărtată de abscisa vîrfului, deci $x_1x_2 \leq 2\sqrt{10} + \frac{13}{2}$ Deci $x_1x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, 2\sqrt{10} + \frac{13}{2}\right]$.
d) Prin eliminarea lui m din relațiile lui Viète se obține: $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 5$.
e) Din relația de la punctul precedent se deduce $x_1, x_2 \in [2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}]$.
f) Deoarece $x_1 - 2$ și $x_2 - 2$ iau valori în intervalul $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$, mulțimea valorilor raportului dat este $[0, \infty)$.

1. a) Se notează cu M, N, P, Q, R, S, respectiv, mijloacele segmentelor (BC), (AC), (AD), (BD), (CD), (AB). Locul geometric este paralelogramul $MNPQ$. b) Intersecția celor două plane este MP care trece prin mijlocul lui (SR). c) Piramida $ABCD$ se descompune în patru piramide echivalente cu vîrful comun în G.

2. a) Se notează cu N proiecția lui M pe planul xOy și se observă că P și Q sînt proiecțiile punctului N, respectiv pe muchiile Ox, Oy. b) În acest caz $OPNQ$ este pătrat. Se notează $\alpha = m(\widehat{MON})$. Avem $OH \cdot \sigma[MPQ] = MN \cdot \sigma[OPQ]$. Avem $OH = \dfrac{2MN \cdot OQ}{\sqrt{4MQ^2 \cdot PQ^2}}$, $MN = PQ \operatorname{tg} \alpha$, $OQ = \dfrac{PQ}{\sqrt{2}}$, $MQ^2 = PQ^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \dfrac{PQ^2}{2}$. Se obține $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{6}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

3. $a > b$. Din faptul că $x \geqslant 2$ rezultă $a > 1$. Să presupunem că $a \leqslant b$. Atunci avem

$$x + 4 = (x+1)^b \geqslant (x+1)^a \Rightarrow x + 3 + 1 \geqslant (x+1)^a \Rightarrow x^a + 1 \geqslant (x+1)^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{x^a} \geqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^a > 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x^a} > \frac{1}{x}, \text{ fals. Deci } a > b.$$

4. a) Dacă notăm $x + \dfrac{1}{x} = y$ obținem ecuația $y^2 - 4y - 16 = 0$, cu rădăcinile $y_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{5}$. Folosind relația dintre x și y obținem rădăcinile ecuației în x: $x_{1,2} = 1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ și $x_{3,4} = 1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$. Deci $P(x) \geqslant 0$ dacă $x \in \left(-\infty, 1 - \sqrt{5} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\right] \cup \left[1 - \sqrt{5} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right] \cup \left[1 + \sqrt{5} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, \infty\right)$. b) Ținînd seama de semnul și monotonia funcției tangentă, să arătăm că $x_1 = \operatorname{tg} \dfrac{9\pi}{20}$, $x_2 = \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{20}$, $x_3 = \operatorname{tg} \dfrac{17\pi}{20}$ și $x_4 = \operatorname{tg} \dfrac{13\pi}{20}$. Obținem $\operatorname{tg} \dfrac{9\pi}{20} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{20} = 1 = x_1x_2$; $\operatorname{tg} \dfrac{17\pi}{20} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{13\pi}{20} = 1 = x_3x_4$; $x_1 + x_2 = x_1 + \dfrac{1}{x_1} = \operatorname{tg} \dfrac{9\pi}{20} + \dfrac{1}{\operatorname{tg} \dfrac{9\pi}{20}} = \dfrac{2}{\sin \dfrac{\pi}{10}} = \dfrac{8}{\sqrt{5} - 1} = y_1$.

Analog se obține $x_3 + x_4 = \dfrac{-2}{\sin \dfrac{3\pi}{10}}$. Din formula $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ deducem $\sin \dfrac{3\pi}{10} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$, deci $x_3 + x_4 = 2(1 - \sqrt{5}) = y_2$. Cu aceasta proprietatea este demonstrată. c) Dacă demonstrăm că $\sin \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$, obținem $\cos \dfrac{\pi}{5} = 1 - 2\sin^2 \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{4}$, de unde rezultă a doua relație. Dar $\sin \dfrac{4\pi}{10} = \cos \dfrac{\pi}{10}$, deci notînd $\sin \dfrac{\pi}{10} = x$ obținem: $\cos \dfrac{\pi}{10} = 4\sin \dfrac{\pi}{10} \cos \dfrac{\pi}{10} \cos \dfrac{\pi}{5} =$

$= 4x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)$, de unde obținem ecuația: $16x^2(1-x^2)(1-2x^2)^2 = 1-x^2$. Deoarece $1-x^2 \neq 0$ se deduce ecuația $16x^2(1-2x^2)^2 - 1 = 0$. Notînd $x^2 = t$ se deduce ecuația $64t^3 - 64t^2 + 16t - 1 = 0$ sau $(4t-1)(16t^2 - 12t + 1) = 0$ cu soluțiile: $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$ și $t_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$. Deoarece $0 < \sin^2\frac{\pi}{10} < \frac{1}{4}$ deducem că $\sin^2\frac{\pi}{10} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$, deci $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. Presupunem $0 < a < b < 1$. Atunci

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} > 2\log_b \frac{2ab}{a+b}.$$

Mai trebuie arătat că $\frac{2ab}{a+b} < b$, ceea ce este echivalent cu $a < b$.

2. a) $b = 9 - (a-2)^2$, deci $b \in (5,9]$, $E_1 = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}$, deci $E_1 \in (40, 100]$.
b) $E_2 = b^2 - 4b + 6$ și $E_2 \in [2, 11)$.

3. Reprezentînd evenimentul care constă în extragerea unei bile albe prin A și a unei bile negre prin N, rezultă că trebuie să avem una dintre situațiile $A(NA)N$, $A(AN)N$, $A(NN)A$, $N(AA)N$, $N(AN)A$, $N(NA)A$, deci probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{5}{12}\left(\frac{4\cdot 7^2}{11C_{11}^2} + \frac{4C_7^2}{11C_{11}^2}\right) + \frac{7}{12}\left(\frac{5^2\cdot 6}{11C_{11}^2} + \frac{6C_5^2}{11C_{11}^2}\right) = \frac{287}{726}.$$

4. $\sum_{k=1}^{15} \sin^2\frac{k\pi}{8} = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15}\cos\frac{k\pi}{4} = 8.$

5. Din relația dată se obține $\sin x = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$ și $\sin x > 0$, $a - b > 0$.

6. a) Avem $\sqrt[4]{1+\sin 2x} = \sqrt[4]{(\sin x + \cos x)^2} = \sqrt{\sin x + \cos x}$ și $\sqrt[4]{1-\sin 2x} = \sqrt{\sin x - \cos x}$, deoarece $\sin x > \cos x$ pentru $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Obținem: $(\sqrt{\sin x + \cos x} - \sqrt{\sin x - \cos x}) / (\sqrt{\sin x + \cos x} + \sqrt{\sin x - \cos x}) = (2\sin x - 2\sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}) / 2\cos x = \operatorname{tg} x - \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}$. b) Se ține seama de identitatea $\cos x + \cos(180° + x) = 0$ și astfel termenii sumei se grupează în 180 sume a cîte doi termeni egale cu zero.

Anul 1973

Etapa județeană

1. a) Se substituie $y = -x$ în prima relație; apoi $y = 0$. b) Se substituie $y = -x$ în a doua relație și se obține $f^2(x) + g^2(x) = g(0) = 1$. Punînd $y = x$ în cele două relații date se obține $f(2x) = 2f(x)g(x)$ și $g(2x) = 1 - 2f^2(x)$. Se mai substituie $y = 2x$ în cele două relații și se obțin expresiile lui $f(3x)$ și $g(3x)$.

2. Făcînd substituțiile $\sin 6x = \sin(4x + 2x) = 2\sin 2x \cos^2 2x + 2\sin 2x \cos^2 2x - \sin 2x$ și $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ se obține: $(\sin 2x - 1)(4\cos^2 2x - 1) = 0$, deci $\sin 2x = 1$ sau $\cos 2x = \pm \frac{1}{2}$ Soluțiile din intervalul $(0, 2\pi)$ sînt: $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

3. Din datele problemei se obține $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, $A_1C_1 = 14$, $AC = \sqrt{212}$. Notînd $BB_1 = x$ deducem $AB = \sqrt{x^2 - 16x + 100}$, $BC = \sqrt{x^2 - 24x + 244}$. Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul ABC obținem ecuația de gradul al doilea $x^2 - 20x + 66 = 0$ cu soluțiile: $x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{34}$. Deoarece $BB_1 < 10$ m se obține $BB_1 = 10 - \sqrt{34}$ m. Fie acum $DD_1 = y$. Se notează cu M intersecția dintre C_1D_1 și paralela dusă prin A_1 la B_1C_1. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul A_1MD_1 se deduce $D_1M = \frac{10\cos 15^\circ}{\sin 45^\circ} = 5(\sqrt{3} + 1)$, deci $C_1D_1 = 11 + 5\sqrt{3}$. După ce se calculează CD, B_1D_1 și BD în funcție de y, aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul BCD se obține o ecuație de gradul întîi în y, de unde se deduce expresia căutată:

$$y = DD_1 = \frac{79 + 55\sqrt{3} + 12\sqrt{34}}{2 + \sqrt{34}} \text{ m.}$$

4. $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ 2\sqrt{2}\cos 2x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \\ 0, & x \in \left(\pi, 3\frac{\pi}{2}\right]; \\ -2\sqrt{2}\cos 2x, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right). \end{cases}$$

Amplitudinea este $2\sqrt{2}$.

5. Avem $(\sec x)^a = 13{,}25$ și $(\operatorname{tg} x)^a = 12{,}25$. Deci $(\sec x)^a - (\operatorname{tg} x)^a = 1$. Ținînd seama de cunoscuta identitate $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$, rezultă $a = 2$. Să arătăm că $a = 2$ este soluție unică. Din $(\sec x)^a - (\operatorname{tg} x)^a = 1$ se obține $(\sin x)^a + (\cos x)^a = 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$. Ținînd seama de faptul că $\sin x$ și $\cos x \in [0, 1]$ avem $a > 2 \Rightarrow (\sin x)^a + (\cos x)^a < 1$, $a < 2 \Rightarrow (\sin x)^a + (\cos x)^a > 1$. Deci singura soluție este $a = 2$. Atunci $\operatorname{tg} x = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5$ și $x = \operatorname{arctg} 3{,}5$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) $C_m^n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$; iar m și $n!$ sînt prime între ele.

b) Avem $2^m - 2 = 1 + C_m^1 + \dots + C_m^m - 2 = C_m^1 + \dots + C_m^{m-1}$.
Pe baza proprietății precedente fiecare termen al sumei se divide cu m.

2. Ținînd seama de condițiile problemei avem

$$a = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1),\quad c = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2).$$

$$\arg b = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.\quad |b| = |a| + |c| = r_1 + r_2.\ \text{Atunci}$$

$$b = (r_1 + r_2)\left(\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + i\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right).$$

Relațiile dintre coeficienți și rădăcini sînt:

$$(1)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{r_1 + r_2}{r_1}\left(\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right); \\ x_1x_2 &= \frac{r_2}{r_1}[\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + i\sin(\alpha_2 - \alpha_1)]. \end{aligned}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (1) reținem

$$(2)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{r_1 + r_2}{r_1}\left[\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right]; \\ x_1 - x_2 &= \pm\frac{r_1 - r_2}{r_1}\left[\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Din (2) rezultă cu ușurință că una dintre rădăcini, fie $x_1 = -\left[\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right]$ și $|x_1| = 1$. ceea ce trebuia demonstrat.

3. $1 < x \leqslant 2\sqrt{2}$.

4. a) Relația cerută se deduce imediat din relațiile lui Viète: $x_1 + x_2 = m$ și $x_1x_2 = \frac{m^2 - 4m + 6}{2}$, deoarece $(x_1-2)^2+(x_2-2)^2=(x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 + 8$. b) Relația de la punctul a reprezintă ecuația unui cerc cu centrul de coordonate (2,2) și raza egală cu $\sqrt{2}$. Pentru un punct $M(x_1, x_2)$ raportul $\frac{x_2}{x_1} = m$ este tangenta unghiului făcut de OM cu sensul pozitiv al axei Ox_1, unde O este originea axelor. Deoarece în primul cadran funcția tangentă este crescătoare, valorilor extreme ale raportului $\frac{x_2}{x_1}$ sînt tocmai tangentele unghiurilor formate de cele două tangente duse din origine la cercul de ecuație $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2$ cu sensul pozitiv al axei Ox_1. Rezolvăm sistemul: $x_2 = mx_1$ și $x_1^2 + x_2^2 - 4(x_1 + x_2) + 6 = 0$, obținînd ecuația în x_1: $x_1^2(1 + m^2) - 4(1 + m)x_1 + 6 = 0$. Punînd condiția ca discriminantul acestei ecuații să fie egal cu zero obținem ecuația în m: $m^2 - 4m + 1 = 0$, cu rădăcinile: $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Deci $2 - \sqrt{3} \leqslant \frac{x_2}{x_1} \leqslant 2 + \sqrt{3}$ sau $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \leqslant \frac{x_1}{x_2} \leqslant \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$, deci $2 - \sqrt{3} \leqslant \frac{x_1}{x_2} \leqslant 2 + \sqrt{3}$.

5. $E_1 = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{24}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{24}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$;

$E_2 = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{6} - \sqrt{3}}{4}$.

6. Notînd $2^x = y$ se obține ecuația $3y^2 - 2y - 4 = 0$, deci $x = \log_2 \frac{1 + \sqrt{13}}{3}$.

7. a) $\frac{55}{62} \cdot \frac{4}{61} \cdot \frac{3}{60} = \frac{11}{3782}$. b) $\frac{55 \cdot 3 \cdot 14}{62 \cdot 61 \quad 60} = \frac{77}{7564}$.

Etapa finală

1. a) $m \in (-\infty, 10 - \sqrt{10}) \cup (10 + \sqrt{10}, +\infty)$; b) $y_{min} = -5$. c) 1°. Se verifică folosind relațiile dintre coeficienți și rădăcini. 2°. $|x_1 - x_2| = \sqrt{-m^2 + 20m - 90}$. Maximul lui $-m^2 + 20m - 90$ are loc pentru $m = 10$ și rezultă $|x_1 - x_2| \leqslant \sqrt{10}$. 3°. Deoarece $x_1 + x_2 = m$ și $-m^2 + 20m - 90 \geqslant 0$ rezultă $10 - \sqrt{10} \leqslant m = x_1 + x_2 \leqslant 10 + \sqrt{10}$. 4°. Din relația 1° rezultă $(x_1 - 5)^2 \leqslant 5$ și $(x_2 - 5)^2 \leqslant 5$, de unde obținem $x_1, x_2 \in [5 - \sqrt{5}, 5 + \sqrt{5}]$. 5°. Fie $\frac{x_1}{x_2} = t$. Pentru a arăta că $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2$ trebuie să arătăm că avem $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 \leqslant 0$. Înlocuind, obținem

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} - \frac{5}{2}\frac{x_1}{x_2} + 1 = \frac{2x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_2^2}{2x_2^2} = \frac{1}{4x_2^2}[4(x_1^2 + x_2^2) - 10x_1x_2] =$$

$$= \frac{1}{4x_2^2}[4(10m - 45) - 5(m^2 - 10m + 45)] = \frac{-5}{4x_2^2}(m - 9)^2 \leqslant 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat. d) $x_1^2 + x_2^2 = 10m - 45$ și $m \in [10 - \sqrt{10}, 10 + \sqrt{10}]$; rezultă $55 - 10\sqrt{10} \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 55 + 10\sqrt{10}$.

2. Problema revine la a arăta că triunghiul $A_2B_2C_2$ are aria cel mult 1/4 din aria triunghiului ABC. Dacă proiectăm triunghiul ABC pe un alt plan, raportul ariei determinate de picioarele cevienelor și a ariei triunghiului nu se modifică. Vom nota rapoartele care intervin în teorema lui Ceva: $\frac{BA_2}{A_2C} = K_1$, $\frac{CB_2}{B_2A} = K_2$, $\frac{AC_2}{C_2B} = K_3$. În virtutea teoremei lui Ceva avem $K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 = 1$. Ținem seama și de faptul că raportul ariilor a două triunghiuri care au cîte un unghi, respectiv, congruent este egal cu raportul produselor laturilor alăturate care determină unghiurile congruente. Fie S aria triunghiului ABC și S_2 aria triunghiului $A_2B_2C_2$. Atunci avem

$$\frac{\sigma[AB_2C_2]}{S} = \frac{AC_2 \cdot AB_2}{l_2} \Rightarrow \frac{AC_2}{AB} = \frac{K_3}{K_3 + 1} \Rightarrow AC_2 = \frac{lK_3}{K_3 + 1}$$

($\triangle ABC$ este echilateral de latură l). Deci

$$\sigma[AB_2C_2] = \frac{SK_3}{(K_3 + 1)(K_2 + 1)}, \quad \sigma[BA_2C_2] = \frac{SK_1}{(K_1 + 1)(K_3 + 1)}.$$

$\sigma[CA_2B_2] = \dfrac{SK_2}{(K_1+1)(K_2+1)}$. Avem $S_2 = \dfrac{2S}{K_1K_2+K_2K_3+K_3K_1+K_1+K_2+K_3+2} =$

$$= \frac{2S}{\left(\frac{1}{K_3}+K_3\right)+\left(\frac{1}{K_2}+K_2\right)+\left(\frac{1}{K_1}+K_1\right)+2} \leqslant \frac{2S}{2+2+2+2} = \frac{S}{4}.$$

3. $f(x) \in \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

4. Trecînd toţi termenii în membrul întîi şi adunînd şi scăzînd $\sin^4 nx$, ecuaţia dată devine $(2\sin x - \sin^2 nx)^2 + \sin^2 nx(1-\sin^2 nx) = 0$. Rezultă ecuaţiile: (1) $2\sin x - \sin^2 nx = 0$ şi (2) $\sin^2 nx \cos^2 nx = 0$, care trebuie satisfăcute simultan. (2) se mai scrie $\sin^2 2nx = 0$ cu soluţiile $x = \dfrac{k\pi}{2n}$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Aceste valori trebuie să verifice ecuaţia (1), deci $\sin\dfrac{k\pi}{2n} = \dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{k\pi}{2}$. Dar această ultimă expresie este egală cu $\dfrac{1}{2}$ pentru k impar şi cu 0 pentru k par. Să analizăm cele două cazuri: a) Pentru k par trebuie ca $\sin\dfrac{k\pi}{2n} = 0$, de unde $\dfrac{k\pi}{2n} = s\pi$ cu $s \in \mathbf{Z}$ şi obţinem o primă familie de soluţii $x = s\pi$, independent de n. b) Pentru k impar obţinem: $\sin\dfrac{k\pi}{2n} = \dfrac{1}{2}$, deci $\dfrac{k\pi}{2n} = (-1)^t\dfrac{\pi}{6} + t\pi$ sau $k = \dfrac{2n}{6}((-1)^t + 6t)$, unde $t \in \mathbf{Z}$, iar k trebuie să fie număr impar, deci $n = 3(2p+1)$, unde $p \in \mathbf{N}$. În acest caz găsim o a doua familie de soluţii: $x = (-1)^t\dfrac{\pi}{6} + t\pi$, independente de n, care sînt soluţii numai pentru $n \equiv 3 \pmod 6$. Pentru $n = 3$ ambele familii sînt soluţii ale ecuaţiei.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) $\Delta = 4(-m^2+4m+4)$, $x_V = \dfrac{m}{2}$, $y_V = \dfrac{m^2-4m+4}{2}$, $y_{min} = -4$. b) $|x_1 - x_2| = \sqrt{-m^2+4m+4}$, deci $\max|x_1-x_2| = 2\sqrt{2}$. c) $x_1 + x_2 = m > 0$; $2x_1x_2 = m^2 - 2m - 2 > 0$, deci $m \in [1+\sqrt{3}, \infty)$. Obţinem $(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2 = m + \sqrt{2(m^2-2m-2)}$. Trebuie ca $m^2 - 2m - 2 \geqslant 0$. Se deduce că cea mai mică valoare a expresiei $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ este $\sqrt{1+\sqrt{3}}$. d) Condiţia dată se mai scrie: $\sqrt{-m^2+4m+4} = 2|m^2-4m-4|$, de unde $-m^2 + 4m + 4 = \dfrac{1}{4}$ sau $-4m^2 + 16m + 15 = 0$ cu rădăcinile $m_{1,2} = 2 \pm \dfrac{\sqrt{31}}{2}$. Focarul parabolei are coordonatele $F\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$, deci $y_F = (4m^2 - 16m - 15)/8 = 0$. e) $(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 = 4$. f) $x_1, x_2 \in [-1, 3]$. g) $x_1x_2 = (m^2 - 2m - 2)/2$, iar $m \in [2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}]$. Rezultă că $x_1x_2 \in \left[-\dfrac{3}{2}, 3+2\sqrt{2}\right]$.

2. $7 \sin a = 3 \sin(a + b) \Leftrightarrow 7 \sin\left(\frac{2a+b}{2} - \frac{b}{2}\right) = 3 \sin\left(\frac{2a+b}{2} + \frac{b}{2}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4 \sin \frac{2a+b}{2} \cos \frac{b}{2} = 10 \cos \frac{2a+b}{2} \sin \frac{b}{2} \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg} \frac{2a+b}{2} = 5 \operatorname{tg} \frac{b}{2}$.

3. Pentru ușurință considerăm dreapta d_1 orizontală și d_3 verticală. Dreapta d_2 o vom desena oblică. Pe un plan (P) care se rotește în jurul lui d_3, proiecția dreptei orizontale d_1 se va afla totdeauna în planul orizontal care conține pe d_1. Planul vertical (P) conținînd pe d_3 este mobil. Planul orizontal generat de proiecția lui d_1, pe care îl notăm cu Q, este însă fix. Aceste plane (P) și (Q) au un punct comun fix A. Dreapta d_2 (fixă) înțeapă planul fix (Q) în B și se proiectează pe planul mobil (P) după dreapta mobilă Δ. Din intersecția C a celor două proiecții se vede segmentul fix $[AB]$ după un unghi drept, deci C descrie un cerc orizontal de diametru $[AB]$ situat în planul (Q). Dacă d_1 este perpendiculară pe planul (P) proiecția ei va fi chiar A și se va găsi pe cercul loc geometric numai dacă $B \in d_1$. Deci, în general, locul căutat este un cerc de diametru $[AB]$ situat în planul (Q), din care se elimină un punct, care este intersecția acestui cerc cu paralela dusă din B la d_1.

4. a) Trebuie ca $\Delta = -m^2 + 8m - 8 < 0$, deci $m \in (-\infty, 4-2\sqrt{2}) \cup$ $\cup (4 + 2\sqrt{2}, \infty)$. b) Prima egalitate rezultă din relațiile lui Viète: $x_1 + x_2 = m$ și $x_1 x_2 = \frac{m^2 - 4m + 4}{2}$; ea se mai scrie: $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 4$. Obținem de asemenea $|x_1 - x_2| = \sqrt{-m^2 + 8m - 8} \leqslant 2\sqrt{2}$ și acest maximum se atinge pentru $m = 4$. Celelalte două duble inegalități pentru $x_1 x_2$ și $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ se deduc pe baza intervalului de variație a lui m pentru ca rădăcinile să fie reale, iar $\frac{x_1}{x_2} = 2x_1^2 / (m-2)^2 \geqslant 0$.

5. Substituind $\operatorname{tg}(A + B) = -\operatorname{tg} C$ obținem:

$$E = \frac{-\operatorname{tg} C(\operatorname{tg}(A + x) + \operatorname{tg} B))}{\operatorname{tg}(A + B + x)} = \frac{-\operatorname{tg} C \cos(A + B + x)}{\cos(A + x) \cos B}.$$

Prin înlocuirea lui x prin C se obține expresia $-\frac{\operatorname{tg} C}{\cos^2 B}$.

6. a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{C_4^3}{C_7^4} = \frac{4}{35}$.

Anul 1974

Etapa județeană

1. a) Notăm $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 x_2$. Deci $S = \frac{2(m-3)}{m}$, $p = \frac{m+3}{m}$. Eliminînd m între cele două relații se obține o relație în S și p de forma $2p + S = 4$ sau $2x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 4$. b) Din $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ rezultă $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$, care ne conduce la soluția $m_1 = -18 \pm 3\sqrt{33}$. c) $P(x_0, m) = mx_0^2 - 2mx_0 + 4x_0 +$ $+ m + 3 = m(x_0 - 1)^2 + 6x_0 + 3$. $x_0 = 1 \Rightarrow P(1, m) = 9$.

2. a) Graficul se face pe intervale. b) $[x] = \frac{3}{2}x - 2$. Se determină soluția ecuației pe intervale:

1) $x \in [0, 1) \Rightarrow x = \frac{4}{3} \notin [0, 1]$; 2) $x \in [1, 2) \Rightarrow x = 2$ nu convine;

3) $x \in [2, 3) \Rightarrow x = \frac{8}{3}$; 4) $x \in [3, 4) \Rightarrow x = \frac{10}{3}$;

5) $x \in [4, 5) \Rightarrow x = 4$; 6) $x = 5 \Rightarrow x = \frac{14}{13}$ nu convine.

Rădăcinile ecuației sînt $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$, 4.

3. Evident, punctul P va fi situat în planul $(QRST)$ ce va fi situat la egală distanță de planele $(AD'DA)$ și $(B'C'CB)$. Dacă M se află în punctul A' și N parcurge segmentul $[BC]$, punctul P va parcurge $[OV]$ linia mijlocie a triunghiului $A'BC'$. Dacă M se deplasează pe $A'D$, această linie mijlocie va avea o mișcare de translație în planul $(QRST)$ și va mătura suprafața pătratului $UVLI$, unde U, L, V, I sînt mijloacele segmentelor $[TS]$, $[SQ]$, $[QR]$, $[RT]$.

4. a) Avem $\sin a + \cos a = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$, $\sin a - \cos a = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$. Evident $\sin a \pm \cos a \leqslant 1$. b) $E(a) = 2\sin\left[\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}(\sin a - \cos a)\right]\sin\left[\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}(\cos a + \sin a)\right]$ c) $b_0 = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$, unghiurile sînt în primul cadran și deci $E(a) \geqslant 0$, pentru orice $b \in \left[0, \frac{\pi}{4}\sqrt{2}\right]$.

Etapa finală

1. Din condițiile de existență a radicalilor rezultă $x \geqslant 2$. Egalitatea are loc pentru $A^{\sqrt{x-2}} = 1$ și $B^{\sqrt{x^2-3x+2}} = 1$ și deci $x = 2$.

2. Presupunem că

$$\log_a N = \frac{p_1}{q_1} \text{ și } \log_b N = \frac{p_2}{q_2} \ (p_i, q_i \in \mathbf{Z}, q_i \neq 0 \text{ pentru } i = 1, 2).$$

Se obține $N = a^{\frac{p_1}{q_1}}$, $N = b^{\frac{p_2}{q_2}}$ și rezultă $a^{\frac{p_1}{q_1}} = b^{\frac{p_2}{q_2}} \Rightarrow a^{p_1 q_2} = b^{p_2 q_1}$, fals, deoarece numerele a și b sînt numere naturale prime între ele.

3. Avem $|\sin a_1 x \sin a_2 x \ldots \sin a_n x + \cos a_1 x \cos a_2 x \ldots \cos a_n x| \leqslant |\sin a_1 x \sin a_2 x \ldots \sin a_n x| + |\cos a_1 x \cos a_2 x \ldots \cos a_n x| \leqslant |\sin a_1 x \sin a_2 x| + |\cos a_1 x \cos a_2 x|$. Indiferent de semnele expresiilor din paranteză vom obține una din formele $\pm\cos(a_1 \pm a_2)x$, pentru care avem $|\pm\cos(a_1 + a_2)x| \leqslant 1$.

4. Ducem prin A semidreptele $[Ax$, $[Ay$, $[Az$ paralele cu dreptele D_1, D_2, D_3. Luăm pe aceste semidrepte punctele M, N, P astfel ca $AM = AN = AP$. Perpendiculara din A pe planul (MNP) este egal înclinată față de AX, AY, AZ și deci față de dreptele D_1, D_2, D_3. Dacă dreptele sînt coplanare, dreapta va fi perpendiculara din A pe planul determinat de cele trei drepte.

5. a) $\dfrac{\sigma[VB'C']}{\sigma[VBC]} = \dfrac{\frac{1}{2} VB' \cdot VC' \sin \widehat{BVC}}{\frac{1}{2} VB \cdot VC \sin \widehat{BVC}} = \dfrac{VB' \cdot VC'}{VB \cdot VC}$ Rezultă cu ușurință relația cerută. b) $V[VA'B'C'D'] = \frac{1}{2} V[VABCD] = K_B K_D (K_A + K_C)$. c) Avem: $V[VA'B'C'D'] = V[VA'C'B'] + V[VA'C'D']$. Deci $K_B K_D (K_A + K_C) = K_A K_C (K_B + K_D)$, de unde $\dfrac{1}{K_A} + \dfrac{1}{K_B} = \dfrac{1}{K_C} + \dfrac{1}{K_D}$.

Anul 1975

Etapa județeană

1. Ținînd cont de perioadele principale ale funcțiilor care intervin în ecuația dată, rămîn de verificat numai soluțiile pentru $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, de unde se determină condițiile $a + b = c + d$ și $a - b = -c + d$. Găsim că $a = d$ și $b = c$. În aceste condiții ecuația devine

$$a \sin x + b \sin 3x + b \sin 5x + a \sin 7x = 0 \quad \text{sau}$$

$$a \sin 4x \cos 3x + b \sin 4x \cos x = 0 \quad \text{sau} \quad \sin 4x (a \cos 3x + b \cos x) = 0.$$

Ecuația $\sin 4x = 0$ are soluțiile $x = \dfrac{k\pi}{4}$ cunoscute. Ecuația $a \cos 3x + b \cos x = 0$ devine $a \cos x (4 \cos^2 x - 3) + b \cos x = 0$. Ecuația $\cos x = 0$ nu admite soluții noi. Rămîne de rezolvat ecuația $4a \cos^2 x = 3a - b$, de unde găsim că $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{a + b}{3a - b}$. Deducem și celelalte soluții ale ecuației, punînd condiția $\dfrac{a + b}{3a - b} \geqslant 0$. b) Pentru $b = 1$, obținem $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{a + 1}{3a - 1}$ și, punînd condiția ca această ecuație să nu mai admită alte rădăcini decît cele din ipoteză, adică $\dfrac{a - 1}{3a - 1} < 0$, găsim că $a \in \left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$. Deci, pentru $b = c = 1$ și $a = d \in \left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$.

2. a) Fie $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ariile fețelor poliedrului convex. Să notăm cu $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 90°$ măsurile unghiurilor diedre dintre planul feței de arie S_1 și respectiv planele care conțin fiecare față de arie S_i, $i = \overline{2, n}$. Să proiectăm suprafețele poligonale de arii $S_2, S_3, \ldots, S_n$ pe planul care conține suprafața poligonală de arie S_1. Rezultă că $S_1 \leqslant S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 + \ldots + S_n \cos \alpha_n \leqslant S_2 + S_3 + \ldots + S_n$. b) Fie $F_1, F_2, \ldots, F_n$ fețele poliedrului interior P_1. Planul feței F_1 determină în poliedrul P două poliedre convexe Q_1 și Q_1', dintre care unul, să zicem Q_1, include poliedrul P_1. Conform punctului a, aria acelei fețe a lui Q_1' situată în planul lui F_1 este mai mică decît suma ariilor celorlalte fețe ale lui Q_1'; adunînd în această inegalitate aria lui Q_1 mai puțin aria feței comune cu Q_1', obținem $\sigma[Q_1] < \sigma[P]$. Planul feței F_2 determină în poliedrul Q_1 două poliedre convexe Q_2 și Q_2', dintre care Q_2 include P_1 și avem $\sigma[Q_2] < \sigma[Q_1]$. Continuînd raționamentul, la pasul n vom obține că planul

feței F_n determină în poliedrul Q_{n-1} două poliedre convexe Q_n și Q'_n, dintre care Q_n este chiar poliedrul P_1 și avem asemănător $\sigma[P_1] = \sigma[Q_n] < \sigma[Q_{n-1}]$. Comparînd inegalitățile obținute, rezultă

$$\sigma[P] > \sigma[Q_1] > \sigma[Q_2] > \quad > \sigma[Q_{n-1}] > \sigma[Q_n] = \sigma[P_1].$$

Așadar $\sigma[P_1] < \sigma[P]$.

3. Fie a, b strict pozitive diferite. Ecuația se poate scrie $\left(\frac{b}{a}\right)^x + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = 2$ cu soluțiile $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = -2$ și $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = 1$. Convine numai $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = 1$, deci $x = 0$. Dacă $a = b$ atunci $a = b = c$ și ecuația are ca soluție orice $x \in \mathbf{R}$.

4. Pentru simplificarea demonstrației notăm $\operatorname{tg} x = a$ și $\operatorname{tg} y = b$. Inegalitatea devine

$$(a^2 + b^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geqslant (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 \geqslant ba^3 + b^3a$$

$$+ 2a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2 + ab + b^2)(a - b)^2 \geqslant 0, \text{ evident.}$$

Egalitatea se poate obține numai cînd $a = b$, adică pentru $x - y = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

5. A se vedea soluția problemei 5 de la clasa a IX-a, etapa județeană, 1975.

Etapa finală

1. Pentru $a = \sqrt{2}$ și $b = \log_{\sqrt{2}} 3$, $a^b = 3$. Deoarece $\sqrt{2}$ este irațional, rămîne de arătat că $\log_{\sqrt{2}} 3$ este irațional. Să presupunem că $\log_{\sqrt{2}} 3$ este rațional, adică $\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{p}{q}$, unde p și q sînt două numere naturale prime între ele. Rezultă că $(\sqrt{2})^{p/q} = 3$ sau $2^p = 3^{2q}$. Această egalitate este imposibilă. Deci $\log_{\sqrt{2}} 3$ este irațional.

2. Ecuația se mai poate scrie

$$2\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x) = 3 \Leftrightarrow \sin 4x - \sin 6x + \sin 2x = 3,$$

relație care este adevărată numai dacă $\sin 4x = 1$, $\sin 6x = -1$ și $\sin 2x = 1$. Din relația $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$, ținînd cont că $\sin 2x = 1$, rezultă $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Deci $1 = \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 + \frac{1}{4}$ contradicție, și rezultă atunci că ecuația nu are soluții.

3. Presupunem că există un poliedru care ar avea două centre de simetrie A și B. Dreapta AB intersectează frontiera poliedrului în două puncte și numai în două puncte, deoarece poliedrul este convex. Fie M și N cele două puncte. Punctele M și N trebuind să fie simetrice față de centrele de simetrie, rezultă că segmentul $[MN]$ ar avea două mijloace, contradicție.

4. Fie H ortocentrul feței $[BCD]$ unde cade înălțimea din A. Din faptul că toate înălțimile piramidei sînt congruente, rezultă că toate fețele ei au aceeași arie, adică $\sigma[ABC] = \sigma[BCD] = \sigma[ACD] = \sigma[ABD]$. Din faptul că $\sigma[ABC] = \sigma[BCD]$,

rezultă că înălțimea din A a feței $[ABC]$ este congruentă cu înălțimea din D a feței $[DBC]$ și din teorema celor trei perpendiculare ele se întîlnesc în același punct A' pe muchia $[BC]$. Triunghiurile $AA'C$ și $DA'C$ sînt congruente, de unde rezultă că $(AB) \equiv (BD)$. Ducînd înălțimea BB' în triunghiul BCD se demonstrează, analog că $(AC) \equiv (BC)$ și $(AD) \equiv (BD)$. Ducînd înălțimea CC' în triunghiul BCD, rezultă analog ca mai sus că $(AB) \equiv (BC)$ și $(AD) \equiv (CD)$. Rezultă în final că $(AB) \equiv (BC) \equiv (CD) \equiv (DB) \equiv (AC) \equiv (AD)$, adică tetraedrul este regulat.

5. Vom arăta mai întîi că $\sum_{i=1}^{n} x_i = na$. Din i) rezultă $a + ax_1 \geqslant ax_2 + x_2$, $a + ax_2 \geqslant ax_3 + x_3, \ldots, a + ax_{n-1} \geqslant ax_n + x_n$ și $a + ax_n \geqslant ax_1 + x_1$. Adunînd toate aceste relații obținute găsim că $na \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i$. Ținînd cont de ii), deducem că $\sum_{i=1}^{n} x_i = na$. De aici rezultă că fiecare inegalitate nestrictă din șir este de fapt o egalitate. Deci $a + a_{k-1} = ax_k + x_k$ sau $x_k = \dfrac{a + ax_{k-1}}{a+1}$. Din ultima relație deducem pe rînd că $x_2 = \dfrac{a}{a+1} + \dfrac{a}{a+1}x_1$. Notînd $\dfrac{a}{a+1} = y \neq 1$, rezultă că $x_2 = y + yx_1$, $x_3 = y + y^2 + y^2x_1$, $x^4 = y + y^2 + y^3 + y^3x_1$, $\ldots, x_n = y + y^2 + y^3 + \ldots + y^{n-1} + y^{n-1}x_1$ și $x_1 = y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n + y^nx_1$, de unde găsim $x_1(1 - y^n) = y + y^2 + \ldots + y^n$ sau $x_1(1 - y)(1 + y + \ldots + y^{n-1}) = y(1 + y + \ldots + y^{n-1})$, adică $x_1 = \dfrac{y}{1-y}$. Deci $x_1 = \dfrac{y}{1-y} = a$, $x_2 = \dfrac{a}{a+1} + \dfrac{a^2}{a+1} = a$. Presupunem că $x_{k-1} = a$. Din relația $x_k = \dfrac{a + a_{k-1}}{a+1}$ rezultă că $x_k = a$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

6. a) Relația $a + b + c + d = 2\pi$ implică $\cos\dfrac{a+c}{2} = -\cos\dfrac{b+d}{2}$ și dezvoltînd ambii membri se obține

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} - \sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} = -\cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2};$$

de unde rezultă:

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2} = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{a+c}{2} + \cos\frac{a-c}{2} + \cos\frac{b+d}{2} + \cos\frac{b-d}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{a-c}{2} + \cos\frac{b-d}{2}\right) = \cos\frac{a-c+b-d}{4}\cos\frac{a-c-b+d}{4} =$$

$$= \cos\frac{2(a+b)-2\pi}{4}\cos\frac{2(a+d)-2\pi}{4} = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+d}{2}.$$

b) Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Trebuie să arătăm că

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Aplicînd teorema sinusurilor obținem

$$(2R)^2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} + (2R)^2 \sin \frac{d}{2} \sin \frac{b}{2} = (2R)^2 \sin \frac{a+d}{2} \sin \frac{a+b}{2},$$

adică relația demonstrată.

Anul 1976

Etapa județeană

1. Ecuația devine

$$\sqrt{\log_a |x+a|} + \sqrt{\log_a |x-a|} = \sqrt{2\log_a |x^2-a^2|} \text{ sau}$$

$$\log_a |x+a| + 2\sqrt{\log_a |x+a| \cdot \log_a |x-a|} + \log_a |x-a|$$

$$= 2\log_a |x^2-a^2| \text{ sau } \log_a |x+a| + \log_a |x-a| - 2\sqrt{\log_a |x+a| \cdot \log_a |x-a|} = 0,$$

de unde rezultă că

$$(\log_a |x+a| - \log_a |x-a|)^2 = 0 \Rightarrow \log_a |x+a| - \log_a |x-a| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a |x+a| = \log_a |x-a| \Rightarrow |x+a| = |x-a|$$

de unde se găsește soluția $x = 0$.

2. Notăm $E(n) = \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-2} + \ldots + \frac{1}{8n}$ și demonstrăm prin inducție că $E(n) > \frac{5}{8}$.

3. Avem următoarele egalități datorită condițiilor din enunț $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = -x = -f^{-1}(y)$ și deci $f^{-1}(y) = -f^{-1}(-y)$, adică f^{-1} este impară.

4. Din relația $4RS = abc$ rezultă

$$4R^3 = abc \Leftrightarrow 4R^3 = 2R\sin A \cdot 2R\sin B \cdot 2R\sin C \Leftrightarrow 2\sin A \sin B \sin C = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B) - \cos(A+B)\sin C = 1 \Leftrightarrow \sin C\cos(A-B) - \sin C\cos(A+B) = 1 \Leftrightarrow \sin(A-B+C) + \sin(-A+B+C) - \sin(A-B+C) - \sin(A+B+C) = 2 \Leftrightarrow \sin(\pi-2B) + \sin(\pi-2A) + \sin(\pi-2C) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2.$$

Observăm că $\sin 2A = 2 - \sin 2B - \sin 2C > 0$ și deci $0 < 2A < \pi$, de unde rezultă $A < \frac{\pi}{2}$. La fel arătăm că $B < \frac{\pi}{2}$ și $C < \frac{\pi}{2}$.

5. $a^{\log_{\sqrt{a}} \sin x + \log_{\sqrt{a}} \cos x} \leqslant A \Leftrightarrow (\sqrt{a})^{2\log_{\sqrt{a}} \sin x \cos x} \leqslant A \Leftrightarrow (\sin x \cos x)^2 \leqslant A \Leftrightarrow \sin^2 2x \leqslant 4A \Leftrightarrow 2\sin^2 2x \leqslant 8A \Leftrightarrow 1 - \cos 4x \leqslant 8A \Leftrightarrow \cos 4x \geqslant 1 - 8A$.

Deci dacă $1 - 8A < -1$, adică $A > \frac{1}{4}$, ținînd cont de condițiile de existență ale problemei, rezultă că pentru $(\forall) x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, avem $\cos 4x \geqslant 1 - 8A$.

Deci $M_A = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$. Dacă $-1 \leqslant 1 - 8A \leqslant 1$, cum $\cos 4x \geqslant 1 - 8A$,

rezultă că $\arccos(1-8A) - 2k\pi \leqslant 4x \leqslant \arccos(1-8A) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ și deci $-\frac{1}{4}\arccos(1-8A) - \frac{k\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\arccos(1-8A) + \frac{k\pi}{2}$. Ținînd cont de condițiile de existență ale problemei, pentru $k = 0$ obținem $x \in \left(0, \frac{1}{4}\arccos(1-8A)\right)$ și pentru $k=1$ obținem $x \in \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\arccos(1-8A), \frac{\pi}{2}\right)$. Rezultă deci că în acest caz soluția generală este

$$M_A = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(\left(2k\pi, \frac{1}{4}\arccos(1-8A) + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\arccos(1-8A) + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right).$$

Dacă $1-8A > 1$ atunci $M_A = \emptyset$. b) Avem de studiat trei posibilități: i) Dacă $A > \frac{1}{4}$ și $B > \frac{1}{4}$ atunci $M_A = M_B$ și rezultă că $M_A = M_B$, $(\forall)A > \frac{1}{4}$ și $B > \frac{1}{4}$. ii) Dacă $0 \leqslant A \leqslant \frac{1}{4}$ și $0 \leqslant B \leqslant \frac{1}{4}$ atunci pentru a avea $M_A = M_B$ rezultă că $A = B$, deoarece funcția arccos este bijectivă. Deci $M_A = M_B$ dacă $A = B$ și $0 \leqslant A \leqslant \frac{1}{4}$, $0 \leqslant B \leqslant \frac{1}{4}$; iii) Dacă $A < 0$ și $B < 0$ atunci $M_A = M_B = \emptyset$ și deci $M_A = M_B$, $(\forall)A < 0$ și $B < 0$.

Etapa finală

1. Fie mulțimea A o mulțime finită cu n elemente; atunci A^2 are n^2 elemente iar mulțimea $\mathcal{P}(A)$ are 2^n elemente. Pentru a exista bijecții trebuie ca $n^2 = 2^n$. Deci problema se reduce la a determina soluțiile naturale ale ecuației $2^n = n^2$.

Dacă $n = 1 \Rightarrow 2^1 \neq 1^2$, deci 1 nu este soluție.

Dacă $n = 2 \Rightarrow 2^2 = 2^2$; rezultă că 2 este soluție.

Dacă $n = 3 \Rightarrow 2^3 \neq 3^2$, deci 3 nu este soluție.

Dacă $n = 4 \Rightarrow 2^4 = 4^2$; rezultă că 4 este soluție.

Se arată acum prin inducție completă că dacă $n \geqslant 5$, atunci $2^n > n^2$. În concluzie, avem numai două soluții, 2 și 4. Pentru $n = 2$ avem 4 iar pentru $n = 4$ avem 16 bijecții.

2. Notăm $k = \sum_{i=1}^{n} x_i > 0$. Inegalitatea devine

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(k-(x_1+x_2))(x_1-x_2)}{x_1+x_2} + \frac{(k-(x_2+x_3))(x_2-x_3)}{x_2+x_3} + \dots + \frac{(k-(x_{n-1}+x_n))(x_{n-1}-x_n)}{x_{n-1}+x_n} + \frac{(k-(x_n+x_1))(x_n-x_1)}{x_n+x_1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k\left(\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_2-x_3}{x_2+x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}-x_n}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n-x_1}{x_n+x_1}\right) +$$

$$+ (x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \dots + x_{n-1} - x_n + x_n - x_1) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(n) = \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_2-x_3}{x_2+x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}-x_n}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n-x_1}{x_n+x_1} \geqslant 0,$$

deoarece $k > 0$. Se arată prin inducție că $E(n) \geqslant 0$ pentru $n \geqslant 2$.

3. Să presupunem că punctele M și N plecă în același timp unul din A și celălalt din B. Locul geometric descris de P va fi reuniunea locurilor geometrice descrise de P atunci cînd M și N descriu fiecare cîte un segment din linia poligonală descrisă de fiecare din punctele M și N. Să notăm cu L_1, L_2, L_3, L_4 mijloacele segmentelor (AB), (BC), $(B'C')$, $(D'C')$. Locul geometric căutat va fi $(L_1L_2) \cup (L_2L_3) \cup (L_3L_4) \cup (L_4L_1)$. Să studiem pe rînd fiecare caz.

1) Dacă M se mișcă pe (AB) și N pe (BC) se demonstrează ușor că locul geometric al punctului P este inclus în segmentul (L_1L_2). Reciproc, dacă $P \in (L_1L_2)$ se construiesc P' și P'' proiecțiile lui P pe (AB) și respectiv (BC). Fie M simetricul lui B față de P' și N simetricul lui B față de P'': rezultă ușor că P este mijlocul segmentului (MN) și că $(AM) \equiv (BN)$. Deci (L_1L_2) este inclus în locul geometric al punctului P.

2) M se mișcă pe (BB') iar N se mișcă pe (CC'). Dacă $MB=a \Rightarrow NC=a \Rightarrow MBCN$ dreptunghi $\Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow (MN) \equiv (PN)$ și deci $P \in (L_2L_3)$. Reciproc, fie $P \in (L_2L_3)$; ducem paralela la BC, ce taie pe (BB') în M și pe (CC') în $N \Rightarrow (MB) \equiv (NC)$ și deci P este mijlocul lui (MN). Rezultă că (L_2L_3) este inclus în locul geometric al lui P.

3) M se mișcă pe $(B'C')$ și N se mișcă pe $(C'D')$; atunci, analog ca la punctul 1, se demonstrează că (L_3L_4) este inclus în locul geometric al punctului P.

4) M se mișcă pe $(C'C)$ și N se mișcă pe $(D'A')$. Atunci avem $(D'N) \equiv (C'M)$. Fie $SN \parallel A'B'$ și $S \in (B'C')$. Fie $MQ \parallel A'B'$ și $Q \in (DD')$; atunci $NSMQ$ este dreptunghi deci $P \in (S'Q')$, unde $\{S'\} = C'B \cap SM$ și $\{Q'\} = D'A \cap QN$. Deducem că P aparține segmentului (L_4L_1). Cînd $N=A'$ atunci $M=C$ și $P=O$, unde O este centrul cubului. Deci am arătat că $P \in (L_4O)$. Fie $P \in (L_4O)$. Ducem $PS' \parallel D'C'$ $S' \in (BC')$, $PS' \cap D'A = \{Q'\}$, $Q'N \perp AD$ și $S'M \perp BC'$ de unde rezultă că $M \in C'C$, $N \in D'A'$ și $(D'N) \equiv (C'M)$, deci am demonstrat că segmentul (OL_4) este inclus în locul geometric al punctului P.

5) M se mișcă pe (CD) și N se mișcă pe $(A'B)$. Atunci avem $(MC) \equiv (A'N)$ și deci $A'NCM$ este paralelogram; rezultă că P coincide cu mijlocul lui $(A'C)$ și în acest caz $P=O$. În acest caz locul geometric este format dintr-un singur punct, centrul cubului.

6) Dacă M se mișcă pe (DA) și N se mișcă pe $(B'B)$, se tratează asemănător ca la punctul 4 și se găsește în acest caz că locul geometric este segmentul (OL_1). În concluzie, locul geometric cerut este reuniunea celor șase locuri geometrice, adică mulțimea $(L_1L_2) \cup (L_2L_3) \cup (L_3L_4) \cup (L_4L_1)$.

4. a) Deoarece $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_1 \quad x_2 \in (0, \pi) \Rightarrow \frac{x_1 \quad x_2}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și deci $0 \leqslant \cos \frac{x_1 \quad x_2}{2} \leqslant 1$. Atunci

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} - \cos \frac{x_1 + x_2}{2} = \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2} - \cos \frac{x_1 + x_2}{2} =$$

$$\cos \frac{x_1 \quad x_2}{2}\left(\cos \frac{x_1 \quad x_2}{2} - 1\right) = -2 \cos \frac{x_1 \quad x_2}{2} \sin^2 \frac{x_1 \quad x_2}{4} \leqslant 0,$$

de unde rezultă inegalitatea propusă. b) Deoarece $x_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $i \in \{1, 2, .., 8\}$ rezultă că și $\left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right) / 8 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Atunci

$$\sum_{i=1}^{8} \cos x_i \leqslant 2\cos\frac{x_1+x_2}{2} + 2\cos\frac{x_3+x_4}{2} + 2\cos\frac{x_5+x_6}{2} + 2\cos\frac{x_7+x_8}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 4\cos\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} + 4\cos\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4} \leqslant 8\cos\frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8}.$$

Relaţia dată se poate generaliza pentru orice $n = 2^k$, $k \in \mathbf{N}$. c) În relaţia de la punctul b să considerăm $x_8 = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7}$ şi inegalitatea devine:

$$\sum_{i=1}^{7} \cos x_i + \cos\frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} \leqslant 8\cos\frac{\sum_{i=1}^{7} x_r + \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7}}{8},$$

de unde rezultă relaţia cerută: $\sum_{i=1}^{7} \cos x_i \leqslant 7\cos\frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7}$.

5. a) Fie $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; atunci $\pi - t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi notăm $\sin(\pi - t) = x$. Funcţia $\sin(\pi - t) = x$ este inversabilă şi atunci $\pi - t = \arcsin x$, de unde găsim că $t = \pi - \arcsin x$. Rezultă deci că

$$f(\sin t) = f(\sin(\pi - t)) \Rightarrow f(x) = (\pi - \arcsin x)^2 - \pi(\pi - \arcsin x) =$$
$$= (\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x.$$

Rezultă deci că $f(x) = (\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x$. b) Funcţia f este o funcţie compusă $f = g \circ h$, unde $h(x) = \arcsin x$, $h : [0, 1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este o funcţie bijectivă şi $g(x) = x^2 - \pi x$, $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[-\frac{\pi^2}{4}, 0\right]$, care este tot o funcţie bijectivă.

Anul 1977

Etapa judeţeană

1. Fie $k \in \mathbf{N}$, $k \leqslant n$. Avem, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$:

$$\sqrt[2^{k+1}]{\operatorname{tg}(2^k x)} = \sqrt[2^{k+1}]{\frac{\sin(2^k x)}{\cos(2^k x)}} = \sqrt[2^{k+1}]{\frac{2\sin(2^k x)\sin(2^k x)}{2\cos(2^k x)\sin(2^k x)}} = \frac{2^{\frac{1}{2^{k+1}}}\sqrt[2^k]{\sin(2^k x)}}{\sqrt[2^{k+1}]{\sin(2^{k+1}x)}},$$

deci

$$\sqrt[2^{k+1}]{(\operatorname{tg} 2^k x)} = 2^{\frac{1}{2^{k+1}}} \frac{\sqrt[2^k]{\sin(2^k x)}}{\sqrt[2^{k+1}]{\sin(2^{k+1}x)}}. \tag{1}$$

Facem în (1) $k = 0$, $k = 1$, ..., $k = n$, și înmulțim membru cu membru egalitățile obținute. Ținînd seama de simplificările din membrul drept se obține

$$\sqrt{\operatorname{tg} x}\ \sqrt[4]{\operatorname{tg} 2x} \cdots \sqrt[2^{n-1}]{\operatorname{tg}(2^n x)} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}} \frac{\sin x}{\sqrt[2^{n-1}]{\sin(2^{n+1}x)}} =$$

$$= 2^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt[2^{n+1}]{\sin(2^{n+1}x)}},$$

adică identitatea din enunț. (Am ținut seama de suma unei progresii geometrice; de asemenea, pentru $k = 0$ am utilizat convenția $\sqrt[1]{a} = a$.)

2. Mai întîi să observăm că funcția f este injectivă (și E fiind finită, va fi chiar bijectivă) pentru că $f(x) = f(y) \Rightarrow (f \circ f)(x) = (f \circ f)(y) \Rightarrow x = y$. Să presupunem, prin absurd, că $f(x) \neq x$, $(\forall) x \in E$. Considerăm toate submulțimile lui E de forma $\{x, f(x)\}$, cu convenția de a nu scrie de două ori aceeași submulțime (adică submulțimile respective sînt distincte două cîte două). Să presupunem că aceste submulțimi sînt $\{x_1, f(x_1)\}$, $\{x_2, f(x_2)$, ..., $\{x_k\ f(x_k)\}$. Arătăm că toate elementele $x_1, x_2, \ldots, x_k, f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)$ sînt distincte două cîte două: în primul rînd $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt distincte (căci dacă am avea $x_i = x_j$, $i \neq j$, atunci $f(x_i) = f(x_j)$ și deci $\{x_i, f(x_i)\} = \{x_j, f(x_j)\}$, adică o mulțime ar apare de două ori); funcția f fiind injectivă rezultă că și elementele $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)$ sînt distincte. De asemenea, $x_i \neq f(x_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ datorită presupunerii făcute. În sfîrșit, $x_i \neq f(x_j)$ pentru $i \neq j$ (căci dacă am avea $x_i = f(x_j)$, cu $i \neq j$, atunci aplicînd funcția f ar rezulta $x_j = f(x_i)$ și atunci $\{x_i, f(x_i)\} = \{x_j, f(x_j)\}$, adică o mulțime ar apare de două ori). Cum fiecare element din E se va găsi într-o asemenea mulțime, rezultă egalitatea:

$$E = \{x_1, f(x_1)\} \cup \{x_2, f(x_2)\} \cup \quad \cup \{x_k, f(x_k)\}$$

și, cum toate elementele din membrul drept sînt distincte, rezultă că E are $2k$ elemente, contradicție. Așadar, presupunerea făcută este falsă și deci $(\exists)\ x \in E$ cu proprietatea $f(x) = x$.

3. Se demonstrează prin inducție propoziția

$$P(n) : a_n = n, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

4. Avem

$$\sin(B+C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B < \sin B + \sin C = 1 - \sin A = 1 - \sin(B+C),$$

de unde $\sin(B + C) < \frac{1}{2}$. Rezultă $B + C < 30°$ sau $B + C > 150°$; ultima posibilitate este însă exclusă (ar rezulta $A < 30°$ și $B > 75°$, adică $A < B$, fals). Prin urmare $B + C < 30°$.

Etapa finală

1. Fie n numărul de vîrfuri ale poligonului. Un segment (latură sau diagonală) este determinat de o submulțime de două vîrfuri, deci există în total C_n^2 asemenea segmente. Numărul diagonalelor se obține scăzînd n (numărul laturilor), deci poligonul are

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} \text{ diagonale.}$$

Fiecărui punct de intersecție a două diagonale (interior poligonului), îi asociem patrulaterul convex avînd ca diagonale cele două diagonale și avînd deci vîrfurile din mulțimea vîrfurilor poligonului. Reciproc, fiecărui patrulater avînd vîrfurile 4 din cele n vîrfuri ale poligonului, îi asociem punctul de intersecție a diagonalelor sale (diagonale care sînt totodată și ale poligonului), punct care este interior poligonului. Asocierea este o bijecție deoarece oricare trei diagonale nefiind concurente nu există două patrulatere cu același punct de intersecție a diagonalelor. Rezultă că numărul punctelor de intersecție ale diagonalelor poligonului, aflate în interiorul poligonului, este egal cu numărul patrulaterelor ce se pot forma cu cîte 4 vîrfuri ale poligonului, deci este egal cu C_n^4. Avem deci de rezolvat ecuația

$$C_n^4 = \frac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} \Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 12.$$

Singura soluție naturală a acestei ecuații este $n = 5$ și deci poligoanele căutate sînt pentagoanele convexe.

2. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$$(1) \qquad \log_a \frac{A}{B} > \log_{B+k}(A+k) - 1 \text{ sau } \log_a \frac{A}{B} > \log_{B+k} \frac{A+k}{B+k}.$$

Pentru a demonstra (1), plecăm de la inegalitatea

$$\frac{A}{B} > \frac{A+k}{B+k}, \text{ valabilă pentru } A > B > 0 \text{ și } k > 0.$$

Cum $a > 1$, rezultă $\log_a \frac{A}{B} > \log_a \frac{A+k}{B+k}$ și, cum $1 < a < B+k$, avem $\log_a \frac{A+k}{B+k} > \log_{B+k} \frac{A+k}{B+k}$. Din ultimele două inegalități, prin tranzitivitate, rezultă (1) și problema este rezolvată.

3. Fie $(AX$ și $(AX'$ cele două semidrepte determinate de punctul A pe dreapta d_1, respectiv $(BY$ și $(BY'$ semidreptele determinate de B pe d_2. Să considerăm situația cînd $M \in (AX$ și $N \in (BY$. Considerăm punctul fix $O \in (AB)$ astfel ca $\frac{OA}{OB} = k$. Fie d_1' și d_2' paralelele prin O respectiv la dreptele d_1 și d_2 și să notăm cu $(OU$, $(OU'$ respectiv $(OV$, $(OV'$ semidreptele determinate de punctul O pe dreptele d_1' și d_2'. În planul (d_1, d_1') ducem $MM' \parallel AB$ ($M' \in (OU$), iar în planul (d_2, d_2') ducem $NN' \parallel AB$ ($N' \in (OV$). Dreptele MM' și NN' fiind paralele determină un plan și în acest plan să notăm $MN \cap M'N' = \{P\}$. Folosind triunghiurile asemenea PMM' și PNN' avem

$$\frac{PM}{PN} = \frac{MM'}{NN'} = \frac{OA}{OB} = k,$$

ceea ce arată că punctul P astfel construit este acel punct din locul geometric situat pe segmentul (MN) ales. Avem, de asemenea,

$$\frac{PM'}{PN'} = \frac{PM}{PN} = k = \frac{MA}{NB} = \frac{M'O}{N'O} \quad \text{adică} \quad \frac{PM'}{PN'} = \frac{M'O}{N'O}.$$

Rezultă că P aparține bisectoarei unghiului fix $\widehat{UOV}$ care este o semidreaptă fixă. Reciproc, fie P un punct aparținînd bisectoarei unghiului $\widehat{UOV}$. Considerăm

unica dreaptă $M'N'$ ce trece prin P (unde $M' \in (OU$, $N' \in (OV)$ astfel ca $\frac{OM'}{ON'} = k$ (construcția acestei drepte este simplă: se iau, de exemplu, $M'' \in (OU$ $N'' \in (OV$ astfel ca $\frac{OM''}{ON''} = k$ și se duce prin P paralela la $M''N''$). Paralelele prin M' și N' la AB intersectează $(AX$ respectiv $(BY$ în M și N. Avem $\frac{OM'}{ON'} = k$ și, cum $AM = OM'$ și $BN = ON'$ deducem $\frac{AM}{BN} = k$. Triunghiurile $PM'M$ și $PN'N$ au $\widehat{PM'M} \equiv \widehat{PN'N}$ (alterne interne), apoi $\frac{PM'}{PN'} = \frac{OM'}{ON'} = k$ (s-a aplicat teorema bisectoarei) și $\frac{M'M}{N'N} = \frac{OA}{OB} = k$. Deducem că triunghiurile sînt asemenea, deci $\widehat{MPM'} \equiv \widehat{NPN'}$ și atunci punctele M, P, N' sînt coliniare. Așadar, $P \in (MN)$ și $\frac{PM}{PN}$ k, ceea ce arată că punctul P aparține locului geometric. Prin urmare, cînd $M \in (AX$ și $N \in (BY$ locul geometric al lui P este bisectoarea unghiului $\widehat{UOV}$ (fără punctul O, pentru că dacă $P = O$ ar trebui ca $M = A$ și $N = B$ și nu mai avem $\frac{MA}{NB} = k$) Considerînd și celelalte situații analoage (cînd M, N se mișcă pe alte semidrepte determinate de A și B pe dreptele d_1 și d_2) se ajunge la concluzia că locul geometric al lui P este reuniunea celor patru bisectoare (ca semidrepte deschise) ale unghiurilor formate de dreptele d_1 și d_2.

4. Evident $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}$. Cu această condiție, ecuația se scrie succesiv (ținem seama de formulele $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$, $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$),

$$\frac{(3\sin a - \sin 3a)\cos x + (3\cos a + \cos 3a)\sin x}{4\sin x \cos x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3\sin a - \sin 3a)\cos x + (3\cos a + \cos 3a)\sin x - 4\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin a\cos x + 3\cos a\sin x + \sin x\cos 3a - \cos x\sin 3a - 4\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin(a+x) + \sin(x-3a) + 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin(a+x) + \sin(x-3a) +$$

$$+ 2\sin(a+x) - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x-a)\cos 2a + 4\sin\frac{a-x}{2}\cos\frac{a+3x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{x-a}{2}\left(\cos\frac{x-a}{2}\cos 2a - \cos\frac{a+3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x-a}{2}\left(\cos\frac{x+3a}{2} +\right.$$

$$\left. + \cos\frac{5a-x}{2} - 2\cos\frac{a+3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x-a}{2}\left(\cos\frac{x+3a}{2} - \cos\frac{a+3x}{2} +\right.$$

$$\left. + \cos\frac{5a-x}{2} - \cos\frac{a+3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x-a}{2}\left(\sin(a+x) + 2\sin\frac{3a+x}{2}\cos\frac{x-a}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x-a}{2}(\sin(a+x)+\sin(a+x)+\sin 2a)=0 \Leftrightarrow \sin^2\frac{x-a}{2}(2\sin(a+x)+$$
$$+\sin 2a)=0.$$

Ecuația $\sin\frac{x-a}{2}=0$ dă soluțiile $x=a+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, iar ecuația $2\sin(a+x)+$ $+\sin 2a=0$ dă soluțiile

$$x=(-1)^{k+1}\arcsin\left(\frac{\sin 2a}{2}\right)+k\pi-a,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Anul 1978

Etapa județeană

1. Pentru $\varphi\in\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ k\in\mathbf{Z}\right\}$ inegalitatea se scrie $1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant\sin^2\varphi$, deci este evidentă. Pentru $\varphi\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ k\in\mathbf{Z}\right\}$ avem $\cos\varphi\neq 0$ și inegalitatea se mai scrie

$$1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant\cos^2\varphi\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+a\right)\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+b\right)\ \text{sau}$$
$$1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant\frac{(a+\operatorname{tg}\varphi)(b+\operatorname{tg}\varphi)}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Notînd $\operatorname{tg}\varphi=t$, efectuînd calculele, inegalitatea se scrie, echivalent,

$$t^2\left(1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-1\right)+1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(a+b)t-ab\geqslant 0\ \text{sau}$$
$$\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)t-1\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geqslant 0,\ \text{care este evidentă.}$$

2. Să presupunem că $x_1<x_2<\ldots<x_n$.
Cazul I: n impar. Ținînd seama că în acest caz funcția $f(x)=x^n$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, vom avea și $x_1^n<x_2^n<\ldots<x_n^n$. Atunci cele două mulțimi sînt egale dacă și numai dacă $x_1=x_1^n$, $x_2=x_2^n$, ..., $x_n=x_n^n$, adică x_1, x_2, ..., x_n sînt soluții reale ale ecuației $x=x^n$. Această ecuație are trei soluții, și anume -1, 0, 1; le vom lua pe toate deoarece ne interesează n maxim. Rezultă $n=3$ (și $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$).
Cazul II: n par. În acest caz mulțimea $\{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n\}$ are numai elemente pozitive, deci și $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ va avea elementele pozitive, adică vom avea $0\leqslant x_1<$ $<x_2<\ldots<x_n$. Pe intervalul $[0, \infty)$ funcția $f(x)=x^n$ este strict crescătoare, deci $x_1^n<x_2^n<\ldots<x_n^n$. Rezultă analog $x_1=x_1^n$, $x_2=x_2^n$, ..., $x_n=x_n^n$, deci x_1, x_2, ..., x_n sînt soluții pozitive ale ecuației $=x^n$. Această ecuație are două soluții pozitive, și anume 0 și 1. Rezultă $n=2$ (și $x_1=0$, $x_2=1$). În concluzie, cea mai mare valoare a lui n cu proprietatea din enunț este $n=3$.

3. *Cazul I:* n par. Pentru ca numărul de zile cît durează turneul să fie minim, trebuie ca pe zi să se joace un număr maxim posibil de partide, în acest caz $n/2$ partide. (Vom vedea că este posibil așa ceva, indicînd în finalul soluției un model de „desfășurare" a turneului.) Cum numărul total de partide din turneu este $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$, rezultă că numărul minim de zile este în acest caz $n-1$.

Cazul II: n impar. Vom încerca să reducem acest caz la primul, în felul următor. Să mai aducem, „din afară" încă un jucător, deci să avem $n + 1$ jucători. Cei $n + 1$ jucători, conform cazului precedent ($n + 1$ fiind par), pot termina turneul în n zile. Cum fiecare partidă jucată cu jucătorul „din afară" se elimină (adică se consideră că în fiecare zi cîte un jucător din turneu a avut pauză), rezultă că cei n jucători vor termina turneul în minim n zile. Pentru a încheia rezolvarea problemei, vom prezenta modelul de desfășurare a turneului, model care va arăta că acest număr minim de zile se poate atinge efectiv. Vom identifica jucătorii cu vîrfurile unui poligon regulat $A_1, A_2, \ldots, A_n$, iar partidele cu segmentele $[A_iA_j]$ (laturi sau diagonale), $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n, i \neq j$. Pe fiecare asemenea segment vom pune un număr, și anume numărul de ordine al zilei cînd s-a desfășurat partida respectivă. Condiția din problemă ca un jucător să joace o singură partidă pe zi este echivalentă cu faptul că toate segmentele ce pleacă dintr-un vîrf poartă pe ele numere distincte. Vom numi o astfel de numerotare „numerotare convenabilă". A stabili un model de desfășurare a turneului revine la a arăta că există o numerotare convenabilă, în cazul n par cu numere de la 1 la $n - 1$, iar în cazul n impar cu numere de la 1 la n. Să tratăm mai întîi cazul cînd n este impar. Numerotăm mai întîi laturile astfel: $[A_1A_2]$ cu 1, $[A_2A_3]$ cu 2,..., $[A_nA_1]$ cu n. Pentru numerotarea diagonalelor observăm că fiecare diagonală este paralelă cu o unică latură a poligonului. (În adevăr, într-unul singur din semiplanele deschise limitate de dreapta suport a diagonalei, există un număr par de vîrfuri, apoi se ține seama că în cercul circumscris poligonului la coarde congruente corespund arce congruente, iar coardele care „intercepteazǎ" arce congruente sînt paralele.) Atunci fiecare diagonală primește pe ea numărul laturii paralele cu aceasta. Se constată imediat că am obținut o numerotare convenabilă cu numere de la 1 la n, deci turneul poate fi programat în n zile. Dacă n este par, dăm mai întîi la o parte vîrful A_n și considerăm poligonul $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$. Deoarece $n - 1$ este impar, rezultă că laturile și diagonalele acestui poligon pot fi numerotate convenabil cu numere de la 1 la $n - 1$ (chiar dacă acest poligon nu mai este regulat!). Să observăm că în această numerotare din fiecare vîrf A_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$) pleacă $n - 2$ segmente, deci oricum rămîne „liber" un număr k_i cuprins între 1 și $n - 1$. Atunci acest număr îl vom atribui segmentului $[A_iA_n]$, obținînd astfel o numerotare convenabilă a segmentelor poligonului $A_1A_2 \ldots A_n$ cu numere de la 1 la $n - 1$. Înseamnă că în acest caz turneul poate fi programat în $n - 1$ zile.

4. Dacă $ab = x^3$, $bc = y^3$, $ac = z^3$ ($x, y, z \in \mathbf{N}$) rezultă prin înmulțire $a^2b^2c^2 = (xyz)^3$, de unde $abc = xyz\sqrt{xyz}$, ceea ce arată că xyz este pătrat perfect. Notînd $xyz = t^2 (t \in \mathbf{N})$, obținem $abc = t^3$. Faptul că ab divide abc se traduce prin aceea că x^3 divide t^3, deci x divide t; analog y și z divid t. Atunci, să mai observăm că

$$a = \left(\frac{t}{y}\right)^3 \quad b = \left(\frac{t}{z}\right)^3, \quad c = \left(\frac{t}{x}\right)^3$$

care vor fi cuburi de numere naturale.

Etapa finală

1. a) Demonstrăm prin inducție după $n \geqslant 2$ (evident, pentru $n = 1$ problema nu are sens). Pentru $n = 2$ deoarece φ este bijecție putem avea $\varphi(a_1) = a_1$, $\varphi(a_2) = a_2$ sau $\varphi(a_1) = a_2$, $\varphi(a_2) = a_1$. În al doilea caz, una din ipoteze devine $a_1 + a_2 < a_2 + a_1$, care este o contradicție. Rămîne deci $\varphi(a_1) = a_1$, $\varphi(a_2) = a_2$. Să presupunem acum proprietatea adevărată pentru mulțimile cu $n - 1$ elemente și să o demonstrăm și în cazul în care A are n elemente. Vom arăta mai

întîi că $\varphi(a_n) = a_n$. Pentru aceasta, să presupunem prin absurd că $\varphi(a_n) \neq a_n$. Cum φ este injectivă, există $a_p \in A (p < n)$ cu $\varphi(a_p) = a_n$. Atunci

$$a_p + a_n = a_p + \varphi(a_p) < a_{p+1} + \varphi(a_{p+1}) < a_{p+2} + \varphi(a_{p+2}) < \quad < a_n + \varphi(a_n).$$

Din inegalitatea $a_p + a_n \quad a_{p+1} + \varphi(a_{p+1})$ rezultă $a_p < \varphi(a_{p+1})$ (deoarece $a_n \geqslant a_{p+1}$); din inegalitatea $a_p + a_n < a_{p+2} + \varphi(a_{p+2})$ rezultă $a_p < \varphi(a_{p+2})$; din inegalitatea $a_p + a_n < a_n + \varphi(a_n)$ rezultă $a_p < \varphi(a_n)$; de asemenea, avem evident $a_p < \varphi(a_p) = a_n$. Așadar, în mulțimea A există cel puțin $n - p + 1$ numere mai mari ca a_p, și anume $\varphi(a_p), \varphi(a_{p+1}), \ldots, \varphi(a_n)$ (care sînt distincte, deoarece φ este injectivă). Pe de altă parte, avem $a_1 < a_2 < \ldots < a_p < a_{p+1} < \ldots < a_n$, ceea ce arată că în mulțimea A există exact $n - p$ numere mai mari ca a_p (și anume $a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_n$). Contradicția obținută arată că trebuie să avem $\varphi(a_n) = a_n$. Dar atunci luînd mulțimea $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ și restricția lui φ la această mulțime, conform ipotezei de inducție, va rezulta $\varphi(a_i) = a_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Înseamnă că φ este aplicația identică a mulțimii A, ceea ce trebuia demonstrat. b) Luînd $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $\varphi(x) = x + 1$ sînt verificate proprietățile din enunț, dar φ nu este aplicația identică a lui $\mathbf{Z}$. Așadar, răspunsul la întrebare este negativ.

2. Notînd cu $E(x)$ expresia respectivă, faptul că este independentă de x se traduce prin aceea că este constantă (ia aceeași valoare pentru orice x real). Avem $E(0) = 0$ și deci $E(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = \frac{\pi}{k}$ avem (1) $E\left(\frac{\pi}{k}\right) = -\cos^k \frac{\pi}{k} \quad \cos^k \frac{2\pi}{k} = 0$. Pentru $k \geqslant 4$ avem $\frac{\pi}{k} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ deci $\cos \frac{\pi}{k} > 0$, $\cos \frac{2\pi}{k} \geqslant 0$ și atunci egalitatea (1) este imposibilă, deoarece membrul stîng este strict negativ. Rezultă $0 \leqslant k \leqslant 3$. Pentru $k = 0$ egalitatea $E(x) = 0$ se verifică pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Pentru $k = 1$ egalitatea $E(x) = 0$ devine $\cos 2x = 1$, deci nu se verifică pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Pentru $k = 2$ egalitatea (1) nu se verifică. Pentru $k = 3$ egalitatea $E(x) = 0$ se verifică pentru orice $x \in \mathbf{R}$, căci putem scrie

$$E(x) = \sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x - \cos^3 2x = \sin^4 x(3 - 4\sin^2 x) +$$
$$+ \cos^4 x(4\cos^2 x - 3) - (\cos^6 x - \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^4 x - 3\cos^4 x \sin^2 x) = 0.$$

Rezumînd cele de mai sus, rezultă că valorile căutate ale lui k sînt $k_1 = 0$ și $k_2 = 3$.

3. Vom arăta mai întîi că nu toate fețele lui K sînt triunghiuri. Să presupunem prin absurd că toate fețele lui K sînt triunghiuri. Notăm cu F, V, M numărul de fețe, respectiv de vîrfuri și de muchii ale poliedrului. Avem $F = n \geqslant 5$ (ipoteză) și $M = \frac{3V}{2}$ (deoarece din fiecare vîrf pleacă trei muchii și trebuie observat că fiecare muchie se numără de două ori, la fiecare din vîrfurile sale); de asemenea din presupunerea că toate fețele sînt triunghiuri avem $M = \frac{3F}{2}$ (fiecare față are trei muchii, dar fiecare muchie apare în două fețe vecine). Relația lui Euler $M + 2 = F + V$, devine $\frac{3n}{n} + 2 = n + n$, de unde $n = 4$, contradicție cu faptul că $n \geqslant 5$. Așadar, poliedrul are cel puțin o față $[A_1A_2 \ldots A_k]$ cu $k \geqslant 4$. Vom indica strategia de joc a celor doi parteneri.

Primul jucător va începe prin a se semna pe această față. Cel de-al doilea jucător, vrînd să-i „strige jocul" primului, va semna o față care să aibă cît mai multe vîrfuri comune cu fața semnată de primul, adică va semna o față care să aibă o muchie comună cu fața menționată (deoarece într-un poliedru convex, două fețe au cel mult o muchie în comun). Să presupunem că al doilea jucător a semnat o față care conține muchia $[A_1A_2]$; primul jucător va semna acum o față care conține muchia $[A_3A_4]$. Indiferent de ce joacă al doilea jucător, primului îi rămîne de semnat o a treia față care va conține fie vîrful A_3, fie vîrful A_4 și cîștigă astfel jocul.

4. Triunghiul $A'BC$ este proiecția triunghiului ABC pe planul π. Dacă D este piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC, rezultă $A'D \perp BC$ (reciproca teoremei celor trei perpendiculare) și deci $m(\widehat{ADA'}) = \alpha$. Avem evident $m(\widehat{ABA'}) = \beta$, $m(\widehat{ACA'}) = \gamma$. Atunci (1) $\sigma[A'BC] = \sigma[ABC] \cos \alpha$. Dar

$$\sigma[A'BC] = \frac{A'B \cdot A'C \sin A'}{2} = \frac{AB \cdot AC \cos \beta \cos \gamma \sin A'}{2};$$

$$\sigma[ABC] = \frac{AB \cdot AC \sin A}{2} = \frac{AB \cdot AC}{4} \text{ (pentru că } m(\hat{A}) = 30^\circ).$$

Relația (1) devine

$$\sin A' = \frac{\cos \alpha}{2 \cos \beta \cos \gamma}$$

și atunci $m(\hat{A'}) = 90^\circ \Leftrightarrow \sin A' = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = 2 \cos \beta \cos \gamma$. Să notăm acum elementele triunghiului $A'BC$ astfel $A'B = c$, $A'C = b$, $BC = a$. Rezultă $A'D = \frac{bc}{a}$. Din $\cos \alpha = \cos 2\beta \cos \gamma$ deducem $\cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \beta \cos^2 \gamma$ sau $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \gamma}$, ceea ce se mai poate scrie

$$4(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma).$$

Dar $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AA'}{A'D} = \frac{AA' \cdot a}{bc}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{AA'}{c}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{AA'}{b}$ și astfel relația de mai înainte devine

$$4\left(1 + \frac{a^2 \cdot AA'^2}{b^2c^2}\right) = \left(1 + \frac{AA'^2}{b^2}\right)\left(1 + \frac{AA'^2}{c^2}\right) \text{ sau}$$

$$\frac{1}{b^2c^2} AA'^4 - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{4a^2}{b^2c^2}\right) AA'^2 - 3 = 0.$$

Cum $a^2 = b^2 + c^2$, ultima ecuația se mai scrie

$$AA'^4 - 3(b^2 + c^2) AA'^2 - 3b^2c^2 = 0, \text{ de unde}$$

$$AA' = \sqrt{\frac{3(b^2 + c^2) + \sqrt{9(b^4 + c^4) + 30b^2c^2}}{2}}$$

Anul 1979

Etapa județeană

1. Fie $z_1 = r(\cos a_1 + i \sin a_1)$, $z_2 = r(\cos a_2 + i \sin a_2)$; $z_3 = r(\cos a_3 + i \sin a_3)$, cu $r > 0$ și $a_1 \neq k\pi$, $a_2 \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Din ipoteză rezultă relațiile $\sin a_1 + r \sin(a_2 + a_3) = 0$, $\sin a_2 + r \sin(a_3 + a_1) = 0$, $\sin a_3 + r \sin(a_1 + a_2) = 0$. Notînd $a_1 + a_2 + a_3 = b$, rezultă $\sin a_1 + r \sin(b - a_1) = 0$, adică $\sin a_1 + r \sin b \cos a_1 - r \sin a_1 \cos b = 0$, de unde $\operatorname{ctg} a_1 \sin b = \cos b - \frac{1}{r}$ și alte două relații similare. Dacă $\sin b \neq 0$, rezultă $\operatorname{ctg} a_1 = \operatorname{ctg} a_2 = \operatorname{ctg} a_3$, absurd. Atunci $\sin b = 0$ și $\cos b = \frac{1}{r}$, de unde neapărat $r = 1$ și $z_1 z_2 z_3 = r^3(\cos b + i \sin b) = 1$.

2. Ținînd cont că $\sin 2x = 2 \sin x \cos$ $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, inegalitatea revine la $\sin x \cos x \sin y + \sin x \cos x \cos y + \sin y \cos y \cos^2 x \leqslant 1$. Este suficient ca în inegalitatea $ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$ să înlocuim $a = \sin y \cos x$, $b = \cos y \cos x$, $c = \sin x$.

3. Dacă ar exista o astfel de funcție, atunci pentru $x = 2$ ar rezulta că $f^2(4) + f(4) + 1 = 0$, adică $f(4)$ ar fi un număr complex nereal, ceea ce este absurd.

4. a) Fie $0 \leqslant x < y$. Avem

$$f(x) - f(y) = a^x + \frac{1}{a^x} - \left(a^y + \frac{1}{a^y}\right) = (a^x - a^y)\left(1 - \frac{1}{a^{x+y}}\right).$$

Dacă $a \in (0,1)$ primul factor este pozitiv, iar al doilea negativ; dacă $a \in (1, \infty)$ primul factor este negativ, iar al doilea este pozitiv. În concluzie, produsul din membrul drept este negativ, adică $f(x) < f(y)$, ceea ce arată că f este strict crescătoare. b) Se observă că

$$g(x) = n + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x + \quad + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^x + \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^x$$

și folosind punctul a rezultă că funcția g este strict crescătoare, deci este injectivă.

Etapa finală

1. Fie φ o permutare care face produsul $P = \left(a_1 + \frac{1}{a_{\varphi(1)}}\right) \quad \left(a_n + \frac{1}{a_{\varphi(n)}}\right)$ maxim. Mulțimea P_n a permutărilor de ordinul n este finită, deci permutarea φ există. Din faptul că pentru φ P este maxim, avem

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_{\varphi(1)}}\right) \cdots \left(a_{k-1} + \frac{1}{a_{\varphi(k-1)}}\right)\left(a_k + \frac{1}{a_{\varphi(k)}}\right)\left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{\varphi(k+1)}}\right)$$

$$\cdots \left(a_n + \frac{1}{a_{\varphi(n)}}\right) \geqslant \left(a_1 + \frac{1}{a_{\varphi(1)}}\right) \cdots \left(a_{k-1} + \frac{1}{a_{\varphi(k-1)}}\right)\left(a_k + \frac{1}{a_{\varphi(k+1)}}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{\varphi(k)}}\right) \cdots \left(a_n + \frac{1}{a_{\varphi(\ldots)}}\right),$$ de unde rezultă

$$\left(a_k + \frac{1}{a_{\varphi(k)}}\right)\left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{\varphi(k+1)}}\right) - \left(a_k + \frac{1}{a_{\varphi(k+1)}}\right)\left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{\varphi(k)}}\right) \geqslant 0$$

sau $\frac{a_k - a_{k+1}}{a_{\varphi(k+1)}} + \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{\varphi(k)}} \geqslant 0$. Deci $(a_k - a_{k+1})(a_{\varphi(k)} - a_{\varphi(k+1)}) \geqslant 0$, de unde rezultă că $a_{\varphi(k)} < a_{\varphi(k+1)}$. Dînd lui k valori din mulțimea $\{1, 2, ..., n-1\}$, obținem $a_{\varphi(1)} < a_{\varphi(2)} < ... < a_{\varphi(n)}$, deci șirul trebuie să fie crescător și deci $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, ..., $\varphi(n) = n$, deci φ este permutarea identică.

2. Observăm că $f(n) \geqslant 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Deoarece g este bijectivă rezultă că $(\exists)\ k_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît $g(k_0) = 0$. Dacă $h(k_0) > 0$ atunci $g(k_0) - h(k_0) < 0$, contradicție, deci $h(k_0) = 0$ și deci $f(k_0) = 0$. Deoarece g este bijectivă rezultă că $(\exists)\ k_1 \in \mathbf{N}$ astfel încît $g(k_1) = 1$. Dacă $h(k_1) > 1$ atunci $g(k_1) - h(k_1) < 0$, contradicție, deci $h(k_1) = 1$ și deci $f(k_1) = 0$. Demonstrăm prin inducție după valorile luate de g. Presupunem că $f(n) = 0$, pentru valorile $k_0, k_1, ..., k_{n-1}$, pentru care g ia valorile $0, 1, 2, ..., n-1$. Deoarece g este bijectivă rezultă că $(\exists) k_n \in \mathbf{N}$ astfel încît $g(k_n) = n$. Dacă $h(k_n) > n$ atunci $g(k_n) - h(k_n) < 0$, contradicție, deci $h(k_n) = n$ și deci $f(k_n) = 0$. Rezultă deci că $f(n) = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

3. A doua relație din enunț se poate scrie $1 - 2\sin^2 x_1 + 1 - 2\sin^2 x_2 + ... + 1 - 2\sin^2 x_n = n - 2a$ și rezultă $\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \quad + \sin^2 x_n = a$. Scăzînd din această relație prima relație, obținem $\sin x_1(1 - \sin x_1) + \sin x_2(1 - \sin x_2) + \quad + \sin x_n(1 - \sin x_n) = 0$. Deoarece $x_i \in (0, \pi]$ rezultă că $\sin x_i(1 - \sin x_i) \geqslant 0$. Obținem egalitatea numai cînd $x_i = \pi$ sau $x_i = \frac{\pi}{2}$. Dar din prima relație rezultă că numai un singur unghi x_{i_0} poate fi $\frac{\pi}{2}$, iar celelalte $x_i = \pi$ pentru $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq i_0$.

4. Fie O_1, O_2 centrele celor două cercuri. Fie T mijlocul lui $[M_1M_2]$ și S mijlocul lui $[O_1O_2]$. Atunci $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TM_1} + \overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1S}$ și $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TM_2} + \overrightarrow{M_2O_2} + \overrightarrow{O_2S}$. Deoarece $\overrightarrow{TM_1} = -\overrightarrow{TM_2}$ și $\overrightarrow{O_1S} = -\overrightarrow{O_2S}$ rezultă că (1) $2\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{M_2O_2}$. Deci $4TS^2 = \overrightarrow{M_1O_1}^2 + \overrightarrow{M_2O_2}^2 + 2\overrightarrow{M_1O_1} \cdot \overrightarrow{M_2O_2}$ sau $4TS^2 = M_1O_1^2 + M_2O_2^2 + 2M_1O_1 \cdot M_2O_2 \cos(\widehat{\overrightarrow{M_1O_1}, \overrightarrow{M_2O_2}})$. Cum $\cos(\widehat{\overrightarrow{M_1O_1}, \overrightarrow{M_2O_2}}) \in [-1, 1]$, rezultă $(M_1O_1 - M_2O_2)^2 \leqslant 4TS^2 \leqslant (M_1O_1 + M_2O_2)^2$, de unde (2) $\frac{R-r}{2} \leqslant TS \leqslant \frac{R+r}{2}$, unde R este raza cercului $\mathcal{C}_1$ și r raza cercului $\mathcal{C}_2$. Din (1) și (2) rezultă că locul geometric este inclus în coroana circulară cu razele $\frac{R-r}{2}$ și $\frac{R+r}{2}$, situată într-un plan paralel cu cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ care trece prin mijlocul lui $[O_1O_2]$. Reciproc, fie un punct P din coroana circulară determinată mai sus. Atunci avem $\frac{R-r}{2} \leqslant SP \leqslant \frac{R+r}{2}$, presupunînd, de exemplu, că $R > r$. Dacă M este un punct variabil pe cercul $\mathcal{C}_2$, deoarece P se găsește la o aceeași distanță față de cele două plane paralele, rezultă că locul geometric al punctului N de intersecție cu planul cercului $\mathcal{C}_1$ a dreptei PM, este un cerc congruent cu cercul $\mathcal{C}_2$. Centrul O al acestui cerc se găsește la intersecția dreptei O_2P cu planul cercului $\mathcal{C}_1$, deci $OO_1 = 2PS$, de unde deducem că $R - r \leqslant OO_1 \leqslant R + r$. Deci cercul de centru O și rază r este sau secant cu cercul $\mathcal{C}_1$ sau tangent acestui cerc, cînd

$OO_1 = R - r$ sau $OO_1 = R + r$. Fie M_1 unul din punctele de intersecție ale celor două cercuri. Dreapta PM_1 taie cercul $\mathcal{C}_2$ în M_2. Am găsit deci două puncte $M_1 \in \mathcal{C}_2$ și $M_2 \in \mathcal{C}_2$, astfel încît P este mijlocul segmentului (M_1M_2), deci am arătat și cealaltă incluziune. Așadar locul geometric este coroana circulară pusă în evidență mai sus.

Anul 1980

Etapa județeană

1. a) $\sum_{i=1}^{n} \log x_i < 0 \Leftrightarrow \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) < 0 \Leftrightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \in (0, 1)$, de unde rezultă că cel puțin un x_k este subunitar. Condiția $\prod_{i=1}^{n} \log x_i < 0$ ne arată că printre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ există un număr par de numere subunitare. Prin urmare, existînd $x_k \in (0, 1)$ rezultă că există cel puțin două numere subunitare printre $x_1, x_2, \ldots, x_n$. b) $\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = p \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \log x_i = p$. Se demonstrează fără dificultate că $\log x_1 \log x_2 + \log x_1 \log x_3 + \ldots + \log x_{n-1} \log x_n$ și atunci

$$2s_n = 2(\log x_1 \log x_2 + \log x_1 \log x_3 + \ldots + \log x_{n-1} \log x_n) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \log^2 x_i = p^2 - q,$$

de unde rezultă $s_n = \frac{1}{2}(p^2 - q)$. Proprietatea se păstrează dacă logaritmii sînt luați într-o bază oarecare $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$.

2. a) Ecuația are sens dacă și numai dacă $\cos kx \neq 0$, unde $k \in \{1, 2, 3, 4, 8\} \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{k=1}^{4}\left(\frac{\pi}{k}\mathbf{Z} + \frac{\pi}{2k}\right)$. În aceste condiții ecuația dată se mai scrie

$$\frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x \cos 4x} + \frac{\sin 4x}{\cos 4x \cos 8x} =$$

$$= \operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow \frac{\sin(2x - x)}{\cos x \cos 2x} + \frac{\sin(4x - 2x)}{\cos 2x \cos 4x} + \frac{\sin(8x - 4x)}{\cos 4x \cos 8x} =$$

$$= \operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow \frac{\sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x}{\cos x \cos 2x} + \frac{\sin 4x \cos 2x - \sin 2x \cos 4x}{\cos 2x \cos 4x} +$$

$$+ \frac{\sin 8x \cos 4x - \sin 4x \cos 8x}{\cos 4x \cos 8x} = \operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x -$$

$$- \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos 3x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbf{Z}.$$

b) Vom demonstra mai întîi următoarea propoziție: fie $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $a < b$ și $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}_+^*$. Dacă f este descrescătoare, atunci $xf(y) = yf(x) \Rightarrow xg(y) = yg(x)$,

unde $x, y \in [a, b]$. Demonstrație. $xf(y) = yf(x) \Rightarrow x = y$. Într-adevăr, să presupunem că $x \neq y \wedge xf(y) = yf(x)$. Deoarece $x \neq y$ putem presupune fără a micșora generalitatea că $x < y$. Avem deci $(x < y \wedge f(x) \geqslant f(y)) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} < 1 \wedge \frac{f(x)}{f(y)} \geqslant 1\right)$, de unde se observă că $\frac{x}{y} \neq \frac{f(x)}{f(y)} \Leftrightarrow xf(y) \neq yf(x)$, ceea ce contrazice $xf(y) = yf(x)$. Deci din $xf(y) = yf(x)$, cu f descrescătoare, rezultă $x = y$ și atunci evident că $xf(y) = yf(x) \Rightarrow xg(y) = yg(x)$. Deoarece cos, ctg : $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}_+^*$ sînt strict pozitive și descrescătoare rezultă echivalența din enunț.

3. a) Se știe că (1) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = 0$, (2) $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i = 0$. Totodată (3) $a_k = a_1 + (k-1)r$, $(\forall)\, k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Avem

$$(4) \qquad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_n^i (a_1 + ir) = a_1 \sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_n^i +$$

$$+ r \sum_{i=1}^{n} i(-1)^i C_n^i = r \sum_{i=1}^{n} i(-1)^i C_n^i.$$

Are loc identitatea (5) $iC_n^i = nC_{n-1}^{i-1}$, $(\forall)\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ și atunci

$$\sum_{i=0}^{n} i(-1)^i C_n^i = \sum_{i=1}^{n} i(-1)^i C_n^i = n \sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_{n-1}^{i-1} =$$

$$= -n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{n-1}^j = 0 \text{ (conform cu (2))}.$$

Ținînd seama de această relație, din (4) obținem enunțul. b) Avem

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i a_{i+1}^2 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (a_1 + ir)^2 = a_1^2 \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i +$$

$$+ 2a_1 r \sum_{i=0}^{n} (-1)^i i C_n^i + r^2 \sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^2 C_n^i \overset{(1),\,(2)}{=\!=} r^2 \sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^2 C_n^i =$$

$$= r^2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^2 C_n^i = r^2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i \cdot i C_n^i \overset{(5)}{=} r^2 n \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i C_{n-1}^{i-1} =$$

$$= r^2 n \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (i-1+1) C_{n-1}^{i-1} = r^2 n \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (i-1) C_{n-1}^{i-1} + r^2 n \sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_{n-1}^{i-1} =$$

$$= -r^2 n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j j C_{n-1}^j - r^2 n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{n-1}^j \overset{(2)}{=} -r^2 n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j j C_{n-1}^j \overset{(5)}{=}$$

$$= -r^2 n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (n-1) C_{n-2}^{j-1} = n(n-1) r^2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} C_{n-2}^{j-1} =$$

$$= n(n-1) r^2 \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k C_{n-2}^k = 0.$$

4. a) Aplicînd teorema sinusului în triunghiul CED obținem

$$(1) \qquad \frac{\sin(u + 20^\circ)}{CE} = \frac{\sin u}{DC} \Rightarrow \frac{\sin(u + 20^\circ)}{\sin u} = \frac{CE}{DC} = \frac{CE}{BC}.$$

Din aceeași teoremă aplicată triunghiului BEC rezultă

$$(2) \qquad \frac{\sin 40^\circ}{BC} = \frac{\sin 80^\circ}{CE} \Rightarrow \frac{CE}{BC} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

Din (1) și (2) deducem

$$(3) \quad \frac{\sin (u + 20^\circ)}{\sin u} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = 2\cos 40^\circ = 2\cos 2A \Leftrightarrow 2\sin u \cos 2A = \sin (u + A).$$

b) $\sin (u + A) = 2\sin u \cos 2A \Leftrightarrow \sin (u + 20^\circ) = 2\cos (90^\circ - u)\cos 40^\circ =$
$= \cos (130^\circ - u) + \cos (50^\circ - u) = \sin (u - 40^\circ) = \cos (u - 50^\circ) \Leftrightarrow \sin (u + 20^\circ) -$
$- \sin (u - 40^\circ) = \cos (u - 50^\circ) \Leftrightarrow 2\cos (u - 10^\circ)\sin 30^\circ = \cos (u - 50^\circ) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos (u - 10^\circ) - \cos (u - 50^\circ) = 0 \Leftrightarrow 2\sin (u - 30^\circ)\sin (-20^\circ) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin (u - 30^\circ) = 0 \Leftrightarrow u = 30^\circ.$

Etapa finală

1. Vom dezvolta expresia $(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n$ cu ajutorul formulei binomului lui Newton. Dacă n este par, grupînd termenii obținem

$$(1) \qquad (\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = a_n + b_n\sqrt{m(m-1)},$$

unde a_n, b_n sînt numere naturale. La fel deducem

$$(2) \qquad (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n = a_n - b_n\sqrt{m(m-1)},$$

care prin înmulțire membru cu membru ne dau:

$$(3) \qquad 1 = a_n^2 - m(m-1)b_n^2.$$

Deci, dacă notăm $p = a_n^2$ și ținem seama de (3), din (1) deducem că

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}.$$

Pentru n impar obținem

$$(4) \qquad (\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = c_n\sqrt{m} + d_n\sqrt{m-1},$$

iar c_n și d_n sînt legați prin relația

$$(5) \qquad 1 = mc_n^2 - (m-1)d_n^2.$$

Obținem egalitatea căutată dacă notăm $p = mc_n^2$.

2. Fie $A = \{-1, 1\}$ și pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ să notăm

$$A_n = \begin{cases} A, \text{ dacă } n = 1, \\ A \times A \times \ldots \times A = A^n, \text{ dacă } n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}, \end{cases}$$

și pentru orice $\varepsilon \in A_n$ notăm $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Vom demonstra prin inducție că $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ și $(\forall)\, z_k \in \mathbf{C}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem:

$$(1) \qquad \sum_{\varepsilon \in A_n} \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k \right|^2 = 2^n \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2.$$

Într-adevăr, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ notăm $z_n = x_n + iy_n$ cu $x_n, y_n \in \mathbf{R}$ și deci

$$n = 1 \Rightarrow \sum_{\varepsilon \in A} \left| \sum_{k=1}^{1} \varepsilon_k z_k \right|^2 = |z_1|^2 + |-z_1|^2 = 2|z_1|^2 = 2^1 \sum_{k=1}^{1} |z_k|^2;$$

$$n = 2 \Rightarrow \sum_{\varepsilon \in A_2} \left| \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k z_k \right|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 + |-z_1 + z_2|^2 + |-z_1 - z_2|^2 =$$

$$= 2((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) = 4(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) =$$

$$= 2^2 (|z_1|^2 + |z_2|^2) = 2^2 \sum_{k=1}^{2} |z_k|^2.$$

Presupunem că $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, $n \leqslant p$, avem (1) și să demonstrăm că și pentru $n = p + 1$ avem:

$$\sum_{\delta \in A_{p+1}} \left| \sum_{k=1}^{p+1} \delta_k z_k \right|^2 = 2^{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} |z_k|^2. \tag{2}$$

Într-adevăr, dacă $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p, \delta_{p+1})$, atunci vom nota $\varepsilon = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p) \in A_p$; prin urmare ε se obține din δ suprimîndu-i ultima componentă. Fie $z_\varepsilon = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k z_k =$ $= \sum_{k=1}^{p} \delta_k z_k$; atunci avem $\sum_{\delta \in A_{p+1}} \left| \sum_{k=1}^{p+1} \delta_k z_k \right|^2 = \sum_{\varepsilon \in A_p} \sum_{\delta_{p+1} \in \{-1,1\}} |z_\varepsilon + \delta_{p+1} z_{p+1}|^2 =$

$$= 2 \sum_{\varepsilon \in A_p} (|z_\varepsilon|^2 + |z_{p+1}|^2) = 2^{p+1} |z_{p+1}|^2 + 2 \sum_{\varepsilon \in A_p} \left| \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k z_k \right|^2 \overset{(*)}{=} 2^{p+1} |z_{p+1}|^2 +$$

$$+ 2 \cdot 2^p \sum_{k=1}^{p} |z_k|^2 = 2^{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} |z_k \quad \text{adică relația (2).}$$

La trecerea prin egalul (*) am ținut seama de ipoteza de inducție. Conform principiului inducției relația (1) este demonstrată.

3. $\sin^2 \frac{A-B}{2} + \sin A \sin B + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A-B}{2} + 2 \sin A \sin B +$ $+ 2 \sin^2 \frac{C}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 \sin A \sin B = 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{A-B}{2} = \cos C +$ $+ \cos(A - B) = \cos(A - B) - \cos(A + B)$, evident.

4. Avem de demonstrat că $z \in \mathbf{C}$ și $\mathrm{Re}(z^n) > \mathrm{Im}(z^n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow z \in \mathbf{R}^*$. Fie $z = x + iy$. Deoarece $\mathrm{Re}(z^n) > \mathrm{Im}(z^n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, rezultă că Re $= x > y = \mathrm{Im}\, z$ și deci dacă M este imaginea geometrică a lui z atunci $M(x, y)$ are proprietatea că $x > y$. Se observă că dreapta $x = y$ împarte planul în două semiplane și că semiplanul care ne interesează pe noi este semiplanul care conține punctul $A(1,0)$ de pe cercul unitate; $x > y \Rightarrow x^2 + y^2 = |\ \ |^2 > 0$. Rezultă deci că $(\exists)\, \theta \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel încît $z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \Rightarrow$ $=$ $= r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \Rightarrow \mathrm{Re}(z^n) = r^n \cos n\theta$, $\mathrm{Im}(z^n) = r^n \sin n\theta$. Prin urmare, enunțul este echivalent cu

$$\mathrm{Im}(z^n) < \mathrm{Re}(z^n), (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow r^n \cos n\theta > r^n \sin n\theta, (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \cos n\theta > \sin n\theta, (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Să presupunem că $(\exists)\,\theta \in \left(-\frac{3\pi}{4},\ 0\right) \cup \left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ astfel încît

$$\cos n\,\theta > \sin n\,\theta,\ (\forall)\,n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow \cos n\,\theta - \sin n\,\theta > 0,\ (\forall)\,n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\,\theta\right) -$$

$$- \sin n\,\theta > 0,\ (\forall)\,n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - n\,\theta\right)\cos\frac{\pi}{4} > 0 \Leftrightarrow \sin\left(n\,\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0,$$

$$(\forall)\,n \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă $\theta \in \left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ notăm

$$n_\theta = \left[\frac{\pi}{4\theta}\right] \leqslant \frac{\pi}{4\theta} \leqslant n_0 + 1 \Leftrightarrow n_0\,\theta \leqslant \frac{\pi}{4} < (n_0 + 1)\,\theta \Rightarrow \frac{\pi}{4} < (n_0 + 1)\,\theta = n_0\,\theta + \theta$$

$$< n_0\,\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

și deci notînd $n_1 = n_0 + 1$, atunci

$$n_1\,\theta = n_0\,\theta + \theta \in \left(\frac{\pi}{4}\ \ \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow n_1\,\theta - \frac{\pi}{4} \in \left(0,\ \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(n_1\,\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

Deci $(\exists)\,n = n_1 \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $\sin\left(n\,\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$, ceea ce contrazice $\sin\left(n\theta\ \ \frac{\pi}{4}\right) < 0$, $(\forall)\,n \in \mathbf{N}^*$. Prin urmare $\theta \notin \left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$. Dacă $\theta \in \left(-\frac{3\pi}{4}\ \ -\frac{\pi}{2}\right]$ atunci

$$2\theta \in \left(-\frac{3\pi}{2},\ -\pi\right] \Leftrightarrow 2\,\theta - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{7\pi}{4},\ -\frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow \sin\left(2\,\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

deci $(\exists)\,n = 2$ astfel încît $\sin\left(n\,\theta - \frac{\pi}{4}\right)\ \ 0$, ceea ce contrazice $\sin\left(n\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0$, $(\forall)\,n \in \mathbf{N}^*$. Deci $\theta \notin \left(-\frac{3\pi}{4}\ \ -\frac{\pi}{2}\right]$. Dacă $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}\right]$ atunci

$$3\,\theta \in \left(-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{4}\right] \Leftrightarrow 3\,\theta - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{7\pi}{4}\ \ \pi\right] \Rightarrow \sin\left(3\,\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

deci $(\exists)\,n = 3$ astfel încît $\sin\left(n\,\theta - \frac{\pi}{4}\right)\ \ 0$, ceea ce contrazice $\sin\left(n\,\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Dacă $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}\ \ 0\right)$ atunci $-\theta\ \ \alpha \in \left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ și deci

$$n\,\theta - \frac{\pi}{4} = -n\,\alpha - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin\left(n\,\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(n\,\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

Prin urmare $\sin\left(n\,\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow \sin\left(n\,\alpha + \frac{\pi}{4}\right) > 0$, $(\forall)\,n \in \mathbf{N}^*$

Fie $n_1 = \left[\frac{\pi}{4\alpha}\right] < \frac{\pi}{4\alpha} < n_1 + 1 \Leftrightarrow n_1\,\alpha \leqslant \frac{\pi}{4} < n_1\,\alpha + \alpha \Rightarrow \frac{\pi}{4} < n_1\alpha + \alpha < n_1\alpha +$

$+\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ Deci $\frac{\pi}{4}$ $(n_1-1)\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 3\pi$ $3(n_1\alpha+\alpha)<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{3\pi}{4}+$ $+\frac{\pi}{4}<3(n_1+1)\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$ $\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\pi$ $3(n_1+1)\alpha+\frac{\pi}{4}$ $\frac{7\pi}{4}\Leftrightarrow\sin(3(n_1+$ $+1)\alpha+\frac{\pi}{4})<0$, deci $(\exists)n=3(n_1+1)\in\mathbf{N}^*$ astfel încît $\sin\left(n\alpha+\frac{\pi}{4}\right)<0$, ceea ce contrazice $\sin\left(n\alpha+\frac{\pi}{4}\right)>0$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}^*$. Deci $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\theta\notin\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$. A rămas singura posibilitate $\theta=0$, adică $z=x$ și deci $\mathrm{Re}(z^n)>\mathrm{Im}(z^n)$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}^*\Leftrightarrow x^n>0$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}^*\Leftrightarrow x>0$. Prin urmare $z=x\in\mathbf{R}_+^*$.

Anul 1981

Etapa județeană

1. Fie $s_0=C_n^0+C_n^4+C_n^8+$ $s_1=C_n^1+C_n^5+C_n^9+\ldots$, $s_2=C_n^2+C_n^6+$ $+C_n^{10}+$ $s_3=C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+$ Conform formulei binomului lui Newton deducem:

$$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=s_0+s_2+i(s_1-s_3),$$

$$(1-i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=s_0-s_2-i(s_1-s_3),$$

de unde rezultă (1) $s_0-s_2=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}$. Pe de altă parte, $2^n=s_0+s_1+$ $+s_2+s_3$ și $0=s_0+s_2-(s_1+s_3)$, de unde obținem (2) $s_0+s_2=2^{n-1}=s_1+s_3$. Din relațiile (1) și (2) deducem că $s_0=2^{n-2}+\frac{1}{2}(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}$, adică relația din enunț.

2. Inecuația are sens pentru $x\in\mathbf{R}_+^*$ și deoarece pentru $x=1$ membrul stîng al inegalității din enunț este egal cu 1, rezultă că vom rezolva inecuația în condițiile $x\in\mathbf{R}_+^*\setminus\{1\}$. Dacă $x>1$ inecuația din enunț este îndeplinită numai dacă

$$\log_4(x+2)-\log_2 x<0\Leftrightarrow\log_4(x+2)-\log_4 x^2<0\Leftrightarrow x+2<x^2\Leftrightarrow x\in(2,\infty).$$

Dacă $x\in(0,1)$ inecuația din enunț este îndeplinită dacă și numai dacă

$$\log_4(x+2)-\log_2 x>0\Leftrightarrow\log_4(x+2)-\log_4 x^2>0\Leftrightarrow\log_4(x+2)>\log_4 x^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+2>x^2\Leftrightarrow x\in(0,2)$$

și deci în această situație inecuația dată este satisfăcută pentru orice $x\in(0,1)$. Mulțimea soluțiilor inecuației din enunțul problemei este $(0,1)\cup(2,\infty)$.

3. Fie a, b, c lungimile laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului și p semiperimetrul său. Relația anunțată este echivalentă cu

$$4\sin\left(\frac{1}{2}A\right)\cos\left(\frac{1}{2}A\right)\sin\left(\frac{1}{2}B\right)\cos\left(\frac{1}{2}B\right)=3\sin^2\left(\frac{1}{2}C\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}=$$

$$=3\frac{(p-a)(p-b)}{ab}\Leftrightarrow 4p(p-c)=3c^2\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)=$$

$$=3c^2\Leftrightarrow (a+b)^2-4c^2=0\Leftrightarrow (a+b-2c)(a+b+2c)>0\Leftrightarrow a+b=$$

$$=2c\Leftrightarrow AC+BC=2AB.$$

4. a) Avem

$$\log(n+1)>\frac{3}{10n}+\log n\Leftrightarrow \log(n+1)-\log n>\frac{3}{10n}\Leftrightarrow \log(1+n^{-1})^n>\frac{3}{10}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+n^{-1})^n>10^{\frac{3}{10}}.$$

Totodată $(1+n^{-1})^n=1+1+\frac{(n-1)}{2n}+\quad>2$. Dacă vom demonstra că $2^{10}>10^3$ prima inegalitate din enunț este verificată. Într-adevăr, $2^{10}>10^3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^7>5^3\Leftrightarrow 128>125$. b) Conform primei inegalități din enunț avem:

$$\log(k+1)>\frac{3}{10k}+\log k,\ (\forall)k\in\mathbf{N}^*,$$

și deci

$$\sum_{k=1}^{n}\log(k+1)>\frac{3}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\log k\Leftrightarrow \log((n+1)!)>\frac{3}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+$$

$$+\log(n!),\ (\forall)n\in\mathbf{N}^*.$$

Inegalitatea a doua a enunțului se demonstrează prin inducție matematică.

Etapa finală

1. $x^6+3x^3+1=y^4\Leftrightarrow (x^3+1)^2+x^3=y^4\Leftrightarrow (x^3+1)^2+x^3+1=$ $=y^4+1\Leftrightarrow 4(x^3+1)^2+4(x^3+1)=4y^4+4\Leftrightarrow 4(x^3+1)^2+4(x^3+1)+1=$ $=4y^4+5\Leftrightarrow (2x^3+3)^2-4y^4=5\Leftrightarrow (2x^3-2y^2+3)(2x^3+2y^2+3)=5.$ Sînt de analizat patru cazuri după împerecherea divizorilor întregi ai lui 5 în așa fel ca produsul numerelor din fiecare pereche să fie 5. Soluțiile problemei sînt $(0, 1)$, $(0, -1)$.

2. Să arătăm că $(\forall)\,n\in\mathbf{N}$, în scrierea ca număr zecimal a numărului $x_n=$ $=(\sqrt{2501}+50)^{2n+1}$ primele $4n+2$ cifre după virgulă sînt zerouri. Într-adevăr,

$$x_n=(\sqrt{2501}+50)^{2n+1}=(\sqrt{2501}+50)^{2n+1}-(\sqrt{2501}-50)^{2n+1}+$$

$$+(\sqrt{2501}-50)^{2n+1}=y_n+z_n,\quad (\forall)\,n\in\mathbf{N},$$

unde $y_n=(\sqrt{2501}+50)^{2n+1}-(\sqrt{2501}-50)^{2n+1}$, $z_n=(\sqrt{2501}-50)^{2n+1}$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}$. Vom arăta mai departe că $[x_n]=y_n$, $\{x_n\}=z_n$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}$. Se observă că $y_0=100$, $y_1=1\,000\,300$ și că $(\sqrt{2501}+50)^2+(\sqrt{2501}-50)^2=10\,002$ și atunci din faptul că $x_n=y_n+z_n$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}$ deducem că

$$10\,002\,x_n=(\sqrt{2501}+50)^{2n+1}-(\sqrt{2501}-50)^{2n-1}+(\sqrt{2501}+50)^{2n-1}-$$

$-(\sqrt{2\,501}-50)^{2n+3}+10\,002\,z_n \Leftrightarrow 10\,002(y_n+z_n)=y_{n+1}+y_{n-1}+10\,002\,z_n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10\,002\,y_n=y_{n+1}+y_{n-1}$, $(\forall)\ n\in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow 10\,002\,y_{k+1}=y_{k+2}+y_k$, $(\forall)\ k\in \mathbf{N}$.

Obținem că

$$(1)\quad 10\,002\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+2}+\sum_{k=0}^{n-1} y_k,\ (\forall)\ n\in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow 10\,002\left(y_n+\sum_{k=0}^{n-1} y_k\right)=$$

$$=y_{n-1}+y_n+2\sum_{k=0}^{n-1} y_k,\ (\forall)\ n\in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow (2)\ y_{n+1}=$$

$$=10\,001\,y_n+10\,000\sum_{k=0}^{n-1} y_k,\ (\forall)\ n\in \mathbf{N}^*.$$

Presupunem că $(\forall)\ k\in \mathbf{N}, 0\leqslant k\leqslant n$, $y_k\in \mathbf{N}^*$ și atunci din (2) rezultă că $y_{n+1}\in \mathbf{N}^*$. Conform principiului inducției matematice rezultă $y_n\in \mathbf{N}^*$, $(\forall)\ n\in \mathbf{N}$. Deci

$$x_n=y_n+z_n=y_n+\frac{1}{(\sqrt{2\,501}+50)^{2n+1}}\quad \text{cu } y_n\in \mathbf{N}^*,\ (\forall)\ n\in \mathbf{N},$$

de unde rezultă că $[x_n]=y_n$, $\{x_n\}=z_n$, $(\forall) n\in \mathbf{N}$. Prin urmare

$$\{x_n\}=z_n=\frac{1}{(\sqrt{2\,501}+50)^{2n+1}}<\frac{1}{(50+50)^{2n+1}}=\frac{1}{10^{2(2n+1)}}=$$

$$=0,\underbrace{000\ldots000}_{2(2n+1)}1 \text{ și deci } z_n=0,\underbrace{000\ldots000}_{2(2n+1)}bc\ldots$$

Pentru $n=990$ se obține problema dată la concurs.

3. Vom arăta că dacă $f, g:[a, b]\to[a, b]$ au proprietatea că f este strict crescătoare pe $[a, b]$, g este strict descrescătoare pe $[a, b]$ și $f(a)\geqslant g(a)$, atunci $f\circ f+g\circ g\geqslant f\circ g+g\circ f$ pe $[a, b]$. Într-adevăr se arată ușor că dacă $h:[a, b]\to[a, b]$ este strict monotonă, atunci $h\circ h$ este strict crescătoare pe $[a, b]$, iar dacă $u, v:[a, b]\to[a, b]$ au proprietatea că u este strict crescătoare pe $[a, b]$ iar v este strict descrescătoare pe $[a, b]$, atunci $u\circ v$ și $v\circ u$ sînt strict descrescătoare pe $[a, b]$. Prin urmare:

$$(f\circ g)(x)\leqslant (f\circ g)(a),\ (g\circ f)(x)\leqslant (g\circ f)(a),\ (\forall)\ x\in[a, b],$$
$$(f\circ f)(x)\geqslant (f\circ f)(a),\ (g\circ g)(x)\geqslant (g\circ g)(a),\ (\forall)\ x\in[a, b],$$

și atunci

$$(1)\qquad (f\circ f)(x)+(g\circ g)(x)\geqslant (f\circ f)(a)+(g\circ g)(a),\ (\forall)\ x\in[a, b],$$

$$(2)\qquad (f\circ g)(x)+(g\circ f)(x)\leqslant (f\circ g)(a)+(g\circ f)(a),\ (\forall)\ x\in[a, b].$$

Din faptul că $f(a)\geqslant g(a)$ rezultă

$$(f\circ f)(a)\geqslant (f\circ g)(a),\ (g\circ g)(a)\geqslant (g\circ f)(a),$$

de unde obținem

$$(3)\qquad (f\circ f)(a)+(g\circ g)(a)\geqslant (f\circ g)(a)+(g\circ f)(a).$$

Din (1), (2) și (3) deducem

$$(f\circ f)(x)+(g\circ g)(x)\geqslant(f\circ g)(x)+(g\circ f)(x),\ (\forall)\,x\in[a,\ b],$$

adică ceea ce ne-am propus să demonstrăm. Dacă $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$ $f=\cos$ și $g=\sin$ rezultă că $(\sin\circ\sin)(0)+(\cos\circ\cos)(0)\geqslant(\sin\circ\cos)(0)+(\cos\circ\sin)(0)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\cos 1\geqslant\sin 1+1$ și inegalitatea din enunț revine la a demonstra că

$$(4)\quad 1{,}32\geqslant\sin 1-\cos 1+1\Leftrightarrow 0{,}32\geqslant\sin 1-\cos 1\Leftrightarrow 0{,}32\geqslant\sin 1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=$$

$$=2\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

Este evident că $1-\frac{\pi}{4}>\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ și atunci rezultă că

$$(5)\quad \sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1{,}42}{4}(4-3{,}14)=0{,}71(2-1{,}57)=$$

$$=0{,}71\cdot 0{,}43=0{,}3053<0{,}32.$$

Relațiile (4) și (5) ne demonstrează enunțul problemei din concurs.

4. Fie $A''\in(AD$, $D''\in(DC$, $A'''\in(A'B'$ și $D'''\in(D'C'$ astfel încît $(BA'')\equiv(B'A''')\equiv(CD)\equiv(C'D')$, $(CD'')\equiv(C'D''')\equiv(AB)\equiv(A'B')$. Este evident că prismele $[ABCDA'B'C'D']$ și $[CD''A''BC'D'''A'''B']$ sînt congruente și deci ele au volumele egale. Rezultă deci că volumul prismei date, notat V, este jumătate din volumul paralelipipedului $[AA''D''DA'A'''D'''D']$.

$$v[AA''D''DA'A'''D'''D']=h\cdot\sigma[AA''D''D]=h\cdot(\sigma[ABCD]+\sigma[A'B'C'D']),$$

de unde rezultă enunțul.

Anul 1982

Etapa județeană

1. Deoarece $\sin x<x$ și $\operatorname{tg}x>x$, $(\forall)\,x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ și funcțiile sin și tg sînt strict crescătoare pe $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că

$$\sin(\sin x)<x \text{ și } \operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)>x,\ (\forall)\,x\in\left(0,\ \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right) \text{ și deci } \frac{\sin(\sin x)}{x}<1,$$

$$\frac{x}{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)}<1,\ (\forall)\,x\in\left(0,\ \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right),$$

de unde deducem enunțul.

2. Se aplică inducția matematică.

3. Avem $3^x = y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1)$ și prin urmare există $u, v \in \mathbf{N}$ astfel încît $y + 1 = 3^u$, $y^2 - y + 1 = 3^v$. Din $y + 1 = 3^u$ rezultă că $y^2 + 2y + 1 = 3^{2u}$, și dacă avem în vedere că $y^2 - y + 1 = 3^v$ deducem că $y = 3^{2u-1} - 3^{v-1}$. Din ecuația dată rezultă că $(y, 3) = 1$, adică y și 3 sînt prime între ele. Prin urmare, din $y = 3^{v-1}(3^{2u-v} - 1)$ obținem că $v - 1 = 0$ sau $2u - v = 0$. Dacă $v = 1$ atunci $y^2 - y + 1 = 3$, de unde $y = 2$ și $3^x = 2^3 + 1 = 9$, adică $x = 2$. Dacă $2u - v = 0$ atunci $y = 3^{v-1}(3^0 - 1) = 0$ și deci $3^x = 1$, de unde $x = 0$. Soluțiile ecuației sînt deci $(0, 0)$, $(2, 2)$.

4. a) Notăm $a = z_2 z_1^{-1}$, $b = z_3 z_1^{-1}$ și atunci $|a| = |b| = 1$. b) Obținem $a^2 - a(b+1) + b^2 - b + 1 = 0$, de unde rezultă că $a = b\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și, analog, $b = a\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$. c) Notînd $z_2 = az_1$, $z_3 = bz_1$ și simplificînd cu z_1^2 se obține tocmai ecuația de la punctul b. Deoarece $a = b\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$ iar imaginile geometrice ale lui a și b se găsesc pe cercul unitate, înmulțirea cu $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$ se reduce la o rotație de unghi $\pm\frac{\pi}{3}$ și adunarea cu $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ se reduce la o translație de vector egal cu vectorul de poziție al imaginii numărului $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, respectiv al numărului $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$. În acest mod obținem că imaginea geometrică a numărului complex a se găsește la intersecția cercului unitate cu cercul unitate translatat cu vectorii de poziție indicați. Intersecția cercului unitate cu cele două cercuri unitate translatate sînt respectiv punctele P de afix 1, M de afix $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ și N de afix $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$. Prin urmare, avem următoarele situații:

i) $a = 1$ și ecuația de gradul 2 în b este $b^2 - 2b + 1 = 0$ cu soluția $b = 1$, ceea ce implică $z_1 = z_2 = z_3$; ii) $a = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ și atunci $b = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$, deoarece aceste două numere verifică ecuația de gradul 2 care se mai scrie $(a+b)^2 - (a+b) - 3ab + 1 = 0$ și deci $\arg z_2 = \frac{2\pi}{3} + \arg z_1$, $\arg z_3 = \frac{4\pi}{3} + \arg z_1$; iii) $a = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ și atunci $b = \cos\frac{2\pi}{3} + i\frac{2\pi}{3}$ ceea ce implică $\arg z_3 = \frac{2\pi}{3} + \arg z_1$, $\arg z_2 = \frac{4\pi}{3} + \arg z_1$. Evident în cazurile ii) și iii) imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Etapa finală

1. Fie $A \in d_1 \setminus \{O\}$ și să notăm cu B, C proiecțiile lui A pe d_2 și d_3, iar cu D proiecția lui A pe planul (P). Mai notăm $x = m(\widehat{ABD})$ și $y = m(\widehat{ACD})$. Conform exercițiului X.2, p. 76 din *Geometrie*. Manual pentru clasa a X-a, ed. 1981 („teorema cosinusului" pentru unghiuri triedre) avem

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos x,$$

$$\cos\alpha = \cos\gamma\cos\beta + \sin\gamma\sin\beta\cos y,$$

de unde rezultă

$$(1)\qquad \cos x = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}, \qquad \cos y = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Să observăm că condiția necesară și suficientă ca proiecția lui d_1 (ca semidreaptă deschisă) pe planul (P) să fie inclusă în Int $\widehat{d_2d_3}$ este ca $x < \frac{\pi}{2}$ și $y < \frac{\pi}{2}$, adică $\cos x > 0$ și $\cos y > 0$. Ținînd seama de (1) această condiție devine

$$\begin{cases} \cos\beta < \dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha} \\ \cos\beta < \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \end{cases} \text{sau, echivalent,}$$

$$\cos\beta < \min\left(\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}, \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right).$$

Unghiul format de d_1 cu planul (P) este $\widehat{AOD}$. Avem

$$\sin\widehat{AOD} = \frac{AD}{OA} = \frac{AC\sin y}{OA} = \frac{OA\sin\gamma\sin y}{OA} = \sin\gamma\sin y.$$

Folosind a doua egalitate din (1), se obține

$$\sin\widehat{AOD} = \sin\gamma\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right)^2}.$$

Cum $\widehat{AOD}$ este ascuțit rezultă

$$m(\widehat{AOD}) = \arcsin\left(\sin\gamma\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right)^2}\right).$$

2. Rădăcinile ecuației $x^5 - 1 = 0$ sînt $x_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ $(0 \leqslant k \leqslant 4)$. Pe de altă parte, $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ și rezolvînd

ecuația reciprocă $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ $\left(\text{se împarte prin } x^2 \text{ și se notează } x + \frac{1}{x} = y \text{ etc.}\right)$, obținem:

$$x_1 = \omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$x_2 = \omega^2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$x_3 = \omega^3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$x_4 = \omega^4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

a) Avem, ținînd seama de cele obținute mai sus,

$$z = \frac{1}{2} + \omega + \omega^2 = \frac{i}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

deci $\mathrm{Re}(z) = 0$; b) Fie $n \in \mathbf{N}^*$ fixat. Ținînd seama de expresia lui z găsită la punctul a vom avea $z^{4n} = \frac{\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^{4n}}{4^{4n}}$. Impunînd condiția ca z^{4n} să se scrie sub forma $a_n\omega + b_n\omega^2 + c_n\omega^3 + d_n\omega^4$, ținînd seama de expresiile lui ω, ω^2, ω^3, ω^4, vom avea, prin egalarea părților reale și a celor imaginare,

$$a_n\frac{\sqrt{5}-1}{4} - b_n\frac{\sqrt{5}+1}{4} - c_n\frac{\sqrt{5}+1}{4} + d_n\frac{\sqrt{5}-1}{4} =$$

$$(1) \qquad = \frac{\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^{4n}}{4^n},$$

$$a_n\sqrt{10+2\sqrt{5}} + b_n\sqrt{10-2\sqrt{5}} - c_n\sqrt{10-2\sqrt{5}} - d_n\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0.$$

A doua egalitate din (1) se mai scrie

$$(2) \qquad (a_n - d_n)\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\,(b_n - c_n) = 0.$$

Dacă $a_n \neq d_n$ atunci $\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}} = -\frac{b_n - c_n}{a_n - d_n} \in \mathbf{Q}$; dar, dacă efectuăm raționalizările, avem $\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, contradicție. Așadar, în mod necesar, $a_n = d_n$ și atunci din (2) rezultă și $b_n = c_n$. Folosind binomul lui Newton, avem, după calcule, $\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^4 = 80\,(9+4\sqrt{5})$ și atunci

$$\frac{\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^{4n}}{4^{4n}} = \frac{80^n\,(9+4\sqrt{5})^n}{4^{4n}} =$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^n\left(\frac{9}{4} + \sqrt{5}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{5},$$

unde A_n, $B_n \in \mathbf{Q}$ sînt unic determinați (se determină cu binomul lui Newton). Prima egalitate din (1) devine

$$\frac{\sqrt{5}}{4}(a_n - b_n - c_n + d_n) - \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + d_n) = A_n + B_n\sqrt{5}$$

și, ținînd seama de unicitatea scrierii unui număr real sub forma $\alpha + \beta\sqrt{5}$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{Q})$, rezultă

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_n - b_n - c_n + d_n &= 4B_n, \\ a_n + b_n + c_n + d_n &= -4A_n. \end{aligned}$$

Ținînd seama și de faptul că $a_n = d_n$ și $b_n = c_n$, obținem din (3) existența și unicitatea numerelor a_n, b_n, c_n, d_n cu proprietatea cerută. Mai precis,

$$(4) \qquad a_n = d_n = B_n - A_n \text{ și } b_n = c_n = -(A_n + B_n);$$

c) Am definit numerele A_n și B_n prin egalitatea

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n \left(\frac{9}{4} + \sqrt{5}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{5}.$$

Atunci, tot din formula binomului, rezultă imediat

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n \left(\frac{9}{4} - \sqrt{5}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{5}.$$

Din aceste două egalități, obținem:

$$A_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{16}\right)^n \left(\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n + \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^n\right),$$

$$B_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{5}{16}\right)^n \left(\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n - \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^n\right).$$

Atunci, folosind și (4), avem

$$a_n = d_n = B_n - A_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{16}\right)^n \left(\frac{(9 + 4\sqrt{5})^n - (9 - 4\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}} - \right.$$

$$\left. - (9 + 4\sqrt{5})^n - (9 - 4\sqrt{5})^n\right) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{5}{16}\right)^n ((1 - \sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})^n +$$

$$(\sqrt{5} - 1)(9 - 4\sqrt{5})^n) < 0;$$

$b_n = c_n = -(A_n + B_n) < 0$ (deoarece $A_n > 0$ și $B_n > 0$). În sfîrșit,

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 2(B_n - A_n) - 2(A_n + B_n) = -4A_n =$$

$$= (-2)\left(\frac{5}{16}\right)^n ((9 + 4\sqrt{5})^n + (9 - 4\sqrt{5})^n).$$

3. Să notăm $A'M = x$. Dacă $M \in [A'B']$, atunci $MB' = c - x$; dacă M este pe semidreapta cu originea A' care nu conține punctul B' avem $MB' = c - x$; dacă M este pe semidreapta cu originea B' care nu conține punctul A' avem

$MB' = x - c$. În concluzie, $(\forall) M \in d$, avem (1) $MB' = x \pm c$. Ținînd seama de triunghiurile dreptunghice $AA'M$ și $BB'M$, inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$MA + MB \geqslant \sqrt{(a+b)^2 + c^2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (x \pm c)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{(a+b)^2 + c^2} \Leftrightarrow a^2 + x^2 + b^2 + (x \pm c)^2 + 2\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (x \pm c)^2)} \geqslant$$

$$\geqslant (a+b)^2 + c^2 \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (x \pm c)^2)} \geqslant ab - x(x \pm c).$$

Dacă $ab - x(x \pm c) < 0$ ultima inegalitate este evidentă; dacă $ab - x(x \pm c) \geqslant 0$, inegalitatea este echivalentă cu $(a^2 + x^2)(b^2 + (x \pm c)^2) \geqslant (ab - x(x \pm c))^2$, adică inegalitatea Cauchy-Buniakovski. Cu aceasta problema este rezolvată.

4. Se constată ușor că $(\forall) x \in \mathbf{Z}$, avem $x^2 = M7 + k$, unde $k \in \{0, 1, 2, 4\}$, adică resturile pe care le dau pătratele perfecte la împărțirea cu 7 sînt 0, 1, 2 sau 4. Dacă cel puțin unul din numerele a, b, c, d este multiplu de 7, problema este rezolvată. Presupunem acum că nici unul din numerele a, b, c, d nu este multiplu de 7. Atunci resturile pe care le dau la împărțirea cu 7 numerele a^2, b^2, c^2, d^2 aparțin mulțimii $\{1, 2, 4\}$. Avînd patru pătrate și numai trei resturi posibile, rezultă că cel puțin două pătrate dau același rest la împărțirea cu 7 și atunci paranteza care conține diferența acestor pătrate se divide cu 7. Cu aceasta problema este rezolvată.

Anul 1983

Etapa județeană

1. Se observă că $x = a$ este o soluție. Prin logaritmare în baza a deducem $a^x \log_a x = x^a$. Să observăm că funcțiile

$$f: (0, 1) \to \mathbf{R}_+^*,\ f(x) = a^x,\ g: (0, 1) \to \mathbf{R}_+^*,\ g(x) = \log_a x$$

sînt strict descrescătoare. Rezultă atunci că produsul lor $(gf): (0, 1) \to \mathbf{R}_+^*$ este tot o funcție strict descrescătoare. Deoarece funcția $h: (0, 1) \to \mathbf{R}_+^*$, $h(x) = x^a$ este strict crescătoare, rezultă că $(fg)(x) = h(x)$ în cel mult un punct. Deoarece $(fg)(a) = h(a)$ rezultă că aceasta este unica soluție. Cu aceasta enunțul este demonstrat.

2. Într-adevăr, să presupunem că ele ar mai avea o altă rădăcină comună în afară de rădăcina $z_0 = 1$. Există deci $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ și $p \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ astfel încît

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m} \Leftrightarrow \cos\frac{2k\pi}{n} - \cos\frac{2p\pi}{m} = 0 \text{ și}$$

$$\sin\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{2p\pi}{m} = 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{k}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi \sin\left(\frac{p}{m} + \frac{k}{n}\right)\pi = 0 \text{ și}$$

$$2\sin\left(\frac{k}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi \cos\left(\frac{k}{n} + \frac{p}{m}\right)\pi = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{k}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi = 0 \text{ sau}$$

$$\sin\left(\frac{k}{n} + \frac{p}{m}\right)\pi = 0 \text{ și } \cos\left(\frac{k}{n} + \frac{p}{m}\right)\pi = 0.$$

Deoarece situaţia $\sin\left(\frac{k}{n}+\frac{p}{m}\right)\pi=\cos\left(\frac{k}{n}+\frac{p}{m}\right)\pi=0$ este imposibilă, rezultă că singura situaţie care ar fi posibilă este $\sin\left(\frac{k}{n}-\frac{p}{m}\right)\pi=0 \Leftrightarrow \frac{k}{n}-\frac{p}{m}\in \mathbf{Z} \Rightarrow km-$ $-pn=smn \Rightarrow km=smn+pn=n(sm+p)$. De aici, dacă ţinem seama că $(m,n)=1$, ar rezulta că n divide k, unde $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, ceea ce este contradictoriu. Contradicţia provine din presupunerea că cele două ecuaţii ar mai avea o altă rădăcină comună în afara rădăcinii $z_0=1$.

3. Plecăm de la inegalitatea $|a+a_1|+|a-a_1|\geqslant 2|a_1|$ şi atunci

$$\sum_{k=1}^{n}|\log x+\log x_k|+\sum_{k=1}^{n}|\log x-\log x_k|\geqslant 2\sum_{k=1}^{n}|\log x_k|.$$

Totodată avem

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\log x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\log x_k|$$

şi dacă ţinem seama de inegalitatea precedentă obţinem

$$2\sum_{k=1}^{n}|\log x_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\log x_k| \quad \text{de unde} \sum_{k=1}^{n}|\log x_k|=0.$$

Prin urmare, $\log x_k=0$, $(\forall)k\in\{1,2,\ldots,n\}$, adică $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$ şi deci $x=1$. În această problemă simbolul log reprezintă logaritmul unui număr într-o bază oarecare.

4. Deoarece $RQ\perp AM$, $PQ\perp MC$ şi $MB\perp RP$ deducem că $m(\widehat{PQR})=90°$, $m(\widehat{QRP})=30°$ şi $m(\widehat{QPR})=60°$. Este clar că M este unic determinat cu ajutorul proprietăţilor date. Ducînd tangenta în C la cercul circumscris triunghiului MBC, ea formează cu BC un unghi de 60°, deci $m(\widehat{BCP})=m(\widehat{CBP})=30°$. Analog rezultă $m(\widehat{ABR})=m(\widehat{RAB})=60°$ şi deci triunghiul ARB este echilateral, de latură c. Mai avem, $PC=\frac{a}{2\sin 120°}=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Catetele $[RQ]$ şi $[PQ]$ le determinăm cu ajutorul teoremei cosinusului, astfel

$$PQ=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{3}-2\frac{b}{2}\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\left(C+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{3}-\frac{ab}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{1}{2}\sin C\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{3}-\frac{a^2+b^2-c^2}{4}+\frac{S}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{3}+c^2+\frac{4S}{\sqrt{3}}},$$

$$RQ=\sqrt{\frac{b^2}{4}+c^2-\frac{b}{2}2c\cos\left(A+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{\frac{b^2}{4}+c^2-bc\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{b^2}{4}+c^2-\frac{b^2+c^2-a^2}{4}+\sqrt{3}\,S}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{a^2}{3}+c^2+\frac{4S}{\sqrt{3}}},$$

unde $S=\sigma[ABC]$.

Avem

$$\sigma[PQR] = \frac{1}{2} QR \cdot QP = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{a^2}{3} + c^2 + \frac{4S}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\,\frac{a^2 + 3c^2}{3} +$$

$$+ \frac{S}{2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{8}\,\frac{2ac\sqrt{3}}{3} + \frac{S}{2} = \frac{ac}{4} + \frac{S}{2}.$$

Trebuie arătat că $\frac{ac}{4} + \frac{S}{2} > S$, ceea ce este echivalent cu $\frac{ac}{2} > S = \frac{ac \sin B}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin B < 1$, ceea ce este adevărat deoarece $m(\hat{B}) < 90°$.

Etapa finală

1. Pentru $n = 1$ avem

$$\frac{1}{f(1)f(2)} = \frac{f(1)}{f(2)} \Rightarrow f^2(1) = 1 \Rightarrow f(1) = 1.$$

(1) $$n = 2 \Rightarrow \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(2)(f(3)} = \frac{f(2)}{f(3)} \Leftrightarrow f(3) + 1 = f^2(2).$$

(2) $$n = 3 \Rightarrow \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \frac{1}{f(3)f(4)} = \frac{f(3)}{f(4)} \Leftrightarrow \frac{f(2)}{f(3)} + \frac{1}{4f(3)} = \frac{f(3)}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4f(2) + 1 = f^2(3).$$

Din relațiile (1) și (2) deducem $f^4(2) - 2f^2(2) - 4f(2) = 0$ și dacă ținem seama că $f(2) \in (0, \infty)$, obținem

(3) $$f^3(2) - 2f(2) - 4 = 0.$$

Deoarece ecuația de gradul 3 cu coeficienți reali $x^3 - 2x - 4 = 0$ are singura rădăcină reală $x = 2$ deducem din (3) că $f(2) = 2$. Prin urmare, $f(3) = f^2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$. Vom demonstra mai departe că $f(n) = n$. $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Într-adevăr, presupunînd $f(k) = k$, $(\forall)\, k \in \mathbf{N}^*$, $k \leqslant n$, deducem din proprietatea b, adică din

$$\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \quad + \frac{1}{f(n)f(n+1)} = \frac{f(n)}{f(n+1)}$$

că

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \quad + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{nf(n+1)} = \frac{n}{f(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \quad + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{nf(n+1)} =$$

$$= \frac{n}{f(n+1)} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{nf(n+1)} = \frac{n}{f(n+1)} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} =$$

$$= \frac{1}{f(n+1)}\left(n - \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 1 = \frac{n+1}{f(n+1)} \Leftrightarrow f(n+1) = n + 1.$$

Deci, conform principiului inducției matematice, deducem că $f(n) = n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, și problema este complet rezolvată.

2. Conform enunțului rezultă $k - 1 \geqslant 1 \Leftrightarrow k \geqslant 2$ și vom face demonstrația prin inducție matematică după $k \geqslant 2$. Pentru $k = 2 \Rightarrow C_{n+2}^{m+1} = C_n^{m-1} + a_1 C_n^m + C_n^{m+1}$, de unde deducem că există $a_1 = 2$. Presupunem că proprietatea este adevărată pentru orice $2 \leqslant k \leqslant p$ și să demonstrăm că ea este adevărată și pentru $k = p + 1$. Avem deci

$$C_{n+p}^{m+p-1} = C_n^{m-1} + a_1 C_n^m + a_2 C_n^{m+1} + \ldots + a_{p-1} C_n^{m+p-2} + C_n^{m+p-1} \tag{1}$$

și să demonstrăm că există numerele naturale $b_1, b_2, \ldots, b_p$ astfel încît

$$C_{n+p+1}^{m+p} = C_n^{m-1} + b_1 C_n^m + b_2 C_n^{m+1} + \ldots + b_{p-1} C_n^{m+p-2} + b_p C_n^{m+p-1} + C_n^{m+p}. \tag{2}$$

Înlocuim în relația (1) pe m cu $m + 1$; deducem

$$C_{n+p}^{m+p} = C_n^m + a_1 C_n^{m+1} + a_2 C_n^{m+2} + \quad + a_{p-1} C_n^{m+p-1} + C_n^{m+p}. \tag{3}$$

Adunînd egalitățile (1) cu (3), obținem

$$\begin{aligned} C_{n+p}^{m+p-1} + C_{n+p}^{m+p} &= C_n^{m-1} + (a_1 + 1) C_n^m + (a_2 + a_1) C_n^{m+1} + \ldots \\ &+ (a_{p-1} + a_{p-2}) C_n^{m+p-2} + (a_{p-1} + 1) C_n^{m+p-1} + C_n^{m+p}. \end{aligned} \tag{4}$$

Dacă notăm $b_1 = a_1 + 1$, $b_2 = a_2 + a_1$, ..., $b_{p-1} = a_{p-1} + a_{p-2}$, $b_p = a_{p-1} + 1$, din (4) rezultă $C_{n+p+1}^{m+p} = C_n^{m-1} + b_1 C_n^m + b_2 C_n^{m+1} + \ldots + b_p C_n^{m+p-1} + C_n^{m+p}$, adică relația (2). Pentru $k = 7$ obținem $a_1 = a_6 = C_7^1 = 7$, $a_2 = a_5 = C_7^2 = 21$, $a_3 = a_4 = C_7^3 = 35$.

3. Fie A_1, A_2, A_3 imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3 și fie $z = \alpha z_2 + (1 - \alpha) z_3$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$, iar A imaginea geometrică a numărului complex z. Este evident că $A \in A_2A_3$. Să notăm cu B piciorul perpendicularei din A_1 pe dreapta A_2A_3. Avem $A_1A \geqslant A_1B$ și deci:

$$\min_{\alpha \in \mathbf{R}} |\alpha z_2 + (1 - \alpha) z_3 - z_1| = A_1B = h. \tag{1}$$

Pe de altă parte, în triunghiul $A_1A_2A_3$, avem:

$$\sigma[A_1A_2A_3] = \frac{|z_2 - z_3|\, h}{2} = \frac{|z_1 - z_2|\, |z_1 - z_3| \sin \widehat{A_2A_1A_3}}{2},$$

de unde obținem

$$h = \frac{|z_1 - z_2|\, |z_1 - z_3| \sin \widehat{A_2A_1A_3}}{|z_2 - z_3|}. \tag{2}$$

Din teorema sinusurilor, obținem:

$$\frac{|z_2 - z_3|}{\sin \widehat{A_2A_1A_3}} = 2r, \text{ adică } \sin \widehat{A_2A_1A_3} = \frac{|z_2 - z_3|}{2r}. \tag{3}$$

Din (2) și (3) deducem

$$h = \frac{|z_1 - z_2|\, |z_1 - z_3|}{2r}. \tag{4}$$

Relațiile (1) și (4) ne arată că:

$$h = \min_{\alpha \in \mathbf{R}} |\alpha z_2 + (1 - \alpha) z_3 - z_1| = \frac{|z_1 - z_2|\, |z_1 - z_3|}{2r}.$$

4. Demonstrăm că ambele afirmații sînt echivalente cu afirmația c) $Ox \perp Oy \perp Oz \perp Ox$. a) $\Rightarrow$ c). Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Din $OH \perp BC$ și $AH \perp BC$ deducem că $BC \perp (AOH)$, de unde $OA \perp BC \Rightarrow (Ox \perp BC$. Deoarece $(Ox \perp BC$, $(\forall)\ B \in (Oy$ și $(\forall)\ C \in (Oz$ rezultă că $(Ox \perp (yOz)$. Analog, $(Oy \perp (xOz)$, $(Oz \perp (xOy)$, adică a) $\Rightarrow$ c). c) $\Rightarrow$ a). Fie $OH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Deoarece $OH \perp (ABC)$ și $OA \perp (OBC)$ rezultă $OA \perp BC$ și deci $BC \perp (OAH)$, de unde $AH \perp BC$. Analog $BH \perp AC$, $CH \perp AB$, adică H este ortocentrul triunghiului ABC. c) $\Rightarrow$ b). Fie $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Avem:

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - (b^2 + c^2) = 2a^2 > 0$$

și relațiile analoage, de unde deducem că triunghiul ABC este ascuțitunghic pentru orice A, B, C ca în enunț. b) $\Rightarrow$ c). Fie $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ și $\mu(\widehat{AOB}) = \alpha$, $\mu(\widehat{AOC}) = \beta$, $\mu(\widehat{BOC}) = \gamma$. Trebuie ca (1) $BC^2 < AC^2 + AB^2$, $(\forall)\ A$, B, C ca în enunț. Relația (1) este echivalentă cu

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma < a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta + a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2a^2 - 2ab\cos\alpha - 2ac\cos\beta + 2bc\cos\gamma > 0,\ (\forall)\ a,\ b,\ c \in \mathbf{R}_+^*.$$

Deoarece

$$2a^2 - 2ac\cos\beta + 2b(-a\cos\alpha + c\cos\gamma) > 0,\ (\forall)\ a, b, c, \in \mathbf{R}_+^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -a\cos\alpha + c\cos\gamma \geqslant 0;\ (\forall)\ a,\ c \in \mathbf{R}_+^* \Rightarrow -\cos\alpha \geqslant 0,\ \cos\gamma \geqslant 0 \text{ iar}$$
$$2a^2 - 2ab\cos\alpha + 2c(-a\cos\beta + b\cos\gamma) > 0,\ (\forall)\ a,\ b,\ c \in \mathbf{R}_+^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -a\cos\beta + b\cos\gamma \geqslant 0,\ (\forall)\ a,\ b \in \mathbf{R}_+^* \Rightarrow \cos\beta \leqslant 0.$$

Prin urmare, $\cos\alpha \leqslant 0$, $\cos\beta \leqslant 0$, $\cos\gamma \geqslant 0$. Scriind și relațiile analoage relației (1) obținem și $\cos\alpha \geqslant 0$, $\cos\beta \geqslant 0$, $\cos\gamma \leqslant 0$. Deci $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Anul 1984

Etapa Județeană

1. Avem $2^{2x-1} = x^2 \Leftrightarrow \left(2^{x-\frac{1}{2}} - x\right)\left(2^{x-\frac{1}{2}} + x\right) = 0$. Deoarece $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^{x-\frac{1}{2}} + x$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ și $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, deducem că $x = -\frac{1}{2}$ este singura soluție a ecuației $f(x) = 0$. Fie acum $a \in \mathbf{R}$ o soluție a ecuației $g(x) = 0$, unde $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2^{x-\frac{1}{2}} - x$. Atunci

$$2^{a-\frac{1}{2}} = a \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a = 2^{a-\frac{1}{2}} > 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 2^{a-\frac{1}{2}} > 2^{(\sqrt{2}-1)\frac{1}{2}} > 2^{\frac{1}{5}} > 1{,}1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 2^{\frac{1}{2}(2a-1)} > 2^{1{,}1-\frac{1}{2}} = \sqrt[5]{8} > 1{,}5 \Rightarrow a = 2^{\frac{1}{2}(2a-1)} > 2^{1{,}5-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 2^{\frac{1}{2}(2a-1)} > 2^{\frac{3}{2}} > 2{,}8 \Rightarrow a = 2^{\frac{1}{2}(2a-1)} > 2^{2{,}8-\frac{1}{2}} = 2^{2{,}3} > 4.$$

Arătăm că ecuația $g(x)=0$ nu are nici soluții mai mari ca 4. Demonstrăm mai întîi prin inducție că (1) $g(n)>1$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 4$. Pentru $n=4$, avem $2^{3,5}>5$, ceea ce este adevărat, iar dacă $g(k)>1$ atunci $2^{k+1-\frac{1}{2}}>2(k+1)>k+2$, $(\forall)\ k\geqslant 4$, și cu aceasta (1) este demonstrată. Fie $x>4\Rightarrow 4\leqslant[x]\leqslant x<[x]+1\Rightarrow$ $\Rightarrow 2^{x-\frac{1}{2}}\geqslant 2^{[x]-\frac{1}{2}}\overset{(1)}{>}[x]+1>x$, și deci $x=-\frac{1}{2}$ este unica soluție a ecuației date.

2. Egalitatea dată este echivalentă cu $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{1}{2}B+\operatorname{tg}\frac{1}{2}B\operatorname{tg}\frac{1}{2}C+$ $+\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=1$, și astfel inegalitatea de demonstrat devine

$$8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C\leqslant \tag{1}$$

$$\leqslant\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}A\sin^2\frac{1}{2}B\sin^2\frac{1}{2}C\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A\operatorname{ctg}\frac{1}{2}B+\right.}$$

$$\left.+1\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}B\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C+1\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\prod\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A\operatorname{ctg}\frac{1}{2}B+1\right)\geqslant 64.$$

Demonstrăm acum că dacă $x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$ și $xyz=x+y+z$, atunci $(*)\ \prod(xy+1)\geqslant 64$. Într-adevăr, $\prod(xy+1)=\sum xy+xyz\sum x+x^2y^2z^2+1$ și din inegalitatea $(\sum x)(\sum x^{-1})\geqslant 9$ deducem $\sum xy\geqslant 9$ și totodată $xyz=x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2y^2z^2\geqslant 27$. Deci $\prod(xy+1)\geqslant 9+27+27+1=64$, cu egalitate pentru $x=y=z$. Folosind $(*)$ deducem (1) și deci deducem enunțul.

3. Fie $u=1+i\sqrt{a}$ și $v=\bar{u}$. Avem $s_n=\frac{1}{2}(u^n+v^n)$ iar u și v sînt rădăcinile ecuației (1) $z^2-2z+1+a=0$. Se demonstrează fără dificultate că $s_{n+2}=2s_{n+1}-(1+a)s_n$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}$. Mai departe se demonstrează prin inducție proprietatea din enunț.

4. Să presupunem că dreptele suport AB și CD ale celor două segmente sînt neparalele și că se intersectează în O. Construim $(OE)\equiv(OE')\equiv(AB)$ pe dreapta AB și $(OF)\equiv(OF')\equiv(CD)$ pe dreapta CD. Dacă $M\in\operatorname{Int}\widehat{EOF}$ așa încît $\sigma[MAB]+\sigma[MCD]=k$, $k>0$, cum $\sigma[MOE]=\sigma[MAB]$ și $\sigma[MOF]=\sigma[MCD]$ rezultă $\sigma[MOE]+\sigma[MOF]=k\Leftrightarrow\sigma[OEF]+\sigma[MEF]=k\Leftrightarrow\sigma[MEF]=k-\sigma[OEF]=\text{const}$, deci locul punctului M este segmentul (PQ) paralel cu EF, unde $P\in AB$, $Q\in CD$. Analog, dacă $M\in\operatorname{Int}\widehat{E'OF'}$ sau $M\in\operatorname{Int}\widehat{EOF'}$ sau $M\in\operatorname{Int}\widehat{E'OF}$ obținem puncte ale locului geometric, respectiv $(P'Q')$, (PQ') și $(P'Q)$ paralele cu laturile paralelogramului $EFE'F'$. Deci locul geometric căutat există pentru $k\geqslant 0$ și este paralelogramul $PQP'Q'$, „concentric" cu paralelogramul $EFE'F'$. Dacă $\sigma[OEF]<k$, paralelogramul $EFE'F'$ este interior paralelogramului $PQP'Q'$, dacă $0<k<\sigma[OEF]$, paralelogramul $PQP'Q'$ este interior paralelogramului $EFE'F'$ Pentru $k=0$ locul geometric este punctul O, iar pentru $k=\sigma[OEF]$ locul geometric este chiar

paralelogramul $EFE'F'$. Dacă $a = AB$, $b = CD$, u este valoarea comună a distanțelor punctelor Q și Q' la dreapta AB, iar v este valoarea comună a distanțelor punctelor P și P' la CD, atunci $au = bv = 2k$, căci dacă $M \in AB$, $\sigma[MAB] = 0$, iar dacă $M \in CD$, $\sigma[MCD] = 0$. Să arătăm acum că orice punct al paralelogramului $PQP'Q'$ satisface condițiile problemei. Fie, de exemplu, $N \in (PQ')$ și m distanța lui N la AB, iar n distanța lui N la CD. Putem scrie:

$$\frac{m}{u} = \frac{NP}{PQ'} \Rightarrow m = u\frac{NP}{PQ'} \text{ și } \frac{n}{v} = \frac{NQ'}{PQ'} \Rightarrow n = v\frac{NQ'}{PQ'}. \text{ Avem}$$

$$\sigma[NAB] + \sigma[NCD] = \frac{1}{2}(am + bn) = \frac{1}{2}\left(au\frac{NP}{PQ'} + bv\frac{NQ'}{PQ'}\right) = k\left(\frac{NP}{PQ'} + \frac{NQ'}{PQ'}\right) = k.$$

Să analizăm acum cazul cînd dreptele AB și CD sînt paralele. Cele două drepte paralele împart planul în trei regiuni (zone); zona I între cele două drepte, zona II nu conține dreptele și este semiplanul care are drept frontieră pe CD, iar zona III nu conține dreptele și este formată din semiplanul care are drept frontieră pe AB. Prin „dreaptă în zona X" vom înțelege o dreaptă situată în zona X și paralelă cu dreptele AB și CD, unde $X \in \{\text{I, II, III}\}$. Fie d distanța dintre dreptele AB și CD. Avem două subcazuri: i) $a < b$. Dacă M este un punct în zona I, fie x, y respectiv distanțele lui M la dreptele AB și CD. Atunci $\sigma[MAB] + \sigma[MCD] = k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ax + by = 2k$. Avem sistemul

$$\begin{cases} ax + by = 2k, \\ x + y = d, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{db - 2k}{b - a}, \\ y = \dfrac{2k - ad}{b - a}. \end{cases}$$

Pentru $2k = ad$ avem $y = 0$, $x = d$, și deci locul punctului M este dreapta CD. Pentru $2k < ad$ locul lui M este mulțimea vidă. Dacă $ad < 2k < bd$, atunci locul geometric al punctului M este o dreaptă în zona I și o dreaptă în zona II. Dacă $2k = bd$, locul lui M este dreapta BA și o dreaptă în zona II. Pentru $2k > bd$, locul lui M este format din două drepte, una în zona II și una în zona III; ii) $a = b = t$. Dacă punctul M este în zona I, așa încît x este distanța lui M la AB, atunci $\sigma[MAB] + \sigma[MCD] = k \Leftrightarrow \frac{1}{2}(tx + t(d - x)) = k \Leftrightarrow 2k = dt$, deci dacă $2k < dt$, atunci locul lui M este mulțimea vidă. Pentru $2k = dt$, locul lui M este format din toate punctele zonei I, inclusiv dreptele AB și CD. Dacă $2k > dt$, locul lui M este format din două drepte, una în zona II, alta în zona III, situate la distanțe egale de AB, respectiv CD.

Etapa finală

1. Pe baza condițiilor din enunț avem:

(1) $$f(0) = f(0 \cdot 0) = f(0) \cdot f(0) = f^2(0);$$

(2) $$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) = f^2(1);$$

(3) $$f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1) \cdot f(-1) = f^2(-1).$$

Din (1) deducem $f(0) = 0$ sau $f(0) = 1$. Dacă presupunem $f(0) = 1$, pe baza monotoniei stricte a lui f, ar rezulta din (2) că $f(1) = 0$ și atunci $f(x) = f(1 \cdot x) =$ $= f(1) \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0, (\forall)\ x \in \mathbf{Z}$, ceea ce este absurd. Deci $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,

și atunci din (3), pe baza monotoniei stricte a lui f, obținem $f(-1) = -1$. Prin urmare, pentru orice $x \in \mathbf{Z}$, avem $f(-x) = f((-1)x) = f(-1) \cdot f(x) = -f(x)$, adică funcția f este impară. Totodată, din f strict monotonă și $f(-1) < f(0) < f(1)$, deducem că f este strict crescătoare pe $\mathbf{Z}$. Deoarece f este impară, este suficient să determinăm funcția $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{N}$. Deci g este strict crescătoare, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, și există $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 2$, astfel încît $g(k) = k$. Din

$$0 < 1 < 2 < \ldots < k - 1 < k,\ g(0) = 0,\ g(1) = 1,\ g(k) = k$$

și g strict crescătoare rezultă $g(x) = x$, $(\forall)\ x \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$. Arătăm, prin inducție matematică, că $g(k^n) = k^n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Într-adevăr, pentru $n = 0$, avem $g(k^0) = g(1) = 1 = k^0$, pentru $n = 1$ avem $g(k^1) = g(k) = k = k^1$. Presupunem că $g(k^n) = k^n$ și să arătăm că $g(k^{n+1}) = k^{n+1}$. Într-adevăr, $g(k^{n+1}) = g(k \cdot k^n) = g(k) \cdot g(k^n) = k \cdot k^n = k^{n+1}$. Acum, pentru orice $x \in \mathbf{N}^*$, există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $x \in [k^n, k^{n+1}) \cap \mathbf{N}^*$, și deoarece $k^n < k^n + 1 < k^n + 2 < \ldots < k^{n+1} - 1 < k^{n+1}$, $g(k^n) = k^n$, $g(k^{n+1}) = k^{n+1}$, iar g este strict crescătoare; rezultă că

$$g(k^n + p) = k^n + p,\ (\forall)\ p \in \{0, 1, 2, \ldots, k^{n+1} - k^n\},$$

și prin urmare $g(x) = x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{N}$. Cu aceasta am demonstrat că unica funcție care verifică enunțul este $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x$.

2. Demonstrăm mai întîi inegalitatea

$$(1) \qquad \log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \ldots + \log_{a_{n-1}} a_n + \log_{a_n} a_1 \geqslant n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$$

și $a_i \in (0,1)$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sau $a_i > 1$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Într-adevăr, condițiile impuse în enunțul inegalității (1) ne asigură că toți logaritmii care intervin în această inegalitate sînt numere reale pozitive. Putem aplica deci inegalitatea mediilor și avem

$$\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \ldots + \log_{a_{n-1}} a_n + \log_{a_n} a_1 =$$

$$= \frac{\lg a_2}{\lg a_1} + \frac{\lg a_3}{\lg a_2} + \frac{\lg a_n}{\lg a_{n-1}} + \frac{\lg a_1}{\lg a_n} \geqslant$$

$$\geqslant n \sqrt[n]{\frac{\lg a_2}{\lg a_1} \frac{\lg a_3}{\lg a_2} \quad \frac{\lg a_{n-1}}{\lg a_{n-2}} \frac{\lg a_n}{\lg a_{n-1}} \frac{\lg a_1}{\lg a_n}} = n$$

și inegalitatea (1) este demonstrată. Mai departe, avem

$$\left(x_k - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0 \Rightarrow x_k^2 - x_k + 4^{-1} \geqslant 0 \Rightarrow x_k^2 \geqslant x_k - 4^{-1},\ (\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Deoarece $x_k \in (0, 1)$, $(\forall)\ k = 1, \ldots, n$, rezultă că

$$\log_{x_k} x_{k+1}^2 < \log_{x_k}(x_{k+1} - 4^{-1}),\ (\forall)\ k = 1, \ldots, n,\ (x_{n+1} = x_1).$$

Rezultă atunci că

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \log_{x_k}(x_{k+1} - 4^{-1}) \geqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \log_{x_k} x_{k+1}.$$

Pe baza inegalității (1), deducem

$$2 \sum_{k=1}^{n} \log_{x_k} x_{k+1} \geqslant 2n,$$

de unde, dacă ținem seama de (2), obținem

$$\sum_{k=1}^{n} \log_{x_k}(x_{k+1} - 4^{-1}) \geqslant 2n.$$

Minimul se realizează pentru $x_k - \frac{1}{2} = 0$, $(\forall)\ k = 1, \ldots, n$. Într-adevăr,

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - 4^{-1}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - 4^{-1}\right) + \ldots + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - 4^{-1}\right) = 2n.$$

Deci singurul n-uplu pentru care se realizează minimul este $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) \in \mathbf{R}^n$.

3. Fie $m \in \mathbf{N}$ astfel încît $x_m \in \mathbf{Z}$. Pentru oricè $n \in \mathbf{N}$, $n > m$, considerăm diferența

$$x_n - x_m = a_k(n^k - m^k) + a_{k-1}(n^{k-1} - m^{k-1}) + \ldots + a_1(n - m).$$

Deoarece $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{Q}$, rezultă că există $b_0, b_1, \ldots, b_k \in \mathbf{Z}$, și $d \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $a_i = b_i d^{-1}$, $(\forall)\, i = 1,\ \ k$ și atunci avem

$$x_n - x_m = d^{-1}(b_k(n^k - m^k) + b_{k-1}(n^{k-1} - m^{k-1}) + \ldots + b_1(n - m)) = pd^{-1}(n - m),$$

unde $p \in \mathbf{Z}$. Considerînd $n = m + dt$, cu $t \in \mathbf{N}$, rezultă că $x_{m+dt} - x_m \in \mathbf{Z}$ și, deoarece $x_m \in \mathbf{Z}$, deducem că $x_{m+dt} \in \mathbf{Z}$, $(\forall)\, t \in \mathbf{N}$. Prin urmare, șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ conține o infinitate de termeni care sînt numere întregi. Vom arăta în continuare că dintre acești termeni care sînt numere întregi există o infinitate de termeni distincți doi cîte doi. Procedăm prin reducere la absurd, presupunînd că există o infinitate de numere naturale $n_1, n_2, \ldots, n_s$, astfel încît $x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x_{n_s} = \ldots = c \in \mathbf{Z}$. Putem scrie:

$$x_{n_s} = d^{-1}(b_k n_s^k + b_{k-1} n_s^{k-1} + \ldots + b_1 n_s + b_0) = c \Leftrightarrow b_k n_s^k + b_{k-1} n_s^{k-1} + \ldots + b_1 n_s = cd - b_0.$$

Dacă $cd - b_0 \neq 0$ rezultă că n_s divide pe $cd - b_0$, $(\forall)\, s \in \mathbf{N}^*$, și atunci $cd - b_0$ admite o infinitate de divizori distincți care sînt numere naturale, deci este neapărat nevoie ca $cd - b_0 = 0$. Dacă $cd - b_0 = 0$ atunci $b_k n_s^k + b_{k-1} n_s^{k-1} + \ldots + b_1 n_s = 0$, de unde, prin simplificare cu $n_s \in \mathbf{N}^*$, deducem că n_s divide pe b_1 și atunci rezultă că b_1 admite o infinitate de divizori naturali distincți. Dacă $b_1 = 0$, se continuă procedeul și după un număr finit de pași ajungem la o contradicție cu faptul că nu toți a_i sînt nuli. Cu aceasta problema este rezolvată.

4. Fie $N = \mathrm{pr}_{(ABC)} M$ și $h = MN$, $u = d(N, AC)$, $v = d(N, AB)$. Rezultă că

$$x^2 = h^2 + AN^2 = h^2 + u^2 + v^2; \tag{1}$$

$$y^2 = h^2 + BN^2 = h^2 + v^2 + (c + mu)^2; \tag{2}$$

$$z^2 = h^2 + CN^2 = h^2 + u^2 + (b + nv)^2, \tag{3}$$

unde $m, n \in \{-1, 1\}$ și depind de poziția lui N față de dreptele AB, BC și CA. Din (2) și (3) obținem

$$\frac{y^2 + z^2}{2} = h^2 + u^2 + v^2 + \frac{b^2 + c^2}{2} + mcu + nbv. \tag{4}$$

Relațiile (1) și (2) ne dau $y^2 - x^2 = c^2 + 2cmu = c(c + mu)$ iar (1) și (3) ne dau $z^2 - x^2 = b(b + 2nv)$. Prin urmare,

$$(x^2 - y^2)^2 = c^2(c^2 + 4u^2 + 4mcu),\ (x^2 - z^2)^2 = b^2(b^2 + 4v^2 + 4nbv),$$

de unde rezultă

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{c^2}+\frac{(x^2-z^2)^2}{b^2}=b^2+c^2+4u^2+4mcu+4mbv+4v^2=$$

$$=a^2+4(u^2+v^2)+4mcu+4mbv.$$

Dacă ţinem seama de (4), ultima relaţie ne dă

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{c^2}+\frac{(x^2-z^2)^2}{b^2}=a^2+2(y^2+z^2)-4h^2-2a^2=2(y^2+z^2)-4h^2-a^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4h^2=2(y^2+z^2)-a^2-\frac{(x^2-y^2)^2}{c^2}-\frac{(x^2-z^2)^2}{b^2},\ \text{şi atunci}\ M\in(ABC)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h=0\Leftrightarrow 2(y^2+z^2)=a^2+\frac{(x^2-y^2)^2}{c^2}+\frac{(x^2-z^2)^2}{b^2}$$

şi problema este rezolvată.

Anul 1985

Etapa judeţeană

1. Presupunem prin absurd că $(\forall)x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant 0$. Dacă $f(0)=0\Rightarrow f(f(0))=f(0)=0$ şi, deoarece $f(f(0))=2^0\Rightarrow 2^0=0\Rightarrow 1=0$, contradicţie. Deci $f(0)\neq 0\Rightarrow f(0)>0$. Deoarece $f(x)\geqslant 0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$, şi ţinînd cont că funcţia f este crescătoare, rezultă $f(f(x))\geqslant f(0)>0$, unde $f(f(x))=2^x$, de unde deducem că $(\forall)x\in\mathbf{R}$, $2^x\geqslant f(0)>0$; deci există $y\in(0,f(0))$ astfel încît $(\forall)x\in\mathbf{R}$, $2^x\neq y$, ceea ce contrazice bijectivitatea funcţiei exponenţiale. Altă soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că, pentru orice $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant 0$. Din $f(0)\geqslant 0$ şi faptul că f este crescătoare, rezultă că $f(f(x))\geqslant f(0)$ sau $2^x\geqslant f(0)\geqslant 0$. Dacă $f(0)>0$, atunci $(\forall)x<\log_2 f(0)\Rightarrow 2^x<f(0)$, ceea ce contrazice $2^x\geqslant f(0)$. Deci $f(0)=0$. Dar $2^0=f(f(0))=f(0)=0$, contradicţie. Prin urmare există $y\in\mathbf{R}$ astfel încît $f(y)<0$.

2. Aplicînd inegalitatea mediilor, obţinem

$$(1)\quad \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc}\leqslant\frac{1}{4abc}\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\,\frac{p^3}{4\cdot 4SR}=\frac{4p^3}{27\,SR}=$$

$$=\frac{1}{27r}\,\frac{(2p)^2}{R}=\frac{(2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C)^2}{R}\cdot\frac{1}{27r}=$$

$$=\frac{4R}{27r}(\sin A+\sin B+\sin C)^2.$$

Aplicînd inegalitatea lui Jensen pentru funcţia $f(x)=\sin x$, care este concavă pe intervalul $(0,\pi)$, obţinem

$$(2)\qquad \sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$(3)\qquad \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc}\leqslant\frac{4R}{27r}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{R}{r}.$$

Pe de altă parte, din $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$, $c+a \geqslant 2\sqrt{ac}$, rezultă (4) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$. Din (3) şi (4) se deduce imediat că $R \geqslant 2r$.

3. Se observă imediat că $z_1^3 = 1$ şi $z_2^3 = 1$, adică z_1 şi z_2 sînt rădăcinile cubice ale unităţii. Dacă $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ şi $\omega^3 = 1$ se verifică imediat identitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = (a\omega^2 + b\omega + c)(a\omega + b\omega^2 + c).$$

Dar ABC este triunghi echilateral $\Leftrightarrow \dfrac{d(A, B)}{d(A, C)} = \dfrac{d(B, C)}{d(B, A)}$ şi $\mu(\widehat{BAC}) = \mu(\widehat{CBA}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{a-b}{a-c}\right| = \left|\frac{b-c}{b-a}\right| \text{ şi}$$

$$\arg\frac{a-b}{a-c} = \arg\frac{b-c}{b-a} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a-c} = \frac{b-c}{b-a} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a\omega^2 + b\omega + c)(a\omega + b\omega^2 + c) = 0 \Leftrightarrow a\omega^2 + b\omega + c = 0 \text{ sau } a\omega + b\omega^2 + c = 0,$$

ceea ce este echivalent că ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$ admite ca rădăcină fie pe z_1 fie pe z_2.

4. Rezolvăm problema mai întîi cînd $0 \notin F$. Fie $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, unde $x_i \neq x_j$, pentru $i \neq j$ şi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se observă că E este o submulţime a mulţimii $\{\pm\sqrt{x_1}, \pm\sqrt{x_2}, \ldots, \pm\sqrt{x_n}\}$ cu condiţia ca E să conţină sau pe $\sqrt{x_i}$, sau pe $-\sqrt{x_i}$ sau pe $\sqrt{x_i}$ şi $-\sqrt{x_i}$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Să notăm cu a_n numărul căutat. Dacă $F = \{x_1\}$ atunci avem următoarele posibilităţi: $E_1 = \{\sqrt{x_1}\}$, $E_2 = \{-\sqrt{x_1}\}$, $E_3 = \{\sqrt{x_1}, -\sqrt{x_1}\}$, deci în acest caz $a_1 = 3$. Să determinăm o relaţie de recurenţă între a_{n+1} şi a_n. Fie $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. Fiecare mulţime E se poate forma dintr-o mulţime dată de a_n care să conţină sau pe $\sqrt{x_{n+1}}$ sau pe $-\sqrt{x_{n+1}}$ sau pe $\sqrt{x_{n+1}}$ şi pe $-\sqrt{x_{n+1}}$. Rezultă că $a_{n+1} = 3a_n$, de unde deducem imediat că $a_n = 3^n$. În cazul cînd $0 \in F$, atunci să notăm cu b_n numărul căutat. În acest caz, pentru $F = \{0\}$, avem $b_1 = 1$. Raţionînd ca în cazul anterior determinăm relaţia $b_{n+1} = 3b_n$, de unde se deduce uşor că $b_n = 3^{n-1}$.

Etapa finală

1. a) Se observă imediat că $x = 0$ şi $x = 1$ sînt soluţii întregi ale ecuaţiei date. b) Pentru orice $x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, rezultă că $x! \in 2\mathbb{N}^*$, şi deci $3^{x!} = (4-1)^{x!} \in 4\mathbb{N}^* + 1$, de unde deducem că cifra unităţilor numărului $2^{3^{x!}}$ este 2, şi deci cifra unităţilor numărului $2^{3^{x!}} + 1$ este 3. Deoarece $2^{x!} \in 4\mathbb{N}^*$, $(\forall)x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, deducem că cifra unităţilor numărului $3^{2^{x!}}$ este 1. Din cele de mai sus rezultă că ecuaţia din enunţ nu admite soluţii $x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, şi deci singurele soluţii sînt $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$. Altă soluţie. Vom demonstra prin inducţie matematică inegalitatea

$$(1) \qquad 3^{2^{x!}} < 2^{3^{x!}}, \quad (\forall)x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 3.$$

Pentru $x = 3$, avem $3^5 = 243 < 256 = 2^8$, şi deci $3^8 = 3^5 \cdot 3^3 < 2^8 \cdot 3^3 = 2^8 \cdot 27 < 2^8 \cdot 2^5 = 2^{13} < 2^{27}$, adică $3^{2^3} < 2^{3^3}$. De aici obţinem

$$(3^{2^3})^{2^3} < (2^{3^3})^{2^3} < (2^{3^3})^{3^3} \Rightarrow 3^{2^6} < 2^{3^6} \Leftrightarrow 3^{2^{3!}} < 2^{3^{3!}}.$$

Presupunem că pentru $x \in \mathbf{N}$, $x > 3$, avem $3^{2^{x!}} < 2^{3^{x!}}$, și să demonstrăm că și pentru $x + 1$ proprietatea este adevărată, adică $3^{2^{(x+1)!}} < 2^{3^{(x+1)!}}$. Într-adevăr, ridicînd inegalitatea $3^{2^{x!}} < 2^{3^{x!}}$ la puterea $2^{x!\cdot x}$ obținem

$$(3^{2^{x!}})^{2^{x!\cdot x}} < (2^{3^{x!}})^{2^{x!\cdot x}} < (2^{3^{x!}})^{3^{x!\cdot x}} \Rightarrow 3^{2^{(x+1)!}} < 2^{3^{(x+1)!}},$$

și cu aceasta afirmația (1) este demonstrată. Pe baza acesteia putem afirma că $3^{2^{x!}} < 2^{3^{x!}} + 1$, $(\forall) x \in \mathbf{N}$, $x \geqslant 3$, de unde conchidem că ecuația nu admite soluții $x \geqslant 3$. Deoarece $3^{2^{2!}} > 2^{3^{2!}} + 1$ rezultă că singurele soluții sînt $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

2. Din $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ rezultă că $z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1$ și atunci

$$(1)\ |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = \left|\frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1z_2z_3}\right| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| =$$

$$= |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |z_1 + z_2 + z_3|.$$

Deoarece $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$, pe baza datelor din enunț, deducem

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2\,|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|,$$

și deci, pe baza relației (1), obținem $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2\,|z_1 + z_2 + z_3|$ și, deoarece $|z_1 + z_2 + z_3| \in \mathbf{R}_+^*$, deducem $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

3. Pe baza teoremei cosinusului într-un triunghi, inegalitatea de demonstrat devine

$$a(a^2 - 2bc\cos A) + b(b^2 - 2ca\cos B) + c(c^2 - 2ab\cos C) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 2abc(\cos A + \cos B + \cos C) \geqslant 0.$$

Totodată, în orice triunghi ABC, avem $2(\cos A + \cos B + \cos C) \leqslant 3$, și atunci pentru a demonstra inegalitatea din enunț este suficient să demonstrăm că $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant 0$, ceea ce este evident în conformitate cu inegalitatea mediilor. Avem egalitate pentru $a = b = c$, adică atunci cînd triunghiul ABC este echilateral.

4. a) Vom demonstra că $\mathrm{pr}_\pi\, ABC = A'B'C'$ (un triunghi) dacă și numai dacă π nu este perpendicular pe (ABC). Este evident că dacă $\mathrm{pr}_\pi\, ABC = A'B'C'$ (triunghi), atunci π nu este perpendicular pe (ABC). Reciproc, dacă π nu este perpendicular pe (ABC) avem de analizat două situații: i) $(ABC) \parallel \pi$. În acest caz $\mathrm{pr}_\pi\,(ABC) = A'B'C' \equiv ABC$; ii) $(ABC) \cap \pi \neq \emptyset$. În acest caz cele două plane (distincte, evident) se intersectează după o dreaptă d, dar aici sînt de analizat două subcazuri: ii$_1$) $d \cap AB \neq \emptyset$. Atunci $A' = \mathrm{pr}_\pi\, A$ și $B' = \mathrm{pr}_\pi\, B$ sînt distincte iar $C' = \mathrm{pr}_\pi\, C \notin (ABB'A')$, de unde deducem $C' \notin A'B'$, adică A', B' și C' formează un triunghi care este proiecția pe π a triunghiului ABC; ii$_2$) $d \parallel AB$. Atunci este evident că $C' = \mathrm{pr}_\pi\, C \notin (ABB'A')$ și deci $C' \notin A'B'$, adică $A'B'C' = \mathrm{pr}_\pi\, ABC$ este un triunghi. b) Sîntem evident în situația (ABC) nu este perpendicular pe π. Vom avea în vedere teorema: un unghi drept se proiectează pe un plan π într-un unghi drept dacă și numai dacă planul unghiului dat nu este perpendicular pe planul π și unghiul are cel puțin o latură paralelă cu π. Distingem două posibilități: iii) triunghiul ABC este dreptunghic în A care de fapt este și ortocentru. În acest caz O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC, este mijlocul laturii (ipotenuzei) $[BC]$, $A' = \mathrm{pr}_\pi\, A$ este vîrful unghiului drept (adică ortocentrul) triunghiului $A'B'C'$, iar O' mijlocul segmentului $[B'C'] = \mathrm{pr}_\pi\, BC$ este proiecția mijlocului segmentului $[BC]$; iv) triunghiul ABC nu este dreptunghic. Notăm A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor din A, B respectiv C și A_2, B_2, C_2 mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$ ale triunghiului ABC.

Dacă $\mathrm{pr}_\pi H = H'$ (unde H este ortocentrul triunghiului ABC iar H' ortocentrul triunghiului proiectat $A'B'C'$), rezultă că (HB_1 sau AC) și (HC_1 sau BA) și (HA_1 sau AC) sînt paralele cu planul π pe care se proiectează. Prin urmare, planul (ABC) conține neapărat două drepte concurente paralele cu π și deci $(ABC) \parallel \pi$, de unde rezultă că $O' = \mathrm{pr}_\pi O$. Dacă $O' = \mathrm{pr}_\pi O$ atunci (OA_2 sau BC) și (OB_2 sau CA) și (OC_2 sau AB) sînt paralele cu π, de unde deducem că (ABC) conține două drepte concurente paralele cu π și deci $(ABC) \parallel \pi$, de unde rezultă $H' = \mathrm{pr}_\pi H$.

Anul 1986

Etapa județeană

1. Se observă că perechea $(3, 2) \in \mathbf{R}^2$ verifică sistemul din enunț și vom demonstra că aceasta este unica soluție a sistemului dat. Într-adevăr, dacă $0 < x < 3$ atunci $\log_3 x < 1$ și din prima ecuație a sistemului deducem $\log_2 y = 2 - \log_3 x \Rightarrow \Rightarrow \log_2 y > 1 \Rightarrow y > 2$, iar din a doua ecuație rezultă $2^y = 3^x - 23$. Dacă în ultima egalitate ținem seama că $x < 3$ și $y > 2$ rezultă că ea este falsă. Deci nu putem avea $x < 3$. Dacă $x > 3$ obținem, ca mai sus, $y < 2$ și deducem că a doua egalitate a sistemului este imposibilă. Deci nu este posibil $x > 3$. Prin urmare $x = 3$ și atunci $y = 2$. Altă soluție. Din cele două ecuații ale sistemului obținem respectiv $y = f(x)$, $y = g(x)$, unde $f,\ g : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = 2^{2-\log_3 x}$, $g(x) = \log_2(3^x - 23)$. Se observă fără dificultate că funcția f este strict descrescătoare iar funcția g este strict crescătoare. Deoarece $f(3) = g(3)$, rezultă că, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}_+^*$, $x \neq 3$, avem $f(x) \neq g(x)$. Prin urmare, unica soluție a ecuației $f(x) = g(x)$ este $x = 3$, pentru care obținem $y = 2$. Cu aceasta am demonstrat că unica soluție a sistemului dat este perechea $(3, 2)$.

2. Se observă că șirul dat are toți termenii strict pozitivi și atunci relația de recurență a șirului din enunț este echivalentă cu

$$a_{n+1}^2 = a_n + 6,\ (\forall) n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 9 = a_n - 3,\ (\forall) n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 - a_n = (3 - a_{n+1})(3 + a_{n+1}),\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Deoarece șirul are toți termenii strict pozitivi și $a_1 = \sqrt{6} < 3$, din ultima relație, prin inducție matematică, rezultă că $a_n < 3$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Deci, din relația $(3 - a_n) = (3 - a_{n+1})(3 + a_{n+1})$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, deducem

$$\frac{3 - a_{n+1}}{3 - a_n} = \frac{1}{3 + a_{n+1}} > \frac{1}{6},\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

3. Presupunem prin absurd că ar exista numerele complexe $z_k = \cos t_k + \mathrm{i} \sin t_k$, $k = \overline{1, 3}$, care să verifice cerințele enunțului. Avem atunci

$$\sum_{k=1}^{3} z_k^3 + 3 \sum_{k=1}^{3} z_k = 6(1 - \mathrm{i}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} (\cos 3t_k + \mathrm{i} \sin 3t_k) + 3 \sum_{k=1}^{3} (\cos t_k - \mathrm{i} \sin t_k) = 6 - 6\mathrm{i},$$

de unde dacă ținem seama că

$$\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t,\ \sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t,\ (\forall)\, t \in \mathbf{R},$$

deducem

$$4\sum_{k=1}^{3}(\cos^3 t_k - i\sin^3 t_k) = 6 - 6i \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3}\cos^3 t_k = \frac{3}{2} \text{ și } \sum_{k=1}^{3}\sin^3 t_k = \frac{3}{2},$$

iar prin adunarea acestor două relații, obținem

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{3}(\cos^3 t_k + \sin^3 t_k) = 3.$$

Deoarece $\sin t, \cos t \in [-1, 1]$, deducem $\sin^3 t, \cos^3 t \in [-1, 1]$, $(\forall) t \in \mathbf{R}$, și deci $\sin^3 t + \cos^3 t \leqslant \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $(\forall) t \in \mathbf{R}$. Totodată, observăm că $\sin^3 t + \cos^3 t = 1 \Rightarrow \sin t = 1$ sau $\cos t = 1$. Din faptul că $\sin^3 t + \cos^3 t \leqslant 1$, $(\forall) t \in \mathbf{R}$, rezultă că în (1) nu putem avea egalitate decît dacă $\sin^3 t_k + \cos^3 t_k = 1$, $(\forall) k = 1, 2, 3$, adică dacă $z_k \in \{1, i\}$, $(\forall) k = 1, 2, 3$. În acest caz $z_k^3 = \bar{z}_k$, $(\forall) k = 1, 2, 3$ și deci relația inițială devine

$$4\sum_{k=1}^{3}\bar{z}_k = 6 - 6i \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3}\bar{z}_k = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i,$$

iar ultima relație nu este posibilă deoarece din $z_k \in \{1, i\}$ rezultă că $\sum_{k=1}^{3}\bar{z}_k = a + ib$, unde $a, b \in \mathbf{Z}$. Prin urmare, presupunerea inițială ne-a dus la o contradicție și deci nu există numere complexe z_k, $k = 1, 2, 3$, care să verifice egalitatea din enunț.

4. Folosim formula $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$ și, ținînd seama că $l_a = a$, deducem că $\dfrac{a(b+c)}{2bc} = \cos\dfrac{A}{2}$, de unde obținem $\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{a^2(b+c)^2}{4b^2c^2}$ și deci

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 =$$

$$= 2\frac{a^2(b+c)^2}{4b^2c^2} - 1 = \frac{a^2(b+c)^2 - 2b^2c^2}{2b^2c^2}.$$

Rezultă că

$$(1) \quad bc(b^2 + c^2 - a^2) = a^2(b+c)^2 - 2b^2c^2 \Leftrightarrow bc(b+c)^2 - a^2bc = a^2(b+c)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b+c)^2(a^2 - bc) + a^2bc = 0.$$

Analog, din faptul că $l_b = b$, rezultă relația

$$(2) \qquad (a+c)^2(b^2 - ac) + ab^2c = 0.$$

Scăzînd (2) din (1) deducem

$$abc(a-b) + (b+c)^2(a^2 - bc) - (a+c)^2(b^2 - ac) = 0 \Leftrightarrow abc(a-b) +$$
$$+ a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2 - b^3c - 2b^2c^2 - bc^3 - a^2b^2 - 2ab^2c - b^2c^2 + a^3c + 2a^2c^2 +$$
$$+ ac^3 = 0 \Leftrightarrow 3abc(a-b) + c^3(a-b) + 3c^2(a-b)(a+b) + c(a-b)(a^2 +$$
$$+ ab + b^2) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(3abc + c^3 + 3ac^2 + 3bc^2 + a^2c + b^2c) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b,$$

adică triunghiul ABC este isoscel, cu $BC = AC$. Notăm $m(\widehat{ACB}) = x$, $m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{CAB}) = 2y$. Din triunghiul isoscel CAA' deducem $m(\widehat{CA'A}) = x = m(\widehat{A'BA}) + m(\widehat{A'AB}) = 3y$ și, totodată, $2x + y = \pi$. Din relațiile precedente rezultă $y = \frac{\pi}{7}$, $x = \frac{3\pi}{7}$, și deci $A = B = 2y = \frac{2\pi}{7}$, $C = x = \frac{3\pi}{7}$.

Etapa finală

1. Arătăm mai întîi că pentru a, b, c, d numere pozitive are loc inegalitatea

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant abc + abd + acd + bcd, \tag{1}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $a = b = c = d$. În acest scop stabilim mai întîi următoarele două inegalități:

$$3(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geqslant a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + a^2d + ad^2 + b^2c + bc^2 + b^2d + bd^2 + c^2d + cd^2; \tag{2}$$

$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + a^2d + ad^2 + b^2c + bc^2 + b^2d + bd^2 + c^2d + cd^2 \geqslant 3(abc + abd + acd + bcd), \tag{3}$$

de unde, prin comparare, deducem (1). Inegalitatea (2) este echivalentă cu

$$(a^2 - b^2)(a - b) + (a^2 - c^2)(a - c) + (a^2 - d^2)(a - d) + (b^2 - c^2)(b - c) + (b^2 - d^2)(b - d) + (c^2 - d^2)(c - d) \geqslant 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) + (a - c)^2(a + c) + (a - d)^2(a + d) + (b - c)^2(b + c) + (b - d)^2(b + d) + (c - d)^2(c + d) \geqslant 0,$$

care este evidentă dacă a, b, c, d sînt pozitive. Totodată, este clar că în (2) avem egalitate dacă și numai dacă $a = b = c = d$. Inegalitatea (3) este echivalentă cu

$$\frac{1}{2}((a + b)(c - d)^2 + (a + c)(b - d)^2 + (a + d)(b - c)^2 + (b + c)(a - d^2) + (b + d)(a - c)^2 + (c + d)(a - b)^2) \geqslant 0,$$

ceea ce este evident. Observăm că egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d$. În acest fel (1) este stabilită, cu observația că egalitatea se atinge dacă și numai dacă $a = b = c = d$. Punînd acum în (1), $a = 2^x$, $b = 3^x$, $c = 4^x$, $d = 5^x$, obținem $8^x + 27^x + 64^x + 125^x \geqslant 24^x + 30^x + 40^x + 60^x$ cu egalitate dacă și numai dacă $2^x = 3^x = 4^x = 5^x$, adică dacă și numai dacă $x = 0$. În concluzie, unica soluție a ecuației considerate este $x = 0$.

2. Considerăm triunghiul ABC și notăm cu Q, R, S proiecțiile punctului P pe dreptele BC, CA, AB. De asemenea, să considerăm

$$u_1 = m(\widehat{BPQ}),\ u_2 = m(\widehat{QPC}),\ u_3 = m(\widehat{CPR}),\ u_4 = m(\widehat{RPA}),\ u_5 = m(\widehat{APS}),\ u_6 = m(\widehat{SPB}).$$

Considerăm două cazuri: i) $Q \in [BC]$, $R \in [CA]$, $S \in [AB]$, adică proiecțiile Q, R, S sînt chiar pe laturile triunghiului. Din triunghiurile dreptunghice formate rezultă egalitățile:

$$p = y \cos u_1 = z \cos u_2,\ q = z \cos u_3 = x \cos u_4,\ r = x \cos u_5 = y \cos u_6.$$

Inegalitatea din enunţ se scrie, prin echivalenţe succesive,

$$(1)\qquad xyz \geqslant (q+r)(r+p)(p+q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xyz \geqslant (x\cos u_4 + x\cos u_5)(y\cos u_6 + y\cos u_1)(z\cos u_2 + z\cos u_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \geqslant (\cos u_2 + \cos u_3)(\cos u_4 + \cos u_5)(\cos u_6 + \cos u_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)\cos\frac{1}{2}(u_6-u_1)\cos\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\frac{1}{2}(u_4+$$

$$+u_5)\cos\frac{1}{2}(u_6+u_1) \leqslant 1.$$

Deoarece $\left|\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)\cos\frac{1}{2}(u_6-u_1)\right| \leqslant 1$, pentru a stabili inegalitatea (1), este suficient să demonstrăm inegalitatea mai tare:

$$(2)\qquad 8\cos\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\frac{1}{2}(u_4+u_5)\cos\frac{1}{2}(u_6+u_1) \leqslant 1.$$

Din patrulaterele inscriptibile formate avem $u_2+u_3=\pi-C$, $u_4+u_5=\pi-A$, $u_6+u_1=\pi-B$, şi astfel inegalitatea (2) este echivalentă cu

$$(3)\qquad 8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C \leqslant 1,$$

care este una din inegalităţile cunoscute într-un triunghi. Să mai remarcăm faptul că în (1) avem egalitate dacă şi numai dacă $\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)=\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)=$ $=\cos\frac{1}{2}(u_6-u_1)=1$, şi avem egalitate şi în (3), adică dacă şi numai dacă $u_1=u_2=u_3$ şi $A=B=C$. Prin urmare, egalitate avem atunci şi numai atunci cînd triunghiul ABC este echilateral, iar P este centrul său; ii) $Q\in BC\setminus[BC]$ sau $R\in CA\setminus[CA]$ sau $S\in AB\setminus[AB]$, adică cel puţin una dintre proiecţiile Q, R, S nu aparţine laturii corespunzătoare. Dacă, de exemplu, avem $Q\notin[BC]$ şi pe dreapta BC avem ordonarea $Q-B-C$, din teorema unghiului exterior rezultă $B>\frac{1}{2}\pi$, adică unghiul $\hat{B}$ al triunghiului ABC este obtuz. Deoarece triunghiul ABC nu poate avea mai mult de un unghi obtuz, deducem că celelalte două proiecţii sînt pe laturi, adică $R\in(AC)$, $S\in(AB)$. În acest caz se menţin egalităţile $u_2+u_3=\pi-C$, $u_4+u_5=\pi-A$, dar $u_6+u_1\neq\pi-B$. În schimb, avem $u_6-u_1=\pi-B$ şi atunci (1) devine

$$(4)\quad 8\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(u_6+u_1)\leqslant 1.$$

Deoarece $\left|\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)\cos\frac{1}{2}(u_6+u_1)\right| \leqslant 1$, pentru a stabili (4) este suficient să demonstrăm inegalitatea $8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C\leqslant 1$ care este exact inegalitatea (3) din cazul precedent şi care este valabilă în orice fel de triunghi. Cu aceasta soluţia se încheie.

3. Deşi se poate da o soluţie efectiv algebrică, vom prefera una de factură geometrică. a) Arătăm mai întîi că discul unitate $D_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ este inclus în mulţimea A. Este clar că $-1 \in A$ şi $1 \in A$, deci $0 = -1 + 1 \in A$. Deoarece cercul unitate este inclus în A prin ipoteză, mai rămîne să dovedim că punctele interioare acestui cerc aparţin lui A. Fie deci $z \in \mathbf{C}$, cu $0 < |z| < 1$. Notăm cu M imaginea geometrică a lui z şi fie N mijlocul segmentului $[OM]$, unde O este originea planului complex. Perpendiculara în N pe OM intersectează cercul unitate în punctele $N_1(z_1)$ şi $N_2(z_2)$. Rezultă $z_1, z_2 \in A$. Patrulaterul ON_1MN_2 fiind un romb, vom avea $z = z_1 + z_2 \in A$; b) Demonstrăm prin inducţie că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, discul cu centrul în origine şi rază 2^n, adică $D_{2^n} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant 2^n\}$ este inclus în A. Pentru $n = 0$, am dat demonstraţia la punctul a. Să presupunem că $D_{2^n} \subset A$ şi să demonstrăm că $D_{2^{n+1}} \subset A$. Într-adevăr, pentru orice $z \in D_{2^{n+1}}$ avem $\frac{1}{2} z \in D_{2^n}$, deci $\frac{1}{2} z \in A$, şi prin urmare $z = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} z \in A$. Deoarece $\mathbf{C} = \bigcup_{n>0} D_{2^n}$, rezultă $\mathbf{C} \subset A$, adică $\mathbf{C} = A$.

4. Ecuaţia se scrie succesiv

$$4a^2 \sin(x + B) \sin(x + C) = a^2 + 4bc \Leftrightarrow 4 \sin(x + B) \sin(x + C) =$$

$$= 1 + 4 \frac{b}{a} \frac{c}{a} \Leftrightarrow 4 \sin(x + B) \sin(x + C) = 1 + 4 \sin B \sin C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(B - C) - 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi + 2x\right) = 1 + 2\cos(B - C) - 2\cos\frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{2}\pi + 2x\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}.$$

Rezultă $2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, cu $k \in \mathbf{Z}$, adică $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Anul 1987

Etapa judeţeană

1. Notăm $s_n = \sum_{k=1}^{n} k \sin k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} k \cos k$ şi rezultă că $u_n = t_n + is_n =$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(\cos k + i \sin k) = \sum_{k=1}^{n} k(\cos 1 + i \sin 1)^k = \sum_{k=1}^{n} kz^k,$$

unde $z = \cos 1 + i \sin 1 \neq 1$. Se demonstrează prin inducţie completă că

$$u_n = \frac{1}{(z-1)^2}(nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + 1), \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*. \tag{1}$$

Totodată, $(z-1)^2 = (-1 + \cos 1 + i \sin 1)^2 = -4 \sin^2 \frac{1}{2}(\cos 1 + i \sin 1) =$

$= -4z \sin^2 \frac{1}{2}$ şi deci, înlocuind în (1), deducem că

$$u_n = -\frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2}}(n \cos(n+1) - (n+1) \cos n + i(n \sin(n+1) - (n+1) \sin n) + 1),$$

de unde rezultă imediat că

$$s_n = \frac{n \sin (n+1) - (n+1) \sin n}{2(\cos 1 - 1)},$$

$$t_n = \frac{n \cos (n+1) - (n+1) \cos n + 1}{2(\cos 1 - 1)}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Fie $p = [\log k] \Leftrightarrow p \leqslant \log k < p+1 \Leftrightarrow \log 10^p \leqslant \log k < \log 10^{p+1} \Leftrightarrow 10^p \leqslant k < 10^{p+1}$. Rezultă

$$\sum_{k=1}^{10^n} [\log k] = \sum_{k=1}^{9} [\log k] + \sum_{k=10}^{99} [\log k] + \sum_{k=100}^{999} [\log k] + \quad +$$

$$+ \sum_{k=10^{n-1}}^{10^n - 1} [\log k] + [\log 10^n] = \sum_{k=1}^{9} 0 + \sum_{k=10}^{99} 1 + \sum_{k=100}^{999} 2 + \quad +$$

$$+ \sum_{k=10^{n-1}}^{10^n - 1} (n-1) + n = 1 \cdot 90 + 2 \cdot 900 + \ldots + (n-1) 9 \cdot 10^{n-1} + n =$$

$$= n + 90(1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + \ldots + (n-1) 10^{n-2}) = n + \frac{10}{9}(9n \cdot 10^{n-1} - 10^n + 1).$$

2. Fie

$$(1) \qquad s = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_j}{z_k} = \sum_{j=1}^{n} \left(z_j \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k} \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} z_j \right).$$

Deoarece $|z_k| = r > 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$, rezultă că $r^2 = z_k \bar{z}_k$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$, și atunci relația (1) ne dă

$$(2) \qquad s = r^{-2} \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \right) \left(\sum_{j=1}^{n} z_j \right) = r^{-2}(A + \mathrm{i}B)(A - \mathrm{i}B) = r^{-2}(A^2 + B^2),$$

unde $\sum_{k=1}^{n} z_k = A + \mathrm{i}B$, cu $A, B \in \mathbf{R}$. Din (2) se observă că $s \in \mathbf{R}$ și deci $s = \operatorname{Re} s = 0 \Leftrightarrow A = B = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} z_k = 0$.

3. Fie $P_1 P_2 \ldots P_n$ poligonul regulat înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ iar $\{A, B\} = d \cap \mathcal{C}(O, R)$. Alegem ca axă de coordonate Ox chiar dreapta d și ca axă Oy perpendiculara în O pe d. Notăm $u = \mu(\widehat{BOP_1})$ și $v = \frac{2\pi}{n}$. Rezultă că $P_k(R \cos (u + (k-1)v), R \sin (u + (k-1)v))$, $(\forall) k = \overline{1, n}$. Avem de calculat suma

$$(1) \qquad s = \sum_{k=0}^{n-1} R^2 \sin^2 (u + kv) = \frac{R^2}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \cos 2(u + kv)) = \frac{nR^2}{2} - \frac{R^2}{2} p,$$

unde $p = \sum_{k=0}^{n-1} \cos (2u + 2kv)$. Să considerăm și $t = \sum_{k=0}^{n-1} \sin (2u + 2kv)$ și atunci

$$p + \mathrm{i}t = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos 2u + \mathrm{i} \sin 2u)(\cos 2kv + \mathrm{i} \sin 2kv) =$$

$$= (\cos 2u + \mathrm{i} \sin 2u) \sum_{k=0}^{n-1} (\cos 2v + \mathrm{i} \sin 2v)^k = a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^k,$$

unde $a = \cos 2u + i \sin 2u$ și $z = \cos 2v + i \sin 2v$. Deci

$$p + it = a\frac{1 - z^n}{1 - z} = a\frac{1 - \cos 4\pi - i \sin 4\pi}{1 - z} = 0,$$

de unde deducem că $p = t = 0$ și atunci din (1) rezultă $s = \frac{nR^2}{2}$.

4. Fie $M = \mathrm{pr}_{AB}O$, $N = \mathrm{pr}_{AB}I$. Rezultă $OM = R\,|\cos C|$ și $IN = r$. Din asemănarea triunghiurilor MOC' și INC', deducem $\frac{OC'}{IC'} = \frac{R\,|\cos C|}{r}$.

Analog $\frac{OA'}{IA'} = \frac{R\,|\cos A|}{r}$ și $\frac{OB'}{IB'} = \frac{R\,|\cos B|}{r}$. Rezultă atunci că

$$\frac{OA'}{IA'} + \frac{OB'}{IB'} + \frac{OC'}{IC'} = \frac{R}{r}(|\cos A| + |\cos B| + |\cos C|) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{R}{r}(\cos A + \cos B + \cos C) = \frac{R}{r}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 1 + \frac{R}{r} \geqslant 1 + \frac{2r}{r} = 3,$$

cu egalitate cînd triunghiul este echilateral (aici am ținut seama că $R \geqslant 2r$).

5. Fie O_1, O_2, O respectiv centrele fețelor $[A_1B_1C_1D_1]$, $[B_1C_1CB]$, $[ABCD]$ și fie $\{M\} = AO_1 \cap CC_1$. Rezultă că $MO_2 = (AO_1O_2) \cap (BCC_1)$ și atunci $\{E\} = MO_2 \cap B_1C_1$. Să notăm $\{F\} = MO_2 \cap BC$. Avem $\frac{O_1C_1}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{MC_1}{MC} = \frac{EC_1}{FC}$. Totodată, avem $EO_2C_1 \equiv FO_2B$ și $EO_2B_1 \equiv FO_2C$. Notînd $EC_1 = x$, rezultă $FC = 2x$ și deci $EB_1 = 2x$, de unde deducem că $\frac{EB_1}{EC_1} = \frac{2x}{x} = 2$.

Etapa finală

1. a) Este evident că $z^p = 1$ și $z \neq 1$, deci $1 + z + z^2 + \ldots + z^{p-1} = 0$. De aici deducem că $-p = z^{p-1} - 1 + z^{p-2} - 1 + \ldots + z^2 - 1 + z - 1 + 1 - 1$ și deci $(z - 1)((z^{p-2} + z^{p-3} + \ldots + z + 1) + (z^{p-3} + z^{p-4} + \ldots + z + 1) + \ldots + (z + 1) + 1) = -p$, adică $(1 - z)(z^{p-2} + 2z^{p-3} + 3z^{p-4} + \ldots + (p-2)z + (p-1)) = p$, de unde se obține

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{p}z^{p-2} + \frac{2}{p}z^{p-3} + \ldots + \frac{p-2}{p}z + \frac{p-1}{p}$$

și de aici obținem $a_k = \frac{p - k - 1}{p}$, $(\forall)\ k = \overline{0, p-2}$. b) Folosind succesiv inegalitatea modulelor, deducem

$$|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| \geqslant |1 + z^2| + |1 + z - (1 + z^3)| =$$
$$= |1 + z^2| + |z| \cdot |1 - z^2| = |1 + z^2| + |1 - z^2| \geqslant |1 + z^2 + 1 - z^2| = 2.$$

2. Fie $v_a = v[PBCD] = \frac{1}{3}PP_a \cdot s_a = \frac{1}{3}PP_a \cdot \sigma[BCD]$ și analoagele. Deoarece $v = v[ABCD] = v_a + v_b + v_c + v_d$, deducem că $3v = \sum s_a \cdot PP_a$. Aplicînd inegalitatea Cauchy-Buniakovski numerelor

$$\sqrt{\frac{s_a}{PP_a}},\ \sqrt{\frac{s_b}{PP_b}},\ \sqrt{\frac{s_c}{PP_c}},\ \sqrt{\frac{s_d}{PP_d}} \text{ și } \sqrt{s_a \cdot PP_a},\ \sqrt{s_b \cdot PP_b},\ \sqrt{s_c \cdot PP_c},\ \sqrt{s_d \cdot PP_d},$$

se obține că suma U din enunț satisface inegalitatea $3Uv \geqslant (s_a + s_b + s_c + s_d)^2$, cu egalitate dacă și numai dacă numerele date sînt proporționale, adică minimul se atinge dacă și numai dacă $PP_a = PP_b = PP_c = PP_d$. Rezultă că minimul se atinge atunci și numai atunci cînd P este centrul sferei circumscrise tetraedrului și acest punct este unic.

3. Demonstrăm prin inducție că $a_n = n + c$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, unde $c = a_1 - 1$. Presupunem relația adevărată pentru toate numerele $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$, și vom calcula pe a_n. Dacă $n \in 2\mathbb{N}^*$, atunci $a_n = a_{2m} = a_m + m = m + c + m = 2m + c = n + c$ deoarece $m < n$. Dacă $n \in 2\mathbb{N} + 1$, atunci $n + 1 \in 2\mathbb{N}^*$, adică $n+1=2p$, cu $p < n$. Deci $a_{n+1} = a_{2p} = a_p + p = p + c + p = 2p+c = n+1+c$. Deoarece $a_{n-1} < a_n < a_{n+1}$, rezultă $n - 1 + c < a_n < n + 1 + c$ și deci evident $a_n = n+c$. Cazul $n = 1$ este evident. Să presupunem că $c > 0$. Fie $k = (c+1)! - c + 1$. Observăm că

$$a_{k+1} = (c+1)! + 2,\ a_{k+2} = (c+1)! + 3,\ \ldots,\ a_{k+c} = (c+1)! + c + 1$$

și deci toate sînt numere neprime. Fie p cel mai mic număr prim mai mare decît $a_{k+c} = (c+1)! + c + 1$ care evident există. Atunci $p - c$ este sau mai mare decît a_{k+c} (și deci nu poate fi prim, absurd, deoarece $a_{p-c} = p$) sau mai mic decît a_{k+c}. Dar în acest ultim caz $p - c > (c+1)! + 1$, deci $p - c \geqslant a_{k+1}$ și din nou nu poate fi prim, în timp ce $a_{p+c} = p$. Rezultă în final că $c = 0$ și prin urmare $a_n = n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

4. Fie $t = C_{n+p}^n = \dfrac{(n+p)!}{p!n!} = \dfrac{(n+p)(n+p-1)\ldots(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ \cdot p}$, de unde deducem că

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p \cdot t = (n+p)(n+p-1)\ldots(n+1). \tag{1}$$

Fie $n = pq + r$, $0 \leqslant r < p - 1$; atunci egalitatea (1) devine

$$p!t = (pq + r + 1)(pq + r + 2)\ldots(pq + r + (p - r))\ldots(pq+r+p-1)(pq+r+p)$$

și prin simplificare cu p, deducem

$$(p-1)!t = (pq + r + 1)(pq + r + 2)\ldots(q + 1)\ldots(pq + r + p - 1)(pq + r + p).$$

Din ultima relație deducem că $(p-1)!t = (p-1)!(q+1) + kp$. Fie acum $s = C_{n+p}^n + (q+1)(p-1) = t + (q+1)(p-1)$. Avem

$$(p-1)!s = (p-1)!t + (p-1)!(p-1)(q+1) = (p-1)!(q+1) +$$

$$+ (p-1)!(q+1)(p-1) + mp = (p-1)!(q+1)(p-1+1) + mp = up,$$

ceea ce arată că p divide pe $(p-1)!s$ și datorită faptului că p este prim deducem că p nu divide pe $(p-1)!$ și deci divide pe s. Cu aceasta problema este rezolvată.

Anul 1988

Etapa județeană

1. a) Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încît sistemul dat să admită soluție unică. Dacă (x_0, y_0) este soluție, atunci $(-x_0, y_0)$ este soluție și din unicitate rezultă $x_0 = -x_0$, deci $x_0 = 0$. Atunci $y_0 = a - 2$ și $2^{y_0} = 3 - a$, de unde $y_0 + 2^{y_0} = 1$. Funcția $f(y) = y + 2^y$ este suma a două funcții strict crescătoare, deci este strict crescătoare. Cum

$f(0) = 1$, rezultă cu necesitate $y_0 = 0$ şi deci $a = 2$. b) Rămîne de demonstrat că sistemul $\begin{cases} 2^x + 2^{-x} + y = 2 \\ x^2 + 2^y = 1 \end{cases}$ admite pe $(0, 0)$ ca unică soluţie. Fie (x, y) o soluţie a sistemului. Cum $2^y = 1 - x^2$, rezultă $x \in (-1, 1)$. Cum $(-x, y)$ este soluţie a sistemului, putem presupune $x \in [0, 1)$ şi deci $y = \log_2(1 - x^2)$. Vom arăta că ecuaţia $2^x + 2^{-x} + \log_2(1 - x^2) = 2$ admite pe $x = 0$ ca soluţie unică. Fie $f(x) = 2^x + 2^{-x} + \log_2(1 - x^2)$; f este derivabilă pe $[0, 1)$ şi $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 - \frac{1}{\ln 2} \frac{2x}{1 - x^2} = \ln 2(e^{x \ln 2} - e^{-x \ln 2}) - \frac{1}{\ln 2} \frac{2x}{1 - x^2}$. Cum pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{x \ln 2} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x \ln 2}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \dots + \frac{x^n \ln^n 2}{n!}\right) \text{ iar}$$

$$e^{-x \ln 2} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x \ln 2}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n \ln^n 2}{n!}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x \ln 2} - e^{-x \ln 2} = 2\left(\frac{x \ln 2}{1!} + \frac{x^3 \ln^3 2}{3!} + \frac{x^5 \ln^5 2}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1} \ln^{2n+1} 2}{(2n+1)!} + \dots\right).$$

Cum $\frac{\ln^k 2}{k!} < 1$, pentru orice $k > 0$, atunci pentru orice $x \in (0, 1)$ avem

$$0 < e^{x \ln 2} - e^{-x \ln 2} \leqslant 2(x + x^3 + x^5 + \dots) = 2x(1 + x^2 + x^4 + \dots) =$$

$$= \frac{2x}{1 - x^2} < \frac{1}{\ln^2 2} \frac{2x}{1 - x^2}.$$

Deci $f'(x) < \frac{1}{\ln 2} \frac{2x}{1 - x^2} - \frac{1}{\ln 2} \frac{2x}{1 - x^2} = 0$, deci f este strict descrescătoare pe $[0, 1)$. Cum $f(0) = 2$, rezultă $x = 0$ unica soluţie a ecuaţiei $2^x + 2^{-x} + \log_2(1 - x^2) = 2$. Din $x = 0$ rezultă $2^y = 1$, deci $y = 0$. În concluzie $(0, 0)$ este unica soluţie a sistemului dat.

2. Fie $q \in \mathbb{C}^*$ astfel încît $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$, pentru orice $n \geqslant 1$. Atunci $a_{n+1} = a_n q$, deci $a_n = a_1 q^{n-1}$. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, pentru care $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$. Cum $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_1^2(1 + q^2 + \dots + (q^2)^{n-1})$ iar $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1(1 + q + \dots + q^{n-1})$, obţinem egalitatea

$$(1) \qquad 1 + q^2 + \dots + (q^2)^{n-1} = (1 + q + \dots + q^{n-1})^2.$$

Dacă $q = 1$, obţinem $n = n^2$, fals, iar dacă $q = -1$, obţinem $n \in \{0, 1\}$, fals. Cum $q \neq \pm 1$, relaţia (1) se scrie sub forma $\frac{(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{(q^n - 1)^2}{(q - 1)^2}$ sau

$$\frac{(q^n - 1)(q^n + 1)}{q + 1} - \frac{(q^n - 1)^2}{q - 1} = 0, \text{ de unde } (q^n - 1)\frac{q^{n+1} + q - q^n - 1 - q^{n+1} + q - q^n + 1}{q^2 - 1} = 0,$$

echivalent cu $(q^n - 1)(2q - 2q^n) = 0$ sau $(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) = 0$ $(q \neq 0)$. Fie p cel mai mic număr natural mai mare ca 2 cu proprietatea din enunţ. Presupunem $q^{p-1} - 1 = 0$. Atunci printr-un raţionament analog celui anterior obţinem $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{p-1}^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1})^2$. Cum $p - 1 > 2$ (în caz contrar

$q = \pm 1$), se contrazice alegerea lui p. Deci $q^{p-1} - 1 \neq 0$ și deci $q^p = 1$. Atunci $a_{n+p} = a_1 q^{n+p-1} = a_1 q^{n-1} q^p = a_1 q^{n-1} = a_n$, pentru orice $n \geqslant 1$, deci f este periodică.

3. i) Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ astfel încît $z^n = 1$. Atunci $\in \{z_k \mid z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 1, 2, \ldots, n-1\}$. Fie A_k punctul de afix z_k, $k=1, \ldots, n-1$, și A_0 punctul de afix 1. Atunci $[A_0A_1 \ldots A_{n-1}]$ este poligon regulat cu n laturi înscris în cercul unitate și $|1-z_k| = A_0A_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Cum $|1-z_k| \geqslant |1-z_1| = A_0A_1$, pentru $k = 1, \ldots, n-1$, va fi suficient să arătăm că $L_n > \frac{2}{n-1}$, unde L_n este latura poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul unitate. Fie r raza cercului înscris în poligon. Cum $r = \cos \frac{\pi}{n}$ iar perimetrul poligonului este mai mare ca lungimea cercului înscris, rezultă (1) $L_n > \frac{1}{n} 2\pi \cos \frac{\pi}{n}$. Cum $n > 3$, rezultă $\cos \frac{\pi}{n} \geqslant \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ și deci din (1) obținem $L_n > \frac{\pi}{n} > \frac{3}{n}$. Cum $\frac{3}{n} > \frac{2}{n-1}$ pentru $n \geqslant 3$, obținem inegalitatea din enunț. ii) Fie $k \in \mathbf{Z}$ și nedivizibil cu n. Fie $k^n \in \mathbf{N}$ astfel încît $c < k^n \leqslant n-1$ și $c \in \mathbf{Z}$ astfel încît $k = nc + k^n$. Atunci $\left|\sin \frac{k}{n}\right| = \left|\sin\left(c\pi + \frac{k^n\pi}{n}\right)\right| = \left|\sin \frac{k^n\pi}{n}\right| = \sin \frac{k^n\pi}{n} > \sin \frac{\pi}{n}$ (ținînd cont de monotonia funcției sinus). Va fi suficient să demonstrăm că $\sin \frac{\pi}{n} > \frac{1}{n-1}$. Cum $L_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}$ și $L_n > \frac{2}{n-1}$, rezultă $\sin \frac{\pi}{n} > \frac{1}{n-1}$.

4. Notăm $\alpha = m(\widehat{AB})$, $\beta = m(\widehat{DE})$ și $\gamma = (\widehat{EA})$. Cu aceste notații $m(\widehat{DC}) = \pi - \alpha$ și

$$m(\widehat{BC}) = \pi - \beta - \gamma. \text{ Avem}$$

$$\sigma[ABCDE] = \sigma[AOB] + \sigma[BOC] + \sigma[COD] + \sigma[DOE] + \sigma[EOA] =$$

$$= \frac{1}{2}[\sin \alpha + \sin(\pi - \beta - \gamma) + \sin(\pi - \alpha) + \sin \beta + \sin \gamma] =$$

$$= \sin \alpha + \frac{1}{2}[\sin \beta + \sin \gamma + \sin(\pi - \beta - \gamma)].$$

Cum funcția sinus este concavă pe $[0, \pi]$,

$$\sin \beta + \sin \gamma + \sin(\pi - \beta - \gamma) \leqslant 3 \sin \frac{\beta + \gamma + \pi - \alpha - \beta}{3} = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Cum egalitatea se atinge pentru $\beta = \gamma = \pi - \beta - \gamma$, echivalent cu $\beta = \gamma = 60°$, rezultă

$$\max_{\beta, \gamma \in [0, \pi]} [\sin \beta + \sin \gamma + \sin(\pi - \beta - \gamma)] = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Cum $\sin\alpha \leqslant 1$ (egalitatea atingîndu-se pentru $\alpha = 90°$) rezultă $\sigma[ABCDE] \geqslant 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Cum egalitatea se atinge pentru $\alpha = 90°$, $\beta = \gamma = 60°$, rezultă că maximul ariei este $1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Etapa finală

1. Din ipoteză avem $a \neq 0$ și $b \neq 0$, iar $\operatorname{Re} z > 0$ dacă și numai dacă $\operatorname{Re}\frac{1}{z} > 0$. Vom calcula $\operatorname{Re}\frac{(tb+(1-t)a)^2}{ab} = \operatorname{Re} t^2\frac{b}{a} + 2t(1-t) + \operatorname{Re}(1-t)^2\frac{a}{b} > 0$, deoarece $\operatorname{Re}\frac{a}{b}$, $\operatorname{Re}\frac{b}{a}$, $t^2(1-t)^2$ și $t(1-t)$ sînt toate pozitive conform ipotezei.

2. Presupunem că $x_0, x_1, \ldots, x_n$, sînt în progresie aritmetică. Rezultă că $x_{n+1} = x_n + r$, unde $r \in \mathbf{N}^*$. Alegem $a = \frac{x_0}{r}$ și verificăm egalitatea $x_{n+1} = x_n + \left[\frac{x_n}{n+a}\right]$. Într-adevăr $x_n + \left[\frac{x_n}{n+a}\right] = x_n + \left[\frac{rx_n}{x_0+nr}\right] = x_n + [r] = x_n + r = x_{n+1}$. Reciproc, să presupunem că există $a > 0$ astfel încît $x_{n+1} = x_n + \left[\frac{x_n}{n+a}\right]$, pentru orice n număr natural. Notăm $r = \left[\frac{x_1}{1+a}\right]$. Avem $r \leqslant \frac{x_1}{1+a} < r+1$, deci (1) $r(1+a) \leqslant x_1 < (r+1)(1+a)$, de unde $r(a+2) \leqslant x_1 + r < (r+1)(a+1) + r < (r+1)(a+2)$, adică $r = \left[\frac{x_1+r}{a+2}\right]$. Deoarece $x_3 = x_2 + \left[\frac{x_2}{a+2}\right]$ avem $x_3 = x_1 + r + \left[\frac{x_1+r}{a+2}\right] = x_1 + 2r$. Presupunem că $x_k = x_1 + (k-1)r$ și demonstrăm că $x_{k+1} = x_1 + kr$. Deoarece $x_{k+1} = x_k + \left[\frac{x_k}{k+a}\right] = x_1 + (k-1)r + \left[\frac{x_1+(k-1)r}{k+a}\right]$, mai trebuie să arătăm că $\left[\frac{x_1+(k-1)r}{k+a}\right] = r$. Adunînd în ambii membri ai egalității (1) pe $(k-1)r$, se obține în același mod ca mai înainte, inegalitatea $(k+a)r \leqslant x_1 + (k-1)r < (k+a)(r+1)$, deci problema este rezolvată.

3. a) Se folosește relația de recurență $C_m^k = \frac{m}{k} C_{m-1}^{k-1}$, deci $C_{2^n}^k = \frac{2^n}{k} C_{2^n-1}^{k-1}$. Este clar că numărul $\frac{2^n}{k}$ este diferit de 1 pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n-1\}$. Rezultă că toate numerele binomiale specificate în enunț sînt pare. b) Din aceeași relație de recurență se deduce că numerele considerate sînt multipli de patru pentru orice $k \neq 2^{n-1}$. Pentru $k = 2^{n-1}$ obținem $C_{2^n}^k = C_{2^n}^{2^{n-1}} = 2C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$. Mai trebuie să demonstrăm că numărul binomial $C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$ este impar. Putem scrie

$$C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1} = \frac{2^n-1}{2^{n-1}-1} C_{2^n-2}^{2^{n-1}-2} = \ldots = \frac{2^n-1}{2^{n-1}-1} \cdot \frac{2^n-2}{2^{n-1}-2} \ldots C_{2^n-2^{n-1}}^0,$$

iar toate puterile lui 2, factori comuni corespunzători numitorului și numărătorului, se simplifică.

4. Fie $MM' \perp (ABCD)$ și $NN' \perp (ABCD)$, unde $M', N' \in (ABCD)$. Să notăm cu A'', B'', C'', D'' respectiv proiecțiile punctelor A', B', C', D' pe planul bazei și $AA' = x$, $BB' = y$, $CC' = z$ și $DD' = u$. Din trapezele formate avem $MM' = \frac{1}{2}(A'A'' + C'C'')$ și $NN' = \frac{1}{2}(B'B'' + D'D'')$. Condiția de paralelism este $MM' = NN'$, sau folosind notațiile anterioare, $(x + z)\sin a = (y + u)\sin a$, unde a este măsura unghiului $\widehat{VAC}$. Condiția ca punctele V, A', B', C', D' să se afle pe o aceeași sferă o aflăm din puterile punctelor A, B, C, D față de sfera (presupusă de centru O și rază R): (1) $x \cdot VA = R^2 - AO^2$, $y \cdot VB = R^2 - BO^2$, $z \cdot VC = R^2 - CO^2$, $u \cdot VD = R^2 - DO^2$. Dar $AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$, pentru orice punct O din spațiu, deoarece $ABCD$ este dreptunghi, iar $VA = VB = VC = VD$. Acum dacă punctele V, A', B', C', D' sînt pe o aceeași sferă, din (1) rezultă că $x + z = y + u$, deci MN este paralelă cu planul bazei. Reciproc, dacă MN este paralelă cu planul bazei, atunci $x + z = y + u$ și sistemul (1) are o soluție în R, AO, BO, CO și DO, care determină complet sfera care conține cele cinci puncte.

Anul 1989

Etapa județeană

1. $m(\hat{A}) \geqslant 60° \Leftrightarrow \cos A \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 \leqslant bc \Leftrightarrow a^2 \geqslant b^2 - bc + c^2$. Prin ipoteză avem că $a^4 \geqslant b^4 + c^4 - b^2c^2$ și $b^4 + c^4 - b^2c^2 \geqslant (b^2 - bc + c^2)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2bc(b - c)^2 \geqslant 0$. Deci $a^4 \geqslant b^4 + c^4 - b^2c^2 \geqslant (b^2 - bc + c^2)^2 \Leftrightarrow a^2 \geqslant b^2 - bc + c^2$ (această deoarece $b^2 - bc + c^2 \geqslant 0$) și în consecință $m(\hat{A}) \geqslant 60°$.

2. Vom arăta mai întîi că ordonarea lungimilor bisectoarelor este inversă ordonării laturilor, adică $l_a \leqslant l_b \Leftrightarrow b \leqslant a$. Într-adevăr, știm că

$$l_a = \frac{2bc}{b + c}\cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)bc}}{b + c} \text{ și atunci}$$

$$l_a \leqslant l_b \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b(b+c-a)}}{b + c} \leqslant \frac{\sqrt{a(a+c-b)}}{a+c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b(a + c)^2(b - a) + bc(a + c)^2 \leqslant a(b + c)^2(a - b) + ca(b + c)^2 \Leftrightarrow (b - a)(a^2b +$$

$$+ bc^2 + ab^2 + ac^2 + 4abc) + c(a^2b + bc^2 - ab^2 - ac^2) \leqslant 0 \Leftrightarrow (b - a)(a^2b + bc^2 +$$

$$+ ab^2 + ac^2 + 3abc + c^3) \geqslant 0 \Leftrightarrow b \leqslant a.$$

Deci presupunem, fără a restrînge generalitatea, că $a \geqslant b \geqslant c \Leftrightarrow l_a \leqslant l_b \leqslant l_c$ și $A \geqslant B \geqslant C$. Rămîne de demonstrat că $l_a \leqslant 3r$. Fie $A' \in (BC)$, piciorul bisectoarei din A și I centrul cercului înscris în triunghi. Avem $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, $IA' = \frac{r}{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)}$.

Deci $l_q = AI + IA' \leqslant 3r$, ceea ce este echivalent cu

$$(1)\qquad \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{B+C}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}} \leqslant 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{B+C}{2} \leqslant 3\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \Leftrightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2}(\cos B + \cos C) \Leftrightarrow 4\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant 6\left(\cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant \left(\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)^2 + 2\cos^2\frac{B}{2} + 2\cos^2\frac{C}{2} - 3.$$

Deoarece $A \geqslant B \geqslant C$, rezultă $B = 180° - A - C \leqslant 180° - B - C \Leftrightarrow B \leqslant 90° - \frac{C}{2}$, ceea ce arată că avem $\cos B \geqslant \sin\frac{C}{2}$ și atunci

$$(2)\quad 2\cos^2\frac{B}{2} + 2\cos^2\frac{C}{2} - 3 = 1 + \cos B + 2\cos^2\frac{C}{2} - 3 = \cos B + 2\cos^2\frac{C}{2} -$$

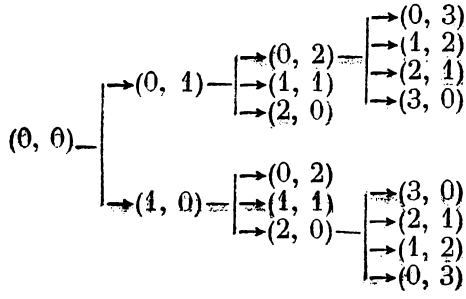
$$- 2 \geqslant 2\cos^2\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2} - 2 = \sin\frac{C}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\frac{1}{2} - \sin\frac{C}{2}\right).$$

Datorită faptului că $A \geqslant B \geqslant C$, rezultă că neapărat $C \leqslant 60°$, adică $\frac{C}{2} \leqslant 30°$ și deci $\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ și atunci din (2) obținem $2\cos^2\frac{B}{2} + 2\cos^2\frac{C}{2} - 3 \geqslant 0$ care împreună cu relația (1) ne demonstrează enunțul.

3. a) Din relația $x_{i+1} + y_{i+1} = x_i + y_i + 1$, $(\forall)\ i = \overline{0, m+n-1}$ obținem $x_k + y_k = x_0 + y_0 + k$, $(\forall)\ k = \overline{0, m+n}$, adică

$$x_{m+n} + y_{m+n} = x_0 + y_0 + m + n \leqslant m + n, (x_{m+n} \leqslant m, y_{m+n} \leqslant n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_0 + y_0 = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) = (0,0).$$

Deci orice drum $\Gamma \subset M$ începe din origine și se termină în (m, n). Presupunem $m \leqslant n$. Din următoarea schemă vom obține că numărul $N = |\Gamma|$ al drumurilor din M este egal cu produsul dintre numărul de reprezentări ale lui k sub forma unei sume $x_k + y_k = k$, unde $x_k \leqslant m$, $y_k \leqslant n$, $k \leqslant m + n$:



Cît timp $k \in \{0, 1, ..., m\}$ rezultă $x_k \in \{0, 1, ..., k\}$ și există $y_k \in \{0, 1, ..., k\}$ astfel încît $x_k + y_k = k$, deci pentru fiecare k numărul variantelor este $k + 1$ și obținem un prim factor al lui N:

$$N_1 = \prod_{k=0}^{m} (k + 1) = (m + 1)!$$

Cînd $k \in [m + 1, ..., n\}$, atunci $x_k \in \{0, 1, ..., m\}$ și există $y_k \in \{k - m, ..., k\}$ astfel încît $x_k + y_k = k$, deci pentru fiecare k numărul variantelor este $m + 1$. Atunci

$$N_2 = \prod_{k=m+1}^{n} (m + 1) = (m + 1)^{n-m}.$$

Cînd $k \in \{n + 1, ..., n + m\}$, rezultă că există $y_k \in \{0, ..., n\}$ astfel încît să existe $x_k \leqslant m$, cu proprietatea $x_k + y_k = k$ dacă și numai dacă $y_k \in \{k - m, ..., n\}$, deci pentru fiecare k numărul variantelor este $n - k + m + 1$. Atunci

$$N_3 = \prod_{k=n+1}^{n+m} (n - k + m + 1) = \prod_{i=1}^{m} (m + 1 - i) = m!$$

În concluzie $N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = ((m + 1)!)^2 (m + 1)^{n-m-1}$, unde $m \leqslant n$.

b) Vom determina P ca fiind numărul drumurilor care conțin perechea (k, l). Acesta este egal cu numărul tuturor drumurilor împărțit la numărul de reprezentări ale lui $k + l$ sub forma $x_{k+l} + y_{k+l} = k + l$, conform modului anterior de numărare. Distingem mai multe cazuri: i) Dacă $(k, l) = (0, 0)$ sau $(k, l) = (m, n)$, atunci numărul $N - P$ este zero (orice drum din M începe cu $(0,0)$ și se termină cu (m,n));

ii) Dacă $0 < k + l \leqslant m$, atunci $P = \dfrac{N}{k + l + 1}$ și deci numărul cerut în problemă va fi

$$N \frac{k + l}{k + l + 1} = ((m + 1)!)^2 (m + 1)^{n-m-1} \frac{k + l}{k + l + 1}.$$

iii) Dacă $m < k + l \leqslant n$, atunci $P = \dfrac{N}{m + 1}$ și rezultă că numărul căutat va fi

$$N \frac{m}{m + 1} = m(m!)^2 (m + 1)^{n-m}.$$

(iv) Dacă $n < k + l$, atunci $P = \dfrac{N}{n + m - k - l + 1}$ și deci numărul cerut în problemă va fi

$$N \frac{m + n - (k + l)}{m + n - (k + l) + 1} = ((m + 1)!)^2 (m + 1)^{n-m-1} \frac{m + n - (k +)}{m + n - (k + l) + 1}.$$

Cu aceasta problema este rezolvată. *Observație*. Cazul i) se obține în particular din cazurile ii) și iv).

4. i) Vom demonstra, prin inducție după $n \in \mathbb{N}$, că $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Verificarea este făcută $\left(a_0 = \dfrac{1}{0!} = 1\right)$ și presupunem ca ipoteză de inducție că $a_k = \dfrac{1}{k!}$.

$k=\overline{0, n-1}$. Să arătăm că $a_n = \frac{1}{n!}$ Relația din ipoteza problemei se prelucrează astfel:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 2^n a_n \Leftrightarrow 2a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = 2^n a_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!\,(n-k)!} = 2(2^{n-1}-1)\,a_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k = 2(2^{n-1}-1)\,a_n \Leftrightarrow \frac{2^n-2}{n!} = 2(2^{n-1}-1)a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{n!}.$$

Deci $a_n = \frac{1}{n!}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

ii) Avem $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) =$

$$= 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3,\ (\forall)\ n \geqslant 2.$$

Prin urmare numărul 3 este majorant al mulțimii $\left\{b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$. *Observație.* Se poate demonstra că numărul e este marginea superioară a mulțimii

$\left\{b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$. iii). Avem

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} (k-1)a_k = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = 1 - \frac{1}{n!},\ (\forall)\, n \geqslant 2.$$

Etapa finală

1. i) În triunghiul AMN dreapta AD este mediană, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$, deci $AM \perp AN$; celelalte două relații de perpendicularitate se demonstrează în mod analog. ii) Se studiază existența tetraedrului tridreptunghic $AMNP$, cu $AM = x$, $AN = y$, $AP = z$. Aplicînd teorema lui Pitagora se obține sistemul $x^2 + y^2 = 4a^2$, $y^2 + z^2 = 4b^2$, $x^2 + z^2 = 4c^2$. Se deduce $x^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2)$, $y^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)$, $z^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2)$, deci $a^2 + c^2 > b^2$, $b^2 + c^2 > a^2$ și $a^2 + b^2 > c^2$, adică triunghiul cu laturile a, b, c este ascuțitunghic. Să demonstrăm acum că dacă există un triunghi ascuțitunghic ABC cu lungimile laturilor a, b, c, atunci există și un tetraedru echifacial cu lungimile muchiilor a, b, c. Să considerăm în planul ABC vîrful A' de aceeași parte cu A față de BC, astfel încît $A'B = b$ și $A'C = c$ (A și A' pot coincide dacă $b = c$). Să rotim triunghiul $A'BC$ în jurul laturii BC pînă cînd distanța dintre vîrful A' și vîrful A devine egală cu a, moment în care notînd poziția lui A' cu D, se obține tetraedrul echifacial $ABCD$. Pentru aceasta, este necesar și suficient ca $AA' < a < AA''$, A'' fiind în planul ABC simetricul lui A' față de BC, deci $A''B = b$ și $A''C = c$. Dacă $D = A'$ sau $D = A''$ tetraedrul echifacial degenerează, devenind dreptunghi. Deoarece triunghiurile congruente ABC și

$A'BC$ sînt ascuțitunghice, rezultă că $AA' < a$. De asemenea, $ABA''C$ este paralelogram și $m(\widehat{ABA''}) = B + C = 180° - A > 90°$, ceea ce implică $AA'' > a$.

2. Este suficient să demonstrăm inegalitatea pentru $a, b, c > 0$. Să considerăm $OA \perp OC$, $B \in \mathrm{Int}(AOC)$, $OA = a$, $OC = c$, $OB = b\sqrt{2}$, $m(\widehat{BOC}) = 45°$. Rezultă

$$AB^2 = a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = (a-b)^2 + b^2,\ BC^2 = (c-b)^2 + b^2.$$

Inegalitatea devine $AB + BC \geqslant AC$. Egalitatea are loc cînd A, B, C sînt coliniare și OB este lungimea bisectoarei din O în triunghiul dreptunghic OAC, de unde se deduce $b = \dfrac{ac}{a+c}$

3. Fie D proiecția lui A pe BC. Rezultă $\dfrac{AD^2}{DB \cdot DC} = -\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$. Condiția $B - C \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ revine la $-\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C < 1$, deci (1) $AD^2 < DB \cdot DC$. Să notăm $m(\widehat{OBC}) = \beta$, $m(\widehat{OCB}) = \gamma$ și obținem

$$\operatorname{tg}(\widehat{BOC}) = -\operatorname{tg}(\beta + \gamma),\ \operatorname{tg}\beta = -\frac{OD}{BD},\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{OD}{DC},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{BOC}) = \frac{OD \cdot BC}{OD^2 + BD \cdot DC},\ \operatorname{tg}(\widehat{BAC}) = \frac{AD \cdot BC}{AD^2 + BD \cdot DC}.$$

Inegalitatea de demonstrat se reduce la $\operatorname{tg}(\widehat{BAC}) > \operatorname{tg}(\widehat{BOC})$, adică

$$AD \cdot BC(OD^2 + BD \cdot DC) > OD \cdot BC(AD^2 + BD \cdot DC)$$

sau, echivalent, $BD \cdot DC > OD \cdot AD$. Dar această inegalitate rezultă din relația (1) și condiția $AD > OD$.

4. i) Se notează $f_1(X) = (X-1)f(X) = X^n - 1$ și $g_1(X) = (X-1)g(X) = X^m - 1$. Pentru $r = (m, n)$ se demonstrează că $(X^n - 1, X^m - 1) = X^r - 1$ și $d(X) = \dfrac{X^r - 1}{X - 1} = X^{r-1} + \ldots + X + 1$. ii) Soluțiile ecuației $d(x) = 0$ sînt $x_k = \cos\dfrac{2k\pi}{r} + i\sin\dfrac{2k\pi}{r}$, unde $k = 0, 1, \ldots, r-1$. Dacă $r \mid p$ obținem

$$\sum_{k=0}^{r-1}(x_k)^p = \sum_{k=0}^{r-1}(x_k^t)^t = r - 1,\ \text{unde } p = rt.$$

Dacă r nu este un divizor al lui p suma căutată este

$$\sum_{k=0}^{r-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{r} + i\sin\frac{2k\pi}{r}\right)^p = \sum_{k=0}^{r-1}\left(\cos\frac{2p\pi}{r} + i\sin\frac{2p\pi}{r}\right)^k =$$

$$= \frac{\cos 2p\pi + i\sin 2p\pi - 1}{\cos\dfrac{2p\pi}{r} + i\sin\dfrac{2p\pi}{r} - 1} = 0.$$

Anul 1990

Etapa județeană

1. $C_{2n}^n < C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \ldots + C_{2n}^{2n} = (1+1)^{2n} = 4^n$ iar pentru $n = 5$ avem $C_{10}^5 = 252 > 3^5$, deci $a = 4$.

2. Funcția $f : \mathbf{R}_-^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + 3^x + 6^x - x^2$ este strict crescătoare ca sumă de funcții strict crescătoare și atunci dacă se anulează se anulează o singură dată. Deoarece $f(-1) = 0$, deducem că $x = -1$ este unica rădăcină strict negativă. Să arătăm acum că nu are rădăcini pozitive. Să admitem prin absurd că ar avea o rădăcină $u \in \mathbf{R}_+$. Atunci

$$u^2 = 2^u + 3^u + 6^u \geqslant 3 \Rightarrow u^2 \geqslant 3 \Rightarrow u \geqslant \sqrt{3} > 1 \Rightarrow [u] \geqslant 1,$$

unde $[u]$ este partea întreagă a lui $u \in \mathbf{R}$. Deci

$$u \geqslant [u] \Rightarrow 2^u \geqslant 2^{[u]} = (1+1)^{[u]} = C_{[u]}^0 + C_{[u]}^1 + \ldots + C_{[u]}^{[u]} \geqslant 1 + C_{[u]}^1 = 1 + [u] \geqslant u.$$

Prin urmare $2^u > u \Rightarrow 6^u \geqslant 4^u = (2^u)^2 > u \Rightarrow 2^u + 3^u + 6^u > 6^u > u^2$, contradicție. În final putem spune că ecuația din enunț are unica rădăcină $x = -1$.

3. Fie $A_n = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| + |1 + z^n| = 1\}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Avem $A_1 = [-1, 0]$. Într-adevăr, fie $z \in A_1$, $z = r(\cos t + i \sin t)$, cu $r \geqslant 0$ și $t \in \mathbf{R}$.

$$z \in A_1 \Rightarrow |z| + |1 + z| = 1 \Rightarrow 0 \leqslant |1 + z| = 1 - |z| = 1 - r \Rightarrow r \leqslant 1.$$

$$z \in A_1 \Rightarrow 1 = |z| + |1 + z| = r + \sqrt{(1 + r\cos t)^2 + (r \sin t)^2} = r +$$

$$+ \sqrt{1 + 2r\cos t + r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = r + \sqrt{1 + 2r\cos t + r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - r = \sqrt{1 + 2r\cos t + r^2}$$

și cum $r \leqslant 1$ deducem că

$$1 - 2r + r^2 = 1 + 2r\cos t + r^2 \Rightarrow \cos t = -1 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow z = -r,$$

$$0 \leqslant r \leqslant 1 \Rightarrow z \in [-1, 0].$$

Deci (1) $(\forall) z \in A_1 \Rightarrow z \in [-1, 0] \Rightarrow A_1 \subset [-1, 0]$.

Incluziunea inversă se demonstrează imediat după cum urmează:

$$(\forall) z \in [-1, 0] \Rightarrow |z| = -z \text{ și } |1 + z| = 1 + z \Rightarrow |z| + |1 + z| = -z + 1 + z =$$

$$= 1 \Rightarrow z \in A_1.$$

Deci $[-1, 0] \subset A_1$ și atunci $A_1 = [-1, 0]$.

(2) $$A_n = \{0\} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = -1\}, \quad (\forall) n \geqslant 2.$$

Pentru început să observăm că (3) $A_n \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant 1\}$. Într-adevăr,

$$(\forall) z \in A_n \Rightarrow |z| + |1 + z^n| = 1 \Rightarrow 0 \leqslant |1 + z^n| = 1 - |z| \Rightarrow |z| \leqslant 1.$$

Pentru a demonstra egalitatea de mulțimi din (2) vom demonstra și aici dubla incluziune dintre cele două mulțimi.

$$(\forall) z \in \{0\} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = -1\} \Rightarrow |z| = 0 \text{ sau } z^n = -1 \Rightarrow z = 0 \text{ sau } 1 + z^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|z| = 0 \text{ și } |1 + z| = 1) \text{ sau } (|z| = 1 \text{ și } |1 + z^n| = 0) \Rightarrow |z| + |1 + z^n| = 1 \Rightarrow z \in A_n.$$

Deci (4) $\{0\} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = -1\} \subset A_n$. Fie acum $z \in A_n$. Folosind (3) deducem $|z| \leqslant 1 \Leftrightarrow |z| = 0$ sau $|z| = 1$ sau $|z| \in (0,1)$. Sînt posibile trei cazuri: i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; ii) $|z| = 1$, $z \in A_n \Rightarrow |1 + z^n| = 0 \Rightarrow z^n = -1$; iii) $|z| \in (0, 1)$, $z \in A_n$. În acest caz ţinînd cont de (3) şi de inegalitatea $|x + y| \geqslant \| x| - |y\|$, $(\forall) x, y \in \mathbf{C}$, avem

$$1 = |z| + |1 + z^n| \geqslant |z| + |1 - |z|^n| = |z| + 1 - |z|^n =$$
$$= 1 + |z|(1 - |z|^{n-1}) \geqslant 1.$$

Din cele trei cazuri deducem succesiv:

$$(\forall) z \in A_n \Rightarrow |z| \leqslant 1 \Rightarrow z = 0 \text{ sau } z = 1 \text{ sau } |z| \in (0, 1) \Rightarrow z = 0 \text{ sau}$$
$$z^n = -1 \text{ sau } z \in \emptyset \Rightarrow z \in \{0\} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = -1\}. \text{ Deci}$$
$$(5) \quad A_n \subset \{0\} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = -1\}.$$

Din (4) şi (5) rezultă (2). În concluzie,

$$A_n = \begin{cases} [-1, 0] \text{ dacă } n = 1 \\ \{0\} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid z^n + 1 = 0\} \text{ sau } n \geqslant 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} [-1, 0] \text{ dacă } n = 1 \\ \{0\} \cup \left\{ \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \dfrac{(2k+1)\pi}{n},\ k = \overline{0, n-1} \right\} \text{ dacă } n \geqslant 2. \end{cases}$$

4. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC şi a', b', c' lungimile laturilor triunghiului $A'B'C'$. Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ fiind înscrise în acelaşi cerc, avem

$$\frac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} = \frac{a'b'c'}{4R} \cdot \frac{4R}{abc} = \frac{a'b'c'}{abc}.$$

Din asemănarea triunghiurilor GAB şi $GB'A'$ deducem

$$\frac{GA}{GB'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow c' = A'B' = AB \cdot \frac{GB'}{GA} = c\,\frac{GB'}{GA} = c\,\frac{GB \cdot GB'}{GA \cdot GB} = c\,\frac{|\rho(G)|}{GA \cdot GB},$$

unde $\rho(G)$ este puterea punctului G faţă de cercul circumscris triunghiului ABC. Analog $a' = \dfrac{a\,|\rho(G)|}{GB \cdot GC}$, $b' = \dfrac{b\,|\rho(G)|}{GA \cdot GC}$. Prin urmare,

$$(1) \qquad \frac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} = \frac{|\rho(G)|^3}{(GA \cdot GB \cdot GC)^2}.$$

Din relaţia lui Leibniz deducem

$$(2) \qquad |\rho(G)| = R^2 - OG^2 = \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2).$$

Din relaţiile (1) şi (2) după aplicarea inegalităţii mediilor în (2) rezultă $\dfrac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} \geqslant 1$, cu egalitate dacă şi numai dacă $GA = GB = GC \Leftrightarrow G = O \Leftrightarrow$ triunghiul ABC este echilateral.

Etapa finală

1. Inegalitatea dată este echivalentă cu:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ După simplificare se obține: $1+\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ Această ultimă inegalitate se poate demonstra imediat pe baza inegalității lui Bernoulli, sau dezvoltînd cu ajutorul binomului lui Newton: $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=1+C_n^1\frac{1}{n^2}+\quad>1+\frac{1}{n}$.

2. a) $\Rightarrow$ b). Presupunem că există $\alpha\in U_n$ astfel încît $1+\alpha\in U_n$. Atunci în planul complex punctele de afixe α și $1+\alpha$ aparțin cercului unitate $|z|=1$. Patrulaterul cu vîrfurile 0, 1, $1+\alpha$ și α este un paralelogram (adunarea numerelor complexe se face după regula paralelogramului), avînd laturile care pleacă din 0 de lungime 1, deci este un romb. În acest romb diagonala care pleacă din 0 este tot de lungime 1, deci triunghiurile pe care le determină această diagonală în rombul considerat sînt echilaterale. Rezultă $\arg(1+\alpha)=\frac{\pi}{3}$, $\arg\alpha=\frac{2\pi}{3}$ (în cazul în care α este în semiplanul $\operatorname{Im} z>0$) sau $\arg(1+\alpha)=\frac{5\pi}{3}$, $\arg\alpha=\frac{4\pi}{3}$ (în cazul în care α este în semiplanul $\operatorname{Im} z<0$). Vom trata primul caz, celălalt tratîndu-se analog. Deoarece $\arg\alpha=\frac{2\pi}{3}$ rezultă $\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=$ $=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și atunci $1+\alpha=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Dar $(1+\alpha)^n=$ $=1$ implică $\frac{n\pi}{3}=2k\pi$, deci $n=6k$. Luăm atunci $\beta=-\alpha$ și avem $\beta^n=$ $=(-\alpha)^n=(-\alpha)^{6k}=\alpha^{6k}=1$, deci $\beta\in U_n$ iar $1-\beta=1+\alpha\in U_n$ (conform presupunerii făcute). Demonstrația b) $\Rightarrow$ a) se face analog. *Altă soluție.* a) $\Rightarrow$ b). Fie $\alpha\in U_n$, astfel încît $1+\alpha\in U_n$. Avem $\alpha\neq-1$, căci în caz contrar $1+\alpha=0\notin U_n$. Luînd atunci $\beta=\frac{1}{1+\alpha}$, obținem $\beta^n=\frac{1}{(1+\alpha)^n}=1$, deci $\beta\in U_n$, iar $1-\beta=\frac{\alpha}{1+\alpha}$, deci $(1-\beta)^n=\frac{\alpha^n}{(1+\alpha)^n}=1$, adică $1-\beta\in U_n$. b) $\Rightarrow$ a). Fie $\beta\in U_n$ astfel încît $1-\beta\in U_n$. Evident $\beta\neq0$, căci $\beta=0$ ar implica $\beta\notin U_n$. Luînd $\alpha=\frac{1-\beta}{\beta}$ avem $\alpha^n=\frac{(1-\beta)^n}{\beta^n}=1$, deci $\alpha\in U_n$, iar $1+\alpha=\frac{1}{\beta}$, deci $(1+\alpha)^n=\frac{1}{\beta^n}=1$, adică $1+\alpha\in U_n$. O altă demonstrație poate fi dată, arătînd că atît a), cît și b) sînt echivalente cu afirmația: $n=6k$, unde $k\in\mathbb{N}^*$.

3. Fie M, N, P proiecțiile lui E pe AB, BC, respectiv CA. Din $F\in\mathcal{O}$ rezultă că punctele M, N, P sînt coliniare, ele aflîndu-se pe dreapta lui Simson. Din triunghiurile DAB, DBC, DCA rezultă: $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-1$, $\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}=\frac{b^2}{b^2-2a^2}$

și $\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{a^2}{a^2 - 2b^2}$. Relația lui Menelaus conduce la $b^4 + a^4 = 3a^2b^2$, adică $(a^2 - b^2)^2 = a^2b^2$. Convine doar relația $a^2 - b^2 = ab$ și de aici $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Unghiul $\widehat{CDB}$ se proiectează în plan după unghiul $\widehat{CEB} = \widehat{CAB} = \widehat{CDB}$, de unde rezultă $D = E$. Există un punct F astfel încît $FBEAC$ să fie pentagon regulat.

4. a) Șirurile cu proprietatea din enunț conțin k termeni egali cu 1, $n - k$ termeni egali cu 0 și nu conțin doi termeni egali cu 1 consecutivi. Deci poziția fiecărui 1 este unic determinată de numărul de ordine al fiecărui 0 situat în fața sa. Există $n - k$ termeni egali cu 0, însă șirul poate începe și cu 1, deci mai considerăm un 0 fictiv pe poziția cu numărul 0. Deci numărul de șiruri este egal cu numărul de submulțimi cu k elemente ale mulțimii $\{0, 1, ..., n - k\}$, adică C_{n-k+1}^{k}. O altă demonstrație se poate da pe baza relației de recurență verificate de numerele binominale pe care le căutăm.

b) Ținînd seama de a), suma de produse de combinări care apare în dubla inegalitate este egală cu numărul de submulțimi cu i elemente ale mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$ care nu conțin două numere consecutive care apar ambele fie în mulțimea $\{1, 2, ..., n_1\}$, fie în mulțimea $\{n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n\}$. Este clar acum că acest număr este mai mic decît numărul tuturor submulțimilor cu i elemente ale mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$ și mai mare decît numărul de submulțimi cu i elemente ale mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$ care nu conțin doi întregi consecutivi (deoarece restricția ca aceste submulțimi cu i elemente să nu conțină simultan întregii n_1 și $n_1 + 1$ este suprimată).

CLASA A XI-A

Anul 1950

Etapa I

1. a) $V_1 = 3t^2 - 12t + 20$, $V_2 = 2 + 12t - 6t^2$, $V_1(0) = 20$ cm/s, $V_2(0) = 2$ cm/s, $x_1 = x_2$ implică $t = 3$ și $V_1(3) = 11$ m/s, $V_2(3) = -16$ cm/s; b) $d(t) = |x_1(t) - x_2(t)| = 2t(t-3)^2$, $d'(t) = 6(t-3)(t-1)$, $t_1 = 1$, $d_{max} = 8$ cm, $d(t) = 8$ implică $t = 4$ s; c) $a_1(t) = 6(t-2)$, $a_2(t) = 12(1-t)$; cînd $t \in (0, 1)$ ambele mișcări vor fi întîrziate.

2. a) Se notează cu h înălțimea și se obține $S(h) = \dfrac{\sqrt{3V(3V + h^3\pi)}}{h}$, unde $S(h)$ este aria laterală și V volumul conului. $S'(h) = 0$ implică $h_1 = \sqrt[3]{\dfrac{6V}{\pi}}$ și $S(h_1)$ este minim; b) Avem

$$V(h) = \frac{h(\sqrt{\pi^2h^4 + 4S^2} - 3\pi h^2)}{6}.$$ $V'(h) = 0$ implică $h_2 = \sqrt{\dfrac{4S}{\pi\sqrt{3}}}$ și $V(h_2)$ este maxim.

Etapa a II-a

1. a) Pentru $0 \leqslant x \leqslant 10$, $y = \sqrt[3]{2700x}$; pentru $10 < x \leqslant 30$, $y = x + 20$ și pentru $30 < x \leqslant 60$, $y = \dfrac{x}{3} + 40$, care se obțin prin egalarea expresiilor volumului de apă în cele două situații. b) Pentru $x \in [0, 60]$ graficul este format din trei porțiuni distincte, două fiind segmente de dreaptă.

c) $$A = \int_0^{10} \sqrt[3]{2700x}\, dx + \int_{10}^{30} (x + 20)\, dx + \int_{30}^{60} \left(\frac{x}{3} + 40\right) dx = 2675 \text{ cm}^2.$$

2. a) $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. b) Se ține seama că

$$\alpha(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{pentru } x \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Graficul admite axa Oy ca axă de simetrie și axa Ox asimptotă orizontală.

Anul 1951

Etapa I

1. a) $xy = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2}$; b) Deoarece $xy > 0$ rezultă $a^2 > b^2 + c^2$; c) $xy = 1$, $x, y > 0$: suma este minimă pentru $x = y$, deci $S_{min} = 2$; d) Se alege baza $BB'C'D'$ şi atunci înălţimea piramidei este înălţimea din A a triunghiului ABC. Avem

$$V = \frac{4\sqrt{14}}{3}; \ \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{h} = \frac{3\sqrt{14}}{28}.$$

Etapa a II-a

1. a) Se construieşte cercul de diametru $[AB]$. Punctul D aparţine cercului. Pe tangenta în B la cerc, în acelaşi semiplan cu C, se ia punctul M astfel ca $AM = AB$. Atunci $\triangle ABD \equiv \triangle BMC$, prin urmare $m(\widehat{BCM}) = 90°$. Deci C parcurge un semicerc de diametru $[BM]$. Locul geometric mai conţine un semicerc de diametru $[BM']$, unde B este mijlocul segmentului $[MM']$. Cele două semicercuri sînt în acelaşi semiplan cu A faţă de BM. b) Cea mai mare valoare a lui AC este $c\sqrt{2}$, deci $\dfrac{b}{c} \in (0, \sqrt{2})$. c) Din $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin C}$ şi $BC = AD = AB \sin B$, rezultă

$$\sin B \sin C = \sin A \text{ şi } \sin B \sin C = \sin B \cos C + \cos B \sin C.$$

Anul 1952

Etapa I

1. a) Se notează catetele cu x şi y. Avem (1) $x^2 + y^2 = a^2$. $r = \dfrac{s}{p}$ conduce la (2) $xy = r(x + y) + ra$, sistem simetric cu soluţiile

$$x, y = \frac{2r + a \pm \sqrt{a^2 - 4ra - 4r^2}}{2}.$$

Pentru ca să existe soluţie trebuie ca $a \geqslant 2r(1 + \sqrt{2})$; b) Centrul cercului înscris în triunghiul ABC se găseşte la intersecţia paralelei la BC la distanţa r cu arcul capabil de 135° care trece prin B şi C, situat de aceeaşi parte faţă de BC cu paralela la BC. Punctele de intersecţie pot fi două (cînd se obţin două triunghiuri dreptunghice congruente), unul singur (triunghiul ABC este isoscel) sau nici unul, cînd problema nu are soluţie; c) Centrul acestui cerc este în punctul D de intersecţie al bisectoarei din A cu $[BC]$. Se notează cu O centrul cercului înscris. Din teorema bisectoarei în $\triangle ABD$ rezultă $\dfrac{r}{u - r} = \dfrac{AO}{OD} = \dfrac{AB}{BD}$, unde u este raza cercului căutat. Se obţine $u = \dfrac{ar}{2r + a}$.

Etapa a II-a

1. a) $BCNM$ este un trapez; b) Se notează cu Q piciorul perpendicularei coborîte din V pe BC, α, β, γ măsurile unghiurilor diedre formate de perechile de plane $(ABCD)$ și $(MNCB)$; $(ABCD)$ și (VBC); (VBC) și $(MNCB)$, se deduce $VQ = \frac{\sqrt{4i^2 + a^2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{2i}{\sqrt{4i^2 + 9a^2}}$, $\sin\beta = \frac{2i}{\sqrt{4i^2 + a^2}}$, $\sin\gamma = \frac{4ai}{\sqrt{(4i^2 + a^2)(4i^2 + 9a^2)}}$. Distanța căutată este $VQ \sin\gamma = \frac{2ai}{\sqrt{4i^2 + 9a^2}}$; c) $\frac{3}{8}$.

2. a) $a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)^2$; b) Din condiția de progresie aritmetică obținem $2b^2 = a^2 + (a + b)^2$; se poate calcula valoarea $t = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$; toate tangentele se pot exprima în funcție de t.

Anul 1954

Etapa I

1. Se notează cu E mijlocul segmentului $[BN]$. Puterea punctului A față de cercul de diametru $[BN]$ este $p_1 = AE^2 - \frac{BN^2}{4}$. Utilizînd teorema medianei se obține $p_1 = \frac{1}{2}(AB^2 + AN^2 - BN^2) = BN \cdot AB \cos A$. Analog $p_2 = AM \cdot AC \cos A$ și deci $p_1 = p_2$.

2. Se notează $\sqrt[4]{a^2 - x^2} = y$ și se ridică relația la pătrat și la puterea a patra. Se obține $2y^2 - 4b^2y + b^4 - 2a = 0$.

Etapa a II-a

1. a) Se notează cu B' și C' proiecțiile punctelor B respectiv C pe planul (P). Presupunem că $BB' < CC'$ și fie D proiecția lui B pe CC'. Atunci $\frac{CD}{CB} = \sin\alpha$ sau (1) $\sin\alpha = \frac{CC' - BB'}{BC}$ Din $BB' = AB \sin$ $CC' = AC \sin\beta$ și teorema sinusului în $\triangle ABC$, (1) conduce la $\sin A \sin\alpha = \sin B \sin\beta - \sin C \sin\gamma$. Dacă $BB' > CC'$ se obține

$$\sin A \sin\alpha = \sin C \sin\gamma - \sin B \sin\beta.$$

b) Se notează cu M intersecția segmentului $[BC]$ cu planul (P). Avem

$$BC = MC + MB = \frac{CC' + BB'}{\sin\alpha}. \text{ Se obține}$$

$$\sin A \sin\alpha = \sin B \sin\beta + \sin C \sin\gamma.$$

c) Relația de plecare este $B'C'^2 = B'A^2 + C'A^2 - 2B'A \cdot C'A \cos\omega$. Se utilizează și relația de la punctul precedent. Se obține

$$\cos\omega = \frac{\cos A - \sin\beta \sin\gamma}{\cos\beta \cos\gamma}.$$

2. Prima condiție $a > \frac{1}{4}$. Se ridică prima relație la pătrat: $2\sqrt{a^2-a+0,25} = 1 - 2a$. Pentru a putea avea egalitate trebuie ca $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ și, prin ridicare la pătrat, se constată că este adevărată pentru orice $a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. A doua relație este adevărată pentru orice $a \geqslant \frac{1}{2}$.

3. a) Dacă se notează cu O centrul sferei și cu A punctul de pe ecuator de longitudine nulă, atunci locul geometric este cercul de diametru $[OA]$; b) un plan.

Anul 1959

Etapa regională

1. a) Să notăm cu x lungimea înălțimii inelului cilindric și cu r lungimea razei interioare. Se deduce $V = \pi\left(2a^2r + \frac{a^4}{x}\right)$, iar $gV = G$, deci $r = \frac{G}{2\pi g a^2} - \frac{a^2}{2x}$. Aria totală este egală cu $\frac{2G}{g}\left(\frac{x}{a^2} + \frac{1}{x}\right)$. b) Notînd $f(x) = \frac{2G}{g}\left(\frac{x}{a^2} + \frac{1}{x}\right)$ obținem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, iar $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$. Dreapta de ecuație $y = x/a^2$ este asimptotă oblică la $+\infty$ la grafic. Avem $f'(x) > 0$ pentru $x \in (a, \infty)$ și $f'(x) < 0$ pentru $x \in (0, a)$, deci funcția este întîi descrescătoare și apoi crescătoare, punctul de abscisă $x = a$ fiind punct de minim. De asemenea, $f''(x) = \frac{2G}{g} \cdot \frac{2}{x^3} > 0$ pentru $x \in (0, \infty)$, deci funcția este convexă pe domeniul de definiție. Dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la grafic. c) Anulînd derivata acestei funcții se obține $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2} = 0$, deci $x = a$, și pentru această valoare aria totală este minimă. Deci fiecare dintre dreptunghiurile unei secțiuni axiale devine pătrat.

2. a) Notînd $A(O,a)$, cercul are ecuația $x^2 + y^2 - 2ry = 0$. Se obțin punctele $P\left(\frac{ry_0}{x_0}, 0\right)$, $Q\left(0, \frac{ry_0}{y_0 - r}\right)$. Perpendiculara din A pe PQ este $x_0(y - a) = (y_0 - r)x$, iar perpendiculara din Q pe AP are ecuația $ax_0\left(y - \frac{ry_0}{y_0 - r}\right) = ry_0x$. Se face $y = 0$ și se obține din ambele ecuații $x = -ax_0/(y_0 - r)$, deci același punct pe Ox. Cele trei drepte sînt înălțimile triunghiului APQ. b) Fie $C_1\left(\lambda, \frac{a+r}{2}\right)$ centrul cercului care trece prin A și C. Ecuația lui este $x^2 + y^2 - 2\lambda x - (a + r)y + ar = 0$. Axa radicală a celor două cercuri descrie fascicolul de drepte de ecuație $2\lambda x + (a - r)y - ar = 0$, care trece prin punctul fix $\left(0, \frac{ar}{a-r}\right)$. Dacă P se află pe axa radicală se obține $\lambda = (ax_0^2 + ry_0^2)/2x_0y_0$. c) Ecuațiile

celor două drepte sînt $x = \frac{ry_0}{x_0}$ și $y - a = (y_0 - r)\frac{x}{x_0}$, unde $x_0^2 + y_0^2 - 2ry_0 = 0$. Prin eliminarea lui x_0 și y_0 se obține ecuația locului geometric: $y = \frac{x^2}{2r} + a - \frac{r}{2}$; o parabolă care are dreapta OC ca axă de simetrie.

Etapa finală

1. a) Folosind regula lui l'Hôpital se deduce $n = 6$ și limita este $\frac{2}{15}$. Într-adevăr, dezvoltarea în serie Taylor a funcției $\sin^2 x$ în jurul originii este $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 - \ldots$ b) Conform punctului a avem $\frac{x^4 - 3x^2 + 3\sin^2 x}{x^6} \approx \frac{2}{15}$ pentru $x \to 0$, deci $\sin^2 x \approx x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6$ și, cum x^6 este foarte mic pentru $x \to 0$, rezultă concluzia din enunț.

2. Putem scrie

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial w}\left(x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y}\right) =$$

$$= mu\frac{\partial f}{\partial u} + nv\frac{\partial f}{\partial v} + pw\frac{\partial f}{\partial w},$$

căci $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = mu$, $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = nv$ și $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = pw$, conform relației lui Euler pentru funcțiile omogene. Relația lui Euler se poate deduce derivînd parțial în raport cu variabila multiplicativă t în ambii membri ai egalității de definiție a omogeneității de un grad oarecare și apoi făcînd $t = 1$.

3. a) Notînd coordonatele lui M cu $R\cos t$, respectiv $R\sin t$, se obține $S\left(R\cos t, \frac{R}{2}\sin t\right)$ și locul geometric este elipsa de ecuație $\frac{x^2}{R^2} + \frac{4y^2}{R^2} - 1 = 0$, din care se elimină extremitățile axei mari, adică punctele de coordonate $(R, 0)$, $(-R, 0)$, pentru care cercul $\mathcal{C}'$ nu poate fi construit (degenerează într-un punct). b) Se obține $\sin 2t = 0$, deci punctul M este situat la intersecția cercului $\mathcal{C}$ cu axa $Oy\left(t = \frac{\pi}{2};\ t = \frac{3\pi}{2}\right)$. c) Notînd cu u măsura unghiului dintre aceste drepte, se deduce $\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg} t}{2\operatorname{tg}^2 t + 1}$, funcție care are un minim pentru $\operatorname{tg} t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ și un maxim pentru $\operatorname{tg} t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Unghiul ascuțit dintre cele două drepte este maxim în patru poziții ale lui S de coordonate $\left(\pm R\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\frac{R}{2\sqrt{3}}\right)$. Se observă că $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} u = \lim\limits_{t \to \frac{3\pi}{2}} \operatorname{tg} u = 0$.

Anul 1960

Etapa regională

1. a), b) Se obține $f_1 : \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f_2 : \left[\frac{3}{2}, \infty\right) \to \mathbf{R}$, $f_1^{-1} : \left[\frac{11}{4}, \infty\right) \to \mathbf{R}$, $f_1^{-1}(x) = \frac{3 - \sqrt{4x - 11}}{2}$ și $f_2^{-1} : \left[\frac{11}{4}, \infty\right) \to \mathbf{R}$, $f_2^{-1}(x) = \frac{3 + \sqrt{4x - 11}}{2}$. c) Avem $(f_i^{-1})'(y) = \frac{1}{f_i'(x)}$ pentru $i = 1, 2$, unde $y = x^2 - 3x + 5$.

2. a) Se alege AB ca axă Ox, iar $M(\lambda, a)$. Ecuația cercului ABM este $x^2 + y^2 - \frac{\lambda^2}{a} y - a^2 = 0$, cu centrul $O_1\left(0, \frac{\lambda^2}{2a}\right)$ și raza $r_1 = \frac{\sqrt{4a^4 + \lambda^4}}{2a}$. Se găsește $N\left(\frac{2a^2}{\lambda}, -a\right)$, iar ecuația cercului ABN este $x^2 + y^2 + \frac{4a^3}{\lambda^2} y - a^2 = 0$, cu centrul $O_2\left(0, -\frac{2a^3}{\lambda_2}\right)$ și raza $r_2 = \frac{a}{\lambda^2}\sqrt{4a^4 + \lambda^4}$. Distanța d de la O_2 la MN este egală cu r_2, deci MN este tangentă cercului ABN; b) Avem $O_1O_2 = \frac{4a^4 + \lambda^4}{2a\lambda^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, deci cercurile sînt ortogonale; c) Din ecuația dreptei MN se deduce $x = \frac{2a^2 + \lambda^2}{2\lambda} - \frac{2a^2 - \lambda^2}{2a\lambda} y$, valoare care substituită în ecuația elipsei ne dă rădăcina dublă $y_{1,2} = \frac{a(2a^2 - \lambda^2)}{2a^2 + \lambda^2}$.

Etapa finală

1. a) Dreapta care trece prin A are ecuația $y = \lambda(x - a)$ și obținem

$$M\left(\frac{(a^2\lambda^2 - b^2)a}{a^2\lambda^2 + b^2}, \frac{-2ab^2\lambda}{a^2\lambda^2 + b^2}\right), \quad N\left(\frac{(a^2\lambda^2 + b^2)a^2}{a^2\lambda^2 - b^2}, \frac{2ab^2\lambda}{a^2\lambda^2 - b^2}\right).$$

Se deduce $x_1x_2 = a^2$ sau $OM' \cdot ON' = OA^2$. b) Relația se verifică prin calcul direct. c) Se scriu ecuațiile tangentelor în M și N la elipsă, respectiv hiperbolă, iar parametrul λ se elimină scăzînd cele două ecuații membru cu membru, cînd se obține $x = -a$. Locul geometric este tangenta comună la elipsă și hiperbolă în vîrful $A'(-a, 0)$.

2. a) Obținem $y'(x) = \frac{x + 1 - k^2}{2k(x + 1)^{3/2}}$, care se anulează pentru $x = k^2 - 1$, iar $y(k^2 - 1) = 2$. Deoarece $y''(k^2 - 1) = \frac{1}{2k^4} > 0$, în $x = k^2 - 1$ funcția are un minim. Punctul de inflexiune are coordonatele $x = 3k^2 - 1$, $y = \frac{4}{\sqrt{3}}$, deci locul geometric este o semidreaptă de suport $y = \frac{4}{\sqrt{3}}$, ale cărei puncte au coor-

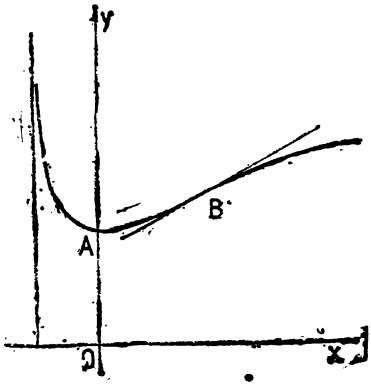


Fig. 24

donatele $\left(x, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, iar $x \in (-1, \infty)$. b) Graficul este reprezentat în fig. 24. Punctul A este punct de minim, iar B este punct de inflexiune. c) Se deduce $M\left(0, \frac{k^2+1}{k}\right)$, $N\left(\frac{2(k^2+1)}{k^2-1}, 0\right)$, deci $MN = \frac{(k^2+1)^2}{k\,|\,k^2-1\,|}$. Notînd $f(k) = \frac{(k^2+1)^2}{k(k^2-1)}$; $f:(0, \infty) \to \mathbf{R}$, se obține $f'(k) = \frac{(k^2+1)(k^4-6k^2+1)}{k^2(k^2-1)^2}$. Rădăcinile pozitive ale derivatei sînt $k_1 = \sqrt{2}-1$ și $k_2 = \sqrt{2}+1$, dintre care prima produce un maxim, egal cu -4, iar a doua un minim, egal cu 4. Deci $MN = |f(k)|$ are două minime pentru $k_{1,2} = \sqrt{2} \pm 1$, iar cea mai mică lungime a segmentului $[MN]$ este egală cu 4.

Anul 1961

Etapa regională

1. a) Eliminîndu-se y între cele două ecuații se obține ecuația în x: $100x^2 - 464x + 121 + 36m = 0$, care are rădăcini reale și egale pentru $m = 11{,}59$. Se deduce că $r_1 = 2{,}1$, $r_2 = 2{,}9$, iar distanța centrelor este egală cu 5, deci cercurile sînt tangente exterioare. b) Avem $P\left(\frac{m}{4}, 0\right)$ și $Q\left(0, \frac{m-11}{3}\right)$. Axa radicală D a cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ este dreapta fixă de ecuație $6y - 8x + 11 = 0$. Locul geometric este segmentul determinat de punctele $A\left(\frac{11}{8}, 0\right)$ și $B\left(\frac{58}{25}, \frac{18[illegible]}{150}\right)$ ($\{B\} = O_1O_2 \cap D$), fără extremități.

2. a) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1 + (\arcsin x - x)^2}$; $I = [-1, 1]$; $t \in \left[1 - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 1\right]$.

b) $f(I) = \left[\frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} \sqrt{2 - \pi + \frac{\pi^2}{4}}\right] \approx [0{,}785, 0{,}855]$. c) Ecuația tangentei este $y = \frac{\pi}{4}$. Graficul funcției f pe I este o curbă convexă, simetrică față de Oy, tangentă dreptelor $x = 1$ și $x = -1$, care are un minim în punctul de abscisă $x = 0$.

Etapa finală

1. a) Se notează cu $M(x_0, y_0)$ un punct variabil pe hiperbolă. Se deduce $P\left(-a, -\frac{2ay_0}{x_0 - a}\right)$, $Q\left(a, \frac{2ay_0}{x_0 + a}\right)$ și $R\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$. Tangenta în M la hiperbolă intersectează axa Ox în același punct, deci MR este tangentă hiperbolei. Proprietatea este un caz particular al teoremei lui Pascal referitoare la un hexagon

înscris într-o conică. Dacă vîrfurile coincid două cîte două, hexagonul devine triunghi și tangentele la conică duse în vîrfurile triunghiului intersectează laturile opuse în trei puncte coliniare. Este cazul triunghiului MAA'. b) O înălțime are ecuația $x = x_0$ și $H\left(x_0, -\frac{a^2}{b^2}y_0\right)$, iar punctul diferit de M, unde dreapta $x = x_0$ intersectează hiperbola este $(x_0, -y_0)$. Trebuie ca $a = b$, deci hiperbola să fie echilateră. c) Deoarece x_0, y_0 verifică ecuația dată, se găsește locul geometric, și anume hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^4}y^2 - 1 = 0$. Această hiperbolă coincide cu hiperbola dată pentru $a = b$. d) Același loc geometric ca la punctul c. Semnificația geometrică constă în proprietatea simetricului ortocentrului H față de AA' de a aparține cercului circumscris triunghiului MAA' și în simetria hiperbolei față de axa AA'.

2. a) — b) Notînd cu r lungimea razei cilindrului superior se găsește $r = \sqrt{5 - x^2}$. Aria vasului (fără a lua în considerație aria cercului superior) este egală cu $\pi(3x^2 + 12x - 5 + 12\sqrt{5 - x^2})$. Notăm $f(x) = 3x^2 + 12x - 5 + 12\sqrt{5 - x^2}$, definită pe intervalul $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$, cu valori reale. Obținem $f'(x) = 6\left(x + 2 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}}\right)$. Egalînd cu zero derivata funcției $f(x)$ se obține ecuația $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 20x - 20 = 0$ sau $(x^2 - x - 2)(x^2 + 5x + 10) = 0$. Această ecuație are rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ și alte două rădăcini complexe conjugate. Deci convine numai rădăcina $x_1 = 2$. Pentru $x \in [0, 2)$ avem $f'(x) > 0$ și pentru $x \in (2, \sqrt{5}]$ există inegalitatea $f'(x) < 0$, deci $x = 2$ este un punct de maxim pentru $f(x)$. Rezultă $r = 1$. c) Deoarece $x^2 \geqslant r^2$ și $x^2 + r^2 = 5$ se deduce $x \in \left[\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right]$.

3. a) $b * a = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = a * b$. b) $(1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$. c) Se obține condiția

$$(a^2 - c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + b^4 - a^2b^2c^2) = 0.$$

Anul 1962

Etapa regională

1. a) $\sqrt{1 + a^2x^2} > |ax|$, deci domeniul de definiție este $\mathbf{R}$. Derivata $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + a^2x^2}}$ deci $f'(x) \cdot \sqrt{1 + a^2x^2} = f(x), x \in \mathbf{R}$. Se mai derivează o dată ultima identitate și obținem

$$f''\sqrt{1 + a^2x^2} + f'(x)\frac{a^2x}{\sqrt{1 + a^2x^2}} = f'(x),\ x \in \mathbf{R} \text{ etc.}$$

b) Pentru $a \to 0$ obținem $f(x) = e^x$ și identitățile se mențin.

2. a) Ecuația dreptei mobile ce trece prin B este $y = \lambda x + b$. Avem

$$D\left(\frac{-2\lambda ba^2}{b^2 + a^2\lambda^2}, \frac{-\lambda^2a^2b + b^3}{b^2 + a^2\lambda^2}\right),\ E\left(-\frac{b}{\lambda}, 0\right).$$

Se elimină parametrul λ din ecuația tangentei în punctul D și ecuația $x = -\frac{b}{\lambda}$;

se obține pentru $x \neq \pm a$ dreapta de ecuație $y = -b$. Pentru $x = a$ se obține punctul A iar pentru $x = -a$ se obține punctul A'. b) Fie $M(\alpha, \beta)$ și $P(k, -b)$. Ecuațiile tangentelor duse din M la elipsă sînt $y - \beta = m_i(x - \alpha)$, $i = 1,2$, unde m_i sînt rădăcinile ecuației (1) $m^2(a^2 - \alpha^2) + 2\alpha\beta m + b^2 - \beta^2 = 0$. Avem

$$R\left(\frac{-b - \beta + m_1\alpha}{m_1}, -b\right) \text{ și } Q\left(\frac{-b - \beta + m_2\alpha}{m_2}, -b\right).$$

Din condiția ca P să fie mijlocul lui $[QR]$ obținem $\frac{-b - \beta}{2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + \alpha = k$. Se folosesc relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației (1) și obținem $\alpha\beta = k(b + \beta)$. Faptul că ecuația (1) admite rădăcini reale ne este asigurat de condiția ca punctul M să fie exterior elipsei.

Etapa finală

1. a) Tangenta în $M(x_0, y_0)$ are ecuația $3xx_0 + yy_0 - 3a^2 = 0$ și condiția $3x_0^2 + y_0^2 - 3a^2 = 0$. Avem $Q\left(a, \frac{3a(a - x_0)}{y_0}\right)$. Ecuația tangentei AM este $(x - a)y_0 - (x_0 - a)y = 0$ și dreapta $QI : y = \frac{3a(a - x_0)}{y_0}$. Locul geometric este parabola $y^2 = -3a(x - a)$. b) Ecuația tangentei QN este $y - \frac{a - 2x_0}{y_0} x + \frac{a(x_0 - 2a)}{y_0} = 0$. Atunci $N\left(-\frac{a(a - 2x_0)}{2a - x_0}, \frac{ay_0}{2a - x_0}\right)$ și condiția de coliniaritate a punctelor B, N, M se verifică. c) Locul geometric este hiperbola echilateră $x^2 - y^2 = a^2$.

2. Se calculează raza conului egală cu $g \sin x$, raza sferei egală cu $g \operatorname{tg} x$, volumul conului egal cu $\frac{\pi}{3} g^3 \sin^2 x \cos x$, volumul calotei determinate pe sfera tangentă conului de cercul de bază al conului egal cu $\frac{\pi}{3} g^3(\sin x + 2)(1 - \sin x)^2 \sin^3 x / \cos^3 x$, deci

$$f(x) = \frac{3v(x)}{\pi g^3} = \frac{\sin^2 x(1 - \sin x)}{\cos x\,(1 + \sin x)}.$$

Făcînd substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ se obține $f(x) = h(t) = \frac{4t^2(1 - t)}{(1 + t^2)(1 + t)^3}$, unde $t \in (0, 1)$. Se calculează

$$h'(t) = 8t(t^4 - 2t^3 - 2t + 1)/(1 + t^2)^2(1 + t)^4.$$

Dar $t^4 - 2t^3 - 2t + 1 = (t^2 - t(1 - \sqrt{3}) + 1)(t^2 - t(1 + \sqrt{3}) + 1)$, iar trinomul $t^2 - t(1 - \sqrt{3}) + 1$ are rădăcini complexe conjugate și trinomul $t^2 - t(1 + \sqrt{3}) + 1$ are rădăcinile $t_1 = \left(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}\right)/2$, $t_2 = \left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}\right)/2 > 1$ deoarece $\sqrt{2\sqrt{3}} \simeq 1{,}86$ deci $h(t)$ are un maxim pentru $t = t_1$, deci $f(x)$ are un maxim pentru $x = 2 \operatorname{arctg}\left(\left(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}\right)/2\right) \simeq 82°$. De asemenea, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$.

Anul 1963

Etapa regională

1. a) Din enunțul problemei rezultă $n \neq 0$. Avem $d(0, D)d(0, A) = |n(m+n)|/(1+m^2) = 1$. Dacă $n(m+n) < 0$ condiția obținută se scrie sub forma $m^2 + mn + n^2 = -1$, însă $m^2 + mn + n^2 \geqslant 0$ pentru orice $m, n \in \mathbf{R}$. Deci condiția ca produsul distanțelor să fie egal cu 1 este echivalentă cu $n(m+n) = 1 + m^2$. În acest caz raportul $(m^2+1)/(m+n) = n$. b) Coordonatele proiecției punctului A pe D se obțin rezolvînd sistemul format din ecuațiile $y = mx + n$ și $y = -\frac{1}{m}(x-1)$, obținîndu-se $x_0 = (1 - mn)/(1+m^2)$, $y_0 = (m+n)/(1+m^2)$, iar coordonatele (x, y) ale lui M sînt date de relațiile: $x + 1 = 2x_0$; $y = 2y_0$. Ținînd seama de condiția $n(m+n) = m^2 + 1$, obținem $x_0 = (1-mn)/(1+m^2) = (n^2 - m^2)/n(m+n) = 1 - \frac{m}{n}$ și $y_0 = (m+n)/n(m+n) = \frac{1}{n}$. Se deduce că $n = \frac{1}{y_0}$ și $m = (1 - x_0)/y_0$, care înlocuite în relația dintre m și n ne conduce la $x_0^2 + y_0^2 - x_0 - 1 = 0$. Substituind acum valorile lui x_0 și y_0 în funcție de x și y obținem ecuația locului geometric al punctului M : $x^2 + y^2 - 5 = 0$, adică un cerc cu centrul în originea axelor de coordonate, de rază egală cu $\sqrt{5}$. Condiția $|n(m+n)| = n(m+n)$ se putea deduce și pe cale geometrică, această condiție exprimînd faptul că $D \cap [OA] = \emptyset$, deoarece dacă dreapta D trece între O și A, atunci produsul distanțelor acestor puncte la D este subunitar.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Funcția f este derivabilă pe mulțimea $|x| > 2$ iar $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2-4} - 2x - 4}{\sqrt{x^2-4}\,(2+\sqrt{x^2-4})^2}$. Avem $\lim\limits_{x\nearrow-2} f'(x) = +1$ și $\lim\limits_{x\searrow2} f'(x) = -\infty$. Notăm $A(-2, 0)$ și $B(2, 2)$. Ecuația semitangentei în A este $y = x - 2$, $x \leqslant -2$ iar în B este $x = 2$, $y \geqslant 2$.

3. Dacă $a = 0$ se observă că $f = g$; rezultă și $f'(x) = g'(x)$. Dacă $a \neq 0$ atunci $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{a^2+1}{a}\right\}$ și $f'(x) = g'(x) = \dfrac{1}{1+(x-a)^2}$. Dacă $x < \frac{a^2+1}{a}$ atunci $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{a}$. Dacă $x > \frac{a^2+1}{a}$ atunci $f(x) = g(x) + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{a}$. Derivatele sînt egale deoarece funcțiile f și g diferă pe intervalele menționate printr-o constantă.

Etapa finală

1. a) Domeniul de definiție este $x \in \mathbf{R}$. Calculăm $y' = \dfrac{x(m-2n) + 2m - n}{2\sqrt{(x^2+x+1)^3}}$. Dacă $m \neq 2n$ atunci y' nu are același semn pe $\mathbf{R}$, deci y nu este strict monotonă pe $\mathbf{R}$. Dacă $m = 2n$ și $n < 0$, atunci $y' = \dfrac{3n}{\sqrt{(x^2+x+1)^2}} > 0$ pentru orice x din $\mathbf{R}$, deci y este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. Dacă $m = 2n$ și $n < 0$, atunci y este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$. b) Dacă $m < 2n$ atunci funcția admite un maxim. În

acest caz $f_{max} = f\left(\frac{2m-n}{2n-m}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{m^2+n^2-mn} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; rezultă m^2+n^2- $-mn = 1$, deci $n = \frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-3m^2}$. În ipoteza $m < 2n$ rezultă că ecuația explicită a locului geometric este $n = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{4-3m^2}$. *Obs.* Dacă $m > 2n$ atunci funcția admite un minim și dacă am cere ca acest minim să fie $\frac{2}{\sqrt{3}}$, atunci ecuația explicită a locului geometric este $n = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{4-3m^2}$. c) Ne ocupăm de graficul funcției $n = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{4-3m^2}$, $|m| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$. Funcția n este derivabilă pe $|m| < \frac{2}{\sqrt{3}}$ cu derivata $n' = \frac{-3m+\sqrt{4-3m^2}}{2\sqrt{4-3m^2}}$ care se anulează pentru $n = \frac{1}{\sqrt{3}} \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ și derivata de ordinul al doilea este $n'' = \frac{-6}{(4-3m^2)\sqrt{4-3m^2}} < 0$, pentru orice $m \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Tabloul de variație:

m	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$
n'	$+\infty$	$+ + +$		$+$		$+ +$	$+$	$+$	0	$- -$	$-\infty$
n''	$-$	$-$	$-$		$-$		$-$	$-$		$-$	$-$
n	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$		0		$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Graficul funcției este semielipsa situată deasupra dreptei $n = 2m$. Elipsa situată sub dreapta $n = 2m$ corespunde cazului cînd f admite un minim egal cu $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Dacă s-ar fi cerut locul geometric al punctelor $M(m, n)$ astfel încît funcția să admită un extrem egal cu $\frac{2}{\sqrt{3}}$, atunci obținem întreaga elipsă.

2. a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} - 1 = 0$, $0 < \alpha \leqslant a$. Coordonatele punctului P sînt $x_p = \sqrt{a^2-\alpha^2}$ și $y_p = \frac{\alpha^2}{a}$. Se elimină α din ultimele două egalități și obținem $y_p = -\frac{1}{a}x_p^2 + a$, $x_p \in [0, a]$, o porțiune de parabolă situată în cadranul I. Ecuația tangentei la elipsă în P este $\sqrt{a^2-\alpha^2}\,x + ay - a^2 = 0$. Ecuația perpendicularei din O pe tangentă este $y = \frac{a}{\sqrt{a^2-\alpha^2}}$. Se elimină $\sqrt{a^2-\alpha^2}$ din

ultimele două ecuații și obținem $x^2 + y^2 - ay = 0$, ecuația unui cerc cu centrul în $O_1\left(0, \frac{a}{2}\right)$ și rază $\frac{a}{2}$. Dacă $\alpha = a$ atunci elipsa devine un cerc cu centrul în origine și raza a, iar punctul C are coordonatele $(0, a)$. Deci locul geometric este semicercul din cadranul I cu raza $\frac{a}{2}$ și centrul de coordonate $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, fără punctul O. b) Tangenta în P trece prin punctul fix $K(0, a)$, deci locul geometric este semicercul deschis în O și închis în P care face parte din cercul cu diametrul $[OK]$.

Anul 1964

Etapa regională

1. Funcția se mai poate scrie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b^2 - a^2}, & |x| \geqslant a, \\ \dfrac{1}{a^2 + b^2 - 2x^2}, & x \in [-a, -b] \cup [b, a] \setminus \left\{\pm\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right\}, \\ \dfrac{1}{a^2 - b^2}, & |x| \leqslant b. \end{cases}$$

a) Domeniul de definiție este $\mathbf{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right\}$. Se observă că $-a < -\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < -b$ și $b < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < a$. b) Continuă pe domeniul de definiție. Notăm $x_1 = -\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. c) $f_s(x_1) = -\infty$, $f_d(x_1) = +\infty$, $f_s(x_2) = +\infty$ și $f_d(x_2) = -\infty$. d) Avem $\frac{a+b}{2} \in (b, a)$ iar $\frac{a-b}{2} \in (b, a)$ dacă $a > 3b$ și $\frac{a-b}{2} \in (0, b]$ dacă $b < a \leqslant 3b$. Dacă $a > 3b$ atunci $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a-b}{2}\right) = \left(\frac{4}{a^2 - b^2}\right)^3$ Dacă $a \leqslant 3b$ atunci $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a-b}{2}\right) = 0$.

2. a) $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$. Presupunem că $a > 0$. Pentru ca problema să prezinte sens trebuie ca $AP > OP$ sau $\beta < \frac{a}{2}$. Patrulaterul AT_2PT_1 este pătrat, deci $AT_1^2 = PT_1^2$, adică (1) $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta a - a^2 = 0$. Graficul cercului $\mathcal{L}$ se află sub graficul dreptei $y = \frac{a}{2}$. b) Axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}$ și $\mathcal{L}$ este (1) $2\alpha x + 2(\beta + a)y - a^2 = 0$. Punem condiția ca axa radicală să treacă prin punctul $A(0, a)$, adică $2(\beta + a)a - a^2 = 0$ sau $\beta = -\frac{a}{2}$. Se construiește dreapta de ecuație $y = -\frac{a}{2}$ ce intersectează cercul $\mathcal{L}$ în două puncte M_1 și M_2.

Se construiesc cercurile care au centrele în punctele M_1 și M_2 și trec prin O. c) Fie O_1 simetricul punctului O față de dreapta AP; rezultă că $OA = AO_1$, deci locul geometric este cercul $\mathcal{C}(A, OA)$. *Observație.* Dacă $a = 0$ problema nu are sens. Dacă $a < 0$ se reia același raționament.

Etapa finală

1. a) $\lambda(x_0) = \frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right] = \frac{1}{2}[f'_s(x_0) + f'_d(x_0)]$. Dacă $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ atunci $\lambda(x_0) = f'(x_0)$. b) Dacă f este crescătoare pe $[a, b]$, atunci (1) $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \geqslant 0$. Dacă $\lambda(x_0)$ există, trecînd la limită în inegalitatea (1) obținem $\lambda(x_0) \geqslant 0$. *Observație.* Dacă o funcție admite derivată simetrică în orice punct din (a, b) nu rezultă că funcția este strict crescătoare. c) $f'_s(0) = 1$, $f'_d(0) = 3$, $\lambda(0) = 2$. $g'_s(0)$, $g'_d(0)$ nu există și $\lambda(0) = 0$.

2. a) Se observă că funcția f este derivabilă pe mulțimea $(-\infty, -1) \cup \cup [1, +\infty)$ și

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Din faptul că f este continuă la stînga lui -1 și la dreapta lui 1 și din faptul că există $\lim\limits_{x\nearrow -1} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -1} f'(x) = 0$ rezultă că $f'(x) = 0$, $x \in [1, +\infty)$, deci f este constantă pe mulțimea $[1, +\infty)$ și $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $x \in [1, +\infty)$. b) Tabloul de variație al funcției este:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'	$-$	$-\infty$			0	0	0
f	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	const	$\frac{\pi}{2}$

Anul 1965

Etapa regională

1. a) Domeniul de definiție se determină din condițiile

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2 + 4 > 0 \\ \dfrac{|2-x^2|}{\sqrt{x^4-3x^2+4}} \leqslant 1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \left(x^2 - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0 \\ \dfrac{|2-x^2|}{\sqrt{x^4-3x^2+4}} \leqslant \dfrac{|2-x^2|}{\sqrt{(x^2-2)^2}} = 1, \text{ deci } x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

b) Funcția arcsin nu este derivabilă în -1 și 1. Pentru a găsi mulțimea de derivabilitate rezolvăm ecuația $\frac{|2-x^2|}{\sqrt{x^4-3x^2+4}} = 1$ cu soluția $x = 0$. Derivata

$$f'(x) = \frac{-x^2(x^2+2)}{|x|(x^4-3x^2+4)}, \ (\forall)x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

c) Tabloul de variație în vecinătatea originii este:

x		0	
f'	$+\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$
f	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$

Punctul $O\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este punct unghiular pentru graficul funcției.

2. a) Se consideră un reper ortogonal cu originea în centrul O al cercului $\mathcal{C}$. Față de acest reper avem: $A(r, 0)$, $B(-r, 0)$, $P(r\cos t, r\sin t)$, $t\in[0, 2\pi)$ și ecuația dreptei duse din N, mijlocul lui $[OP]$, perpendiculară pe BQ este $2(1+\cos t)x + (2\sin t)y - r - r\cos t = 0$. Punctul fix al dreptei este $R\left(\frac{r}{2}, 0\right)$. Soluție sintetică: Se duce $OK \perp BP$ și $NM \perp BQ$. Se observă că $MN \parallel PA$; rezultă că MN trece prin mijlocul segmentului $[OA]$. b) Obținem $Q\left(r, 2r\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)$ și ecuația cercurilor care trec prin O, P, Q este $x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y = 0$, unde centrul are coordonatele (α, β) și mai punem condiția ca cercurile să treacă prin P și Q, de unde obținem condițiile: $r - 2\alpha\cos t - 2\beta\sin t = 0$ și $r - 2\alpha + 4r\,\mathrm{tg}^2\frac{t}{2} - 4\beta\,\mathrm{tg}\frac{t}{2} = 0$. Exprimînd funcțiile trigonometrice în funcție de $\mathrm{tg}\frac{t}{2}$ și scăzînd ecuațiile obținute se deduce ecuația: $\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}(3r - 2\alpha) = 0$. Dacă $\mathrm{tg}\frac{t}{2} \neq 0$ $\left(\text{adică } \frac{t}{2} \neq 0 \text{ sau } t \neq 0\right)$, obținem $\alpha = \frac{3r}{2}$. Dacă $t = 0$ atunci $P = Q = A$ și centrele cercurilor care trec prin O și A se găsesc pe mediatoarea segmentului $[OA]$. Deci locul geometric căutat este format din dreapta de ecuație $x = \frac{3r}{2}$ din care s-a scos punctul de coordonate $\left(\frac{3r}{2}, 0\right)$ și din mediatoarea segmentului $[OA]$ $\left(\text{de ecuație } x = \frac{r}{2}\right)$. c) Notăm $BM = \lambda$; se obține $BQ = \frac{2r}{\cos\frac{t}{2}}$, $BP = 2r\cos\frac{t}{2}$, $M\left(\lambda\cos\frac{t}{2} - r, \lambda\sin\frac{t}{2}\right)$, iar din condiția dată se deduce valoarea lui $\lambda = \frac{(m+n)2r\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{m\cos^2\frac{t}{2} + n}$. Parametrul t se elimină scriind că $\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2} = 1$. Simplificînd cu $x + r \neq 0$ se obține ecuația elipsei: $\frac{x^2}{n} + \frac{y^2}{m+n} - \frac{r^2}{n} = 0$.

Etapa finală

1. a) Pentru a afla coordonatele punctelor de intersecție ale celor două curbe se rezolvă sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=x^3 \end{cases}$ și se obțin soluțiile reale $B\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}$, $A\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-1 \end{cases}$. Punctele M și N au coordonatele $(x, \sqrt{2-x^2})$, respectiv (x, y^3). Lungimea $MN = |\sqrt{2-x^2}-x^3| = \sqrt{2-x^2}-x^3$, $x\in[-1, 1]$. Studiem variația funcției $f(x)=\sqrt{2-x^2}-x^3$, $x\in[-1, 1]$. Derivata funcției f este $f'=-\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}(1+3x\sqrt{2-x^2})$. Rădăcinile ecuației $f'(x)=0$ situate în intervalul $[-1, 1]$ sînt $x_1=0$ și $x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Tabloul de variație al funcției f este:

x	-1				$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$				0				1
f'	-2	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	-4
f	2		$\searrow$		$1{,}4073$			$\nearrow$	$\sqrt{2}$		$\searrow$		0

b) Calculăm $f(x_1)-f(x_2)\approx 0{,}007$. Problema se referă la punctele de extrem situate în intervalul $(-1, 1)$. c) Avem $g(x)=\sigma[AA'PMNQ]=\int_0^x(\sqrt{2-t^2}-t^3)\,dt$, $|x|\leqslant 1$, derivata $g'(x)=\sqrt{2-x^2}-x^3\geqslant 0$ pentru orice $x\in[-1, 1]$. Tabloul de variație al funcției g este:

x	-1							1
$g'(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$	0				$\nearrow$			$\frac{\pi}{2}+1$

d) $g_{max}(x)=g(1)=\frac{\pi}{2}+1$ e) $f_1:[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\to\mathbf{R}$, $f_1(x)=\sqrt{2-x^2}-x^3$. Tabloul de variație este:

x	$-\sqrt{2}$		$-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		-1		$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		0		1		$\sqrt{2}$
f_1'	$+\infty$	$+++$	0	$---$	-2	$--$	0	$+++$	0	$---$	-4	$-$	$-\infty$
f_1	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\approx 2{,}947$	$\searrow$	2	$\searrow$	$1{,}4073$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$

2. a) Patrulaterul $AMBN$ este inscriptibil, deci punctul P se află pe mediatoarea segmentului $[AB]$. Luăm ca axă $X'X$ pe AB și axa $Y'Y$ mediatoarea segmentului $[AB]$. Față de acest reper avem: $A(a,0)$, $B(-a,0)$, $AM: y=\lambda(x-a)$, $AN: y=-\frac{1}{\lambda}(x-a)$, $BM: y=\mu(x+a)$, $BN: y=-\frac{1}{\mu}(x+a)$ și $M\left(a\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}, \frac{2a\lambda\mu}{\lambda-\mu}\right)$, $N\left(-a\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}, \frac{2a}{\lambda-\mu}\right)$. Din $x_P=\frac{x_M+x_N}{2}$ rezultă că $x_P=0$,

adică locul geometric este axa $Y'Y$. b) Se elimină parametrii, λ și μ din ecuațiile (D) $\frac{2a}{\lambda-\mu}=c$ (const), $x=\frac{a(\lambda+\mu)}{\lambda-\mu}$ și $y=\frac{2a\lambda\mu}{\lambda-\mu}$; obținem parabola $y=\frac{x^2-a^2}{c}$. c) $x^2-y^2-a^2=0$. d) Două cercuri. e) Patrulaterul $AMBN$ fiind inscriptibil punctul P se găsește pe mediatoarea segmentului $[AB]$.

Anul 1966

Etapa regională

1. a) Fie $A(a,0)$, $B(0,b)$ și ecuația dreptei D : $y=mx-n$. Ecuațiile perpendicularelor din A', O' și B' sînt $y=\frac{am+n}{m^2+1}$, $x=\frac{bm-mn}{m^2+1}$, respectiv $a(m^2+1)x-(m^2+1)y+nb+amn=0$. Se observă că punctul $K\left(\frac{am+n}{m^2+n}; \frac{bm-mn}{m^2+1}\right)$ se găsește pe perpendiculara dusă din B'. b) $(m^2+1)x+m(m^2+1)y-m(b+am)=0$. c) $x^2+y^2+2mnx-2ny+n^2-\frac{k^2m^2}{1+m^2}=0$.

Etapa finală

1. a) Deoarece $f_1(-x)=f_1(x)$, ne ocupăm de studiul restricției funcției f_1 la intervalul $[0,4]$. Avem $f_1'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$, $f_1''(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{4}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$ pentru $x\in(0,4)$.

Tabelul de variație este:

x	0		3		4
f_1'	$+\infty$	$+$	$+$ 0	$-$	$-\infty$
f_1''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
f_1	0	↗	$3\sqrt{3}$	↘	4

Graficul funcției f_1 este dat în fig. 25.

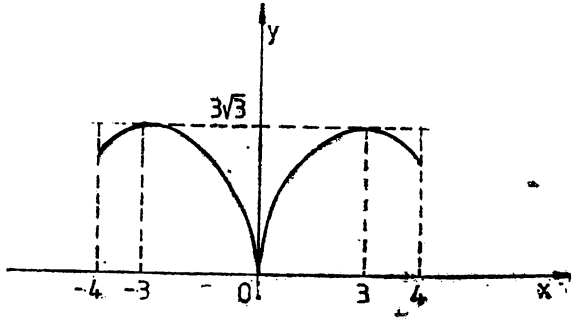


Fig. 25

Pentru funcția f_2 avem $f_2(-x) = f_2(x)$ și $f_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$, $f_2''(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{4}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$ pentru $x \in (0, 4)$. Tabelul de variație a restricției funcției f la mulțimea $[0, 4]$ este

x	0		1		4
f_2'	0	+ + +	+	+ + + + +	∞
f_2''		+ + +	+ +	+ + + + +	+
f_2	0	↗	$2-\sqrt{3}$	↗	4

Graficul funcției f_2 este dat în fig. 26.

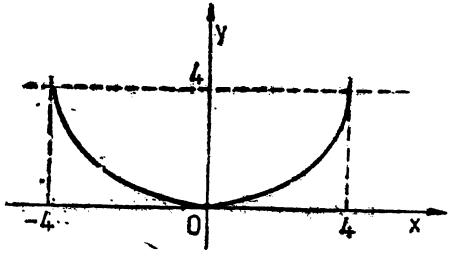


Fig. 26

Se observă că $f_3(x) = -f_1(x)$ și $f_4(x) = -f_2(x)$. Rezultă că graficele funcțiilor f_3 și f_4 sînt simetricele graficelor lui f_1, respectiv f_2 în raport cu axa Ox.
b) $M_1M_2 = 2\sqrt{4x_0 - x_0^2}$, $x_0 \in [0,4]$. Introducem funcția h: $[0,4] \to \mathbf{R}$, $h(x) = 2\sqrt{4x - x^2}$ cu derivata $h'(x) = \frac{2(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$ care se anulează în $x = 2$. Tabelul de variație al funcției h este:

x	0		2		4
h'		+ + +	0	− − −	
h	0	↗	4	↘	0

deci $M_1M_{2max} = h(2) = 4$. Deoarece $f_1'(2) = f_2'(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ rezultă că tangentele sînt paralele. c) $A = 4\int_0^4 |f_1 - f_2|\, dx = 16\pi$.

2. a) Ecuația unei paralele la dreapta (D) este $bx - ay + \lambda = 0$. Punctele de intersecție ale acestei drepte cu axele de coordonate sînt $P\left(-\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$ și $Q\left(0, \frac{\alpha}{a}\right)$. Din $MT = MP$ rezultă că (1) $x_0^2 + y_0^2 - a^2 = \left(x_0 + \frac{x}{\beta}\right)^2 + y_0^2$. Se elimină α din (1) și ecuația $bx_0 - ay_0 + \alpha = 0$ și se obține (H) $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$. La fel se

găsește că punctul N descrie hiperbola (H_1) $\frac{b^2x^2}{a^4} - \frac{y^2}{a^2} + 1 = 0$ cu un focar $F_1\left(0, \frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}\right)$. b) Se rezolvă sistemele

$$\begin{cases} x^2+y^2-2\sqrt{a^2+b^2}x=0 \\ \frac{b^2x^2}{a^4}-\frac{y^2}{a^2}+1=0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x^2+y^2-2\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}\,y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0. \end{cases}$$

Se obțin punctele de contact

$$A\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+b^2}}\right), B\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, -a\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+b^2}}\right), \text{respectiv}$$

$$A'\left(a\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \text{ și } B'\left(-a\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Se observă că punctul $P\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ verifică ecuația dreptei $bx - ay = 0$ și ecuația cercului $x^2+y^2-a^2=0$.

Anul 1967

Etapa regională

1. a) $\frac{x^3+3x^2-x-6}{x^2+5x+6} = x-2+\frac{3}{x+3} \notin \mathbf{Z}$ deoarece $x+3 > 3$, pentru orice număr natural $x \geqslant 1$. b) -4. c) Funcția g este derivabilă pe $\mathbf{R}$. d) Deoarece $x > -2$, atunci $\ln f(x) = \ln(x+2) + \ln(x+3)$ și

$$(\ln f(x))^{(n)} = (\ln(x+2))^{(n)} + (\ln(x+3))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x+2)^n} + \frac{1}{(x+3)^n}\right].$$

3. Se alege originea axelor de coordonate în centrul cercului și axa Ox paralelă cu BC. Se obține $B\left(-\frac{R\sqrt{3}}{2}, -\frac{R}{2}\right)$ și $C\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}, -\frac{R}{2}\right)$. Se notează cu α unghiul variabil format de OD cu sensul pozitiv al axei Ox. Notînd $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \lambda$, se obțin ecuațiile dreptelor (AC): $y+\frac{R}{2} = -\frac{1}{\lambda}\left(x-\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$, (CD): $y+\frac{R}{2} = \frac{\sqrt{3}+\lambda}{1-\lambda\sqrt{3}}\left(x-\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$, (BD): $y+\frac{R}{2} = \lambda\left(x+\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ și (AB): $y+\frac{R}{2} = \frac{1+\lambda\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\lambda}\left(x+\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Coordonatele punctului P sînt: $x = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}$

și $y = \frac{R}{2(1+\lambda^2)}(-\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{3} - 1)$ și ale lui P': $x = R\sqrt{3}\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$; $y = \frac{R(1+2\lambda\sqrt{3}+\lambda^2)}{1+\lambda^2}$. Ecuația dreptei PP' este $\sqrt{3}(\lambda^2-1)(y+2R) + x(3\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{3} + 3) = 0$, care trece prin punctul fix $(0, -2R)$. De asemenea, $PP'^2 = 3R^2(1 + \sqrt{3}\lambda/(\lambda^2+1))$. Deoarece $\alpha \in (-30°, 150°)$, rezultă că $\lambda \in (-\text{tg}\,15°, \text{tg}\,75°)$. Pe acest interval PP' crește, avînd un maximum pentru $\alpha = 90°$, deci $\lambda = 1$, apoi scade. Minimele nu sînt atinse (patrulaterul este degenerat). Deoarece $m(\widehat{BPC}) = 90°$ și $m(\widehat{BP'C}) = 30°$, rezultă că locurile geometrice ale punctelor P și P' sînt două arce de cerc, capabile de unghiurile respective, care se sprijină pe coarda fixă $[BC]$.

Etapa finală

1. a) Ecuația $x^3 - 3x^2 + a = 0$ este echivalentă cu ecuația $x^3 - 3x^2 = -a$. Definim funcțiile $f_1: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = x^3 - 3x^2$ și $f_2: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = -a$. Tabelul de variație al funcției f_1 este următorul:

x	$-\infty$		0		1		2		3		∞
f_1'	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f_1''	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

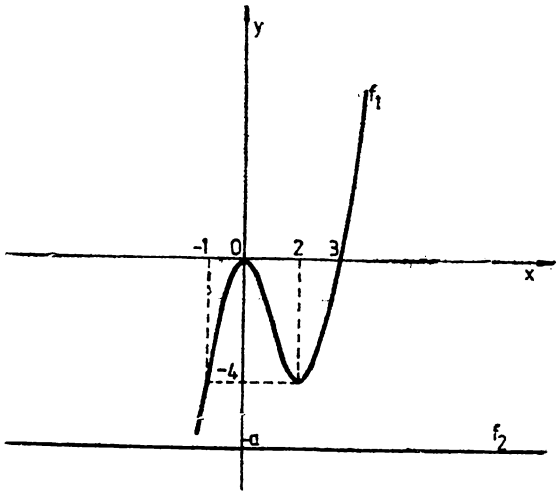


Fig. 27

Graficele funcțiilor f_1 și f_2 sînt reprezentate în fig. 27. De aici se deduce discuția rădăcinilor în funcție de valorile pe care le ia parametrul real a:

1) $a < 0$; o soluție reală $x_1 > 3$.
2) $a = 0$; $x_1 = x_2 = 0$ și $x_3 = 3$.
3) $0 < a < 4$; $x_1 < 0$, $0 < x_2 < 2 < x_3 < 3$.
4) $a = 4$; $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 2$.
5) $a > 4$; o singură soluție reală $x_1 < 0$.

Discuția se putea face și cu ajutorul șirului lui Rolle. b) Reprezentăm grafic mai întîi funcția $h(x)$.

1) $a < 0$. Domeniul de definiție al funcției h este $[x_1, \infty)$. Tabelul de variație este următorul:

x		3	x_1					∞
h''			$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
h'			∞	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
h			0		$\nearrow$			∞

Graficul este reprezentat în fig. 28

2) Pentru $a = 0$ domeniul de definiție este $[3, \infty)$.

3) Pentru $a \in (0, 4)$ domeniul de definiție al funcției h este $[x_1, x_2] \cup [x_3, \infty)$.

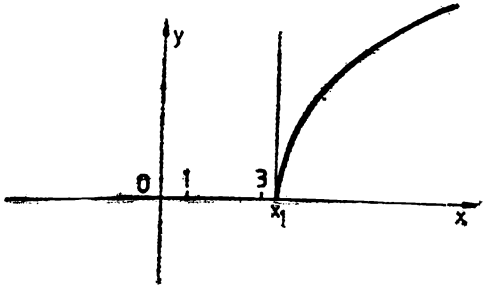


Fig. 28

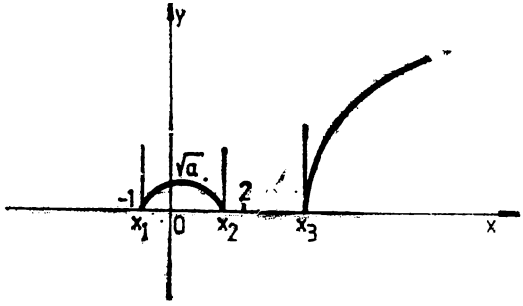


Fig. 29

Tabelul de variație este următorul:

x	-1	x_1		0		x_2	2	x_3		3			∞
$h'(x)$		∞	$+$	0	$-$	$-\infty$		∞	$+$	$+$	$+$	$+$	
$h(x)$		0	$\nearrow$	$\sqrt{a}$	$\searrow$	0		0		$\nearrow$			∞

Graficul este reprezentat în fig. 29.

4) $a = 4$. Domeniul de definiție al funcției h este $[-1, \infty)$. Tabelul de variație ne conduce la graficul din fig. 30

x		-1		0		2				∞
$h'(x)$		∞	$+$	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$	$+$
$h(x)$		0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0		$\nearrow$		∞

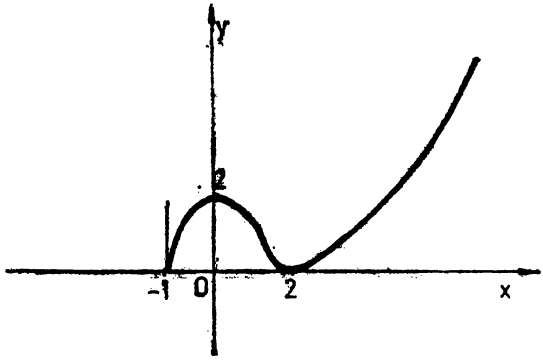


Fig. 30

5) $a > 4$. În acest caz domeniul de definiție este $[x_1, \infty)$. Tabelul de variație este prezentat în continuare, iar graficul în fig. 31.

x		x_1		-1		0		2		∞
$h'(x)$		∞	$+$	$+$	$+$	0	$-$	-0	$+$	$+$
$h(x)$		0	$\nearrow$			$\sqrt{a}$	$\searrow$	$\sqrt{a-4}$	$\nearrow$	∞

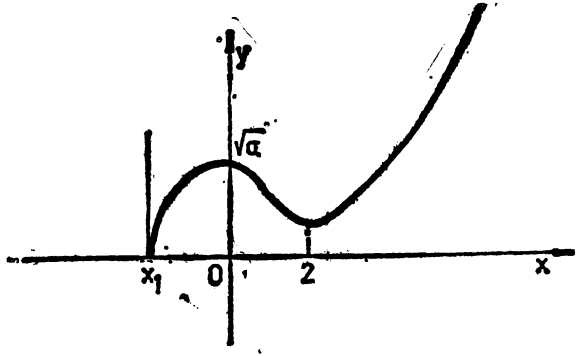


Fig. 31

Acum vom reprezenta grafic funcția g. Domeniul de definiție este $\mathbf{R}$. Derivata funcției este

$$g'(x) = \frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + a)^2}},$$

pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{x \mid x^3 - 3x^2 + a = 0\}$. Graficul admite asimptotă oblică $y = x - 1$ la ramurile spre $-\infty$ și ∞.

1) $a < 0$. Tabelul de variație este următorul:

x	$-\infty$		0		2		x_1		∞
$g'(x)$	$+$ $+$	$+$	0	$-$ $-$	2	$+$	$+\infty$ | $+\infty$	$+$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt[3]{a}$	$\searrow$	$\sqrt[3]{a-4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

iar graficul este reprezentat în fig. 32.

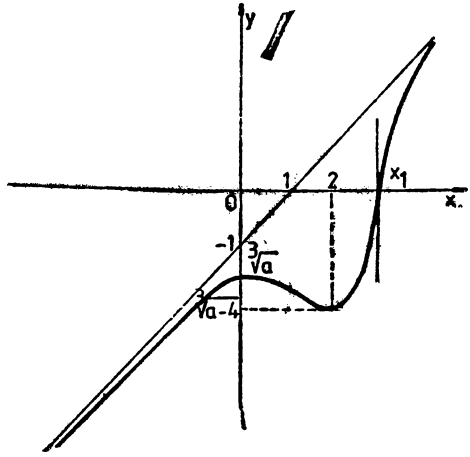


Fig. 32

2) $a = 0$. Tabelul de variație al funcției este următorul:

x	$-\infty$					0			2			3				∞
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$		$+\infty$	$-\infty$	$-$		0	$+$	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-\infty$			$\nearrow$	0		$\searrow$		$\sqrt[3]{-4}$		$\nearrow$	0			$\nearrow$	∞

Graficul este reprezentat în fig. 33.

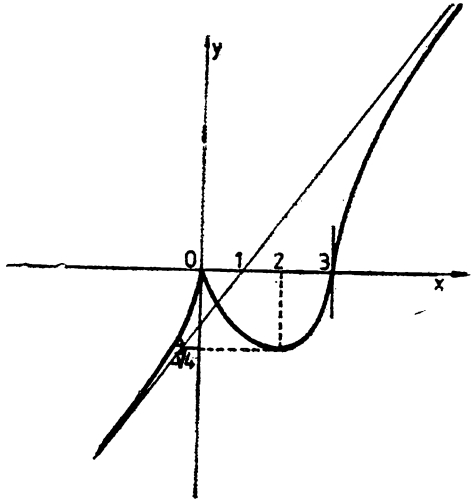


Fig. 33

3) $a \in (0, 4)$. Tabelul de variație este dat mai jos, iar graficul în fig. 34.

x	$-\infty$			x_1			0			x_2			2			x_3			∞
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+\infty$	$\infty+$	$+$ $+$
$g(x)$	$-\infty$		$\nearrow$	0		$\nearrow$	$\sqrt[3]{a}$			$\searrow$	0		$\searrow$	$\sqrt[3]{a-4}$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

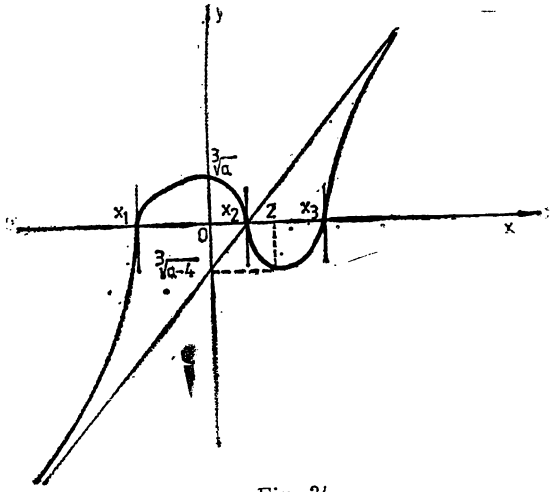


Fig. 34

4) $a = 4$. Tabelul de variație este următorul:

x	$-\infty$		-1		0		2		∞
$g'(x)$	$+ + +$	$+\infty$	∞ $+$	$+$	0	$- - - -$	$-\infty$	∞ $+$	$+ +$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Graficul funcției este dat în fig. 35.

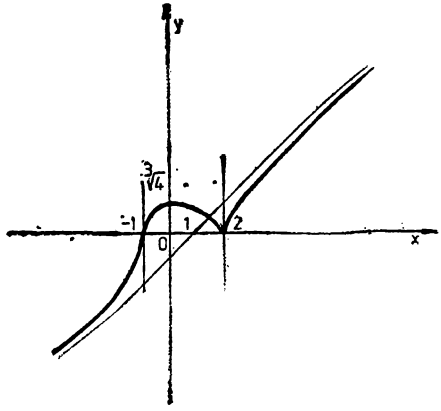


Fig. 35

5) $a > 4$. Tabelul de variație al funcției este dat în continuare:

x	$-\infty$		x_1		0		2		∞
$g'(x)$	$+ +$	∞	∞ $+$	$+ +$	0	$- -$	0	$+ + +$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{a}$	$\searrow$	$\sqrt[3]{a-4}$	$\nearrow$	∞

Graficul funcției în acest caz este desenat în fig. 36.

c) Aria căutată este $\int_{-1}^{2} \sqrt{x^3 - 3x^2 + 4}\, dx = \int_{-1}^{2} (2 - x) \sqrt{x + 1}\, dx$.

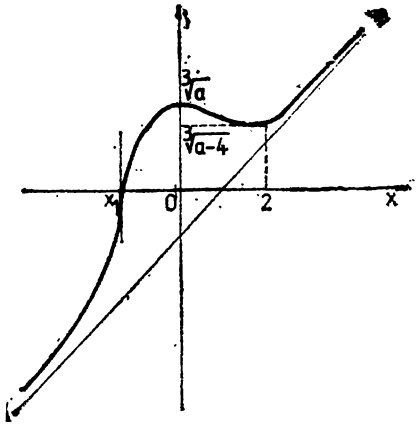


Fig. 36

Integrînd prin părți, obținem

$$\int (2-x)\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(2-x)(x+1)^{3/2} + \frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}(2-x)(x+1)\sqrt{x+1} + \frac{4}{15}(x+1)^2\sqrt{x+1} + C,$$

$$\text{deci } \int_{-1}^{2} \sqrt{x^3-3x^2+4}\,dx = \frac{36\sqrt{3}}{15}.$$

2. a) Fie $L(x_0, y_0)$. Faptul că punctul L se găsește pe elipsă implică $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$. Presupunem că $x_0 \neq 0$, adică L nu aparține axei mici a elipsei. Ecuația unei drepte paralele cu OL este (1) $y = \frac{y_0}{x_0}x + \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Abcisele punctelor de intersecție ale dreptei (1) cu elipsa sînt rădăcinile ecuației

$$(a^2y_0^2 + b^2x_0^2)x^2 + 2a^2y_0x_0\lambda x + a^2x_0^2(\lambda^2 - b^2) = 0$$

$$\text{sau } b^2x^2 + 2y_0x_0\lambda x + x_0^2(\lambda_0^2 - b^2) = 0.$$

Mijlocul coardei $[CD]$ are coordonatele $x = -\frac{(y_0x_0\lambda)}{b^2}$ și $y = \frac{\lambda(b^2 - y_0^2)}{b^2}$. Din ultimele două relații se elimină parametrul λ și se obține $y = -\frac{b^2x_0x}{a^2y_0}$, adică ecuația unei drepte care trece prin origine, deci prin centrul elipsei. b) Avem $C\left(\frac{a}{b}y_0, -\frac{b}{a}x_0\right)$, $D\left(-\frac{a}{b}y_0, \frac{b}{a}x_0\right)$. Coordonatele mijlocului segmentului $[LC]$ sînt $x = \frac{bx_0 + ay_0}{2b}$ și $y = \frac{-bx_0 + ay_0}{2a}$. Din aceste două egalități și din $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$ se elimină x_0 și y_0 și se obține ecuația locului geometric, adică $2b^2x^2 + 2a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. La fel se procedează și cu mijlocul segmentului $[LD]$ și se obține același loc geometric.

3. Restricția funcției f la intervalul $(1, 2]$ este $f(x) = \frac{x\ln x}{(m+1)x - 1}$. Se observă că $\frac{1}{m+1} \notin [1, 2]$ pentru $m > 0$ iar $f'(x)| = \frac{(m+1)x - \ln x - 1}{[(m+1)x-1]^2}$. Studiem semnul lui $E(x) = (m+1)x - \ln x - 1$, $x \in [1, 2]$. Derivata $E'(x) = (m+1) - \frac{1}{x} \neq 0$, deci $E(x) > 0$, $x \in [1, 2]$. Rezultă $f|_{[1,2]}$ este strict crescătoare. Funcția $f|_{[1,2]} : [1, 2) \to \left[0, \frac{2\ln 2}{2m+1}\right]$ este inversabilă.

Anul 1968

Etapa județeană

1. a) (*C*) $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y - \alpha^2 = 0$, $\alpha > 0$; b) Ecuația dreptei d este $y = m(x - \alpha)$, $m = \text{const}$. Se elimină α din ecuația cercului și a dreptei d și se obține $y[(m+1)^2y - 2m^2x] = 0$ cu $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Discuție. Pentru $m = 0$ locul

geometric este semidreapta $[OX$. Pentru $m = -1$ locul geometric este semidreapta $[OY$. Pentru $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$ locul geometric este o semidreaptă ce trece prin origine, situată în cadranul I inclusiv originea, de ecuație $y = \frac{2m^2}{(m+1)^2} x$, $x \geqslant 0$; c) Locul geometric al punctelor care se bucură de proprietatea că se pot duce tangente perpendiculare la $\mathcal{C}$ este un cerc concentric cu $\mathcal{C}$ și rază $\alpha\sqrt{2}$. Se elimină α din ecuațiile $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y = 0$ și $x + y - \alpha = 0$; obținem $y = (-2 \pm \sqrt{3})x$. Ținînd cont de poziția dreptei MN obținem $y = (-2 - \sqrt{3})x$, $x \leqslant 0$ sau $y = (-2 + \sqrt{3})x$, cu $x \geqslant 0$.

2. a) Domeniul de existență al funcției y_1 este $x \geqslant a + \ln|\cos b|$ dacă $b \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ și $x \in \mathbf{R}$ dacă $b = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Domeniul de existență al funcției y_2 este $x \geqslant a + \ln|\sin b|$ dacă $b \neq k\pi$ și $x \in \mathbf{R}$ dacă $b = k\pi$. Presupunem că $b \in \mathbf{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}_{k \in \mathbf{Z}}$. Pentru ca dreapta de ecuație $y = d$ să intersecteze cele două curbe este suficient ca $d \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculăm

$$y_1'(x) = \frac{e^{a-x}\cos b}{\sqrt{1 - e^{2(a-x)}\cos^2 b}} = \frac{\cos y_1(x)}{\sin y_1(x)}, \; x \in (a + \ln|\cos b|, +\infty) \text{ și}$$

$$y_2'(x) = -\frac{\sin y_2(x)}{\cos y_2(x)}, \; x \in (a + \ln|\sin b|, +\infty).$$

Fie α și β abcisele punctelor de intersecție ale curbelor cu dreapta pentru care avem $y_1(\alpha) = y_2(\beta) = d$. Din $y_1'(\alpha) = \frac{\cos d}{\sin d}$ și $y_2'(\beta) = -\frac{\sin d}{\cos d}$, $d \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem

$$y_1'(\alpha) y_2'(\beta) = -1.$$

b) Din ipoteza $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $y_1(a) = b$ și $y_2(a) = b$, deci curbele trec prin punctul $M(a, b)$. Ecuațiile tangentelor în $M(a, b)$ la cele două curbe sînt:

$$y - b = \operatorname{ctg} b(x - a), \text{ respectiv } y - b = -\operatorname{tg} b\,(x - a).$$

Se vor mai discuta cazurile $b \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$. c) $2 \operatorname{cosec} 2b$.

3. a) Dacă $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$ și $k \geqslant 1$, rezultă $A_i = (1, \infty)$ pentru $i \neq 2$ și $A_2 = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Dacă $n = 2k+1$, $k \in \mathbf{N}$, rezultă $A_i = \mathbf{R} \setminus \{-1, +1\}$.
b) $f(x) =$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)\sqrt[n]{(x+1)(x^2+x+1)\ldots(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}}, & x \in (1, \infty),\ n \text{ par}; \\[2ex] \dfrac{1}{(x-1)\sqrt[n]{(x+1)(x^2+x+1)\ldots(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\},\ n \text{ impar}; \end{cases}$$

c) $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Etapa finală

1. a) $X = (A + B)^{-1} C$, $Y = -(A + B)^{-1} C$.

b) $X = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $Y = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Funcția F satisface condițiile teoremei lui Rolle pe intervalul $[a, b]$, deci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $F'(c) = 0$ etc.

3. Se aplică teorema lui Lagrange funcției $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - \sin^2 x$; se găsește $0 < a < 1$ și $\lim\limits_{h \to 0} a = \frac{1}{2}$.

4. a) $A(a \cos t_1, b \sin t_1)$, $B(a \cos t_2, b \sin t_2)$, $t_{1,2} \in [0, 2\pi]$.
Rezolvînd sistemul format din ecuațiile tangentelor în A și B la elipsă se obține

$$M\left(a\frac{\cos\frac{t_1+t_2}{2}}{\cos\frac{t_1-t_2}{2}},\ b\frac{\sin\frac{t_1+t_2}{2}}{\cos\frac{t_1-t_2}{2}}\right), \text{ iar}$$

$$N\left(a\cos\frac{t_1+t_2}{2}\cos\frac{t_1-t_2}{2},\ b\sin\frac{t_1+t_2}{2}\cos\frac{t_1-t_2}{2}\right).$$

Se verifică condiția de coliniaritate; b) $\sigma[AMB] = \frac{ab(k^2-1)\sqrt{k^2-1}}{k^2}$.

5. Se notează cu Δ_n determinantul sistemului. Se obține relația de recurență $\Delta_n = \Delta_{n-1} + n^2$, de unde se deduce $\Delta_n = 2 + \sum\limits_{i=2}^{n} i^2 \neq 0$, deci sistemul admite numai soluția banală. *Observație.* Sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + n x_n = -x_1, \\ 2x_1 = x_2, \\ \vdots \\ n x_1 = x_n, \end{cases}$$

de unde rezultă $x_1(2 + 2^2 + \ldots + n^2) = 0$ sau $x_1 = 0$. Deci $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Anul 1969

Etapa județeană

1. a) $E = [0, 4]$; $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{4-x}}, & \text{dacă } x \in [0, 2), \\ \sqrt{\frac{4-x}{x}}, & \text{dacă } x \in [2, 4]. \end{cases}$ b) f este continuă pe E.

c) $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(4-x)^2}\sqrt{\frac{4-x}{x}} & \text{dacă } x \in (0, 2), \\ -\frac{2}{x^2}\sqrt{\frac{x}{4-x}} & \text{dacă } x \in (2, 4). \end{cases}$

$$f'_d(0) = +\infty,\ f'_s(4) = -\infty,\ f'_s(2) = \frac{1}{2},\ f'_d(2) = -\frac{1}{2}.$$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \left[\frac{x}{4-x}\right]^{\frac{2}{2-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2}{2-x}\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}-1\right)} = e^{-1}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left[\frac{4-x}{x}\right]^{\frac{2}{x-2}} = e^{-1}$, deci

$$\lim_{x\to 2} [f(x)]^{\frac{2}{|x-2|}} = e^{-1}.$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} [f(x)]^{\frac{2}{x-2}} = e$, nu există $\lim\limits_{x\to 2} [f(x)]^{\frac{2}{x-2}}$.

2. a) $A(a, 0)$, $B\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $C\left(0, \frac{a}{2}\right)$. Ecuația tangentei în A la cercul $\mathcal{C}_1$ este $3x+y-3a=0$, iar a tangentei în B la același cerc este $2x-6y+3a=0$, drepte perpendiculare în I și atunci patrulaterul $AOCI$ este inscriptibil;
b) Tangenta în A la $\mathcal{C}_2$ are ecuația $2x-y-2a=0$. Fie m_1 și m_2 pantele celor două tangente în A, respectiv la cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$. Avem

$$m_1 = -3,\ m_2 = 2 \text{ și } \operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = -1;$$

c) Fie $M(\alpha, \beta)$ un punct variabil al cercului $\mathcal{C}_2$ și punctul diametral opus $M'\left(a-\alpha, \frac{a}{2}-\beta\right)$. Se elimină parametrii α și β din ecuațiile dreptelor $(OM): \alpha y - \beta x = 0$, $(AM'): \left(\frac{a}{2}-\beta\right)(a-x) - \alpha y = 0$ și din condiția $\alpha^2+\beta^2 - a\alpha - \frac{a}{2}\beta = 0$. Se obține $x(x-a)(x^2-ax-y^2+2ay)=0$, de unde se deduce ecuația $(\mathcal{C})\ x^2+y^2-ax+2ay=0$, cerc de centru $\left(\frac{a}{2}, -a\right)$ care trece prin O și dreptele $x=0$, $x=a$, care nu aparțin locului geometric.

3. a) Din $A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$ și $I_n = A\frac{A^*}{\det A}$ se obține $I_n = A^*\frac{(A^*)^*}{(\det A)^*}$. Atunci

$$I_n = A^{-1}\det A\,\frac{(A^*)^*}{\det A^{-1}(\det A)^n} = \frac{A^{-1}(A^*)^*}{(\det A)^{n-2}}.$$

b) Pentru $n=2$, orice matrice verifică relația $(A^*)^* = A$. Pentru $n \geqslant 3$, impar, condiția este ca $\det A = 1$. Pentru $n>3$, par, trebuie ca $\det A = 1$ sau $\det A = -1$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) $E = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup [1, +\infty)$, b) $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{4}\\ x<-\frac{1}{4}}} f(x) = -\infty$.

c) — d) $m = \frac{1}{2}$.

1. a) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Se observă că $(1-4x^2)f'(x) = 4xf'(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; derivînd de n ori această relație se obține

$$(1-4x^2)f^{(n+2)}(x) - 4x(2n+1)f^{n(n+1)}(x) - 4n^2f^{(n)}(x) = 0, \text{ und ex} \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

b) $f^{(n+2)}(0) = 4n^2f^{(n)}(0)$, $f'(0) = -2$, $f''(0) = 0$, deci $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = -2 \cdot 4^n \cdot 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots (2n-1)^2 = -2 \cdot 4^n[(2n-1)!!]^2$.

2. a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2yb - a^2 = 0$. Ecuația familiei de elipse: $(E_1) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} - 1 = 0$; tangenta în $A(a, 0)$ la cerc are panta $m_1 = \frac{a}{b}$. Tangenta în $M(x_0, x_0)$ (intersecția elipsei cu prima bisectoare) la elipsă are panta $m_2 = -\frac{\lambda^2}{a^2}$. Din $m_1m_2 = -1$ se obține $\lambda^2 = ab$ și elipsa (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ab} - 1 = 0$. b) Dreptele variabile ce trec prin centrul cercului au ecuațiile de forma (1) $y = mx + b$. Abscisa mijlocului coardelor determinate prin intersecția acestor drepte cu elipsa (E) are expresia (2) $x = -\frac{abm}{am^2 + b}$.

Eliminînd parametrul m din (1) și (2) se obține ecuația locului geometric: (3) $bx^2 + ay^2 - aby = 0$. c) Prin schimbarea de coordonate $x = x'$, $y = \frac{1}{2}(y' + b)$ ecuația (3) devine (E) : $\frac{4x'^2}{ab} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0$, care este o elipsă. Locul geometric este mulțimea punctelor elipsei (E') situate în interiorul elipsei (E).

3. $\Delta = 8(m-3)$. Dacă $m \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$ atunci sistemul este compatibil determinat cu soluția $x = \frac{m-4}{4}$, $y = -\frac{m-6}{4}$, $z = \frac{5}{4}$. Pentru $m = 3$, sistemul este compatibil nedeterminat cu soluțiile: $x = 1 - \alpha$, $y = 2 - \alpha$, $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. $$a_n = \frac{1 \cdot (2^2 + 2 + 1)}{3 \cdot (2^2 - 2 + 1)} \cdot \frac{2(3^2 + 3 + 1)}{4(3^2 - 3 + 1)} \cdots$$

$$\cdots \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} \cdot \frac{k[(k+1)^2 + (k+1) + 1]}{(k+2)[(k+1)^2 - (k+1) + 1]} \cdots \frac{n[(n+1)^2 + (n+1) + 1]}{(n+2)[(n+1)^2 - (n+1) + 1]},$$

dar $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$ și, după simplificare, avem

$$a_n = \frac{2(n^2 + 3n + 3)}{3(n+1)(n+2)}, \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

2. a) Ecuația hiperbolei (H) este $x^2 - y^2 - a^2 = 0$, cu asimptotele (1) $y=x$ și (2) $y = -x$. Fie $M(\alpha, \beta)$ punctul mobil al hiperbolei (H). Tangenta în M la hiperbolă are ecuația $\alpha x - \beta y - a^2 = 0$ și intersectează asimptotele (1) și (2), respectiv în punctele $A\left(\frac{a^2}{\alpha-\beta}, \frac{a^2}{\alpha-\beta}\right)$, $B\left(\frac{a^2}{\alpha+\beta}; -\frac{a^2}{\alpha+\beta}\right)$. Avem $S_{OAB} = a^2 = \text{const}$; b) $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$; dreptele MM_1 și MM_2 au ecuațiile, respectiv,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

și intersectează asimptota $y = x$ în punctele

$$P_i\left(\frac{\beta x_i - \alpha y_i}{\beta - \alpha + x_i - y_i}; \frac{\beta x_i - \alpha y_i}{\beta - \alpha + x_i - y_i}\right), \quad i = 1, 2.$$

$$\frac{\beta x_i - \alpha y_i}{\beta - \alpha + x_i - y_i} = \frac{(\beta + x_i)^2 - (\alpha + y_i)^2}{2(\beta - \alpha + x_i - y_i)} = \frac{\alpha + \beta + x_i + y_i}{2}, \quad i = 1, 2.$$

$$P_1P_2 = \sqrt{2\left(\frac{\alpha+\beta+x_1+y_1}{2} - \frac{\alpha+\beta+x_2+y_2}{2}\right)^2} = |x_1+y_1-x_2-y_2|\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{const.}$$

Anul 1970

Etapa județeană

1. a) $D = (-1, 1)$; pentru $x_0 \in D$, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Se va utiliza substituția $\arcsin x = y$, $x = \sin y$ și notația $\arcsin x_0 = y_0$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x_0^2}}}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{\sqrt{1-\sin^2 y_0} \cdot y - \sqrt{1-\sin^2 y} \cdot y_0}{(1-\sin^2 y)(1-\sin^2 y_0)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 y_0} \lim_{y \to y_0} \frac{y \cos y_0 - y_0 \cos y}{\sin y - \sin y_0} = \frac{1}{\cos^2 y_0}\left(1 + y_0 \frac{\sin y_0}{\cos y_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{1 - x_0^2}\left(1 + \frac{x_0 \arcsin x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}}\right).$$

b) $g'(x) = -\frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arccos x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; $g''(x) = -\frac{3x}{(1-x^2)} + \frac{(1+2x^2)\arccos x}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$.

2. $a^2 + a + \frac{1}{3}$.

3. a) Tangenta în A la cercul $\mathcal{J}$ și coarda comună celor două cercuri sînt paralele fiind perpendiculare pe linia centrelor. b) Considerăm un sistem de axe xOy astfel încît $A \in Ox$, $A(a, 0)$ și $M(\alpha, \beta)$. Atunci $N \in Oy$, $P \in Oy$ și cercul $\mathcal{J}$ are ecuația $\mathcal{J}: x^2 + y^2 + ax + \frac{a\alpha - \alpha^2 - \beta^2}{\beta} y = 0$. $N\left(0, \frac{\alpha^2 + \beta^2 - a\alpha}{\beta}\right)$, $(AM): \beta x + (a - \alpha)y - a\beta = 0$, $P\left(0, \frac{a\beta}{a - \alpha}\right)$. Locul geometric este format din cercurile (1) $x^2 + y^2 - x\left(a + \frac{k}{a}\right) + k = 0$, (2) $x^2 + y^2 - x\left(a - \frac{k}{a}\right) - k = 0$, ce trec prin A și au centrele pe dreapta OA; punctul A nu aparține locului geometric. Cercurile (1) și (2) mai trec, respectiv, prin punctele $P_1\left(\frac{k}{a}, 0\right)$, $P_2\left(-\frac{k}{a}, 0\right)$ care nu aparțin locului. Pentru $k = a^2$ cercul (2) devine cercul $\mathcal{C}$.

4. Relația dată se mai scrie: $(X - aI)^2 = -b^2 I$, de unde se deduce $\det (X - aI)^2 = -b^2$, deci $b = 0$. În continuare obținem $(X - aI)^2 = 0$, deci $a = d$ și

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, \text{ unde } a, c \in \mathbf{R}.$$

LICEE DE SPECIALITATE

1. $b_n = \sum_{k=1}^{n} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{2(n+1)}$. Obținem $b_n + 1 - b_n > 0$ și $b_n < 1$.

2. a) $M(\alpha, \beta)$, tangenta în M la cerc are ecuația $\alpha x + \beta y = a^2$; $P\left(\frac{a^2}{\alpha}, 0\right)$, $Q\left(0, \frac{a^2}{\beta}\right)$, $N(-\alpha, -\beta)$, $E(\alpha, -\beta)$, ecuația dreptei OF este $y = -\frac{\alpha\beta}{a^2 - \beta^2} x$. Ordonata punctului F este $y_F = -\beta$, de unde rezultă că E, F, N sînt coliniare, aparținînd dreptei $y = -\beta$. b) Cercul circumscris triunghiului dreptunghic OPQ are ecuația (1) $x^2 + y^2 - \frac{a^2}{\alpha} x - \frac{a^2}{\beta} y = 0$. Coarda comună celor două cercuri este axa lor radicală a cărei ecuație este $\frac{1}{\alpha} x + \frac{1}{\beta} y - 1 = 0$; $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$, $AB^2 = \alpha^2 + \beta^2 = a^2$, $AB = a$.

3. Se notează $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sistemul devine: (1), $X + YA = C$, (2), $XB + Y = D$. Din (1), $X = C - YA$ și, înlocuind în (2), $Y(I - AB) = D - CB$, unde I este matricea unitate de ordinul 2. Avem $Y = (D - CB)(I - AB)^{-1}$; se obține $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (2 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x})^{\frac{1}{\sin x - \cos x}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} [1 + (1 - \sqrt{\operatorname{tg} x})]^{\frac{1 - \sqrt{\operatorname{tg} x}}{(1 - \sqrt{\operatorname{tg} x})(\sin x - \cos x)}} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

5. $S_n=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ldots+\frac{n}{x^n}\right)=\frac{1}{x}\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^n}\right)+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\right.\right.$
$\left.\left.+\frac{1}{x^n}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}\right)+\frac{1}{x^n}\right]=\frac{1}{x}\left[\frac{x^n-1}{x^n(x-1)}+\frac{x^{n-1}-1}{x^n(x-1)}+\ldots+\frac{x^2-1}{x^n(x-1)}+\right.$
$\left.+\frac{x-1}{x^n(x-1)}\right]=\frac{1}{x^{n+1}(x-1)}\left[\frac{x(x^n-1)}{x-1}-n\right].$

6. Se pune condiția $f'(x)=0$ pentru $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Avem $f'(x)=$
$=-\frac{1+m}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=0$; se obține $m=1$.

7. a) Scăzînd din coloana a doua coloana întîi și din coloana a treia coloana a doua, elementele celor două coloane devin de forma $a_{k+1}-a_{k-1}=2r$, deci $D=0$. b) $D=0$.

Etapa finală

1. a) $f_1'(x)=-\frac{2a(a^2-x^2)}{|a^2-x^2|(a^2+x^2)},\quad x\in\mathbf{R}\setminus\{-a,\ a\}.$

$$f_2'(x)=-\frac{2ax}{|x|(a^2+x^2)},\quad x\in\mathbf{R}\setminus\{0\};$$

$$f_3'(x)=\frac{2a}{x^2+a^2},\quad x\in\mathbf{R}\setminus\{0\},\quad f_4'(x)=-\frac{2a}{x^2+a^2},\quad x\in\mathbf{R}.$$

b) Condiția ca $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)=k$, revine la $f_1'(x)+f_2'(x)+f_3'(x)+f_4'(x)=0$; $-\frac{2a}{a^2+x^2}\left(\frac{a^2-x^2}{|a^2-x^2|}+\frac{x}{|x|}\right)=0$, care este verificată pentru $x\in(-a,0)\cup(a,+\infty)$. Pentru stabilirea constantelor pe cele două intervale se consideră, de exemplu, $x=-\frac{a\sqrt{3}}{3}\in(-a,0)$ și $x=a\sqrt{3}\in(a,+\infty)$; se obține $k_1=3\pi$, $k_2=0$.

2. a) Dreapta (d) : $y=\lambda x$ intersectează elipsa (E) : $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{a^2}-1=0$ în $P\left(\frac{2a}{\sqrt{1+4\lambda^2}};\ \frac{2a\lambda}{\sqrt{1+4\lambda^2}}\right)$ și cercul $\mathcal{C}$: $x^2+y^2-2ay=0$ în $Q\left(\frac{2a}{\sqrt{1+\lambda^2}};\ \frac{2a\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$; condiția $OP\cdot OQ=k$ revine la $\frac{4a|\lambda|}{\sqrt{1+4\lambda^2}}=k$, iar $\lambda=\pm\frac{k}{2\sqrt{4a^2-k^2}}$ cu condiția $k\in(0,\ 2a)$. b) Fie $Q\in\mathcal{C}$, $Q(\alpha,\ \beta)$, (1) $\alpha^2+\beta^2-2a\beta=0$; $AQ=\sqrt{(\alpha-2a)^2+\beta^2}$, $OQ=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; (2) $AQ=h\,OQ\Leftrightarrow\alpha^2-4a\alpha+4a^2+\beta^2=$ $=h^2(\alpha^2+\beta^2)$. Folosind (1) se obține $\beta-2\alpha+2a=h^2\beta$, $\beta=\frac{2(a-\alpha)}{h^2-1}$ care se înlocuiește în (1) : $\alpha^2(4+(h^2-1)^2)-4a\alpha(3-h^2)+4a^2(2-h^2)=0$, cu soluțiile $\alpha_1,\ \alpha_2=2a\frac{3-h^2\pm(h^2-1)\sqrt{h^2-1}}{4+(h^2-1)^2}$ $\beta_i=\frac{2(a-\alpha_i)}{h^2-1}$, $i=1,\ 2$. Punctele $Q_1(\alpha_1,\ \beta_1)$, $Q_2(\alpha_2,\ \beta_2)$ există dacă $h>1$. c) Fie $P_1\left(\frac{2a\lambda}{\sqrt{4+\lambda^2}};\ \frac{-2a}{\sqrt{4+\lambda^2}}\right)$ unul

din punctele în care dreapta perpendiculară pe OP intersectează elipsa. Avem

$$S = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OP_1^2} = \frac{1+4\lambda^2}{4a^2(1+\lambda^2)} + \frac{4+\lambda^2}{4a^2(1+\lambda^2)} = \frac{5}{4a^2}.$$

3. Putem presupune că $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$, $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$. Dacă $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3$, atunci limita este 1. În alte cazuri limita este $E = e^{\frac{1}{8} l_1}$, unde

$$l_1 = \lim_{x \to 0} \frac{\cos a_1 x + \cos a_2 x + \cos a_3 x - \cos b_1 x - \cos b_2 x - \cos b_3 x}{x^p}.$$

Dacă $0 < p < 2$ atunci $l_1 = 0$ și $E = 1$. Dacă $p = 2$, $l_1 = \dfrac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{2}$. Dacă $p \in (2, 4)$ și $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \neq 0$, atunci l_1 este $+\infty$ sau $-\infty$. Dacă $p \in (2, 4)$ și $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$, atunci $l_1 = 0$. Dacă $p = 4$ și $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$, atunci

$$l_1 = \frac{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - b_1^4 - b_2^4 - b_3^4}{4!}.$$

Dacă $p \in (4, 6)$ și $\sum_{i=1}^{3} (a_i^4 - b_i^4) \neq 0$, atunci l_1 este $+\infty$ sau $-\infty$. Dacă $p \in (4, 6)$ și $\sum_{i=1}^{3} (a_i^4 - b_i^4) = 0$, atunci $l_1 = 0$. Dacă $p = 6$ și $\sum_{i=1}^{3} (a_i^4 - b_i^4) = 0$, atunci $l_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} (b_i^6 - a_i^6)}{6!}$. Pentru $p > 6$, deoarece am exclus cazul $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3$, rezultă $\sum_{i=1}^{3} (b_i^6 - a_i^6) \neq 0$ și l_1 este $+\infty$ sau $-\infty$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) $f'(x) = \dfrac{x - \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$; din condiția $f'(0) = 1$ se obține $\cos\alpha = -1$, $\alpha = \pi$. b) $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ cu condiția $\cos\alpha \neq 1$. c) Pentru $\alpha = \pi$, $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln (x+1)^2$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; funcția este continuă pe întreg domeniul de definiție, graficul intersectează axele în punctele $O(0, 0)$ și $A(-2, 0)$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$, funcția este concavă.

2. $\Delta = 3 \begin{vmatrix} b & -a+b-c & b+c \\ a & a+b & a+c \\ c & b+c & -a-b+c \end{vmatrix}$; s-au adunat coloanele a doua și a treia la coloana întîi. Se scade coloana întîi din coloanele a doua și a treia:

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} b & -a-c & c \\ a & b & c \\ c & b & -a-b \end{vmatrix} = -3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

3. Se rezolvă ecuația $f(x) = g(x) : e^x = e^x \sin x$, deci $\sin x = 1$. Punctele comune sînt $A_k\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Avem

$$f'\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = g'\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi},$$

deci graficele admit în punctele comune, tangentă comună.

4. Rezolvînd sistemul format de primele două ecuații, se obține $x = 3\,\frac{15 - 7m}{9 - 2m^2}$, $y = 3\,\frac{21 - 10m}{9 - 2m^2}$, care trebuie să verifice a treia ecuație, de unde se obține $\frac{9m}{9 - 2m^2} = 2m$, cu soluțiile $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{3}{2}$, $m_3 = -\frac{3}{2}$ pentru care se obțin, respectiv, $x_1 = 5$, $y_1 = 7$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$, $x_3 = 17$, $y_3 = 14$. Condiția a patra este verificată numai de tripletul $x_3 = 17$, $y_3 = 14$, $m_3 = \frac{3}{2}$.

5. $\lim a_n = e^{l_1}$, unde

$$l_1 = \lim_{n \to \infty} \frac{(n + k + 1) \dots (n + 2k) - (n + 1) \dots (n + k)}{(n + 1) \dots (n + k)} n^{\alpha}.$$

Deoarece $(n + k + 1) \dots (n + 2k) - (n + 1) \dots (n + k) = k^2 \cdot n^{k-1} + a_1 n^{k-2} + \dots$ rezultă că: pentru $\alpha \in (0, 1)$, $l_1 = 0$ și $\lim a_n = 1$; pentru $\alpha = 1$, $l_1 = k^2$ și $\lim a_n = e^{k^2}$ iar pentru $\alpha > 1$, $l_1 = \infty$ și $\lim a_n = \infty$.

6. $\Delta = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = (a - b)(\lambda - 1)^2.$

Dacă $a \neq b$ și $\lambda \neq 1$, sistemul este compatibil determinat, și $x = \lambda$, $y = -2\lambda - 1$, $z = \lambda + 2$. Dacă $a = b$ și $\lambda \neq 1$, se obține un sistem de două ecuații cu trei necunoscute, compatibil simplu nedeterminat pentru $\lambda a - a - 1 \neq 0$ și dublu nedeterminat dacă $\lambda a - a - 1 = 0$. Dacă $\lambda = 1$ și $a = b$, sau $a \neq b$ și $\lambda = 1$, se obține de asemenea un sistem compatibil simplu nedeterminat.

7. a) Condiția ca dreapta $y = mx + n$ să fie tangentă la cerc este $n^2 + 2\lambda mn - \lambda^2 = 0$ iar condiția ca să fie tangentă la elipsă este $\lambda^2 m^2 + \lambda^2 k^2 - n^2 = 0$. Din cele două relații se obține $m_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{n^4 - k^2 + 1} - k^2 - 1}{3}}$, deci direcția nu depinde de λ. b) Tangenta la elipsă din $\mathcal{C}(\lambda, 0)$ este $x = \lambda$ și se obține $M(\lambda, \lambda)$, $M'(\lambda, -\lambda)$. Cealaltă tangentă din M la elipsă este $y - \lambda = \frac{1 - k^2}{2}(x - \lambda)$ și coordonatele punctului de tangentă sînt $x = \frac{\lambda(k^2 - 1)}{k^2 + 1}$, $y = \frac{2\lambda k^2}{k^2 + 1}$. Locul geometric este o dreaptă ce trece prin origine, de ecuație $(k^2 - 1)y = 2k^2 x$ din care trebuie eliminată originea deoarece $\lambda \neq 0$. Analog pentru M'.

Anul 1971

Etapa județeană

1. a) Se alege $0<x_1<x_0<x_3<1$. Din $0\leqslant f(x_0)-f(x_1)\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0}(x_0-x_1)$ rezultă că $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_0\\ x_1<x_0}} f(x_1)=f(x_0)$. Pentru $0<x_0<x_1<x_3<1$ se obține

$$0\leqslant f(x_1)-f(x_0)\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_1-x_0)\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_1}(x_1-x_0) \text{ și deci}$$

$$\lim_{\substack{x_1\to x_0\\ x_1>x_0}} f(x_1)=f(x_0).$$

2. a) Se arată că matricile A^p și B^q comută pentru orice $p, q\in\mathbf{N}$ și apoi relația poate fi justificată prin inducție. b) Se constată că

$$AB=BA,\ B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ A^n=\lambda^n I \text{ și deci}$$

$$(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+C_n^2A^{n-2}B^2=\lambda^{n-2}\begin{pmatrix}\lambda^2&n\lambda&\frac{n(n-1)}{2}\\0&\lambda^2&n\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}.$$

c) $$D=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2\\1&x_2&x_2^2\\1&x_3&x_3^2\end{vmatrix}=(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1).$$

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) — b) 1.
2. Se organizează d ca o axă.

Etapa finală

1. Se va arăta că $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. Se constată că pentru $x\neq 0$,

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2^{\frac{1}{|x|}}} \text{ și deci } 0\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{|x|}}{2^{\frac{1}{|x|}}}=0.$$

2. Se notează cu $M=\sup a_n$. Din ipoteză rezultă că pentru orice $\varepsilon>0$ și $\eta>0$ există $n_\varepsilon(\eta)$ astfel încît

$$1-\eta<\frac{N_\varepsilon(\eta)}{n}<1+\eta \text{ dacă } n>n_\varepsilon(\eta).$$

Fie $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ arbitrare. Atunci

$$0 \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \frac{\varepsilon N_\varepsilon(n)}{n} + \frac{M(n - N_\varepsilon(n))}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{N_\varepsilon(n)}{n} + M \left| 1 - \frac{N_\varepsilon(n)}{n} \right| < \varepsilon(1 + \eta) + M\eta,$$

pentru $n > n_\varepsilon(\eta)$.

3. Se notează $\sin x = t$ şi trebuie determinată mulţimea valorilor funcţiei $F(t) = -2t^2 + (5 - a^2)t + a^2 + 1$ cînd $t \in [-1, 1]$. Pentru $1 \leqslant a^2 \leqslant 5$, $\max F = F\left(\frac{5 - a^2}{4}\right) = \frac{a^4 - 2a^2 + 3}{8}$, $\min F = F(-1) = -6 + 2a^2$. Pentru $5 < a^2 \leqslant 9$, $\max F = F\left(\frac{5 - a^2}{4}\right)$, $\min F = F(-1) = 4$. Pentru $a^2 > 9$, $\max F = F(-1) = -6 + 2a^2$, $\min F = F(1) = 4$. Pentru $a^2 < 1$, $\max F = F(1) = 4$, $\min F = F(-1) = -6 + 2a^2$.

4. Determinantul sistemului este $-3 \neq 0$.

5. Se consideră parabola $y^2 = 2px$. Condiţia ca dreapta $y = mx + n$ să fie tangentă la parabolă este $2mn = p$. Deci tangentele au ecuaţiile $y = mx + \frac{p}{2m}$, $m \neq 0$. Proiecţia focarului $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ pe tangentă este $\left(0, \frac{p}{2m}\right)$. Simetricul focarului faţă de tangentă este $\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{m}\right)$, deci locul geometric căutat este directoarea $x = -\frac{p}{2}$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Se determină coordonatele vîrfurilor triunghiului ABC determinat de cele trei drepte prin rezolvarea celor trei sisteme de ecuaţii obţinute prin considerarea a cîte două ecuaţii ale sistemului dat. Se scrie condiţia ca $\sigma[MAB] + \sigma[MBC] + \sigma[MAC] = \sigma[ABC]$, iar toate cele trei arii $\sigma[MAB]$, $\sigma[MBC]$ şi $\sigma[MAC]$ să fie nenule (se pot exprima sub formă de determinant, în funcţie de coordonatele vîrfurilor). b) Se exprimă fiecare din ariile $\sigma[MAB]$, $\sigma[MAC]$ şi $\sigma[MBC]$ în funcţie de distanţele lui M la laturile triunghiului ABC şi de lungimea laturii triunghiului echilateral. c) Da, căci din $h_a = h_b = h_c$ se deduce $a = b = c$, deoarece $ah_a = bh_b = ch_c$.

2. $a = \frac{1}{3} e^{-\frac{5}{2}}$, $b = -3e^{-\frac{5}{2}}$, $c = \frac{11}{3} e^{-\frac{5}{2}}$.

3. $a_n = \log_{\frac{1}{3}} \frac{n - 2}{3n}$, $\lim b_n = \lim n \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{n - 2}{3n} - 1\right) = \frac{2}{\ln 3}$.

4. Pentru $x \neq 0$, $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ şi deci f este derivabilă cu $f'(x) = \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$. Pentru $x = 0$, se poate ca f să nu fie derivabilă. De exemplu, $g(x) = x^2 x$ şi $f(x) = |x|$.

Anul 1972

Etapa județeană

1. Se consideră funcțiile continue $g, h : [-a, a] \to \mathbf{R}$ definite astfel: $g(x) = f(x) - x$, $h(x) = f(x) + x$. Deoarece $g(-a) = f(-a) + a \geqslant 0$ și $g(a) = f(a) - a \leqslant 0$ rezultă că există $b \in [-a, a]$ cu $g(b) = 0$. Analog pentru funcția h.

2. f este continuă în 0 și 1 și derivabilă în 0.

3. Din $m^2(x-1) + 2(m+1)(y-2) = 0$ rezultă că toate dreptele trec prin punctul $A(1, 2)$. Dacă se notează cu $\lambda(m)$ panta dreptei, avem $\lambda(m) = -\dfrac{m^2}{2(m+1)}$. Deoarece funcția λ ia valori în intervalele $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ rezultă că dreptele din familie sînt situate în interiorul și pe laturile unghiurilor obtuze formate de dreptele $y = 2$ și $y - 2 = 2(x-1)$. c) Suma elementelor de pe diagonala principală a matricii $[A, B]$ este zero.

4. a)—b) se verifică imediat prin calcul, ținînd seama de definiția dată. De exemplu. $[[A, B], C] = (AB - BA)C - C(AB - BA) = ABC - BAC - CAB + CBA$ etc.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Deoarece pentru orice $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$, rezultă că $x_n \geqslant 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Atunci $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x_n} - x_n\right) \leqslant 0$, deci șirul (x_n) este descrescător. b) Dacă se notează cu $l = \lim x_n$, și se știe de la punctul a că l există și este finită, se obține $l = 1$.

2. $h^{-1}(x) = \pi - \arcsin x$.

3. Punctul de coordonate (x, y) se află pe cercul $(x-4)^2 + (y-3)^2 - 4 = 0$. a) $\dfrac{y-1}{x-2}$ reprezintă panta dreptei ce trece prin punctul $M(x, y)$ de pe cerc și punctul fix $A(2, 1)$. Este cuprinsă între pantele celor două tangente la cerc, duse din A și prin punctul de coordonate $y = 1$ și $x = 2$, deci $\dfrac{y-1}{x-2} \in [0, \infty)$. Atunci și inversul său $\dfrac{x-2}{y-1} \in [0, \infty)$; b) Expresia $E = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ reprezintă distanța dintre M și A. Ea are valorile minime și maxime cînd M este intersecția dreptei AB cu cercul, $B(4, 3)$ fiind centrul cercului; c) $x + y$ este proporțional cu distanța de la punctul M la dreapta $x + y = 0$. Această distanță ia valorile extreme cînd M coincide cu punctele de pe cerc în care tangentele sînt paralele cu dreapta $x + y = 0$. Aceste tangente sînt $y + x = 7 + 2\sqrt{2}$ și $y + x = 7 - 2\sqrt{2}$, iar punctele de tangență $(4 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2})$ respectiv $(4 - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$; d) $(x-2)(y-1)$ reprezintă aria dreptunghiului cu laturile paralele cu axele de coordonate și avînd un vîrf în punctul $A(2, 1)$ și un vîrf în punctul $M(x, y)$ de pe cerc. Valoarea minimă este 0 și se realizează pentru $x = 4$, $y = 1$.

4. Adunînd ultimele două ecuații se obține $(m+2)(x+y)=m+2$. Pentru $m \neq -2$ rezultă $m \notin \mathbf{R}$, ceea ce contrazice ipoteza. Pentru $m=-2$, $x,\ y=\frac{-7 \pm \sqrt{321}}{8}$.

5. Se obține un determinant Vandermonde. Condiția necesară și suficientă ca să fie nul este ca cele două rații să coincidă.

Etapa finală

1. Nu. De exemplu, pentru $x=\frac{1}{2}$ ar trebui ca $\lim\limits_{n\to\infty} P_n\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$, iar pentru $x=-\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$, ceea ce este contradictoriu.

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x^2}{x}=0$ și $f'(x)=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}$. Se vede că $f'(x)$ nu are limită cînd $x\to\infty$. Deci teorema este falsă. b) În demonstrația dată, punctul $\xi \in (x, x+1)$ este un anumit punct al acestui interval. Deci s-a demonstrat că există un șir ξ_n cu proprietatea $\lim \xi_n=\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n)=0$, dar aceasta nu este suficient pentru ca $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$. c) Deoarece $f''(x)>0$ rezultă că $f'(x)$ este crescătoare. Vom considera intervalele $(x-1, x)$, $(x, x+1)$ și $(x+1, x+2)$. Așa cum se procedează în enunț, găsim numerele $\xi_1 \in (x-1, x)$, $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ astfel încît $f'(\xi_1)=f(x)-f(x-1)$ și $f'(\xi_2)=f(x+2)-f(x+1)$. Rezultă că oricare ar fi $\xi \in (x, x+1)$ există inegalitățile: $f'(\xi_1)<f'(\xi)<f'(\xi_2)$, deoarece f' este strict crescătoare. Considerînd acum un șir arbitrar $(\xi_n)_n$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n=\infty$, putem determina șirurile $(\xi_{1,n})_n$ și $(\xi_{2,n})_n$ astfel încît $\xi_{1,n}<\xi_n<\xi_{2,n}$ și $f'(\xi_{1,n})<f'(\xi_n)<f'(\xi_{2,n})$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_{1,n})=\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_{2,n})=0$. Conform principiului cleștelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n)=0$, deci în acest caz avem într-adevăr $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.

3. $\det A=0$ implică $ad=bc$. Atunci $a^2+bc=(a+d)a$, $bc+d^2=(a+d)d$ și

$$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix}=(a+d)A.$$

Prin inducție se arată că $A^n=(a+d)^{n-1}A$, deci $f(a, b, c, d, n)=(a+d)^{n-1}$.

4. a) Dacă semiaxele elipsei au lungimile a și b $(a>b)$, în elipsă este înscris un paralelogram de arie S, iar planul elipsei este π, atunci elipsa se obține prin proiecția unui cerc $\mathcal{C}$ de rază a situat într-un plan π_1 pe planul π, planele π și π_1 formînd un unghi diedru de măsură φ, astfel încît $\cos\varphi=\frac{b}{a}$. Planele perpendiculare pe π duse prin laturile paralelogramului determină în cercul $\mathcal{C}$ un dreptunghi înscris, de arie $\frac{aS}{b}$, care este maximă pentru cazul cînd dreptunghiul devine pătrat și aria acestuia este $2a^2$. Deci $S_{max}=2ab$. b) Rotind pătratul înscris în cercul $\mathcal{C}$ și proiectînd pe planul π figurile astfel obținute, se găsesc o infinitate de paralelograme înscrise în elipsă, de arie maximă egală cu $2ab$.

Anul 1973

Etapa județeană

1. a) Se arată prin inducție că dacă $a_1 < a_0$, atunci șirul (a_n) este descrescător iar dacă $a_1 > a_0$, atunci șirul (a_n) este crescător. (1) $a_1 - a_0 = -a_0 + \sqrt{a_0} + k$. Rădăcinile ecuației $-x^2 + x + k = 0$ sînt $x_1 = \frac{1-\sqrt{4k+1}}{2} < 0$ și $x_2 = \frac{1+\sqrt{4k+1}}{2} > 0$. Dacă $\sqrt{a_0} \in (0, x_2)$ atunci $a_1 - a_0 > 0$, $\sqrt{a_1} = \sqrt{\sqrt{a_0} + k} < x_2$, și deci șirul (a_n) este crescător, cu $a_n < x_2^2$. Dacă $\sqrt{a_0} \in (x_2, \infty)$ atunci $a_1 - a_0 < 0$. $\sqrt{a_1} = \sqrt{\sqrt{a_0} + k} > x_2$, deci șirul (a_n) este descrescător, cu $a_n > x_2^2$. Dacă $\sqrt{a_0} = x_2$ atunci $a_n = x_2^2$. Deci în toate cazurile șirul (a_n) este convergent. b) Fie $\lim a_n = l \geqslant 0$. Atunci $l - \sqrt{l} - k = 0$ și $\sqrt{l} = x_2$ sau $l = x_2^2 = \frac{2k+1+\sqrt{4k+1}}{2}$.

2. a) $f(a)$ ia valori pozitive și negative în orice interval. b) Da. Avem

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \text{ este rațional,} \\ -x & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

c) Este continuă în origine.

3. a) Se aleg ca axe de coordonate OA și ON. Dreptele OM și OB au ecuațiile $y = m_1x$, $y = m_2x$. Dreapta variabilă are ecuația $y = \lambda x + \mu$ și din condiția de intersecție rezultă $\lambda \neq m_1$, $\lambda \neq m_2$, $\lambda \neq 0$. Se notează cu M' și B' proiecțiile punctelor M respectiv B pe OA. Atunci $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B'}$ și $\frac{NB}{NA} = \frac{OB'}{OA'}$. Avem

$$x_A = -\frac{\mu}{\lambda}, \quad x_M = \frac{\mu}{m_1 - \lambda}, \quad x_B = \frac{\mu}{m_2 - \lambda} \text{ și}$$

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NA} = \frac{M'A}{M'B'} \cdot \frac{OB'}{OA} = \frac{m_1}{m_1 - m_2}.$$

b) Da. Se alege O originea axelor de coordonate, OA ca axă Ox și o perpendiculară în O pe OA ca axa Oy. Dreptele OM, ON, OB vor avea ecuațiile $y = m_1x$, $y = m_2x$, $y = m_3x$ și în continuare se raționează ca la punctul precedent.

4. a) Fie $T_1 > 0$ perioada funcției f și $T_2 > 0$ perioada funcției g. Se alege un $x_0 \in \mathbf{R}$. Avem pentru $n \in \mathbf{N}$:

$$f(x_0 + nT_1 + T_2) - g(x_0 + nT_1 + T_2) = f(x_0 + T_2) - g(x_0 + nT_1).$$

Pentru $n \to \infty$, membrul stîng are limita zero. Deci

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} g(x_0 + nT_1) = f(x_0 + T_2).$$

Pe de altă parte, $\lim_{n\to\infty} [g(x_0 + nT_1) - f(x_0 + nT_1)] = 0$, dar $f(x_0 + nT_1) = f(x_0)$. Deci (2) $\lim_{n\to\infty} g(x_0 + nT_1) = f(x_0)$. Din (1) și (2) rezultă $f(x_0 + T_2) = f(x_0)$, adică f are perioada T_2. Analog se arată că g are perioada T_1. b) Fie $T > 0$ perioada comună. Atunci pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}$, $f(x_0) - g(x_0) = \lim_{n\to\infty} [f(x_0 + nT) - g(x_0 + nT)] = 0$.

5. a) Se alege matricea $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și se scrie egalitatea $AX_1 = X_1A$, unde $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,3}$. Pe urmă se scrie $AX_2 = X_2A$, unde $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se obține $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ și restul elementelor sînt nule. Deci $A = aI$, unde I este matricea unitate.

LICEE DE SPECIALITATE

1. $P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2(0, \sqrt{3})$ $P_3(1, \sqrt{3})$, $P_4\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. a) Utilizînd relațiile lui Viète se obține sistemul

$$p^2 - 2q = -p,$$
$$q^2 - 2pr = q,$$
$$r = -r^2,$$

care are soluțiile reale $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$; $p = -1$, $q = 0$, $r = 0$; $p = 1$, $q = 1$, $r = 0$; $p = -2$, $q = 1$, $r = 0$; $p = 0$, $q = 0$, $r = -1$; $p = -3$, $q = 3$, $r = -1$ și soluțiile complexe $p = (1+i\sqrt{7})/2$, $q = (-1+i\sqrt{7})/2$, $r = -1$; $p = (1-i\sqrt{7})/2$, $q = (-1-i\sqrt{7})/2$, $r = -1$. Deci se obțin opt polinoame: X^3, $X^2(X-1)$, $X(X^2+X+1)$, $X(X-1)^2$, $(X-1)^3$, X^3-1 și încă două cu coeficienți complecși. b) Polinoamele determinate la punctul a verifică identitatea $(X-x_1^2)(X-x_2^2)(X-x_3^2) = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$, unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile. Obținem

$$a(X^2) = (X^2-x_1)(X^2-x_2)(X^2-x_3) = (X^2-x_1^2)(X^2-x_2^2)(X^2-x_3^2) =$$
$$= -(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(-X-x_1)(-X-x_2)(-X-x_3) = -a(X)a(-X).$$

Etapa finală

1. a) Deoarece derivatele funcțiilor au proprietatea lui Darboux, rezultă că f'' păstrează semnul constant. Atunci f' este strict monotonă, deci admite inversă, care este derivabilă. Rezultă

$$c(x) = (f')^{-1}\left(\frac{f(x+a)-f(x)}{a}\right).$$

Prin compunerea a două funcții derivabile se obține o funcție derivabilă, deci funcția c este derivabilă. b) Derivînd prima relație se obține $f'(x+a) - f'(x) = af''(c(x))c'(x)$. Deci $c'(x) = 1$. Rezultă $c(x) = x + b$ și $f'(x+a) - f'(x) = af''(x+b)$ sau $f''(x) = \frac{f'(x+b+a) - f'(x-b)}{a}$. Rezultă că f'' este derivabilă și $f''(x) = \frac{f'(x-b+a) - f'(x-b)}{a}$. Prin inducție $f^{(n+1)}(x) = \frac{f^{(n)}(x+b+a) - f^{(n)}(x-b)}{a}$

2. Se consideră un cerc de rază 1 și se alege O originea axelor, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$. Dacă cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ au razele $|r_1|$, respectiv $|r_2|$, atunci centrele lor au coordonatele $(r_1 + 1, 0)$, respectiv $(0, r_2 + 1)$. Condiția de tangență în M conduce la relația (1) $r_1r_2 - r_1 - r_2 - 1 = 0$. Coordonatele punctului M, notate x și y, sînt (2) $x = \frac{r_2(r_1 + 1)}{r_1 + r_2}$, $y = \frac{r_1(r_2 + 1)}{r_1 + r_2}$. Eliminînd r_1 și r_2 între (1) și (2) se obține cercul $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Locul geometric este acest cerc din care se elimină punctele A, B și $A'(1, 2)$, $B'(2, 1)$ care corespund unor cazuri de degenerare a cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$.

3. Problema se pune numai pentru intervale ce conțin pe 0. Se arată că pentru orice $\varepsilon > 0$, și orice $y \in [-1, 1]$, în intervalele $[0, \varepsilon]$ și $[-\varepsilon, 0]$ există puncte în care f ia valoarea y.

4. Se adaugă matricii A $n - m$ coloane formate din elemente egale cu zero și matricii A^τ $n - m$ linii formate numai din zerouri, obținîndu-se matricile pătrate B, B^τ. Avem

$AA^\tau = BB^\tau$, deci $\det(AA^\tau) = \det(BB^\tau) = \det B \det B^\tau = 0$.

5. a) Se arată că $a_{n+2} \leqslant A_n$ și atunci $A_{n+1} \leqslant A_n$. Deoarece șirul (a_n) este mărginit, există a, astfel ca $a_n \geqslant a$, $n \in \mathbf{N}$. Atunci și $A_n \geqslant a$. Deci șirul A_n este descrescător și mărginit.

Anul 1974

Etapa județeană

1. a) Este derivabilă pe $\mathbf{R}$. b) Dacă se alege $f(x) = x$ și $g(x) = |x|$ se constată că g nu este derivabilă în 0, deci afirmația nu este corectă. Greșeala constă în faptul că se omite cazul $f(x) = 0$. c) $f(x_0) \neq 0$.

2. a) $\sqrt{k} + \sqrt{k+1} + \quad + \sqrt{n} > (n - k + 1)\sqrt{k}$. b) $0 < a_n < b_n^{(k)} < \frac{n}{(n - k + 1)\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}}$, ultima inegalitate fiind adevărată pentru $n > 2k - 2$. Pentru un $\varepsilon > 0$, se alege $k > \frac{4}{\varepsilon^2}$, și $n(\varepsilon) > \frac{8}{\varepsilon^2} - 2$. Atunci, pentru $n > n(\varepsilon)$ are loc $0 < a_n < \varepsilon$ și deci $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

3. a) Fie $A(a, 0)$ și $B(0, b)$. Ecuațiile dreptelor AB, AD și BC sînt, respectiv, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, $y = \frac{a}{b}(x - a)$, $y - b = \frac{a}{b}x$, iar $C\left(\mu, \frac{a}{b}(\mu + b)\right)$, $D\left(\lambda, \frac{a}{b}(\lambda - a)\right)$. Scriind că $BC = AB$ și $AD = AB$ deducem $\lambda = a + b$ și $\mu = b$, deci $C(b, a + b)$ și $D(a + b, a)$. Dar abscisa punctului P este constantă (egală cu k), deci $a + b = 2k$. Rezultă că $P((a + b)/2, (a + b)/2) = P(k, k)$ este fix. b) Deoarece $C(b, 2k)$, unde $0 \leqslant b \leqslant 2k$, rezultă că locul geometric al punctului C este un segment de dreaptă orizontal cuprins între $(0, 2k)$ și $(2k, 2k)$. În mod asemănător locul geometric al punctului $D(2k, a)$ este un segment de dreaptă vertical, cuprins între punctele de coordonate $(2k, 0)$ și $(2k, 2k)$. c) Notînd cu x lungimea laturii pătratului, obținem $x^2 = a^2 + b^2 = 4k^2 - 2ab$, deci $x_{min} = k\sqrt{2}$, iar $x_{max} = 2k$.

4. 0.

5. Suma elementelor de pe diagonala principală a matricii $AX - XA$ este zero, deci nu poate fi egală cu E.

1. a) Pentru orice mulțime $A \subset \mathbf{R}$, funcția

$$f_A : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_A(x) = \begin{cases} x, & x \in A, \\ -x, & x \in \mathbf{R} \setminus A, \end{cases}$$

este soluție și orice soluție este de această formă. b)—c). $f(x) = x$ și $f(x) = -x$.

2. $P(0) = 0$, deci $P(x) = xP_1(x)$ și $|P_1(x)| \leqslant 1$ pentru orice x real. Rezultă $P_1(x) = c$, cu $|c| \leqslant 1$ și $P(x) = cx$.

3. a) n. b) 2^{n-1}. c) 1.

Etapa finală

1. a) Se demonstrează prin inducție matematică. b) Se arată mai întîi că șirurile (a_{2n}) și (a_{2n+1}) au aceeași limită. La fel (b_{2n}) și (b_{2n+1}). Deci șirurile (a_n) și (b_n) sînt convergente și pentru a demonstra că ele au aceeași limită se trece la limită în una din relațiile de recurență. c) Adunînd cele două relații de recurență se obține $4a_n + 5b_n = 4a_{n-1} + 5b_{n-1} = \ldots = 4a_0 + 5b_0$. Trecînd la limită se deduce că limita comună este egală cu $(4a_0 + 5b_0)/9$.

2. a) Presupunem că $0 < x_2 \leqslant x_1$. Atunci $\dfrac{f(x_1 + x_2)}{x_1 +} \leqslant \dfrac{f(x_1)}{x_1}$, de unde

$$f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2) \leqslant \frac{x_1 + x_2}{x_1} f(x_1) - f(x_1) - f(x_2) = x_2\left(\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2}\right) \leqslant 0.$$

b) Din (1) rezultă că $f(nx) \leqslant nf(x)$ pentru orice $x > 0$ și $n \in \mathbf{N}^*$. Fie acum $0 < x_1 < x_2$. Trebuie demonstrat că $\dfrac{f(x_1)}{x_1} \geqslant \dfrac{f(x_2)}{x_2}$ sau $f(x_2) \leqslant \dfrac{x_2}{x_1} f(x_1)$ sau încă $f\left(\dfrac{x_2}{x_1} x_1\right) \leqslant \dfrac{x_2}{x_1} f(x_1)$. Să notăm $\dfrac{x_2}{x_1} = \alpha > 1$ și $x_1 = x > 0$. Trebuie demonstrat că $f(\alpha x) \leqslant \alpha f(x)$. Dacă $\alpha \in \mathbf{N}$, am văzut că această inegalitate este o consecință a inegalității (1). Altfel, fie $\alpha = n + \beta$, unde $n \in \mathbf{N}$ și $1 < \beta < 2$. Din condiția de convexitate a lui f va rezulta că $f(\beta x) \leqslant \beta f(x)$. Luînd $x_1 = x$, $x_2 = 2x$ și $t = 2 - \beta$ în inegalitatea de la punctul b obținem

$$f(\beta x) = f((2 - \beta)x + (\beta - 1)2x) \leqslant (2 - \beta)f(x) + (\beta - 1)f(2x) \leqslant$$
$$\leqslant (2 - \beta)f(x) + 2(\beta - 1)f(x) = \beta f(x).$$

Acum, dacă $n = 0$, inegalitatea este demonstrată. În caz contrar, $n \geqslant 1$ și obținem

$$f(\alpha x) = f((n + \beta)x) = f(nx + \beta x) \leqslant f(nx) + f(\beta x) \leqslant nf(x) + \beta f(x) = \alpha f(x).$$

c) Putem scrie $(e^{f(x+u)} + e^{f(u)})^2 \geqslant 4e^{f(x-u)+f(u)} \geqslant 4e^{f(x)}$, ținînd seama de punctul a.

3. Cînd M se deplasează de la A la B și N se deplasează de la B către C, mijlocul segmentului (MN) parcurge segmentul $[TS]$, unde T este mijlocul segmentului (AB), iar $S \in (BC)$. Se obține că locul geometric al mijlocului segmentului (MN) este pentagonul $TSRQZ$, care are laturile (SR) și (QZ) situate pe laturile (BC), respectiv (AC) ale triunghiului ABC.

4. a) Se obțin matricile $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Căutînd matrici cu 0 și 1 se obțin soluțiile $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Anul 1975

Etapa județeană

1. a) Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că există un număr irațional pentru care nici o cifră nu se repetă de o infinitate de ori, adică cifrele se repetă de un număr finit de ori. Deoarece numărul cifrelor este finit, rezultă că numărul trebuie să aibă un număr finit de zecimale diferite de zero, deci este un număr rațional, contradicție. b) Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că există un număr irațional cu cel mult o cifră care se repetă de o infinitate de ori. Dacă nici o cifră nu se repetă de o infinitate de ori, am demonstrat la punctul a) că acest lucru este imposibil. Să presupunem că numai o singură cifră se repetă de o infinitate de ori. După un număr finit de zecimale ar trebui să se repete numai o singură cifră, prin urmare numărul nostru este un număr periodic mixt, deci el este un număr rațional. c) Pentru a arăta că există numere iraționale în care numai două cifre se repetă de o infinitate de ori, este suficient să luăm numărul $n=0{,}101001000100001000001\ldots$ care este format numai din cifrele 0 și 1. Într-adevăr, să presupunem că acest număr este periodic și fie k numărul cifrelor din perioadă. Ținem cont de teorema că orice număr rațional se reprezintă sub formă de fracție zecimală infinită periodică, care nu are perioada (9) și ținem cont că perioada trebuie să conțină cifra 1. De aceea între orice două cifre 1 consecutive (de după virgulă) nu pot fi mai mult de $k-1$ zerouri, contradicție. Contradicția obținută arată că numărul este neperiodic, deci este irațional.

2. a) Din enunțul problemei obținem pe rînd: $B^2 = CA \Rightarrow B^3 = BCA = (A^2)A = A^3$, deci $B^3 = A^3$. Din $C^2 = AB \Rightarrow C^3 = CAB = (B^2)B = B^3$, deci $C^3 = B^3$. Rezultă în final că $A^3 = B^3 = C^3$. b) Considerăm matricile A, $B = \omega A$ și $C = \omega^2 A$, unde ω este o rădăcină complexă nereală a ecuației $x^3 = 1$. Se verifică ușor că aceste matrici satisfac simultan condițiile din ipoteză. Alt exemplu îl constituie matricile: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -\frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbf{R}^*$.

3. Vom folosi teorema cleștelui. Se observă că putem scrie $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{n^3+n} \leqslant a_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{n^3+1}$, de unde găsim

$$\frac{1}{n^3+n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right) \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n^3+1}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right) \text{ sau}$$

$$\frac{1}{n^3+n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n^3+1}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Trecînd la limită, obținem $\frac{1}{\ } \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \frac{1}{\ }$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\ }$

4. a) Se găsește ușor că $t = \frac{\pi}{2}$ b) Deoarece $p^2x_0 + 2py_0 + 2 = 0$ este o ecuație de gradul 2 în care $\Delta = 4(y_0^2 - 2x_0) > 0$ rezultă că există două valori diferite pentru p și deci prin $M_0(x_0, y_0)$ trec două drepte diferite din familie. c) Fie $p_1^2x + 2p_1y + 2 = 0$ și $p_2^2x + 2p_2y + 2 = 0$ ecuațiile celor două drepte. Conform

punctului a aceste drepte trebuie să fie perpendiculare, deci din condiția $1+m_1m_2=0$ de perpendicularitate rezultă că $p_1p_2=-4$. Dar $p_1p_2=\frac{2}{x}$ de unde rezultă ecuația dreptei: $2x+1=0$.

5. Să considerăm funcțiile f și g definite pe mulțimea $[8, 12]$ cu valori în mulțimea nivelurilor rezervorului, asociind fiecărui timp nivelul apei în acel moment, respectiv, în fiecare din cele două zile. Funcțiile f și g sînt continue pe domeniul de definiție. Avem $f, g : [8, 12] \to [0, H]$, unde H = capacitatea maximă a rezervorului și observăm că $f(8)=0$, $f(12)=H$, $g(12)=0$, $g(8)=H$. Să considerăm funcția $h=f-g$, $h:[8, 12]\to[-H, H]$ care este o funcție continuă. Deoarece $h(8)=f(8)-g(8)=-H$ și $h(12)=f(12)-g(12)=H$, rezultă că $h(8)\cdot h(12)=-H^2<0$ și deci există un punct $c\in(8, 12)$ astfel încît $h(c)=0$, adică $f(c)=g(c)$, deci există o oră c în ambele zile la care apa este la același nivel.

LICEE INDUSTRIALE ȘI ECONOMICE

1. a) f este continuă pe $[0, \infty)$. b) f este derivabilă pe $[0, \infty)\setminus N^*$.

2. Se demonstrează prin inducție după n că $f_n(x)=e^x(e^h-1)^n$. b) Dacă $h<\ln 2$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)=0$; dacă $h=\ln 2$ limita este egală cu 1 și dacă $h>\ln 2$ atunci limita este ∞.

Etapa finală

1. a) Fie elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ și punctul $A(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$. Vom arăta că există o singură pereche de puncte $B(a\cos\beta, b\sin\beta)$ și $C(a\cos\gamma, b\sin\gamma)$ astfel încît

$$\frac{a(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}{3}=0,\ \frac{b(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{3}=0.$$

Din $\sin\beta+\sin\gamma=-\sin\alpha$ și $\cos\beta+\cos\gamma=-\cos\alpha$, prin ridicare la pătrat și adunare, se obține $\cos(\beta-\gamma)=-\frac{1}{2}$ și deci $\beta-\gamma=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$. Analog găsim $\gamma-\alpha=2k'\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ și $\alpha-\beta=2k''\pi\pm\frac{2\pi}{3}$. Adunînd ultimele trei relații, în membrul stîng se obține 0, de unde rezultă că semnele din membrul drept sînt toate + sau toate −. Deci $\gamma=2k'\pi+\varepsilon\frac{2\pi}{3}+\alpha$, $\beta=\alpha-2k''\pi-\varepsilon\frac{2\pi}{3}$, $\varepsilon=\pm1$, de unde $\sin\gamma=\sin\left(\alpha+\varepsilon\frac{2\pi}{3}\right)$, $\sin\beta=\sin\left(\alpha-\varepsilon\frac{2\pi}{3}\right)$, $\cos\gamma=\cos\left(\alpha+\varepsilon\frac{2\pi}{3}\right)$, $\cos\beta=\cos\left(\alpha-\varepsilon\frac{2\pi}{3}\right)$. Pentru $\varepsilon=1$, obținem $B\left(a\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right), b\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $C\left(a\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right), b\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, iar pentru $\alpha=-1$, coordonatele punctelor B și C se schimbă între ele. Rezultă că triunghiul ABC este unic.

b) Aria triunghiurilor este $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a\cos\alpha & b\sin\alpha & 1 \\ a\cos\beta & b\sin\beta & 1 \\ a\cos\gamma & b\sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = ab(\sin(\gamma-\beta) - \sin(\gamma-\alpha) + \sin(\beta-\alpha)) =$$

$$= ab\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}ab.$$

Deci $S = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{3\sqrt{3}}{2}ab$. c) Mijlocul A' al lui $[BC]$ are coordonatele

$$x = \frac{a(\cos\beta + \cos\gamma)}{2} = \frac{-a\cos\alpha}{2},$$

$$y = \frac{b(\sin\beta + \sin\gamma)}{2} = \frac{-b\sin\alpha}{2}.$$

Observăm că $\left(\frac{x}{\frac{a}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{2}}\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, de unde rezultă că locul geometric al punctelor A' este o elipsă cu aceleași axe de simetrie ca și elipsa inițială și de semiaxe $\frac{a}{2}$ și $\frac{b}{2}$. Se găsește același loc geometric și pentru mijloacele laturilor $[AC]$ și $[AB]$.

2. a) Fie T perioada principală a lui f. Avem $f(x+T) = f(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ și derivînd, se obține $f(x+T) = f'(x)$ și deci f' admite perioada T. Rămîne de arătat că T este cea mai mică perioadă pozitivă a lui f'. Să presupunem că f' ar admite o perioadă $t < T$, deci $f'(x+t) = f'(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Deducem că (1) $f(x+t) = f(x) + k$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Funcția f fiind definită pe $\mathbf{R}$, continuă și periodică, este mărginită. Din relația (1) deducem

$$f(t) = f(0) + k,\ f(2t) = f(t) + k, \ldots, f(nt) = f((n-1)t) + k.$$

Adunînd aceste relații obținem $f(nt) = f(0) + nk$. Cum n poate fi făcut oricît de mare, aceasta ar atrage după sine nemărginirea lui f și deci o contradicție. Rezultă că T este perioada principală și pentru f'. b) Dacă luăm $f(x) = x + \sin x$, atunci $f'(x) = 1 + \cos x$ și avem un exemplu de funcție în care derivata este o funcție periodică, fără ca funcția să fie periodică.

3. Determinantul se poate scrie sub forma

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 3\varepsilon_{12} & 4\varepsilon_{13} \\ 3\varepsilon_{21} & 2\varepsilon_{22} & 5\varepsilon_{23} \\ 4\varepsilon_{31} & 5\varepsilon_{32} & 3\varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \text{ unde } \varepsilon_{ij} = \pm 1,\ i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Dezvoltînd determinantul se obține $\Delta = 6a + 25b + 27c + 60d + 60e + 32f$, unde $a, b, c, d, e, f = \pm 1$. Pentru ca Δ să fie nul, este necesar ca $60d$ și $60e$ să aibă semne contrare, deci $\Delta = 6a + 25b + 27c + 32f$. Este necesar, de asemenea, ca $27c$ și $32f$ să fie de semne contrare (altfel suma lor depășește suma celorlalți termeni). În concluzie $\Delta = 6a \pm 25b \pm 5$, expresie care, evident, nu poate fi nulă.

4. Să considerăm șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit astfel

$$b_n = \max\{|a_k| \text{ pentru } k \text{ cu proprietatea că } 2^{n-1} \leq k < 2^n\}.$$

Ținînd cont de ipoteză, rezultă că $0 \leq b_n \leq \frac{b_1}{2^{n-1}}$, de unde rezultă că șirul (b_n) este convergent către zero și de aici se deduce imediat că și șirul (a_n) este convergent către zero.

5. Fie x', x'' astfel încît $f(x') = a$, $f(x'') = b$, $a \neq b$ și x_0 un număr oarecare real. Fie șirul $x'_n = x' + Tr'_n$, unde r'_n este un șir de numere raționale convergent către $\frac{x_0 - x'}{T}$. Evident $x'_n \to x_0$ și deci

$$f(x'_n) = f(x'_n + Tr'_n) = f(x') = a.$$

Să considerăm acum șirul $x''_n = x'' + Tr''_n$, unde r''_n este un șir de numere raționale convergent către $\frac{x_0 - x''}{T}$. Atunci $x''_n \to x_0$ și $f(x''_n) = f(x'' + Tr''_n) = f(x'') = b$. Cum x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că funcția este discontinuă, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. $\lim\limits_{x\to\pi} (\cos a_1x \cos a_2x \ldots \cos a_nx)^{\frac{1}{(x-\pi)^2}} = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}$ Pentru calculul limitei care apare la exponentul lui e se aplică de două ori regula lui l'Hospital.

2. a) $P(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, este polinomul lui Cebîșev de gradul n. $P(1) = 1$ și $P(-1) = (-1)^n$. b) 2^{n-1} c) $\cos(n \arccos x) = 1 \Leftrightarrow x_k = \cos\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $\cos(n \arccos y) = -1 \Leftrightarrow y_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. d) Obținem $P(x) + 1 = 2^{n-1}(x - y_0) \ldots (x - y_{n-1})$. Pentru $x = 1$ se deduce $2 = 2^{n-1}(1 - y_0) \ldots (1 - y_{n-1})$. Dar $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, de unde $\frac{1}{2^{n-2}} = 2^2\left[\prod\limits_{k=0}^{n-1} \sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]^2$, ceea ce implică relația din enunț, deoarece $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} > 0$ pentru $k = 0, \ldots, n-1$.

Anul 1976

Etapa județeană

1. Adunînd cele trei relații, obținem

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Deci putem scrie că $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \ldots = a_0 + b_0 + c_0 = k$, unde k este un număr real. Din faptul că $b_n + c_n = k - a_n$

rezultă că $2a_{n+1} = k - a_n$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$, adică a_n este un șir recurent de ordinul 1. Să calculăm termenul general al șirului. Putem scrie că

$$\begin{aligned} 2a_{n+1} &= k - a_n, \\ 2a_n &= k - a_{n-1}, \\ 2a_{n-1} &= k - a_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ 2a_1 &= k - a_0. \end{aligned}$$

Dacă înmulțim a doua relație cu $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a treia cu $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ etc., ultima cu $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ și adunăm cele $n+1$ relații, obținem

$$2a_{n+1} = k\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) - a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ sau}$$

$$2a_{n+1} = \frac{2k}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Trecînd la limită în ultima relație obținem $2\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{2k}{3}$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{k}{3} = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3}$. La fel se arată că și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3}$.

2. Notăm $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2A.$$

Observăm în continuare că $A^4 = A^3A = 2AA = 2A^2$, $A^5 = A^4A = 2A^2A = 2A^3 = 2 \cdot 2A = 2^2A$, $A^6 = A^5 \cdot A = 2^2A \cdot A = 2^2A^2$. Să demonstrăm prin inducție matematică că $A^{2k} = 2^{k-1}A^2$ și $A^{2k-1} = 2^{k-1}A$, $(\forall)\, k \in \mathbb{N}^*$. Presupunem aceste relații adevărate și obținem $A^{2k+1} = A^{2k} \cdot A = 2^{k-1}A^2 \cdot A = 2^{k-1}A^3 = 2^{k-1} \cdot 2A = 2^k A$ și $A^{2k+2} = A^{2k+1}A = 2^kA \cdot A = 2^kA^2$ și deci relațiile sînt verificate prin inducție matematică.

3. a) Din condiția ca cele trei drepte să fie paralele rezultă $\frac{a-\lambda}{b} = \frac{b}{c-\lambda} = \frac{c}{a}$ și de aici că $a^2 - a\lambda = bc$ și $c^2 - c\lambda = ab$. Înmulțind relația $a^2 - a\lambda = bc$ cu $-c$ și relația $c^2 - c\lambda = ab$ cu a și adunîndu-le, obținem $-a^2c + ac^2 = -bc^2 + a^2b$, de unde găsim $(a-c)(ab + bc + ac) = 0$. Deoarece $ab + bc + ca > 0$ rezultă $a = c$ și apoi că $\lambda = a - b$. b) Dezvoltînd determinantul

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & \\ b & c-\lambda & a \\ & a & b-\lambda \end{vmatrix} \quad (a+b+c-\lambda)(\lambda^2 - a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca) = 0,$$

obținem că $\lambda_1 = a + b + c$ și $\lambda_{2,3}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2)$ și, cum $a \neq c$, rezultă $\lambda_{2,3}^2 > 0$. Deoarece pe de altă parte avem și $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \neq (a+b+c)^2$ rezultă existența a trei valori distincte pentru λ. c) Observînd că ecuația a treia reprezintă un fascicol de drepte paralele, rezultă că cele trei puncte sînt situate pe trei drepte paralele distincte din acest fascicol.

4. Să presupunem că numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt în progresie aritmetică; atunci

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}x_n} = \frac{1}{r}\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_2x_3} + \ldots + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}x_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{n-1}{x_1x_n}$$

și relația este verificată. Să demonstrăm implicația reciprocă. Vom demonstra prin inducție că dacă există relația din ipoteza problemei, atunci $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt în progresie aritmetică $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$. Pentru $n = 3$, avem $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{2}{x_1x_3}$, de unde deducem că $x_1 + x_3 = 2x_2$ și deci x_1, x_2, x_3 sînt în progresie aritmetică. Presupunem că proprietatea are loc pentru n și o demonstrăm pentru $n+1$. Deci pentru orice $3 \leqslant k \leqslant n+1$ are loc relația

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{k-1}x_k} = \frac{k-1}{x_1x_k}. \tag{1}$$

Conform ipotezei de inducție, relația (1) avînd loc și pentru orice $3 \leqslant k \leqslant n$, numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formează o progresie aritmetică de rație r. Dar $\left(\frac{1}{x_1x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}x_n}\right) + \frac{1}{x_nx_{n+1}} = \frac{n}{x_1x_{n+1}}$, adică $\frac{n-1}{x_1x_n} + \frac{1}{x_nx_{n+1}} = \frac{n}{x_1x_{n+1}}$, de unde deducem că $(n-1)(x_{n+1} - x_n) = x_n - x_1 = (n-1)r$ sau $x_{n+1} - x_n = r$, deci $x_1, \ldots, x_{n+1}$ formează o progresie aritmetică.

6. a) Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ și $x_n \to x_0$, $x_n \in \mathbf{Q}$; atunci

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + ax_n + b) = x_0^2 + ax_0 + b.$$

Să considerăm acum un șir $y_n \to x_0$, $y_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; atunci $\lim\limits_{y_n \to x_0} f(y_n) = \lim\limits_{y_n \to x_0} 0 = 0$. Pentru ca funcția să fie continuă în x_0 trebuie ca $x_0^2 + ax_0 + b = 0$, ecuație care poate admite numai două rădăcini distincte, deci rezultă că f poate avea cel mult două puncte de continuitate. b) Fie x_1 și x_2 cele două puncte de continuitate. Funcția poate să fie derivabilă numai în aceste puncte. Deoarece x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + ax + b = 0$, putem să scriem că

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_1)(x - x_2) & \text{dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Fie $x_n \to x_1$, $x_n \in \mathbf{Q}$; atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_1)}{x_n - x_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - x_1)(x_n - x_2)}{x_n - x_1} = x_1 - x_2.$$

Fie $y_n \to x_1$, $y_n \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$; atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_1)}{y_n-x_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{y_n-x_1} = 0.$$

Pentru ca funcția să fie derivabilă în x_1 trebuie ca $x_1 - x_2 = 0$, adică $x_1 = x_2$. Ecuația $x^2 + ax + b = 0$ admite numai o rădăcină dublă, deci f poate avea cel mult un punct de derivabilitate. În acest caz condiția de existență a acestui punct este $a^2 = 4b$.

c) $$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3) & \text{dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}. \end{cases}$$

d) $$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2(x-2)^2 & \text{dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}. \end{cases}$$

Etapa finală

1. a) Fie (a_n) un șir monoton crescător și fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Deoarece (a_n) este monoton crescător rezultă că $a_n \leqslant a_{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și deci $[a_n] \leqslant [a_{n+1}]$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, deci șirul $b_n = [a_n]$ este un șir monoton crescător. Deoarece $[a_n] \leqslant a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ rezultă că șirul $b_n = [a_n]$ este mărginit. Deci șirul $b_n = [a_n]$ este un șir monoton și mărginit, deci este un șir convergent; b) Dacă (a_n) este un șir convergent nu rezultă neapărat că șirurile (b_n) și (c_n) sînt convergente. Să considerăm următorul exemplu. Fie $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$ care este un șir convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Șirul $b_n = [a_n] = \begin{cases} 1, \text{ pentru } n \text{ par} \\ 0, \text{ pentru } n \text{ impar} \end{cases}$ este un șir divergent.

Șirul $c_n = a_n - b_n = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{1}{n+1} & \text{pentru } n \text{ par} \\ 1 + (-1)^n \dfrac{1}{n+1} & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$ este tot un șir divergent.

Rezultă că afirmația făcută nu este adevărată; c) Propoziția este adevărată și se va considera exemplul de la punctul b; d) Să considerăm șirul

$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{pentru } n \text{ par} \\ \dfrac{1}{3} & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$ care este un șir divergent, iar $b_n = [a_n] = 0$ este șirul constant 0 care este convergent.

2. a) Putem scrie $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + \ldots + (-1)^{k+1} a_{n-k}$. Să presupunem k un număr par, deci $k = 2p$; atunci putem scrie

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - \quad + a_{n-2p+1} - a_{n-2p} \text{ și}$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-3} + \ldots + a_{n-2p} - a_{n-2p-1}.$$

Adunînd cele două egalități, obținem $a_n = -a_{n-2p-1}$. Deci $a_n = -a_{n-2p-1} = a_{n-4p-2}$ și rezultă că (a_n) este un șir periodic, de perioadă $T = 4p + 2 = 2k + 2$. Să presupunem k un număr impar, adică $k = 2p + 1$; atunci putem scrie

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - \quad - a_{n-2p} + a_{n-2p-1} \text{ și}$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-3} + a_{n-4} - \quad - a_{n-2p-1} + a_{n-2p-2}.$$

Adunînd cele două egalități, obținem că $a_n = a_{n-2p-2}$ și deci (a_n) este un șir periodic, de perioadă $T = 2p + 2 = k + 1$. b) Dacă $k = 2$ atunci șirul se poate pune sub forma $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, unde termenul general trebuie să fie de forma $a_n = a \cos nx + b \sin nx$. Deoarece șirul (a_n) are perioada $T = 6$ (vezi punctul a) și, cum perioada funcțiilor sinus și cosinus este 2π, rezultă că $x = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Deci termenul general este de forma $a_n = a \cos \frac{n\pi}{3} + b \sin \frac{n\pi}{3}$ Să determinăm pe a și b din condițiile inițiale. Pentru $n = 1$ avem $a_1 = a \cos \frac{\pi}{3} + b \sin \frac{\pi}{3}$. Pentru $n = 2$ avem $a_2 = a \cos \frac{2\pi}{3} + b \sin \frac{2\pi}{3}$, de unde găsim $a = a_1 - a_2$ și $b = \frac{(a_1 + a_2)\sqrt{3}}{3}$ și deci termenul general se poate scrie sub forma $a_n = (a_1 - a_2) \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{(a_1 + a_2)\sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3}$ Se poate verifica că șirul (a_n) astfel determinat satisface relația de recurență $a_{n-1} - a_{n-2} = a_n$.

3. a) Să considerăm $x = y = 0$; atunci obținem $f(0) = \frac{2f(0)}{1 + f^2(0)}$ și deci $f^3(0) - f(0) = 0$. Să presupunem că $f(0) = -1$. În egalitatea dată facem $y = 0$ și obținem $f(x) = \frac{f(x) - 1}{1 - f(x)} = -1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, adică funcția ar fi constantă. Rezultă că $f(0) \neq -1$. Să presupunem că $f(0) = 1$. În egalitatea dată, pentru $y = 0$ obținem $f(x) = \frac{f(x) + 1}{1 + f(x)} = 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, deci funcția ar fi constantă. Rezultă că $f(0) \neq 1$. Deci singura posibilitate este ca $f(0) = 0$. În egalitatea propusă se face $y = -x$ și obținem $f(0) = \frac{f(x) + f(-x)}{1 + f(x)f(-x)} = 0$, de unde rezultă că $f(x) = -f(-x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, adică f este impară. Să facem $x = y = \frac{t}{2} \in \mathbf{R}$; atunci obținem

$$f(t) = \frac{2f\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + f^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2a}{1 + a^2}, \text{ unde } a = f\left(\frac{t}{2}\right) \in \mathbf{R}.$$

Deoarece $\frac{2a}{1 + a^2} \in [-1, 1]$, $(\forall)\, a \in \mathbf{R}$, rezultă că și $f(t) \in [-1, 1]$. Să arătăm

acum că f nu poate lua valorile 1 și -1. Dacă ar exista o valoare x_0 pentru care $f(x_0) = 1$, atunci

$$f(x + x_0) = \frac{f(x) + f(x_0)}{1 + f(x)f(x_0)} = \frac{f(x) + 1}{1 + f(x)} = 1, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}$$

și deci funcția ar fi constantă. Rezultă că funcția nu poate lua valoarea 1. Analog se arată că funcția nu poate lua valoarea -1. Deci, în concluzie, $f(x) \in (-1, 1)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. b) Dacă f este continuă în 0, rezultă că $(\forall)\,(x_n)$ astfel încît $x_n \to 0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ $f(0) = 0$. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ și să considerăm un șir oarecare $x_n \to x_0$. Fie șirul $y_n = x_0$ care este convergent către 0. Rezultă deci că

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_0 - x_n) = \lim_{x_n\to x_0} \frac{f(x_0) - f(x_n)}{1 + f(x_0)f(x_n)} = 0,$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{x_n\to x_0} (f(x_0) - f(x_n)) = 0$ și deci $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = f(x_0)$, adică funcția f este continuă în punctul x_0. c) Să presupunem că f este derivabilă în $x = 0$, adică

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) \text{ există și este finită.}$$

Fie un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ și să considerăm limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x - x_0)}{x - x_0} \frac{1}{1 - f(x)f(x_0)}.$$

Deoarece $x - x_0 \to 0$ și funcția este derivabilă în $x = 0$ și continuă în punctul x_0 (conform demonstrației de la punctul b), rezultă că limita raportului $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există și este finită și deci funcția este derivabilă în punctul x_0. Rezultă că

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(0) \frac{1}{1 - f^2(x_0)}, \quad (\forall)\, x_0 \in \mathbf{R}.$$

4. a) Fie $t \in [0, 2\pi]$ fixat, $d \cap C = \{A, B\}$, P' proiecția lui P pe Ox și Q proiecția lui P pe d. Se determină ușor că $OQ = x\cos t + y\sin t$, $(\forall)\, t \in [0, 2\pi]$. Evident, maximul lungimii segmentului $[OQ]$ se obține cînd $Q = P = B$, deci $f(t) = OB = L(t, B)$. Să determinăm coordonatele punctului B. Ele sînt $x = a + r\cos t$ și $y = b + r\sin t$. În sfîrșit, $f(t) = (a + r\cos t)\cos t + (b + r\sin t)\sin t = a\cos t + b\sin t + r$. Deoarece a, b, r sînt fixați, $|\sin t| \leqslant 1$, $|\cos t| \leqslant 1$, evident funcția f este mărginită și $0 \leqslant f(t) \leqslant a + b + r$, $(\forall)\, t \in [0, 2\pi]$. b) Ținînd seama de punctul a rezultă $OQ = x\cos t + y\sin t \leqslant f(t)$ deoarece $L(t, P) \leqslant \max L(t, P)$. c) Dezvoltînd determinantul, găsim

$$\Delta = f(t_1)(\sin t_3 \cos t_2 - \sin t_2 \cos t_3) - f(t_2)(\sin t_3 \cos t_1 - \sin t_1 \cos t_3) +$$
$$+ f(t_3)(\sin t_2 \cos t_1 - \sin t_1 \cos t_2) = f(t_1)\sin(t_3 - t_2) - f(t_2)\sin(t_3 - t_1) +$$
$$+ f(t_3)\sin(t_2 - t_1).$$

Din enunțul problemei avem că $\sin(t_3 - t_2) \geqslant 0$, $\sin(t_2 - t_1) \geqslant 0$ și, cum $f(t_1)$, $f(t_2)$, $f(t_3)$ sînt pozitive, rămîne de arătat că dacă

$$t_1 < t_2 < t_3, \ t_3 - t_2 < \pi \text{ și } t_2 - t_1 < \pi, \text{ atunci } \pi < t_3 - t_1 < 2\pi.$$

Din inegalitățile $t_1 < t_2 < t_3$ rezultă $0 < t_2 - t_1 < t_3 - t_1$ și din $t_2 - t_1 > \pi$ rezultă că (1) $t_3 - t_1 > \pi$. Adunînd relațiile $t_3 - t_2 < \pi$ și $t_2 - t_1 < \pi$ rezultă (2) $t_3 - t_1 < 2\pi$.

Din (1) și (2) rezultă că $\pi < t_3 - t_1 < 2\pi$ și deci $\sin(t_3 - t_1) < 0$. În concluzie, $\Delta > 0$ deoarece este sumă de trei termeni pozitivi.

5. Să notăm $I = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}^*} \left(\frac{1}{12n+1}, \frac{1}{12n-1}\right)$. Trebuie găsită o funcție elementară $f: I \to \mathbf{R}$. Se poate considera funcția $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{6x} - \frac{\sqrt{3}}{2}}}$ care are ca domeniu de definiție I.

Anul 1977

Etapa județeană

1. Vom distinge două cazuri: cînd una din mulțimi este finită și cînd ambele mulțimi A_1, A_2 sînt infinite. i) Dacă A_1 este finită, fie c cel mai mare element al mulțimii A_1. Pentru $n \in \{0, 1, 2, ..., c\}$ alegem $a > c$, $b > c$, deci și $a + b > c$, ceea ce arată că $a, b, a + b \in A_2$. Prin urmare, $a > n$, $b > n$ și $\{a, b, a + b\} \subset A_2$. Dacă $n > c$, luînd $a > n$, $b > n$, arbitrare, avem $\{a, b, a + b\} \subset A_2$. ii) Presupunem că A_1 și A_2 sînt infinite. Fie $n \in \mathbf{N}$ dat. Atunci $(\exists)\, x \in A_1$, $x > n$, și $(\exists)\, y \in A_2$, $y > n$. Numărul $x + y$ aparține fie mulțimii A_1, fie mulțimii A_2. Fie, de exemplu, $x + y \in A_1$. Considerăm și numărul natural $2x + y$. El poate să fie sau în A_1 sau în A_2. Dacă $2x + y \in A_1$, atunci avem $\{x, x + y, 2x + y\} \subset A_1$ și proprietatea este dovedită. Dacă $2x + y \in A_2$, atunci luăm și numărul natural $2x + 2y$. El poate fi în A_1 sau în A_2. Dacă $2x + 2y \in A_2$, atunci $\{y, 2x + y, 2x + 2y\} \subset A_2$ și proprietatea este dovedită. Dacă $2x + 2y \in A_1$, considerăm și numărul $3x + 2y$, care aparține lui A_1 sau lui A_2. Dacă $3x + 2y \in A_1$, atunci $\{x, 2x + 2y, 3x + 2y\} \subset A_1$ și proprietatea este dovedită. Dacă $3x + 2y \in A_2$, considerăm și numărul $3x + 3y$, care este fie în A_1, fie în A_2. Dacă $3x + 3y \in A_1$, atunci $\{x + y, 2x + 2y, 3x + 3y\} \subset A_1$, iar dacă $3x + 3y \in A_2$, atunci $\{y, 3x + 2y, 3x + 3y\} \subset A_2$, deci oricum proprietatea din enunț are loc. Dacă am fi presupus $x + y \in A_2$, am fi urmat un raționament analog.

2. Notînd $a^p = b$, avem

$$A = \begin{pmatrix} b+p & b & b \\ b & b+p & b \\ b & b & b+p \end{pmatrix} = bM + pI, \text{ unde}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece M și I comută la înmulțire, vom putea aplica formula binomului lui Newton, pentru calculul lui A^n. Mai întîi, avem $M^2 = 3M$ și prin inducție se arată că $M^k = 3^{k-1}M$, $(\forall)\, k \in \mathbf{N}^*$. Atunci, avem

$$A^n = (bM + pI)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (bM)^{n-k} (pI)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^{n-k} p^k M^{n-k} I =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k b^{n-k} p^k \cdot 3^{n-k-1} M + C_n^n p^n I = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (3b)^{n-k} p^k \cdot M + p^n I =$$

$$= \frac{1}{3}((3b + p)^n - p^n)M + p^n I = \frac{(3b+p)^n}{3} M + p^n\left(I - \frac{1}{3} M\right),$$

care se poate scrie imediat, înlocuind $b = a^p$ și ținînd seama de definiția matricilor M și I. Pentru $p = 0$, avem $a^p = b = 1$ și obținem $A^n = M$, deci $\det(A^n) = 0$.

3. a) P_1 nu implică P_3: contraexemplu, șirul $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ care satisface P_1 dar nu satisface P_3; b) P_2 nu implică P_3; contraexemplu, șirul $a_n = (-1)^n$ care satisface P_2 dar nu satisface P_3; c) Reamintim proprietatea: dacă x_n este un șir convergent către o limită a, atunci și șirul $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ este convergent către aceeași limită (vezi *Analiza matematică*. Manual pentru clasa a XI-a). Luînd $x_n = n(a_{n+1} - a_n)$, folosind P_1 și proprietatea de mai sus, deducem că șirul

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{a_2 - a_1 + 2(a_3 - a_2) + \ldots + n(a_{n+1} - a_n)}{n} =$$

$$= a_{n+1} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

are limita a. Dar din P_2 știm că șirul $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ are limita b. Rezultă imediat că a_{n+1} are limita $a + b$, adică șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent, deci am arătat P_3.

4. Demonstrăm prin inducție propoziția:

$$P(n) : f_n(x) = 1 - (1 - x)^{2^n}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Avem $f_1(x) = -x^2 + 2x = 1 - (1 - x)^{2^1}$, ceea ce arată că $P(1)$ este adevărată. Presupunem $P(k)$ adevărată, adică $f_k(x) = 1 - (1 - x)^{2^k}$ și să arătăm că și $P(k + 1)$ este adevărată. Folosind relația de recurență, avem

$$f_{k+1}(x) = f_1(f_k(x)) = -f_k^2(x) + 2f_k(x) = -\left(1 - (1 - x)^{2^k}\right)^2 +$$
$$+ 2\left(1 - (1 - x)^{2^k}\right) = 1 - (1 - x)^{2^{k+1}},$$

ceea ce arată că și $P(k + 1)$ este adevărată. Convergența șirului $(f_n(x))_{n \geq 0}$ este imediată: $(f_n(0))$ și $(f_n(1))$ sînt șiruri constante, iar $(f_n(x))$, cu $x \in (0, 1)$, este diferență de două șiruri convergente. Putem trece acum la determinarea funcției f. Pentru $x = 0$, avem

$$f(0) = \lim_{n \to \infty} f_n(0) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0.$$

Pentru $x = 1$, avem

$$f(1) = \lim_{n \to \infty} f_n(1) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1.$$

Pentru $x \in (0, 1)$, avem

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - (1 - x)^{2^n}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Așadar,

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x = 0 \\ 1 \text{ dacă } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Graficul acestei funcții se trasează imediat.

1. Fie $M(\alpha, \beta)$ un punct de pe dreapta AB cu $\alpha \notin [a, b]$, deci altfel spus $M \notin [AB]$. Considerăm funcția

$$F : [a, b] \to \mathbf{R}, \quad F(x) = \frac{\beta - f(x)}{\alpha - x}.$$

Funcția F verifică ipotezele teoremei lui Rolle: într-adevăr, este evident continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a,b), iar egalitatea $F(a) = F(b)$ exprimă faptul că pantele dreptelor MA și MB sînt aceleași (lucru evident, deoarece dreptele sînt una și aceeași). Conform teoremei lui Rolle $(\exists)x_0 \in (a, b)$ astfel încît $F'(x_0) = 0$. Cum $F'(x) = \dfrac{-f'(x)(\alpha - x) + \beta - f(x)}{(\alpha - x)^2}$, egalitatea de mai sus este echivalentă cu

$$\beta - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0),$$

ceea ce arată că punctul $M(\alpha, \beta)$ este situat pe tangenta la graficul funcției dusă în punctul $N_0(x_0, f(x_0))$. Altfel spus, această tangentă trece prin M și problema este rezolvată.

2. Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, avem

$$A \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \quad a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{n2} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 & \sum_{k=1}^{n} (a_{1k}a_{2k}) \dots & \sum_{k=1}^{n} (a_{1k}a_{nk}) \\ \sum_{k=1}^{n} (a_{2k}a_{1k}) & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 & \sum_{k=1}^{n} (a_{2k}a_{nk}) \\ \\ \sum_{k=1}^{n} (a_{nk}a_{1k}) & \sum_{k=1}^{n} (a_{nk}a_{2k}) \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2 \end{pmatrix}.$$

Vom însuma elementele matricii produs într-un anumit fel. Adunăm pe fiecare coloană primii termeni din sumele care reprezintă elementele respective și obținem

pe prima coloană: $a_{11}(a_{11} + a_{21} + \quad + a_{n1})$
pe a doua coloană: $a_{21}(a_{11} + a_{21} + \quad + a_{n1})$

pe a n-a coloană: $a_{n1}(a_{11} + a_{21} + \quad + a_{n1})$.

Făcînd suma acestor elemente (pentru toate coloanele) obținem

$$a_{11}(a_{11} + a_{21} + \quad + a_{n1}) + a_{21}(a_{11} + a_{21} + \quad + a_{n1}) + \dots +$$

$$+ a_{n1}(a_{11} + a_{21} + \quad + a_{n1}) = (a_{11} + a_{21} + \quad + a_{n1})^2.$$

Dacă vom lua acum pe fiecare coloană cel de-al doilea termen din sumele respective și sumăm pe coloană, iar apoi rezultatele le sumăm între ele, vom obține analog

$$(a_{12}+a_{22}+\quad+a_{n2})^2 \text{ ș.a.m.d.}$$

Făcînd suma acestor sume, vom obține suma tuturor elementelor matricii AA' Așadar, această sumă este

$$(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1})^2+(a_{12}+a_{22}+\quad+a_{n2})^2+\quad+(a_{1n}+a_{2n}+\ldots+a_{nn})^2$$

și, cum prin ipoteză valoarea sa este zero, deducem

$$a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1}=0,\ a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2}=0;\ \ldots;\ a_{1n}+a_{2n}+\ldots+a_{nn}=0.$$

Pentru calculul lui det (A), adunăm la prima linie toate celelalte linii și vom obține (în baza egalităților precedente) o linie numai cu zerouri. Rezultă det $(A)=0$.

3. Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu (1) $C_n^k \leqslant e^{k(n-k)}$. Deoarece $k \leqslant n$ avem inegalitățile evidente

$$\frac{n}{k} \leqslant \frac{n-1}{k-1} \leqslant \frac{n-2}{k-2} \leqslant \quad \leqslant \frac{n-k+2}{2} \leqslant \frac{n-k+1}{1}.$$

În baza acestor inegalități putem scrie

$$C_n^k = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\quad\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} \leqslant (n-k+1)^k,$$

adică (2) $C_n^k \leqslant (n-k+1)^k$. Folosind și inegalitatea lui Bernoulli, avem

$$e^{n-k} > 2^{n-k} = (1+1)^{n-k} \geqslant 1+1\cdot(n-k) = n-k+1$$

și ridicînd la puterea k obținem (3) $e^{k(n-k)} \geqslant (n-k+1)^k$. Din (2) și (3) rezultă (1).

4. Făcînd $n=1976$ în relația de recurență, obținem

$$1-4a_{1976}+4a_{1976}^2=0, \text{ de unde } a_{1976}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$$

Făcînd $n=1975$, obținem $\frac{1}{2}-4a_{1975}+4a_{1975}^2=0$, de unde $a_{1975}\in\left\{\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}\right\}$. Făcînd $n=1974$, obținem $\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}-4a_{1974}+4a_{1974}^2=0$, de unde $a_{1974}\in\left\{\frac{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}{4}\right\}$ semnele $\pm$ se aleg oricum. Demonstrăm prin inducție după p propoziția:

$$P(p): a_{1977-p}\in\left\{\frac{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\ldots\pm\sqrt{2}}}}{4}\,\middle|\, 2 \text{ apare de } p \text{ ori iar semnele } \pm \text{ se aleg oricum}\right\}.$$

Am arătat că P(1), P(2), P(3) sînt adevărate. Presupunem că P(k) este adevărată, deci că

$$a_{1977-k}\in\left\{\frac{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\ldots\pm\sqrt{2}}}}{4}\,\middle|\, 2 \text{ apare de } k \text{ ori, iar semnele } \pm \text{ se aleg oricum}\right\}.$$

Facem $n = 1977 - k - 1$ în relația de recurență și obținem

$$a_{1977-k} - 4a_{1977-k-1} + 4a^2_{1977-k-1} = 0, \text{ de unde}$$

$$a_{1977-k-1} \in \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4a_{1977-k}}}{4} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{4\left(1 - \frac{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots \pm \sqrt{2}}}{4}\right)}}{4} \middle| \begin{array}{l} 2 \text{ apare în paranteză de } k \text{ ori, iar semnele} \\ \pm \text{ se aleg oricum} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots \pm \sqrt{2}}}}{4} \middle| \begin{array}{l} 2 \text{ apare de } k+1 \text{ ori, iar semnele } \pm \text{ apar oricum} \end{array} \right\}.$$

Cu aceasta $P(k+1)$ este adevărată. Atunci $P(p)$ este adevărată, $(\forall)p$, $1 \leqslant p \leqslant 1976$. Făcînd $p = 1976$, deducem că

$$a_1 \in \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots \pm \sqrt{2}}}{4} \middle| \begin{array}{l} 2 \text{ apare de 1976 ori, iar semnele } \pm \text{ se aleg oricum} \end{array} \right\}.$$

Anul 1978

Etapa județeană

1. Vom arăta că propoziția este adevărată, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Să presupunem prin absurd că șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu are limita ∞. Aceasta înseamnă că $(\exists)\varepsilon_0 > 0$ astfel că $(\forall)k \in \mathbf{N}$, $(\exists)n_k \geqslant k$ cu proprietatea $x_{n_k} < \varepsilon_0$. Altfel spus, șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ conține un subșir mărginit $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$. Numerele x_{n_k} fiind naturale și subșirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ fiind mărginit, deducem că mulțimea $A = \{x_{n_k} \mid k \in \mathbf{N}\}$ este finită. Atunci, cu atît mai mult și mulțimea $B = \{x_{x_{n_k}} \mid k \in \mathbf{N}\}$ este o mulțime finită (deoarece indicii x_{n_k} parcurg mulțimea finită A). Pe de altă parte, folosind proprietatea din enunț avem $x_{x_{n_k}} = n_k^4$ și deci $B = \{x_{x_{n_k}} \mid k \in \mathbf{N}\} = \{n_k^4 \mid k \in \mathbf{N}\}$ și ultima mulțime este infinită (aceasta deoarece pentru fiecare $k \in \mathbf{N}$ găsim un $n_k \geqslant k$). Contradicția la care am ajuns arată că trebuie să avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

2. Se calculează $\det(A+X)$ aplicînd succesiv proprietatea că dacă elementele unei coloane a unui determinant sînt sume de cîte doi termeni, atunci determinantul este o sumă de doi determinanți. Ținînd seamă de faptul că o parte din determinanții ce se obțin pe parcursul unei asemenea dezvoltări sînt nuli, întrucît au două coloane egale, se obține în final

$$\det(A + X) = \det(A) + x\sum_{i=1}^{n} D_i,$$

unde D_i este determinantul obținut din $\det(A)$ prin înlocuirea coloanei de ordinul i cu coloana formată numai cu elemente egale cu 1. În mod analog (sau, pur și simplu, înlocuind x cu $-x$), obținem

$$\det(A - X) = \det(A) - x\sum_{i=1}^{n} D_i.$$

. Atunci

$$\det(A+X)\det(A-X) \geq (\det(A))^2 - x^2\left(\sum_{i=1}^{n} D_i\right)^2 \leq (\det(A))^2.$$

3. Rămîne să arătăm că funcțiile f și g iau valori egale în punctele iraționale. Fie $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ și să considerăm două șiruri de numere raționale (x_n) și (y_n) convergente la α și astfel încît (1) $x_n < \alpha < y_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Să presupunem că g este crescătoare (analog s-ar trata cazul cînd g este descrescătoare). Aplicînd funcția g în inegalitatea (1) obținem $g(x_n) \leq g(\alpha) \leq g(y_n)$ sau, deoarece g și f coincid pe numerele raționale, putem scrie (2) $f(x_n) \leq g(\alpha) \leq f(y_n)$. Funcția f fiind continuă, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(\alpha)$ și analog $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(\alpha)$. Trecînd la limită în (2) vom obține atunci $f(\alpha) \leq g(\alpha) \leq f(\alpha)$, adică $f(\alpha) = g(\alpha)$, ceea ce trebuia demonstrat.

4. i) Să presupunem că $x_0 \in (a, b)$. Deoarece $f(x_0) < y_0$, există o vecinătate $V = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ a lui x_0 astfel încît $f(x) < y_0$, $(\forall)\, x \in V$. Să notăm $M_1 = \sup\limits_{x\in V} f(x)$ și $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, deci $M_1 < y_0$ și $M_1 \leq M$. Vom căuta să determinăm funcția de gradul al doilea P în așa fel încît în punctul x_0 să admită un minim egal cu $\dfrac{M_1 + y_0}{2}$, iar în punctele $x_0 - \varepsilon$ și $x_0 + \varepsilon$ să aibă o valoare M_2, cu $M_2 > \max\left(M, \dfrac{M_1 + y_0}{2}\right)$. Pentru aceasta căutăm P de forma $P(x) = \theta(x - x_0)^2 + \dfrac{M_1 + y_0}{2}$, unde $\theta > 0$ va fi determinat din condiția $P(x_0 - \varepsilon) = P(x_0 + \varepsilon) = M_2$; rezultă $\theta = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\left(M_2 - \dfrac{M_1 + y_0}{2}\right)$ care este pozitiv, ținînd seama de alegerea lui M_2. Este clar că minimul funcției P se atinge în punctul x_0 și avem $P(x_0) = \dfrac{M_1 + y_0}{2} < y_0$. Rămîne să mai arătăm că $f(x) < P(x)$, $(\forall) x \in [a, b]$. Pentru $x \in V$ avem

$$f(x) \leq M_1 < \frac{M_1 + y_0}{2} = P(x_0) \leq P(x).$$

Pentru $x \in [a, x_0 - \varepsilon) \cup (x_0 + \varepsilon, b]$, ținînd seama de monotonia funcției P, avem $f(x) \leq M < M_2 = P(x_0 \pm \varepsilon) < P(x)$ și cu aceasta cazul i) este încheiat. ii) Dacă $x_0 = a$ sau $x_0 = b$, raționamentul este practic același, numai că se va lua un interval de forma $[a, a + \varepsilon]$, respectiv $[b - \varepsilon, b]$.

Etapa finală

1. Fie $x_0 = \sqrt{k}$, $k \in \mathbf{N}$, $x_0 \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. i) Fie un șir $x_n' \to x_0$ cu $x_n' \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, $x_n' \neq x_0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Avem:

$$\frac{f(x_n') - f(x_0)}{x_n' - x_0} = \frac{0 - 0}{x_n' - x_0} = 0, \text{ deci și } \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n') - f(x_0)}{x_n' - x_0} = 0.$$

ii) Fie un șir $x_n'' \to x_0$ cu $x_n'' \in \mathbf{Q}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Avem

$$x_n'' = \frac{p_n}{q_n},\ q_n > 0 \text{ și } (p_n, q_n) = 1.$$

Mai întîi rezultă că $q_n \to \infty$. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că (q_n) nu tinde la ∞. Aceasta înseamnă că $(\exists)\ \varepsilon_0 > 0$ astfel încît $(\forall)\ s \in \mathbf{N}$, $(\exists)\ n_s \geqslant s$ cu $q_{n_s} \leqslant \varepsilon_0$. Altfel spus, șirul (q_n) admite un subșir (q_{n_s}) mărginit. Cum q_{n_s} sînt numere naturale, rezultă că în subșirul (q_{n_s}) există numai un număr finit de valori ale termenilor. Cum $\frac{p_n}{q_n} \to \sqrt{k}$, scriind definiția cu ε și luînd $\varepsilon = 1$, obținem că de la un anumit rang există inegalitatea $p_n < (1 + \sqrt{k})\, q_n$ și atunci $p_{n_s} < (1 + \sqrt{k})\, q_{n_s}$ (pentru n_s de la acel rang încolo). Rezultă că și subșirul (p_{n_s}) este mărginit și de aici deducem că termenii săi iau numai un număr finit de valori. Dar în aceste condiții și termenii subșirului $\left(\frac{p_{n_s}}{q_{n_s}}\right)$ iau doar un număr finit de valori, ceea ce face ca acest subșir să nu fie convergent. Pe de altă parte, șirul $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ fiind convergent, rezultă că și subșirul $\left(\frac{p_{n_s}}{q_{n_s}}\right)$ este convergent. Contradicția obținută arată că trebuie să avem $q_n \to \infty$. Avem:

$$(1) \qquad \frac{f(x_n'') - f(x_0)}{x_n'' - x_0} = \frac{\frac{1}{q_n^3}}{\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{k}} = \frac{1}{q_n^2 (p_n - q_n \sqrt{k})}.$$

Deoarece $\sqrt{k}$ este irațional, rezultă $p_n^2 - q_n^2 k \neq 0$ și atunci $|p_n^2 - q_n^2 k|$ este număr natural nenul, adică $|p_n^2 - q_n^2 k| \geqslant 1$, de unde

$$\frac{1}{|p_n - q_n \sqrt{k}|} \leqslant |p_n + q_n \sqrt{k}|, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Mai ținem seama că șirul $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ fiind convergent este mărginit, deci $(\exists)\ M > 0$ cu $\left|\frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant M$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Trecînd în (1) la module, vom avea

$$\left|\frac{f(x_n'') - f(x_0)}{x_n'' - x_0}\right| = \frac{1}{q_n^2 |p_n - q_n \sqrt{k}|} \leqslant \frac{|p_n + q_n \sqrt{k}|}{q_n^2} = \frac{\left|\frac{p_n}{q_n} + k\right|}{q_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M + \sqrt{k}}{q_n}. \text{ Cum } q_n \to \infty, \text{ rezultă } \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n'') - f(x_0)}{x_n'' - x_0} = 0.$$

iii) Fie acum un șir oarecare $x_n \to x_0$, $x_n \neq 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Dacă (x_n) are numai un număr finit de termeni raționali, sau numai un număr finit de termeni iraționali, atunci, practic, ajungem la unul din cazurile i) sau ii) (începînd de la un anumit rang). Să presupunem că (x_n) are o infinitate de termeni raționali și o infinitate de termeni iraționali; fie (x_{n_s}') subșirul termenilor raționali și (x_{n_t}'') subșirul termenilor iraționali. Atunci

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x_n = x_{n_s}', \\ \dfrac{f(x_{n_t}'') - f(x_0)}{x_{n_t}'' - x_0} & \text{dacă } x_n = x_{n_t}'', \end{cases}$$

deci $\left|\frac{f(x)-f_n(x_0)}{x_n-x_0}\right| \leqslant \left|\frac{f(x_{n_i})-f(x_0)}{x_{n_i}-x_0}\right|$ și, aplicînd cazul ii), rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = 0.$$

Cu aceasta am arătat că $f'(\sqrt{k})$ există și este egală cu 0.

2. a) Din definiția lui c_n, avem

$$c_1 = 4^0 = 1,$$
$$c_2 = c_3 = c_4 = 4^1,$$
$$c_5 = c_6 = \ldots = c_{16} = 4^2.$$

În general, vom avea (1) $c_n = 4^i$ pentru $4^{i-1} < n \leqslant 4^i$. Fie atunci $n \in \mathbb{N}$ și k ales cu proprietatea: $4^{k-1} < n \leqslant 4^k$. Ținînd seama că în intervalul $(4^{i-1}, 4^i]$ se găsesc $4^i - 4^{i-1}$ numere naturale, $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, iar în intervalul $(4^{k-1}, n]$ se găsesc $n - 4^{k-1}$ numere naturale, folosind (1) putem scrie:

$$b_n = 1 + (4^1 - 1)\cdot 4^1 + (4^2 - 4)\cdot 4^2 + \ldots + (4^{k-1} - 4^{k-2})\cdot 4^{k-1} + (n - 4^{k-1})\cdot 4^k - \frac{1}{5} =$$

$$= 1 + 3\cdot 4 + 3\cdot 4^3 + \quad + 3\cdot 4^{2k-3} + (n - 4^{k-1})4^k - \frac{1}{5}$$

$$= 1 + 12\frac{16^{k-1}-1}{16-1} + n\cdot 4^k - 4^{2k-1} - \frac{1}{5} = 1 + \frac{4^{2k-1}}{5} - \frac{4}{5} + n\cdot 4^k - 4^{2k-1} - \frac{1}{5} =$$

$$= n\cdot 4^k - \frac{4^{2k}}{5} \overset{(1)}{=} nc_n - \frac{c_n^2}{5}.$$

Rezultă $\frac{b_n}{n^2} = \frac{c_n}{n} - \frac{1}{5}\left(\frac{c_n}{n}\right)^2$ b) Vom arăta mai întîi că pentru orice $\alpha \in [1, 4]$, există un șir $n_k \to \infty$, astfel încît $\lim\limits_{n_k\to\infty} \frac{c_{n_k}}{n_k} = \alpha$. Dacă $\alpha \in [1, 4)$, vom lua $n_k = \left[\frac{4^k}{\alpha}\right]$; atunci avem $\frac{4^k}{\alpha} \leqslant 4^k$, deci și $n_k \leqslant 4^k$, iar pentru $k \geqslant 1 + \log_4 \frac{\alpha}{4-\alpha}$ avem $\frac{4^k}{\alpha} \geqslant 4^{k-1} + 1$, deci și $n_k \geqslant 4^{k-1} + 1 > 4^{k-1}$. Astfel, pentru $k \geqslant k_0$ avem $4^{k-1} < n_k \leqslant 4^k$ și deci $c_{n_k} = 4^k$. Atunci, $\lim\limits_{n_k\to\infty} \frac{c_{n_k}}{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{4^k}{\left[\frac{4^k}{\alpha}\right]} = \alpha$ (pentru calculul limitei se ține seama că $\frac{4^k}{\alpha} \leqslant \left[\frac{4^k}{\alpha}\right] < \frac{4^k}{\alpha} + 1$). Dacă $\alpha = 4$, luăm $n_k = 4^k + 1$ și vom avea $c_{n_k} = 4^{k+1}$, deci

$$\lim_{n_k\to\infty} \frac{c_{n_k}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4^{k+1}}{4^k + 1} = 4 = \alpha.$$

Fie acum funcția $f:[1, 4] \to \mathbf{R}$. $f(x) = x - \frac{1}{5}x^2$. Maximul acestei funcții se atinge în punctul $x = \frac{5}{2}$ și are valoarea $\frac{5}{4}$. Cum $f(1) = \frac{4}{5}$, $f(4) = \frac{4}{5}$, deducem că $\operatorname{Im} f = \left[\frac{4}{5}; \frac{5}{4}\right]$. Fie atunci $d \in \left[\frac{4}{5}; \frac{5}{4}\right]$; rezultă că există $\alpha \in [1, 4]$ cu $d = f(\alpha)$. Dar conform celor arătate anterior, va exista un șir $n_k \to \infty$ pentru care $\alpha = \lim\limits_{n_k \to \infty} \frac{c_{n_k}}{n_k}$. Ținînd seama de toate acestea, ca și de punctul a, avem

$$d = f(\alpha) = f\left(\lim_{n_k \to \infty} \frac{c_{n_k}}{n_k}\right) = \lim_{n_k \to \infty} f\left(\frac{c_{n_k}}{n_k}\right) = \lim_{n_k \to \infty} \frac{b_{n_k}}{n_k^2}.$$

3. Fie funcțiile $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f_1(x) = x\,|x - a_1|$, $f_2(x) = |x - a_2| + |x - a_3| + \ldots + |x - a_n|$. Avem $f = f_1 + f_2$. Să presupunem că f este derivabilă pe $\mathbf{R}$. Cum f_2 nu este derivabilă pe $\mathbf{R}$ (nefiind derivabilă în $a_2, a_3, \ldots, a_n$) rezultă că $f - f_2 = f_1$, nu este derivabilă pe $\mathbf{R}$. Rezultă atunci $a_1 \neq 0$. Înseamnă că f_1 va fi derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a_1\}$. Pe de altă parte, f_2 este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, deci și $f - f_2 = f_1$ va fi derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Deducem $\{a_1\} = \{a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, adică $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$. Funcția f devine $f(x) = x|x - a_1| + (n - 1)\,|x - a_1| = (x + n - 1)\,|x - a_1|$ și este derivabilă pe $\mathbf{R}$ numai dacă $a_1 = 1 - n$. Așadar, condiția necesară pentru derivabilitatea funcției f este

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 1 - n.$$

Această condiție este și suficientă, deoarece se verifică ușor că funcția $f(x) = (x + n - 1)\,|x + n - 1|$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

4. Strategia cu care A ajunge singur la cîștig se va baza pe plasarea de zerouri astfel încît să realizeze o linie (coloană) de zerouri sau un minor de ordinul 2 format din zerouri, căci în aceste cazuri determinantul matricii pătrate de ordinul 3 este nul. Presupunem că jocul este început de B. Atunci A va plasa un zero pe un loc din altă linie și altă coloană decît B. Oricum va juca B, la pasul următor A poate plasa un zero pe linia sau coloana pe care a fost situat primul zero și care rămîne neocupată de B. Persoana B este acum forțată să plaseze un număr pe această linie sau coloană, în scopul de a-l împiedica pe A să-și plaseze cel de-al treilea zero (care ar duce la anularea determinantului). În acest fel, B a plasat două din cele trei numere de pînă acum, pe o aceeași linie sau coloană. Înseamnă că rămîne o linie sau o coloană pe care B nu are plasat nici un număr. Atunci A plasează pe aceasta un zero și la pasul următor are certitudinea că îi va apare o linie (coloană) de zerouri, sau un minor de ordinul 2 format din zerouri, ceea ce înseamnă că va aduce la obținerea unei matrici singulare. Exemplu: fie matricea $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ și considerăm jocul:

1) B ocupă a_{22}, iar A plasează zero în a_{13};
2) B ocupă a_{33}, iar A plasează zero în a_{11};
3) B ocupă a_{12}, iar A plasează zero în a_{21}.

În felul acesta A și-a creat perspectiva de a plasa un zero în a_{31} sau în a_{23}. Dacă jocul ar fi început de A, după plasarea unui prim zero, acesta va continua după strategia de mai înainte.

Anul 1979

Etapa județeană

1. Rezultă că $\det(xA + yB) = a_0(x)y^3 + a_1(x)y^2 + a_2(x)y + a_3(x)$. Pentru $y = 0$ se obține $\det xA = x^3 \det A = a_3(x)$, deci $a_3(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Pentru $y = x$ se obține $\det(xA + yB) = x^3 \det(A + B) = 0$, deci $a_0(x)x^3 + a_1(x)x^2 + a_2(x)x = 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ iar pentru $y = -x$ se obține $-a_0(x)x^3 + a_1(x)x^2 - a_2(x)x = 0$, de unde $a_1 = 0$. Apoi, $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{1}{y^3} \det(xA + yB) = 0$ (căci $\det B = 0$), deci $a_0 = 0$ etc.

2. Luînd $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = f(0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n + c_n + d_n) = f(1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} (8a_n + 4b_n + 2c_n + d_n) = f(2)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} (27a_n + 9b_n + 3c_n + d_n) = f(3)$, de unde rezultă că șirurile (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) sînt convergente (cu limitele a, b, c, d), și atunci $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ etc. În general, limitele punctuale ale șirurilor de polinoame nu sînt funcții polinomiale; aici se consideră însă polinoame cu grade egale.

3. Notăm $x_{n+1} - x_n = y_n$ și se obține $(n + 1)y_{n+1} + y_n = 0$, de unde $y_{n+1} = -\frac{1}{n+1} y_n$ pentru orice $n \geqslant 0$, deci $y_n = \frac{(-1)^n}{n!} y_0$, adică $x_{n+1} - x_n = \frac{(-1)^n}{n!} y_0$. Așadar, $x_n = x_0 + \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \quad + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) y_0$ pentru orice $n \geqslant 1$. Șirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent $\left(\text{cu limita } x_0 + \frac{1}{e} y_0\right)$.

4. Fie m_1 cea mai mică valoare a lui x^n pentru $x \in [a, b]$, n fiind fixat. Fie m, M marginile funcției f pe $[a, b]$. Este suficient de luat $Q_n(x) = x^n + A$, unde A este o constantă aleasă astfel încît $M \leqslant m_1 + A$, căci atunci $f(x) \leqslant M \leqslant m_1 + A \leqslant x^n + A = Q_n(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$ etc.

Etapa finală

1. a) Fie (k_n) un șir crescător de numere naturale cu $k_0 = 0$ și $k_{n+1} - k_n = 0$ sau 1. Atunci putem construi mulțimea A avînd $a_A(n) = k_n$. Pentru aceasta construim prin inducție mulțimile $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ cu $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ și fiecare mulțime A_n are exact k_n elemente și toate elementele lui A_n sînt mai mici ca n. Pentru aceasta vom pune $A_0 = \emptyset$ și $A_{n+1} = A_n$ dacă $k_{n+1} = k_n$ sau $A_{n+1} = A_n \cup \{n+1\}$ dacă $k_{n+1} = k_n + 1$. Atunci mulțimea $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$ are exact k_n elemente mai mici decît n, și anume elementele lui A_n, deoarece elementele din $A_m \setminus A_n$ cu $m > n$ sînt mai mari ca n și deci avem $a_A(n) = k_n$. Pentru orice $\alpha \in [0,1]$ vom pune acum $k_n = [n\alpha]$. Atunci $k_0 = 0$ și

$$k_{n+1} - k_n = [(n + 1)\alpha] - [n\alpha] = [n\alpha + \alpha] - [n\alpha] = [[n\alpha] + (n\alpha) + \alpha] - [n\alpha] =$$
$$= [n\alpha] + [(n\alpha) + \alpha] - [n\alpha] = [(n\alpha) + \alpha] = 0 \text{ sau } 1.$$

Cu $(n\alpha)$ s-a notat $n\alpha - [n\alpha] \in [0, 1)$ și $\alpha \in [0, 1]$. Putem atunci construi mulțimea A avînd $a_A(n) = k_n$ și atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_A(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha$ $\left(\text{Se trece la limită după } n \text{ în } \frac{n\alpha - 1}{n} < \frac{[n\alpha]}{n} < \frac{n\alpha}{n}\right)$ b) Să construim acum șirul k_n definit în felul

următor: $k_0 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ și $k_{n+1} = k_n$ dacă $n \in I'_p = (2^p, 3 \cdot 2^{p-1})$ sau $k_{n+1} = k_n + 1$ dacă $n \in I''_p = (3 \cdot 2^{p-1}, 2^{p+1})$. În acest mod k_n este definit prin inducție pentru orice $n \in \mathbf{N}$ și arătăm prin inducție că $k_{2^p} = 2^{p-1}$. Într-adevăr, pentru $p = 1$ avem $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ și $k_{2^{p+1}} - k_{2^p} = \sum_{i=2^p+1}^{2^{p+1}} (k_i - k_{i-1}) =$

$$= \sum_{i \in I'_p} (k_i - k_{i-1}) + \sum_{i \in I''_p} (k_i - k_{i-1}) = \sum_{i \in I'_p} 0 + \sum_{i \in I''_p} 1 = 2^{p+1} - 3 \cdot 2^{p-1} = (4-3) \cdot 2^{p-1} = 2^{p-1}.$$

Deci $k_{2^{p+1}} = 2^{p-1} + k_{2^p} = 2^{p-1} + 2^{p-1} = 2^p$. Avem atunci și

$$k_{3 \cdot 2^{p-1}} = \sum_{i=2^p+1}^{3 \cdot 2^{p-1}} (k_i - k_{i-1}) + k_{2^p} = \sum_{i \in I'_p} 0 + k_{2^p} = 2^{p-1}.$$

Atunci, pentru mulțimea A asociată șirului (k_n) cu $a_A(n) = k_n$, avem

$$\alpha_A(2^p) = \frac{k_{2^p}}{3 \cdot 2^p} = \frac{2^{p-1}}{2^p} = \frac{1}{2} \text{ și } \alpha_A(3 \cdot 2^{p-1}) = \frac{k_{3 \cdot 2^{p-1}}}{3 \cdot 2^p} = \frac{2^{p-1}}{3 \cdot 2^{p-1}} = \frac{1}{3},$$

deci $\lim_{n \to \infty} \alpha_A(2^p) = \frac{1}{2}$ și $\lim_{n \to \infty} \alpha_A(3 \cdot 2^{p-1}) = \frac{1}{3}$.

2. Să presupunem că ar exista o funcție f cu proprietatea cerută. Fie $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Funcția g este continuă. Fie $x \in \mathbf{R}$: atunci, dacă $f(x+1) \in \mathbf{Q} \Rightarrow f(x) \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ și dacă $f(x+1) \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ atunci $f(x) \in \mathbf{Q}$. Rezultă că $g(x) \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Deoarece g este continuă, ea duce pe $\mathbf{R}$ într-un interval $I \subset \mathbf{R}$. Fie atunci $x_1, x_2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in I$ și atunci $(\exists) x_3 \in I$, $x_3 \in \mathbf{Q}$. Deoarece g are proprietatea lui Darboux rezultă că $(\exists) x_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît $g(x_0) = x_3 \in \mathbf{Q}$, contradicție. Rezultă că imaginea lui g nu poate fi decît un interval I cu un punct $k \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Deci $g(x) = k$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Analog considerăm funcția $h(x) = f(x+1) + f(x)$, $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, și arătăm că funcția h este constantă. Din faptul că g și h sînt constante, rezultă că și funcția f este constantă deoarece $f(x) = \frac{1}{2}(g(x+1) - h(x+1)) = \text{const}$. Contradicție.

3. a) Dacă notăm $a_{11} = a$, $a_{12} = b$, $a_{13} = c$ și $a_{22} = d$, atunci din proprietatea enunțată găsim că $a_{31} = -c - d$, $a_{33} = -a - d$, apoi că $a_{21} = a - b + d$, $a_{23} = d - b + c$ și $a_{32} = b - c - a - d$. Rezultă că matricea A se poate scrie sub forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a - b + d & d & d - b + c \\ -c - d & b - c - a - d & -a - d \end{pmatrix}$$

și calculînd determinantul acestei matrici găsim că $\det A = 0$. b) Matricea A se poate scrie: $A = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$, unde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să presupunem că o matrice A ar avea două moduri de scriere

$$A = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4 \text{ și } A = y_1E_1 + y_2E_2 + y_3E_3 + y_4E_4.$$

Atunci din egalitatea lor, rezultă imediat că $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ și $x_4 = y_4$ și deci scrierea este unică.

4. $\det(I+A^2) = \det(I - i^2A^2) = \det((I+iA)(I-iA)) = \det(I+iA)\overline{\det(I+iA)} \geq 0$. Generalizare. $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ dacă $AB = BA$.

Anul 1980

Etapa județeană

1. Fie S_n mulțimea permutărilor mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$, $n \geq 2$, și $k \in \mathbf{N}$. Dacă $\pi \in S_n$ este o permutare impară, atunci ecuația $x^{2k} = \pi$ nu admite soluții în S_n. Într-adevăr, $\operatorname{sgn}(x_1 \circ x_2 \circ ... \circ x_n) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} x_i$, $(\forall)\, x_i \in S_n$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ și deci dacă ecuația $x^{2k} = \pi$ ar admite o soluție în S_n, atunci $\operatorname{sgn} x^{2k} = \operatorname{sgn} \pi = -1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\operatorname{sgn} x)^{2k} = -1 \Leftrightarrow 1 = -1$, ceea ce este o contradicție. În particular, pentru $n=4$, $k=1$, $\pi = u$ avem problema din enunț. Inv $u = 3 \Rightarrow \operatorname{sgn} u = (-1)^3 = -1 \Rightarrow u$ este impară și deci ecuația $x^2 = u$ nu admite soluții.

2. 1) a) Termenul $a_{1n} \cdot a_{2n-1} ... a_{n1}$ din dezvoltarea determinantului este asociat permutării $\pi \in S_n$. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $\operatorname{Inv} \pi = (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 2 + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ iar

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } n \in \{4k, 4k+1\}, k \in \mathbf{N}^*, \\ -1 \text{ dacă } n \in \{4k+2, 4k+3\}, k \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$$

și atunci semnul termenului este $\operatorname{sgn} \pi$. b) Fie $k > n^2 - n$ numărul de elemente nule ale determinantului. Dacă am presupune că pe nici o linie nu avem toate elementele nule, atunci pe fiecare linie am avea cel mult $n-1$ elemente nule și, cum determinantul are n linii, rezultă că pe ele se găsesc cel mult $n(n-1) = n^2 - n$ elemente nule. Deoarece $k > n^2 - n$ înseamnă că mai există cel puțin un element în determinant care nu se poate afla pe nici o linie a determinantului. Am ajuns la o contradicție și deci enunțul este adevărat. 2) Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ notăm $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ pe care o numim urma matricii A. Fie $C = AB$ și $D = BA$; atunci $c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$ și deci $\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$, $\operatorname{tr} BA = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$. Pe de altă parte, dacă $U, V \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, atunci $\operatorname{tr}(U - V) = \sum_{i=1}^{n}(u_{ii} - v_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} u_{ii} - \sum_{i=1}^{n} v_{ii} =$ $= \operatorname{tr} U - \operatorname{tr} V$ și deci $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr} AB - \operatorname{tr} BA = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} -$ $- \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{ki} - b_{ik}a_{ki}) = 0$. Totodată, $\operatorname{tr} I_n = n$ și dacă ținem seama de faptul că $U = V \Rightarrow \operatorname{tr} U = \operatorname{tr} V$, dacă ar exista $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ cu

proprietatea din enunț, atunci ar însemna că $0=n$, ceea ce este o contradicție. Deci nu există matricii $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ cu proprietatea din enunț.

3. Mai general, fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir de numere reale strict crescător și nemărginit pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ și fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir de numere reale definit astfel:

$$x_1 > 0,\ x_{n+1} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}{a_n},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Este șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mărginit? Răspunsul este negativ. Într-adevăr, din modul de definiție a șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ rezultă că $x_n > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, și atunci

$$x_{n+1} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}{a_n} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}}{a_{n-1}}\,\frac{a_{n-1}}{a_n} +$$

$$+ x_n,\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\} \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n = x_n\frac{a_{n-1}}{a_n} > 0,\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\},$$

ceea ce ne arată că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict crescător. Rezultă deci

$$(1)\quad x_{n+1} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}{a_n} > \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_n}\,x_1,\ (\forall)\ n \geqslant 2.$$

Conform teoremei Cesarò-Stolz avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{a_{n+1} - a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}} = \infty.$$

Trecînd la limită în (1) se obține $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} \geqslant x_1 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_n} = \infty$, adică șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este divergent la ∞ și deci nu este mărginit. Dacă $a_n = n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$ obținem problema din enunț. *Altă soluție.* Ca și la soluția precedentă se arată că $x_n > 0$, $x_{n+1} > x_n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$ Dacă șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ar fi mărginit (evident, mărginit superior), atunci el ar fi convergent. Deci ar exista $x \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Avem:

$$x_{n+1} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}{a_n} = x_n + x_n\frac{a_{n-1}}{a_n};$$

$(\forall) n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow x = x + x$; $\Leftrightarrow x = 2x \Leftrightarrow x = 0$, ceea ce contrazice $x \in \mathbf{R}_+^*$.

4. i) $\lim\limits_{x\to 0} x(f(x)-1) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} xf(x) - \lim\limits_{x\to 0} x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$. (Am ținut seama că $x > 0$ și $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 1 \Rightarrow f(x) > 0$;) ii) Mai general, fie $f\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că există $r > 0$ astfel încît $(x + 2r)f(x + 2r) - 2(x + r)f(x + r) + xf(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ știind că această limită există. Fie $g : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $g(x) = xf(x)$. Atunci

$$(1)\quad (x + 2r)f(x + 2r) - 2(x + r)f(x + r) + xf(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x + 2r) - 2g(x + r) + g(x) = 0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Fie $b > 0$, $b_n = b + (n-1)r$, $(\forall) b \in \mathbf{N}^*$. Atunci din (1) obținem

(2) $$g(b_i + 2r) - 2g(b_i + r) + g(b_i) = 0, \ (\forall)\, i \in \mathbf{N}^*,$$

și deci notînd $c_i = g(b_i)$, $(\forall)\, i \in \mathbf{N}^*$, relația (2) devine $c_{i+2} - 2c_{i+1} + c_i = 0$, $(\forall) i \in \mathbf{N}^*$, adică un șir liniar recurent de ordinul 2 cu coeficienți constanți:

(3) $$c_{i+2} - 2c_{i+1} + c_i = 0, \ (\forall)\, i \in \mathbf{N}^* \Rightarrow \sum_{i=1}^{j} (c_{i+2} - 2c_{i+1} + c_i) = 0, \ (\forall)\, j \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_{j+2} + c_{j+1} - 2c_{j+1} - 2c_2 + c_1 + c_2 = 0, \ (\forall)\, j \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow c_{j+2} - c_{j+1} = c_2 - c_1, \ (\forall) j \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (c_{j+2} - c_{j+1}) = n(c_2 - c_1), \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow c_{n+2} - c_2 = n(c_2 - c_1), \ (\forall) n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_{n+2} = n(c_2 - c_1) + c_2, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow b_{n+2} f(b_{n+2}) = n(b_2 f(b_2) - b_1 f(b_1)) +$$

$$+ b_2 f(b_2), \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow f(b_{n+2}) = \frac{n}{b_{n+2}} (b_2 f(b_2) - bf(b)) + \frac{b_2 f(b_2)}{b_{n+2}}, \ (\forall) n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(b_{n+2}) = \frac{n}{b + (n+1)r} (b_2 f(b_2) - bf(b)) + \frac{b_2 f(b_2)}{b + (n+1)r}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ există și $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(b_{n+2})$ și atunci din (3) obținem $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(b_{n+2}) = \frac{1}{r} (b_2 f(b_2) - bf(b))$. Pentru $r = b = 1$ se obține problema enunțată, adică $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2f(2) - f(1) = 2f(2) - 2 = 2(f(2) - 1)$.

Etapa finală

1. După pozițiile relative pe care le pot lua cele trei zerouri în matricea dată, avem următoarele patru cazuri posibile: a) toate cele trei zerouri se află pe aceeași linie (coloană); b) două zerouri se află pe aceeași linie și două pe aceeași coloană; c) două zerouri se află pe aceeași linie (coloană) dar cel de-al treilea nu se află pe linia (coloana) pe care se află celelalte două; d) pe nici o linie (coloană) nu se află două zerouri. Vom analiza acum pe rînd cele patru cazuri posibile. a) Deoarece determinantul matricii transpuse are aceiași termeni cu determinantul matricii inițiale, cazul cu cele trei zerouri pe aceeași coloană se reduce la cazul cu cele trei zerouri pe aceeași linie. Datorită faptului că termenii din dezvoltarea unui determinant asociat unei matrici cu două linii (coloane) schimbate între ele sînt egali în modul cu termenii determinantului matricii inițiale, rezultă că printr-o schimbare de linii și coloane, cazul a se reduce la cazul $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$ și celelalte elemente nenule. Deci putem presupune că

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \text{ cu } a_{ij} \neq 0 \text{ dacă } (i, j) \notin \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$$

și atunci numărul termenilor nuli din dezvoltarea lui det A este egal cu $N_{11} + N_{12} + N_{13}$, unde N_{ij} este numărul termenilor din dezvoltarea minorului A_{ij} al lui a_{ij}. Prin urmare, în acest caz numărul termenilor nuli este $N_0 = N_{11} + N_{12} + N_{13} = 3! + 3! + 3! = 18$ și atunci $N = 4! - N_0 = 24 - 18 = 6$ termeni sînt nenuli în dezvoltarea lui det A. b) Avem în vedere că termenii unui determinant al unei matrici obținute prin schimbarea a două linii (coloane) între ele sînt egali în modul

cu termenii determinantului matricii iniţiale şi deci printr-o schimbare de linii şi coloane între ele cazul b se reduce la cazul $a_{11} = a_{21} = a_{22} = 0$. Prin urmare, în acest caz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Dezvoltînd determinantul după prima coloană se obţin termeni nenuli din

$$a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

şi dezvoltînd în continuare după prima coloană obţinem termenii nenuli din

$$a_{31}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}a_{42}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} - a_{41}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} - a_{41}a_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

Deci în acest caz există $N = 2! + 2! + 2! + 2! = 8$ termeni nenuli. c) Pe aceleaşi considerente ca la punctele a şi b vom raţiona pe matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

şi atunci termenii nenuli se obţin astfel:

$$a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{41}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{41}a_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Se vede deci că în acest caz există $N = 3! + 2! + 2! = 10$ termeni nenuli. d) În acest caz vom raţiona pe matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \text{ şi deci}$$

$$\det A = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & 0 & a_{34} \end{vmatrix} = a_{21}a_{13}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}a_{43}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}a_{42}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} - a_{41}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{34} \end{vmatrix} - a_{41}a_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

Prin urmare, în acest caz $N = 2! + 2! + 2! + 2! + 1 + 2! = 11$ termeni nenuli. Cu aceasta am demonstrat că $N \in \{6, 8, 10, 11\}$.

2. Fie $X = A + iB$ și $\overline{X} = A - iB$. Avem

$$(1) \quad X\overline{X} = (A + iB)(A - iB) = A^2 + iBA - iAB + B^2 = A^2 + B^2 + iC = \\ = (\operatorname{ctg} \varphi)C - iC = (\operatorname{ctg} \varphi - i)C.$$

Avem în vedere că

$$\det \overline{X} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \overline{x}_{1\pi(1)} \overline{x}_{2\pi(2)} \quad \overline{x}_{n\pi(n)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \overline{x_{1\pi(1)} x_{2\pi(2)} \ldots x_{n\pi(n)}} = \\ = \overline{\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, x_{1\pi(1)} x_{2\pi(2)} \quad x_{n\pi(n)}} = \overline{\det X};$$

atunci din relația (1) obținem

$$(2) \qquad \det X\overline{X} = \det X \cdot \overline{\det X} = (\operatorname{ctg} \varphi - i)^n \det C.$$

Deoarece $\det C \in \mathbf{R}$ și $\det X \cdot \overline{\det X} \in \mathbf{R}$ rezultă din (2) că $\det C = 0$ sau $(\operatorname{ctg} \varphi - i)^n \in \mathbf{R}$. Pe de altă parte,

$$(\operatorname{ctg} \varphi - i)^n = \left(\frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\sin \varphi}\right)^n = \frac{\cos n\varphi - i \sin n\varphi}{\sin^n \varphi}$$

și atunci $(\operatorname{ctg} \varphi - 1)^n \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \sin n\varphi = 0$. Prin urmare, în condițiile enunțului obținem $\det C = 0$ sau $\sin n\varphi = 0 \Leftrightarrow \sin n\varphi \det C = 0$.

3. a) Fie $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $n \geqslant 1$. Avem

$$(1) \qquad e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} = E_n,$$

adică $e_n \quad E_n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Pentru k fixat și $n > k$, avem

$$e_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Făcînd $n \to \infty$, obținem (2) e $\geqslant E_k$. Din (1) și (2) rezultă că putem scrie $e_n < E_n \leqslant$ $\leqslant$ e, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Făcînd $n \to \infty$, obținem e $\leqslant \lim\limits_{n \to \infty} E_n \leqslant$ e, adică $\lim\limits_{n \to \infty} E_n =$ e.

b) Vom rezolva mai întîi o problemă mai generală reprezentată de următoarea teoremă: dacă $(a_n)_{n \geqslant 1}$, $(b_n)_{n \geqslant 1}$ sînt șiruri de numere reale cu $a_n \in \mathbf{R}^*$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, atunci soluția generală a recurenței $x_{n+1} + a_n x_n = b_n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, este dată de

$$(1) \qquad x_{n-1} = (-1)^n p_n \left(K + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k b_k}{p_k}\right), \text{ unde } p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \text{ și } K \in \mathbf{R}.$$

Demonstrație. Să găsim mai întîi soluția generală a recurenței omogene asociate

$$\overline{x}_{k+1} + a_k \overline{x}_k = 0, \ (\forall)\, k \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow \overline{x}_{k+1} = -a_k \overline{x}_k, \ (\forall)\, k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \overline{x}_{k+1} = \\ = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} \overline{x}_k \Leftrightarrow \overline{x}_{n+1} = (-1)^n p_n \overline{x}_1 = C(-1)^n p_n, \ (\forall)\, n \geqslant 1,$$

unde $C = \bar{x}_1$ este o constantă arbitrară. Pentru a determina soluția particulară a recurenței inițiale vom aplica metoda variației constantei (a lui Lagrange). Soluția particulară este deci $(x_n^0)_{n\geq 1}$ cu $x_{n+1}^0 = c_n(-1)^n p_n$ și dacă înlocuim în recurență obținem

$$x_{n+1}^0 + a_n x_n^0 = b_n,\ (\forall)\, n \geq 1 \Leftrightarrow (-1)^n c_n p_n + (-1)^{n-1} a_n c_{n-1} p_{n-1} =$$
$$= b_n,\ (\forall)\, n \geq 1 \Leftrightarrow c_n(-1)^n p_n - (-1)^n p_n c_{n-1} = b_n,\ (\forall)\, n \geq 1 \Leftrightarrow c_k - c_{k-1} =$$
$$= \frac{(-1)^k b_k}{p_k},\ k \geq 1 \Rightarrow c_n = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k b_k}{p_k},\ (\forall)\, n \geq 1.$$

Deci $x_{n+1}^0 = (-1)^n p_n \left(c_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k b_k}{p_k}\right)$, $(\forall)\, n \geq 1$, și atunci soluția generală a recurenței inițiale are termenul general

$$x_{n+1} = \bar{x}_{n+1} + x_{n+1}^0 = C(-1)^n p_n + (-1)^n p_n \left(c_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k b_k}{p_k}\right) =$$
$$= (-1)^n p_n \left(K + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k b_k}{p_k}\right).$$

Să trecem acum la generalizarea propriu-zisă a punctului b al problemei de concurs. Avem deci

$$x_{n+1} = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n \left(K + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k b_k}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right). \tag{2}$$

Dacă $\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n = \pm\infty$ și dacă $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k b_k}{p_k} = s \in \mathbf{R}$, atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de (2) este convergent dacă $s + K = 0 \Leftrightarrow K = -s$. În cazul particular dat, $p_n = (-1)^n n!$, $b_n = -1$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, și atunci $s = 2 - e$, adică $x_1 = K = e - 2$.

4. Funcția f este uniform continuă pe $\mathbf{R}$. Într-adevăr, să arătăm că $(\forall)\, \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$, $|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Fie $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ arbitrar; trebuie să avem $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} < \varepsilon$, $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$ cu $|x - y| < \delta$. Din $\sqrt{\delta} < \varepsilon$ rezultă $\delta \in (0, \varepsilon^2)$. Deci pentru acest $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon \in (0, \varepsilon^2)$ astfel încît $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$, $|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Deoarece ε a fost arbitrar, rezultă că f este uniform continuă pe $\mathbf{R}$. Se mai știe că orice funcție $g: E \to \mathbf{R}$ care este uniform continuă pe $E \subset \mathbf{R}$ este continuă pe E. Deci funcția considerată în enunț este continuă pe $\mathbf{R}$. Din $|f(x) - f(y)| < \sqrt{|x - y|}$, $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$, deducem $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|}$ $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$, de unde pentru $y = 0$ rezultă că $||f(x)| - |f(0)|| \leq \sqrt{|x|}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -\sqrt{|x|} \leq |f(x)| - |f(0)| \leq \sqrt{|x|}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow |f(0)| - \sqrt{|x|} \leq |f(x)| \leq \sqrt{|x|} + |f(0)|$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Din ultima inegalitate deducem că $|f(x)| \leq \sqrt{|x|} + |f(0)|$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. (1) Deci dacă $|x| \leq a$, atunci din (1) obținem $|f(x)| < \sqrt{a} + |f(0)|$, $(\forall)\, x \in [-a, a]$. Rămîne deci să arătăm că $(\exists)\, a \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $\sqrt{a} + |f(0)| \leq a \Leftrightarrow a - \sqrt{a} - |f(0)| \geq 0$. Soluția ultimei inecuații este $\sqrt{a} \in [1 + \sqrt{1 + 4|f(0)|}, \infty) \Leftrightarrow a \in [2(1 + \sqrt{1 + 4|f(0)|} + 2|f(0)|), \infty)$. Prin urmare, pentru orice $a \in [2(1 + \sqrt{1 + 4|f(0)|} + 2|f(0)|), \infty)$ avem îndeplinită condiția că pentru orice $x \in [-a, a]$, $|f(x)| \leq a$. b) Fie $g: [-a, a] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Atunci dacă ținem seama că $|f(x)| \leq a$, $(\forall)\, x \in [-a, a]$ rezultă $g(a) = f(a) - a \leq 0$ și $g(-a) = f(-a) + a \geq 0$. Deci $g(a)\, g(-a) \leq 0$.

Dacă $g(a) = 0$ sau $g(-a) = 0$, atunci enunțul este demonstrat. Presupunem că $g(a)g(-a) \in \mathbf{R}_+^*$; atunci $g(a)g(-a) < 0$ și deoarece g este continuă pe $[-a, a]$, rezultă că g are proprietatea lui Darboux. Prin urmare, $(\exists)\, u \in (-a, a)$ astfel încît $g(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = u$.

Anul 1981

Etapa județeană

1. Din faptul că $a, b \in \mathbf{R}$ și $a^2 + b^2 < 1$ rezultă că există $r \in (-1, 1)$ și $u \in \mathbf{R}$ astfel încît $a = r\cos u$ și $b = r\sin u$. Deci, pentru matricea A, avem $A = r\begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}$ și atunci prin inducție matematică se deduce că $A_n = A^n = r^n\begin{pmatrix} \cos nu & \sin nu \\ -\sin nu & \cos nu \end{pmatrix}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, deci de aceeași formă cu $A_1 = A$. Rezultă atunci că $a_n = r^n \cos nu$ și $b_n = r^n \sin nu$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, de unde dacă ținem seama că șirurile $(\cos nu)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(\sin nu)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sînt mărginite iar șirul $(r^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent la zero, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

2. Determinantul D este de forma

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} - x \\ \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \geqslant f\left(\frac{1}{4}\right) > 0, \text{ unde } f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}.$$

3. Ecuația dreptei AG (G centrul de greutate al triunghiului ABC) este $3x - y - 1 = 0$. Punctul $X(x, y) \in AG \Leftrightarrow y = 3x - 1$ și, totodată, $AG = GX \Leftrightarrow 10 = (x-1)^2 + (3x-3)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ sau $x_2 = 2$. Dacă $x_1 = 0$ atunci $y_1 = -1$, adică $X = A$, ceea ce nu este posibil. Rezultă deci că $X(2, 5)$. Fie d_1, d_2 drepte care trec prin X și sînt paralele, respectiv, cu D_1 și D_2. Avem (d_1): $x - y + 3 = 0$, (d_2): $2x - y + 1 = 0$, $\{C\} = d_1 \cap D_2$, $\{B\} = d_2 \cap D_1$, de unde rezultă $C(3, 6)$ și $B(0, 1)$.

4. Din $a_{n-1} = \sqrt{2}a_n - a_{n-1}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$ rezultă

$$a_{n+2} = \sqrt{2}a_{n+1} - a_n,\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow a_{n+2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}a_n - a_{n-1}) - a_n =$$

$$= a_n - \sqrt{2}a_{n-1},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin urmare, $a_{n+4} = a_{n+2} - \sqrt{2}a_{n+1} = a_n - \sqrt{2}a_{n-1} - \sqrt{2}(\sqrt{2}a_n - a_{n-1}) = -a_n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, și deci $a_{n+8} = -a_{n+4} = a_n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, adică șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este periodic, de perioadă 8. Rezultă deci că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ avem $a_n \in \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$, de unde se deduce că $a_n \in \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_8\}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, adică șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este mărginit ($|a_n| \leqslant \max\limits_{0\leqslant i\leqslant 8} |a_i|$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$).

Etapa finală

1. Se observă ușor că dacă $X = \begin{pmatrix} u & v \\ t & w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$, atunci există egalitatea matricială

$$X^2 - (u + w)X + (uw - vt)I_2 = O_2, \tag{1}$$

unde prin O_2 am notat matricea nulă din $\mathcal{M}$. Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Atunci

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_3b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_3b_2 & a_2b_1 + a_4b_2 \\ a_1b_3 + a_3b_4 & a_2b_3 + a_4b_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 & a_1b_2 + a_2b_4 - a_2b_1 - a_4b_2 \\ a_3b_1 + a_4b_3 - a_1b_3 - a_3b_4 & a_3b_2 - a_2b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

unde am notat $a = a_2b_3 - a_3b_2$, $b = a_1b_2 + a_2b_4 - a_2b_1 - a_4b_2$, $c = a_3b_1 + a_4b_3 - a_1b_3 - a_3b_4$. Luînd $X = [A, B]$ avem $u = a$, $v = b$, $t = c$, $w = -a$, astfel că din (1) rezultă $X^2 = (vt - uw)\, I_2$, adică $[A, B]^2 = \lambda\, I_2$, unde $\lambda = vt - uw = bc + a^2$. Pentru partea a doua a problemei, fie ca și mai înainte $[A, B] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ și, în plus, fie $[C, D] = \begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix}$. Luăm $X = [A, B] + [C, D] = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & -a - p \end{pmatrix}$ și atunci cu notațiile inițiale vom avea: $u = a + p$, $v = b + q$, $t = c + r$, $w = -a - p$. Prin urmare, conform cu (1) putem scrie: $X^2 = \mu I_2 \Leftrightarrow ([A, B] + [C, D])([A, B] + [C, D]) = \mu I_2 \Leftrightarrow [A, B]^2 + [A, B] \cdot [C, D] + [C, D] \cdot [A, B] + [C, D]^2 = \mu I_2$; dar conform primei părți, $[A, B]^2 = \lambda I_2$, $[C, D]^2 = \alpha I_2$ și atunci deducem că $[A, B] \cdot [C, D] + [C, D] \cdot [A, B] = \beta I_2$ și această matrice comută cu toate matricile din $\mathcal{M}$.

2. Fie $M(a, b) \in (E)$ și să considerăm cercul (Γ_M) de centru M și rază $\frac{1}{2}$; adică cercul de ecuație $(x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{1}{4}$. Fie punctele $C_0 \in A_1$ și $M_0 \in (\Gamma_M)$ care realizează distanța dintre mulțimile A_1 și (Γ_M), adică $d(A_1, (\Gamma_M)) = C_0M_0$. Considerînd punctul $C(2, 4)$, care este centrul cercului ce reprezintă mulțimea A_1, vom arăta că în mod necesar $C_0 \in CM$ și $M_0 \in CM$. Fie $\{A\} = C_0M_0 \cap CM$, $\{D\} = A_1 \cap CM$, $\{N\} = (\Gamma_M) \cap CM$. Ținînd cont de inegalitățile metrice dintr-un triunghi putem scrie: $CC_0 + AC_0 \geqslant CA = CD + AD$, de unde deducem $AC_0 \geqslant AD$. Totodată, $MM_0 + AM_0 \geqslant AM = MN + AN$, de unde rezultă $AM_0 \geqslant AN$. Prin urmare, $M_0C_0 = AM_0 + AC_0 \geqslant AN + AD = DN$, adică $d(A_1, (\Gamma_M)) = DN$. Deoarece $DN = CM - \frac{3}{2}$ obținem că $d(A_1, (\Gamma_M)) = CM - \frac{3}{2}$.

Avem deci că

$$d(A_1, A_2) = \inf_{M \in E()} d(A_1, (\Gamma_M)) = \inf_{M \in (E)} \left(CM - \frac{3}{2}\right) = \inf_{M \in (E)} \left\{CM - \frac{3}{2}\right\} = \tag{1}$$

$$= d(C, (E)) - \frac{3}{2}$$

Fie acum punctul $M_0(a_0, b_0) \in (E)$ tocmai punctul cu proprietatea că normala la elipsă în acest punct trece prin C. Avem $d(C, (E)) = CM_0$. Aceasta datorită faptului că luînd un punct $M \in (E)$, avem $CM_0 \leqslant CM$, pentru că triunghiul CMM_0 este obtuzunghic și latura $[CM]$ se opune unghiului obtuz, iar dacă cumva C, M, M_0 sînt coliniare, atunci $M_0 \in (CM)$. Să determinăm acum coordonatele a_0, b_0. Panta tangentei în punctul M_0 este $-\frac{a_0}{4b_0}$, deci panta normalei va fi $\frac{4b_0}{a_0}$. Scriind că $M_0(a_0, b_0) \in (E)$ și că normala prin M_0 trece prin $C(2, 4)$ obținem sistemul

$$b_0 - 4 = \frac{4b_0}{a_0}(a_0 - 2),$$

$$\frac{a_0^2}{4} + b_0^2 = 1.$$

Rezolvînd sistemul se obține $a_0 = \frac{\sqrt{17} - 1}{3}$, $b_0 = \frac{\sqrt{17} + 1}{6}$ și după aceea din (1) deducem că $d(A_1, A_2) = \frac{\sqrt{810 - 102\sqrt{17}}}{6} - \frac{3}{2}$.

3. a) Să notăm $s_k = a_1 + a_2 + \quad + a_k$ pentru $1 \leqslant k \leqslant p$ și $s_0 = 0$. Atunci putem scrie

$$\alpha_0 = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left| \sum_{i=1}^{k} a_i \right| = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} |s_k|,$$

$$\alpha_1 = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left| \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \right| = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \left| \sum_{i=1}^{k} (s_i - s_{i-1}) b_i \right| = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left| s_1(b_1 - b_2) + \right.$$

$$\left. + s_2(b_2 - b_3) + \ldots + s_k b_k \right| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant p} (|s_1|(b_1 - b_2) + \quad s_2 \quad (b_2 - b_3) +$$

$$+ |s_k| b_k) \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant p} |s_k| (b_1 - b_2 + b_2 + \ldots + b_{k-1} - b_k + b_k) =$$

$$= b_1 \max_{1 \leqslant k \leqslant p} |s_k \quad \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant p} |s_k| = \alpha_0. \text{ Deci } \alpha_1 \leqslant \alpha_0$$

b) Vom arăta că, în general, $\alpha_n \leqslant \alpha_{n-1}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, deci șirul $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ va fi monoton descrescător. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ fixat. Să notăm $\bar{a}_i = a_i b_i^{n-1}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant p$. Atunci avem

$$\alpha_{n-1} = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left| \sum_{i=1}^{k} a_i b_i^{n-1} \right| = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left| \sum_{i=1}^{k} \bar{a}_i \right| \text{ și } \alpha_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left| \sum_{i=1}^{k} a_i b_i^n \right| = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left| \sum_{i=1}^{k} \bar{a}_i b_i \right|.$$

Înseamnă că sîntem în condițiile de la punctul a, numai că numerele a_i s-au înlocuit cu $\bar{a}_i$. Deci exact cum am demonstrat la punctul a că $\alpha_1 \leqslant \alpha_0$, tot astfel va rezulta $\alpha_n \leqslant \alpha_{n-1}$. Cu aceasta am arătat că șirul $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este descrescător și deoarece este cu termeni pozitivi înseamnă că este și mărginit (toți termenii aparțin intervalului $[0, \alpha_0)$, deci este convergent. Pentru calculul limitei distingem trei cazuri: j) Dacă $b_p \leqslant b_{p-1} \leqslant \quad \leqslant b_1 < 1$, atunci putem scrie

$$0 \leqslant \alpha_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left| \sum_{i=1}^{k} a_i b_i^n \right| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left(b_i^n \sum_{i=1}^{k} |a_i| \right) = b_i^n \left(\sum_{i=1}^{p} |a_i| \right) \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

deci $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$; jj) Dacă $(\exists)\, j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, cu $b_p \leqslant b_{p-1} \leqslant \ldots \leqslant b_{j+1} < b_j = \ldots = b_{j-1} = \ldots = b_1 = 1$, atunci

$$\alpha_n = \max_{1\leqslant k\leqslant p}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^n\right| \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^n\right| = \max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|.$$

Prin urmare, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|$. Pe de altă parte, putem scrie

$$\alpha_n = \max_{1\leqslant k\leqslant p}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^n\right| = \max\left(\max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^n\right|, \max_{j+1\leqslant k\leqslant p}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^n\right|\right) =$$

$$= \max\left(\max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|, \max_{j+1\leqslant k\leqslant p}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^n\right|\right) \leqslant \max\left(\max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|,\right.$$

$$\left. b_{j+1}^n \max_{j+1\leqslant k\leqslant p}\sum_{i=1}^{k} |a_i|\right) = \max\left(\max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|, b_{j+1}^n\left(\sum_{i=1}^{p} |a_i|\right)\right).$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} b_{j+1}^n = 0$ rezultă că pentru n suficient de mare avem

$$b_{j+1}^n\left(\sum_{i=1}^{p} |a_i|\right) < \max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|,$$

ceea ce înseamnă că, de fapt, avem inegalitatea

$$\alpha_n \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \text{ și deci } \lim_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|.$$

Pe baza inegalităților obținute deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \max_{1\leqslant k\leqslant j}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|;$$

jjj) Dacă $b_p = b_{p-1} = \ldots = b_2 = b_1 = 1$, atunci

$$\alpha_n = \max_{1\leqslant k\leqslant p}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^n\right| = \max_{1\leqslant k\leqslant p}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|,$$

ceea ce ne arată că șirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este șir constant și deci $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \max_{1\leqslant k\leqslant p}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|$.

4. a) Să presupunem prin absurd că f nu are limita ∞ pentru $x \to \infty$. Atunci, există un șir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ astfel încît $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ și totuși șirul $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ nu are limita ∞. Înseamnă că există un interval (u, ∞), cu $u > 0$, în așa fel încît în afara acestui interval se găsesc o infinitate de termeni ai șirului $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$. Prin urmare, intervalul mărginit $[0, u]$ conține o infinitate de termeni ai șirului $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$. Deoarece funcția f este continuă, rezultă că este mărginită pe intervalul compact $[0, u]$ și conform lemei lui Cesaro, există un subșir $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ al șirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ în așa fel încît subșirul $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbf{N}}$ al șirului mărginit $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent. Fie $y = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \in \mathbf{R}$. Funcția f fiind continuă, rezultă că

$$\lim_{k\to\infty} f(f(x_{n_k})) = f(\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})) = f(y) \in \mathbf{R}.$$

Din faptul că $\lim_{n\to\infty} = \infty$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = \infty$ și pe baza ipotezei problemei ($\lim_{x\to\infty} f(f(x)) = \infty$), deducem $\lim_{k\to\infty} f(f(x_{n_k})) = \infty$. Ultima relație și faptul că $f(y) \in \mathbf{R}$ sînt contradictorii. Contradicția obținută arată că avem $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;

b) Folosim contraexemplul următor: $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Avem $f(f(x)) = x$, deci $\lim_{x\to\infty} f(f(x)) = \infty$ și cu toate acestea $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Anul 1982

Etapa județeană

1. Fie ABC triunghiul cu vîrfurile $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, și $C(0, a\sqrt{3})$, precum și dreapta d de ecuație $mx - y + n = 0$. Avem

$$s_d = AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = d^2(A, d) + d^2(B, d) + d^2(C, d) =$$

$$= \frac{1}{m^2+1}\left((-am+n)^2 + (am+n)^2 + (-a\sqrt{3}+n)^2\right) = 2a^2 + \frac{(a-n\sqrt{3})^2}{m^2+1}.$$

Din această relație se deduce că s_d este minimă dacă și numai dacă $a = n\sqrt{3}$, de unde deducem că $s \geqslant 2a^2$ iar minimul este $2a^2$, minim care se realizează pentru mulțimea dreptelor care trec prin $G\left(0, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, unde G este centrul de greutate al triunghiului. Acest minim se realizează deci pe mulțimea dreptelor de ecuație $mx\sqrt{3} - y\sqrt{3} + a = 0$.

2. a) $h_n \perp h_{n+1}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\} \Leftrightarrow m_n m_{n+1} + 1 = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\}$, unde m_n este coeficientul unghiular al dreptei h_n, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\}$. Prin urmare, $m_n m_{n+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow a_n a_{n+1} + a_{n-1}a_n = 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\} \Leftrightarrow a_{n+1} + a_{n-1} = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\}$, de unde rezultă că $a_n = a_1$, $(\forall)\, n \in 4\mathbf{N}+1$, $a_n = a_2$, $(\forall)\, n \in 4\mathbf{N}+2$, $a_n = -a_1$, $(\forall)\, n \in 4\mathbf{N}+3$, $a_n = -a_2$, $(\forall)\, n \in 4\mathbf{N}^*$. Prin urmare, acest șir este periodic, de perioadă 4. Un șir periodic este convergent dacă și numai dacă este 1-periodic (adică dacă este constant). Deci dacă am presupune că acest șir este convergent ar rezulta $a_1 = -a_1 = a_2 = -a_2 = 0$, ceea ce contrazice enunțul. Deducem astfel că șirurile care satisfac enunțul sînt divergente. b) Avem

$$h_n \parallel h_{n+1},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\} \Leftrightarrow m_n = m_{n+1},\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a},$$

$$(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\},$$

adică $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este o progresie geometrică de rație $r = a_2 a_1^{-1}$. Rezultă deci că $a_n = a_1 r^{n-1}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\}$. În aceste condiții șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent dacă și numai dacă $r \in (-1, 1]$ și este divergent dacă $r \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$.

c) Avem

$$d(M_0, h_n) = \frac{a_n + a_{n-1} + 1}{\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}} \Leftrightarrow d^2(M_0, h_n) = d_n^2 =$$

$$= \frac{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 1 + 2a_n a_{n-1} + 2a_n + 2a_{n-1}}{a_n^2 + a_{n-1}^2} = 1, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_n + 1)(a_{n-1} + 1) = \frac{1}{2}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}.$$

Dacă notăm $b_n = a_n + 1$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, din relația precedentă deducem $2b_n b_{n-1} = 1$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, de unde prin inducție matematică rezultă că $a_n = a_1$, $(\forall)\, n \in 2\mathbf{N} + 1$, și $a_n = a_2$, $(\forall) n \in 2\mathbf{N}^*$. De aici rezultă că printre dreptele care satisfac enunțul cel mult două sînt distincte. Dacă $a_1 = a_2$ atunci numai o singură dreaptă verifică enunțul.

3. a) Din ipoteză rezultă că $f(x) = xe^{-f(x)}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+$. Vom demonstra că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}_+$. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că f n-ar fi strict crescătoare pe $\mathbf{R}_+$, adică există $x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$, $x_1 < x_2$, astfel încît $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Deducem atunci că $e^{-f(x_1)} \leqslant e^{-f(x_2)}$ și deci $x_1 e^{-f(x_1)} < x_2 e^{-f(x_2)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce este o contradicție. Prin urmare, $f(x_1) < f(x_2)$, $(\forall)\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$, $x_1 < x_2$, ceea ce arată că f este strict crescătoare. b) Deoarece f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}_+$, pentru a demonstra că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ este suficient să demonstrăm că f este nemărginită superior pe $\mathbf{R}_+$. Într-adevăr, dacă am presupune că f este mărginită superior pe $\mathbf{R}_+$ ar rezulta că există $M \in \mathbf{R}_+^*$, astfel încît $f(x) < M$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+$. Avînd în vedere că $\mathbf{R}$ este un spațiu arhimedian (spațiu liniar în care este adevărată axioma lui Arhimede), rezultă că există $x \in \mathbf{R}_+^*$ cu proprietatea că $x \geqslant Me^M$. Pe de altă parte, avem $f(x) < M \Rightarrow e^{f(x)} < e^M \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)e^{f(x)} < f(x)e^M \leqslant Me^M \Rightarrow x < Me^M$, cee ce este o contradicție. Rezultă atunci că f este nemărginită superior și cu aceasta am demonstrat și acest punct. c) Fie $x \in \mathbf{R}_+^*$. Conform ipotezei avem $x = f(x)e^{f(x)}$, de unde deducem că $f(x) \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$. Deoarece $x = f(x)e^{f(x)}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$, prin logaritmare în baza e, deducem $\ln x = \ln f(x) + f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$, de unde dacă ținem seama că $f(x) \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$, rezultă că

$$\frac{\ln x}{f(x)} = 1 + \frac{\ln f(x)}{f(x)}, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Din ultima egalitate, prin trecere la limită, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)}$ și dacă ținem seama că $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$, din ultima egalitate deducem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$.

4. Adunăm în ambii membri ai relației din enunț matricea unitate U de același ordin cu matricile date. Avem: $ABC + AB + BC + AC + A + B + C = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ABC + AB + BC + AC + A + B + C + U = U \Leftrightarrow (A + U)(B + U)(C + U) = U$. Fie X, Y, Z matrici de ordinul n astfel încît $XYZ = U$. Atunci $\det U = 1$ $= \det(XYZ) = \det(X)\det(Y)\det(Z) \Leftrightarrow \det(X), \det(Y), \det(Z) \in \mathbf{R}^*$, adică matricile X, Y, Z sînt nesingulare și deci inversabile. Prin urmare, există X^{-1} și atunci $XYZ = U$ implică $YZ = X^{-1}$, de unde deducem $YZX = U$. Dacă înlocuim $X = A + U$, $Y = B + U$, $Z = C + U$ rezultă că

$$(A + U)(B + U)(C + U) = (B + U)(C + U)(A + U).$$

Dezvoltăm aceste produse și după reduceri de termeni asemenea obținem

$$ABC - BCA = (B + C)A - A(B + C) \Leftrightarrow A(BC) - (BC)A = (B + C)A - A(B + C),$$

de unde deducem că $A(BC) = (BC)A \Leftrightarrow A(B + C) = (B + C)A$, ceea ce înseamnă că matricea A comută cu matricea BC dacă și numai dacă A comută cu matricea $B + C$

Etapa finală

1. Din faptul că $A^3 + B^3 = 0$ rezultă $A^3 = -B^3$. Totodată, avem $-B^5 = B^2(-B^3) = (-B^3)B^2$, de unde dacă ținem seama că $-B^3 = A^3$, obținem că (1) $B^2A^3 = A^3B^2$. Presupunem că A este inversabilă, adică există A^{-1} și atunci din (1), prin înmulțire la stînga cu A^{-1}, deducem (2) $A^{-1}B^2A^3 = A^2B^2$. Conform enunțului avem $AB - B^2A^2 = U = AA^{-1}$ și deci, înmulțind această relație la stînga cu A^{-1} și la dreapta cu A, rezultă că $BA - A^{-1}B^2A^3 = U$, de unde ținem seama de (2) și obținem că $BA - A^2B^2 = U$. Dacă B este inversabilă se procedează analog și se obține enunțul. Vom arăta acum că relația din enunț există și fără ipoteza de inversabilitate a lui A sau B. Avem

$$(B + iA^2)(A + iB^2) \quad BA - A^2B^2 + i(A^3 + B^3) = U + iO = U,$$

de unde rezultă că matricea $B + iA^2$ nu este singulară, are inversă și inversa sa este $A + iB^2$. Prin urmare $(A + iB^2)(B + iA^2) = U \Leftrightarrow AB - B^2A^2 + i(A^3 + B^3) = U \Leftrightarrow AB - B^2A^2 = U$, ceea ce demonstrează enunțul.

2. a) Pentru orice $m \in \mathbf{R}$ avem $(m^2 + 2m + 1)x + (m^2 + 2m - 1)y + m^2 + 2m - 1 = (m^2 + 2m + 1)x + (m^2 + 2m - 1)(y + 1)$, de unde rezultă că $M_0(0, -1) \in d_m$, $(\forall)\, m \in \mathbf{R}$, ceea ce ne arată că dacă $\{d_m \mid m \in \mathbf{R}\}$ ar forma un fascicol de drepte, atunci M_0 ar fi vîrful fascicolului. Pentru a arăta că $\{d_m \mid m \in \mathbf{R}\}$ nu formează un fascicol de drepte este suficient să arătăm că $(\exists)\, d$ o dreaptă cu proprietatea că $M_0 \in d$ și $d \neq d_m$, $(\forall)\, m \in \mathbf{R}$. Ecuația generală a dreptei d care trece prin M_0 este de forma $ax + by + b = 0$. Dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci dar avea ecuația $x = 0$ sau $y = -1$, ceea ce ar corespunde cu $d_{\sqrt{2}-1}$, $d_{-\sqrt{2}-1}$ sau $d_{-\frac{1}{2}}$, adică $d \in D$. Prin urmare, dacă $d \ni M_0$ și $d \notin D$, atunci $a, b \in \mathbf{R}^*$. Fie deci $(d): ax + ay + a = 0$ care are proprietatea că $M_0 \in d$ și vom arăta că $d \notin D$. Într-adevăr, dacă $d \in D$ atunci $(\exists)\, m \in \mathbf{R}$ astfel încît $d = d_m \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = m^2 + 2m - 1 \Leftrightarrow 1 = -1$, ceea ce este absurd. Rezultă deci că D nu formează un fascicol de drepte.

b) Fie $\delta = \inf\limits_{M \in D} ((x - 2)^2 + (y + 2)^2)$; atunci $\sqrt{\delta}$ reprezintă distanța dintre punctul $M_1(2, -2)$ și mulțimea D. Să mai notăm δ_m distanța dintre punctul M_1 și dreapta d_m, adică $\delta_m = \inf d(M_1, d_m)$, $m \in \mathbf{R}$. Rezultă atunci că $\delta = \inf\limits_{m \in \mathbf{R}} \delta_m^2$. Totodată, avem că

$$\delta_m^2 = \frac{(2(m^2 + 2m + 1) - 2(m^2 + 2m - 1) + m^2 + 2m - 1)^2}{(m^2 + 2m + 1)^2 + (m^2 + 2m - 1)^2} =$$

$$= \frac{(m^2 + 2m + 3)^2}{2(m^4 + 4m^3 + 4m^2 + 1)} = \frac{(m^2 + 2m + 3)^2}{2((m^2 + 2m + 3)^2 - 6(m^2 + 2m + 3) + 10)} =$$

$$= \frac{t^2}{2(t^2 - 6t + 10)},$$

unde $t = m^2 + 2m + 3 = (m+1)^2 + 2 \geqslant 2$, $(\forall)\, m \in \mathbf{R}$. Prin urmare, $\delta = \inf\limits_{t \geqslant 2} \dfrac{t^2}{2(t^2 - 6t + 10)}$. Să observăm că $\delta = \dfrac{1}{2}$. Într-adevăr, $\delta_m > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t^2 > t^2 - 6t + 10$, $(\forall)\, t \geqslant 2 \Leftrightarrow 6t > 10$, $(\forall)\, t \geqslant 2$, ceea ce este evident. Pentru a dovedi că $\delta = \dfrac{1}{2}$ trebuie să arătăm că $(\forall)\, u > \dfrac{1}{2}$, $(\exists)\, t \geqslant 2$, $\delta_m^2 < u \Leftrightarrow (\exists)\, t \geqslant 2$ astfel încît $\dfrac{t^2}{2(t^2 - 6t + 10)} < u \Leftrightarrow (\exists)\, t \geqslant 2$ astfel încît $(2u - 1)t^2 - 12ut + 20u > 0$. Soluția acestei inecuații este $[2, \infty)$ dacă $u > 5$; $[2, \infty) \setminus \left\{\dfrac{10}{3}\right\}$ dacă $u = 5$ și este o mulțime care include intervalul $\left(\dfrac{6u + 2\sqrt{5u - u^2}}{2u - 1}, \infty\right)$ dacă $u \in \left(\dfrac{1}{2}, 5\right)$. Cu aceasta am demonstrat că $\delta = \dfrac{1}{2}$. Să mai observăm că nu există $m \in \mathbf{R}$ astfel încît $\delta = \delta_m^2$, ceea ce este echivalent cu faptul că nu există $t \geqslant 2$ astfel încît $t^2 = t^2 - 6t + 10$ și deci mulțimea $\{\delta_m^2\}_{m \in \mathbf{R}}$ nu admite un minim, ci admite numai un infimum egal cu $\dfrac{1}{2}$.

3. a) Din faptul că $f \circ f \circ f = 1_{\mathbf{R}}$ rezultă că f este inversabilă deci bijectivă. Deoarece f este bijectivă și continuă rezultă că f este strict monotonă. Dacă f ar fi strict descrescătoare, atunci $f \circ f \circ f$ ar fi și ea strict descrescătoare și s-ar contrazice egalitatea $f \circ f \circ f = 1_{\mathbf{R}}$ deoarece $1_{\mathbf{R}}$ este strict crescătoare. Deci f este strict crescătoare. Să arătăm acum că $f = 1_{\mathbf{R}}$. Fie $x \in \mathbf{R}$ arbitrar; notăm $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1) = (f \circ f)(x)$. Se disting următoarele cazuri:

i) $x \leqslant x_1 \Leftrightarrow x \leqslant f(x) \Rightarrow f(x) \leqslant (f \circ f)(x) \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \Leftrightarrow x_2 \leqslant (f \circ f \circ f)(x) = 1_{\mathbf{R}}(x) = x$. Prin urmare, avem $x \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x$, ceea ce implică $x = x_1 \Leftrightarrow x = f(x)$;

ii) $x_1 = f(x) < x \Rightarrow f(x_1) < f(x) \Leftrightarrow x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \Leftrightarrow (f \circ f \circ f)(x) < f(x_1) \Leftrightarrow x < f(x_1) \Leftrightarrow x < x_2$, ceea ce arată că $x < x_2 < x_1 < x$, iar aceste inegalități sînt imposibile. Rămîne deci adevărat numai punctul i) care arată că $f(x) = x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, adică $f = 1_{\mathbf{R}}$. Generalizare. Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă și $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}} = 1_{\mathbf{R}}$, unde $n \in 2\mathbf{N} + 1$, atunci $f = 1_{\mathbf{R}}$, cu demonstrația ca mai sus.

b) Este clar că o funcție f diferită de $1_{\mathbf{R}}$ cu $f \circ f \circ f = 1_{\mathbf{R}}$ trebuie să fie discontinuă. Un exemplu de astfel de funcție este funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}, \\ 2 & \text{pentru } x = 1, \\ 3 & \text{pentru } x = 2, \\ 1 & \text{pentru } x = 3. \end{cases}$$

Această funcție este discontinuă în punctele mulțimii $\{1, 2, 3\}$ și are proprietatea că $f \circ f \circ f = 1_{\mathbf{R}}$.

4. Deoarece f este o combinație liniară de funcții continue (P_k continuă, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ și $|P_k|$ continuă $(\forall)\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$) rezultă că f este continuă pe $\mathbf{R}$. Funcția f fiind continuă pe $\mathbf{R}$ și injectivă rezultă că este strict monotonă pe $\mathbf{R}$. Să presupunem că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ (cazul în care f ar fi strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$ se tratează analog). Fie $A = \{x \in \mathbf{R} \mid (\exists)\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ cu $P_k(x) = 0\}$ mulțimea tuturor rădăcinilor reale ale polinoamelor P_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ și $m = \min A$, $M = \max A$. Deoarece f este continuă pe $\mathbf{R}$ (are proprietatea

lui Darboux) și este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ rezultă că $f([m, M]) = [u, v]$ și pentru orice $x > M$, $f(x) > v$, iar pentru orice $x < m$, $f(x) < u$, cu $f(m) = u$, $f(M) = v$. Prin urmare, există $U, V, W \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît

$$f(x) = \begin{cases} U(x), \text{ pentru } x < m, \\ V(x), \text{ pentru } x \in [m, M] \text{ și, în plus, } U, V, W \text{ nu sînt constante,} \\ W(x), \text{ pentru } x > M, \end{cases}$$

deoarece altfel f n-ar mai fi injectivă. Deci grad U, grad V, grad $W \in \mathbf{N}^*$. Deoarece $U : (-\infty, m) \to \mathbf{R}$, $W : (M, \infty) \to \mathbf{R}$ sînt polinoame de grad $\geqslant 1$ și sînt strict crescătoare rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} U(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} W(x) = \infty$. Să arătăm acum că $f((M, \infty)) = (v, \infty)$ și $f((-\infty, m)) = (-\infty, u)$. Fie $y > v$ arbitrar; deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ rezultă că există $x_0 > M$ astfel încît $f(x_0) > y$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux rezultă că $f((M, x_0)) = (v, f(x_0))$, unde am ținut seamă și de stricta monotonie a lui f. Deoarece $y \in (v, f(x_0))$ și f are proprietatea lui Darboux rezultă că există $x \in (M, x_0)$ astfel încît $f(x) = y$. Deoarece $y \in (v, \infty)$ a fost arbitrar rezultă că $(\forall)\, y \in (v, \infty)$ există $x \in (M, \infty)$ astfel încît $y = f(x)$, ceea ce arată că $f((M, \infty)) = (v, \infty)$. Analog rezultă că $f((-\infty, m)) = (-\infty, u)$ și deci $f(\mathbf{R}) = (-\infty, u) \cup [u, v] \cup (v, \infty) = \mathbf{R}$, adică f este surjecție.

Anul 1983

Etapa județeană

1. a) Prin metoda inducției matematice rezultă că

$$A_a^n = \begin{pmatrix} \cos 2na\pi & -\sin 2na\pi \\ \sin 2na\pi & \cos 2na\pi \end{pmatrix}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$$

și deci $A_a^n = I \Leftrightarrow 2na\pi \in 2\pi\mathbf{Z}$ și putem lua $2na\pi \in 2\pi\mathbf{N}$, de unde rezultă $a = kn^{-1} \in \mathbf{Q}$, ceea ce demonstrează enunțul. b) Fie $n \in \mathbf{N}^*$ cu proprietatea că $A_a^n = I$ și din $A_a^k = I$, $k \in \mathbf{N}^*$, rezultă $k \geqslant n$. Din $A_a^n = I$ rezultă $2na\pi = 2b\pi$, cu $b \in \mathbf{N}^*$. Dacă $(n, b) \neq 1$ rezultă că n nu mai are proprietatea cerută și deci $(n, b) = 1$ iar din $2na\pi = 2b\pi$ rezultă $a = bn^{-1}$. Reciproc, dacă $(b, n) = 1$ și $a = bn^{-1}$, atunci $n \in \mathbf{N}^*$ are proprietatea că $(\forall)\, k \in \mathbf{N}^*$ din $A_a^k = I$ rezultă $n \leqslant k$. Într-adevăr, avem $A_n^k = I \Leftrightarrow 2ka\pi = 2m\pi$ (cu $m \in \mathbf{N}^*$) $\Leftrightarrow 2k\dfrac{b}{n}\pi = 2m\pi \Leftrightarrow kb = mn$. Așadar, n divide kb și, cum $(n, b) = 1$, rezultă n divide k, deci $n \leqslant k$.

2. Pentru $x = 1$ relația dată devine: $2^p + 3^q = p \cdot 2^p + q \cdot 3^q \Leftrightarrow (p-1) \cdot 2^p + (q-1) \cdot 3^q = 0$. Deoarece $2^p, 3^q > 0$ sînt posibile cazurile: i) $p = q = 1$. În acest caz relația este verificată; ii) $p < 1 < q$. În acest caz avem $2^p < 2 < 3 < 3^q$ și prin împărțire cu 3^{qx} deducem că

$$\left(\frac{2^p}{3^q}\right)^x + 1 = p \cdot 2^{p-1}\left(\frac{2}{3^q}\right)^x + q \cdot 3^{q-1}\left(\frac{3}{3^q}\right)^x$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\dfrac{2^p}{3^q}\right)^x + 1\right) = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\left(p \cdot 2^{p-1}\left(\dfrac{2}{3^q}\right)^x + q \cdot 3^{q-1}\left(\dfrac{3}{3^q}\right)^x\right) = 0$ rezultă că egalitatea din enunț nu poate fi adevărată în acest caz; iii) $p > 1 > q$. În acest caz $3^q < 3$ și împărțind relația dată cu 3^x obținem

$$\left(\frac{2^p}{3}\right)^x + \left(\frac{3^q}{3}\right)^x = p \cdot 2^{p-1}\left(\frac{2}{3}\right)^x + q \cdot 3^{q-1}.$$

Avînd în vedere că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3^q}{3}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2^p}{3}\right)^x = q\cdot 3^{q-1}$. Dacă limita din stînga este finită, ea este 0 sau 1 și, prin urmare, avem subcazurile: a) $\frac{2^p}{3} < 1$ și $q\cdot 3^{q-1} = 0$. În acest subcaz $q = 0$ și deci ar trebui să avem $2^{px} + 1 = p\cdot 2^{x+p-1}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Prin împărțire cu 2^{px} obținem $1 + 2^{-px} = p\cdot 2^{p-1}\cdot 2^{(1-p)x}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-px} = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{(1-p)x} = 0$ acest subcaz se exclude; b) $2^p = 3$ și $q\cdot 3^{q-1} = 1$. Deoarece funcția $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = x\cdot 3^{x-1}$ este crescătoare, ca produs de două funcții pozitive strict crescătoare, rezultă că f este injectivă și deci ecuația $q\cdot 3^{q-1} = 1$ are soluția unică $q = 1$ (ecuația nu poate avea soluții negative). Relația din enunț devine $2^{px} = p\cdot 2^{p+x-1} \Leftrightarrow 2^{(p-1)x} = p\cdot 2^{p-1}$. Avînd în vedere faptul că $p > 1$ rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{(p-1)x} = \infty$ și prin urmare și acest subcaz se exclude. Rezultă deci că singurul caz posibil este $p = q = 1$.

3. Vom demonstra prin inducție matematică faptul că $x_n \in (0, 1)$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Într-adevăr, pentru $n = 0$ avem $x_0 \in (0, 1)$ conform enunțului. Să presupunem că pentru $n \in \mathbf{N}$ avem $x_n \in (0, 1)$ și să demonstrăm că și pentru $n+1$ avem $x_{n+1} \in (0, 1)$. Relația de recurență se mai scrie $x_{n+1} = x_n(1 - x_n(1 - x_n(1 - x_n)))$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, și dacă ținem seama că $0 < x_n(1 - x_n) < 1$ rezultă $0 < 1 - x_n(1 - x_n) < 1$, de unde $0 < x_n(1 - x_n(1 - x_n)) < 1$ și deci $0 < 1 - x_n(1 - x_n(1 - x_n)) < 1$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, de unde deducem că $0 < x_{n+1} < 1$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Cu aceasta am demonstrat că șirul dat este mărginit. Șirul din enunț este descrescător. Într-adevăr, relația de recurență se mai scrie $x_{n+1} - x_n = -x_n^2(x_n^2 - x_n + 1)$, de unde rezultă că $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Fiind descrescător și mărginit rezultă că este convergent, adică există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbf{R}$. Trecînd la limită în relația de recurență deducem $x = x - x^2 + x^3 - x^4 \Leftrightarrow x^2(x^2 - x + 1) = 0$ și deoarece această ecuație are ca unică rădăcină reală pe $x = 0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

4. a) Se observă că $x - y + 1 = 0$, $(\forall)\, t \in \mathbf{R}\setminus\{0, 4\}$, ceea ce ne arată că $(x, y) \in E \Leftrightarrow (x, y) \in d$, unde d este dreapta de ecuație $x - y + 1 = 0$. Din condițiile date rezultă $(1+x)t^2 + 2(1-2x)t + 1 = 0$, $x \in \mathbf{R}$ și $yt^2 + 2(3-2y)t + 1 = 0$, $y \in \mathbf{R}$. Punînd deci condiția $x, y \in \mathbf{R}$ deducem că $\Delta_1' = 4x^2 - 5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{5}{4}, \infty\right)$ și $\Delta_2' = 4y^2 - 13y + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty, 1] \cup \left[\frac{9}{4}, \infty\right)$. Ceea ce arată că E este reuniunea a două semidrepte avînd drept dreaptă suport pe d. b) Punctul A este punctul de pe d de coordonate $(0, 1)$ iar semidreapta h este semidreapta de origine A, suport d și $x \leqslant 0$, $y \leqslant 1$. Dreapta d formează cu Ox un unghi de $\frac{\pi}{4}$ radiani. Semidreptele cerute în enunțul problemei taie pe Ox, respectiv, în B și C. Fie D intersecția semidreptei h cu Ox. Avem $m(\widehat{ODA}) = 45°$, $m(\widehat{DAB}) = 30°$ și atunci $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADO}) - m(\widehat{BAD}) = 45° - 30° = 15°$. Totodată, avem $m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{CDA}) + m(\widehat{DAC}) = 45° + 30° = 75°$. Deci

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \quad \text{iar} \quad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$$

Prin urmare ecuația semidreptei $[AB$ este $y-1=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}x$, iar a semidreptei $[AC$ este $y-1=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}x$ cu $x\leqslant 0$ și $y\leqslant 1$.

Etapa finală

1. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\det A=0$. Atunci există x_k, $k\in\{1, 2, ..., n\}$, nu toate nule așa încît (1) $\sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik}=0$, $i=\overline{1, n}$. Fie $x=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{|x_k|\}$ și $p\in\{1, 2, ..., n\}$ așa încît $x=|x_p|$. Din relația (1) rezultă că $-x_p a_{pp}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} x_j a_{pj}$ și, prin trecere la module, deducem

$$|x_p|\cdot|a|=\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} x_j a_{pj}\right|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}|x_j|\,|a_{pj}|\leqslant x\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}|a_{pj}|=x(n-1).$$

Deoarece $x>0$ rezultă că $|a|\leqslant n-1$, ceea ce este absurd. Prin urmare $\det A\in\mathbf{R}^*$.

2. Presupunem prin absurd că f nu are puncte fixe, adică (1) $f(x)>x$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$, sau (2) $f(x)<x$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$. i) $f(x)>x$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$. Din relația de condiție rezultă f injectivă. Într-adevăr, $f(x)=f(y)\Rightarrow f(f(x))=f(f(y))\Rightarrow bx=by\Rightarrow$ $\Rightarrow x=y$, $b\in\mathbf{R}^*$. Deoarece f este continuă și injectivă rezultă că este strict monotonă pe $\mathbf{R}$. Din (1) rezultă că f este strict crescătoare. Avem $f(x)>x\Rightarrow$ $\Rightarrow f(f(x))>f(x)>x\Rightarrow af(x)+bx>f(x)\Rightarrow f(x)<\frac{bx}{1-a}$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$. Prin urmare, $f(1)<\frac{b}{1-a}<1$, cu $a, b\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$, ceea ce contrazice $f(x)>x$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$. ii) $f(x)<x$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$. Rezultă f strict descrescătoare, deci $f(x)<x\Rightarrow$ $\Rightarrow f(f(x))>f(x)\Rightarrow f(x)<af(x)+bx\Rightarrow f(x)>\frac{bx}{1-a}$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$. În particular, $f(-1)>-\frac{b}{1-a}>-1$, în contradicție cu $f(x)<x$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$. În concluzie, există $c\in\mathbf{R}$ așa încît $f(c)=c$. Avem $f(f(c))=af(c)+bc\Rightarrow c=ac+bc\Rightarrow$ $\Rightarrow c(a+b-1)=0\Rightarrow c=0$, $a+b<1$. Deci $f(0)=0$.

3. a) Fie $f:[-1, 1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2$. Luînd $x_0=0$ se verifică imediat că f satisface proprietatea (P). b) $(\Rightarrow)$. Din definiția lui $\inf_{x\in A} f(x)$ rezultă că există $(x_j)_{j\geqslant 1}\subset A$ așa încît (1) $\lim_{j\to\infty} f(x_j)=\inf_{x\in A} f(x)$. Dacă A și f au proprietatea (P), există $(x_{j_k})_{k\geqslant 1}\subset(x_j)_{j\geqslant 1}$ și $x_0\in A$ astfel încît (2) $\lim_{k\to\infty} f(x_{j_k})\geqslant f(x_0)$. Atunci,

$$\inf_{x\in A} f(x)\overset{(1)}{=}\lim_{j\to\infty} f(x_j)=\lim_{k\to\infty} f(x_{j_k})\overset{(2)}{\geqslant} f(x_0)\geqslant\inf_{x\in A} f(x),$$

deci $f(x_0)=\inf_{x\in A} f(x)$ și, cum $x_0\in A$, rezultă că x_0 este punct de minim pentru f relativ la A. $(\Leftarrow)$. Fie x_0 un punct de minim pentru f relativ la A și $(x_j)_{j\geqslant 1}\subset A$. Definim $y_j=f(x_j)$, $(\forall)\, j\geqslant 1$. Întrucît f este mărginită, șirul $(y_j)_{j\geqslant 1}$ este mărginit,

deci conform lemei lui Cesaro există subșirul convergent $(y_{j_k})_{k\geq 1} \subset (y_j)_{j\geq 1} \subset f(A)$. Fie $y_0 = \lim\limits_{k\to\infty} y_{j_k}$. Cum $y_{j_k} = f(x_{j_k}) \geq f(x_0)$, $(\forall)\, k \geq 1$, rezultă $y_0 \geq f(x_0)$, deci $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{j_k}) \geq f(x_0)$.

4. Dacă $m \in \mathbf{Q} \Rightarrow (\exists)\, p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$, astfel încît $m = \frac{p}{q}$. Rezultă că punctul de coordonate $A(q, p)$ aparține dreptei D (ca de altfel toate punctele de coordonate (kq, kp), $k \in \mathbf{Z}$). Consideram dreapta D′ ce trece prin A și este perpendiculară pe D. Panta acestei drepte este $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{q}{p}$ Ecuația dreptei (D′) este $y - p = -\frac{q}{p}(x - q)$. Dreapta D′ conține o infinitate de puncte care au ambele coordonate numere întregi: anume $P_k(x_k, y_k)$, unde $x_k = q + kp$, $y_k = p - kp$, $k \in \mathbf{Z}$. Se observă că punctele P_k și P_{-k} sînt simetrice față de D. *Observație.* Triunghiul OP_kP_{-k} este isoscel iar OA este mediatoarea bazei. Reciproc, fie P și Q două puncte care au coordonatele numere întregi și sînt simetrice față de dreapta D. Atunci, mijlocul M al segmentului $[PQ]$ aparține dreptei D. Dar $x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \in \mathbf{Q}$ și $y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} \in \mathbf{Q}$. Rezultă $m = \frac{y_M}{x_M} \in \mathbf{Q}$.

Anul 1984

Etapa județeană

1. Se observă că $x_n \in \mathbf{R}^*$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Într-adevăr, dacă am presupune că există $n_0 \in \mathbf{N}$, cu $x_{n_0} = 0$, ar rezulta $x_{n_0+1}x_{n_0} - 2x_{n_0} - 3 = 0 \Leftrightarrow -3 = 0$, ceea ce este absurd. Prin urmare, $x_{n+1} = 2 + 3x_n^{-1}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, și deoarece $x_0 \in \mathbf{R}^*$ rezultă $x_{n+1} > 2$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$, prin inducție după $n \in \mathbf{N}$. Demonstrăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$. Într-adevăr,

$$|x_{n+1} - 3| = \frac{|x_n - 3|}{x_n} = \frac{|x_{n-1} - 3|}{x_n x_{n-1}} = \quad = \frac{|x_1 - 3|}{x_1 x_2 \ldots x_n} < \frac{|x_1 - 3|}{2^n}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_1 - 3|}{2^n} = 0$, din relația precedentă deducem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$, adică șirul dat este convergent.

2. Avem

$$\frac{f((3+\sqrt{7})^n a)}{g((2+\sqrt{2})^n b)} = \frac{f((3+\sqrt{7})^n a + (3-\sqrt{7})^n a - (3-\sqrt{7})^n a)}{g((2+\sqrt{2})^n b + (2-\sqrt{2})^n b - (2-\sqrt{2})^n b)},$$

de unde, dacă ținem seama că $(3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n = m_n \in \mathbf{Z}$ și $(2+\sqrt{2})^n - (2-\sqrt{2})^n = p_n \in \mathbf{Z}$, deducem că

$$\frac{f((3+\sqrt{7})^n a)}{g((2+\sqrt{2})^n b)} = \frac{f(-(3-\sqrt{7})^n a)}{g(-(2-\sqrt{2})^n b)}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f((3+\sqrt{7})^n a)}{g((2+\sqrt{2})^n b)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{b}\,\frac{f(-(3-\sqrt{7})^n a)}{-(3-\sqrt{7})^n a}\cdot\frac{-(2-\sqrt{2})^n b}{g(-(2-\sqrt{2})^n b)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{u}{v}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}}\right)^n=0.$$

Am folosit faptul că $3-\sqrt{7}$, $2-\sqrt{2}$, $\dfrac{3-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}}\in(0,1)$.

3. Avem $0\leqslant|\det(A+iB)|^2=\det(A+iB)\,\overline{\det(A+iB)}=\det(A^2+B^2-iAB+iBA)=\det(i(BA-AB))=i^n\det(BA-AB)$. Dacă $n\in 4\mathbf{N}$, atunci $\det(AB-BA)=\det(-(BA-AB))=(-1)^n\det(BA-AB)=\det(BA-AB)\in\mathbf{R}_+$, deoarece $i^n=i^{4k}=1$. Dacă $n\in 4\mathbf{N}+2$, $0\leqslant i^n\det(BA-AB)=-\det(BA-AB)=-\det(AB-BA)$ și deci $\det(AB-BA)\leqslant 0$. Dacă $n\in 4\mathbf{N}+1$ sau $n\in 4\mathbf{N}+3$, din $i^n\det(BA-AB)\in\mathbf{R}_+$ și $\det(BA-AB)\in\mathbf{R}$, rezultă $\det(AB-BA)=-\det(BA-AB)=0$.

4. Alegem $Ox=BC$ și Oy înălțimea din A a triunghiului. În acest sistem de coordonate avem $C(c,0)$, $B(b,0)$, $A(0,a)$. Să presupunem $b<c$ și $a>0$. Fie $F=\mathrm{pr}_{Ox}E$ și $G=\mathrm{pr}_{Ox}D$. Avem $\triangle AOC\equiv\triangle CFE\Rightarrow E(c+a,c)$ și $\triangle AOB\equiv\triangle BGD\Rightarrow D(b-a,-b)$. Ecuația dreptei $(CD):-bx+(a-b+c)y+bc=0$, iar a dreptei $(BE):cx+(-a+b-c)y-bc=0$. Avem $\begin{vmatrix}-b & a-b+c & bc\\ c & -a+b-c & -bc\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$, ceea ce arată că dreptele CD, BE și Oy sînt concurente.

Etapa finală

1. Vom rezolva o problemă mai generală decît cea enunțată în sensul că vom considera $a_k\in\mathbf{Q}$, $k=\overline{1,n}$. Aducînd numerele a_k, $k=\overline{1,n}$, la același numitor b și, notînd cu d cel mai mare divizor comun al numărătorilor, putem scrie $a_k=db^{-1}b_k$, $k=\overline{1,n}$, unde $b_k\in\mathbf{Z}$ și $(b_1,b_2,\quad b_n)=1$. Putem deci considera determinantul matricii

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_n\\ pa_n & a_1 & a_{n-1}\\ \\ pa_2 & pa_3 & a_1\end{pmatrix}$$

în care $a_k\in\mathbf{Z}$, $(\forall)\,k=\overline{1,n}$ și sînt prime între ele. Presupunem $\det A=0$. Dezvoltînd după prima coloană, avem $\det A=a_1A_{11}+pa_nA_{21}+pa_{n-1}A_{31}+\ldots+pa_2A_{n1}=0$, unde A_{ij} sînt complemenții algebrici ai elementelor a_{ij}. Din relația precedentă deducem că p divide a_1A_{11} și de aici că p divide a_1, deoarece, în caz contrar, am avea că p divide A_{11} și, dezvoltînd prin recurență, ajungem tot la p

divide a_1. Prin urmare, putem scrie $a_1 = pc_1$ și deci determinantul matricii A este egal cu p det B, unde

$$B = \begin{pmatrix} c_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & pc_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & pa_n & pc_1 & \dots & a_{n-2} \\ \\ a_2 & pa_3 & pa_4 & \dots & pc_1 \end{pmatrix}$$ și deci det $B = 0$. Totodată,

$$\det B = (-1)^{n-1} \det C, \text{ unde } C = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_n & c_1 \\ pc_1 & a_2 & a_{n-1} & a_n \\ pa_n & pc_1 & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \\ pa_3 & pa_4 & pa_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Dacă det $C = 0$ rezultă analog că p divide a_2. În continuare prin metoda inducției matematice ajungem la concluzia că $a_1, a_2, \dots, a_n$ nu sînt prime între ele, ceea ce contrazice enunțul. Contradicția provine din presupunerea det $A = 0$.

2. Considerăm funcțiile indefinit derivabile $f, g_k : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k(x)$, $g_k(x) = e^{kx} \sin kx$, $k = \overline{1, n}$. Din $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in (-1, 1)$, deducem că $f^{(i)}(x) = 0$, $(\forall)\, i \in \mathbf{N}$. Deoarece $g_k^{(4m)}(x) = (-1)^m 4^m k^{4m} g_k(x)$, $(\forall)\, k = \overline{1, n}$ și $m \in \mathbf{N}$, deducem deci că

$$f^{(4m+1)}(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k g_k^{(4m+1)}(x) = 0 \Leftrightarrow (-1) 4^m \sum_{k=1}^{n} a_k k^{4m} g_k(x) = 0.$$

Înlocuind x cu 0 în ultima egalitate rezultă $\sum_{k=1}^{n} a_k k^{4m} k = 0$, de unde dînd lui m valori în mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ obținem sistemul de ecuații

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 + \dots + a_n \cdot n = 0, \\ a_1 \cdot 1^5 + a_2 \cdot 2^5 + a_3 \cdot 3^5 + \dots + a_n \cdot n^5 = 0, \\ \dots \\ a_1 \cdot 1^{4(n-1)+1} + a_2 \cdot 2^{4(n-1)+1} + a_3 \cdot 3^{4(n-1)+1} + \quad a_n \cdot n^{4(n-1)+1} = 0, \end{cases}$$

cu necunoscutele $a_1, a_2, a_3, \quad a_n$. Determinantul acestui sistem este

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & n \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & n^5 \\ \\ 1^{4n-3} & 2^{4n-3} & 3^{4n-3} & n^{4n-3} \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & n^4 \\ \\ 1^{4(n-1)} & 2^{4(n-1)} & 3^{4(n-1)} & \dots n^{4(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= n! \prod_{i>j} (i^4 - j^4) \neq 0 \text{ și atunci } a_1 = a_2 = a_3 = \quad = a_n = 0.$$

3. Considerăm funcția $f : (0, 5] \to \mathbf{R}$, $f(y) = y^x + (10 - y)^{x^2}$. Este evident că ecuația dată este verificată de $x = 0$ și $x = 1$ și vom arăta că acestea sînt singurele sale rădăcini. Pentru aceasta arătăm că $f(4) = 4^x + 6^{x^2} \neq f(5) = 5^x + 5^{x^2}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Avem $f'(y) = xy^{x-1} - x^2(10 - y)^{x^2-1}$. Este evident că pentru $x < 0$ avem $f'(y) < 0$, adică f este descrescătoare și prin urmare $f(4) > f(5)$. Dacă $x \in (0, 1)$ și $y \in (0, 5]$, atunci $10 - y \geqslant 5$ și deci $x^2(10 - y)^{x^2-1} \quad x(10-y)^{x-1} \leqslant \leqslant x5^{x-1} \leqslant xy^{x-1}$, adică $f'(y) > 0$, ceea ce arată că pentru $x \in (0, 1)$ avem

$f(4) < f(5)$. Dacă $x > 1$ și $y \in (0, 5]$, atunci $x^2(10 - y)^{x^2} > x(10 - y)^{x-1} \geq$ $\geq x5^{x-1} \geq x^{y-1}$, de unde deducem $f'(y) < 0$, adică f este strict descrescătoare și deci $f(4) > f(5)$. Cu aceasta problema este rezolvată.

4. a) Ecuația cercului $\mathcal{C}_m$ se mai scrie $m^2 - 4mx + 2(x^2 + y^2) = 0$ și printr-un punct $A(x, y)$ al planului trece un cerc $\mathcal{C}$ dacă și numai dacă există $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încît $A(x, y)$ să se afle pe cercul $\mathcal{C}_m \Leftrightarrow x^2 - y^2 \geq 0$. Deci, dacă $x^2 - y^2 > 0$, atunci prin punctul $A(x, y)$ trec două cercuri; dacă $x^2 - y^2 = 0$, atunci prin punctul $A(x, y)$ trece un singur cerc $\mathcal{C}_m$, iar dacă $x^2 - y^2 < 0$, atunci prin punctul $A(x, y)$ nu trece nici un cerc $\mathcal{C}_m$. b) Cercurile $\mathcal{C}_m$ au centrele $C_1(m, 0)$ și razele $r_1 = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$ iar cercurile $\mathcal{D}_m$ au centrul în $C(0, 0)$ și razele $r = m$. Ecuația unei tangente comune este (d) : $ax - y + b = 0$ iar condițiile de tangență sînt

$$\begin{cases} d(C_1, \text{d}) = \dfrac{|am + b|}{\sqrt{1 + a^2}} = \dfrac{|m|}{\sqrt{2}} = r_1 \\ d(C, \text{d}) = \dfrac{|b|}{\sqrt{1 + a^2}} = |m| = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2m^2 + 4abm + 2b^2 = m^2(1 + a^2) \\ b^2 = m^2(1 + a^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = m^2(1 + a^2) \\ 3a^2m + 4ab + m = 0 \end{cases}.$$ Deoarece $m \neq 0$ rezultă $a \neq 0$ și atunci sistemul precedent devine

$$\begin{cases} b^2 = m^2(1 + a^2) \\ b = -\dfrac{3a^2 + 1}{4a} m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = m^2(1 + a^2) \\ b^2 = \dfrac{9a^4 + 6a^2 + 1}{16a^2} m^2 \end{cases} \Rightarrow 7a^4 + 10a^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{4\sqrt{2} - 5}{7}; \quad a = \pm\sqrt{\frac{4\sqrt{2} - 5}{7}} \text{ și } 1 + a^2 = \frac{4\sqrt{2} + 2}{7}.$$

Deci $b = \pm m\sqrt{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{2} + 1}{7}}$. Mulțimea tangentelor comune cercurilor $\mathcal{C}_m$ și $\mathcal{D}_m$, $m \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ este mulțimea dreptelor d cu a și b determinați mai sus.

Anul 1985

Etapa județeană

1. În cadrul demonstrației vom folosi următoarea teoremă: dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir convergent și are limita a, atunci orice subșir $(a_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ al șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și are tot limita a. Fie $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_{2n}$, $b = \lim\limits_{n \to \infty} x_{2n+1}$ și $c = \lim\limits_{n \to \infty} x_{3n}$. Deoarece șirul $(x_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ este un subșir al șirurilor $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ și $(x_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, el este convergent și rezultă că $a = c$. Șirul $(x_{6n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ este un subșir al șirurilor $(x_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ și $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$; el este convergent și rezultă că $c = b$. Deci $a = b = c$, adică $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} x_{2n+1} = a$. Fie un $\varepsilon > 0$. Din faptul că $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n} = a$ rezultă că $(\exists)\ n_1 \in \mathbb{N}$, astfel încît pentru orice $n > n_1 \Rightarrow |x_{2n} - a| < \varepsilon$, iar din faptul că $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n+1} = a$ rezultă că $(\exists)\ n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încît pentru orice $n > n_2$ $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. Notăm cu $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Atunci $(\forall)\ n > n_0$, par sau impar, rezultă $|x_n - a| < \varepsilon$, de unde tragem concluzia că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

2. Să considerăm șirul $b_n = (a - a_1)(a - a_2) \dots (a - a_n)$. Observăm că $b_n > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, deoarece fiecare factor este pozitiv. Din ipoteza că $(a_n)_{n \geq 0}$ este un șir strict crescător convergent către a, rezultă că pentru $\varepsilon = 1$, există un rang N_1, astfel încît pentru orice $n > N_1$ să avem $a - a_{n+1} < 1$. Deci $\frac{b_{n+1}}{b_n} = a - a_{n+1} < 1$ pentru $n > N_1$, de unde se deduce că șirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este monoton descrescător și mărginit inferior, deci este convergent. Să notăm cu $l = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$. Trecînd la limită în relația $b_{n+1} = (a - a_{n+1})\, b_n$ obținem că $l = 0 \cdot l$, de unde $l = 0$. Fie $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de numere reale astfel încît $x_n < a$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, și $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Există un număr natural n_p astfel încît $x_n \in [a_{n_p}, a_{n_p+1}]$ și rezultă că $0 < (x_n - a_1)(x_n - a_2) \dots (x_n - a_{n_p}) < (a - a_1)(a - a_2) \quad (a - a_{n_p})$, adică $0 < f(x_n) < b_{n_p}$. Deoarece $\lim\limits_{n_p \to \infty} b_{n_p} = 0$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ fiind ales arbitrar rezultă că $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = 0$.

3. Să notăm cu $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ matricea din M determinată de numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$. Notăm cu A_i pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ matricea determinată de $a_j = 0$ pentru $j \neq i$ și $a_i = 1$. Se observă că $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i A_i$. Facem convenția să identificăm pe $n + i$ cu i, pe $-i$ cu $n - i$ pentru $1 \leq i \leq n$ și pe 0 cu n. Se observă ușor prin calcul că $A_i A_j = A_j A_i = A_{i+j}$ pentru $1 \leq i, j \leq n$. Fie $A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i A_i$ și $B = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j A_j$. Atunci

$$AB = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i A_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j A_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j A_i A_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j A_j A_i =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} b_j A_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i A_i\right) = BA.$$

Reciproc, să presupunem că matricea B comută cu orice matrice $A \in M$. Atunci elementul a_{ij} al matricii A_2 se poate scrie, ținînd cont de convenția făcută, sub forma

$$a_{ij} = \delta^i_{j-1} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } i \neq j - 1, \\ 1 \text{ dacă } i = j - 1. \end{cases}$$

Fie $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ matricea care comută cu orice matrice $A \in M$. Deci $BA_2 = A_2 B$ sau

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \delta^{k+1}_j = \sum_{k=1}^{n} \delta^i_{k-1} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta^i_k b_{k+1j},$$

de unde rezultă că $b_{ij-1} = b_{i+1j}$, $(\forall)\, 1 \leq i, j \leq n$. Facem pe rînd pe $i = 1, 2, \dots, n$ și $j = 1, 2, \dots, n$ și obținem

$$b_{11} = b_{22} = \quad = b_{nn} = b_1,$$
$$b_{12} = b_{23} = \quad = b_{n-1n} \quad b_{n1} = b_2,$$

$$b_{1n} = b_{21} = b_{32} = \quad = b_{nn-1} = b_n,$$

de unde deducem că $B = A(b_1, b_2, \dots, b_n) \in M$.

4. Presupunem prin absurd că $A^2 + pA + qI_n = 0$. Atunci din identitatea

$A^2 + pA + qI_n = \left(A + \frac{p}{2} I_n\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} I_n$ rezultă că

$$\left(A + \frac{p}{2} I_n\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4} I_n$$

Aplicînd determinantul în ambii membri, obținem

$$\det\left(A + \frac{p}{2} I_n\right)^n = \left(\frac{p^2 - 4q}{4}\right)^n$$

Membrul stîng al egalității este pozitiv iar membrul drept al egalității este strict negativ deoarece $p^2 - 4q < 0$ și n este impar, deci am obținut o contradicție. Rezultă deci că $A^2 + pA + qI_n \neq 0_n$.

Etapa finală

1. a) Fie f o soluție a ecuației funcționale din enunț. Din condițiile date rezultă că f se anulează numai pentru $t = 0$ și deoarece f este continuă deducem că ea păstrează semn constant pe fiecare din intervalele $(-1, 0)$ și $(0, 1)$. Prin urmare, pe $(0, 1)$ avem $f(t) = t^3$ sau $f(t) = -t^3$ și atunci soluțiile problemei sînt: $f_1(t) = t^3$, $f_2(t) = -t^3$, $f_3(t) = |t|^3$, $f_4(t) = -|t|^3$, adică în total patru soluții. b) Din faptul că f și g sînt derivabile în 0 deducem că există două funcții $h, k : (-1, 1) \to \mathbf{R}$ așa încît $h(0) = k(0) = 0$ și ambele sînt continue în 0. Totodată, $f(t) = tf'(0) + th(t)$, $g(t) = t\,g'(0) + t\,k(t)$, $(\forall) t \in (-1, 1)$. Datorită faptului că $0 \leqslant f^2(t) = g^3(t)$, $(\forall)\ t \in (-1, 1)$, rezultă că $g(t) \geqslant 0$, $(\forall)\ t \in (-1, 1)$, ceea ce ne arată că g are un minim egal cu 0 în punctul $t_0 = 0$. Conform teoremei lui Fermat deducem că $g'(0) = 0$ și atunci $g(t) = t \cdot k(t)$, $(\forall)\ t \in (-1, 1)$. Condiția din enunț devine acum: $t^2(f'(0) + h(t))^2 = t^3 \cdot k^3(t)$, $(\forall) t \in (-1, 1) \Rightarrow (f'(0) + h(t))^2 = t \cdot k^3(t)$, $(\forall)\ t \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, iar din această relație obținem $\lim\limits_{t \to 0} (f'(0) + h(t))^2 = \lim\limits_{t \to 0} t \cdot k^3(t) = 0 \Rightarrow f'(0) + \lim\limits_{t \to 0} h(t) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$.

2. Vom demonstra un rezultat mai general, și anume: dacă $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ are proprietatea că $(\exists) \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^k} = a \in \overline{\mathbf{R}}$, $k \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ și dacă $(\exists) \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^{k-1}} = b \in \overline{\mathbf{R}}$, atunci $b = ka$. Pentru $k = 2$ și $a = 0$ se obține problema din enunț. Într-adevăr, dacă $(\exists) \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^{k-1}} = b$, atunci $b = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n+1) - f(n)}{n^{k-1}}$ și deci notînd $u_n = f(n)$, $v_n = n^k$, avem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{n^{k-1}} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n^{k-1}}{v_{n+1} - v_n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{f(n+1) - f(n)}{n^{k-1}} \cdot \frac{n^{k-1}}{(n+1)^k - n^k} = \frac{a}{k}$$

Pe baza teoremei Cesarò-Stolz, deducem că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1)^k - n^k} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{n^k}$ și deci, pe baza relației precedente, rezultă $b = ka$, ceea ce trebuia demonstrat.

3. a) Este evident că $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ este neinversabilă iar $A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă deoarece $\det(A + I_2) = 2 \in \mathbf{R}^*$. b) Fie $C = (I_n - AB)^{-1}$. Avem $C(I_n - AB) = I_n \Rightarrow C - CAB = I_n$ și atunci rezultă $(I_n + BCA)(I_n - BA) = I_n - BA + BCA - BCABA = I_n - BA + B(C - CAB)A = I_n - BA + BI_nA = I_n - BA + BA = I_n$, de unde deducem că matricea $I_n - BA$ este inversabilă avînd ca inversă matricea $I_n + BCA$.

4. a) Notăm $D_n = \det A$ și dacă după adunarea tuturor coloanelor la prima dăm factor comun pe $n - 2$, deducem

$$D_n = (n-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \quad 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 \dots 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \dots & 0 & 0 \\ & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-2)2^{n-1}.$$

b) Dacă $n = 1$ atunci afirmația este evidentă. Pentru $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ vom asocia matricii A matricea $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ cu proprietatea că $b_{1j} = a_{1j}$, $(\forall) j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $b_{i1} = 0$, $(\forall)\, i \in \{2, 3, \dots, n\}$ iar $b_{ij} = a_{ij} - a_{11}a_{j1}a_{1j}$, $(i, j) \in \{2, 3, \dots, n\} \times \{2, 3, \dots n\}$. Deducem că $\det A = \det B = a_{11}d_{11}$, unde d_{11} este minorul lui b_{11} din matricea B. Se observă că toate elementele minorului d_{11} sînt elemente ale mulțimii $\{-2, 0, 2\}$, de unde rezultă că 2^{n-1} divide pe d_{11} și, prin urmare, 2^{n-1} divide pe $\det A = a_{11}d_{11}$.

Anul 1986

Etapa județeană

1. Deoarece $f(x) > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ și $e^x > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ din condiția din enunț rezultă $\ln f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Vom arăta în continuare că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. Într-adevăr, să presupunem că n-ar fi strict crescătoare; atunci ar exista $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$, așa încît $f(x_1) \geqslant f(x_2) \Rightarrow \ln f(x_1) \geqslant \ln f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \ln f(x_1) \geqslant f(x_1) \ln f(x_2) \geqslant f(x_2) \ln f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} \geqslant e^{x_2}$, ceea ce contrazice faptul că funcția exponențială este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. Cu aceasta am dovedit că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. Mai departe, avem

$$\ln x < x,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^* \Rightarrow \ln f(x) < f(x),\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(x) \ln f(x) < f^2(x),\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2(x) > e^x,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(x) > e^{\frac{1}{2}x},\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Din $f(x) \ln f(x) = e^x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, prin logaritmare deducem

$$x = \ln f(x) + \ln \ln f(x),\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow \ln x = \ln(\ln f(x) + \ln \ln f(x)),\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*,$$

și deci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(\ln f(x) + \ln \ln f(x))}{\ln f(x) + \ln \ln f(x)} \cdot \frac{\ln f(x) + \ln \ln f(x)}{f(x)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(\ln f(x) + \ln \ln f(x))}{\ln f(x) + \ln \ln f(x)} \cdot \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln f(x)}{f(x)} + \frac{\ln \ln f(x)}{\ln f(x)} \cdot \frac{\ln f(x)}{f(x)} \right) = 0,$$

unde am folosit faptul că $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$. Rezultă deci că

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

2. a) $(\forall)\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$ așa încît $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f\circ f)(x_1) = (f\circ f)(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = x_2$ și deci f este injectivă pe $\mathbf{R}_+$. Fiind injectivă și continuă pe $\mathbf{R}_+$, rezultă că f este strict monotonă pe $\mathbf{R}_+$ și, prin urmare, există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbf{R}}$. Deoarece $(f\circ f\circ f)(x) = (f\circ f)(f(x)) = f^2(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ și $(f\circ f\circ f)(x) = f(f\circ f)(x) =$ $= f(x^2)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, deducem că $f(x^2) = f^2(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Deci $f(x^2) = f^2(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, de unde obținem că $0 \leqslant f(t) = f^2(\sqrt{t})$, $(\forall)\, t \in \mathbf{R}_+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) > 0$. Dacă f ar fi strict descrescătoare, din faptul că $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ ar rezulta

$$(1) \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = a \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} (f\circ f)(x) = f(\lim_{x\to\infty} f(x)) = f(a) \in \mathbf{R}$$

Totodată (2) $\lim\limits_{x\to\infty} (f\circ f)(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$. Din (1) și (2) ar rezulta $f(a) = \infty \in \mathbf{R}$, ceea ce este absurd. Deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}_+$; b) Din $f(x^2) = f^2(x)$ deducem $f(0) = f^2(0)$ și $f(1) = f^2(1)$, de unde rezultă $f(0), f(1) \in \{0, 1\}$. Dacă $f(0) = 1$ atunci din injectivitatea lui f ar rezulta $f(1) = 0$, iar aceasta ar contrazice faptul că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}_+$. Prin urmare, $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$; c) $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ avem $f^2(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f^2(x) \Rightarrow (f(-x) - f(x)) \cdot (f(-x) + f(x)) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Dar $f(x) > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}^*$, și deci dacă $x \in \mathbf{R}^*$, atunci $-x \in \mathbf{R}^*$, ceea ce arată că $f(x), f(-x) > 0$ și atunci din egalitatea precedentă rezultă $f(-x) -$ $- f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(-x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

3. $A^3 - I_n = A \Leftrightarrow (A - I_n)(A^2 + A + I_n) = A$. De aici rezultă că $\det A = \det(A - I_n) \det(A^2 + A + I_n)$. Se demonstrează mai departe că $\det(A^2 + A + I_n) \geqslant 0$. Într-adevăr, $A^2 + A + I_n = \left(A - \frac{1}{2} I_n\right)^2 + \frac{3}{4} I_n^2 =$

$= \left(A + \frac{1}{2} I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} I_n\right)^2 = B^2 + C^2$, unde $B = A + \frac{1}{2} I_n$, $C = \frac{\sqrt{3}}{2} I_n$ și $BC = CB$.

Deci $B^2 + C^2 = B^2 - i^2C^2 = (B + iC)(B - iC) = (B + iC)\overline{(B + iC)}$ și deci $\det(B^2 + C^2) =$ $= \det(B + iC) \cdot \det\overline{(B + iC)} = \det(B + iC) \cdot \overline{\det(B + iC)} = |\det(B + iC)|^2 \geqslant 0$. Din $(A - I_n)(A^2 + A + I_n) = A$, $\det(A^2 + A + I_n) \geqslant 0$ și $\det((A - I_n)(A^2 + A + I_n)) =$ $= \det(A - I_n) \cdot \det(A^2 + A + I_n) = \det A$, rezultă că $\det(A - I_n)$ și $\det A$ au ambele același semn sau sînt nule. Totodată, $A^3 - I_n = A \Leftrightarrow A^3 - A = I_n$, de unde deducem $\det A \cdot \det(A - I_n) \cdot \det(A + I_n) = \det I_n = 1$, deci $\det A$, $\det(A - I_n) \in \mathbf{R}^*$ și deoarece ele au același semn, atunci $\det(A + I_n) \in \mathbf{R}_+^*$. Din relația $A^3 - I_n = A$ deducem $A^3 = A + I_n$, de unde $\det A^3 = (\det A)^3 = \det(A + I_n) \in \mathbf{R}_+^*$ și problema este complet rezolvată.

4. Observăm că este necesar ca $x^2(1) = 4$, $x^2(2) = 7$, $x^2(3) = 6$, $x^2(4) = 5$, $x^2(5) = 1$, $x^2(6) = 3$, $x^2(7) = 2$. Dacă $x(1) = 1$ rezultă $x^2(1) = x(1) = 4$, ceea ce este absurd. Dacă $x(1) = 2$ atunci $x(2) = x^2(1) = 4 \Rightarrow x(4) = x^2(2) = 7 \Rightarrow x(7) =$ $= x^2(4) = 5 \Rightarrow x(5) = x^2(7) = 2$, absurd. Dacă $x(1) = 3 \Rightarrow x(3) = x^2(1) = 4 \Rightarrow x(4) =$ $= x^2(3) = 6 \Rightarrow x(6) = x^2(4) = 5 \Rightarrow x(5) = x^2(6) = 3$, ceea ce este absurd. Dacă $x(1) = 4 \Rightarrow x(4) = x^2(1) = 4$, absurd. Dacă $x(1) = 5 \Rightarrow x(5) = x^2(1) = 4 \Rightarrow x(4) = x^2(5) =$ $= 1 \Rightarrow x(1) = x^2(4) = 5$, ceea ce este posibil și vom reveni asupra acestui caz după

ce vom analiza și celelalte posibilități pentru $x(1)$. Dacă $x(1)=6 \Rightarrow x(6)=x^2(1)= = 4 \Rightarrow x(4) = x^2(6) = 3 \Rightarrow x(3) = x^2(4) = 5 \Rightarrow x(5) = x^2(3) = 6$, ceea ce este absurd. Dacă $x(1) = 7 \Rightarrow x(7) = x^2(1) = 4 \Rightarrow x(4) = x^2(7) = 2 \Rightarrow x(2) = x^2(4) = 5 \Rightarrow x(5) = x^2(2) = 7$, ceea ce este iposibil. Prin urmare singura posibilitate este $x(1) = 5$, $x(5) = 4$, $x(4)=1$ și acum avem de analizat următoarele cazuri: $x(2)=2 \Rightarrow x(2) = = x^2(2) = 7$, ceea ce este imposibil; $x(2) = 3 \Rightarrow x(3) = x^2(2)=7 \Rightarrow x(7)=x^2(3) = = 6 \Rightarrow x(6) = x^2(7) = 2$, ceea ce este posibil; $x(2) = 6 \Rightarrow x(6) = x^2(2) = 7 \Rightarrow x(7)= = x^2(6) = 3 \Rightarrow x(3) = x^2(7) = 2$, ceea ce este posibil; $x(2) = 7 \Rightarrow x(7) = x^2(2)= = 7 \Rightarrow x(7) = x^2(7) = 2$, ceea ce este imposibil. Cu aceasta am eliminat toate cazurile imposibile și a rezultat că soluțiile ecuației din enunț sînt

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ și } x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 4 & & 3 \end{pmatrix}.$$

Etapa finală

1. Evident polinomul nul $P = 0$ verifică enunțul. Fie deci P un polinom nenul de gradul $n \in \mathbf{N}$ cu proprietatea din enunț. Vom arăta prin inducție după n că $P = X^n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Dacă $n = 0$, avem $P = a \in \mathbf{R}$ și egalitatea din ipoteză devine $a = a^2$, de unde $a = 1$. Prin urmare, $P = 1 = X^0$. Să presupunem acum că singurul polinom de gradul n care verifică enunțul este X^n și să demonstrăm că singurul polinom de gradul $n + 1$ cu proprietatea menționată este X^{n+1}. Fie deci P un polinom de gradul $n + 1$ așa încît

$$(1) \qquad P(\sin x) = P(\operatorname{tg} x)\, P(\cos x), \ (\forall) x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Atunci avem

$$(2) \qquad P(\cos x) = \frac{P(\sin x)}{P(\operatorname{tg} x)}, \ (\forall)\, x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus A,$$

unde am notat cu A mulțimea finită a acelor valori $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\operatorname{tg} x$ este rădăcină reală a polinomului P. În egalitatea (2) trecem la limită cînd $x \nearrow \frac{\pi}{2}$ și deoarece $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} P(\operatorname{tg} x) = \lim\limits_{y \to \infty} P(y) = \pm\infty$, obținem $P(0) = \frac{P(1)}{\pm\infty}$, adică $P(0) = 0$. Prin urmare, $P = XQ$, unde Q este un polinom de gradul n. Egalitatea (1) devine $\sin x Q(\sin x) = \operatorname{tg} x Q(\operatorname{tg} x) \cos x\, Q(\cos x)$, $(\forall)\, x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, adică $Q(\sin x) = Q(\operatorname{tg} x)\, Q(\cos x)$, $(\forall)\, x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. În baza ipotezei de inducție vom avea $Q = X^n$ și atunci $P = XQ = X^{n+1}$, ceea ce încheie soluția problemei.

2. Avem $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n} > x_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$, deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este strict crescător. Arătăm că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este nemărginit; într-adevăr, dacă acest șir ar fi mărginit, ar fi convergent către un număr $x \in \mathbf{R}$, ceea ce este imposibil. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este strict crescător și nemărginit, avem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$. Să considerăm acum șirul $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ definit prin $y_n = e^{x_n}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \infty$

Avem $y_{n+1} = e^{x_{n+1}} = e^{x_n + e^{-x_n}} = e^{x_n} \cdot e^{e^{-x_n}} = y_n e^{\frac{1}{y_n}}$, deci $y_{n+1} - y_n =$

$= y_n\left(e^{\frac{1}{y_n}} - 1\right) = \dfrac{e^{\frac{1}{y_n}} - 1}{\frac{1}{y_n}}$. Datorită faptului că $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$, luînd șirul

$\dfrac{1}{y_n} \to 0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{y_n}} - 1}{\frac{1}{y_n}} = 1$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} (y_{n-1} - y_n) = 1$. Să considerăm

șirul $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin $t_n = n$. Avem $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n} = y_{n+1} - y_n \to 1$, deci conform

teoremei Cesarò-Stolz rezultă $\dfrac{y_n}{t_n} \to 1$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{x_n}}{n} = 1$. Luînd șirul $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$,

$s_n = \ln n$, putem scrie

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{s_{n+1} - s_n} = \frac{e^{-x_n}}{\ln \frac{n+1}{n}} = \frac{1}{e^{x_n} \ln(1 + n^{-1})} = \frac{1}{\frac{e^{x_n}}{n} \ln (1 + n^{-1})^n} \to 1.$$

Folosind din nou teorema Cesarò-Stolz, rezultă $\dfrac{x_n}{s_n} \to 1$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\ln n} = 1$.

3. ($\Rightarrow$) Să presupunem că $\operatorname{rang}(A) \leqslant 1$. Dacă $\operatorname{rang}(A) = 0$, avem $a_{ij} = 0$; $(\forall)\ (i, j) \in \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$, deci putem lua $x_1 = x_2 = .. = x_m = y_1 = y_2 = ... = y_n = 0$. Să vedem ce se întîmplă în cazul cînd $\operatorname{rang}(A) = 1$. În cest caz există un element nenul a_{kp}, unde $(k, p) \in \{1, 2, ..., m\} \times (1, 2, ..., n\}$ este fixată, iar toți minorii de ordinul 2 ai matricii date sînt nuli. Deoarece $a_{kp} \in \mathbf{R}^*$, putem fixa $x_k \in \mathbf{R}^*$, $y_p \in \mathbf{R}^*$ așa încît $a_{kp} = x_k y_p$. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., m\}$ vom nota $x_i = a_{ip} y_p^{-1}$ și pentru fiecare $j \in \{1, 2, ..., n\}$ vom nota $y_j = a_{kj} x_k^{-1}$. Rezultă $a_{ip} = x_i y_p$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, respectiv $a_{kj} = x_k y_j$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Fie acum $i \in \{1, 2, ..., m\} \setminus \{k\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{p\}$. Scriind că minorul de ordinul 2 obținut prin intersecția liniilor k și i cu coloanele p și j este nul, rezultă $a_{kp} a_{ij} = a_{ip} a_{kj}$ Această egalitate se scrie, echivalent, $x_k y_p a_{ij} = x_i y_p x_k y_j$ și, împărțind prin $x_k y_p \in \mathbf{R}^*$, obținem $a_{ij} = x_i y_j$. Prin urmare, am demonstrat că $a_{ij} = x_i y_j$, $(\forall)\ (i, j) \in \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$. ($\Leftarrow$) Dacă există $x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n$ așa încît $a_{ij} = x_i y_j$, $(\forall)\ (i, j) \in \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$, se constată ușor că toți minorii de ordinul 2 ai matricii date sînt nuli, deci $\operatorname{rang}(A) \leqslant 1$.

4. ($\Rightarrow$). Presupunem că $\det(A + B) \geqslant 0$ și vom demonstra că $\det(A^n + B^n) \geqslant 0$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Considerăm două cazuri, după cum $n \in 2\mathbf{N}$ sau $n \in 2\mathbf{N} + 1$. a) $n \in 2\mathbf{N}$. Fie deci $n = 2p$. Avem

$$A^{2p} + B^{2p} = (A^p)^2 + (B^p)^2 = (A^p + iB^p)(A^p - iB^p) = (A^p + iB^p)\overline{(A^p + iB^p)}$$

așa că dacă trecem la determinanți, rezultă

$\det(A^{2p} + B^{2p}) = \overline{\det(A^p + iB^p)} \cdot \det(A^p + iB^p) = |\det(A^p + iB^p)|^2 \geqslant 0$. b) $n \in 2\mathbf{N} + 1$. Fie $n = 2p + 1$. Să notăm cu $x_0 = -1, x_1, x_2, ..., x_{2p}$ rădăcinile complexe ale

ecuației binome (1) $x^{2p+1}+1=0$. Ținînd seama de faptul că matricile A și B comută, precum și de relațiile lui Viète pentru ecuația (1), putem scrie

$$\prod_{j=0}^{2p}(A-x_jB)=A^{2p+1}-\left(\sum_{j=0}^{2p}x_j\right)A^{2p}B+\left(\sum_{0\leqslant j<k\leqslant 2p}x_jx_k\right)A^{2p-1}B^2-\quad+B^{2p+1}=$$
$$=A^{2p+1}+B^{2p+1}.$$

Deoarece $x_0=-1$, iar rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ sînt două cîte două conjugate, putem scrie identitatea obținută sub forma

$$(2)\qquad (A+B)\prod_{j=1}^{p}(A-x_jB)(A-\bar{x}_jB)=A^{2p+1}+B^{2p+1}.$$

Deoarece A și B au elemente reale, avem pentru fiecare $j\in\{1, 2, \ldots, p\}$: $\det(A-x_jB)(A-\bar{x}_jB)=\det(A-x_jB)\cdot\det(A-\bar{x}_jB)=\det(A-x_jB)\cdot\det(\overline{A-x_jB})=$ $=\det(A-x_jB)\cdot\overline{\det(A-x_jB)}=|\det(A-x_jB)|^2\geqslant 0$, unde trebuie să menționăm că am notat $\bar{X}\in\mathcal{M}_k(C)$ matricea obținută din $X\in\mathcal{M}_k(C)$, înlocuind elementele acesteia cu conjugatele lor. Deoarece și $\det(A+B)\geqslant 0$, trecînd în (2) la determinanți, rezultă $\det(A^{2p+1}+B^{2p+1})=\det(A+B)\prod_{j=1}^{p}\det((A-x_jB)(A-\bar{x}_jB))\geqslant 0$.

Anul 1987

Etapa județeană

1. Dacă $a=1$, atunci $x_n\leqslant x_{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$, adică șirul este monoton. Fiind și mărginit urmează că este convergent. Dacă $a>1$, notăm $b_n=-\dfrac{1}{a^{n-1}}$ și $y_n=x_na^{b_n}$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}^*$. Inegalitatea din enunț se scrie sub forma echivalentă $x_na^{b_n}\leqslant x_{n+1}a^{b_{n+1}}$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}^*$, de unde rezultă că șirul $(y_n)_{n\geqslant 1}$ este crescător. Deoarece șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit, rezultă că există $A>0$ astfel încît $|x_n|\leqslant A$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$. De asemenea, din faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, rezultă că șirul de termen general a^{b_n} este convergent la 1, adică este mărginit și deci există $B>0$ astfel încît $a^{b_n}\leqslant B$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}^*$. Deci

$$|y_n|=|x_n|\,a^{b_n}\leqslant AB,\ (\forall)\,n\in\mathbf{N}^*$$

ceea ce arată că șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este și mărginit, adică este convergent. Deoarece $x_n=y_na^{-b_n}$, $(\forall)\,n\in\mathbf{N}$, rezultă că șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n\in\mathbf{R}$.

2. Arătăm, mai general, că dacă $a, b\in\mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$, atunci funcțiile continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care verifică relația $f(ax+b)=f(x)$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$, sînt funcțiile constante. Dacă $a=0$, atunci $f(x)=f(b)$, $(\forall)\,x\in\mathbf{R}$ și deci f este constantă. Dacă $a\in(-1, 0)\cup(0, 1)$, să considerăm un $x\in\mathbf{R}$ arbitrar dar fixat. Avem

$$f(x)=f(ax+b)=f(a^2x+b(a+1))=f(a^3x+b(a^2+a+1))=\quad=$$
$$=f(a^nx+b(a^{n-1}+a^{n-2}+\quad+a+1))=f\left(a^nx^n+b\frac{a^n-1}{a-1}\right).$$

Dacă aici trecem la limită cu $n \to \infty$ și ținem seama că f este continuă; deducem $f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, deci f este constantă. Dacă $|a| > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = 0$.

Înlocuim, succesiv, pe x cu $\frac{x-b}{a}$ în condiția dată și obținem

$$f(x) = f\left(\frac{x-b}{a}\right) = f\left(\frac{x-b(a+1)}{a^2}\right) = f\left(\frac{x-b(a^2+a+1)}{a^3}\right) = \ldots =$$

$$= f\left(\frac{x-b(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots a+1)}{a^n}\right) = f\left(\frac{x}{a^n} - \frac{b}{a-1}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)\right),$$

de unde prin trecere la limită după $n \to \infty$ și ținînd seama de continuitatea lui f, deducem $f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Prin urmare $f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

Pentru $a = 2$, $b = 1$, obținem $f(x) = f(-1)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

3. Fie σ permutarea cu proprietatea că $s_n(\sigma)$ este minimă, $i < j$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ și transpoziția τ_{ij}. Avem

$$s_n(\sigma\tau_{ij}) \geqslant s_n(\sigma) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{i}}{\sigma(j)} + \frac{\sqrt{j}}{\sigma(i)} \geqslant \frac{\sqrt{i}}{\sigma(i)} + \frac{\sqrt{j}}{\sigma(j)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sigma(i) - \sigma(j))(\sqrt{i} - \sqrt{j}) \geqslant 0.$$

Deoarece $i < j$ și σ este bijecție, rezultă $\sigma(i) < \sigma(j)$, adică $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3) < \ldots < \sigma(n)$, de unde deducem că $\sigma = e$. Avem

$$s_n(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ și, cum } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty, \text{ rezultă că } \lim_{n\to\infty} s_n(\sigma) = \infty.$$

4. Dacă $n = 2$, atunci se verifică ușor că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ avem $(A^*)^* = A$. Pentru $n \geqslant 3$ deosebim cazurile: i) rang $A = n$. Notăm $d = \det A$. În acest caz $A^* = dA^{-1} \Rightarrow \det A^* = d^n \cdot \det A^{-1} = d^{n-1} \Rightarrow (A^*)^* = d^{n-1}(A^*)^{-1} = d^{n-1}d^{-1}A = d^{n-2}A$ și atunci $(A^*)^* = A \Leftrightarrow d^{n-2}A = A \Leftrightarrow d^{n-2} = 1 \Leftrightarrow d$ este rădăcină de ordinul $n-2$ a unității; ii) rang $A = n-1$. În acest caz presupunînd $A \neq 0$ rezultă că există $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît $a_{ij} \neq 0$ (de fapt, există $n-1$ asemenea elemente) și fixăm unul dintre ele. Înlocuim elementul a_{ij} fixat anterior cu $a_{ij} + t$ și astfel rezultă o nouă matrice notată $A(t)$. În acest mod obținem că $\det A(t)$ este o funcție polinomială de gradul întîi în t și $\det A(0) = 0$. Într-adevăr, dezvoltînd $\det A(t)$ după linia i, avem

$$\det A(t) = a_{i_1}\Gamma_{i_1} + \ldots + (a_{ij} + t)\Gamma_{ij} + \ldots + a_{i_n}\Gamma_{i_n} = \det A(0) + t\,\Gamma = t\Gamma$$

Procedînd ca în cazul i), avem

$$A^*(t) = \det A(t)(A(t))^{-1}, \text{ pentru } t \neq 0 \text{ și } (A^*(t))^* = (\det A(t))^{n-2}A(t).$$

Elementele lui $A^*(t)$ sînt funcții continue în t de grad cel mult unu, deci elementele lui $(A^*(t))^*$ sînt polinoame de grad cel mult $n-1$ în t. Atunci cînd $t \to 0$ rezultă că elementele lui $(A^*(t))^*$ tind către elementele lui $(A^*(0))^*$, acestea fiind nule. Deci $(A^*)^* = 0 \Rightarrow A = 0$. Contradicție, și prin urmare în acest caz $A = 0$; iii) rang $A < n-1$. În acest caz $A^* = 0 \Rightarrow (A^*)^* = 0$ și deci $(A^*)^* = A \Leftrightarrow A = 0$.

5. $PQ = OP - OQ = a\cos\alpha - b\sin\alpha = b\left(\sin\alpha - \frac{a}{b}\cos\alpha\right)$. Notăm $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} u$, $u \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$; rezultă $\cos u = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin u = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ și $PQ = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha - u)$ Deci $f:[0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $f(\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha - u)$. Lăsăm graficul pe seama cititorului. Rezolvînd sistemul

$$y = x \operatorname{tg} \alpha,$$
$$y = -(x - a)\operatorname{ctg} \alpha,$$

rezultă $P(a\cos^2\alpha,\ a\sin\alpha\cos\alpha)$ iar coordonatele punctului Q le obținem din sistemul

$$y = x \operatorname{tg} \alpha.$$
$$y - b = -x\operatorname{ctg} \alpha.$$

și deci $Q(b\sin\alpha\cos\alpha,\ b\sin^2\alpha)$. Fie M mijlocul segmentului $[PQ]$. Aflăm locul geometric al lui M eliminînd pe α între coordonatele sale. Se obține ca loc geometric cercul de centru $C\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right)$ și de rază $r = \frac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2}$.

Etapa finală

1. Considerăm funcția $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f^2(x) + 2\cos x$. Avem $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2\sin x \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, ceea ce arată că g este crescătoare. Deoarece g este și mărginită, rezultă că există $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = A \in \mathbf{R}$. Să admitem, prin absurd, că există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B \in \mathbf{R}$. Deoarece, $g(x) - f^2(x) = 2\cos x$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, rezultă că există

$$\lim_{x\to\infty} \cos x = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} (g(x) - f^2(x)) = \frac{A - B^2}{2},$$

ceea ce este fals deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ nu există.

2. a) Deoarece A este singulară, sistemul omogen $AX = 0$ admite o soluție nebanală $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Analog, sistemul omogen ${}^tA\ Y = 0$ admite o soluție nebanală $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Fie $X \cdot {}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1, y_2, \ldots y_n) = (x_i y_j)$; evident $B \neq 0$. Pe de altă parte, $AB = A\ (X\ {}^tY) = (AX)\ {}^tY = 0$ și $BA = (X \cdot {}^tY)A = X \cdot {}^t({}^tA \cdot Y) = 0$. b) Presupunem că A este singulară. Fie deci B o matrice nenulă cu $AB = BA = 0$. Vom demonstra prin inducție că

$$(A + B)^p = A^p + B^p,\ (\forall)\, p \in \mathbf{N}^*.$$

Pentru $p = 1$ se verifică. Dacă $(A + B)^p = A^p + B^p$, atunci

$$(A + B)^{p+1} = (A + B)^p(A + B) = A^{p+1} + A^pB + B^pA + B^{p-1} = A^{p+1} +$$
$$+ A^{p-1}(AB) + B^{p-1}(BA) + B^{p+1} = A^{p+1} + A^{p-1} \cdot 0 + B^{p-1} \cdot 0 + B^{p+1} =$$
$$= A^{p+1} + B^{p+1}$$

și deci demonstrația prin inducție este încheiată. Presupunem acum că există B, nenulă, astfel încît $(A + B)^p = A^p + B^p$, $(\forall)p \in \mathbf{N}^*$. Pentru $p = 2$ se obține relația (1) $AB + BA = 0$. Pentru $p = 2$ avem

$$(2)\ A^3 + B^3 = (A + B)^3 = (A + B)^2(A + B) = (A^2 + B^2)(A + B) =$$
$$= A^3 + A^2B + B^2A + B^3 \Rightarrow A^2B + B^2A = 0.$$

Din relațiile (1) și (2) deducem că $B^2A = -A^2B = A(-AB) = ABA$. Presupunem prin absurd că A este nesingulară și atunci din ultima relație prin înmulțire la dreapta cu A^{-1}, obținem (3) $B^2 = AB$. În continuare vom obține $A^2B = A(AB) = -ABA$ și deci $A^2B^2 = -ABAB = -AB(-BA) = AB^2A$, de unde, prin simplificare la stînga cu A, deducem (4) $AB^2 = B^2A$. Din relația (3) rezultă (5) $AB^2 = A(AB) = A^2B$. Pe de altă parte, folosind (3), deducem (6) $B^2A = (AB)A = -A^2B$. Din relațiile (4), (5) și (6) rezultă $A^2B = -A^2B$, adică $A^2B = 0$. Deoarece A este presupusă nesingulară, din ultima relație obținem $B = 0$, contradicție cu ipoteza. Deci matricea A este neapărat singulară.

3. Evident

$$s = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > \frac{x_1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} +$$
$$\ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = 1,\ (\forall)\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+^*.$$

Scriem inegalitatea obținută pentru $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ în loc de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și obținem

$$f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) = \frac{x_n}{x_n + x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_{n-2}} + \ldots + \frac{x_1}{x_1 + x_n} > 1.$$

Scăzînd n din ambii membri, se obține

$$\left(\frac{x_n}{x_n + x_{n-1}} - 1\right) + \left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_{n-2}} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{x_1}{x_1 + x_n} - 1\right) > 1 - n$$

adică $-f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 1 - n$, ceea ce demonstrează prima parte a problemei. Am demonstrat deci că

$$(1)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (1, n - 1),\ (\forall)\ x_i \in \mathbf{R}_+^*,\ i = \overline{1, n}.$$

Considerăm funcția $g : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = f(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}) = (n - 1)\frac{1}{1 + x} + \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

Este evident că f este continuă și că $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = n - 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 1$. De aici rezultă ușor că $g(\mathbf{R}_+^*) = (1, n-1)$. Pe de altă parte, mulțimea valorilor lui $s = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ include în mod evident pe $g(\mathbf{R}_+^*)$, de unde, dacă ținem seama de (1), rezultă că mulțimea căutată este $(1, n-1)$.

4. Fie $c \in [a, b]$. Arătăm că g este continuă în c. Avem următoarele posibilități: a) $f(c) \neq g(c)$. Atunci $f(c) < g(c)$ și există o vecinătate $V = (c - \delta, c + \delta)$, cu $\delta > 0$ a lui c, astfel încît $f(x) < g(c)$, $(\forall) x \in [a, b] \cap V$. Deoarece restricția lui f la $[a, c]$ este continuă, există $d \in [a, c]$ astfel încît $f(d) = g(c)$, deci $d \notin V$. Pentru orice $x \in [a, b] \cap V$ avem $g(x) = f(d) = g(c)$, de unde $\lim\limits_{x \to c} g(x) = g(c)$; b) $f(c) = g(c)$. Fie $\varepsilon > 0$, există atunci $\delta > 0$ astfel încît $f(c) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(c) + \frac{\varepsilon}{2}$; $(\forall) x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$. Pentru orice $x \in [c, c + \delta) \cap [a, b]$ obținem $f(c) \leqslant g(x) \leqslant f(c) + \frac{\varepsilon}{2}$ iar pentru orice $x \in (c - \delta, c] \cap [a, b]$ obținem $f(c) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant g(x) \leqslant f(c)$ și deci

$$|g(x) - g(c)| = |g(x) - f(c)| < \varepsilon, \ (\forall) x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b].$$

Rezultă atunci că g este continuă în orice punct $c \in [a, b]$ și prin urmare are proprietatea lui Darboux. Rezultă deci că $g([a, b])$ este interval.

Anul 1988

Etapa județeană

1. Notăm $1 + x = u^3$. Vom studia limita funcției $f(u) = \dfrac{u + \sqrt[3]{2 - u^3} - 2}{(u^3 - 1)^n}$ în punctul $u = 1$. Avem

$$\frac{u + \sqrt[3]{2 - u^3} - 2}{(u^3 - 1)^n} = \frac{(u - 2)^3 + 2 - u^3}{(u^3 - 1)^n \left[(u - 2)^2 - (u - 2)\sqrt[3]{2 - u^3} + \sqrt[3]{(2 - u^3)^2}\right]} =$$

$$= \frac{-6(u - 1)^2}{(u^3 - 1)^n \left[(u - 2)^2 - (u - 2)\sqrt[3]{2 - u^3} + \sqrt[3]{(2 - u^3)^2}\right]}. \text{ Cum}$$

$$\lim_{u \to 1} \left[(u - 2)^2 - (u - 2)\sqrt[3]{2 - u^3} + \sqrt[3]{(2 - u^3)^2}\right] = 3,$$

va fi suficient să stabilim existența limitei în punctul $u = 1$ a funcției $g(u) = \dfrac{(u - 1)^2}{(u^3 - 1)^n}$. Distingem cazurile:

Cazul a. $n = 0 \Rightarrow g(u) = (u - 1)^2 \Rightarrow \lim\limits_{u \to 1} g(u) = 0$, deci limita din enunț există și este reală.

Cazul b. $n = 1 \Rightarrow g(u) = \dfrac{u - 1}{u^2 + u + 1} \Rightarrow \lim\limits_{u \to 1} g(u) = 0$, deci limita din enunț există și este reală.

Cazul c. $n = 2 \Rightarrow g(u) = \dfrac{1}{(u^2 + u + 1)^2} \Rightarrow \lim\limits_{u \to 1} g(u) = \dfrac{1}{9}$, deci limita din enunț există și este reală.

Cazul d. $n > 2 \Rightarrow g(u) = \dfrac{1}{(u - 1)^{n-2}(u^2 + u + 1)^n}$. Există $\lim\limits_{u \to 1} g(u) \Leftrightarrow$ există $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{1}{(u - 1)^{n-2}} \Leftrightarrow n - 2 \in 2\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \in 2\mathbb{Z}$ și $n \geqslant 4$.

2. Demonstrăm prin inducție că pentru orice $n \geqslant 3$ avem $(*)$ $n-2 < x_n < n-1$. Pentru $n=3$, $x_3 = \sqrt{2\sqrt{2}+1}$ și inegalitățile sînt evident satisfăcute. În ipoteza verificării inegalităților pentru $n \geqslant 3$, rezultă că $x_{n+1} = \sqrt{nx_n+1} > \sqrt{n(n-2)+1} = n-1$ și $x_{n+1} = \sqrt{nx_n+1} < \sqrt{n(n-1)+1} = \sqrt{n^2-n+1} < n^2 = n$. Deci $(*)$ este satisfăcută pentru $(\forall)\, n \geqslant 3$. Din $(*)$ rezultă $1-\frac{2}{n} < \frac{x_n}{n} < 1-\frac{1}{n}$, pentru $n \geqslant 3$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. De asemenea, din $(*)$ rezultă $1 < n - x_n < 2$, deci $z_n \in (1, 2)$, pentru orice $n \geqslant 3$. Rămîne de studiat monotonia șirului (z_n). Avem

$$z_{n+1} - z_n = (n+1) - x_{n+1} - n + x_n = 1 + x_n - \sqrt{nx_n+1} =$$
$$= \frac{1 + x_n^2 + 2x_n - nx_n - 1}{1 + x_n + \sqrt{nx_n+1}} = \frac{x_n(x_n + 2 - n)}{1 + x_n + \sqrt{nx_n+1}}.$$

Din $(*)$ rezultă $z_{n+1} - z_n > 0$, pentru $n \geqslant 3$, deci (z_n) este strict crescător (începînd de la rangul $n_0 = 3$) și fiind mărginit, va fi convergent. Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Dar $z_{n+1} - z_n = \dfrac{y_n(2 - z_n)}{\frac{1}{n} + y_n + \sqrt{y_n + \frac{1}{n^2}}}$. Trecînd la limită în ultima egalitate, obținem $0 = \dfrac{2-L}{2}$, deci $L = 2$.

3. a) Ținînd cont de relația din enunț și de faptul că n este par avem

$$\det[(-t)A + I] = \det[A + (-t)I] = \det[-(-A + tI)] = (-1)^n \det(-A + tI) =$$
$$= \det(-A + tI),\ (\forall)\ t \in \mathbf{R}.$$

b) Fie $t < 0$ și $u^2 = -t$. Atunci

$$\det(tA^2 + I) = \det(-u^2A^2 + I) = \det[(-u)A + I] \cdot \det[uA + I] =$$
$$= \det[A + (-u)I] \cdot \det(A + uI) = \det[(A - uI)(A + uI)] =$$
$$= \det[A^2 + (-u^2)I] = \det(A^2 + tI).$$

Deci relația cerută este adevărată pentru orice $t < 0$. Cum $\det(tA^2+I)$ și $\det(A^2+tI)$ sînt polinoame în t de grad cel mult n, egale pe $(-\infty, 0)$, rezultă egalitatea din enunț.

4. Fie xOy un sistem de axe și $A(O, a)$, $B(b, O)$, $C(c, O)$ vîrfurile triunghiului astfel încît $a > 0$ și $c > b$. Fie $M(x, y) \in \mathrm{Int}(ABC) \cup (AB) \cup (AC)$, astfel încît $d(M, BC) = d(M, AC) + d(M, AB)$. Cum ecuația dreptei AC este $ax + cy - ac = 0$, iar cea a dreptei AB : $ax + by - ab = 0$, rezultă

$$d(M, AC) = \frac{|ax + cy - ac|}{\sqrt{a^2 + c^2}} \text{ și } d(M, AB) = \frac{|ax + by - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Cum $M \in [AC,\ B \Rightarrow (ax + cy - ac)(ab - ac) \geqslant 0 \Rightarrow ax + cy - ac \leqslant 0$. Cum $M \in [AB,\ C \Rightarrow (ax + by - ab)(ac - ab) \geqslant 0 \Rightarrow ax + by - ab \geqslant 0$, deci

$$d(M, AC) = -\frac{ax + cy - ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} \text{ și } d(M, AB) = \frac{ax + by - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Coordonatele lui M verifică relația

$$(*) \qquad \frac{ax+by-ab}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{ax-cy-ac}{\sqrt{a^2+c^2}} = y.$$

Fie d dreapta de ecuație (*), și $B' \in (AC)$ și $C' \in (AB)$ picioarele bisectoarelor din B și C. Cum $d(B', AB) = d(B', BC)$ și $d(B', AC) = 0$, rezultă că B' are proprietatea din enunț, deci $B' \in$ d. Analog $C' \in$ d, deci d $= B'C'$ În concluzie locul geometric căutat este $B'C' \cap \mathrm{Int}(ABC) = (B'C')$.

Etapa finală

1. Matricea A verifică propria sa ecuație caracteristică, deci $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$. Presupunem că există $n \geqslant 1$ astfel incît $A^n = I_2$. Rezultă că $(\det A)^n = 1$, deci $\det A \in \{-1, 1\}$. Considerăm polinoamele $f(X) = X^2 - uX + v$, $g(X) = X^n - 1$, unde $u = a + d > 2$, iar $v \in \{-1, 1\}$. Ecuația $f(x) = 0$ are rădăcinile x_1, x_2 reale, deoarece $\Delta = u^2 - 4v > 0$. Rădăcinile x_1, x_2 nu pot fi rădăcini ale ecuației $g(x) = 0$, deoarece dacă $x_1^n - 1 = 0$ rezultă $|x_1| = 1$ și, cum $x_1^2 - ux_1 + v = 0$, am avea $|u| = |ux_1| = |x_1^2 + v| \leqslant |x_1|^2 + |v| = 2$, contradicție. Rezultă că polinoamele $f(X)$ și $g(X)$ sînt prime între ele, deci există polinoamele cu coeficienți reali $P(X)$ și $Q(X)$ astfel încît $P(X)f(X) + Q(X)g(X) = 1$. Această egalitate fiind o identitate polinomială, se păstrează cînd înlocuim pe X prin matricea A, deci $P(A)f(A) + Q(A)g(A) = I_2$. Deoarece $f(A) = g(A) = O_2$, această egalitate matricială devine $O_2 = I_2$, contradicție.

2. a) Fie G centrul de greutate al triunghiului, A_1, B_1, C_1 proiecțiile lui G pe laturile BC, AC, respectiv AB, iar $\{A'\} = GA \cap BC$, $\{B'\} = GB \cap AC$, $\{C'\} = GC \cap AB$. Conform ipotezei avem $GA^2 + GB^2 + GC^2 \leqslant 4(GA_1^2 + GB_1^2 + GC_1^2)$. Deoarece $GA = 2GA'$, $GB = 2GB'$, $GC = 2GC'$, rezultă că $4(GA'^2 + GB'^2 + GC'^2) \leqslant 4(GA_1^2 + GB_1^2 + GC_1^2)$. Obținem că $A_1 = A'$, $B_1 = B'$, $C_1 = C'$, deci triunghiul ABC este echilateral. b) Reciproc, să presupunem că triunghiul ABC este echilateral și $A(0, a\sqrt{3})$, $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$. Ecuația dreptei AC este $\frac{x}{a} + \frac{y}{a\sqrt{3}} - 1 = 0$. a dreptei AB este $-\frac{x}{a} + \frac{y}{a\sqrt{3}} - 1 = 0$, $d(M, AB)^2 = 3a^2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a\sqrt{3}} - 1\right)^2/4$, $d(M, AC)^2 = 3a^2\left(-\frac{x}{a} + \frac{y}{a\sqrt{3}} - 1\right)^2/4$. $d(M, BC)^2 = y^2$. Obținem $4\sum d(M, AB)^2 = 6(x^2 + y^2 + a^2) - 4a\sqrt{3}y$, $\sum MA^2 = x^2 + (y - a\sqrt{3})^2 + (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2ay\sqrt{3} + 5a^2$. Această inegalitate este echivalentă cu $3x^2 + 3y^2 + a^2 - 2a\sqrt{3}y \geqslant 0$ sau $3x^2 + (\sqrt{3}y - a)^2 \geqslant 0$, care este adevărată.

3. a) Fie $f : (1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + (x-1)\ln(x-1)$. Se observă că f este continuă, $f(x) \leqslant 1 + \frac{1}{e} < 2$, pentru orice $x \in \left(1, 1 + \frac{1}{e}\right]$, pe intervalul $\left(1 + \frac{1}{e}, \infty\right)$ f este strict crescătoare și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Deci ecuația $f(x) = n (n \geqslant 2)$ are o soluție unică x_n și $x_n \in \left(1 + \frac{1}{e}, \infty\right)$. Se verifică ușor că $x_n < x_{n+1}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Putem scrie:

$$\frac{x_n \ln n}{n} = \frac{x_n \ln n}{x_n + (x_n - 1)\ln(x_n - 1)} = \frac{1}{\frac{1}{\ln n} + \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)\frac{n(x_n - 1)}{\ln n}}.$$

Rămîne să demonstrăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(x_n - 1)}{\ln n} = 1$. Dar $n - 1 = (x_n - 1)(1 + \ln(x_n - 1))$, adică $\ln(n - 1) = \ln(x_n - 1) + \ln(1 + \ln(x_n - 1))$. Deducem $\frac{\ln(x_n - 1)}{\ln(n - 1)} = 1 - \frac{\ln(1 + \ln(x_n - 1))}{\ln(n - 1)}$. Este clar că $x_n \leqslant n$, ceea ce implică $\ln(x_n - 1) \leqslant \ln(n - 1)$, adică $1 - \frac{\ln(1 + \ln(n - 1))}{\ln(n - 1)} \leqslant \frac{\ln(x_n - 1)}{\ln(n - 1)} \leqslant 1$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \ln(n - 1))}{\ln(n - 1)} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(x_n - 1)}{\ln(n - 1)} = 1$. Mai avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x_n - 1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x_n - 1)}{\ln(n - 1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n - 1)}{\ln n} = 1$$

și proprietatea este demonstrată. b) Se consideră funcția $g(x) = (x - 1)^{n-x} : [1, \infty) \to \mathbf{R}$. Obținem $g'(x) = (x - 1)^{n-x-1}(n - x - (x - 1)\ln(x - 1))$. Pentru $n \geqslant 2$ am văzut că ecuația $n = x + (x - 1)\ln(x - 1)$ are o singură soluție x_n, $g'(x) < 0$, pentru $x < x_n$ și $g'(x) > 0$ pentru $x > x_n$. Rezultă că $g(x)$ admite un maxim pentru $x = x_n$. Deoarece a_n ia numai valori întregi, obținem $a_n = \max\limits_{r=[x_n],\,[x_n]+1} (r - 1)^{n-r}$, adică

$$a_n = (x_n + y_n' - 1)^{n - x_n - y_n'},$$

unde $-1 < y_n' < 1$. Dar am obținut că $\frac{x_n}{\frac{n}{\ln n}} = 1 + y_n''$, unde $\lim\limits_{n\to\infty} y_n'' = 0$, deci putem scrie $x_n + y_n' = \frac{n}{\ln n}(1 + y_n)$, unde $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Deci

$$\frac{a_n^{\frac{1}{n}}}{\frac{n}{\ln n}} = \frac{\left(\frac{n}{\ln n} + \frac{n y_n}{\ln n} - 1\right)^{1 - \frac{1}{\ln n} - \frac{y_n}{\ln n}}}{\frac{n}{\ln n}} = E(n).$$

Logaritmînd și efectuînd calculele, obținem

$$\ln E(n) = -1 + \ln\left(1 + y_n - \frac{\ln n}{n}\right) + \frac{\ln \ln n}{\ln n} - \left(\ln\left(1 + y_n - \frac{\ln n}{n}\right)\right) / \ln n - y_n + \frac{y_n \ln \ln n}{\ln n} - \frac{y_n}{\ln n} \ln\left(1 + y_n - \frac{\ln n}{n}\right) = -1 + z_n,$$

unde $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

4. Scriem $x_n = 1 + a_n$, $y_n = 1 + b_n$ unde $a_n \to 0$ și $b_n \to 0$. Deci există $M > 0$ astfel încît $|a_n| \leqslant M$, $|b_n| \leqslant M$, pentru $n \in \mathbf{N}$. Fie $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$ și N un număr natural astfel încît $|a_n| \leqslant \varepsilon$, $|b_n| \leqslant \varepsilon$, pentru orice $n \geqslant N$. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2N$.

Avem

$$z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+a_i)(1+b_{n-i}) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}.$$ Dar

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |a_i| + \sum_{i=N+1}^{n} |a_i| \leqslant NM + (n-N)\varepsilon \leqslant n\varepsilon + NM,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\right| \leqslant NM + (n-N)\varepsilon \leqslant n\varepsilon + NM,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}\right| \leqslant n\varepsilon.$$

Deci $|z_n - 1| \leqslant 3\varepsilon + \frac{2NM}{n}$. Alegem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît $\frac{2NM}{n_\varepsilon} \leqslant \varepsilon$ și $n_\varepsilon \geqslant 2N$ și deci pentru $n \geqslant n_\varepsilon$ rezultă $|z_n - 1| \leqslant 4\varepsilon$. În concluzie obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$. Această problemă este un caz particular al următoarei teoreme: Dacă $(x_n)_{n\geqslant 1}$ și $(y_n)_{n\geqslant 1}$ sînt șiruri de numere reale astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, atunci există relația

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_n y_1}{n} = ab.$$

Anul 1989

Etapa județeană

1. Fie $A(O, a)$, $B(b, O)$, $C(c, O)$ și $P(m, q)$ și fie D, E, F respectiv mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Atunci

$$D\left(\frac{b+c}{2}, 0\right),\ E\left(\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right),\ F\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right) \text{ și } A'(b+c-m, -q),\ B'(c-m, a-q),$$

$C'(b-m, a-q)$, de unde obținem ecuațiile dreptelor

$$AA' : y = -\frac{a+q}{b+c-m}x + a,\ BB' : y = -\frac{a-q}{b-c+m}x + \frac{b(a-q)}{b-c+m} \text{ și}$$

$$CC' : y = -\frac{a-q}{c-b+m}x + \frac{c(a-q)}{c-n+m}.$$

Punctul de intersecție $\{M\} = BB' \cap CC'$ are coordonatele $M\left(\frac{b+c-m}{2}, \frac{a-q}{2}\right)$ și deoarece acestea verifică ecuația dreptei AA', rezultă că $M \in AA'$, deci $AA' \cap BB' \cap CC' = \{M\}$. Ecuația dreptei PM este

$$PM : x(3q-a) + y(b+c-3m) + am - q(b+c) = 0$$

care are ca punct fix, punctul $Q\left(\frac{b+c}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

2. ($\Rightarrow$) Presupunem că ecuația $X^{-1} \cdot {}^tX = A$ admite soluția $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Atunci $X^{-1} = \dfrac{1}{\det X}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ${}^tX = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ și deci $A = X^{-1}\ {}^tX = \dfrac{1}{\det X}\begin{pmatrix} ad - b^2 & (c-b)d \\ (b-c)a & ad - c^2 \end{pmatrix}$, unde evident impunem condiția $\det X \neq 0 \Leftrightarrow ad \neq bc$. Deoarece $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ și orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ verifică ecuația caracteristică $A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$, deducem că

$$\det A = \det(X^{-1}) \cdot \det({}^tX) = \frac{1}{\det X} \det X = 1$$

și $\operatorname{tr}(A) = \dfrac{2ad - b^2 - c^2}{ad - bc} = p$. Dacă $p = 2 \Leftrightarrow (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow A = I_2$ obținem o contradicție. În concluzie, există $p \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ astfel încît $A^2 - pA + I_2 = O_2$, unde p a fost definit mai sus. ($\Leftarrow$). Dacă există $p \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ astfel încît $A^2 - pA + I_2 = O_2$ și $A \neq \lambda I_2$ folosim faptul că A verifică relația $A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A + \det A\ I_2 = O_2$ și prin scădere deducem $(\operatorname{tr}(A) - p)A = (\det A - 1)I_2$, de unde $p = \operatorname{tr}(A)$ și $\det A = 1$. Prin urmare A se scrie sub forma $A = \begin{pmatrix} u & v \\ \dfrac{-1 + pu - u^2}{v} & p - u \end{pmatrix}$, cu $u, v \in \mathbf{R}$, $v \neq 0$ și deducem că sistemul $\dfrac{ad - b^2}{ad - bc} = u$, $\dfrac{ad - c^2}{ad - bc} = p - u$, $\dfrac{(c-b)d}{ad - bc} = v$, $\dfrac{(b-c)a}{ad - bc} = \dfrac{pu - u^2 - 1}{v}$ are soluție doar dacă $p \neq 2$, și anume $a = \dfrac{u^2 - pu + 1}{v^2}$, $b = \dfrac{u-1}{v}d$, $c = \dfrac{u + 1 - p}{v}d$,

unde $d \in \mathbf{R}^*$ și deci matricea $X = \dfrac{d}{v}\begin{pmatrix} \dfrac{u^2 - pu + 1}{v} & u - 1 \\ u - p + 1 & v \end{pmatrix}$ satisface ecuația $X^{-1} \cdot {}^tX = A$.

3. i) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + e^x$ este strict crescătoare, deci injectivă, ca sumă de două funcții strict crescătoare, și deci $f(x) > 1, (\forall)\, x > 0$. Funcția f fiind strict crescătoare și continuă iar $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $f(0) = 1$, rezultă că ecuația $f(x) = y$ admite soluție unică $x \geqslant 0$. Deci $(\exists!) x_{n+1} > 0$ astfel încît $f(x_{n+1}) = 1 + x_n$, $(\forall) x_n > 0$ (prin inducție după $n \in \mathbf{N}$ se arată că $x_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$). Deci șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ este bine definit; ii) Avem

$$x_{n+1} + e^{x_{n+1}} = x_n + 1 \geqslant x_{n+1} + e^0 \Rightarrow x_{n+1} \leqslant x_n,$$

ceea ce arată că șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ este descrescător și mărginit de zero. Rezultă atunci că acest șir este convergent. Fie $u = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \in \mathbf{R}$. Trecînd la limită în relația de recurență, avem

$$u + e^u = 1 + u \Leftrightarrow e^u = 1 \Leftrightarrow u = 0.$$

4. i) Fie $(x_n)_{n \geqslant 0}$ un șir de numere reale care tinde la infinit cu $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n)}{x_n} = l$ și $y \in \mathbf{R}_+^*$, arbitrar. Atunci există $k_n \in \mathbf{N}$, și anume $k_n = \left[\dfrac{x_n}{y}\right]$ astfel încît $x_n = k_n y + z$, unde $z \in [0, y)$. Să demonstrăm prin inducție după $n \in \mathbf{N}^*$ că

$f(nx) \geqslant nf(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Pentru $n=1$ se verifică. Dacă $f(nx) \geqslant nf(x)$ punem $y = nx$ în relația din ipoteză și rezultă

$$f((n+1)x) \geqslant f(nx) + f(x) \geqslant (n+1)f(x)$$

și deci propoziția este demonstrată. Revenind, punem în relația inițială $x = k_n y$ și $y = z$. Obținem

$$f(x_n) \geqslant f(k_n y) + f(z) \geqslant k_n f(y) + f(z) \Leftrightarrow \frac{f(x_n)}{x_n} \geqslant \frac{k_n f(y)}{k_n y + z} + \frac{f(z)}{k_n y + z}.$$

Deoarece $z \in [0, y)$ rezultă că $f(z) \in \mathbf{R}$ și prin trecere la limită (în relația precedentă) cu $n \to \infty$, deducem $l \geqslant \frac{f(y)}{y}$, $(\forall)\, y \in \mathbf{R}_+^*$; ii) Presupunem, prin absurd, că am avea două șiruri $(x_n)_{n \geqslant 0}$ și $(y_n)_{n \geqslant 0}$, cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \infty$, astfel încît $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = l_1$ și $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(y_n)}{y_n} = l_2$, cu $l_1 < l_2$. Atunci, conform cu i), avem $l_1 > \frac{f(y)}{y}$, $(\forall)\, y > 0$, de unde rezultă că în vecinătatea $\left(\frac{l_2 + l_1}{2}, l_1 + l_2\right)$ a lui l_2 nu există nici un termen de forma $\frac{f(y_n)}{y_n}$, ceea ce este fals și deci $l_1 = l_2$, adică există $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$.

Etapa finală

1. Alegem un sistem de axe de coordonate în care axa absciselor este dreapta AB, iar cea a ordonatelor este mediatoarea segmentului $[AB]$. Se notează $AB = 2c$, $a = p - c$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ și din ipoteză rezultă că punctele C și D se află pe elipsa (E) de ecuație: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, ale cărei focare sînt punctele $A(-c, 0)$ și $B(c, 0)$. Fie $C(x_1, y_1)$ și $D(x_2, y_2)$ care aparțin elipsei, deci avem (1) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0$, $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1 = 0$. Deoarece punctele A, B, C, D sînt conciclice putem scrie

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ c^2 & c & 0 & 1 \\ c^2 & -c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Scăzînd linia a treia din a patra obținem

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ c^2 & c & 0 & 1 \\ 0 & -2c & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltînd ultimul determinant după linia a treia, se obține

$$c^2(y_1 - y_2) + x_1^2 y_2 + y_1^2 y_2 - x_2^2 y_1 - y_1 y_2^2 = 0. \tag{3}$$

Din (1) obținem $x_1^2 = a^2 - a^2 y_1^2/b^2$, $x_2^2 = a^2 - a^2 y_2^2/b^2$ și (3) devine $c^2(y_1 - y_2) + a^2 y_2 - a^2 y_1^2 y_2/b^2 + y_1^2 y_2 - a^2 y_1 + a^2 y_1 y_2^2/b^2 - y_1 y_2^2 = 0$ sau $(y_1 - y_2)(c^2 - a^2 - a^2 y_1 y_2/b^2 + y_1 y_2) = 0$ sau $(y_1 - y_2)(-b^2 - c^2 y_1 y_2/b^2) = 0$, ceea ce este echivalent cu (4) $(y_1 - y_2)(c^2 y_1 y_2 + b^4) = 0$. De aici se deduce că $y_1 = y_2$ sau $y_1 y_2 = -b^4/c^2$. Vom trata separat cele două cazuri: i) Dacă $y_1 = y_2$, atunci CD este paralelă cu AB, deci C și D sînt simetrice față de axa ordonatelor, ceea ce înseamnă că mijlocul M al segmentului $[CD]$ se găsește pe semiaxa mică a elipsei. Deci o submulțime a locului geometric o constituie semiaxa mică a elipsei, considerată ca segment deschis; ii) Dacă (5) $y_1 y_2 = -\dfrac{b^4}{c^2}$, coordonatele carteziene ale mijlocului M al segmentului $[CD]$ sînt (6) $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. Pentru a obține ecuația locului geometric eliminăm parametrii x_1, x_2, y_1, y_2 între relațiile (1), (5) și (6). Din (5) deducem $y_2 = -\dfrac{b^4}{c^2 y_1}$, iar din (6) obținem $y_2 = 2y - y_1$, deci $-\dfrac{b^4}{c^2 y_1} = 2y - y_1$, de unde $c^2 y_1^2 - 2c^2 y y_1 - b^4 = 0$. Din ultima ecuație obținem $y_1 = \dfrac{cy \pm \sqrt{c^2y^2 + b^4}}{c}$, $y_2 = 2y - y_1 = \dfrac{cy \mp \sqrt{c^2y^2 + b^4}}{c}$. Substituind în (1) și ținînd seama de (6), deducem

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2c^2}\left(2c^2y^2 + b^4 \pm 2cy\sqrt{c^2y^2 + b^4}\right) = 1, \\ \dfrac{4x^2 - 4xx_1 + x_1^2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2c^2}\left(2c^2y^2 + b^4 \mp 2cy\sqrt{c^2y^2 + b^4}\right) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Scăzînd membru cu membru aceste două ecuații obținem o ecuație de gradul întîi în x_1, și anume

$$\frac{4(x^2 - xx_1)}{a^2} \mp \frac{1}{b^2c^2} 4cy\sqrt{c^2y^2 + b^4} = 0,$$

de unde $x_1 = x \mp \dfrac{a^2 y}{b^2 c x}\sqrt{c^2y^2 + b^4}$ Înlocuind această valoare în prima egalitate din (7) rezultă, după reducerea termenilor care conțin radicali,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^4c^2x^2}(c^2y^2 + b^4) + \frac{2y^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$$

După eliminarea numitorilor obținem ecuația locului geometric în cazul ii):

$$b^4c^2x^4 \quad a^4c^2y^4 \quad a^4b^4y^2 + 2a^2b^2c^2x^2y^2 + a^2b^6x^2 = a^2b^4c^2x^2. \tag{8}$$

Deci locul geometric căutat este reuniunea dintre semiaxa mică a elipsei (E) și curba de ecuație (8). Să mai facem observația că în triunghiul ABC (la fel și în triunghiul ABD) avem $AB < CA + CB$, adică $2AB < AB + BC + CA$, ceea ce este echivalent cu $2AB < 2p$ sau $p > AB$. Deci problema are sens pentru $p > AB$.

2. i) Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$, atunci matricea A^tA are pe diagonala principală elemente de forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$, unde $i = 1, \ldots, n$. Deoarece $A^tA = 0$ și $a_{ij} \in \mathbf{R}$, rezultă $a_{ij} = 0$ pentru orice $i, j = 1, \ldots, n$, deci $A = 0$. ii) Conform punctului precedent, este suficient să arătăm că $(BA - CA)^t(BA - CA) = 0$. Dar $(BA - CA)^t(BA - CA) = (BA - CA)({}^tA^tB - {}^tA^tC) = BA^tA^tB - BA^tA^tC - CA^tA^tB + CA^tA^tC = 0$ (Prin ${}^tA$ s-a notat transpusa matricii A). iii) Suficiența condiției. Dacă $AA'B = B$, atunci $X = A'B$ este soluție a sistemului, deci acesta este compatibil. Necesitatea condiției. Presupunem că există o soluție $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ a sistemului. Atunci $B = AX = (AA'A)X = AA'(AX) = AA'B$. Să arătăm acum că în cazul cînd sistemul este compatibil, mulțimea soluțiilor sale este $S = \{A'B + Y - A'AY \mid Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\}$. Într-adevăr, pentru orice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ avem $A(A'B + Y - A'AY) = AA'B + AY - AA'AY = B + AY - AY = B$, deci orice matrice din S este soluție a sistemului. Reciproc, să demonstrăm că orice soluție a sistemului aparține lui S. Fie X_0 o soluție, deci $AX_0 = B$ sau $A(X_0 - A'B) = 0$, ceea ce arată că $X_0 - A'B$ este soluție a sistemului omogen $AX = 0$. Dar dacă Y este o soluție oarecare a sistemului omogen, avem $Y = Y - A'AY$ (căci $AY = 0$). Deci $X_0 - A'B = Y - A'AY$, unde $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Rezultă că $X_0 = AB + Y - A'AY \in S$.

3. i) Dacă $x = a$ sau $x = b$ egalitatea cerută este satisfăcută pentru orice $c \in (a, b)$. Fie acum $x \in (a, b)$ fixat. Alegem $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încît funcția auxiliară $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) = f(t) - \lambda g(t)$ să aibă proprietățile $f(a) = f(b) = \varphi(x) = 0$, deci $\lambda = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Conform teoremei lui Rolle aplicată funcției φ pe fiecare dintre intervalele $[a, x]$ și $[x, b]$, rezultă existența unor numere $\xi \in (a, x)$ și $\eta \in (x, b)$ astfel încît $\varphi'(\xi) = \varphi'(\eta) = 0$. Aplicînd din nou teorema lui Rolle funcției φ' pe intervalul $[\xi, \eta]$, rezultă că există $c_x \in (\xi, \eta)$ astfel încît $\varphi''(c_x) = 0$, adică $f''(c_x) + \lambda = 0$ sau $f(x) = -f''(c_x)g(x)$. ii) Ipoteza $|f(x_0)| = M(x_0 - a)(b - x_0)/2$ conduce la unul din cazurile $f(x_0) = M(x_0 - a)(b - x_0)/2$ sau $f(x_0) = -M(x_0 - a)(b - x_0)/2$. Vom considera numai primul caz, celălalt obținîndu-se din acesta prin înlocuirea lui f cu $-f$. Considerăm funcția $h : [a, b] \to \mathbf{R}$, $h = f - Mg$. Avem $h(a) = h(b) = h(x_0) = 0$. Conform cu i), pentru orice $x \in [a, b]$ avem $|f(x)| \leqslant Mg(x)$, deci $h(x) = f(x) - Mg(x) \leqslant 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$. De asemenea, $h''(x) = f''(x) + M \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, de unde deducem că h' este crescătoare pe $[a, b]$. Deoarece $h(x) \leqslant 0 = h(x_0)$, rezultă că x_0 este punct de maxim al lui h, deci conform teoremei lui Fermat $h'(x_0) = 0$. Deoarece h' este crescătoare, rezultă că $h' \leqslant 0$ pe $[0, x_0]$ și $h' \geqslant 0$ pe $[x_0, b]$. Deci h este descrescătoare pe $[0, x_0]$ și crescătoare pe $[x_0, b]$. Deoarece $h(a) = h(b) = h(x_0) = 0$, deducem că $h(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, deci $f(x) = Mg(x)$, $(\forall)\, x \in [a, b]$.

4. i) Șirul $(|x_n - y|)_{n \geqslant 0}$, cu $y \in C$ fixat, este convergent, deci mărginit, de unde rezultă că șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ este mărginit. Pentru a demonstra că șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ este convergent, este suficient să demonstrăm că toate subșirurile convergente ale sale au aceeași limită. Într-adevăr, notînd cu l limita comună a subșirurilor convergente, dacă prin absurd șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ nu ar avea limita l, ar exista o vecinătate a lui l, în afara căreia rămîn o infinitate de termeni din șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ și atunci din această infinitate am putea extrage un subșir convergent cu limita diferită de l, contradicție. Fie $(x_{n_k})_{k \geqslant 0}$ și $(x_{m_k})_{k \geqslant 0}$ două subșiruri convergente avînd limitele x, respectiv x'. Avem $x, x' \in C$ și folosind proprietatea a) avem $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n - x| = \lim\limits_{k \to \infty} |x_{n_k} - x| = \lim\limits_{k \to \infty} |x_{m_k} - x|$, adică $0 = |x - x| = |x' - x|$, deci $x' = x$. ii) Facem observația că relația de recurență din enunț conduce la buna definire a

șirului $(x_n)_{n\geq 0}$, deoarece funcțiile de tipul $g_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g_k(x) = x + kf(x)$, unde $k>0$ sînt bijecții ale lui $\mathbf{R}$ și atunci $x_n = g_{c_n}(x_{n+1})$ dacă și numai dacă $x_{n+1} = g_{c_n}^{-1}(x_n)$. Fie acum $\bar{x}$ o soluție fixată a ecuației $f(x) = 0$, deci $f(\bar{x}) = 0$. Relația de recurență poate fi pusă sub forma (1) $x_{n+1} - \bar{x} + c_n(f(x_{n+1}) - f(\bar{x})) = x_n - \bar{x}$. Dacă $x_0 \geq \bar{x}$, atunci, prin inducție, folosind faptul că $c_n > 0$ și că f este crescătoare, rezultă că $x_n \geq \bar{x}$, $(\forall)\, n \geq 0$. Atunci $f(x_0) \geq f(\bar{x})$, $(\forall)\, n \geq 0$ și din (1) rezultă $x_{n+1} - \bar{x} \leq x_n - \bar{x}$, adică $x_{n+1} \leq x_n$, $(\forall)\, n \geq 0$, ceea ce înseamnă că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător. Fiind și minorat de $\bar{x}$, rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Analog se tratează cazul $x_0 \leq \bar{x}$.

Anul 1990

Etapa județeană

1. Fie $l, L, L' \in \mathbf{R}$, $L \neq L'$. Funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ și $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} L, & x \in \mathbf{R} \setminus \{l\} \\ L' & x = l, \end{cases}$ satisfac condițiile din enunț: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} l = l$, $\lim\limits_{y\to l} g(y) = \lim\limits_{y\to l} L = L$ și

$$\lim_{x\to 0} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(l) = \lim_{x\to 0} L' = L'.$$

2. Fie $A = A(a, 0)$ și $B = B(0, b)$.

$$L_k \overset{\text{not}}{=} \{M(x, y) \mid MA^2 \cdot OB^2 + MB^2 \cdot OA^2 - MO^2 \cdot AB^2 = 2kOA' \cdot OB'\} =$$
$$= \{M(x, y) \mid b^2((x-a)^2 + y^2) + a^2(x^2 + (y-b)^2) - (a^2+b^2)(x^2+b^2) = 2ka^2b^2\}.$$

Efectuînd calculele, obținem $L_k = \left\{M(x, y) \,\middle|\, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - k\right\}$ și deci locul geometric este o dreaptă paralelă cu AB sau egală cu ea. Pentru $k = 0$ avem $L_0 = \left\{M(x, y) \,\middle|\, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right\} = AB$, obținînd în acest caz următoarea interpretare: un punct M din planul unui triunghi dreptunghic OAB ($\hat{O} = 1$ dr) se află pe ipotenuza (AB) a triunghiului dacă și numai dacă $MA^2 \cdot OB^2 + MB^2 \cdot OA^2 = MO^2 \cdot AB^2$.

3. În rezolvare vom folosi următoarea

Propoziție.

$$(*) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ za_n & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \\ za_{n-1} & za_n & a_1 & & a_{n-2} \\ & & & \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots \\ za_2 & za_3 & za_4 & & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2 z_k + a_3 z_k^2 + \ldots + a_n z_k^{n-1}),$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, z \in \mathbf{C}$, iar $z_k (k = \overline{0, n-1})$ sînt rădăcinile de ordinul n ale numărului z.

Demonstrație. Notăm cu $D_n(z)$ determinantul din enunțul propoziției, iar cu V_n determinantul Vandermonde de ordinul n asociat numerelor z_k, $k = \overline{0, n-1}$.

Avem:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ z_0 & z_1 & & & z_{n-1} \\ z_0^2 & z_1^2 & & & z_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_0^{n-1} & z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & & z_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \overset{\text{not}}{=} (v_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Calculînd în continuare $D_n(z) \cdot V$ vom deduce formula (*). Fie

$$P_n = D_n(z) \cdot V_n \overset{\text{not}}{=} (p_{ij})_{i,j=\overline{1,n-1}}. \text{ Avem:}$$

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} v_{kj} = z a_{n-i+2} + z a_{n-i+3} z_{j-1} + z a_{n-i+4} z_{j-1}^2 \quad z a_n z_{j-1}^{i-2} + a_1 z_{j-1}^{i-1} +$$

$$+ a_2 z_{j-1}^i + \quad + a_{n-i+1} z_{j-1}^{n-1} = a_{n-i+2} z_{j-1}^n \quad a_{n-i+3} z_{j-1}^{n-1} + a_{n-i+1} z_{j-1}^{n-2} \quad a_n z_{j-1}^{n-i-2} +$$

$$+ a_1 z_{j-1}^{i-1} + a_2 z_{j-1}^i + \quad + a_{n-i+1} z_{j-1}^{n-1} = z_{j-1}^{i-1}(a_{n-i+2} z_{j-1}^{n-i+1} + a_{n-i+3} z_{j-1}^{n-i+2} +$$

$$+ a_{n-i+4} z_{j-1}^{n-i+3} + \quad + a_n z_{j-1}^{n-1} + a_1 \quad a_2 z_{j-1} \quad - a_{n-i+1} z_{j-1}^{n-1}) = z_{j-1}^{i-1}(a_1 + a_2 z_{j-1} +$$

$$+ a_3 z_{j-1}^2 + \quad + a_{n-i+1} z_{j-1}^{n-1} - \quad + a_n z_{j-1}^{n-1}) = v_{ij}(a_1 + a_2 z_{j-1} \quad a_3 z_{j-1}^2 - \ldots + a_n z_{j-1}^{n-1}).$$

Deci elementele coloanei j din P_n se obțin prin înmulțirea elementelor coloanei j din V_n cu factorul $a_1 + a_2 z_{j-1} \quad a_3 z_{j-1}^2 \quad + a_n z_{j-1}^{n-1}$. Deducem astfel că

$$D_n(z) \cdot V_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2 z_k + a_3 z_k^2 + \quad a_n z_k^{n-1}) \cdot V$$

Cum $V_n \neq 0$, rezultă că

$$D_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2 z_k - a_3 z_k^2 + \quad + a_n z_k^{n-1}).$$

Caz particular $z = 1$. Avem

$$D_n(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & & a_n \\ a_n & a_1 & & a_{n-1} \\ & & & \\ a_2 & a_3 & & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2 \varepsilon_k + a_3 \varepsilon_k^2 + \quad + a_n \varepsilon_k^{n-1}),$$

unde $\varepsilon_k = \cos \dfrac{2k\pi}{n} + i \sin \dfrac{2k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$. Conform propoziției anterioare, cu notația $P(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}$ vom obține: „ecuațiile $x^n - 1 = 0$ și $P(x) = 0$ au cel puțin o rădăcină comună dacă și numai dacă $P(\varepsilon_1) \cdot P(\varepsilon_2) \cdot P(\varepsilon_n) = 0 \Leftrightarrow D_n(1) = 0$".

4. a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty [(\forall)\, \varepsilon > 0 (\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ astfel încît $(\forall)\, x \in \mathbf{R},\ x > \delta_\varepsilon \Rightarrow f(x) > \varepsilon]$. Luînd $\varepsilon = 1$ obținem existența unui număr real A cu proprietatea $f(x) > 0$, $(\forall)\, x > A$. b) Începem cu observația că șirul $(x_n)_{n \geq n_0}$ este bine

definit, întrucît în cazul în care p este număr par, $f(n) \geqslant 0$, $(\forall)\, n \geqslant n_0 \geqslant A$ (în conformitate cu punctul precedent al problemei). Avem

$$x_n = \sin\left[\left(\sqrt[p]{f(n)} - \pi n\right) + \pi n\right] = \sin\left(\sqrt[p]{f(n)} - \pi n\right)\cos \pi n + \sin \pi n \cos\left(\sqrt[p]{f(n)} - \right.$$

$$\left. - \pi n\right) = (-1)^n \sin\left(\sqrt[p]{f(n)} - \pi n\right) =$$

$$= (-1)^n \sin \frac{a_{p-1}n^{p-1} + a_{p-2}n^{p-2} + \ldots + a_1 n + a_0}{\sum\limits_{k=1}^{p} \sqrt[p]{(f(n))^{p-k}(\pi n)^{(k-1)p}}} =$$

$$= (-1)^n \sin \frac{a_{p-1} + a_{p-2}\cdot\frac{1}{n} + \quad + a_1 \frac{1}{n^{p-2}} + a_0 \frac{1}{n^{p-1}}}{\pi^{p-1}\sum\limits_{k=1}^{p} \sqrt[p]{1 + \frac{a_{p-1}}{\pi^p}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + \frac{a_0}{\pi^p}\cdot\frac{1}{n^p}}}$$

Considerînd subșirurile $(x_{2n})_{n\geqslant m}$ și $(x_{2n+1})_{n\geqslant m}$, unde $m \geqslant n_0/2$ vom avea

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \sin \frac{a_{p-1}}{\pi^{p-1}\cdot p}, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = -\sin \frac{a_{p-1}}{\pi^{p-1}\cdot p}.$$

Deci $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ este convergent $\Leftrightarrow \sin \frac{a_{p-1}}{\pi^{p-1}\cdot p} = -\sin \frac{a_{p-1}}{\pi^{p-1}\cdot p} \Leftrightarrow \sin \frac{a_{p-1}}{\pi^{p-1}\cdot p} =$ $= 0 \Leftrightarrow \frac{a_{p-1}}{\pi^{p-1}\cdot p} = k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{a_{p-1}}{\pi^{p}\cdot p} \in \mathbf{Z}$.

Etapa finală

1. Se obține $A = B - I_n$ și condiția $A^n = \alpha A$ se poate scrie astfel: $(B - I_n)^n = \alpha(B - I_n)$ sau $B^n - C_n^1 B^{n-1} + \quad + (-1)^n I_n = \alpha B - \alpha I_n$, sau $B^n - C_n^1 B^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}B - \alpha B = -\alpha I_n - (-1)^n I_n$. De aici putem scrie

$$B(B^{n-1} - C_n^1 B^{n-2} + \quad + (-1)^{n-1} I_n - \alpha I_n) = I_n((-1)^{n+1} - \alpha),$$

de unde

$$(1) \qquad B(B^{n-1} - C_n^1 B^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} I_n - \alpha I_n)\frac{1}{(-1)^{n+1} - \alpha} = I_n.$$

Am ținut seama că $\alpha \neq \pm 1$ și $B^n I_n = I_n B^n$. Din relația (1) rezultă că matricea B are inversă la dreapta și datorită faptului că B comută cu orice putere a sa, rezultă că această inversă la dreapta este inversă și la stînga. Deci matricea B este inversabilă.

2. Pentru $x = y = 0$ se obține $P(0) = 0$. Derivăm relația dată în funcție de variabila x și obținem $2P(x)P'(x) = P'(x + y)P(x - y) + P(x + y)P'(x - y)$, $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$. În această relație facem $x = y$ și obținem $2P(x)P'(x) = P'(2x)P(0) + P(2x)P'(0)$ sau $2P(x)P'(x) = P(2x)P'(0)$. Dacă $P'(0) = 0$ rezultă (1) $P(x) \equiv 0$. În caz contrar se deduce (2) $2\,\mathrm{grad}\,(P) \quad 1 \quad \mathrm{grad}\,(P)$, deci $\mathrm{grad}\,(P) = 1$, de unde (3) $P(x) = \lambda x$, cu $\lambda \neq 0$. Din (1) și (3) rezultă că $P(x) = \lambda x$, unde $\lambda \in \mathbf{R}$.

3. Presupunem că $AB \quad A'B'$ și construim punctul C astfel încît $AC = BC$ și $AB + AC + BC < 2AB + \varepsilon$, unde $\varepsilon = A'B' - AB$. Rezultă că $AB + AC + BC < AB + A'B' \quad A'B' + A'B' < A'B' + A'C' + B'C'$ (ultima inegalitate

este adevărată deoarece $A'B' < A'C' + B'C'$). Deci $AB + AC + BC < A'B' + A'C' + B'C'$, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că $AB \geqslant A'B'$, $(\forall)\, A, B \in \mathcal{P}$. Deci fiind date punctele A, B și un alt punct C necoliniar cu A și B avem $AB \geqslant A'B'$, $AC \geqslant A'C'$ și $BC \geqslant B'C'$ Dar $AB + AC + BC = A'B' + A'C' + B'C'$, deci $AB = A'B'$, $(\forall)\, A, B \in \mathcal{P}$. *Altă soluție.* Fie punctele necoliniare trei cîte trei A, B, M, N, P. Scriind condițiile ca perimetrele triunghiurilor $A'M'N'$, $A'M'P'$, $A'N'P'$ și $M'N'P'$ să fie respectiv egale cu perimetrele triunghiurilor AMN, AMP, ANP, MNP și adunînd membru cu membru relațiile care apar, obținem că (1) $AM + AN + AP = A'M' + A'N' + A'P'$ Analog se obține că (2) $BM + BN + BP = B'M' + B'N' + B'P'$. Scriind acum condițiile ca perimetrele triunghiurilor MAB, NAB și PAB să fie egale cu perimetrele triunghiurilor $M'A'B'$ $N'A'B'$ și respectiv $P'A'B'$ și adunînd relațiile care apar, ținînd cont de relațiile (1) și (2), deducem în final că $3AB = 3A'B'$, adică $AB = A'B'$

4. Din ipoteză rezultă că $\frac{1}{8}(6a_n - a_{n-1}) \leqslant \frac{1}{6}(5a_n - a_{n-1})$, deci (1) $2a_n \geqslant a_{n-1}$, $(\forall)\, n \geqslant 1$. Apar două cazuri: 1) Dacă $a_n \leqslant 0$, $(\forall)\, n \geqslant 0$, din $a_{n+1} \geqslant \frac{1}{8}(6a_n - a_{n-1})$ rezultă că $a_{n+1} \geqslant \frac{3}{4} a_n$, $(\forall)\, n \geqslant 0$. Prin inducție se obține imediat că $a_{n+1} \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} a_0$. Deci $|a_{n+1}| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} |a_0|$ ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; 2) Dacă există k astfel încît $(\forall) n \geqslant k$ să avem $a_n > 0$, din $a_{n+1} \leqslant \frac{1}{6}(5a_n - a_{n-1})$ se deduce $a_{n+1} \leqslant \frac{5}{6} a_n$ pentru $n \geqslant k + 1$. Prin inducție se verifică relația $a_n \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} a_k$ pentru orice $n \geqslant k$. Deoarece pentru orice $n \geqslant k$ avem $a_n > 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. În concluzie obținem în toate cazurile că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

CLASA A XII-A

Anul 1969

Etapa județeană

1. a) $\frac{\pi - 2}{4} \ln 2 + \frac{\pi - 4}{2}$. b) Fie $h(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$, $h''(x) = \frac{2x^2}{(1 + x^2)^2} \geqslant 0$. Deci $h'(x) > h'(0) = 0$ pentru $x > 0$ și $h(x) > h(0) = 0$ pentru $x > 0$. Avem $A = \frac{\pi}{4} + 1 - \ln 2$. c) $\frac{\pi - 1}{2} \ln 2 + \frac{\pi - 4}{2}$.

2. Există o infinitate de valori distincte pentru care g se anulează.

3. a) $\frac{3C_8^2}{C_{12}^6}$; b) Cazuri posibile 12^6. Pentru a număra cazurile favorabile presupunem că am împărțit cele douăsprezece numere în trei grupe astfel 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12. Vom nota cu n_1 probabilitatea ca numerele din prima

grupă să apară în cele şase extrageri. Fie E_k evenimentul în care la extragerea k apare 1, şi A_1 evenimentul ca în cele şase extrageri să apară 1. Atunci

$$p(A_1) = p(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6) = \sum_{i=1}^{6} p(E_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} p(E_i \cap E_j) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 6} p(E_i \cap E_j \cap E_k) - \quad - p(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5 \cap E_6) =$$

$$= C_6^1 \cdot \frac{1}{12} - C_6^2 \cdot \frac{1}{12^2} + C_6^3 \cdot \frac{1}{12^3} - \quad - C_6^6 \cdot \frac{1}{12^6} = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^6.$$

Rezultă că $n_1 = \left[1 - \left(\frac{11}{12}\right)^6\right]^4$ iar probabilitatea de a apare una din cele trei grupe este $3\left[1 - \left(\frac{11}{12}\right)^6\right]^4$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. $P'(x) = a(x-1)^2(x+1) = ax^3 - ax^2 - ax + a$.
$P(x) = a\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) + b$. Din $P(1) = -1$ şi $P(-1) = 1$ rezultă $a = -\frac{3}{2}$ şi $b = -\frac{3}{8}$.

2. $x = a$, $y = 2b$, $z = 3c$.

3. Se aplică teorema lui Ceva. Pentru coordonatele punctului D se obţine

$$M\left(\frac{4}{a+1}, \frac{3a}{a+1}\right), \; N\left(\frac{b}{b+1}, \frac{4b+3}{b+1}\right), \; P\left(\frac{ab+4}{ab+1}, \frac{4ab}{ab+1}\right) \text{ şi apoi}$$

$$D\left(\frac{12(ab+4)(1-b)}{2ab^2+5ab-19b-16}, \frac{12(4b+3)(ab-5)}{2ab^2+5ab-19b-16}\right).$$

b) D trebuie să fie centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Din teorema bisectoarei rezultă $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $b = 1$.

Etapa finală

1. Din $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ rezultă că x_1 divide toate celelalte rădăcini ale ecuaţiei.

2. a) Dacă x_0 este rădăcina dublă raţională atunci

$$f(x_0) = x_0^4 + kx_0^3 + 28x_0^2 + 48x_0 - 64 = 0 \text{ şi}$$
$$f'(x_0) = 4x_0^3 + 3kx_0^2 + 56x_0 + 48 = 0.$$

Eliminînd pe k între cele două ecuaţii se obţine $x_0^4 - 28x_0^2 - 96x_0 - 192 = 0$. Rezultă $x_0 = -4$ şi $k = 9$. b) Polinomul f are patru rădăcini complexe $x_{1,2} = a \pm ib$, $x_{3,4} = c \pm id$ pentru care $c^2 + 1^2 = 4(a^2 + b^2)$. Din $x_1x_2x_3x_4 = 64$, se obţine $a^2 + b^2 = 4$ şi $c^2 + d^2 = 16$. Pentru $a = -1$, $c = -2$ rezultă $k = 6$. Soluţia $a = -\frac{1}{2}$ $= -4$ nu este bună deoarece conduce la $d = 0$.

3. $V = 2\pi \int_0^1 \cos^2(n \arccos x)\, dx$. Se face schimbarea de variabilă $\arccos x = t$. Avem

$$V = 2\pi \int_0^2 \sin t \cos^2 nt\, dt = \pi \int_0^2 \sin t(1 + \cos 2nt)\, dt =$$

$$= \pi + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin (2n+1)t - \sin (2n-1)t]\, dt.$$ Se obține $n = 1$.

4. Se notează cu E_k, $k = 1, 2, 3, 4$, evenimentul ca vînătorul k să atingă ținta. Avem

$$p(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = \sum_{i=1}^{4} p(E_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} p(E_i \cap E_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 4} p(E_i \cap E_j \cap E_k) -$$

$$- p(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = 4\frac{2}{5} - C_4^2 \frac{2^2}{5^2} + C_4^3 \frac{2^3}{5^3} - \frac{2^4}{5^4} = 1 - \left(1 - \frac{2}{5}\right)^4 = \frac{544}{625}.$$

Anul 1970

Etapa județeană

1. a)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$			0		$+$		
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

b) $8 - 4\sqrt{2} - 6 \ln 3 + 3 \ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} - 3 \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

2. $\frac{\ln 3}{2}$.

3. a) Dacă $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \quad + a_n$, atunci se observă că $(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) = 1 + x_1 + x_2 \quad + x_n + x_1 x_2 + \quad + x_{n-1} x_n + x_1 x_2 x_3 + \quad + x_{n-2} x_{n-1} x_n + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_n = 1 - \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0} - \quad + (-1)^n \frac{a_n}{a_0} = \frac{(-1)^n P(-1)}{a_0}$ b) Dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$, atunci

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Pe de o parte, $(1 + x_1) \quad (1 \quad x_n) = 2$ iar, pe de altă parte, $(1 + x_1) \quad (1 + x_n) = 2 \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)\left(1 + \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) = 2 \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 4 \cos^2 \frac{k\pi}{n} = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$. Deci

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}.$$

4. Se notează cu E_k, $k = 1, 2, 3$, evenimentul ca acel candidat care are în plic k probleme de algebră să extragă o problemă de algebră. Avem:

a) $p(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) = p(\bar{E}_1) \cdot p(\bar{E}_2) \cdot p(\bar{E}_3) = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}$;

b) $p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \dfrac{6}{n^3}$;

c) $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) - p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_3) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \dfrac{6n^2 - 11n + 6}{n^3}$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) $D = (0, 1)$, f este continuă pe D fiind o compunere de funcţii continue pe D. b) $+\infty$.

2. $D = [5, \infty)$; funcţia $f : D \to [\sqrt{5}, \infty)$ este strict crescătoare şi continuă.

3. a) Dacă $c = 0$ rezultă că şi $b = 0$ şi deci $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -a$. Dacă $c \neq 0$ rezultă că şi polinomul $Q(x) = cx^3 + bx^2 + ax + 1$ are trei rădăcini reale. Deci $Q'(x)$ are două rădăcini reale, adică $b^2 - 3ac \geqslant 0$. Din $b^2 = 2ac$ rezultă $b = 0$ şi $a = 0$. Dar ecuaţia $x^3 + c = 0$ nu are toate rădăcinile reale şi deci rămîne primul caz. b) $E(x_1, x_2, x_3) = 2$. c) $f(x_1, x_2, x_3) = 2(b^3 + 3c^2)$.

4. a) $PP' = OA$. b) Dacă $A(a, 0)$, $M(0, \lambda)$ rezultă că $N(\lambda, a + \lambda)$ şi condiţia de coliniaritate revine la

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ \lambda & a+\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

c) Panta dreptei (d) este $-\dfrac{a}{\lambda}$. Ecuaţia cercului este $\left(x - \dfrac{a+\lambda}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{a+\lambda}{2}\right)^2 = \dfrac{\lambda^2}{2}$. Coordonatele unuia dintre punctele de pe cerc prin care trece una dintre tangente sînt $x_1 = \dfrac{a+\lambda}{2} + \dfrac{\lambda^2}{\sqrt{2(a^2+\lambda^2)}}$, $y_1 = \dfrac{a+\lambda}{2} + \dfrac{a\lambda}{\sqrt{2(a^2+\lambda^2)}}$.

5. a) $P(x) = x^3 - 3p^2x + 2p^3$, unde $p \in \mathbf{Z}$. b) $x^3 - 3x + 2$. c) $-2m$.

Etapa finală

1. a) Dacă se notează cu y funcţia necunoscută şi $M(x, y(x))$ este punctul de tangenţă, atunci punctul de pe bisectoarea a doua are coordonatele

$$\frac{xy'(x) - y(x)}{r + y'(x)}; \quad \frac{y'(x) - xy'(x)}{1 + y'(x)}.$$

Ecuaţia diferenţială este $xyy'^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0$ sau $y' = \dfrac{x}{y}$ şi $y' = \dfrac{y}{x}$

b) $y^2 - x^2 = c_1$, $y = c_2x$; conica (C_1) este $y^2 - x^2 = -9$. c) Dreptele simetrice

față de Ox au ecuațiile de forma $y = cx$ și $y = -cx$, $c > 0$. Punctele de intersecție cu conica (C_1) au coordonatele $\pm\frac{3}{\sqrt{c^2-1}}$, $\pm\frac{3c}{\sqrt{c^2-1}}$, $c > 1$. Avem

$$V = \pi\int_{-\frac{3}{\sqrt{c^2-1}}}^{\frac{3}{\sqrt{c^2-1}}}\left(\frac{9c^2}{c^2-1} - 9 - x^2\right)dx = 36\pi(c^2-1)^{\frac{3}{2}}.$$

Se obține $c = \sqrt{2}$.

2. a) Vom nota matricea A dată în enunț sub forma $A(m, n, p, q)$ punînd în evidență parametrii de care depinde. Fie acum matricile $A(m_i, n_i, p_i, q_i) \in \mathcal{M}$, unde $i = 1, 2$. Vom demonstra mai întîi că produsul a două numere de forma $m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp$ este un număr de aceeași formă. Observăm că:

$$(m_1^3 + n_1^3 + p_1^3 - 3m_1n_1p_1)(m_2^3 + n_2^3 + p_2^3 - 3m_2n_2p_2) = \begin{vmatrix} m_1 & p_1 & n_1 \\ n_1 & m_1 & p_1 \\ p_1 & n_1 & m_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_2 & p_2 & n_2 \\ n_2 & m_2 & p_2 \\ p_2 & n_2 & m_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} m_1m_2 + p_1n_2 + n_1p_2 & m_1p_2 + p_1m_2 + n_1n_2 & m_1n_2 + p_1p_2 + n_1m_2 \\ m_1n_2 + p_1p_2 + n_1m_2 & m_1m_2 + p_1n_2 + n_1p_2 & m_1p_2 + p_1m_2 + n_1n_2 \\ m_1p_2 + p_1m_2 + n_1n_2 & m_1n_2 + p_1p_2 + n_1m_2 & m_1m_2 + p_1n_2 + n_1p_2 \end{vmatrix} =$$

$= (m_1m_2 + p_1n_2 + n_1p_2)^3 + (m_1n_2 + p_1p_2 + n_1m_2)^3 + (m_1p_2 + p_1m_2 + n_1n_2)^3 - 3(m_1m_2 + p_1n_2 + n_1p_2)(m_1n_2 + p_1p_2 + n_1m_2)(m_1p_2 + p_1m_2 + n_1n_2)$. Deci dacă notăm $m = m_1m_2 + p_1n_2 + n_1p_2$, $n = m_1n_2 + p_1p_2 + n_1m_2$, $p = m_1p_2 + p_1m_2 + n_1n_2$, $q = q_1(m_2^3 + n_2^3 + p_2^3 - 3m_2n_2p_2) + q_2(m_1^3 + n_1^3 + p_1^3 - 3m_1n_1p_1)$, obținem că $A(m_1, n_1, p_1, q_1)A(m_2, n_2, p_2, q_2) = A(m, n, p, q)$, deci înmulțirea matricilor este o lege de compoziție internă în $\mathcal{M}$. b) Deoarece numerele m, n, p, q sînt întregi și $\det A(m, n, p, q) = (m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp)^3$, condiția necesară și suficientă ca să existe inversa matricii $A(m, n, p, q)$ și ea să aparțină lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ este ca: $m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = \pm 1$. Să notăm cu $\mathcal{N}_1$, respectiv $\mathcal{N}_2$, mulțimile de matrici din $\mathcal{M}$, de forma: $A_1(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$, $A_2(q) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}$, unde $q \in \mathbf{Z}$ și să notăm $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. Mulțimea $\mathcal{N}$ este închisă față de înmulțirea matricilor, deoarece: $A_1(q_1)A_1(q_2) = A_1(q_1+q_2)$, $A_2(q_1)A_2(q_2) = A_1(-q_1-q_2)$ și $A_1(q_1)A_2(q_2) = A_2(-q_1+q_2)$. Deoarece $A_i^{-1}(q) = A_i(-q)$ pentru $i = 1, 2$, rezultă că $\mathcal{N}$ este grup. Maximalitatea rezultă din modul de definiție a lui $\mathcal{N}$. c) Deoarece $m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = \pm 1$, din identitatea:

$$m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = (m + n + p)(m^2 + n^2 + p^2 - mn - np - mp)$$

rezultă că numerele m, n și p din $\mathbf{Z}$ satisfac unul din următoarele patru sisteme de ecuații: $m + n + p = \pm 1$; $m^2 + n^2 + p^2 - mn - np - mp = \pm 1$. Ridicînd la pătrat prima ecuație și ținînd seama de cea de a doua, obținem că $3(mn + np + mp) = 1 \pm 1$. Deoarece membrul stîng este multiplu de 3, rezultă că trebuie ales semnul minus, cînd obținem: $mn + np + mp = 0$. Ținînd seama de relațiile lui Viète, rezultă că numerele m, n și p trebuie să verifice una din cele două ecuații date în enunț.

3. a) $\frac{7}{18}$. b) $\frac{5}{18}$.

4. a) Utilizînd relațiile între rădăcini și coeficienți se obține $S = \frac{b+3}{1-b}$;

b) În acest caz $\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B - 1}$. Primele două condiții se verifică imediat. Pentru a treia presupunem că $m(\hat{B}) < 60°$. Avem

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B - 1} > 3\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg} B(\operatorname{tg} B - 3\sqrt{3}) \operatorname{tg} A - 3\sqrt{3} > 0.$$

Membrul stîng este privit ca un trinom în $\operatorname{tg} A$.

$$\Delta = \operatorname{tg} B(\operatorname{tg} B - \sqrt{3})^2 (\operatorname{tg} B - 4\sqrt{3}) < 0.$$

LICEE DE SPECIALITATE

1. Se notează cu $Q(\alpha, \beta)$ simetricul punctului P și se pun condițiile: mijlocul segmentului $[PQ]$ aparține dreptei d și dreapta PQ este perpendiculară pe d. Eliminînd parametrul m între cele două relații se obține ecuația locului geometric al lui Q, care este cercul $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}y - 1 = 0$.

2. a) $c = -1$. b) Numai $a = 1$ nu admite simetric. c) Legea $*$ este asociativă dar nu determină structură de grup pe $\mathbf{R}$ din cauza rezultatului de la punctul b.

3. a) $a = -\sqrt{3}$, $b = -7$, $x_3 = \sqrt{3} - 2$.
b) $a^2(b-1)^2y^3 - a^2(b-1)(b-3)y^2 + (3a^2 - 2a^2b + 1)y - a^2 = 0$.

4. a) $y = \frac{b}{a}\sqrt[3]{a^3 - x^3}$.

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
y'	$-$		0	$-\infty$ | $-\infty$		$-$	
y	∞	$\searrow$		0		$\searrow$	$-\infty$

b) În punctul $\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}, \frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

5. $e^{\frac{1}{3}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)}$

6. Pentru un x_2 fixat se obține $x_1 + x_3 = 10 - x_2$, $x_1x_3 = 50 - 10x_2$, $m = 50 - x_2^2$, $n = -x_1x_2x_3$. Pentru ca x_1 și x_3 să fie întregi trebuie ca $\Delta = (x_2 + 10)^2 - 200$ să fie pătrat perfect. Deci $x_2 + 10 \in [-101, 101]$ și prin încercări se obțin soluțiile $x_2 + 10 = \pm 15, \pm 27, \pm 51$ sau $x_2 = 5, 17, 41, -25, -37, -61$. Pentru fiecare valoare se obțin corespunzător x_1, x_3, m, n.

Anul 1971

Etapa județeană

1. a) Dacă n este gradul maxim al celor trei polinoame se consideră $2n + 1$ numere întregi distincte pentru care se scrie relația dată. Aplicînd ipoteza (I) rezultă că unul din polinoamele p și q este nul iar celălalt este r sau $-r$.

b) Toate rădăcinile polinomului r sînt rădăcini și pentru polinoamele p și q. Deci $p = p_1 r$, $q = q_1 r$. Atunci relația dată revine la $[p_1(x)]^4 + [q_1(x)]^4 = 1$. Se arată că dacă polinoamele p_1 și q_1 nu sînt ambele constante, atunci nici polinomul $p_1^4 \quad q_1^4$ nu poate fi constant. Deci p_1 și q_1 sînt constante cu proprietatea că $p_1^4 + q_1^4 = 1$.

2. a) Dacă $a^2 + b^2 \neq 0$. b) Fie $x^4 - x^3 + x^2 - \ldots + 1 = (x^2 + mx + n)(x^2 + px + q)$, $p + m = 1$, $nq = 1$, $mq + np = 1$, $q \quad mp + n \quad 1$. Din primele trei ecuații se obține $m(1 - n^2) = n(1 \quad n)$. Pentru $n \neq 1$ din ultima ecuație rezultă $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 0$ care nu are nici rădăcini reale. Pentru $n = 1$ se obține $q = 1$ și $m + p = 1$, $mp = -1$ care nu are soluții raționale.

4. a) Se face raportul dintre numărul cazurilor favorabile și al cazurilor posibile. În extracțiile fără întoarcere avem

$$P(X > x) = \begin{cases} \dfrac{C_{N-x}^n}{C_N^n}, & N - x \geqslant n, \\ 0, & N - x < n, \end{cases} \qquad P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{C_{N-x}^{n-1}}{C_N^n} & N - \quad \geqslant n - 1, \\ 0, & N - \quad < n - 1. \end{cases}$$

$$P(Y \leqslant y) = \begin{cases} \dfrac{C_y^n}{C_N^n}, & n \leqslant y, \\ 0, & n > y, \end{cases} \qquad P(Y = y) = \begin{cases} \dfrac{C_y^{n-1}}{C_N^n}, & n - 1 \leqslant y, \\ 0, & n - 1 > y. \end{cases}$$

În extracțiile cu întoarcere avem

$$P(X > x) = \frac{(N - x)^n}{N^n} \qquad P(X = x) = \frac{(N + 1 - x)^n - (N - x)^n}{N^n},$$

$$P(Y \leqslant y) = \frac{y^n}{N^n}, \quad P(Y = y) = \frac{y^n - (y - 1)^n}{N^n}.$$

Pentru $P(X = x)$, în extracția cu întoarcere, cazuri favorabile:

x apare o dată, restul sînt mai mari: $C_n^1 (N - x)^{n-1}$

x apare exact de două ori: $C_n^2 (N - x)^{n-2}$

apare de n ori : C_n^n.

Deci numărul cazurilor favorabile este

$$C_n^1 (N - x)^{n-1} + C_n^2 (N - x)^{n-2} + \quad + C_n^n = (N - x + 1)^n - (N - x)^n.$$

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Se verifică imediat axiomele inelului. b) $(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = 0$ implică $a_1 a_2 + 2b_1 b_2 = 0$, $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$. Dacă $b_2 = 0$ rezultă $a_1 a_2 = 0$, $a_2 b_1 = 0$ care implică sau $a_2 = 0$ sau $a_1 = b_1 = 0$. Dacă $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ se obține $a_1 = -\dfrac{a_2 b_1}{b_2}$ și $a_2^2 = 2b_2^2$, de unde, deoarece $a_2, b_2 \in \mathbf{Q}$, rezultă $a_2 = b_2 = 0$. Deci nu există divizori ai lui zero. c) f este o bijecție și în plus $f((a + b\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2})) = f(a + b\sqrt{2}) + f(a_1 + b_1\sqrt{2})$; $f((a + b\sqrt{2})(a_1 + b_1\sqrt{2})) = f(a + b\sqrt{2}) f(a_1 + b_1\sqrt{2})$.

2. $$\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$\arcsin(2y-1)=\arcsin(2x-1)+c.$$

Etapa finală

1. a) Nu este asociativă şi nici comutativă. Nu admite element neutru. b) Relaţia de demonstrat se reduce la o identitate algebrică.

2. a) Se notează cele două legi cu $+$ şi $*$ iar elementele neutre corespunzătoare cu e_1 şi e_2. Fie α astfel ca $\alpha * e_1=e_2$. Atunci din $\alpha * (e_1+e_1)=\alpha * e_1+\alpha * e_1 = e_2+e_2$ şi $\alpha * (e_1+e_1)=\alpha * e_1 = e_2$ rezultă $e_1 = e_2$. Din $x * (e_1+e_1) = x * e_1=x$ şi $x * (e_1+e_1) = x*e_1 + x * e_1 = x + x$ rezultă $x = e_1 = e_2$ pentru orice x din mulţime. Deci proprietatea nu poate fi adevărată decît pentru mulţimile care se reduc la un element. b) Are. De exemplu,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0],\\ x, & x\in(0,1),\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x, & x\in[-1,0],\\ 0, & x\in(0,1].\end{cases}$$

c) Fie $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ un izomorfism care invariază pe $\mathbf{R}$. Atunci $f_{\mathbf{R}}$ este un izomorfism pe $\mathbf{R}$ şi se ştie că singurul izomorfism este $1_{\mathbf{R}}$. Deci $f(a)=a$ dacă $a\in\mathbf{R}$. Rezultă că $f(a+ib)=f(a)+f(ib)=f(a)+f(b)\cdot f(i)=a+bf(i)$, dacă $a, b\in\mathbf{R}$. Dar $f(i\cdot i)=-1=f^2(i)$, deci $f(i)=i$. Rezultă că singurul izomorfism care invariază pe $\mathbf{R}$ este $1_{\mathbf{C}}$.

3. a) Funcţia $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ este derivabilă dacă f este continuă şi $F'(0)=f(0)$. Din relaţia dată se obţine

$$f(x)=2\frac{F(x)}{x}-k \text{ şi pentru } x\to 0,\ f(0)=2F'(0)-k.$$

b) Prin derivarea relaţiei date se obţine $\dfrac{f'(x)}{f(x)-k}=\dfrac{1}{x}$ şi $\ln|f(x)-k = \ln|x|+\ln|c|$ sau $f(x)=cx+k$. Se arată că orice funcţie de această formă verifică relaţia dată.

4. Se consideră funcţia $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Atunci $F'(x)=f(x)$, deoarece f este continuă, şi deci derivînd relaţia $F(x+l)-F(x)=k$, rezultă $f(x+l)-f(x)=0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$.

5. a) Se notează cu E_i evenimentul ca la extracţia i să apară o bilă albă şi cu $\bar{E}_i$ evenimentul contrar. Atunci

$$p(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap\ldots\cap\bar{E}_{k-1}\cap E_k)=q^{k-1}p.$$

b) Se notează cu A_{l+m-1} evenimentul ca din $l+m-1$ extracţii să apară m bile albe şi $l-1$ bile negre. Avem $p(A_{l+m-1})=C_{l+m-1}^m p^m q^{l-1}$. Evenimentul cerut este $A_{l+m-1}\cap\bar{E}_{l+m}$ şi deci

$$p(A_{l+m-1}\cap\bar{E}_{l+m})=C_{l+m-1}^m p^m q^l.$$

Suma acestor probabilităţi pentru $m=0, 1, \ldots$ trebuie să fie egală cu 1, deoarece dacă se fac un număr suficient de mare de extracţii, probabilitatea ca să se obţină

l bile negre este oricît de apropiată de 1. Acest lucru se poate demonstra prin calcularea sumei seriei. Fie

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+l-1}^{m} p^m q^l = q^l \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+l-1}^{l-1} p^m = \frac{q^l}{(l-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} (m+l-1)(m+l-2) \ldots$$

$$\ldots (m+1)p^m. \text{ Dar}$$

$$(m+l-1)(m+l-2) \ldots (m+1)p^m = (p^{m+l-1})^{(l-1)}.$$

$$\text{Deci } S = \frac{q^l}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^{m+l-1} \right) = \frac{q^l}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}} \left(\frac{p^{l-1}}{1-p} \right).$$

Mai trebuie demonstrat că

$$\frac{d^k}{dp^k} \left(\frac{p^k}{1-p} \right) = \frac{k!}{(1-p)^{k+1}} \text{ pentru orice } k \in \mathbf{N}^*.$$

Aplicînd formula lui Leibniz de derivare a unui produs, obținem

$$\frac{d^k}{dp^k} \left(\frac{p^k}{1-p} \right) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (p^k)^{(i)} \left(\frac{1}{1-p} \right)^{(k-i)} =$$

$$= k! \sum_{i=0}^{k} \frac{k(k-1) \ldots (k-i+1)}{i!\,(k-i)!} p^{k-i} (k-i)! \left(\frac{1}{1-p} \right)^{k-i+1} =$$

$$= \frac{k!}{1-p} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(\frac{p}{1-p} \right)^{k-i} = \frac{k!}{1-p} \left(1 + \frac{p}{1-p} \right)^k = \frac{k!}{(1-p)^{k+1}}.$$

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Deoarece f este continuă, funcția definită prin $\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$ este derivabilă, deci și f este derivabilă. b) Se derivează relația dată și se obține

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda + \frac{2x}{1+x^2} \text{ sau } \ln |f(x)| = \lambda x + \ln c + (1+x^2),$$

deci $f(x) = c(1+x^2)\, e^{\lambda x}$. Înlocuind această expresie a lui f în relația dată se obține $c = \lambda$, deci $f(x) = \lambda(1+x^2)\, e^{\lambda x}$.

2. a) După substituția $P(X) = Q(X) + 5$ se obține $(X-4)Q(X+1) = XQ(X)$. Dînd lui X succesiv valorile 0, 1, 2, 3 rezultă $Q(1) = Q(2) = Q(3) = Q(4) = 0$, deci $Q(X) = H(X)(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$. Înlocuind această expresie a lui Q în $(X-4)Q(X+1) = XQ(X)$ se obține $H(X+1) = H(X)$, deci H este constant. Rezultă $P(X) = a(X-1)(X-2)(X-3)(X-4) + 5$.

3. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1 - a_1^{n-2}x_2 + \ldots + (-1)^{n-1}x_n = a_1^n, \\ a_2^{n-1}x_1 - a_2^{n-2}x_2 + \quad + (-1)^{n-1}x_n = a_2^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^{n-1}x_1 - a_n^{n-2}x_2 + \ldots + (-1)^{n-1}x_n = a_n^n, \end{cases}$$

unde $a_1, \ldots, a_n$ sînt numere reale distincte. Determinantul sistemului este de tip Vandermonde și deci este diferit de zero de unde se obține că sistemul are soluție unică. Fie acum $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soluțiile ecuației

$$u^n - A_1u^{n-1} - A_2u^{n-2} - \ldots + (-1)^n A_n = 0. \text{ Atunci}$$

$$x_1 = A_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$x_2 = A_2 = \sum_{i<j} a_i a_j,$$

$$\ldots$$

$$x_n = A_n = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

4. a) Pentru $x = y = 0$ se obține $\Phi(0) = 0$. Considerînd pe y fixat și derivînd relația dată în raport cu x rezultă $\Phi'(x + y) = \Phi'(x)$. Pentru $x = 0$ se obține $\Phi'(y) = \Phi'(0)$. Se notează $\Phi'(0) = K$ și, deoarece y este arbitrar, din $\Phi'(y) = K$ rezultă $\Phi(y) = Ky + C$. Dar $\Phi(0) = 0$, deci $C = 0$ și $\Phi(y) = Ky$. b) Se arată întîi că dacă $x, y \in [0, 1]$, atunci și $E = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} \in [0, 1]$. Într-adevăr, făcînd substituția $x = \sin u$, $y = \sin v$, $u, v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă $E = \sin(u + v)$. Pentru $x = y = 0$ se obține $f(0) = 0$. Pentru $y \in [0, 1)$ fixat, se derivează relația dată în raport cu x, $y \in [0, 1)$: $f'(x) = f'(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})\left(\sqrt{1 - y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$. Pentru $x = 0$ se notează $f'(0) = K$ și se obține $f'(y) = \frac{K}{\sqrt{1 - y^2}}$, $(\forall)\ y \in [0, 1)$. Deci $f(y) = K \arcsin y + c$, cu $c = 0$ și $f(y) = K \arcsin y$, $(\forall)\ y \in [0, 1)$. Din continuitate rezultă $f(y) = K \arcsin y$, $(\forall)\ y \in [0, 1]$.

5. $b = a_n$, unde $a_n \neq a$.

6. Se face substituția $x = \sqrt{y + k}$ și se obține ecuația $(y+k)[a_5(y+k)^2 + a_3(y + k) + a_1]^2 - [a_4(y + k)^2 + a_2(y + k) + a_0]^2 = 0$.

Anul 1972

Etapa județeană

1. a) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx \geq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \geq 0$. b) În caz contrar, $(\forall)\ n$, $(\exists)\ x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ astfel încît $f(x_n) = 0$. Deoarece $\lim x_n = x_0$ rezultă

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = 0 \neq f(x_0).$$

c) Dacă $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$, cu $f(x_0) > 0$, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încît $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ pentru $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ și deci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx \geq$$

$$\geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = \varepsilon f(x_0) > 0.$$

2. Fie $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{4}$. Atunci

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_1^2 \frac{\sin x_2 t - \sin x_1 t}{t} dt > 0.$$

3. a) Din $x_i^{n+3} + ax_i^{n+2} + bx_i^{n+1} + cx_i^n = 0$, $i = 1, 2, 3$, prin însumare se obține relația cerută. b) S_n este întreg pentru orice triplet de numere iraționale care sînt rădăcinile unei ecuații de forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ cu coeficienți întregi.

4. $z_0, \ldots, z_{n-1}$ sînt rădăcinile unei ecuații de forma $z^n = \alpha$, unde $\alpha \in \mathbf{C}$. De aici rezultă că $\sum_{i=0}^{n} z_i^p = 0$, pentru $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Atunci, deoarece $k < n$,

$$\frac{p(z_0) + p(z_1) + \ldots + p(z_{n-1})}{n} =$$

$$= a_k + \frac{1}{n}\left(a_0 \sum_{i=0}^{n-1} z_i^k + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} z_i^{k-1} + \quad + a_{k-1} \sum_{i=0}^{n-1} z_i\right) = a_k.$$

5. Folosind schema bilei neîntoarse rezultă că probabilitatea evenimentului cerut este $\frac{C_2^1 C_8^{n-1}}{C_{10}^n} + \frac{C_2^2 C_8^{n-2}}{C_{10}^n}$. Pentru $n = 3$ se obține $\frac{8}{15}$, iar pentru $n = 4$ se obține o probabilitate mai mare.

LICEE DE SPECIALITATE

1. Nu.

2. Pentru $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1$ se consideră suma Riemann obținută astfel: se împarte intervalul $[0, 1]$ în n părți egale, cu punctele de diviziune $x_k = \frac{k}{n}$ și se alege

$$\xi_k = \frac{2k-1}{2n} \in (x_{k-1}, x_k).$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{2k-1}{2n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{(2k-1)^2 + (2n)^2}} \to \sqrt{2} - 1.$$

3. a) Rădăcina comună verifică ecuația $x^3 + x^2 + 4 = 0$, care are rădăcinile -2, $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, dintre care pentru $x = -2$ se obține $m = 3 \in \mathbf{R}$. b) $M_1 = \{-2, 1\}$, $M_2 = \{-2, -1\}$.

4. Dacă $p(x)$ are două rădăcini reale multiple, atunci p are una din următoarele forme $p(x) = (x+1)^3(x-1)^4Q_1(x)$, $p(x) = (x+1)^3(x-2)^5Q_2(x)$, $p(x) = (x-1)^4(x-2)^5Q_3(x)$, unde $Q_1(x)$ are gradul 3, $Q_2(x)$ are gradul 2, $Q_3(x)$ are gradul 1. Se arată că în nici unul din cazuri nu poate avea loc egalitatea

$$p'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(x-2)^4.$$

5. a) Folosind schema bilei neîntoarse cu mai multe culori se obține $p = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$. b) Probabilitatea evenimentului contrar: ambele bile să fie negre este $\frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$. Deci, probabilitatea să nu fie ambele bile negre este $\frac{44}{45}$. c) Se poate considera că sînt numai două culori: neagră și încă una. Probabilitatea ca cel puțin o bilă să fie neagră este $\frac{C_2^1C_8^{n-1} + C_2^2C_8^{n-2}}{C_{10}^n}$. Pentru $n = 4$ aceasta este mai mare decît $\frac{8}{15}$.

6. Avem $\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(t)\,dt.$

Dacă f este crescătoare, atunci

$$\frac{b-a}{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) \leqslant \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(t)\,dt \leqslant \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

și deci

$$\frac{b-a}{n}[f(a) - f(b)] \leqslant r_n \leqslant 0 \quad \text{sau} \quad |r_n| \leqslant \frac{b-a}{n}|f(b) - f(a)|.$$

Pentru f descrescătoare se obține

$$0 \leqslant r_n \leqslant \frac{b-a}{n}|f(b) - f(a)|.$$

7. a) Se notează $y_1 = (x_2 - x_3)^2$, $y_2 = (x_1 - x_3)^2$, $y_3 = (x_1 - x_2)^2$. Din relațiile dintre rădăcini și coeficienți se obține

$$y_1 = -p - 3x_2x_3,\ y_2 = -p - 3x_1x_3,\ y_3 = -p - 3x_1x_2$$

și ecuația cu rădăcinile y_1, y_2, y_3 este

$$y^3 + 6py^2 + 9p^2y + (4p^3 + 27q^2) = 0.$$

b) Deoarece x_1, x_2, x_3 sînt reale rezultă y_1, y_2, $y_3 \geqslant 0$; atunci $y_1 + y_2 + y_3 \geqslant 0$ conduce la $p \leqslant 0$ iar $y_1y_2y_3 \geqslant 0$ conduce la $4p^3 + 27q^2 \leqslant 0$. Deci condiția $4p^3 + 27q^2 \leqslant 0$ este necesară pentru ca ecuația $x^3 + px + q = 0$ să admită rădăcini reale. c) Condiția este și suficientă. Se formează șirul lui Rolle, deoarece rădăcinile derivatei sînt $x_{1,2} = \pm\sqrt{-p/3}$.

8. $x^5 = [x] + 5$. Deoarece $[x] + 5$ este număr întreg, rezultă că și x este întreg. Atunci $[x] = x$ și ecuația este $x^5 - x - 5 = 0$. Dar această ecuație nu admite soluții întregi. Rezultă că ecuația inițială nu admite soluții reale.

Etapa finală

1. a) Se știe că dacă o funcție $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este continuă, atunci funcția $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ este derivabilă și derivata ei $F'(x)=f(x)$ este continuă.

$$(T(\varphi_1+\varphi_2))(x)=\int_0^x t[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]\,dt=\int_0^x t\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x t\varphi_2(t)\,dt=$$
$$=(T(\varphi_1))(x)+(T(\varphi_2))(x).$$

b) Dacă $(T(\varphi_1))(x)=(T(\varphi_2))(x)$, atunci

$$F(x)=\int_0^x t(\varphi_1(t)-\varphi_2(t))\,dt=0,\ (\forall)\,x\in\mathbf{R}.$$

Deci $F'(x)=0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$, adică $x(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))=0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$. Rezultă $\varphi_1=\varphi_2$, deoarece $\varphi_1,\varphi_2\in C^0$. c) Orice funcție din C^1 care nu se anulează în origine nu aparține lui K. Un exemplu mai interesant este $\varphi(x)=x\,|x|$ care aparține lui C^1, verifică i) dar nu verifică ii), deci nu aparține lui K.

d) $\lim\limits_{x\to0}\varphi_\alpha(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha'(x)-\alpha'(0)}{x}=\alpha''(0).$

$$T(\varphi_\alpha)(x)=\int_0^x t\varphi_\alpha(t)\,dt=\int_0^x\alpha'(t)\,dt=\alpha(x).$$

e) La punctul precedent s-a arătat de fapt că $T(C^0)\supset K$. Mai rămîne de demonstrat că $T(C^0)\subset K$. Fie $\varphi\in C^0$ și $f=T(\varphi)$. Avem că $f\in C^1$. Evident, $f(0)=0$. Din $f'(x)=x\varphi(x)$ rezultă că și $f'(0)=0$. Deci condiția i) este îndeplinită. Pentru a arăta ii) se calculează limita $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\varphi(x)}{x}=\varphi(0)$.

2. Este rezolvată în *Algebră*. Manual pentru clasa a XII-a.

3. Se notează cu E_y evenimentul: se extrag y bile și se obțin x bile albe, la ultima extragere apărînd o bilă albă. Se notează cu A evenimentul în care, extrăgîndu-se $y-1$ bile, se obțin $x-1$ bile albe și cu B evenimentul ca la extragerea a y — a se obține o bilă albă. Atunci

$$p(E_y)=p(A\cap B)=p(A)\cdot p_A(B)=\frac{C_a^{x-1}C_b^{y-x}}{C_{a+b}^{y-1}}\cdot\frac{a-x+1}{a+b-y+1}.$$

Repartiția variabilei aleatoare y este $\begin{pmatrix} y \\ P(E_y)\end{pmatrix}$.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) $I(x)=\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$; făcînd schimbarea de variabilă $t=\sin u$, avem

$$I(x)=\int_0^{\arcsin x}\sin^2 u\,du=\int_0^{\arcsin x}\frac{1-\cos 2u}{2}\,du=$$
$$=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

Atunci

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & x = -1, \\ \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}, & x \in (-1, 1), \\ \frac{\pi}{4}, & x = 1. \end{cases}$$

Este continuă pe $[-1, 1]$ și derivabilă pe $(-1, 1)$. b) $\varphi'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ pentru $x \in (-1, 1)$; φ este impară.

c) $A = 2\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 (\arcsin x - x\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

2. a) $I_\alpha(0) = 0$ și $I'_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^3 + x^3} > 0$ pentru $x > -1$, deci funcția I_α este strict crescătoare. b) $t = \alpha u$ conduce la $I_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^2} I_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

3. a) $|\quad| < |z|^k$ pentru $s < k$ și $|z| > 1$. Atunci

$$|z^{k-1} + \quad + 1| \leqslant |z|^{k-1} + \quad + 1 < k|z|^k.$$

Dacă $z| > 1$ atunci $|p(z)| \geqslant |kz^k| - |z^{k-1} + \ldots + z + 1| > 0$, deci un astfel de z nu poate fi rădăcină a lui p. b) $z = \cos\theta + i\sin\theta$, unde $\theta \in (0, 2\pi)$. Atunci $\cos\theta < 1$ și

$$|z^{k-1} + \quad + z + 1| \leqslant |z|^{k-1} + \quad + |z|^2 + |z + 1| \leqslant k - 2 +$$
$$+ \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\theta} < k.$$

c) $q(x) = kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1$. Rădăcina dublă este o rădăcină a derivatei $q'(x) = k(k+1)x^{k-1}(x-1)$; $x = 0$ nu este rădăcină a lui q, deci numai $x = 1$ poate fi rădăcină dublă și chiar este, deoarece $p(1) = 0$.

4. a) Schema bilei neîntoarse cu mai multe culori: $\frac{(C_4^1)^4}{C_{16}^4} = \frac{64}{455}$; b) Se pot considera că sînt două culori

$$\frac{C_4^1 \cdot C_{12}^3 + C_4^2 \cdot C_{12}^2 + C_4^3 \cdot C_{12}^1 + C_4^4}{C_{16}^4} = \frac{265}{364};$$

c) Probabilitatea ca două cartoane să fie cu A, unul cu B și unul cu C este $\frac{C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^0}{C_{16}^4}$. Sînt 12 astfel de posibilități, deci probabilitatea cerută este $\frac{288}{455}$;

d) $p(AAAD) = p(A) \cdot p_A(A) \cdot p_{AA}(A) \cdot p_{AAA}(D) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{1}{455}$.

5. a) Se obține $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$, deci dreapta $y = x$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a graficului. De asemenea, $f'(x) = 1 + (1-x)e^{-x} > 0\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = (x-2)e^{-x}$.

Tabelul de variație a funcției este următorul:

x	$-\infty$			2			∞
$f'(x)$	∞	$+$	$+$		$+$	$+$	1
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ concavă		punct de inflexiune		$\nearrow$ convexă	∞

În origine tangenta la grafic are panta $f'(0) = 2$. b) $\frac{e-2}{e}$. c) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \frac{e-2}{e}$.

6. Din relațiile date rezultă

$$\begin{aligned} x &= e^{-t}(x_t \cos t + y_t \sin t) \\ y &= e^{-t}(-x_t \sin t + y_t \cos t) \end{aligned}, \quad (\forall)\ t \in \mathbf{R}.$$

a) Dreapta $ax + by + c = 0$ se transformă în dreapta

$$(a \cos t - b \sin t)x_t + (a \sin t + b \cos t)y_t + ce^t = 0.$$

b) Dacă $\operatorname{tg} \omega = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}$, atunci $\operatorname{tg} \omega_t = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = \operatorname{tg} \omega$. Deci prin transformarea dată unghiul a două drepte nu se schimbă. c) Condiția ca o dreaptă să coincidă cu transformata ei

$$\frac{a \cos t - b \sin t}{a} = \frac{a \sin t + b \cos t}{b} = e^t \text{ sau}$$

$$a(e^t - \cos t) + b \sin t = 0,$$

$$a \sin t + b(\cos t - e^t) = 0.$$

Determinantul acestui sistem omogen este

$$e^{2t} - 2e^t \cos t + 1 = (e^t - 1)^2 + 2e^t(1 - \cos t).$$

Deci există soluții nebanale pentru $t = 0$. Dar în acest caz $x_t = x$, $y_t = y$, adică avem transformarea identică. În alte cazuri nu există drepte invariante. d) Prin verificare directă ca și la punctul a. e) — f) Transformatul cercului $x^2 + y^2 = e^{\frac{\pi}{2}}$ este cercul $x_t^2 + y_t^2 = e^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}$. Deci, din nou, $t = 0$ care face ca toate punctele planului să fie invariante.

7. a) $p_1(z) = z + a_1$ deci $|a_1| > 1$. z_i sînt rădăcinile polinomului $z^n - 1$. $p_1(z_1)p_1(z_2) \dots p_1(z_n) = (a_1 + z_1)(a_1 + z_2) \dots (a_1 + z_n)$. Dacă se consideră polinomul $Q(z) = (z + z_1)(z + z_2) \quad (z + z_n)$, atunci $p_1(z_1) \dots p_1(z_n) = Q(a_1)$. Dar rădăcinile polinomului Q sînt $-z_1$, $-z_2$, $\quad -z_n$, deci el este de fapt $z^n - (-1)^n$. Atunci

$$u_n = \sqrt[n]{|a_1^n - (-1)^n|} \text{ și } \sqrt[n]{|a_1^n| - 1} \leqslant u_n \leqslant \sqrt[n]{|a_1|^n + 1}.$$

Trecînd la limită se obține $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = |a_1|$.

b) Fie $p_k(z) = (z + V_1)(z + V_2) \quad (z + V_k)$, deci $|V_i| > 1$, $i = \overline{1, k}$. Atunci,

$$p_k(z_1)p_k(z_2) \quad p_k(z_n) = (V_1^n - (-1)^n)(V_2^n - (-1)^n) \dots (V_k^n - (-1)^n) \text{ și}$$

$$\sqrt[n]{(|V_1|^n - 1)(|V_2|^n - 1) \dots (|V_k|^n - 1)} \leqslant u_n \leqslant \sqrt[n]{(|V_1|^n + 1)(|V_2|^n + 1) \dots (|V_k|^n + 1)}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = |V_1V_2 \dots V_k| = |a_k|$.

8. a) $y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Se va arăta că $\mathcal{M}$ este o parte stabilă în raport cu înmulțirea matricilor. Dacă $M_1 = I + a_1y + b_1y^2$ și $M_2 = I + a_2y + b_2y^2$, deducem $M_1 \cdot M_2 = I + (a_1 + a_2)y + (a_1a_2 + b_1 + b_2)y^2 \in \mathcal{M}$. Rezultă și comutativitatea. c) Elementul neutru $I \in \mathcal{M}$. Deoarece pentru $(\forall)\ M \in \mathcal{M}$, $\det M = 1$, rezultă că există matricea inversă

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 - a - b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}.$$

9. a) Deoarece pentru orice $x \in E$, $x^{-1} = x^{n-1}$ rezultă că E este grup. b) Fie A mulțimea elementelor din E care nu coincid cu propriul lor invers. Evident, A are un număr par de elemente. Dacă din E se scot elementele mulțimii A și elementul neutru e, rămîn acele elemente care coincid cu propriul lor invers. Deoarece E are un număr par de elemente, rezultă că numărul elementelor ce coincid cu propriul lor invers și sînt diferite de elementul neutru e este impar. c) Aplicația σ_a este injectivă deoarece $\sigma_a(x) = \sigma_a(y)$ implică $ax = ay$ și, înmulțind la stînga cu a^{-1}, se obține $x = y$. De aici rezultă că σ_a este și surjectivă, deoarece E este o mulțime finită. d) Pentru orice $x \in E$ avem

$$(\sigma_a \circ \sigma_b)(x) = \sigma_a(\sigma_b(x)) = \sigma_a(bx) = abx.$$

Deci $\sigma_a \circ \sigma_b \in T_E$. Elementul neutru este σ_e și inversul lui σ_a este $\sigma_{a^{-1}}$. Se definește funcția $f : E \to T_E$ prin $f(a) = \sigma_a$ și se arată că este un izomorfism între cele două grupuri. e) Dacă $a^2 = e$ atunci $\sigma_a^2(x) = aax = ex = x$, deci $\sigma_a^2 = \sigma_e$.

10. Deoarece $\mathbf{Z}_p$ este corp, rezultă că p este număr prim. a) Deoarece $\mathbf{Z}_p$ este comutativ se obține

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (\forall)\ a, b \in \mathbf{Z}_p.$$

Se pune problema să se elimine termenii din clasa zero, deci termenii pentru care $p \mid C_n^k$. Dacă $p > n$ atunci p nu divide nici unul din termenii C_n^k. Dacă $p = n$ și p este prim rezultă că $p \mid C_n^k$ pentru $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. Deci, în acest caz $(a + b)^p = a^p + b^p$. În cazul $n > p$, din $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ rezultă că $p \mid C_n^k$ atunci și numai atunci cînd exponentul $e_p(n!)$ la care figurează p în descompunerea în factori primi a lui $n!$ este strict mai mare decît exponentul $e_p((n-k)!)$ la care figurează p în descompunerea în factori primi a lui $(n-k)!$ la care se adaugă $e_p(k!)$. Dar

$$e_p(n!) = \sum_{p^\nu \leqslant n} \left[\frac{n}{p^\nu}\right], \quad e_p((n-k)!) = \sum_{p^\nu \leqslant n-k} \left[\frac{n-k}{p^\nu}\right].$$

Rezultă că vor dispare termenii corespunzători acelor k pentru care este adevărată inegalitatea

$$\sum_{p^\nu \leqslant k} \left[\frac{k}{p^k}\right] + \sum_{p^\nu \leqslant n-k} \left[\frac{n-k}{p^\nu}\right] < \sum_{p^\nu \leqslant n} \left[\frac{n}{p^\nu}\right].$$

b) Formula de rezolvare a ecuației de gradul 2 este valabilă în orice corp $\mathbf{Z}_p$ în care există $(2a)^{-1}$. Deci se exceptează situația cînd $p \mid 2a$. Cum $c < p$, iar p este prim, rezultă $p = 2$. Deci formula nu este valabilă în $\mathbf{Z}_2$.

Anul 1973

Etapa județeană

1. a) Pentru $1 \leqslant x_1 < x_2$, $f(x_2) - f(x_1) = \int_0^1 e^{-t}(t^{x_2-1} - t^{x_1-1})\, dt < 0$.

b) $f(x+1) = \int_0^1 e^{-t} t^x\, dt$. Integrînd prin părți se obține

$$f(x+1) = -e^{-t}t^x \Big|_0^1 + x\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt = -\frac{1}{e} + x f(x).$$

c) Prin inducție,

$$f(2) = \int_0^1 e^{-t} t\, dt = 1 - \frac{2}{e} = 1! - \frac{1}{e}(A_1^0 + A_1^1);$$

$$f(n+2) = (n+1)f(n+1) - \frac{1}{e} = (n+1)! - \frac{1}{e}(n+1)\sum_{k=0}^{n} A_n^k - \frac{1}{e} =$$

$$= (n+1)! - \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1}^k - \frac{1}{e} = (n+1)! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n+1} A_{n+1}^k.$$

d) $a_n = f(n+1)$. Rezultă că șirul (a_n) este descrescător și mărginit inferior de zero.

2. a) Fie $l = \lim_{x\to\infty} F(x)$. Deoarece $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, rezultă că funcția F este crescătoare și deci $F(x) < l$, pentru $(\forall)\, x \in (1, \infty)$. Din monotonia lui f rezultă că $\int_k^{k+1} f(t)\, dt \geqslant f(k+1)$. Atunci

$$l > F(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\, dt \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1).$$

Rezultă că șirul $a_n - f(1)$ este crescător și mărginit superior de l, deci este convergent.

b) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Atunci $F(x) = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ și $l = \frac{1}{\alpha-1}$, pentru $\alpha > 1$.

3. a) Deoarece rădăcinile lui $p(x)$ sînt 1 și 2 rezultă că pentru polinomul q_n trebuie să fie verificate condițiile $q_n(1) = 0$, $q_n(2) = 0$ care conduc la $a_n = 2^n - 1$, $b_n = 2 - 2^n$. c) $x_n = 1$.

4. Se utilizează formula $p(A \cap B \cap C \cap D) = p(A)p_A(B)p_{A\cap B}(C)p_{A\cap B\cap C}(D) = \frac{4}{100}\cdot\frac{96}{99}\cdot\frac{95}{98}\cdot\frac{94}{97}$.

1. a) Funcția $f:[-\theta, \theta] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{\cos}$ este impară, deoarece $|x| \leq |\theta| < \frac{\pi}{2}$, deci $\int_{-\theta}^{\theta} \frac{x\,dx}{\cos x} = 0$. b) Facem schimbarea de variabilă $x - \theta = y$ și obținem $\int_{0}^{2\theta} \frac{x\,dx}{|\cos(x-\theta)|} = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{y+\theta}{\cos y}\,dy$. Deoarece $|y| \leq |\theta| < \frac{\pi}{2}$ rezultă că $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, deci $\cos y > 0$. Pe baza rezultatului de la punctul a obținem:

$$\int_{0}^{2\theta} \frac{x\,dx}{|\cos(x-\theta)|} = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{y\,dy}{\cos y} + \theta \int_{-\theta}^{\theta} \frac{dy}{\cos y} = \theta \int_{-\theta}^{\theta} \frac{dy}{\cos y} = \theta \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|_{-\theta}^{\theta} =$$

$$= \theta \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right| = \theta \ln \left(\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \right)^2 = \theta \ln \frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}.$$

2. $a_{n+1} - a_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2x} [(\cos x)^{2(n+1)\pi} - (\cos x)^{2n\pi}]\,dx < 0$ și $a_n > 0$. Deci (a_n) este un șir descrescător și mărginit inferior de zero.

3. Dacă $p'(x)$ are trei rădăcini distincte sau una dublă și una diferită de ele, atunci $p''(x)$ trebuie să aibă două rădăcini distincte. Dar $p''(x) = 24x^2 - 24x + 6$ are rădăcină dublă $x = \frac{1}{2}$, deci rezultă că $p'(x)$ are o rădăcină triplă $x = \frac{1}{2}$. Dacă $p(x)$ are patru rădăcini reale care nu coincid rezultă că $p'(x)$ are cel puțin două rădăcini distincte. Deoarece nu este așa, rezultă că $p(x)$ admite pe $x = \frac{1}{2}$ că rădăcina multiplă de ordinul 4. Se obține $a = -1$, $b = \frac{1}{8}$.

4. a) Proprietatea rezultă din egalitățile

$$x_n^2 + y_n^2 = x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

5. a) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^2 - 1}{2} \text{ dacă } x < -1 \text{ sau } x > 1 \end{cases}$. b) $\lambda \in [0, 1]$.

6. a) $\varphi(x) - x = \dfrac{\int_0^x t f(t)\,dt - x \int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt} = \dfrac{\int_0^x (t - x) f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt} < 0.$

b) – c) $\varphi'(x) = \dfrac{f(x) \int_0^x (x - t) f(t)\,dt}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2} > 0.$

7. a) Prin identificare se obține $a' = a$, $b' = 2a + b$, $= a + b + c$.

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. c) $(\varphi(p))(x) = (b+2a(1-\lambda))x^2+(2c+b(2-\lambda)-2a)x+2c-b$.

Etapa finală

1. Avem $f(0) = 0$. Deoarece φ este continuă și f continuă rezultă $\varphi \circ f$ continuă. Derivînd relația $f(x) = \int_0^x \varphi(t)f(t)\,dt$ obținem $f'(x) = \varphi(x)f(x)$. Rezultă $\frac{f'(x)}{f(x)} = \varphi(x)$ și $f(x) = ce^{\int_0^x \varphi(x)\,dx}$ Dar $f(0)=0$, de unde $c=0$. Deci $f(x)=0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

2. a) Aplicînd teorema de medie avem $\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)f(\theta)$, $a < \theta < b$. Conform relației ii), $f(\theta) < 0$. Deoarece funcția f este continuă pe $[a, \theta)$ și $f(a) > 0$, $f(\theta) < 0$, există $a < \xi < b$ astfel încît $f(\xi) = 0$. b) Fie $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Deoarece $f(a) > 0$ și f continuă, rezultă că există o vecinătate a lui a, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ în care f este strict pozitivă. Luăm $a_1 \in (a, a+\varepsilon)$. Atunci $g(a_1) = \int_a^{a_1} f(t)\,dt > 0$ deoarece $f(t) > 0$, $(\forall)\, t \in [a, a_1]$. Din $g(b) = \int_a^b f(t)\,dt < 0$ și g continuă, rezultă că există $a_1 < \eta < b$ astfel încît $g(\eta) = 0$, adică $\int_a^\eta f(t)\,dt = 0$. c) Aplicăm formula de medie integralei $\int_a^\eta f(t)\,dt$ și se obține $(\eta-a)f(\alpha)=0$, de unde $f(\alpha)=0$ și $a<\alpha<\eta$. Deoarece există un singur zero pentru f, rezultă $\alpha = \xi$ și deci $\xi < \eta$.

3. a) Fie x_1, x_2 astfel încît $f(x_1)$ minim și $f(x_2)$ maxim și $g(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt = (x_1-a)f(\theta)$. $f(\theta) \geqslant f(x_1) \Rightarrow \frac{g(x_1)}{x_1-a} - f(x_1) \geqslant 0$ și $f(\theta) \leqslant f(x_2) \Rightarrow \frac{g(x_2)}{x_2-a} - f(x_2) \leqslant 0$. Funcția $h(x) = \frac{g(x)}{x-a} - f(x)$ este continuă; rezultă că există ξ, $\min(x_1, x_2) < \xi < \max(x_1, x_2)$ astfel încît $h(\xi) = 0$, adică $\int_a^\xi f(t)\,dt = (\xi - a)f(\xi)$.

b) Dacă $f(a) = f(b)$ avem cazurile: α) f constant $\Rightarrow$ proprietatea are loc pentru orice $\xi \in (a,b)$; β) extremele sînt atinse în interiorul lui $[a, b]$. Problema se reduce la cazul precedent; γ) unul din extreme se realizează în a și b (de exemplu, minimul). Fie x_1 un punct în care se realizează maximul. Avem

$$h(x_1) = \frac{g(x_1)}{x_1-a} - f(x_1) \leqslant 0,\ h(b) = \frac{g(b)}{b-a} - f(b) = \frac{(b-a)f(\theta)}{b-a} - f(b) = f(\theta) - f(b) \geqslant 0.$$

Rezultă că există $x_1 < \xi < b$ astfel ca $h(\xi) = 0$.

4. a) Fie J un inel cu unitate. În J există subinele care sînt corpuri, de exemplu Z_e, unde e este unitatea inelului. Dacă K este un subcorp al lui J, atunci $a \in K \setminus \{0\}$ implică existența lui a^{-1}. Din aceasta rezultă că cel mai mare subcorp

al lui J este $J^* = \{a \in I \mid \text{există } a^{-1}\} \cup \{0\}$ deoarece așa cum se vede ușor acesta este corp. Aplicînd acestea la inelul $\mathcal{M}$ rezultă

$\mathcal{M}^* = \{M(a, b) \mid \det M(a, b) = (a - b)^2(a + 2b) \neq 0\} \cup \{M(0, 0)\}$. De aici rezultă că N constă din punctele planului care nu se află pe dreptele $a - b = 0$ sau $a + 2b = 0$ împreună cu originea. b) Ținînd seama de modul de înmulțire a matricilor din $\mathcal{M}$ se definesc operațiile în N în modul următor:
$(a, b) + (a_1, b_1) = (a + a_1, b + b_1)$; $(a,b)(a_1,b_1) = (aa_1 + 2bb_1, ab_1 + ba_1 + bb_1)$. Se verifică ușor că aceste operații induc pe N o structură de corp comutativ, izomorf cu $\mathcal{M}^*$.

5. a) Să notăm $p(x) = A'x^3 + B'x^2 + C'x + D'$ și $\varphi_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Punînd condiția ca φ_p să verifice ecuația diferențială dată se obține sistemul:

$$(1)\qquad \begin{aligned} bA &= A', \\ 3aA + bB &= B', \\ 6A + 2aB + bC &= C', \\ 2B + aC + bD &= D'. \end{aligned}$$

Deoarece $b \neq 0$, sistemul are o soluție unică

$$A = \frac{A'}{b},\ B = \frac{B'}{b} - \frac{3aA'}{b^2},\ C = \frac{C'}{b} - \frac{6A'}{b^2} - \frac{2aB'}{b^2} + \frac{6a^2A'}{b^3} \text{ și}$$

$$D = \frac{D'}{b} - \frac{B'}{b^2}\left(2 - \frac{2a^2}{b}\right) - \frac{aC'}{b^2} + \frac{6aA'}{b^3}\left(2 - \frac{a^2}{b}\right).$$

c) Deoarece A, B, C, D se exprimă liniar în funcție de A', B', C', D', rezultă că funcția φ este aditivă. Surjectivitatea acestei funcții rezultă imediat pe baza relațiilor (1), iar injectivitatea se deduce pe baza ecuației diferențiale verificate de φ_p.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Pentru orice $x \in [0, 1]$ există inegalitățile $0 \leqslant \dfrac{x^{2n}}{1 + x} \leqslant x^{2n}$, deci $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x}\,dx \leqslant \int_1^0 x^{2n}\,dx = \frac{1}{2n + 1}$. b) 0.

2. Se integrează de la 0 la 1 în ambii membri ai identității și se obține $\ln 2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \quad - \dfrac{1}{2n} + \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x}\,dx$; apoi se ține seama de problema 1.

3. a) Pentru orice $x \in [a, \infty)$ obținem $(I(f))'(x) = e^x f(x)$. b) Deducem ecuația diferențială $kf'(x) = e^x f(x)$. Dacă $f(x) \neq 0$ rezultă $k \neq 0$ și $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{e^x}{k}$, deci $\ln |f(x)| = \dfrac{e^x}{k} + C$ deci $f(x) = \pm \exp\left(\dfrac{e^x}{k} + C\right)$. Înlocuind această valoare în ecuația inițială $I(f)(x) = kf(x)$ găsim $k \exp\left(\dfrac{e^a}{k} + C\right) = 0$, ceea ce este imposibil. Deci singura soluție este funcția $f(x) = 0$ pentru orice $x \in [a, \infty)$.

4. Prin împărțirea lui $p(x)$ la $1-x$ se obține $mx(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})-$ $-nx(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})$. Dacă $m=n$ atunci $p(x)=0$ și deci cîtul este nul. Dacă $n>m$ mai împărțim o dată la $1-x$ și obținem cîtul egal cu: $mx^{n-1}+2mx^{n-2}+$ $+3mx^{n-3}+\quad+(n-m-1)mx^{m+1}+(n-m)mx^m+(n-m)(m-1)x^{m-1}+$ $+(n-m)(m-2)x^{m-2}+\ldots+(n-m)x$ și restul egal cu zero.

5. a) Dacă ar exista un astfel de polinom de gradul întîi, ar rezulta imediat că ω ar fi număr rațional. Să presupunem că există un polinom cu coeficienți raționali de gradul 2, care are pe ω ca rădăcină și vom ajunge la o contradicție. Fie acest polinom ax^2+bx+c, deci $a\omega^2+b\omega+c=0$. Prin înmulțire în ambii membri cu ω se obține relația $2a+b\omega^2+c\omega=0$. Din prima ecuație obținem $\omega^2=\dfrac{-b\omega-c}{a}$. Introducînd în a doua relație se deduce $\omega(b^2-ac)=2a^2-bc$. Avem $a\neq 0$, $b^2\geqslant 4ac$ și $c\neq 0$, deoarece dacă $c=0$ ar rezulta că ω verifică o ecuație de gradul întîi cu coeficienți raționali. Dacă $ac>0$ atunci $b^2\geqslant 4ac>ac$, deci $b^2-ac\neq 0$. Dacă $ac<0$ avem $b^2-ac>0$, deci ω este rațional, contradicție. b) Rezultatul este o consecință imediată a punctului a.

6. a) $f(t)=\displaystyle\int_t^{2t}\frac{2\,d\theta}{\sqrt{16\theta^4+4\theta^2+1}}-\int_0^t\frac{d\theta}{\sqrt{\theta^4+\theta^2+1}}$, deci $f'(t)=$ $=\dfrac{2}{\sqrt{16t^4+4t^2+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. b) Inegalitățile se demonstrează prin ridicare la pătrat. c) Avem $\displaystyle\int_t^{2t}\frac{d\theta}{\theta^2+1}<\int_t^{2t}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta^4+\theta^2+1}}<\int_t^{2t}\frac{d\theta}{\theta^2}$, adică $\operatorname{arctg}2t-\operatorname{arctg}t<f(t)<\dfrac{1}{2t}$, pentru orice $t\in(0,\infty)$. d) Avem $\displaystyle\int\operatorname{arctg}t\,dt=$ $=t\operatorname{arctg}t-\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)+C$, deci $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(2t\operatorname{arctg}2t-\dfrac{1}{2}\ln(1+4t^2)\right)\Bigg|_0^x-$ $-\left(t\operatorname{arctg}t-\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)\Bigg|_0^x=x\operatorname{arctg}2x-\dfrac{1}{4}\ln(1+4x^2)-x\operatorname{arctg}x+$ $+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$, deci $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$. e) Avem $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{2t}=0$, deci folosind dubla inegalitate de la punctul c obținem limita egală cu zero.

7. Din relațiile lui Viète obținem: $x_1+x_2+x_3=m$; $2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=$ $=m^2-2m-1$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2m+1=2(x_1+x_2+x_3)+1$, sau $(x_1-1)^2+$ $+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2=4$. Deoarece $x_1=2$ deducem că $(x_2-1)^2+(x_3-1)^2=3$, deci $x_2,x_3\in[1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}]$. b) Dacă $x_1+x_2+x_3=2$, atunci $m=2$ și ecuația devine: $2x^3-4x^2-x+n=0$, iar $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$. Deoarece $x_3=2-$ $-x_1-x_2$ se obține $x_1^2+x_2^2+(2-x_1-x_2)^2=5$; $2x_1^2-2(2-x_2)x_1+2x_2^2-$ $-4x_2-1=0$. Discriminantul acestei ecuații este egal cu $(2-x_2)^2-4x_2^2+8x_2+2\geqslant 0$ sau $-3x_2^2+4x_2+6\geqslant 0$, ceea ce conduce la concluzia că $x_i\in\left[\dfrac{2-\sqrt{22}}{3},\ \dfrac{2+\sqrt{22}}{3}\right]$ pentru $i=1,2,3$.

8. a) Punem condițiile $x=x+ay$ și $y=bx+2y$. Dacă $a\neq 0$ și $b\neq 0$ numai originea axelor $O(0,0)$ coincide cu transformatul său. Dacă $a\neq 0$ și $b=0$, toate punctele dreptei $y=0$; dacă $a=0$ și $b\neq 0$ toate punctele dreptei $bx+y=0$; dacă $a=0$ și $b=0$ toate punctele dreptei $y=0$. b) Dacă $b\quad -2a$ obținem $x=\dfrac{1}{2(a^2+1)}(2x_{Tm}-ay_{Tm})$ și $y=\dfrac{y_{Tm}+2ax_{Tm}}{2(a^2+1)}$. Scriind că $x^2+y^2=1$ obținem ecuația locului geometric al punctelor T_m: $4x^2+y^2-4(a^2+1)=0$, care

este o elipsă. c) Considerăm punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $O(0, 0)$. Punînd condiția de conservare a distanței (transformarea să fie o izometrie) obținem condiția: $x_1^2 + y_1^2 = (1 + b^2)x_1^2 + (4 + a^2)y_1^2 + 2(a + 2b)x_1y_1$, $(\forall)x_1, y_1 \in \mathbf{R}$. Pentru $y_1 = 0$ găsim $b = 0$, dar pentru $x_1 = 0$ găsim $4 + a^2 = 1$, care nu are soluții reale. Deci nu există valori ale parametrilor a și b astfel încît transformarea dată să fie o izometrie.

Anul 1974

Etapa județeană

1. Avînd în vedere că produsul oricăror trei numere întregi consecutive se divide cu 6, rezultă că $\frac{x(x+1)(x+2)}{6} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$ este întreg pentru orice x întreg, deci putem considera

$$f = \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X.$$

2. a) Aplicînd teorema lui Lagrange pe fiecare interval $[0, x]$, $x > 0$, deducem că există $C_x \in (0, x)$ astfel încît $f(x) - f(0) = xf'(C_x)$. Dar $f(0) = 0$, deci

$$\frac{f(x)}{x} = f'(C_x), \quad (\forall)x \in (0, \infty) \tag{1}$$

Din condiția $f''(x) > 0$, $(\forall)x \in (0, \infty)$, rezultă că f' este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, deci, avînd în vedere că $0 < C_x < x$, deducem că

$$f'(0) < f'(C_x) < f'(x), \quad (\forall)x \in (0, \infty). \tag{2}$$

Ținînd acum seama de continuitatea lui f' în origine, rezultă că există $\lim\limits_{x\to 0} f'(C_x) = f'(0)$, adică (vezi (1)) există $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$. b) Din (1) și (2) rezultă $\frac{f(x)}{x} < f'(x)$, $(\forall)\, x \in (0, \infty)$, ceea ce trebuia demonstrat. c) Avem $F'(x) = \frac{f(x)}{x}$ și $F''(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$, $(\forall)x \in (0, \infty)$, conform inegalității de la punctul b, deci F este strict convexă.

3. Presupunem că nu există cel puțin 4 elevi care să-și serbeze ziua de naștere în aceeași zi. Cazul extrem în care nu se îndeplinește acest lucru este acela în care în fiecare zi a anului își serbează ziua exact 3 elevi. Ar fi în total $365 \cdot 3 = 1095$ elevi. Dar mai există unul care trebuie să se fi născut și el împreună cu un grup de 3 elevi. Deci probabilitatea este 1.

4. Avem

$$P_1 = C_{x+y}^x \left(\frac{a}{a+b}\right)^x \left(\frac{b}{a+b}\right)^y \text{ (Bernoulli) și } P_2 = \frac{C_a^x C_b^y}{C_{a+b}^{x+y}} \text{ (bila nerevenită).}$$

Dacă $a = b$ şi $x = y$, atunci

$$P_1 = C_{2x}^{x} \frac{1}{2^{2x}} \text{ şi } P_2 = \frac{(C_a^x)^2}{C_{2a}^{2x}}, \text{ deci}$$

$$P_1 \leqslant P_2 \Leftrightarrow \frac{(2x)!}{(x!)^2} \frac{1}{2^{2x}} \leqslant \frac{(a!)^2}{(x!)^2((a-x)!)^2} \frac{(2x)!(2a-2x)!}{(2a)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2a)!}{(a!)^2} \leqslant 2^{2x} \frac{(2a-2x)!}{((a-x)!)^2} \Leftrightarrow f(0) \leqslant f(x), \text{ unde } f(x) = 2^{2x} C_{2a-2x}^{a-x}.$$

$$\text{Dar } f(x) \leqslant f(x+1) \Leftrightarrow 2^{2x} \frac{(2a-2x)!}{((a-x)!)^2} \leqslant 2^{2x+2} \cdot \frac{(2a-2x-2)!}{((a-x-1)!)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2a-2x)(2a-2x-1)}{(a-x)^2} \leqslant 2^2 \Leftrightarrow \frac{2a-2x-1}{a-} \leqslant 2,$$

ceea ce este evident, deci $f(0) \leqslant f(1) \leqslant \quad \leqslant f(x)$, de unde $P_1 \leqslant P_2$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 0$.

5. a) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 5x^3 + 5x - 2m$. Avem $f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 5$, deci ecuaţia $f'(x) = 0$ nu are rădăcini reale. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, din şirul lui Rolle deducem că ecuaţia $f(x) = 0$ are o singură rădăcină reală, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$. b) Fie $x = u + v$, cu $u, v \in \mathbf{R}$, $uv = -1$. Atunci

$$(u+v)^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u^3+v^3) + 10u^2v^2(u+v) =$$
$$= u^5 + v^5 - 5(u^3+v^3) + 10(u+v),$$
$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = u^3 + v^3 - 3(u+v).$$

Înlocuind în ecuaţia dată, obţinem

$$u^5 + v^5 - 5(u^3+v^3) + 10(u+v) + 5(u^3+v^3) - 15(u+v) + 5(u+v) - 2m = 0,$$

de unde rezultă sistemul $u^5 + v^5 = 2m$, $uv = -1$, care trebuie rezolvat în mulţimea numerelor reale. Avem

$$v = -\frac{1}{u}, \; u^5 - \frac{1}{u^5} = 2m, \; u^{10} - 2mu^5 - 1 = 0, \; u^5 = m \pm \sqrt{m^2+1},$$

$$u = \sqrt[5]{m \pm \sqrt{m^2+1}}, \; v = -\frac{1}{\sqrt[5]{m \pm \sqrt{m^2+1}}} = -\frac{\sqrt[5]{m \mp \sqrt{m^2+1}}}{\sqrt[5]{m^2 - m^2 - 1}} =$$

$$= \sqrt[5]{m \mp \sqrt{m^2+1}}, \text{ deci } x = \sqrt[5]{m + \sqrt{m^2+1}} + \sqrt[5]{m - \sqrt{m^2+1}}.$$

LICEE DE SPECIALITATE

1. Deoarece produsul a trei numere naturale consecutive este întotdeauna multiplu de 6, un polinom de gradul trei care verifică condiţia din enunţ este

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{6} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}.$$

2. a) Expresia dată este $\int_a^b (tg(x) + f(x))^2 dx \geqslant 0$ $(\forall)$ $t \in \mathbf{R}$. b) Trinomul în t avînd semn constant, discriminantul său $\Delta \leqslant 0$, de unde rezultă inegalitatea din enunț, care se mai numește inegalitatea lui Schwarz-Buniakovski. c) Se alege $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 1$, $a = n + 1$, $b = 2n$ și se aplică inegalitatea de la b.

3. Volumul este egal cu $\pi x^2(x + y)$, iar aria totală este egală cu $2\pi xy + \pi x^2(2 + \sqrt{2})$. b) Trebuie să minimizăm funcția aria totală în condițiile în care $\pi x^2(x + y) = 1$. Substituind valoarea $y = \frac{1}{\pi x^2} - x$ în expresia ariei totale a corpului, găsim funcția $S(x) = \frac{2}{x} + \sqrt{2}\pi x^2 \cdot$ $S'(x) = 2\left(-\frac{1}{x^2} + \sqrt{2}\pi x\right) \cdot S'(x) = 0$ pentru $x = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi\sqrt{2}}} \cong 0{,}60829$ m și se verifică imediat studiind semnul derivatei $S'(x)$ că această valoare a lui x corespunde unui punct de minim al funcției $S(x)$. Se deduce valoarea lui y corespunzătoare minimului ariei totale, egală cu $\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\pi\sqrt{2}}} \cong 0{,}25196$ m.

4. Deoarece pentru orice $x \in (0, 1]$ avem $\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{arctg}\, x > 0$ rezultă că $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{arctg}\, x\, dx > 0$. De asemenea $\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{arctg}\, x < \mathrm{arctg}\, x$ pentru orice $x \in (0,1]$, deci $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{arctg}\, x\, dx < \int_0^1 \mathrm{arctg}\, x\, dx = \left[x\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\right]\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Etapa finală

1. a) Dacă $f''(x) \geqslant 0$, $(\forall) x \in (a,b)$ rezultă că f' este crescătoare pe (a, b). Condiția

$$f(ta + (1 - t)b) \leqslant tf(a) + (1 - t)f(b)$$

se verifică cu ușurință pentru $t \in \{0, 1\}$. Fie $t \in (0,1)$ și $x_0 = ta + (1 - t)b$; evident $a < x_0 < b$. Aplicînd teorema lui Lagrange, rezultă că există $c_1 \in (a, x_0)$ și $c_2 \in (x_0, b)$ astfel încît

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = f'(c_1) \text{ și } \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = f'(c_2).$$

Funcția f' este crescătoare și $c_1 < c_2$, deci $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, de unde

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}.$$

Înlocuind la numitori pe x_0 cu $ta + (1 - t)b$ și efectuînd calculele obținem

$$f(x_0) \leqslant tf(a) + (1 - t)f(b), \ (\forall)\, t \in (0; 1). \text{ Așadar,}$$

$$f(ta + (1 - t)b) \leqslant tf(a) + (1 - t)f(b), \ (\forall)\, t \in [0, 1],$$

deci f este convexă pe (a, b). Presupunem acum că f este convexă și considerăm $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Fie $x \in (x_1, x_2)$; evident, există $t \in (0, 1)$ astfel încît $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Din condiția de convexitate rezultă că

$$f(x) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \tag{1}$$

Avem

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{(t-1)f(x_1)+(t-1)f(x_2)}{tx_1+(1-t)x_2-x_1} =$$

$$= \frac{(t-1)(f(x_1)-f(x_2))}{(t-1)(x_1-x_2)} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$

Trecînd la limită, cu $x \to x_1$, obținem

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}. \tag{2}$$

Tot din condiția de convexitate (1) rezultă că

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \geqslant \frac{f(x_2)-tf(x_1)-(1-t)f(x_2)}{x_2-x} = \frac{-tf(x_1)+tf(x_2)}{x_2-tx_1-(1-t)x_2} =$$

$$= \frac{-t(f(x_1)-f(x_2))}{-t(x_1-x_2)} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2},$$

de unde, prin trecere la limită cu $x \to x_2$, obținem

$$f'(x_2) \geqslant \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}. \tag{3}$$

Din inegalitățile (2) și (3) rezultă că $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, adică f' este crescătoare pe (a, b) pentru că alegerea lui x_1 și x_2 este arbitrară. Prin urmare, $f''(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$, ceea ce trebuia demonstrat. b) Presupunem că f nu este constantă pe $\mathbf{R}$, deci că există un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ în care tangenta la grafic nu este paralelă cu axa Ox. Atunci această tangentă, care are ecuația $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, întîlnește axa Ox într-un punct de abscisă x_1, deci

$$0 = y(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Pentru a face o alegere, să presupunem că $x_1 > x_0$. Atunci, aplicînd teorema lui Lagrange, avem:

$$f(x_1) = f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = (x_1 - x_0)f'(c) - f'(x_0)(x_1 - x_0) =$$

$$= (x_1 - x_0)(f'(c) - f'(x_0)) = (x_1 - x_0)(c - x_0)f''(c'),$$

unde $c \in (x_0, x_1)$ și $c' \in (x_0, c)$. Cum $x_1 - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$ și $f''(c') \leqslant 0$, rezultă că $f(x_1) \leqslant 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că f este constantă pe $\mathbf{R}$. c) Concluzia de la punctul b nu rămîne adevărată pe $(0, \infty)$, deoarece s-ar putea ca tangenta la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$ să intersecteze axa Ox într-un punct care nu este situat în intervalul $(0, \infty)$. Contraexemplu: $f:(0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x$.

2. a) Ținînd seama de inegalitățile $x_1 < x_1 + x_2$, $x_2 < x_1 + x_2$ și de faptul că g este descrescătoare, deducem că

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \geqslant \frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \quad \text{și} \quad \frac{f(x_2)}{x_2} \geqslant \frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}.$$

adică

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1) \text{ și } \frac{x_2}{x_1+x_2}f(x_1+x_2) \leqslant f(x_2),$$

de unde, prin adunare membru cu membru, obținem

$$f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1)+f(x_2), \ (\forall)x_1, x_2 \in (0, \infty).$$

b) Din inegalitatea (1) rezultă că $f(2x) \leqslant 2f(x)$, $(\forall)\, x \in (0, \infty)$, de unde $\frac{f(2x)}{2x} \leqslant \frac{f(x)}{x}$, adică $g(2x) \leqslant g(x)$. Vom arăta că $g(y) \leqslant g(x)$, $(\forall)\ y \in [x, 2x]$. Pentru $y = x$ sau $y = 2x$ acest lucru este evident. Fie $y \in (x, 2x)$; există atunci $t \in (0, 1)$ astfel încît $y = tx + (1-t)2x$. Avem

$$g(y) = \frac{f(tx+(1-t)2x)}{tx+(1-t)2x} \leqslant \frac{tf(x)+(1-t)f(2x)}{tx+(1-t)2x} \leqslant \frac{tf(x)+(1-t)2f(x)}{tx+(1-t)2x} =$$

$$= \frac{(2-t)f(x)}{(2-t)x} = g(x).$$

Fie acum x și y arbitrari, $x<y$; există, evident, $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $y \in [2^n x, 2^{n+1}x]$, deci $g(y) \leqslant g(2^n x) \leqslant g(2^{n-1}x) \ldots \leqslant g(x)$. Rezultă că g este descrescătoare.

3. a) Avem

$$[g(x-u)+g(u)]^2 \geqslant 4g(x-u)g(u) \overset{\text{(ip.)}}{\geqslant} 4g(x-u+u) = 4g(x), \ (\forall)\, u \in (0, x);$$

b) Ținînd seama de punctul a, rezultă

$$(1) \qquad \sqrt{g(x)} \leqslant \frac{g(x-u)+g(u)}{2}, \ (\forall)\, u \in (0, x).$$

Dar $\int_0^x \frac{g(x-u)+g(u)}{2}\, du = \int_0^x g(u)\, du \leqslant M$. Notînd

$$m_x = \inf_{u \in (0, x)} \frac{g(x-u)+g(u)}{2},$$

deducem că $\int_0^x m_x\, du \leqslant M$, de unde $x \cdot m_x \leqslant M$ și, deci,

$$(2) \qquad m_x \leqslant \frac{M}{x}, \ (\forall)\, x \in (0, \infty).$$

Din inegalitatea (1) și definiția infimumului, rezultă

$$(3) \qquad \sqrt{g(x)} \leqslant m_x, \ (\forall)\, x \in (0, \infty),$$

iar din (2) și (3)

$$\sqrt{g(x)} \leqslant \frac{M}{x}, \ (\forall)\, x \in (0, \infty).$$

4. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului f. Ținînd seama că rădăcinile lui f au același modul și că $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, deducem

$$(1) \qquad |x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| = 1.$$

Avem

$$f = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n),$$

$$f(-1) = (-1 - x_1)(-1 - x_2) \dots (-1 - x_n) = (-1)^n (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \text{ și}$$

$$\overline{f(-1)} = (-1)^n \overline{1 + x_1} \cdot \overline{1 + x_2} \cdot \dots \cdot \overline{1 + x_n} = (-1)^n (1 + \bar{x}_1)(1 + \bar{x}_2) \dots (1 + \bar{x}_n) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) = (-1)^n \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1)}{x_1 x_2 \dots x_n} =$$

$$= (-1)^n (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n).$$

Rezultă că $\overline{f(-1)} = f(-1)$, deci $f(-1) \in \mathbf{R}$.

5. Avînd în vedere că

(1) $$A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset, \quad 1 \leqslant i < j < k \leqslant n,$$

rezultă

(2) $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j).$$

Avem

$$A_i = (A_i \cap A_1) \cup (A_i \cap A_2) \cup \dots \cup (A_i \cap A_{i-1}) \cup$$
$$\cup (A_i \cap A_{i+1}) \cup \dots \cup (A_i \cap A_n), \quad i = 1, 2, \dots n,$$

de unde

$$P(A_i) = P\left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (A_i \cap A_j)\right) \overset{(1)}{=} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P(A_i \cap A_j),$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j).$$

Ținînd seama de relațiile (2) și (3), deducem că

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

LICEE DE SPECIALITATE

1. a) Graficul este compus din trei segmente de dreaptă și are extremitățile în punctele $A(0, 2)$ și $B(4, 0)$. b) $\int_0^x 2\, dt = 2x$; $\int_1^x 2t\, dt = x^2 - 1$;

$$\int_2^x (-2t + 8)\, dt = -x^2 + 8x - 12, \text{ deci}$$

$$F(x) = \begin{cases} 2x \text{ pentru } 0 < x \leqslant 1, \\ x^2 + 1 \text{ pentru } 1 < x \leqslant 2, \\ -x^2 + 8x - 7 \text{ pentru } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

c) $x_G = \left[\int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 2x^2\,dx + \int_2^4 (-2x^2+8x)\,dx\right] \Big/ \left[\int_0^1 2\,dx + \int_1^2 2x\,dx + \int_2^4 (-2x+8)\,dx\right] = \frac{49}{27}$; $y_G = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 4\,dx + \int_1^2 4x^2\,dx + \int_2^4 (-2x+8)^2\,dx\right] \Big/ \left[\int_0^1 2\,dx + \int_1^2 2x\,dx + \int_2^4 (-2x+8)\,dx\right] = \frac{4}{3}$.

Anul 1975

Etapa județeană

1. a) Funcțiile f, g fiind continue admit primitive. Fie F, G primitive ale funcțiilor f, g. Relația dată se scrie astfel:

$$F(x) - F(a) + G(b) - G(x) = k, \quad (\forall)x \in \mathbf{Q}.$$

Fie $x_0 \in \mathbf{R}$; atunci există un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere raționale convergent către x_0. Avem prin urmare

$$F(x_n) - F(a) + G(b) - G(x_n) = k, \quad (\forall)n \geq 1$$

și deci, trecînd la limită, deducem $F(x_0) - F(a) + G(b) - G(x_0) = k$, și prin urmare $(\forall)x \in \mathbf{R}$ avem

$$\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b g(t)\,dt = k; \tag{1}$$

b) Derivînd relația (1) obținem $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, $(\forall)\,x \in \mathbf{R}$.

2. Presupunem $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ unde $A, B \in \mathbf{R}[X]$, cu grad $A = m$, grad $B = k$. Din $\lim\limits_{n\to\infty} F(n) = e$, rezultă că grad A = grad B, adică $m = k$. Fie $Q(x) = A(x+1)B(x) - A(x)B(x+1)$. Avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Q(x+1)}{Q(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{Q(n+1)}{Q(n)} = 1. \tag{1}$$

Ținînd seama că $A(n+1) = F(n+1)B(n+1)$ și $A(n) = F(n)B(n)$, deducem că $Q(n) = A(n+1)B(n) - B(n+1)A(n) = F(n+1)B(n+1)B(n) - F(n)B(n)B(n+1) =$

$$= B(n+1)B(n)(F(n+1) - F(n)) = \frac{B(n+1)B(n)}{(n+1)!}.$$

În mod asemănător găsim că $Q(n+1) = \frac{B(n+2)B(n+1)}{(n+2)!}$. Rezultă că $\frac{Q(n+1)}{Q(n)} = \frac{B(n+2)}{B(n)}\,\frac{1}{n+2}$. Trecînd la limită în această relație, obținem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q(n+1)}{Q(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{B(n+2)}{B(n)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă o contradicție, deci $F(x)$ nu poate fi o funcție rațională.

3. a) Să notăm cu A evenimentul ca din n numere să se obţină un număr care este multiplu de 9 micşorat cu 2. În acest caz

$$P(A) = \left[\frac{n+2}{9}\right] \cdot \frac{1}{n}.$$

Să notăm cu B evenimentul ca din n numere să se obţină un număr care este cub perfect. În acest caz probabilitatea este

$$P(B) = \frac{[\sqrt[3]{n}]}{n}.$$

Ţinînd seama că nici un cub perfect nu poate fi multiplu de 9 micşorat cu 2 rezultă că

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \left[\frac{n+2}{9}\right] \frac{1}{n} + \frac{[\sqrt[3]{n}]}{n}.$$

b) Să notăm cu A evenimentul ca din n numere să se obţină un număr care este un multiplu de 9 micşorat cu 1. În acest caz

$$P(A) = \left[\frac{n+1}{9}\right] \cdot \frac{1}{n}.$$

Să notăm cu B evenimentul ca din n numere să se obţină un număr care este un cub perfect. În acest caz

$$P(B) = \frac{[\sqrt[3]{n}]}{n}.$$

Ţinem cont că există numere care sînt cuburi perfecte şi în acelaşi timp sînt multipli de 9 minus 1; un cub perfect de forma $M9-1$ trebuie să fie de forma $(3k-1)^3$, unde $k \in \mathbf{N}$. În acest caz $P(A \cap B) = \left[\frac{\sqrt[3]{n}+1}{3}\right] \frac{1}{n}$ şi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \left[\frac{n+1}{9}\right] \cdot \frac{1}{n} + \frac{[\sqrt[3]{n}]}{n} - \left[\frac{\sqrt[3]{n}+1}{3}\right] \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n+1}{9}\right] + [\sqrt[3]{n}] - \left[\frac{\sqrt[3]{n}+1}{3}\right]\right).$$

4. Să se determine toate polinoamele, diferite de polinomul nul, care satisfac relaţia

$$(1) \qquad (1+ax)P(ax) = (1+a^{n+1}x)P(x), \; a \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1, 1\}.$$

Notăm $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$. Putem scrie că $\frac{1+a^{n+1}x}{1+ax} = \frac{P(ax)}{P(x)}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+a^{n+1}x}{1+ax} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(ax)}{P(x)}$, de unde rezultă că $\frac{a^{n+1}}{a} = \frac{a^k a_0}{a_0}$ şi deci $a^n = a^k$, deci $k = n$, adică polinomul P este de gradul n. Dacă în relaţia (1) facem $x = -\frac{1}{a}$, găsim $P\left(-\frac{1}{a}\right) = 0$, deci $x_1 = -\frac{1}{a}$ este rădăcină a polinomului P.

Să facem $x = -\frac{1}{a^2}$ în relația (1) și obținem $1 - \frac{1}{a} P\left(-\frac{1}{a}\right) = (1 - a^{n-1}) P\left(-\frac{1}{a^2}\right)$ și de aici rezultă $P\left(-\frac{1}{a^2}\right) = 0$, deci $x_2 = -\frac{1}{a^2}$ este rădăcină a polinomului P.

Să considerăm acum $x_k = -\frac{1}{a^k}$ drept rădăcină a polinomului P și să facem $x = -\frac{1}{a^{k+1}}$ în relația (1). Obținem $1 - \frac{1}{a^k} P\left(-\frac{1}{a^k}\right) = (1 - a^{n-k}) P\left(-\frac{1}{a^{k+1}}\right)$; de aici rezultă că $P\left(-\frac{1}{a^{k+1}}\right) = 0$ și deci $x_{k+1} = -\frac{1}{a^{k+1}}$ este o rădăcină a polinomului P. Deoarece P este de gradul n, rezultă că rădăcinile sale sînt $x_1 = -\frac{1}{a}$, $x_2 = -\frac{1}{a^2}$, ..., $x_n = -\frac{1}{a^n}$. Deci polinoamele căutate sînt $P(x) = k_0 \prod_{k=1}^{n} (1 + a^k x)$, unde $k_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

5. Avem $P(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$, $Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i')$ și deci

$$P(x_i') = \prod_{j=1}^{n} (x_i' - x_j) \text{ pentru } i \in \{1, 2, ..., n+1\},$$

$$Q(x_j) = \prod_{i=1}^{n+1} (x_j - x_i') \text{ pentru } j \in \{1, 2, ..., n\}. \text{ Rezultă că}$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} P(x_i') = \prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n} (x_i' - x_j) \text{ și } \prod_{j=1}^{n} Q(x_j) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n+1} (x_j - x_i').$$

Deoarece numărul factorilor $x_i' - x_j$, pentru $i \in \{1, 2, ..., n+1\}$ și $j \in \{1, 2, ..., n\}$ este număr par, rezultă

$$\prod_{i=1}^{n+1} P(x_i') = \prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n} (x_i' - x_j) = (-1)^{n(n+1)} \prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{n} (x_j - x_i') = \prod_{j=1}^{n} Q(x_j).$$

Etapa finală

1. Fie z o rădăcină de modul r a lui $P(x)$, adică $P(z) = 0$ și $|z| = r$. Atunci $z^n = -(a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n)$ și rezultă $|z^n| = |a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n| \leqslant |a_1| |z^{n-1}| + ... + |a_{n-1}| |z| + |a_n| \leqslant |z^{n-1}| + ... + |z| + 1$, deoarece $|a_i| \leqslant 1$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Deci $r^n \leqslant r^{n-1} + ... + r + 1$. Dacă $r \leqslant 1$, inegalitatea este evidentă. Să presupunem $r > 1 \Rightarrow r^n(r - 1) \leqslant (r^{n-1} + ... + r + 1)(r - 1)$, deci $r^{n+1} - 2r^n + 1 \leqslant 0$ sau $r - 2 \leqslant -\frac{1}{r^n} < 0$, deci $r < 2$.

2. Fie Δ o diviziune a intervalului $[0, 1]$, $\Delta = (0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1)$ și fie $\eta = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)$ norma diviziunii. Fie S_Δ o sumă integrală Riemann

$$S_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \text{ unde } \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Un punct al intervalului $[0, 1]$ nu poate fi luat decît cel mult de două ori ca punct intermediar pentru o aceeaşi diviziune Δ, şi anume el poate fi luat de două ori doar cînd este punct de diviziune. Atunci avem, ţinînd seama de definiţia funcţiei f,

$$0 \leqslant S_\Delta \leqslant \eta \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \leqslant 2\eta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n/2}}\right) < 2\eta$$

căci majorăm cu valorile maxime pe care le poate lua f în punctele intermediare ξ_i. Atunci, pentru $\eta \to 0$, avem $S_\Delta \to 0$, deci funcţia f este integrabilă pe $[0, 1]$ şi $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

3. Fie $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Funcţia $g_i(x) = P(x)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |x - j|$ este derivabilă în i. Atunci trebuie să fie derivabilă în i şi funcţia $f(x) - g_i(x) = |x - i|\, P(x)$ căci f este prin ipoteză derivabilă pe $\mathbf{R}$. Dar

$$\lim_{\substack{x\to i\\ x>i}} \frac{|x - i|\, P(x)}{x - i} = P(i) \text{ şi } \lim_{\substack{x\to i\\ x<i}} \frac{|x - i|\, P(x)}{x - i} = -P(i).$$

Limitele de mai sus sînt chiar derivatele laterale în $x = i$ ale funcţiei $h_i(x) = |x - i|\, P(x)$, şi pentru ca această funcţie să fie derivabilă în i, trebuie ca ele să fie egale, deci $P(i) = -P(i)$, adică $P(i) = 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; b) Pentru n par, se verifică cu uşurinţă că dreapta $x = \frac{n+1}{2}$ este o axă de simetrie a graficului lui f, iar dacă n este impar, se verifică la fel de uşor că punctul $\left(\frac{n+1}{2}, 0\right)$ este centru de simetrie al graficului lui f. Funcţia f avînd expresia $f(x) = k\prod_{i=1}^{n}(x - i)\cdot\sum_{i=1}^{n}|x - i|$ este suficient să se compare valorile $f\left(\frac{n+1}{2} + a\right)$ şi $f\left(\frac{n+1}{2} - a\right)$.

4. Să notăm $q_i = 1 - p_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi să considerăm polinomul

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(p_i x + q_i) = Q_0 + Q_1 x + \ldots + Q_n x^n.$$

Se ştie că probabilitatea de a se realiza k dintre evenimentele independente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul $Q(x)$, deci cu Q_k. Probabilitatea p de a se realiza un număr impar de evenimente este atunci egală cu $Q_1 + Q_3 +$ Dar $Q(1) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$ şi $Q(-1) = Q_0 - Q_1 + Q_2 + \ldots + (-1)^n Q_n$ şi deci $p = Q_1 + Q_3 + \quad = \frac{Q(1) - Q(-1)}{2} = -\frac{1}{2}\left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - 2p_i)\right)$.

5. a) Vom demonstra că dacă există $x_0 \in I$ aşa încît $f(x_0) \neq 0$, atunci f nu se anulează în nici un punct din intervalul I; de aici rezultă imediat că dacă f se anulează într-un punct, este funcţia nulă. Fie deci $x_0 \in I$ cu $f(x_0) \neq 0$. Funcţia fiind derivabilă, este şi continuă, deci va exista o vecinătate a lui x_0 în care f nu se anulează. Fie (α, β) cel mai mare interval care conţine pe x_0 şi în care f nu se anulează. Atunci putem scrie

$$\alpha = \inf\{x \in I \mid x < x_0, f(y) \neq 0, (\forall)\, y \in (x, x_0)\},$$
$$\beta = \sup\{x \in I \mid x > x_0, f(y) \neq 0, (\forall)\, y \in (x_0, x)\}.$$

Dacă α, β sînt capetele intervalului I, demonstrația este terminată. Să presupunem că β nu este capătul din dreapta al lui I, deci β este conținut strict în I. Să considerăm intervalul $[x_0, x]$, cu $x_0 < x < \beta$. Pe acest interval f nu se anulează, deci relația din enunț se poate scrie

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = g(t), \text{ de unde } \int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt, \text{ sau}$$

$$\ln\left|\frac{f(x)}{f(x_0)}\right| = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt, \text{ sau } f(x) = f(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(t)\, dt}.$$

Atunci

$$f(\beta) = \lim_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} f(x_0)^{\int_{x_0}^{x} g(t)\, dt} = f(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{\beta} g(t)\, dt} \neq 0,$$

deoarece $f(x_0) \neq 0$, iar funcția exponențială nu se anulează. Funcția f fiind continuă, rezultă că există $\beta' > \beta$ așa încît f să nu se anuleze pe intervalul $[\beta, \beta']$, ceea ce contrazice însă maximalitatea intervalului (α, β) pe care f nu se anulează. Deci β trebuie să fie capăt al lui I. Analog se demonstrează că α trebuie să fie capăt al lui I și afirmația noastră este complet demonstrată. b) Fie, în condițiile punctului a, funcțiile f_1, f_2 care să satisfacă condițiile $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$, cu $x_0 \in I$, $y_0 \in I$. Atunci pentru funcția $f = f_1 - f_2$, avem $f(x_0) = 0$, iar din $f_1'(x) = f_1(x)g(x)$ și $f_2'(x) = f_2(x)g(x)$ rezultă $(f_1 - f_2)'(x) = (f_1(x) - f_2(x))g(x)$, adică $f'(x) = f(x)g(x)$, adică funcția f satisface condițiile de la punctul a și $f(x_0) = 0$, deci conform punctului a, f este funcția nulă, deci $f_1 = f_2$ și astfel am demonstrat unicitatea; cît privește existența unei astfel de funcții, soluția punctului a ne arată că ea este dată de expresia

$$f(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} g(t)\, dt}, \; x > x_0 \text{ și } f(x) = y_0\, e^{\int_{x}^{x_0} g(t)\, dt}, \; x < x_0.$$

LICEE INDUSTRIALE

1. Facem schimbarea de variabilă $x = \operatorname{tg} t$ și obținem

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\, e^t\, dt. \text{ Să notăm } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^t}{\cos^3 t}\, dt \text{ și}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^t}{\cos t}\, dt. \text{ Obținem } I = I_1 - I_2. \text{ Mai avem, } I = -I_1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 t}{\cos^3 t}\, e^t\, dt =$$

$$= -I_1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t\, d\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right) = -I_1 + \frac{e^t \sin t}{\cos^2 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, e^t\, dt = -I_1 +$$

$$+ \frac{e^t \sin t}{\cos^2 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t\, d\left(\frac{1}{\cos t}\right) = -I_1 + e^t \frac{\sin t - \cos t}{\cos^2 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + I_2 = -I_1 + I_2 + 1.$$

(S-a aplicat de două ori formula de integrare prin părți.) Deci $I = I_1 - I_2$; $I = -I_1 + I_2 + 1$, deci $I = \frac{1}{2}$.

2. Fie $f: [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$. Funcția f este continuă și $(\forall)\, x > 1$ avem $f(x) < 0$. Putem scrie $\dfrac{1-t}{(t+1)^3} = \dfrac{2}{(t+1)^3} - \dfrac{1}{(t+1)^2}$, deci

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1-t}{(t+1)^3}\,dt = \int_0^x \frac{2\,dt}{(t+1)^3} - \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{(t+1)^2}\Big|_0^x + \frac{1}{t+1}\Big|_0^x =$$

$$= \frac{x}{(x+1)^2} > 0 \quad (\forall)\, x \in (0, \infty).$$

Anul 1976

Etapa județeană

1. Putem scrie

$$\frac{f(x)}{P(n)+1} \leqslant \frac{f(x)}{P(n)+x} \leqslant \frac{f(x)}{P(n)} \text{ și } \frac{g(x)}{Q(n)+1} \leqslant \frac{g(x)}{Q(n)+x} \leqslant \frac{g(x)}{Q(n)}, \quad (\forall)\, x \in [0, 1]$$

și deci

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{P(n)+1}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{f(x)}{P(n)+x}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{f(x)}{P(n)}\,dx \text{ și}$$

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{Q(n)+1}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{g(x)}{Q(n)+x}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{g(x)}{Q(n)}\,dx.$$

Ținînd cont de ipoteza problemei rezultă că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{P(n)+1}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{g(x)}{Q(n)}\,dx$, de unde rezultă că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{P(n)+1}{Q(n)} \int_0^1 g(x)\,dx$. Trecînd la limită, rezultă $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{P(n)+1}{Q(n)} \int_0^1 g(x)\,dx = 0$, de unde rezultă că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 0$. Deoarece $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in [0, 1]$ rezultă, ținînd cont de faptul că funcția este continuă, că $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [0, 1]$.

2. Fie $R(x) = ax + b$ polinomul de gradul 1 căutat. Atunci $(x^2 + 3x + 1)(ax + b) = (x^3 - 2)q + 1$. Identificînd coeficienții, găsim $1 = q$; $3a + b = 0$; $a + 3b = 0$ și $b = -2q + 1$, sistem care nu admite soluții. Fie $R(x) = ax^2 + bx + c$ un polinom de gradul 2. Atunci

$$(1) \qquad (x^2 + 3x + 1)(ax^2 + bx + c) = (x^3 - 2)(px + q) + 1.$$

Identificînd coeficienții, obținem

$$a = p;\ 3a + b = q;\ a + 3b + c = 0;\ b + 3c = -2p;\ c = -2q + 1.$$

Acest sistem admite soluția $a = \dfrac{8}{41}$, $b = -\dfrac{1}{41}$, $c = -\dfrac{5}{41}$, $p = \dfrac{8}{41}$, $q = \dfrac{23}{41}$. Rezultă deci că $R(x) = \dfrac{8x^2 - x - 5}{41}$. Dacă în (1) facem $x = \sqrt[3]{2}$, obținem

$$(\sqrt[3]{2^2} + 3\sqrt[3]{2} + 1)\,\frac{8\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} - 5}{41} = 1,$$

de unde rezultă că

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+3\sqrt[3]{2}+1}=\frac{8\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}-5}{41}.$$

3. Să notăm cu A evenimentul ca primul trăgător să nimerească ținta, cu B evenimentul ca al doilea trăgător să nimerească ținta și cu C evenimentul ca al treilea trăgător să nimerească ținta. a) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+$ $+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)=P(A)+P(B)+$ $+P(C)-P(A)P(B)-P(B)P(C)-P(C)P(A)+P(A)P(B)P(C)=\frac{11}{20}$;

b) $P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)=\frac{1}{3}$.

4. a) Rezultatul se obține imediat folosind șirul lui Rolle. b) Deoarece $x_1=x_2\Rightarrow t(x_1)=t(x_2)$ rezultă că corespondența $x\to t(x)$ este o funcție de argument x. Fie $x(t)=-t^3-3t$ care este o funcție bijectivă, derivabilă pe $\mathbf{R}$ și verificînd $x'(t)\neq 0$, $(\forall)\ t\in\mathbf{R}$. Atunci există inversa lui $x(t)$ care va fi derivabilă pe $\mathbf{R}$. Avem $t'(4)=\frac{1}{x'(t(4))}$ și, cum din ecuația $t^3+3t+4=0$ rezultă $t(4)=-1$, se obține $t'(4)=-\frac{1}{6}$. c) Graficul lui $t(x)$ va fi simetric cu graficul funcției $x(t)$ față de bisectoarea întîi.

5. Fie $P(x)=ax^2+bx+c$. Notăm $g(n)=1-\int_0^1 x^nP(x)\mathrm{d}x$, $(\forall)n\in\mathbf{N}$. Deoarece $g(1)=g(2)=g(3)=0$, din ipoteză vom avea $g(n)=(n-1)(n-2)(n-$ $-3)T(n)$. Dar, pe de altă parte, $g(n)=1-\left(\frac{a}{n+3}+\frac{b}{n+2}+\frac{c}{n+1}\right)=$ $=\frac{P(n)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, unde $P(n)$ este un polinom în n de gradul 3 cu coeficientul termenului de grad maxim 1. Rezultă din identificarea termenilor de grad maxim

$T(n)=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. Deci $1-\int_0^1 x^nP(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

și de aici rezultă relația cerută de enunț.

Etapa finală

1. Din faptul că $H(x)$ este derivabilă rezultă

$$H'(x)=\frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}=\frac{f(x)\int_0^x f(t)(g(x)-g(t))\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}.$$

Ținînd seama că f este strict pozitivă rezultă că $f(x)>0$, $(\forall)\ x>0$ și deoarece g este strict crescătoare rezultă că $g(x)-g(t)\geqslant 0$, $(\forall)\ x>t$. Deci $f(t)(g(x)-g(t))\geqslant 0$

şi rezultă că $\int_0^x f(t)(g(x)-g(t))\,dt \geqslant 0$. În final deducem că $H'(x) \geqslant 0$ şi deci H este crescătoare.

2. a) Prin schimbarea de variabilă $x = \varphi(t) = (2n+1)\pi - t$ obţinem

$$I_n = -\int_{(2n+1)\pi}^{0} f(\cos(2n\pi+\pi-t))\,dt = \int_0^{(2n+1)\pi} f(-\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{(2n+1)\pi} (\pi - f(\cos t))\,dt = \int_0^{(2n+1)\pi} \pi dt - \int_0^{(2n+1)\pi} f(\cos t)\,dt = (2n+1)\pi^2 -$$

$$- \int_0^{(2n+1)\pi} f(\cos t)\,dt = (2n+1)\pi^2 - I_n.$$

Rezultă în final că $I_n = \frac{(2n+1)\pi^2}{2}$. b) Se verifică uşor că $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$. Notăm cu $g(x) = \arccos x + \arccos(-x)$. Deoarece pentru $x \in (-1, 1)$, $g'(x) = 0$, rezultă $g(x) = \text{const}$. Pentru $x = 0$, se găseşte că $g(x) = \pi$. Pentru $x = 1$ şi $x = -1$ găsim că $g(1) = g(-1) = \pi$, de unde rezultă că funcţia $f(x) = \arccos x$ verifică condiţiile problemei.

3. Fie x_i o rădăcină a ecuaţiei; atunci

$$|x_i^{n+1}| = |a_1x_i^{n-1} + a_2x_i^{n-2} + \dots + a_{n-1}x_i + a_n| \leqslant$$

$$\leqslant |a_1x_i^{n-1}| + |a_2x_i^{n-2}| + \dots + |a_{n-1}x_i| + |a_n| =$$

$$= |a_1||x_i^{n-1}| + |a_2||x_i^{n-2}| + \dots + |a_{n-1}||x_i| + |a_n| \leqslant$$

$$\leqslant r(|x_i|^{n-1} + |x_i|^{n-2} + \dots + |x_i| + 1). \text{ Deci}$$

$$(1) \qquad |x_i|^{n+1} \leqslant r(|x_i|^{n-1} + |x_i|^{n-2} + \dots + |x_i| + 1).$$

Dacă $|x_i| \leqslant 1$, atunci, evident, $|x_i|(|x_i|-1) \leqslant 0$ şi deci $|x_i|(|x_i|-1) \leqslant r$. Dacă $|x_i| > 1$, atunci înmulţind relaţia (1) cu $|x_i|-1$ obţinem $|x_i|^{n+1}(|x_i|-1) \leqslant r(|x_i|^n - 1)$ sau $|x_i|^{n+2} \leqslant |x_i|^{n+1} + r(|x_i|^n - 1)$ şi deci $|x_i|^{n+2} \leqslant |x_i|^{n+1} + r|x_i|^n$. Împărţim ultima relaţie cu $|x_i|^n$ şi obţinem $|x_i|^2 \leqslant |x_i| + r$ şi deci $|x_i|(|x_i|-1) \leqslant r$.

4. Relaţia $f^2 + g^2 = f'^2 + g'^2$ se mai poate scrie sub forma $(f+g)^2 + (f-g)^2 = (f'+g')^2 + (g'-f')^2$. Ţinînd cont că $f + g = g' - f'$ rezultă că $(f-g)^2 = (f'+g')^2$. Fie x_0 a doua rădăcină a ecuaţiei $f(x) = g(x)$. Pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, x_0)$, $(x_0, +\infty)$, $f - g$ nu se anulează, deci nici $f' + g'$ nu se anulează, deci $f - g$ şi $f' + g'$ fiind funcţii continue păstrează semn constant pe intervalele de mai sus. Din (1) rezultă deci că putem scrie

$$f - g = \varepsilon_1(f' + g') \text{ pe } (-\infty, 0),$$

$$f - g = \varepsilon_2(f' + g') \text{ pe } (0, x_0),$$

$$f - g = \varepsilon_3(f' + g') \text{ pe } (x_0, +\infty),$$

unde $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Dacă $f - g = f' + g'$ pe un anumit interval, atunci, ţinînd cont de relaţia $f + g = g' - f'$, rezultă $f = g'$ pe acel interval, de unde găsim că $g' + g = g' - g''$ şi deci $g + g'' = 0$ pe acel interval. Rezultă deci că pe intervalul respectiv $g(x) = A\sin x + B\cos x$ şi deoarece $f = g'$, rezultă că $f(x) = A\cos x - B\sin x$. Dacă $f - g = -f' - g'$ pe un anumit interval, atunci, ţinînd cont de relaţia $f + g = g' - f'$, rezultă că pe intervalul respectiv $g = g'$

și deci pe acest interval $g(x) = Ce^x$ și, deoarece pe acest interval $f = -f'$, rezultă $f(x) = C_1e^{-x}$. Să presupunem că pe intervalul $(0, x_0)$, g este de forma Ce^x, iar f de forma C_1e^{-x}. Ținînd cont de continuitatea funcțiilor f și g și de faptul că ecuația $f = g$ are ca rădăcini pe 0 și x_0 ar rezulta $C = C_1$ și $Ce^{x_0} = C_1e^{-x_0}$, contradicție, deoarece ar rezulta $C = C_1 = 0$. (Trebuie ca $C \neq 0$ și $C_1 \neq 0$, deoarece $f = g$ ar avea o infinitate de soluții.) Dacă presupunem că pe intervalul $(0, x_0)$, g este de forma Ce^x și f de forma C_1e^{-x}, deoarece $x = 0$ este rădăcină rezultă că $C = C_1$ și ecuația $f = g$ nu ar mai admite alte soluții. Rezultă deci că pe intervalul $(0, x_0)$, g este de forma $A\sin x + B\cos x$ și f este de forma $A\cos x - B\sin x$. Deoarece $x = 0$ este o rădăcină a ecuației $f = g$ rezultă că $A = B$. Deci pe $(0, x_0)$, g este de forma $A(\sin x + \cos x)$ și f este de forma $A(\cos x - \sin x)$. Pentru $x = x_0$ avem $\sin x_0 + \cos x_0 = \cos x_0 - \sin x_0$ adică $\sin x_0 = 0$, de unde rezultă că $x_0 = \pi$ (dacă $x_0 > \pi$ ecuația $f = g$ ar avea mai multe soluții). Dacă pe intervalul $(-\infty, 0)$, g ar fi de forma $A_1\sin x + B_1\cos x$ iar f de forma $A_1\cos x - B_1\sin x$, atunci din faptul că $x = 0$ este o soluție a ecuației $f = g$ ar rezulta $A_1 = B_1$ și, deoarece f și g sînt continue, ar rezulta $A = A_1$ și găsim că $-k\pi$, $k \in \mathbf{N}$, ar fi soluții ale ecuației $f = g$, contradicție. Rezultă că pe $(-\infty, 0)$, g este de forma Ce^x iar f este de forma C_1e^{-x}. Deoarece ecuația $f = g$ îl are pe 0 ca soluție rezultă că $C = C_1$. Din continuitatea lui g și f rezultă că $C = -C_1 = A$. Analog se arată că pe intervalul $(\pi, +\infty)$, g este de forma C_2e^x, iar f este de forma C_3e^{-x}. Deoarece $x_0 = \pi$ este soluție a ecuației $f = g$, rezultă că $C_2e^\pi = C_3e^{-\pi} = -A$ și deci $C_2 = -Ae^{-\pi}$ și $C_3 = -Ae^\pi$. Rezultă că funcțiile f și g sînt de forma

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & \text{pentru } x \in (-\infty, 0], \\ A(\cos x - \sin x) & \text{pentru } x \in (0, \pi], \\ -Ae^{-x+\pi} & \text{pentru } x \in (\pi, +\infty), \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} Ae^{x} & \text{pentru } x \in (-\infty, 0], \\ A(\sin x + \cos x) & \text{pentru } x \in (0, \pi], \\ -Ae^{x-\pi} & \text{pentru } x \in (\pi, +\infty), \end{cases}$$

unde $A \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ este o constantă. Se verifică ușor că funcțiile de mai sus satisfac condițiile problemei.

5. a) Fie $a, b \in (-k, k)$; trebuie să arătăm că și $a * b \in (-k, k)$. Avem $a * b = \dfrac{k^2(a+b)}{k^2+ab} \in (-k, k) \Leftrightarrow -k < \dfrac{k^2(a+b)}{k^2+ab} < k \Leftrightarrow -k^2 - ab < k(a+b) < k^2 + ab \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + ab - ka - kb > 0 \\ k^2 + ab + ka + kb > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-a)(k-b) > 0 \\ (k+a)(k+b) > 0 \end{cases}$, evident.

Să verificăm axiomele grupului:

1) $(\forall) x, y, z \in (-k, k)$ se poate arăta ușor că $(x * y) * z = x * (y * z)$, adică legea este asociativă.

2) Se observă că $(\forall)\, x \in (-k, k)$, $x * 0 = 0 * x = x$ și deci 0 este element neutru.

3) $(\forall)\, x \in (-k, k)$, $(\exists) -x \in (-k, k)$ astfel încît $x * (-x) = (-x) * x = 0$ și deci orice element x are ca opus pe $-x$.

4) $(\forall)\, x, y \in (-k, k)$ avem $x * y = y * x$ și deci operația este comutativă. (Din axiomele verificate rezultă că mulțimea $(-k, k)$ înzestrată cu operația $*$ este un grup comutativ. b) Funcția $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{dt}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2k} \ln \frac{k+t}{k-t}$ este bijectivă și se verifică ușor că $f(x * y) = f(x) + f(y)$, adică f este un izomorfism între $(A, *)$ și $(\mathbf{R}, +)$.

Anul 1977

Etapa județeană

1. Dacă gradul polinomului q este m, atunci evident grad $p_k \leqslant m$, $k \in \{1, 2,..., n\}$. i) Să analizăm cazul în care q are numai rădăcini reale și distincte, fie acestea $x_1, x_2,..., x_m$. Dacă toate polinoamele p_k au gradul m, atunci făcînd în relația din enunț $x = x_j$, $j \in \{1, 2,..., m\}$ obținem $\sum_{k=1}^{n} p_k^2(x_j) = 0$, $j \in \{1, 2,..., m\}$, ceea ce arată că $x_1, x_2, ..., x_m$ sînt rădăcini pentru oricare din polinoamele $p_1, ..., p_n$. Rezultă $p_k = \alpha_k q$ cu $\alpha_k \in \mathbf{R}^*$ și $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$. Dacă vreunul din polinoamele de mai sus, să zicem p_i, are gradul $< m$, atunci fiind obligat să aibă rădăcinile distincte $x_1, x_2, ..., x_m$, rezultă că el este polinomul nul. Așadar, în acest caz, putem scrie $p_i = \alpha_i q$, cu $\alpha_i = 0$. În concluzie, avem $p_k = \alpha_k q$, cu $\alpha_k \in \mathbf{R}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, și $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$. ii) Să analizăm cazul cînd q are o rădăcină multiplă, să zicem x_1, cu ordinul de multiplicitate r. Atunci $q = (X - x_1)^r q_1$, $q_1 \in \mathbf{R}[X]$. Făcînd în egalitatea din enunț $x = x_1$, obținem că x_1 este rădăcină pentru toate polinoamele $p_1, p_2, ..., p_n$, deci putem scrie $p_k = (X - x_1)p_k'$, $p_k' \in \mathbf{R}[X]$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Egalitatea din enunț devine $p_1'^2(x) + p_2'^2(x) + ... + p_n'^2(x) = (x - x_1)^{2r-2} q_1^2(x)$, de unde rezultă că x_1 este rădăcină pentru toate polinoamele $p_1', ..., p_n'$ ș.a.m.d. Rezultă că x_1 este rădăcină multiplă de ordinul r pentru toate polinoamele p_k. Raționamentul ar fi același pentru orice rădăcină multiplă. Se desprinde aceeași concluzie ca și în cazul precedent:

$$p_k = \alpha_k q,\ \alpha_k \in \mathbf{R},\ k \in \{1, 2,..., n\},\ \text{și} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1.$$

2. a) Considerăm funcția $\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \ln(1 + \sin^2 t)$, care este continuă și fie atunci $\Phi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ o primitivă a sa. Cum $\left[\frac{\pi}{4}, \arcsin x\right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $(\forall)\ x \in (-1, 1)$, aplicînd formula Leibniz-Newton, avem $f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} \varphi(t)\, dt = \Phi(\arcsin x) - \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Derivînd, obținem

$$f'(x) = (\Phi(\arcsin x))' = \Phi'(\arcsin x)\,(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\varphi(\arcsin x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ln(1 + \sin^2(\arcsin x)) = \frac{\ln(1 + x^2)}{\sqrt{1 - x^2}},\ (\forall)\ x \in (-1, 1).$$

b) Notăm $I = \int_0^{\sqrt{2}/2} f(x)\, dx$. Integrînd prin părți obținem

$$I = xf(x)\Big|_0^{\sqrt{2}/2} - \int_0^{\sqrt{2}/2} xf'(x)\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x \ln(1 + x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/4} \ln(1 + \sin^2 t)\, dt - I_1 = -I_1, \text{ unde } I_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x \ln(1 + x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Pentru calculul lui I_1f acem tot o integrare prin părți $\left(\text{luînd } u(x) = \ln(1 + x^2)\right.$ și $\left. v(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$ și obținem

$$I_1 = -\sqrt{1 - x^2}\ln(1 + x^2)\Big|_0^{\sqrt{2}/2} + \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1 - x^2}\frac{2x}{1 + x^2}dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{3}{2} + I_2,$$

unde $I_2 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}dx$. Rezultă

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{3}{2} - I_2. \tag{1}$$

Pentru calculul lui I_2, facem schimbarea de variabilă $x = \sqrt{1 - t^2}$, $t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ și obținem

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{2}/2} t\frac{2\sqrt{1 - t^2}}{2 - t^2} \cdot \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}dt = 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{t^2}{t^2 - 2}dt = 2\int_1^{\sqrt{2}/2} \left(1 + \frac{2}{t^2 - 2}\right)dt =$$

$$= 2t\Big|_1^{\sqrt{2}/2} + \frac{4}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}}\right|\Bigg|_1^{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}\ln\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}.$$

Ținînd seama de (1) rezultă în final $I = 2 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{3}{2} - \sqrt{2}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

3. Înainte de rezolvarea propriu-zisă a problemei, demonstrăm următoarea **Lemă.** Dacă P este un polinom cu coeficienți întregi, ce admite rădăcina rațională $\frac{p}{q}$ (p, q întregi, relativ prime), atunci cîtul împărțirii polinomului P la polinomul $qX - p$ este tot un polinom cu coeficienți întregi.

Demonstrație. Conform teoremei lui Bézout putem scrie $P(X) = \left(X - \frac{p}{q}\right)Q(X) = (qX - p)\frac{1}{q}Q(X)$. Lema va fi probată în momentul în care demonstrăm că polinomul Q are coeficienții numere întregi divizibile cu q. Fie

$$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \ldots + a_{n-1}X + a_n, \text{ unde } a_i \in \mathbf{Z},\ 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Scriind că $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ și eliminînd numitorii, avem

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0. \tag{1}$$

Din (1) rezultă că $q \mid a_0p^n$ și, cum $(p, q) = 1$, rezultă $q \mid a_0$; dar a_0 este primul coeficient al polinomului Q. Tot din (1) rezultă că $q^2 \mid (a_0p^n + a_1p^{n-1}q)$, deci de fapt $q^2 \mid (a_0p + a_1q)$ sau $q^2 \mid q\left(a_0\frac{p}{q} + a_1\right)$, ceea ce arată că $q \mid \left(a_0 \cdot \frac{p}{q} + a_1\right)$; dar $a_0 \cdot \frac{p}{q} + a_1$ este următorul coeficient din polinomul Q. Procedeul continuă, reținînd din membrul stîng din (1) primii trei termeni, apoi primii patru ș.a.m.d. și din

aproape în aproape obținem că polinomul Q are toți coeficienții numere întregi divizibile cu q. Să trecem acum la rezolvarea propriu-zisă a problemei. a) Avem $P(e_1) = \pm 1$, $P(e_2) = \pm 1$ deci $-2 \leqslant P(e_2) - P(e_1) \leqslant 2$, adică $|P(e_2) - P(e_1)| \leqslant 2$. Dar P avînd coeficienții întregi, iar e_2 și e_1 fiind întregi, rezultă că $P(e_2) - P(e_1) = (e_2 - e_1)A$, unde $A \in \mathbf{Z}$. Atunci $|e_2 - e_1||A| = |P(e_2) - P(e_1)| \leqslant 2$, ceea ce arată că $|e_2 - e_1| \leqslant 2$ sau $e_2 - e_1 \leqslant 2$. b) Fie, conform ipotezei, $\frac{p}{q}$ o rădăcină rațională a polinomului P, unde p, q sînt întregi, relativ prime. Conform lemei, putem scrie $P(X) = (qX - p)Q_1(X)$, unde Q_1 este un polinom cu coeficienți întregi. Atunci $1 = |P(e_1)| = |qe_1 - p||Q(e_1)|$ și, cum factorii din dreapta sînt numere naturale, rezultă $|qe_1 - p| = 1$. Analog găsim $|qe_2 - p| = 1$. Prin urmare, $|qe_1 - p| = |qe_2 - p|$ sau $\left|e_1 - \frac{p}{q}\right| = \left|e_2 - \frac{p}{q}\right|$. Aceasta înseamnă că pe axa reală numărul $\frac{p}{q}$ este egal depărtat de e_1 și e_2, adică este mijlocul segmentului respectiv. Rezultă $\frac{p}{q} = \frac{e_1 + e_2}{2}$, ceea ce arată că rădăcina rațională este unică (abstracție făcînd de ordinul de multiplicitate, însă polinomul P are numai rădăcini simple) și totodată determinată.

Etapa finală

1. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, conform ipotezei trebuie ca $P(x) \in \mathbf{R}$, adică $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k = 0$. Cum x este arbitrar în $\mathbf{R}$, rezultă imediat $b_0 = b_1 = \ldots = b_n = 0$. Prin urmare, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, cu $a_k \in \mathbf{R}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$, dacă $P(x) = \alpha$ rezultă $x \in \mathbf{R}$ (conform ipotezei). Altfel spus, am demonstrat următoarea:

Observație. Orice ecuație $P(x) = \alpha (\alpha \in \mathbf{R})$ are numai rădăcini reale. Să presupunem prin absurd că gradul polinomului P nu este 1. Avem atunci următoarele cazuri: i) polinomul P este constant. Acest caz duce la contradicție deoarece dacă P este o constantă reală, $P(i)$ este real, ceea ce contrazice ipoteza, iar dacă P este o constantă nereală, atunci $P(0)$ nu este real, ceea ce iarăși contrazice ipoteza; ii) polinomul P are gradul par $\geqslant 2$. Conform observației, ecuația $P(x) = 0$ are numai rădăcini reale; fie u, v cea mai mică și, respectiv, cea mai mare rădăcină a polinomului P (deci $u \leqslant v$). Să presupunem că coeficientul dominant al polinomului este pozitiv (analog s-ar trata cazul în care este negativ). Funcția polinomială $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fiind continuă și neanulîndu-se pe intervalele $(-\infty, u)$ și (v, ∞), va menține semn constant pe fiecare din aceste intervale. Deoarece $\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to \infty} P(x) = \infty$, deducem că

$$P(x) > 0, \ (\forall)\, x \in (-\infty, u) \cup (v, \infty).$$

Pe intervalul compact $[u, v]$ funcția P este mărginită, deci $(\exists)\, M_1 > 0$ cu $-M_1 \leqslant P(x) \leqslant M_1$, $(\forall)\, x \in [u, v]$. Din cele de mai sus rezultă că putem scrie $P(x) \geqslant -M_1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Luînd atunci $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha < -M_1$, înseamnă că ecuația $P(x) = \alpha$ nu are nici o rădăcină reală, ceea ce contrazice observația stabilită. Așadar și acest caz este contradictoriu; iii) Polinomul P are gradul impar $\geqslant 3$. Vom nota cu u cea mai mică rădăcină a polinomului, iar cu w cea mai mare dintre

rădăcinile polinomului și dintre rădăcinile reale ale derivatei. Să presupunem că polinomul P are coeficientul dominant pozitiv. Ca mai sus, se ajunge ușor la concluzia: $P(x) < 0$, $(\forall)\, x \in (-\infty, u)$; $P(x) > 0$, $(\forall)\, x \in (w, \infty)$, $P'(x) > 0$, $(\forall)\, x \in (w, \infty)$. Pe intervalul $[u, w]$ funcția P este mărginită, deci $(\exists)\, M_2 > 0$, cu $-M_2 \leqslant P(x) \leqslant M_2$, $(\forall)\, x \in [u, w]$. Cum $\lim\limits_{x \to \infty} P(x) = \infty$, putem alege un punct $x_0 \in (w, \infty)$ astfel încît $P(x_0) > M_2$. Să considerăm ecuația $P(x) = P(x_0)$: pe intervalul $(-\infty, u)$ această ecuație nu are soluții deoarece $P(x) < 0$ iar $P(x_0) > 0$; pe intervalul $[u, w]$ ecuația nu are soluții deoarece $P(x) \leqslant M_2$, iar $P(x_0) > M_2$: pe intervalul (w, ∞) ecuația are evident soluția x_0 și, cum funcția P este strict monotonă pe acest interval, înseamnă că aceasta este singura soluție. Așadar singura soluție reală a polinomului $P(X) - P(x_0)$ este x_0 și deoarece $x_0 \in (w, \infty)$ vom avea $P'(x_0) > 0$, ceea ce arată că rădăcina este simplă. Rezultă că ecuația $P(x) = P(x_0)$ are $n - 1$ rădăcini complexe nereale, ceea ce contrazice observația. Așadar și acest caz este contradictoriu. Rămîne singura posibilitate ca gradul polinomului P să fie egal cu 1. Deci $P = aX + b$, $a \neq b$. Cum $P(0) \in \mathbf{R}$, deducem $b \in \mathbf{R}$, iar apoi, cum și $P(1) \in \mathbf{R}$, rezultă $a + b \in \mathbf{R}$ deci și $a \in \mathbf{R}$. Cu aceasta problema este complet rezolvată.

2. a) Deoarece $a_0 \neq 0$ și $a_0 = a_{2n}$ rezultă $a_{2n} \neq 0$, deci $x = 0$ nu este rădăcină. Atunci împărțind cu x^n și ținînd seama că $a_k = a_{2n-k}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$, ecuația este echivalentă cu

$$(1) \qquad a_0\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + a_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots + a_{n-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_n = 0.$$

Vom arăta prin inducție după s, următoarea propoziție:
$P(s)$: Există un polinom $P_s \in \mathbf{R}[X]$ de gradul s, astfel încît

$$x^s + \frac{1}{x^s} = P_s\left(x + \frac{1}{x}\right), \; s \in \mathbf{N}^*.$$

Propoziția $P(1)$ este evidentă, luînd $P_1 = X$. Presupunem adevărate $P(1)$, $P(2), \ldots, P(k)$ și să arătăm că și $P(k+1)$ este adevărată. Avem, folosind ipoteza de inducție, următoarea identitate

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) =$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right) P_k\left(x + \frac{1}{x}\right) - P_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

și luînd $P_{k+1} = XP_k - P_{k-1}$, rezultă că gradul polinomului P_{k+1} este $k + 1$ și $x^{k+1} + \dfrac{1}{x^{k+1}} = P_{k+1}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. Aceasta înseamnă că propoziția $P(k+1)$ este adevărată și demonstrația prin inducție este încheiată. Folosind propoziția demonstrată și substituția $x + \dfrac{1}{x} = y$, ecuația (1) devine o ecuație de gradul n în y.

b) Să notăm $P = X^{2n} + a_1 X^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}X + 1$ (știm că $a_0 = a_{2n} = 1$). Ecuația $P(x) = 0$ fiind reciprocă, admite o dată cu fiecare rădăcină și inversa acesteia ca rădăcină. Să presupunem prin absurd că toate rădăcinile sale sînt reale. Atunci alegînd n dintre rădăcinile ecuației, pe care să le notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, celelalte n rădăcini vor fi $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$ (numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ca și $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$

nu sînt neapărat distincte două cîte două). Să notăm $Q_1 = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$, $Q_2 = \prod_{i=1}^{n}\left(X - \frac{1}{x_i}\right)$. Avem, evident, (2) $P = Q_1Q_2$. Dacă $Q_1 = X^n + b_1X^{n-1} + b_2X^{n-2} + \ldots + b_n$, rezultă că toţi coeficienţii $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt reali (pentru că rădăcinile lui Q sînt reale). Ecuaţia $Q_2(x) = 0$ este echivalentă cu $Q_1\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ sau $\frac{1}{x^n} + b_1\frac{1}{x^{n-1}} + b^2\frac{1}{x^{n-2}} + \ldots + b_{n-1}\frac{1}{x} + b_n = 0$ sau $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + 1 = 0$ sau încă $x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1} + \ldots + \frac{b_1}{b_n}x + \frac{1}{b_n} = 0$, deci vom avea $Q_2 = X^n + \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}X^{n-1} + \quad + \frac{b_1}{b_n}X + \frac{1}{b_n}$. Coeficientul lui X^n din polinomul Q_1Q_2 este $\frac{1}{b_n} + \frac{b_1^2}{b_n} + \frac{b_2^2}{b_n} + \ldots + \frac{b_{n-1}^2}{b_n} + b_n$, iar coeficientul lui X^n din polinomul P este a_n. Datorită egalităţii polinomiale (2), deducem că aceşti coeficienţi sînt egali, ceea ce se mai scrie

$$b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2 = -b_n^2 + a_nb_n - 1. \tag{3}$$

Cînd $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ sînt reali, membrul stîng este pozitiv. Membrul drept este însă strict negativ, deoarece interpretat ca o funcţie de gradul 2 în b_n, are discriminantul $a_n^2 - 4 < 0$ (din ipoteză). Egalitatea (3) este o contradicţie. Prin urmare, ecuaţia $P(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină complexă nereală. Dar atunci are cel puţin două rădăcini complexe nereale, deoarece admite şi rădăcina conjugată (coeficienţii fiind reali).

3. Vom arăta că funcţia f este constantă pe orice interval compact $[a, b]$, $a < b$. Reamintim următoarea:

Lemă. Dacă o funcţie continuă nu-şi schimbă semnul pe un interval compact, iar integrala sa pe acest interval este nulă, atunci funcţia este nulă pe acest interval. Demonstraţia este simplă (utilizează teorema de medie) şi se află în manual. Fie aşadar un interval compact $[a, b]$, $a < b$. Conform teoremei lui Weierstrass există $x_0 \in [a, b]$ astfel încît $f(x_0) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$. Avem următoarele trei cazuri:

i) $x_0 = a$. Avem, utilizînd teorema de medie, $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a) \leqslant f(a)(b - a)$. Din ipoteză avem $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \geqslant f(a)$, adică $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant f(a)(b-a)$. Din cele două inegalităţi rezultă $\int_a^b f(x)\,dx = f(a)(b - a)$ sau $\int_a^b (f(x) - f(a))\,dx = 0$. Cum $f(x) - f(a) \leqslant 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, conform lemei rezultă $f(x) - f(a) = 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, adică f este constantă pe $[a, b]$; ii) $x_0 \in (a, b)$. Din teorema de medie $\int_a^{x_0} f(x)\,dx = f(\xi_1)(x_0 - a) \leqslant f(x_0)(x_0 - a)$. Din ipoteză avem

$$\frac{\int_a^{x_0} f(x)\,dx}{x_0 - a} \geqslant f(x_0), \text{ adică } \int_a^{x_0} f(x)\,dx \geqslant f(x_0)(x_0 - a).$$

Rezultă $\int_a^{x_0} f(x)\,dx = f(x_0)(x_0 - a)$ sau $\int_a^{x_0} (f(x) - f(x_0))\,dx = 0$ şi, cum $f(x) - f(x_0) \leqslant$ $\leqslant 0$, $(\forall) x \in [a, x_0]$, rezultă, conform lemei, $f(x) = f(x_0)$, $(\forall) x \in [a, x_0]$. Aplicînd din nou teorema de medie obţinem $\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx = f(\xi_2)(b - x_0) \leqslant f(x_0)(b - x_0)$ iar din ipoteză $\dfrac{\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx}{b - x_0} \geqslant f(x_0)$, adică $\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx \geqslant f(x_0)(b - x_0)$. Rezultă la fel $\int_{x_0}^{b} (f(x) - f(x_0))\,dx = 0$ şi de aici $f(x) = f(x_0)$, $(\forall) x \in [x_0, b]$. Prin urmare $f(x) = f(x_0)$, $(\forall) x \in [a, b]$; iii) $x_0 = b$. Este analog primului caz şi se ajunge la concluzia $f(x) = f(b)$, $(\forall) x \in [a, b]$. Dacă funcţia f este constantă pe orice interval $[a, b]$, cu $a < b$, fixînd a şi lăsînd b arbitrar (sau invers) deducem că f este constantă pe $\mathbf{R}$.

4. Fie funcţia $h : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) - x$. Ipoteza $2\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ este echivalentă cu (1) $\int_0^1 (f(x) - x)\,dx = 0$, adică $\int_0^1 h(x)\,dx = 0$. Dar conform teoremei de medie $(\exists)\, x_0 \in (0, 1)$ astfel ca (2) $\int_0^1 h(x)\,dx = h(x_0)$. Din (1) şi (2) rezultă $h(x_0) = 0$, adică $f(x_0) = x_0$.

Anul 1978

Etapa judeţeană

1. Demonstrăm echivalenţa afirmaţiilor a) şi b). a) $\Rightarrow$ b) Fie u, v, α respectiv u, v, β rădăcinile polinoamelor P şi P_1. Avem atunci $P = (X - u)(X - v)(X - \alpha)$, $P_1 = (X - u)(X - v)(X - \beta)$ şi dacă luăm $Q = X - \beta$ şi $Q_1 = X - \alpha$ rezultă $PQ = P_1Q_1$. b) $\Rightarrow$ a) Fie u, v, w respectiv u_1, v_1, w_1 rădăcinile polinoamelor P şi P_1. Fie, de asemenea, t şi t_1 rădăcinile polinoamelor de gradul 1 Q şi Q_1. Rădăcinile polinomului PQ sînt u, v, w, t iar cele ale polinomului P_1Q_1 sînt u_1, v_1, w_1, t_1. Din egalitatea $PQ = P_1Q_1$ rezultă $\{u, v, w, t\} = \{u_1, v_1, w_1, t_1\}$. Dacă $t = t_1$ rezultă $\{u, v, w\} = \{u_1, v_1, w_1\}$, deci polinoamele P şi P_1 au toate cele trei rădăcini comune. Dacă $t \neq t_1$ fie, de exemplu, $t = u_1$; atunci $\{u, v, w\} = \{v_1, w_1, t_1\}$, deci polinoamele P şi P_1 au două rădăcini comune. Demonstrăm acum echivalenţa afirmaţiilor b) şi c). b)$\Rightarrow$c) Fie Q, Q_1 polinoame de gradul 1 astfel ca $PQ = P_1Q_1$. Rezultă imediat că Q şi Q_1 au acelaşi coeficient dominant şi notînd cu t, t_1 rădăcinile acestor polinoame, avem egalitatea $(X - t)P = (X - t_1)P_1$, care este echivalentă cu $X(P - P_1) =$ $= tP - t_1P_1$. Identificînd coeficienţii ajungem la egalităţile: $a - a_1 = t - t_1$; $b - b_1 = ta - t_1a_1$; $c - c_1 = tb - t_1b_1$; $0 = tc - t_1c_1$, ceea ce arată că în matricea considerată coloana 1 este combinaţie liniară de coloanele 2 şi 3. Rezultă că toţi determinanţii de ordinul 3 sînt nuli. c) $\Rightarrow$ b) Dacă toţi determinanţii de ordinul 3 ai matricii considerate sînt nuli, rezultă că rangul matricii este < 3. Cum rangul reprezintă numărul maxim de coloane liniar independente, înseamnă că dacă vom considera toate cele 3 coloane ale matricii, ele vor fi liniar dependente. Scriem atunci că prima coloană este o combinaţie liniară de a doua şi a treia coloană (să zicem cu coeficienţii t şi $-t_1$) şi parcurgînd drumul invers faţă de ceea

ce am făcut la implicația anterioară, ajungem la egalitatea $(X-t)P=(X-t_1)P_1$. Luînd $Q=X-t$ și $Q_1=X-t_1$, avem deci $PQ=P_1Q_1$ și cu aceasta problema este complet soluționată.

2. Cum $1\geqslant x$ rezultă $f'(1)\leqslant f'(x)$ și apoi $\dfrac{f'(1)}{1+f^2(x)}\leqslant\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$, $(\forall)x\in[0,1]$. Integrînd obținem

$$f'(1)\int_0^1\frac{dx}{1+f^2(x)}\leqslant\int_0^1\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx=\operatorname{arctg}f(1)-\operatorname{arctg}f(0)=\operatorname{arctg}f(1)\text{ și,}$$

cum $f'(1)>0$ iar $\operatorname{arctg}f(1)\leqslant f(1)$, deducem

$$\int_0^1\frac{dx}{1+f^2(x)}\leqslant\frac{\operatorname{arctg}f(1)}{f'(1)}\leqslant\frac{f(1)}{f'(1)}. \tag{1}$$

Dacă am avea egalitate, din inegalitatea dublă (1) va rezulta $\operatorname{arctg}f(1)=f(1)$, adică $f(1)=0$ (se știe că în inegalitatea $\operatorname{arctg}t\leqslant t$ avem egalitate numai pentru $t=0$). Dar atunci tot din (1) va rezulta $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+f^2(x)}\leqslant 0$, ceea ce este fals, deoarece conform teoremei de medie avem $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+f^2(x)}=\frac{1}{1+f^2(\xi)}>0$, unde $\xi\in[0,1]$. Așadar inegalitatea este strictă.

3. a) Dacă x_0 este o rădăcină reală, avem $4x_0^3+8ax_0^2+4bx_0+1=0$, de unde $4x_0^3=-8ax_0^2-4bx_0-1=4b^2x_0^2-8ax_0^2-4b^2x_0^2-4bx_0-1=4x_0^2(b^2-2a)-(2bx_0+1)^2\leqslant 4x_0^2(b^2-2a)$, adică $4x_0^3\leqslant 4x_0^2(b^2-2a)$. Cum $4x_0^2>0$ (nu putem avea $x_0=0$) putem împărți și obținem $x_0\leqslant b^2-2a$; b) Dacă x_1, x_2 sînt ambele rădăcini reale sau complexe nereale, în mod sigur cealaltă rădăcină x_3 va fi reală. Folosind și relațiile lui Viète, putem scrie: $x_1x_2=b-x_3(x_1+x_2)=b-x_3(-2a-x_3)=b+2ax_3+x_3^2=b-a^2+a^2+2ax_3+x_3^2=b-a^2+(a+x_3)^2\geqslant b-a^2$, adică $x_1x_2\geqslant b-a^2$.

4. Avem evident

$$\int_0^1 P(x)\,dx=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_1}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}.$$

Dar conform teoremei de medie, $(\exists)c\in(0,1)$ astfel încît (2) $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx=P(c)$. Din (1) și (2) rezultă egalitatea din enunț.

Etapa finală

1. Să notăm $P_0(X)=X$, $P_k(X)=(\underbrace{P\circ P\circ\ldots\circ P}_{k\text{ ori}})(X)$, $k\geqslant 1$. Arătăm că pentru $k\geqslant 2$, avem

$$(P_{k-1}(X)-P_{k-2}(X))\mid(P_k(X)-P_{k-1}(X)).$$

Într-adevăr, $P_k(X)-P_{k-1}(X)=P(P_{k-1}(X))-P(P_{k-2}(X))$, care se divide cu $P_{k-1}(X)-P_{k-2}(X)$, căci, în general, $P(U)-P(V)$ se divide cu $U-V$. Atunci,

avem

$$(P_{k-1}(X) - P_{k-2}(X)) \mid (P_k(X) - P_{k-1}(X)),$$
$$(P_{k-2}(X) - P_{k-3}(X)) \mid (P_{k-1}(X) - P_{k-2}(X)),$$

$$(P_1(X) - P_0(X)) \mid (P_2(X) - P_1(X)).$$

Rezultă că

(1) $$(P(X) - X) \mid (P_k(X) - P_{k-1}(X)).$$

Făcînd $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ în relația (1) și adunînd polinoamele din stînga relațiilor obținute, deducem că $(P(X) - X) \mid (P_n(X) - X)$.

2. *Necesitatea condiției.* Dacă P și Q au aceleași rădăcini, cu ordinele de multiplicitate respectiv egale, atunci $(\exists)\ \lambda \in \mathbf{C}^*$, cu $P = \lambda Q$. Atunci $f(x) = |Q(x)|(|\lambda| - 1)$ și are semn constant pe $\mathbf{C}$. *Suficiența condiției.* Să presupunem, de exemplu, $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{C}$, adică

(1) $$|P(x)| \geqslant |Q(x)|,\ (\forall)\ x \in \mathbf{C}.$$

Dacă x_0 este o rădăcină a lui P, din (1) rezultă $Q(x_0) = 0$. deci x_0 este rădăcină și pentru Q. Aceasta înseamnă că rădăcinile (distincte) ale lui P se găsesc printre rădăcinile (distincte) ale lui Q. Fie atunci $x_1, x_2, \ldots, x_k$ rădăcinile distincte ale lui Q, avînd ordinele de multiplicitate $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(q_i \geqslant 1,\ i = \overline{1, k})$. Atunci P are rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_k$ cu ordinele de multiplicitate $p_1, p_2, \ldots, p_k$ $(p_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, k})$, luînd $p_i = 0$ dacă x_i nu este rădăcină pentru polinomul P. Avem $P = a(X - x_1)^{p_1}(X - x_2)^{p_2} \ldots (X - x_k)^{p_k}$; $Q = b(X - x_1)^{q_1}(X - x_2)^{q_2} \ldots (X - x_k)^{q_k}$, $(a, b \in \mathbf{C}^*)$. Demonstrația va fi încheiată în momentul în care vom arăta că $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2, \ldots, p_k = q_k$. Inegalitatea (1) se scrie

(2) $$|a|\,|x - x_1|^{p_1}|x - x_2|^{p_2} \ldots |x - x_k|^{p_k} \geqslant |b|\,|x - x_1|^{q_1}|x - x_2|^{q_2} \ldots |x - x_k|^{q_k},\ (\forall)\ x \in \mathbf{C}.$$

Vom arăta mai întîi că $p_1 \leqslant q_1$, $p_2 \leqslant q_2, \ldots, p_k \leqslant q_k$. Arătăm că $p_1 \leqslant q_1$, analog arătîndu-se celelalte inegalități. Presupunem prin absurd că $p_1 > q_1$. Atunci pentru $x \in \mathbf{C} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, (2) devine

$$|a|\,|x - x_1|^{p_1 - q_1}|x - x_2|^{p_2} \ldots |x - x_k|^{p_k} \geqslant |b|\,|x - x_2|^{q_2} \ldots |x - x_k|^{q_k}.$$

Făcînd $x \to x_1$ (de exemplu, luăm $x = x_1 + \alpha$, cu α real și $\alpha \to 0$) obținem $0 \geqslant |b|\,|x_1 - x_2|^{q_2} \ldots |x_1 - x_k|^{q_k}$, contradicție.
Așadar, am dovedit (3). Vom arăta că nici una din inegalitățile (3) nu poate fi strictă. Să arătăm că nu putem avea $p_1 < q_1$, la fel arătîndu-se pentru celelalte. Să admitem prin absurd că $p_1 < q_1$. Pentru $x \in \mathbf{C} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, inegalitatea (2) se scrie

$$|a| \geqslant |b|\,|x - x_1|^{q_1 - p_1}|x - x_2|^{q_2 - p_2} \ldots |x - x_k|^{q_k - p_k}.$$

Făcînd $|x - x_1| \to \infty$ (de exemplu, luînd $x = x_1 + \beta$, cu β real și $\beta \to \infty$) obținem la limită $|a| \geqslant \infty$, contradicție. Așadar, $p_1 = q_1$ și la fel $p_2 = q_2, \ldots, p_k = q_k$, ceea ce încheie soluția problemei.

3. Fie funcția $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2$ Avem evident $G'(x) = 2f(x)\int_0^x f(t)\,dt$. Conform ipotezei funcția G' este descrescătoare și, cum

$G(0) = 0$, rezultă că $G'(x) \geqslant 0$ pentru $x \in (-\infty, 0]$ și $G'(x) \leqslant 0$ pentru x $x \in [0, \infty)$. Atunci funcția G este crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și descrescătoare pe $[0, \infty)$, deci $G(x) \leqslant G(0) = 0$. Pe de altă parte, din definiția lui G, avem $G(x) \geqslant 0$. Deducem $G(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, adică $\int_0^x f(t)\, dt = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Vom arăta că de aici rezultă $f(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Să presupunem prin absurd că există $x_0 \in \mathbf{R}$, cu $f(x_0) \neq 0$, fie, de exemplu, $f(x_0) > 0$. Cum f este continuă, există o vecinătate (x_1, x_2) a punctului x_0 pe care funcția menține semnul $+$. Avem

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt = \int_{x_1}^{0} f(t)\, dt + \int_0^{x_2} f(t)\, dt = -\int_0^{x_1} f(t)\, dt + \int_0^{x_2} f(t)\, dt = 0 + 0 = 0.$$

Pe de altă parte, conform teoremei de medie, există $\xi \in (x_1, x_2)$ astfel încît $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt = (x_2 - x_1) f(\xi) > 0$. Contradicția obținută arată că presupunerea făcută este falsă. Deci $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

4. a) Arătăm mai întîi că dacă $f \in F$, avem $\int_0^1 x f(x)\, dx < \frac{3}{4}$. Avem relațiile $\int_0^1 x f(x)\, dx = \int_0^{1/2} x f(x)\, dx + \int_{1/2}^1 x f(x)\, dx \leqslant \frac{1}{2} \int_0^{1/2} f(x)\, dx + \int_{1/2}^1 x f(x)\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \int_{1/2}^1 f(x)\, dx\right) + \int_{1/2}^1 x f(x)\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 (2x - 1) f(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 (2x - 1) 2\, dx \leqslant \frac{1}{2} + (x^2 - x)\Big|_{1/2}^1 = \frac{3}{4}, \text{ deci } \int_0^1 x f(x)\, dx \leqslant \frac{3}{4}.$$

Vom arăta că $\int_0^1 x f(x)\, dx$ nu poate lua valoarea $\frac{3}{4}$. Dacă ar exista o asemenea funcție f, pentru care integrala respectivă să aibă valoarea $\frac{3}{4}$, atunci ținînd seama de majorările făcute, pentru a se realiza egalitatea este necesar ca $\int_0^{1/2} x f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)\, dx$ și $\int_{1/2}^1 x f(x)\, dx = 2 \int_{1/2}^1 x\, dx$, adică $\int_0^{1/2} (2x - 1) f(x)\, dx = 0$ și $\int_{1/2}^1 x(f(x) - 2)\, dx = 0$. Cum $2x - 1 < 0$ pentru $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, rezultă $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Cum $x > 0$ pentru $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, rezultă $f(x) = 2$, pentru $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Dar atunci f este discontinuă în $\frac{1}{2}$, deci $f \notin F$. Arătăm acum că dacă $f \in F$, atunci $\int_0^1 x f(x)\, dx > \frac{1}{4}$. Într-adevăr observăm că $f \in F$ dacă și numai dacă $2 - f \in F$ și atunci $\int_0^1 x(2 - f(x))\, dx < \frac{3}{4}$, adică $\int_0^1 x f(x)\, dx > \int_0^1 2x\, dx - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Prin urmare, $\frac{1}{4} < \int_0^1 x f(x)\, dx < \frac{3}{4}$, $(\forall)\, f \in F$. Vom arăta acum că integrala

respectivă ia orice valoare din intervalul $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$, cînd f parcurge F. Să considerăm funcția $f:[0, 1] \to [0, 2]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \in [0, a], \\ \dfrac{x-a}{\varepsilon} & \text{pentru } x \in (a, a+\varepsilon), \\ 1 & \text{pentru } x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon], \\ \dfrac{x-b}{\varepsilon} + 2 & \text{pentru } x \in (b-\varepsilon, b), \\ 2 & \text{pentru } x \in [b, 1], \end{cases}$$

unde a, b, ε sînt alese cu proprietățile $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $a + b = 1$, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{b-a}{2}$. Evident f este continuă. Avem

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_a^{a+\varepsilon} \frac{x-a}{\varepsilon}\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} 1\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} \left(\frac{x-b}{\varepsilon} + 2\right) dx + \int_b^1 2\,dx =$$

$$= \frac{(x-a)^2}{2}\Big|_a^{a+\varepsilon} + x\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} + \left[\frac{(x-b)^2}{2\varepsilon} + 2x\right]\Big|_{b-\varepsilon}^{b} + 2x\Big|_b^1 = \frac{\varepsilon}{2} + b - \varepsilon - a - \varepsilon +$$

$$+ 2b - \frac{\varepsilon}{2} - 2b + 2\varepsilon + 2 - 2b = 2 - (a+b) = 1,$$ ceea ce arată că $f \in F$. Atunci

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_a^{a+\varepsilon} \frac{x(x-a)}{\varepsilon}\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} x\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} \left(\frac{x-b}{\varepsilon} + 2\right) x\,dx + \int_b^1 2x\,dx =$$

$$= \frac{(a+\varepsilon)^2(2\varepsilon - a) + a^2}{6\varepsilon} + \frac{(b-\varepsilon)^2 - (a+\varepsilon)^2}{2\varepsilon} + \frac{b^2(-b+6\varepsilon) - (b-\varepsilon)^2(-b+4\varepsilon)}{6\varepsilon} +$$

$$+ 1 - b^2 = \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{a\varepsilon}{2} + \frac{b-a-2\varepsilon}{2} + \frac{3}{2}b\varepsilon - \frac{2}{3}\varepsilon^2 + 1 - b^2 = -\frac{\varepsilon^2}{3} + \varepsilon\left(\frac{a+3b}{2} - 1\right) +$$

$$+ 1 - b^2 + \frac{b-a}{2} = -\frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{1-2a}{2}\varepsilon + \frac{3}{4} - \left(\frac{1-2a}{2}\right)^2.$$

Să considerăm funcția de gradul 2 depinzînd de parametrul m, $P_m(\varepsilon) = -\frac{1}{3}\varepsilon^2 + m\varepsilon + \frac{3}{4} - m^2$, unde $m = \frac{b-a}{2} = \frac{1-2a}{2}$. Datorită alegerii numerelor a, b, ε, avem $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ și $\varepsilon \in (0, m]$. Pe intervalul $(0, m]$ funcția P_m este crescătoare, deci $P_m(0) < P_m(\varepsilon) \leqslant P_m(m)$, adică $P_m(\varepsilon) \in \left(\frac{3}{4} - m^2, \frac{3}{4} - \frac{m^2}{3}\right)$. Așadar, pentru m fixat (a fixat), considerînd toate funcțiile f de mai sus cu $\varepsilon \in (0, m]$, obținem că $P_m(\varepsilon) = \int_0^1 xf(x)\,dx$ parcurge toate valorile din intervalul $\left(\frac{3}{4} - m^2, \frac{3}{4} - \frac{m^2}{3}\right)$. Considerînd acum și m variabil în intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right]$,

$\left(\text{adică } a \text{ variabil în intervalul } \left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ obținem că pentru funcțiile corespunzătoare de tipul celor definite mai sus, integralele $\int_0^1 xf(x)\,dx$ parcurg toate valorile din mulțimea $\bigcup_{0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4} - m^2, \frac{3}{4} - \frac{m^2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Să mai observăm că luînd funcția constantă $f(x) = 1$, $(\forall)\, x \in [0, 1]$, avem $f \in F$ și $\int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Așadar există o submulțime $F_1 \subset F$ astfel încît $\left\{\int_0^1 xf(x)\,dx \mid f \in F_1\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Dar am văzut că dacă $f \in F$, atunci $2 - f \in F$ și, în plus, $\int_0^1 x(2 - f(x))\,dx = 1 - \int_0^1 xf(x)\,dx$. Rezultă imediat

$$\left\{\int_0^1 x(2 - f(x))\,dx \mid f \in F_1\right\} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right].$$

Cu aceasta, am arătat că integralele respective „acoperă" toate valorile intervalului $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. b) Dacă $f, f^2 \in F$ avem $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 1$ și rezultă ușor $\int_0^1 (f(x) - 1)^2\,dx = 0$. Cum funcția de sub integrală este continuă și pozitivă, deducem că ea este nulă, adică $f(x) = 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

Anul 1979

Etapa județeană

1. a) Este evident că $x_0 > h - 1$ și $n = x_0(x_0 - 1) \ldots (x_0 - h + 1)$, deci

$$n^{\frac{1}{h}} \leqslant \frac{x_0 + (x_0 - 1) + \ldots + (x_0 - h + 1)}{h} = \frac{hx_0 - \frac{h(h-1)}{2}}{h} = x_0 - \frac{h-1}{2};$$

b) Rezultă direct din punctul a etc.

2. Rezultă imediat relațiile $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$, $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 0, \ldots$ $\ldots, a_1b_1^{n-1} + a_2b_2^{n-1} + \quad + a_nb_n^{n-1} = 0$. Se obține un sistem omogen Vandermonde, cu unica soluție $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, deci $P = 0$.

3. Avem $\int_0^1 |f(x) - a|\,dx = \int_0^{1/2} |f(x) - a|\,dx + \int_{1/2}^1 |f(x) - a|\,dx =$ $= \int_0^{1/2} |f(x) - a|\,dx + \int_0^{1/2} \left|f\left(x + \frac{1}{2}\right) - a\right| dx = \int_0^{1/2} \left(|f(x) - a| + \left|f\left(x + \frac{1}{2}\right) - a\right|\right) dx \geqslant$ $\geqslant \int_0^{1/2} \left|f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)\right| dx = \int_0^1 \left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| dx$, ultima relație decurgînd din ipoteza că f este monotonă.

4. a) Evident, f este mărginită, cu un număr finit de discontinuități și, în plus, $\int_1^5 f(x)\,dx = 1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 = 288$. b) O condiție necesară ca f să admită primitive pe un interval este ca ea să aibă proprietatea Darboux. Rezultă atunci că $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Etapa finală

1. Fie un polinom pentru care avem $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$, $(\forall)Q$ un polinom de gradul 2. Să presupunem că P are gradul mai mare sau egal cu 2; atunci avem de analizat două posibilități: a) polinomul P are cel puțin două rădăcini complexe distincte x_1 și x_2. Atunci $P(x)$ se divide cu $(x - x_1)(x - x_2)$ și deci restul nu este de gradul 1; b) polinomul P are o singură rădăcină complexă x_1 multiplă și atunci P se divide cu $(x - x_1)^2$ și deci restul nu este de gradul 1. Rezultă deci că P este un polinom de gradul 1.

2. Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski avem

$$\left(\int_0^x f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^x f^2(t)\,dt\right)\left(\int_0^x g^2(t)\,dt\right)$$

și pentru $g(x) = 1$ obținem $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 \leqslant x\int_0^x f^2(t)\,dt$. Deci

$$a\int_0^x f^2(t)\,dt \leqslant x\int_0^x f^2(t)\,dt. \tag{1}$$

Dacă există $c \in [0, a)$ pentru care $f(x) \neq 0$, atunci $\int_0^x f^2(t)\,dt \neq 0$ și din (1) găsim $a \leqslant c$, contradicție. Deci $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [0, a)$. Deoarece f este continuă rezultă că $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [0, a]$. Relația dată o putem scrie $a\int_a^x f^2(t)\,dt \leqslant \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)^2$, $(\forall)\, x \in [a, \infty)$. Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski găsim că

$$\left(\int_a^x f^2(t)\,dt\right)^2 \leqslant (x - a)\int_a^x f^2(t)\,dt. \text{ Deci}$$

$$a\int_a^x f^2(t)\,dt \leqslant (x - a)\int_a^x f^2(t)\,dt. \tag{2}$$

Analog, dacă presupunem că $(\exists)\, c \in [a, 2a)$, pentru care $f(x) \neq 0$, atunci $\int_a^x f^2(t)\,dt \neq 0$ și din (2) rezultă că $a \leqslant x - a$ sau $2a \leqslant x$, contradicție. Deci $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [a, 2a)$ și deoarece f este continuă rezultă $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [0, 2a]$. Să presupunem că $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [0, na)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci relația dată se poate scrie $a\int_{na}^x f^2(t)\,dt \leqslant \left(\int_{na}^x f(t)\,dt\right)^2$ Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski găsim

$$\left(\int_{na}^x f^2(t)\,dt\right)^2 \leqslant (x - na)\int_{na}^x f^2(t)\,dt \text{ și deci}$$

$$a\int_{na}^x f^2(t)\,dt \leqslant (x - na)\int_{na}^x f^2(t)\,dt. \tag{3}$$

Dacă presupunem că $(\exists)\ c \in [na, (n+1)a)$ astfel ca $f(c) \neq 0$, atunci $\int_{na}^{a} f^2(t)\,dt \neq 0$ şi din (3) rezultă că $a(n+1) \leqslant x$, contradicţie. Deci $f(x) = 0$, $(\forall) x \in [na, (n+1)a)$ şi, deoarece f este continuă, rezultă că $f(x) = 0$, $(\forall) x \in [0, (n+1)a]$. Trecînd la limită, după n, rezultă că f este constantă pe $\mathbf{R}_+$.

3. Fie $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_0$ un polinom pentru care funcţia polinomială ataşată este pară. Să construim un polinom $Q(x)$ pentru care $P(x) = Q(x)Q(-x)$. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$. Atunci $P(x) = a_{2n}(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{2n})$. Deoarece $P(-x) = a_{2n}(-x - x_1)(-x - x_2) \ldots (-x - x_{2n}) = a_{2n}(x + x_1)(x + x_2) \ldots (x + x_{2n})$ se observă că dacă polinomul P admite ca rădăcini pe x_i, atunci admite şi pe $-x_i$. Deci putem nota rădăcinile polinomului P cu $y_1, y_2, \ldots, y_n, -y_1, -y_2, \ldots, -y_n$, şi atunci $P(x) = a_{2n}(x - y_1)(x - y_2) \ldots (x - y_n)(x + y_1) \ldots (x + y_n)$. Deci, dacă notăm $Q(x) = \lambda(x - y_1) \ldots (x - y_n)$, atunci $Q(-x) = \lambda(-1)^n(x + y_1) \ldots (x + y_n)$ şi pe λ îl determinăm din relaţia $\lambda^2(-1)^n = a_{2n}$. Reciproc, dacă $P(x) = Q(x)Q(-x)$, atunci $P(-x) = Q(-x)Q(x)$ şi deci $P(x) = P(-x)$, adică funcţia polinomială este pară.

4. Derivînd relaţia dată obţinem $2xf'(x^2) - f(x) = xf'(x)$ sau

$$2xf(x^2) = (x+1)f(x). \tag{1}$$

Dacă notăm $f(x) = \dfrac{x-1}{x \ln x} g(x)$ pentru $x \in (1, \infty)$ şi înlocuim în (1) obţinem $2x \dfrac{x^2 - 1}{x^2 \ln x^2} g(x^2) = \dfrac{x^2 - 1}{x \ln x} g(x)$, $(\forall)\ x \in (1, \infty)$, de unde rezultă că $g(x^2) = g(x)$. Să determinăm funcţiile $g : [1, \infty) \to \mathbf{R}$, astfel ca g să fie continuă şi $g(x^2) = g(x)$. Dar $(\forall)\ x_0 \in [1, \infty)$ avem $g(x_0) = g(\sqrt{x_0}) = g(\sqrt[4]{x_0}) = \ldots = g(\sqrt[2^n]{x_0})$. Trecînd la limită pentru $n \to \infty$ avem $g(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\sqrt[2^n]{x_0}) = g(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{x_0}) = g(1)$, $(\forall)\ x_0 \in [1, \infty)$, de unde rezultă că g este funcţia constantă. Notăm $g(x) = k$, $(\forall)\ x \in [1, \infty)$. Deci funcţiile căutate sînt de forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k(x-1)}{x \ln x}, & x \in (1, \infty), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Să arătăm că funcţiile găsite verifică relaţia dată, adică $\int_x^{x^2} \dfrac{k(t-1)}{t \ln t}\,dt = \int_1^x \dfrac{k(t-1)}{t \ln t}\,dt$. Pentru $k = 0$ este evident. Să presupunem $k \neq 0$; atunci $\int_x^{x^2} \dfrac{t-1}{t \ln t}\,dt = \int_1^x \dfrac{t-1}{\ln t}\,dt \Leftrightarrow \int_1^{x^2} \dfrac{t-1}{t \ln t}\,dt - \int_1^x \dfrac{t-1}{t \ln t}\,dt = \int_1^x \dfrac{t-1}{\ln t}\,dt \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \int_1^{x^2} \dfrac{t-1}{t \ln t}\,dt = \int_1^x \dfrac{t^2-1}{t \ln t}\,dt$.

În cea de-a doua integrală facem schimbarea de variabilă $t = \sqrt{y}$ şi obţinem $\int_1^x \dfrac{t^2-1}{t \ln t}\,dt = \int_1^{x^2} \dfrac{y-1}{y \ln y}\,dy$, adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Anul 1980

Etapa județeană

1. a) Vom arăta că $(\forall)\, x, y \in K^* = K \setminus \{e\}$, $x \neq y \Rightarrow xy = z \in K^* \setminus \{x, y\}$. Într-adevăr dacă am presupune $xy = x$ sau $xy = y$, atunci ar rezulta $x(xy) = x^2 = e$, sau $(xy)y = y^2 = e \Leftrightarrow x^2y = e$ sau $xy^2 = e \Leftrightarrow y = e$ sau $x = e$, ceea ce contrazice $x, y \in K^*$. Dacă am presupune $xy = e$, atunci ar rezulta $x(xy) = xe = x \Leftrightarrow x^2y = x \Leftrightarrow y = x$, ceea ce contrazice $x \neq y$. Deci dacă $x, y \in K^*$, $x \neq y$, atunci $xy = z \in K \setminus \{e, x, y\}$. Tabla operației lui K este

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

de unde se observă că grupul $(K, \cdot)$ este abelian. b) Presupunem contrariul, adică $\mathbf{Z}_4 \simeq K$, deci $(\exists)\, f : K \to \mathbf{Z}_4$, unde f este morfism bijectiv de grupuri. Rezultă atunci că $(\forall)\, \hat{y} \in \mathbf{Z}_4$, $(\exists)\, x \in K$ astfel încît $f(x) = \hat{y}$. Fie $\hat{1} \in \mathbf{Z}_4$; atunci $(\exists)\, x \in K$ astfel încît $f(x) = \hat{1}$ și deci $\hat{0} = f(e) = f(x^2) = f(xx) = f(x) + f(x) = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2} \Leftrightarrow \hat{0} = \hat{2}$, ceea ce este o contradicție. Deci $K \not\simeq \mathbf{Z}_4$. c) Fie G un grup cu patru elemente. Atunci avem următoarele două situații: i) există un element de ordinul 4, $x \in G$, și G este generat de x, adică $G = \{x, x^2, x^3, x^4 = e\}$ și în acest caz $G \simeq \mathbf{Z}_4$; ii) toate elementele lui G au ordinul strict mai mic decît 4. Teorema lui Lagrange ne asigură că ordinul oricărui element al grupului G este divizor al numărului elementelor lui G. Deoarece ord $x < 4$, $(\forall)\, x \in G$ rezultă că ord $x \in \{1, 2\}$, $(\forall)\, x \in G$ și, cum ord $x = 1 \Rightarrow x = e$, rezultă că $(\forall)\, x \in G^* = G \setminus \{e\}$ are loc $x^2 = e$ și deci $G \simeq K$. Dăm acum cîteva exemple de grupuri izomorfe cu $\mathbf{Z}_4$ și de grupuri izomorfe cu K.

1) Fie $E = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ și $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, A, B, E\}$. Dacă definim $\Delta : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, atunci tabla de operație este

Δ	$\emptyset$	A	B	E
$\emptyset$	$\emptyset$	A	B	E
A	A	$\emptyset$	E	B
B	B	E	$\emptyset$	A
E	E	B	A	$\emptyset$

și deci $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ este un grup izomorf cu K.

2) Fie Ox și Oy două axe perpendiculare în planul π. Notăm cu e transformarea identică a planului π, cu S_x simetria față de Ox, cu S_y simetria față de Oy și S_0 simetria față de O. Atunci compunerea transformărilor definește pe $\{e, S_x, S_y, S_0\}$ o structură de grup și $\{e, S_x, S_y, S_0\} \simeq K$. Într-adevăr, avem tabla de operație

$\circ$	e	S_x	S_y	S_0
e	e	S_x	S_y	S_0
S_x	S_x	e	S_0	S_y
S_y	S_y	S_0	e	S_x
S_0	S_0	S_y	S_x	e

Orice grup izomorf cu K se numește grup al lui Klein.

3) Să considerăm mulțimea S_4 a permutărilor mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$. Fie $G=\{e, f_1, f_2, f_3\} \subset S_4$ cu $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $f_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; $(G, \circ)$, unde „$\circ$" este compunerea permutărilor, formează un grup izomorf cu $\mathbf{Z}_4$.

2. a) $\xi_n^n=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$. Avem: $\xi_n^k=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n}=2p\pi \Leftrightarrow k=np,\ p\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow n \mid k$.

b) $(\xi_m\xi_n)^{mn}=(\xi_m^m)^n(\xi_n^n)^m=1\cdot 1=1$. Dacă $(\xi_m\xi_n)^k=1$, atunci $\cos\frac{2k(m+n)\pi}{mn}+$ $+i\sin\frac{2k(m+n)\pi}{mn}=1$, de unde rezultă că există $p\in\mathbf{Z}$ astfel încît $\frac{2k(m+n)\pi}{mn}=$ $=2p\pi \Leftrightarrow k(m+n)=pmn$ și, cum $(m, n)=1$, rezultă că $mn \mid k$. Cu aceasta problema este rezolvată.

3. a) Să considerăm funcția

$$g:[-1, 1]\to\mathbf{R},\ g(x)=\begin{cases}2x, & x\in(0, 1],\\ 0, & x=0,\\ 5x, & x\in[-1, 0).\end{cases}$$

Funcția g este continuă pe intervalul $[-1, 1]$, deci este integrabilă pe $[-1, 1]$. Dacă o funcție g este integrabilă pe $[a, b]$ și dacă se modifică valorile funcției g într-o mulțime de puncte $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\subset[a, b]$, atunci funcția nou obținută este încă integrabilă și integralele celor două funcții sînt egale. Funcția f se obține din funcția g care este integrabilă, prin modificarea valorii în punctul $x=0$, de unde rezultă ca f este integrabilă pe $[-1, 1]$. Să demonstrăm că dacă $x, y\in[-1, 1]$ și $x<y$, atunci $\int_x^y f(t)\,dt=\frac{1}{2}(yf(y)-xf(x))$. Avem de analizat mai multe posibilități:

1) Dacă $x, y\in[-1, 0]$, $x<y$, atunci $\int_x^y f(t)\,dt=\int_x^y 5t\,dt=\frac{5}{2}t^2\Big|_x^y=$ $=\frac{5}{2}(y^2-x^2)=\frac{1}{2}(5y^2-5x^2)=\frac{1}{2}(yf(y)-xf(x))$.

2) Dacă $x, y\in[-1, 1]$, cu $x\in[-1, 0]$ și $y\in[0, 1]$, atunci $\int_x^y f(t)\,dt=$ $=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_0^y f(t)dt=\int_x^0 5t\,dt+\int_0^y 2t\,dt=\frac{5}{2}t^2\Big|_x^0+t^2\Big|_0^y=-\frac{2}{5}x^2+y^2=$ $=\frac{1}{2}(2y^2-5x^2)=\frac{1}{2}(yf(y)-xf(x))$.

3) Dacă $x, y\in[0, 1]$, cu $x<y$, atunci $\int_x^y f(t)\,dt=\int_x^y 2t\,dt=t^2\Big|_x^y=$ $=\frac{1}{2}(2y^2-2x^2)=\frac{1}{2}(yf(y)-xf(x))$. Prin urmare, $(\forall)\ x, y\in[-1, 1]$, cu $x<y$, avem $\int_x^y f(t)\,dt=\frac{1}{2}(yf(y)-xf(x))$.

b) Dacă $x \in [0, 1]$, atunci din proprietatea din enunț obținem

$$(1) \qquad 2\int_0^x f(t)\,dt = xf(x).$$

Notăm cu F funcția $F : (0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Întrucît f este integrabilă rezultă că f este mărginită și deci F este continuă. Din relația (1) deducem că (2) $2F(x) = xf(x)$, ceea ce arată că f este continuă pe intervalul $(0, 1]$. De aici rezultă că F este derivabilă și derivata sa este egală cu f. Deci (3) $F'(x) = f(x)$, $(\forall)x \in (0, 1]$. Din (2) și (3) rezultă că (4) $xF'(x) = 2F(x)$, $(\forall)x \in (0, 1]$. Dar, pe de altă parte, calculînd derivata funcției $\frac{F(x)}{x^2}$, obținem $\left(\frac{F(x)}{x^2}\right)' = \frac{x^2F'(x) - 2xF(x)}{x^4} = \frac{xF'(x) - 2F(x)}{x^3} = 0$, $(\forall)\, x \in (0, 1]$, de unde deducem că funcția $\frac{F(x)}{x^2}$ este constantă pe $(0, 1]$. Deci $\frac{F(x)}{x^2} = k_1$, unde $k_1 \in \mathbf{R}$ este o constantă și rezultă că $F(x) = k_1x^2$, de unde deducem că $f(x) = c_1x$, $c_1 \in \mathbf{R}$, $(\forall)\, x \in (0, 1]$. Rezultă deci că pentru $x \in (0, 1]$, $f(x) = c_1x$, unde $c_1 \in \mathbf{R}$. Analog deducem că $f(x) = c_2x$, $c_2 \in \mathbf{R}$, $(\forall)x \in [-1, 0)$. În concluzie, funcțiile $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ integrabile care verifică relația dată sînt

$$f(x) = \begin{cases} c_1x & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ c & \text{dacă } x = 0, \\ c_2x & \text{dacă } x \in [-1, 0), \end{cases}$$

unde c_1, c_2 și c sînt numere reale.

4. Dacă $1 \leqslant n \leqslant 8$ atunci probabilitatea este zero, deoarece sînt numai doi multipli de 3. Să considerăm $n \geqslant 9$; atunci n este de forma $3k$, $3k + 1$ sau $3k + 2$. Să calculăm numărul de cazuri posibile. Problema calculului numărului de cazuri posibile este echivalentă cu determinarea numărului de funcții definite pe o mulțime cu n elemente cu valori într-o mulțime de 3 elemente. Prin urmare, sînt 3^n cazuri posibile; să calculăm numărul de cazuri favorabile. Deoarece avem $k = \left[\frac{n}{3}\right]$ multipli de 3, numărul de cazuri favorabile se calculează în felul următor. Într-o urnă se repartizează 3 bile care sînt multipli de 3 iar în celelalte 2 urne restul de $n - 3$ bile. Prin urmare, dacă $n = 3k$, atunci numărul de cazuri favorabile este $3C_k^3 \cdot 2^{3k-3}$ și probabilitatea este $p = \frac{3C_k^3 \cdot 2^{3k-3}}{3^{3k}} = \frac{C_k^3 \cdot 2^{3k-3}}{3^{3k-1}}$. Dacă $n = 3k + 1$, atunci numărul de cazuri favorabile este $3C_k^3 \cdot 2^{3k-2}$ și deci $p = \frac{3C_k^3 \cdot 2^{3k-2}}{3^{3k+1}} = \frac{C_k^3 \cdot 2^{3k-2}}{3^{3k}}$, iar dacă $n = 3k + 2$, atunci numărul de cazuri favorabile este $3C_k^3 \cdot 2^{3k-1}$ și deci $p = \frac{3C_k^3 \cdot 2^{3k-1}}{3^{3k+2}} = \frac{C_k^3 \cdot 2^{3k-1}}{3^{3k+1}}$.

Etapa finală

1. Fie $P \in \mathbf{R}[X]$, $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \quad + a_1X + a_0$, $a_n \neq 0$. Să arătăm că

$$(1) \qquad \begin{aligned} P(x^2) = P^2(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} &\Leftrightarrow a_nx^{2n} + a_{n-1}x^{2(n-1)} + \ldots + a_1x^2 + a_0 = \\ &= (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \quad + a_1x + a_0)^2,\ (\forall)x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Presupunem că $(\exists)\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ astfel încît $a_k \in \mathbf{R}^*$ și $a_s = 0$, $(\forall) s \in \{k+1, k+2, \ldots, n-1\}$; atunci $P(x) = a_n x^n + a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $P(x^2) = a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + a_{k-1} x^{2(k-1)} + \ldots + a_1 x^2 + a_0$ și atunci relația (1) devine

$$(2)\quad \begin{aligned}(a_n x^n + a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0)^2 &= a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + \\ + a_{k-1} x^{2(k-1)} + \quad + a_1 x^2 + a_0,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

În membrul sting al relației (2) coeficientul lui x^{n+k} este $2a_n a_k \in \mathbf{R}^*$ iar în membrul drept al acestei relații nu există un termen x^{n+k} deoarece $2n > n + k > 2k$. Prin urmare, presupunerea că $(\exists)\, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ astfel încît $a_k \in \mathbf{R}^*$ și $a_s = 0$, $(\forall) s \in \{k+1, k+2, \ldots, n-1\}$, cu $P(x^2) = P^2(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, este absurdă. Rezultă atunci că $P = a_n X^n$ și deci $P(x^2) = P^2(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow a_n x^{2n} = a_n^2 x^{2n}$, $(\forall) x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow a_n^2 = a_n \Leftrightarrow a_n = 1 \Leftrightarrow P = X^n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ și deci, dacă mai ținem seama că $P = 0$, $P = 1$ satisfac condiția din enunț, rezultă că $P \in \{0, 1, X^n\}$, cu $n \in \mathbf{N}^*$.

2. Fie $(R, +, \cdot)$, un inel care este domeniu de integritate și $(R^*, \cdot)$ grupul unităților lui R (mulțimea elementelor inversabile ale lui R). Dacă $a \in R^*$ atunci $-a \in R^*$. Într-adevăr, $a \in R^* \Rightarrow (\exists)\, a^{-1} \in R^*$ astfel încît $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, unde 1 este unitatea inelului R, adică a grupului $(R^*, \cdot)$ și deci $(-a)(-a^{-1}) = a \cdot a^{-1} = 1$, $(-a^{-1}) \cdot (-a) = a^{-1} \cdot a = 1$. În particular $-1 \in R^*$. Presupunem că $(R, +) \simeq (R^*, \cdot)$, adică există izomorfismul $f : R \to R^*$ cu $f(x+y) = f(x)f(y)$, $(\forall)\, x, y \in R$. Deoarece $-1 \in R^*$ și f este izomorfism rezultă că există $x \in R$ astfel încît $f(x) = -1$. Se mai știe că $f(0) = 1$. Avem $f(x+x) = f(x)f(x) = (-1) \cdot (-1) = 1 = f(0)$ și, cum f este bijectivă, rezultă că $x + x = 0 \Leftrightarrow (1+1) \cdot x = 0$. Deoarece $(R, +, \cdot)$ este domeniu de integritate, din $(1+1)x = 0$ rezultă $x = 0$ sau $1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = -1$. Prin urmare, oricare ar fi $y \in R$ avem $y + y = (1+1)y = 0$ și deci $f^2(y) = f(y+y) = f(0) = 1$, $(\forall) y \in R \Leftrightarrow (f(y) - 1)(f(y) + 1) = 0$, $(\forall)\, y \in R \Leftrightarrow f(y) = 1$ sau $f(y) = -1$, $(\forall) y \in R$ și deoarece $1 = -1$ rezultă că $f(y) = 1$, $(\forall)\, y \in R$. Deci $f(R) = \{1\}$ și, cum f este surjectivă, rezultă că $R^* = \{1\}$. și deoarece f este bijecție rezultă card R = card $R^* = 1$. Acesta este un rezultat contradictoriu deoarece $0, 1 \in R$, și deci card $R \geqslant 2$. Prin urmare $(R, +) \not\simeq (R^*, \cdot)$ și problema este rezolvată.

3. Deoarece f este continuă rezultă că f admite primitive pe $[0, 1]$. Fie $F : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o primitivă a lui f. Deci F este derivabilă și cu derivată continuă. Avem $\int_x^1 f(t)\, dt \geqslant \frac{1 - x^2}{2}$, $(\forall)\, x \in [0, 1] \Leftrightarrow F(1) - F(x) \geqslant \frac{1 - x^2}{2}$, $(\forall)\, x \in [0, 1]$, de unde prin integrare deducem

$$(1)\qquad \int_0^1 (F(1) - F(x))\, dx \geqslant \int_0^1 \frac{1 - x^2}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Pe de altă parte, din $(xF(x))' = xF'(x) + F(x) = xf(x) + F(x)$, $(\forall)\, x \in [0, 1]$, obținem

$$\int_0^1 (xF(x))'\, dx = \int_0^1 xf(x)\, dx + \int_0^1 F(x)\, dx \Leftrightarrow xF(x)\Big|_0^1 = \int_0^1 xf(x)\, dx +$$

$$(2)\qquad + \int_0^1 F(x)\, dx \Leftrightarrow F(1) - \int_0^1 F(x)\, dx = \int_0^1 xf(x)\, dx \Leftrightarrow \int_0^1 xf(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 (F(1) - F(x))\, dx,$$

şi dacă ţinem seama de (1) şi (2) deducem $\int_0^1 xf(x)\,dx \geqslant \frac{1}{3}$. Deoarece $(f(x)-x)^2 \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in [0, 1] \Leftrightarrow f^2(x) \geqslant 2xf(x) - x^2$, $(\forall)\, x \in [0, 1]$, prin integrare obţinem $\int_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant 2\int_0^1 xf(x)\,dx - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \geqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ şi problema este rezolvată.

4. a) Fie $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Deoarece f este continuă pe $\mathbf{R}$ rezultă că F este derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt = F(x+T) - F(x)$, de unde rezultă $g'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$, deoarece f este periodică de perioadă T. Prin urmare, g este constantă pe $\mathbf{R}$ şi atunci $g(x) = g(0) = \int_0^T f(t)\,dt$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Deci $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = g(a) = g(0) = \int_0^T f(x)\,dx$. b) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ vom nota $k_n = \left[\frac{n(b-a)}{T}\right]$ şi atunci $k_n \leqslant \frac{n(b-a)}{T} < k_n + 1 \Leftrightarrow k_nT \leqslant n(b-a) < k_nT + T \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow na + k_nT \leqslant nb < na + (k_n+1)T$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Făcînd substituţia $x = \varphi(t) = \frac{t}{n}$ şi $\varphi'(t) = \frac{1}{n}$, avem

$$I_n = \int_a^b f(nx)\,dx = \frac{1}{n}\left(\int_{na}^{nb} f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\int_{na}^{na+T} f(t)\,dt + \int_{na+T}^{na+2T} f(t)\,dt + \ldots + \int_{na+(k_n-1)T}^{na+k_nT} f(t)\,dt + \int_{na+k_nT}^{nb} f(t)\,dt\right) =$$

(1)

$$= \frac{1}{n}\left(\int_{na+k_nT}^{nb} f(t)\,dt + g(na) + g(na+T) + \quad + g(na+(k_n-1)T)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\int_{na+k_nT}^{nb} f(t)\,dt + k_n\int_0^T f(t)\,dt\right).$$

Deoarece $|f(t)| \geqslant 0$, $(\forall)\, t \in \mathbf{R}$, şi $na + (k_n+1)T > nb$, avem

(2) $$\left|\int_{na+k_nT}^{nb} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{na+k_nT}^{nb} |f(t)|\,dt \leqslant \int_{na+k_nT}^{na+(k_n+1)T} |f(t)|\,dt.$$

Totodată funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $h(t) = |f(t)|$ este periodică şi conform celor demonstrate la punctul a) avem $\int_{na+k_nT}^{na+(k_n+1)T} |f(t)|\,dt = \int_0^T |f(t)|\,dt$ şi atunci

(3) $$\left|\frac{1}{n}\int_{na+k_nT}^{nb} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\left(\int_0^T |f(t)|\,dt\right).$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^T |f(t)|\,dt = 0$ din (2) și (3) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_{na+k_nT}^{b} f(t)\,dt = 0. \tag{4}$$

Pe de altă parte, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{n(b-a)}{T}\right] = \frac{b-a}{T}. \tag{5}$$

Pe baza relațiilor (4) și (5), din (1) deducem că

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(nx)\,dx = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

Anul 1981

Etapa județeană

1. Considerăm $\varphi : (1, \infty) \to \mathbf{R}_+^*$, $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, unde $\varphi(t) = \ln t$, $\varphi^{-1}(x) = e^x$, $\varphi'(t) = t^{-1}$. Avem

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt = \int \frac{t-1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt -$$

$$- \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt = \ln(t + t^2 - 1) - \operatorname{arctg}\sqrt{t^2-1} + C.$$

Prin urmare,

$$\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1} + C = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right) +$$

$$+ \arcsin(e^{-x}) + C.$$

2. Fie $A = \{0, 1, a, b, c\}$ și $(A, +, \cdot)$ inelul dat. Vom demonstra mai întîi că $1+1+1+1+1 = 0$ și apoi că $1+1,\ 1+1+1,\ 1+1+1+1 \neq 0$. Este evident că oricare ar fi $x, y \in A$, $1 + x \neq 1 + y \Leftrightarrow x \neq y$. Putem deci spune că $\{1+0, 1+1, 1+a, 1+b, 1+c\} = A$ și atunci $(1+0)+(1+1)+(1+a)+(1+b)+(1+c) = 0+1+a+b+c \Leftrightarrow (1+1+1+1+1)+(0+1+a+b+c) = 0+1+a+b+c \Leftrightarrow 1+1+1+1+1 = 0$. Să mai observăm că $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$ și $(\forall)\ x \in A$ avem $\underbrace{1+1+\quad+1}_{k \text{ ori}} + x \neq \underbrace{1+1+\ldots+1}_{k-1 \text{ ori}} + x$, deoarece dacă am presupune că există $y \in A$ astfel încît $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k \text{ ori}} + y = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{k-1 \text{ ori}} + y$ ar rezulta $1 = 0$.

$1+1 \neq 0$. Presupunem deci că $1+1=0$; atunci $\{1+0, 1+1, 1+a, 1+b, 1+c\} = \{0, 1, a, b, c\}$, de unde rezultă $a = 1+b$, $b = 1+c$, $c = 1+a$ sau $a = 1+c$, $b = 1+a$, $c = 1+b$, de unde ar rezulta că $a+b+c = (1+1+1)+a+b+c \Leftrightarrow 0 = 1+1+1$ și, cum $1+1=0$, ar rezulta $1=0$, ceea ce este absurd. Deci $1+1 \neq 0$.

$1+1+1 \neq 0$. Presupunem că $1+1+1+1=0$. Atunci din $\{1+1, 1+1+1, 1+1+a, 1+1+b, 1+1+c\}=\{1, 1+1, 1+a, 1+b, 1+c\}$ și $1+1+1=0$ rezultă că $\{0, 1+1+a, 1+1+b, 1+1+c\}=\{1, 1+a, 1+b, 1+c\}$. Dacă $1+a=0$, atunci $1+1+a=1$, $1+1+b=1+c$, $1+1+c=1+b \Rightarrow$ $\Rightarrow (1+1+1+b)+(1+1+c)=(1+c)+(1+b) \Rightarrow 1+1+1+(1+b+c)=$ $=1+(1+b+c) \Rightarrow 1+1+1=1 \Rightarrow 1=0$, ceea ce este absurd. Analog dacă am presupune $1+b=0$ sau $1+c=0$ ar rezulta $1=0$. Prin urmare, $1+1+1 \neq 0$. $1+1+1+1 \neq 0$. Presupunem că $1+1+1+1+1=0$. Atunci $\{1+1+1, 1+1+1+1, 1+1+1+a, 1+1+1+b, 1+1+1+c\}=\{1+1, 1+1+1, 1+1+a, 1+1+b, 1+1+c\}$ și $1+1+1+1=0 \Rightarrow \{0, 1+1+1+a, 1+1+1+b, 1+1+1+c\}=\{1+1, 1+1+a, 1+1+b, 1+1+c\}$. Deoarece $1+1 \neq 0$ rezultă că am putea avea $1+1+a=0$ și atunci din egalitatea de mulțimi precedentă rezultă că $\{1, 1+1+1+b, 1+1+1+c\}=$ $=\{1+1, 1+1+b, 1+1+c\} \Rightarrow 1+1+1+b+c=1+1+b+c \Rightarrow 1=0$, ceea ce este absurd. Analog dacă am presupune $1+1+b=0$ sau $1+1+c=0$, ar rezulta $1=0$. Prin urmare, $1+1+1+1 \neq 0$. Cu aceasta am demonstrat că 5 este cel mai mic $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care $\underbrace{1+1+\quad+1+1}_{n \text{ ori}}=0$.

Să demonstrăm acum că inelul $(A, +, \cdot)$ este comutativ. Avem în vedere că $A=\{0, 1, a, b, c\}=\{0, 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1\}$. Dacă $x=0$, sau $y=0$, atunci $xy=yx=0$ iar dacă $x, y \in A^*=A \setminus \{0\}$, atunci $x=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{i \text{ ori}}$, $y=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{j \text{ ori}}$, cu $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Avem $xy=\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{i \text{ ori}}\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{j \text{ ori}}=$ $=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{ij \text{ ori}}$ și $yx=\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{j \text{ ori}}\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{i \text{ ori}}=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{ji \text{ ori}}$ și deoarece $ij=ji$ rezultă $xy=yx$. Prin urmare, oricare ar fi $x, y \in A$ avem $xy=yx$, adică inelul $(A, +, \cdot)$ este comutativ.

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup. O submulțime $H \subset G$ se numește subgrup al lui G dacă și numai dacă:

i) $(\forall)\, x, y \in H$, atunci $xy \in H$ (adică H este stabilă);

ii) $(\forall)\, x \in H$ atunci $x^{-1} \in H$.

Fie $F=\{f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$; atunci $(F, +)$ este grup abelian și dacă se consideră $F^*=\{f \in F \mid f(x) \neq 0, (\forall)\, x \in \mathbf{R}\}$, atunci $(F^*, \cdot)$ este grup abelian. Vom arăta mai departe că H_k este subgrup al lui $(F, +)$ iar G_m este subgrup al lui $(F^*, \cdot)$. Pentru orice $f_1 f_2 \in H_k$ este evident că f_1+f_2 este continuă și $(f_1+f_2)(k+x)+$ $+(f_1+f_2)(k-x)=0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, deci $f_1+f_2 \in H_k$, adică H_k este stabilă față de „+". Pentru orice $f \in H_k$ avem $(-f)(k+x)+(-f)(k-x)=0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, de unde rezultă că $-f \in H_k$. Cu aceasta am demonstrat că $(H_k, +)$ este subgrup al lui $(F, +)$ adică $(H_k, +)$ este grup. Fără dificultate se demonstrează că $(H_k, +) \simeq (H_m, +)$, $(\forall)\, k, m \in \mathbf{R}$. Pentru orice $g_1, g_2 \in G_m$ avem

$$(g_1 g_2)(m)=g_1(m)g_2(m)=1 \cdot 1=1 \text{ și}$$

$$(g_1 g_2)(m+x)(g_1 g_2)(m-x)=g_1(m+x)g_2(m+x)g_1(m-x)g_2(m-x)=1, \ (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

Totodată, este evident că $g_1 g_2$ este continuă pe $\mathbf{R}$. Prin urmare, $g_1 g_2 \in G_m$, adică G_m este stabilă față de „·". Pentru orice $g \in G_m$ obținem $g(x) \neq 0$ $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Într-adevăr, presupunem că există $x_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît $g(x_0)=0$. Dacă în $g(m+x)g(m-x)=1$ înlocuim pe x cu $m-x_0$ rezultă $g(x_0)g(2m-x_0)=1 \Leftrightarrow 1=0$, ceea ce este absurd. Prin urmare, $g(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Mai departe vom demonstra

că $(\forall)\, g \in G_m$ avem $g(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Într-adevăr, să presupunem că există $x_1 \in \mathbf{R}$ astfel încît $g(x_1) < 0$. Deoarece g este continuă și $g(m) = 1 > 0$, rezultă că există $x_0 \in (\min(1, x_1), \max(1, x_1))$ astfel încît $g(x_0) = 0$ iar aceasta este în contradicție cu faptul că $g(x) \neq 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ (a se vedea demonstrația de mai sus). Cu aceasta am demonstrat că $g(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Deoarece $g(x) > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, rezultă că $(\forall)\, g \in G_m$ are sens $\frac{1}{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Totodată, avem $\frac{1}{g}(m) = \frac{1}{g(m)} = 1$ și $\frac{1}{g}(m + x) + \frac{1}{g}(m - x) = \frac{1}{g(m + x)g(m - x)} = 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, adică $\frac{1}{g} \in G_m$. Cu aceasta am demonstrat că $(G_m, \cdot)$ este subgrup al grupului $(F^*, \cdot)$, adică $(G_m, \cdot)$ este grup. Fie $u : G_m \to H_m$, cu $u(g) = \ln g$, $(\forall)\, g \in G_m$; atunci $u(g_1 g_2) = \ln g_1 + \ln g_2$, $(\forall) g_1, g_2 \in G_m$, adică u este morfism de grupuri. Este evident că u este injectivă și surjectivă, adică $(G_m, \cdot) \simeq (H_m, +)$. Deoarece

$$(H_m, +) \simeq (H_k, +),\ (\forall)\, m, k \in \mathbf{R} \text{ și } (G_m, \cdot) \simeq (H_m, +)$$

rezultă că $(G_m, \cdot) \simeq (H_k, +)$, $(\forall)\, m, k \in \mathbf{R}$.

4. Fie $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o primitivă a lui f. Deoarece F este derivabilă pe $\mathbf{R}$ rezultă că F este continuă pe $\mathbf{R}$ și deci admite primitive pe $\mathbf{R}$. Fie $H \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o primitivă a lui F pe $\mathbf{R}$. Funcția $G_- : \mathbf{R}_-^* \to \mathbf{R}$, $G_-(x) = -xF(x) + H(x) - H(0)$ este o primitivă a lui g pe $\mathbf{R}_-^*$ iar funcția $G_+ : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $G_+(x) = xF(x) - H(x) + H(0)$ este o primitivă a lui g pe $\mathbf{R}_+^*$. Vom demonstra că funcția $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = G_-(x)$ pentru $x \in \mathbf{R}_-^*$, $G(0) = 0$, $G(x) = G_+(x)$ pentru $x \in \mathbf{R}_+^*$, este o primitivă a lui g pe $\mathbf{R}$. Într-adevăr,

$$G'(x) = \begin{cases} G'_-(x) & \text{dacă } x \in \mathbf{R}_-^* \\ G'_+(x) & \text{dacă } x \in \mathbf{R}_+^* \end{cases} = g(x),\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}^*.$$

Mai departe, avem

$$G'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{G_+(x) - G(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-xF(x) + H(x) - H(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-F(x) + \frac{H(x) - H(0)}{x}\right) = -F(0) + H'(0) = -F(0) + F(0) = 0 = g(0)$$

și

$$G'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{G_+(x) - G(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{xF(x) - H(x) + H(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(F(x) - \frac{H(x) - H(0)}{x}\right) = F(0) - H'(0) = F(0) - F(0) = 0 = g(0).$$

Deoarece $G'_s(0) = G'_d(0) = g(0)$ rezultă că G este derivabilă și în $x = 0$ și $G'(0) = g(0)$. Prin urmare, G este o primitivă a lui g și $G + C$ este mulțimea primitivelor lui g pe $\mathbf{R}$.

Etapa finală

1. Arătăm mai întîi că într-un asemenea inel, avem $y = -y \Leftrightarrow 2y = 0$, $(\forall)\, y \in A$. Într-adevăr, $y = y^6 = (-y)^6 = -y$. Fie acum $x \in A$, arbitrar. Deoarece elementele x și 1 comută la înmulțire, funcționează formula binomului

lui Newton pentru o putere de forma $(x+1)^n$, cu $n \in \mathbf{N}^*$. Putem scrie succesiv

$$x+1=(x+1)^6=x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1=$$
$$=x^6+x^4+x^2+1+2(3x^5+7x^4+10x^3+7x^2+3x)=x^6+x^4+x^2+1,$$

unde am ținut seama că $2y=0$, cu $y=3x^5+7x^4+10x^3+7x^2+3x$. Din $x+1=x^6+x^4+x^2+1$ rezultă $x+1=x+x^4+x^2+1$, de unde deducem $x^4+x^2=0$. Rezultă deci că $x^4=-x^2=x^2$ și, prin urmare, $x^4=x^2$, de unde obținem în final că $x=x^6=x^2x^4=x^2x^2=x^4=x^2$, adică $x^2=x$.

2. a) Să observăm că într-un corp K singurele elemente care coincid cu inversele lor sînt 1 și -1. Într-adevăr, pentru $x \in K$ avem succesiv $x=x^{-1} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$ sau $x=-1$. Rezultă că fiecare element din celelalte elemente nenule este diferit de inversul său și atunci mulțimea elementelor nenule se va putea scrie grupînd fiecare element cu inversul său, adică

$$K^*=K\setminus\{0\}=\{1,\ -1,\ a_1,\ a_1^{-1},\ a_2,\ a_2^{-1},\ \ldots,\ a_n,\ a_n^{-1}\}. \tag{1}$$

Rezultă că produsul tuturor elementelor din K este egal cu -1. *Observație.* Atragem atenția asupra faptului că din scrierea (1) nu rezultă neapărat că mulțimea K are un număr pàr de elemente: de exemplu, în cazul corpurilor de caracteristică 2 avem $1=-1$ și atunci K are un număr impar de elemente. b) Luînd corpul $K=\mathbf{Z}_p=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{p-1}\}$ al claselor de resturi modulo p, cu p număr prim, vom avea $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\ldots\cdot\widehat{p-1}=\widehat{-1}$ sau $(\widehat{p-1})!+\hat{1}=\hat{0}$, ceea ce ne arată că $(p-1)!+1$ se divide cu p. Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de teorema lui Wilson și este valabil și sub forma reciprocă, adică: dacă p divide $(p-1)!+1$, atunci p este număr prim. Într-adevăr, dacă p ar avea un divizor propriu, acesta ar divide $(p-1)!$ și din relația dată rezultă că el divide și pe 1, ceea ce este absurd. În acest fel, teorema lui Wilson poate fi interpretată drept o caracterizare a numerelor prime.

3. Ideea demonstrației că h nu are primitive este aceea de a arăta că h nu are proprietatea lui Darboux. Funcțiile f și g fiind diferite rezultă că există $x_0 \in (a, b)$ astfel încît $f(x_0) \neq g(x_0)$ și să presupunem că $f(x_0)<g(x_0)$ (în mod analog s-ar trata cazul cînd am avea $f(x_0)>g(x_0)$). Funcția f fiind continuă în x_0, putem scrie:

$$(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ \delta_{1,\varepsilon}>0 \text{ astfel încît } x \in (x_0-\delta_{1,\varepsilon},\ x_0+\delta_{1,\varepsilon}) \cap (a, b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon).$$

Funcția g fiind continuă în x_0, putem scrie:

$$(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ \delta_{2,\varepsilon}>0 \text{ astfel încît } x \in (x_0-\delta_{2,\varepsilon},\ x_0+\delta_{2,\varepsilon}) \cap (a, b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(x) \in (g(x_0)-\varepsilon,\ g(x_0)+\varepsilon).$$

Luînd $\delta_\varepsilon=\min(\delta_{1,\varepsilon},\ \delta_{2,\varepsilon})$ vom avea:

$x \in (x_0-\delta_\varepsilon,\ x_0+\delta_\varepsilon) \cap (a, b) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$ și $g(x) \in (g(x_0)-\varepsilon,\ g(x_0)+\varepsilon)$.

Deoarece $x_0 \in (a,b)$ rezultă că $I=(x_0-\delta_\varepsilon,\ x_0+\delta_\varepsilon) \cap (a,b)$ este un interval; să alegem $0<\varepsilon<\dfrac{g(x_0)-f(x_0)}{2}$; atunci $f(x_0)+\varepsilon<g(x_0)-\varepsilon$ și astfel intervalele $(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$ și $(g(x_0)-\varepsilon,\ g(x_0)+\varepsilon)$ sînt disjuncte. Vom arăta că $h(I)$ nu este interval; într-adevăr, dacă $x \in I \cap \mathbf{Q}$, atunci $h(x)=f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$, iar dacă $x \in I \cap (\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})$, atunci $h(x)=g(x) \in (g(x_0)-\varepsilon,\ g(x_0)+\varepsilon)$; cele două intervale fiind disjuncte, rezultă că $h(I)$ nu poate fi un interval. Cu aceasta am dovedit că funcția h nu are proprietatea lui Darboux și deci nu admite primitive.

4. Funcția f fiind integrabilă Riemann este mărginită, deci $(\exists)\ M > 0$ astfel încît $|f(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$. Să notăm $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \quad \frac{n-1}{n}, 1\right)$ și

$$x_n = \frac{\left|f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right|^a + \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right)\right|^a + \quad + \left|f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f\left(\frac{n}{n}\right)\right|^a}{n}.$$

Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem $\left|f\left(\frac{i-1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right| + \left|f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leqslant 2M$ și, cum $a - 1 \geqslant 0$, ridicînd inegalitatea obținută la puterea $a - 1$, aceasta se menține; avem deci: $\left|f\left(\frac{i-1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right|^{a-1} \leqslant (2M)^{a-1}$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \quad n\}$.

Să mai notăm $m_i = \inf f(x)$ și $M_i = \sup f(x)$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ și să observăm că $\left|f\left(\frac{i-1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leqslant M_i - m_i$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \quad n\}$. Cu această pregătire putem scrie

$$0 \leqslant x_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|f\left(\frac{i-1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right|^a}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left|f\left(\frac{i-1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right|^{a-1} \left|f\left(\frac{i-1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (2M)^{a-1}(M_i - m_i) = (2M)^{a-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)M_i - \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)m_i\right) =$$

$$= (2M)^{a-1}(S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n})$$

unde S_{Δ_n}, s_{Δ_n} sînt, respectiv, suma Darboux superioară și suma Darboux inferioară ale funcției f corespunzătoare diviziunii Δ_n. Funcția f fiind integrabilă Riemann, ținînd seama de criteriul de integrabilitate al lui Darboux, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n}) = 0$. Deoarece $0 \leqslant x_n \leqslant (2M)^{a-1}(S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n})$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Anul 1982

Etapa județeană

1. a) Considerăm șirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$, unde

$$\Delta_n = \left(0, \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \quad + a_n}, \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + \quad + a_n} \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{a_1 + a_2 + \quad + a_n}, \quad 1\right);$$

avem $\|\Delta_n\| = \frac{\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{a_1 + a_2 + \quad + a_n} \to 0$; alegînd punctele intermediare

$$\xi_k^n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{a_1 + a_2 + \quad + a_n},\ k \in \{1, 2, \quad n\},$$ observăm ușor că

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_k^n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{a_1 + a_2 + \quad + a_n}\right) \cdot \frac{a_k}{a_1 + a_2 + \quad + a_n},$$

deci limita acestui șir de sume Riemann va fi tocmai $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Considerăm șirul de diviziuni $\Delta'_n = \left(0, \frac{1^2}{n^2}, \frac{2^2}{n^2}, \ldots, \frac{k^2}{n^2}, \ldots, 1\right)$, adică avînd punctele de diviziune $x_k^n = \frac{k^2}{n^2}$, $k \in \{0, 1, \quad n\}$. Avem $x_k^n - x_{k-1}^n = \frac{2k-1}{n^2} \leqslant \frac{2n-1}{n^2}$, deci $\| \Delta'_n \| \to 0$. Alegînd și punctele intermediare $\xi_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n]$, $\xi_k^n = x_k^n = \frac{k^2}{n^2}$, $k \in \{1, 2, \quad n\}$, avem:

$$\sigma_{\Delta'_n}(f, \xi_k^n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2} f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) -$$

$$- \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k^2}{n^2}\right), \text{ de unde}$$

$$(1) \qquad \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \sigma_{\Delta'_n}(f, \xi_k^n) + \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k^2}{n^2}\right).$$

Funcția f fiind integrabilă, este mărginită, deci $(\exists)\ M > 0$, cu $|f(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$. Atunci $\left|\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k^2}{n^2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} \left|f\left(\frac{k^2}{n^2}\right)\right| \leqslant \frac{nM}{2n^2} \to 0$, deci termenul al doilea din membrul drept al egalității (1) are limita 0. Atunci, trecînd la limită în (1), obținem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)\, dx.$$

2. Arătăm că $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, $(\exists)\ g_n \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție care admite primitive, astfel încît

$$(1) \qquad f_{n+1} = \frac{1}{n+1} g_n + \frac{n}{n+1} f_{n-1}.$$

Într-adevăr, fie funcția $h_n \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin^n \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ Funcția h_n este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și avem

$$h'_n(x) = \begin{cases} 2x \sin^n \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} - n \sin^{n-1} \frac{1}{x} \cos^2 \frac{1}{x} + \sin^{n+1} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x \sin^n \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} + (n+1) \sin^{n+1} \frac{1}{x} - n \sin^{n-1} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Funcția $k_n \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $k_n(x) = \begin{cases} 2x \sin^n \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbf{R}$

și deci admite primitive. Atunci luăm $g_n \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g_n = h_n' - k_n$ care va admite primitive și vom avea

$$g_n(x) = \begin{cases} (n+1)\sin^{n+1}\dfrac{1}{x} - n\sin^{n-1}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = (n+1)f_{n+1}(x) - nf_{n-1}(x),$$

$(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, de unde rezultă (1). a) Din (1) pentru $n=1$ obținem $f_2 = \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}f_0$; dar g_1 are primitive în timp ce f_0 nu are primitive (neavînd proprietatea lui Darboux) și atunci f_2 nu are primitive. Pentru $n = 2$ obținem $f_3 = \frac{1}{3}g_2 + \frac{2}{3}f_1$; cum g_2 are primitive, iar f_1 are de asemenea primitive (vezi *Analiză matematică*. Manual pentru clasa a XII-a), rezultă că f_3 are primitive. b) Arătăm prin inducție că f_{2n+1} are primitive, iar f_{2n} nu are primitive, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Pentru $n = 1$ este adevărat (am văzut că f_1 are primitive, iar f_2 nu are primitive). Presupunem enunțul adevărat pentru n și să arătăm pentru $n+1$. Din (1) avem $f_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}g_{2n} + \frac{2n}{2n+1}f_{2n-1}$. Cum g_{2n} are primitive, iar în baza ipotezei de inducție f_{2n-1} are de asemenea primitive, rezultă că f_{2n+1} are primitive. Tot din (1) avem $f_{2n+2} = \frac{1}{2n+2}g_{2n+1} + \frac{2n+1}{2n+2}f_{2n}$. Cum g_{2n+1} are primitive, iar în baza ipotezei de inducție f_{2n} nu are primitive, rezultă că f_{2n+2} nu are primitive.

3. a) Avem $ab \in K$, dar nu putem avea $ab = 0$ (un corp nu are divizori ai lui zero), nici $ab = a$ (ar rezulta $b = 1$) nici $ab = b$ (ar rezulta $a = 1$), deci $ab = 1$. Analog $ba = 1$; b) Avem $a^2 \in K$, dar nu putem avea $a^2 = 0$ (ar rezulta $a = 0$), nici $a^2 = 1$ (căci și $ab = 1$, deci am avea $a^2 = ab$, deci $a = b$), nici $a^2 = a$ (ar rezulta $a=1$) și deci $a^2 = b$. Atunci $a^3 = a^2a = ba = 1$. Rezultă $a^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a-1)(a^2+a+1) = 0$ și cum $a - 1 \neq 0$ deducem $a^2 + a + 1 = 0$; c) Avem $a + 1 \in K$, dar nu putem avea $a + 1 = 0$ (ar rezulta $a = -1$, deci $a^2 = 1$, dar cum $a^2 = b$, am avea $b = 1$), nici $a + 1 = a$ (ar rezulta $1 = 0$), nici $a + 1 = 1$ (ar rezulta $a = 0$), deci $a + 1 = b$. Cum $b = a^2$ deducem $a + 1 = a^2$ și relația stabilită $a^2 + a + 1 = 0$ devine $a^2 + a^2 = 0$ sau $a^2(1+1) = 0$ și, cum $a^2 \neq 0$, rezultă $1 + 1 = 0$. Pentru a completa tabla adunării, mai observăm că din $1 + 1 = 0$ rezultă $a + a = 0$ și $b + b = 0$; adunarea fiind comutativă mai trebuie să cunoaștem elementele $b + 1 \in K$ și $a + b \in K$. Nu putem avea $b + 1 = 0$ (ar rezulta $b = -1$, adică $a^2 = -1$, adică $a^2 + 1 = 0$ și, cum $a^2 + a + 1 = 0$, rezultă $a = 0$), nici $b + 1 = 1$ (ar rezulta $b = 0$), nici $b + 1 = b$ (ar rezulta $1 = 0$), deci $b + 1 = a$. Nu putem avea $a + b = 0$ (ar rezulta $a = -b$, deci $a^2 = b^2$, deci $b = b^2$, adică $b = 1$), nici $a + b = a$ (ar rezulta $b = 0$), nici $a + b = b$ (ar rezulta $a = 0$), deci $a + b = 1$. Tabela adunării va arăta astfel

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

Se observă ușor că grupul aditiv al corpului K este izomorf cu grupul lui Klein.

4. a) Fie $x = ba \Rightarrow x^2 = (ba)(ba) = b(ab)a = 0 \Rightarrow x = 0$, deci $ba = 0$. Pentru $x \in A$ arbitrar, notînd $y = axb$ avem $y^2 = (axb)(axb) = (ax)(ba)(xb) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 0$, deci $axb = 0$; b) Fie $x = a_2a_3a_1 \Rightarrow x^2 = (a_2a_3a_1)(a_2a_3a_1) = (a_2a_3)(a_1a_2a_3)a_1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow a_2a_3a_1 = 0$. Atunci din $a_2(a_3a_1) = 0$ rezultă și $(a_3a_1)a_2 = 0$, adică $a_3a_1a_2 = 0$;

c) Fie $y = a_{i_1}a_{i_2} \quad a_{i_n}$. Avem $y^n = (a_{i_1}a_{i_2} \quad a_{i_n})(a_{i_1}a_{i_2} \quad a_{i_n}) \quad (a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n})$, ($n$ paranteze). În prima paranteză la un moment dat apare a_1, să presupunem că $a_{i_k} = a_1$; în a doua paranteză apare a_2, să zicem $a_{i_l} = a_2$, apoi în a treia paranteză $a_{i_m} = a_3$ ș.a.m.d. (unde $k \neq l$, $k \neq m$, $l \neq m$, ...). Deci

$$(1) \qquad y^n = (a_{i_1}a_{i_2} \quad a_{i_{k-1}}a_1a_{i_{k+1}} \quad a_{i_n})(a_{i_1}a_{i_2} \quad a_{i_{l-1}}a_2a_{i_{l+1}} \quad a_{i_n})$$
$$(a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_{m-1}}a_3a_{i_{m+1}} \quad a_{i_n})$$

Avem $a_1a_2 \quad a_n = 0$; luînd $a = a_1$, $b = a_2a_3 \quad a_n$ și $x = a_{i_{k+1}} \quad a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_{l-1}}$, avem $ab = 0$, deci $axb = 0$, adică

$$(2) \qquad a_1a_{i_{k+1}} \quad a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2} \quad a_{i_{l-1}}a_2a_3 \quad a_n = 0.$$

Luăm acum $a = a_1a_{i_{k+1}} \quad a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_{l-1}}a_2$; $b = a_3a_4\dots a_n$ și $x = a_{i_{l+1}}\dots a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_{m-1}}$; din (2) avem $ab = 0$, deci $axb = 0$, adică $a_1a_{i_{k+1}} \quad a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2} \quad a_{i_{l-1}}a_2a_{i_{l+1}}$ $a_{i_n}a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_{m-1}}a_3a_4 \quad a_n = 0$.

Continuînd raționamentul, obținem din aproape în aproape întregul produs din membrul din dreata al relației (1) egal cu 0. Deci $y^n = 0$, de unde rezultă $y = 0$, adică $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n} = 0$.

Etapa finală

1. a) Pentru orice $x \in \mathbf{Q}(\sqrt{d_1})$ avem $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$, de unde rezultă că $f(0) = 0$. Deoarece f este un izomorfism de corpuri înseamnă că f este bijecție și deci $f(1) \neq f(0) = 0$ și atunci deducem că $f(1) = f(1\cdot 1) = f(1)f(1)$, de unde rezultă că $f(1) = 1$. Avem $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{Q}(\sqrt{d_1})$ și $1 = f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{Q}(\sqrt{d_1})$, $x \neq 0$. Prin inducție matematică se demonstrează că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem $f(nx) = nf(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{Q}(\sqrt{d_1})$ și deci dacă $n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, atunci $f(nx) = f(-|n|x) = -f(|n|x) = -f(|n|)f(x) = -|n|f(x) = nf(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{Q}(\sqrt{d_1})$. Pentru orice $u \in \mathbf{Q}$ și orice $x \in \mathbf{Q}(\sqrt{d_1})$ avem $f(ux) = f(u)f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right)f(x) = f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right)f(x) = f(p)f\left(\frac{1}{q}\right)f(x) = p \cdot \frac{1}{f(q)}f(x) = p \quad \frac{1}{q} \quad f(x) = \frac{p}{q}f(x) = u\,f(x)$, unde $p, q \in \mathbf{Z}^*$. Deoarece $d_1 \in \mathbf{Z}$ rezultă că $d_1 = \sqrt{d_1} \quad \sqrt{d_1}$ (dacă $d_1 < 0$, radicalul său va fi prin convenție $i\sqrt{|d_1|}$) și atunci $d_1 = f(d_1) = f(\sqrt{d_1} \quad \sqrt{d_1}) = f(\sqrt{d_1})f(\sqrt{d_1})$, de unde rezultă că $|f(\sqrt{d_1})| = \sqrt{d_1}$. Cum $f(\sqrt{d_1}) \in \mathbf{Q}(\sqrt{d_2})$ rezultă că $\sqrt{d_1} = a + b\sqrt{d_2}$ unde $a, b \in \mathbf{Q}$. Dacă presupunem că $a, b \in \mathbf{Q}^*$, atunci rezultă că $d_1 = a^2 + 2ab\sqrt{d_2} + b^2d_2$, de unde rezultă $\sqrt{d_2} \in \mathbf{Q}$ și deci d_2 n-ar fi liber de pătrate (am folosit faptul cunoscut că radicalul unui număr întreg liber de pătrate nu este rațional). Prin urmare, $a = 0$ sau $b = 0$. Dacă $b = 0$, atunci $\sqrt{d_1} = a \in \mathbf{Q}$ ceea ce arată că d_1 nu este liber de pătrate. Prin urmare, $a = 0$ și $b \in \mathbf{Q}^*$, adică $\sqrt{d_1} = b\sqrt{d_2}$. Din relația precedentă rezultă $d_1 = b^2d_2$ și deci d_1 n-ar fi liber de pătrate. Rezultă deci că $\sqrt{d_1} = \pm\sqrt{d_2}$, de unde deducem că $d_1 = d_2$. b) Conform cu cele demonstrate la punctul precedent, pentru

orice automorfism $f\ \mathbf{Q}(\sqrt{d}) \to \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ avem $f(a + b\sqrt{d}) = a + bf(\sqrt{d})$ și $|f(\sqrt{d})| = \sqrt{d}$. Deci dacă $f(\sqrt{d}) = \sqrt{d}$, atunci avem automorfismul $f(a + b\sqrt{d}) = a + b\sqrt{d}$, adică automorfismul identitate iar dacă $f(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$, atunci avem automorfismul $g(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$, adică automorfismul de conjugare.

2. Avem $[0, 1] \xrightarrow{g} [0, 1] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, $x = g(t) = t^2$ și atunci $\int_{g(0)}^{g(1)} f(x)\,dx = \int_0^1 (f \circ g)(t) g'(t)\,dt$, unde evident g este derivabilă și cu derivata continuă pe $[0, 1]$, iar $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Rezultă deci că $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(t^2) 2t\,dt = \int_0^1 2f(x^2)x\,dx$ și dacă mai ținem seama că $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, egalitatea din enunț devine $\int_0^1 (x - f(x^2))^2\,dx = 0$. Din ultima egalitate ținînd seama că funcția $(x - f(x^2))^2 \geqslant 0$, $(\forall) x \in [0, 1]$ rezultă că $(x - f(x^2))^2 = 0$, $(\forall)\, x = [0, 1] \Leftrightarrow f(x^2) - x = 0$, $(\forall)\, x \in [0,1] \Leftrightarrow f(x^2) = x$, $(\forall)\, x \in [0, 1] \Leftrightarrow f(t) = \sqrt{t}$ $(\forall) t \in [0,1]$.

3. a) Pentru orice $x \in A$ și orice $z \in A$, cu $z^3 =$ avem $(zxz - xz)^2 = (zxz - xz)(zxz - xz) = (zxz)^2 - (zxz)xz - xz(zxz) + (xz)^2 = (zxz)(zxz) - xz^2xz - (zx)^2z + (xz)^2 = (zxz^2xz - (xz)^2 - (zx)^2z + (xz)^2 = (zx)^2z - (zx)^2z = 0$ și dacă ținem seama de enunț rezultă că $zxz - xz = 0$. b) Un element $\in A$ se numește idempotent dacă $z^2 = z$. Conform celor demonstrate la punctul a oricare ar fi $z \in A$ element idempotent avem $zxz = xz$. Vom demonstra acum că dacă este idempotent, atunci oricare ar fi $x \in A$ avem $zxz - zx = 0$. Într-adevăr, $(zxz - zx)^2 = (zxz)^2 - (zxz)(zx) - (zx)(zxz) + (zx)^2 = (zxz)(zxz) - zxz^2x - (zx)^2z + (zx)^2 = zxzxz - (zx)^2 - (zx)^2z + (zx)^2 = (zx)^2z - (zx)^2z = 0$ și deci conform proprietății $x^2 = 0$ implică $x = 0$, rezultă că $zxz - zx = 0 \Leftrightarrow zxz = zx$. Prin urmare, oricare ar fi $z \in A$, cu $z^2 = z$, și oricare ar fi $x \in A$ avem $zxz = x = zx \Leftrightarrow z \in Z_A$.

4. Se observă că $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ și deci să considerăm funcția $g\ [0, 1] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{1 + x^2} - f(x)$ care este continuă pe $I = [0, 1]$ ca diferență de funcții continue pe I. Deoarece g este continuă, atunci g admite o primitivă G pe intervalul I. Dar g fiind continuă este integrabilă și conform formulei lui Leibniz-Newton avem $0 = \int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0)$. Deci G este derivabilă (prin urmare și continuă) pe I și $G(1) = G(0)$, deci prin aplicarea teoremei lui Rolle pe intervalul I rezultă că există $x_0 \in (0,1)$ astfel încît $G'(x_0) = 0$. Deoarece $g(x) = G'(x)$, $(\forall) x \in I$ rezultă că $g(x_0) = 0$, adică $f(x_0) = \frac{1}{1 + x_0^2}$ Deoarece $x_0 \in (0, 1)$ rezultă $x_0 > x_0^2 \Leftrightarrow 1 + x_0 > 1 + x_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + x_0} < \frac{1}{1 + x_0^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + x_0} < f(x_0)$. Totodată, $1 + x_2^0 > 2x_0 \Leftrightarrow (1 - x_0)^2 > 0$, de unde rezultă $\frac{1}{1 + x_0^2} < \frac{1}{2x_0} \Leftrightarrow f(x_0) < \frac{1}{2x_0}$. Cu aceasta problema este rezolvată.

Anul 1983

Etapa județeană

1. Mulțimea M înzestrată cu operația dată are proprietatea că:

(1) $$x(yx) = y, \qquad (\forall)\, x,\ y \in M.$$

Dacă în relația precedentă luăm $x = uv$, cu $u,\ v \in M$, și $y = v$ deducem

(2) $$(uv)\,(v(uv)) = v, \qquad (\forall) u,\ v \in M.$$

Conform cu (1) avem (3) $v(uv) = u$, $(\forall)\, u,\ v \in M$,
și prin urmare din (2) și (3) rezultă (4) $(uv)u = v$, $(\forall)\, u,\ v \in M$.

Cu aceasta a demonstra existența și unicitatea soluției ecuației $ax = b$ este echivalent cu a demonstra existența și unicitatea soluției unei ecuații de forma $xa = b$, adică a ecuației $a = bx$. i) *Existența.* Să demonstrăm deci existența soluției ecuației (5) $ax = b$.

Conform relației (1) se observă că (6) $x = ba$ este soluție a ecuației (5). ii) *Unicitatea.* Fie $c \in M$ o soluție a ecuației (5). Rezultă că $ac = b$ și totodată avem că ba este soluție a ecuației (5). De asemenea, $a(ba) = b$ și atunci avem (7) $a(ba) = b$, $b(cb) = c$, $c(ac) = a$. Din $ac = b$ prin înmulțire la stînga cu c rezultă $c(ac) = a = cb$, de unde $a = cb$ și, prin înmulțire la stînga cu b, deducem $ba = b(cb) = c$, adică $ba = c$ și cu aceasta unicitatea soluției ecuației (5) este demonstrată.

2. Fie $a,\ c \in G$ arbitrare. Din $f(ac) = f(a)f(c)$ și $g(ac) = g(a)g(c)$, deducem că (1) $(ac)^n = a^n c^n$ și (2) $(ac)^{n+1} = a^{n+1}c^{n+1}$. Deoarece $(ac)^{n+1} = (ac)^n(ac) = a^{n+1}c^{n+1}$ rezultă că $a^n c^n ac = a^{n+1}c^{n+1}$ și deci (3) $c^n a = ac^n$. Fie acum $a,\ b \in G$ arbitrare. Deoarece f este surjecție deducem că $(\exists)\ c \in G$ așa încît $b = f(c) = c^n$. Din (3) rezultă că $ab = ba$, ceea ce arată că $(G,\ )$ este grup comutativ. Exemplu de grup cu proprietatea din enunț: fie $p > 2$ un număr prim și G mulțimea rădăcinilor de ordinul p ale unității. Luînd $0 < n < n + 1 < p$ avem situația din enunț.

3. Fie $F\ \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \begin{cases} x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in \mathbf{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ Pentru orice $x \in \mathbf{R}^*$, F este derivabilă. Să arătăm că F este derivabilă și în $x = 0$. Avem $F'_s(0) = 0$, $F'_d(0) = 0$, ceea ce arată că F este derivabilă în $x = 0$ și $F'(0) = 0$. Prin urmare,

$$F'(x) = \begin{cases} 2x f\left(\dfrac{1}{x}\right) - f'\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in \mathbf{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{Fie } k : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ k(x) = \begin{cases} 2x f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in \mathbf{R}^*, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Funcția k este continuă pe $\mathbf{R}$ iar din demonstrațiile precedente deducem că $\lim\limits_{x \to 0} k(x) = 0 = k(0)$, adică funcția k este continuă și în $x = 0$, deci continuă pe $\mathbf{R}$.

Deoarece $g = k - F'$ rezultă că g admite primitive pe $\mathbf{R}$. b) Avem

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x} \sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \text{ și } \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} \sin x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} = 0.$$

Să arătăm că f este derivabilă în $x = 0$. Într-adevăr,

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}\sin x}{x} = 0$. Prin urmare, f este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și atunci

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\cos x + \dfrac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x \in \mathbf{R}^*, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Conform cu punctul a funcția g $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} f'\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in \mathbf{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbf{R}$. Deoarece funcția u $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}\sin\dfrac{1}{x}, & x \in \mathbf{R}^*, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

este continuă, admite primitive pe $\mathbf{R}$. Deoarece $h = g - u$, g și u admit primitive pe $\mathbf{R}$ rezultă că h admite primitive pe $\mathbf{R}$.

4. Fie $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$. Notăm $M_i(f)$, $m_i(f)$, respectiv, marginea superioară și marginea inferioară a funcției f pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ iar $M_i(g)$, $m_i(g)$ vor avea semnificații analoage pentru funcția g. Deoarece $M_i(f) = f(u_i)$, $m_i(f) = f(v_i)$, cu u_i, $v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ putem scrie (1) $|M_i(f) - m_i(f)| = |f(u_i) - f(v_i)| \leqslant k\,|g(u_i) - g(v_i)|^c \leqslant k\,|M_i(g) - m_i(g)|^c$. Notînd $S_\Delta(f)$, $s_\Delta(f)$ sumele Darboux ale funcției f corespunzătoare diviziunii Δ și cu $S_\Delta(g)$, $s_\Delta(g)$ sumele analoage pentru g, avem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = |S_\Delta(f) - s_\Delta(f)| = \left|\sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |M_i(f) - m_i(f)| \quad (x_i - x_{i-1}) \overset{(1)}{\leqslant} k \sum_{i=1}^{n} |M_i(g) - m_i(g)|^c \quad (x_i - x_{i-1}) =$$

$$(2) \qquad = k \cdot \sum_{i=1}^{n} (M_i(g) - m_i(g))^{c-1} \cdot (M_i(g) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}) \leqslant$$

$$\leqslant k \max_{1\leqslant i\leqslant n} (M_i(G) - m_i(g))^{c-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (M_i(g) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= k \max_{1\leqslant i\leqslant n} (M_i(g) - m_i(g))^{c-1}(S_\Delta(g) - s_\Delta(g)).$$

Funcția g fiind integrabilă este mărginită, deci $(\exists)\, L \in \mathbf{R}_+^*$ așa încît $|g(x)| \leqslant L$, $(\forall) x \in [a, b]$. Prin urmare, $0 \leqslant M_i(g) - m_i(g) = |M_i(g) - m_i(g)| \leqslant |M_i(g) + m_i(g)| \leqslant 2L$ și ridicînd la puterea $c - 1$ se menține inegalitatea, adică
(3) $(M_i(g) - m_i(g))^{c-1} \leqslant (2L)^{c-1}$. Pe baza relațiilor (2) și (3) deducem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leqslant k(2L)^{c-1} \cdot (S_\Delta(g) - s_\Delta(g)).$$

Aplicînd criteriul de integrabilitate al lui Darboux, rezultă ușor că dacă g este integrabilă, atunci și f este integrabilă.

1. Fie $f\ (\mathbf{Z}_p, +) \to (\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$ un morfism de grupuri și să notăm $f(\hat{1}) = \hat{a}$. Avem

$$\hat{1} = f(\hat{0}) = f(\hat{p}) = f(\underbrace{\hat{1} + \hat{1} + \quad + \hat{1}}_{p \text{ ori}}) = f(\underbrace{\hat{1})f(\hat{1}) \quad f(\hat{1}}_{p \text{ ori}}) = \hat{a}^p,$$

deci $\hat{a}^p = \hat{1}$. Pe de altă parte, conform teoremei lui Fermat avem $\hat{a}^p = \hat{a}$. Rezultă $\hat{a} = \hat{1}$, deci $f(\hat{1}) = \hat{1}$. Atunci, pentru orice $\hat{x} \in \mathbf{Z}_p$ avem $f(\hat{x}) = f(\underbrace{\hat{1} + \hat{1} + \quad + \hat{1}}_{x \text{ ori}}) =$ $= (f(\hat{1}))^x = \hat{1}^x = \hat{1}$ și deci unicul morfism căutat este cel constant $f(\hat{x}) = \hat{1}$, $(\forall)\hat{x} \in \mathbf{Z}_p$.

2. a) Să presupunem mai întîi că $f(X) = \hat{a} + \hat{b}X$ este inversabil. Atunci există polinomul $\hat{c}_0 + \hat{c}_1X + \ldots + \hat{c}_mX^m$ așa încît $(\hat{a} + \hat{b}X)(\hat{c}_0 + \hat{c}_1X + \quad + \hat{c}_mX^m) = \hat{1}$. Rezultă

$$\hat{a}_0\hat{c}_0 = \hat{1},\ (0);\ \hat{a}\hat{c}_1 + \hat{b}\hat{c}_0 = \hat{0},\ (1);\ \hat{a}\hat{c}_2 + \hat{b}\hat{c}_1 = \hat{0},\ (2) \quad ;\ \hat{a}\hat{c}_m + \hat{b}\hat{c}_{m-1} =$$
$$= \hat{0},\ (m);\ \hat{b}\hat{c}_m = \hat{0},\ (m+1).$$

Din (0) deducem că $\hat{a}_0$ și $\hat{c}_0$ sînt inversabile, ceea ce este echivalent cu p nu divide a și p nu divide c_0. Dacă am presupune că p nu divide b, atunci din (1), (2),..., (m) rezultă succesiv că $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \ldots, \hat{c}_m$ sînt inversabile și atunci din $(m+1)$ rezultă $\hat{b} = \hat{0}$, de unde deducem că p^r divide b, adică $p \mid b$, contradicție. Prin urmare, în mod necesar p divide b. Reciproc, să presupunem că p nu divide a și p divide b și să arătăm că polinomul $\hat{a} + \hat{b}X$ este inversabil în inelul $\mathbf{Z}_{p^r}[X]$. Fie $b = pc$; atunci $\hat{b}^r = \hat{p}^r \cdot \hat{c}^r = \hat{0}$ și rezultă

$\hat{a}^r = \hat{a}^r + \hat{0} = \hat{a}^r + (\hat{b}X)^r = (\hat{a} + \hat{b}X - \hat{b}X)^r + (\hat{b}X)^r = \mathcal{M}(\hat{a} + \hat{b}X) +$ $+ ((\widehat{-1})^r + \hat{1})\hat{b}^rX^r = \mathcal{M}(\hat{a} + \hat{b}X)$. Deci există $g(X) \in \mathbf{Z}_{p^r}[X]$ așa încît $\hat{a}^r = (\hat{a} + \hat{b}X)g(X)$ sau $(\hat{a} + \hat{b}X)\ ((\widehat{a^{-1}})^r\, g(X)) = \hat{1}$, ceea ce arată că polinomul $f(X) =$ $= \hat{a} + \hat{b}X$ este inversabil. b) Fie $A = \{a \mid 0 \leqslant a \leqslant p^r - 1,\ p \text{ nu divide } a\}$ și $B = \{b \mid 0 \leqslant b \leqslant p^r - 1,\ p \text{ divide } b\}$. Evident B are p^{r-1} elemente, iar A are $p^r - p^{r-1}$ elemente. Notînd $\mathcal{F}$ mulțimea polinoamelor de gradul cel mult 1, inversabile în inelul $\mathbf{Z}_{p^r}[X]$, deducem pe baza punctului a că aplicația $\varphi\ \mathcal{F} \to A \times B$, $\varphi(\hat{a} + \hat{b}X) = (a, b)$ este o bijecție. Rezultă atunci egalitatea

$$\text{Card}\,\mathcal{F} = \text{Card}\,A\ \ \text{Card}\,B = (p^r - p^{r-1})p^{r-1} = p^{2(r-1)}(p-1).$$

3. a) Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, fie $x = u(t) = 2\,\mathrm{arctg}\ t$, $t \in [0, 1]$. Atunci,

$\int f(u(t))u'(t)\,dt = \int f(2\,\mathrm{arctg}\ t)\frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{7}} + C$. Prin urmare,

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)+1}{\sqrt{7}}$$

este o primitivă a funcției $f(x)$ pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. b) Domeniul maxim de definiție al lui F este $D_F = \mathbf{R}\setminus\{(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$. Atunci $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\,x \in D_F$. Funcția f fiind continuă pe $[0, 2\pi]$, admite primitive. Să considerăm funcția $G : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$,

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)+1}{\sqrt{7}}, & x \in [0, \pi), \\ \frac{\pi}{\sqrt{7}}, & x = \pi, \\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)+1}{\sqrt{7}} & x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Se verifică ușor că G este continuă și derivabilă pe $[0, 2\pi]$ și deci G este o primitivă a lui f și atunci mulțimea primitivelor lui f este $G + C$.

4. Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă și $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o primitivă a lui f care se anulează într-un punct $c \in [a, b]$, atunci $g(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, $(\forall)\,x \in [a, b]$.

Rezultă atunci că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$, $(\forall)\,x \in [a, b]$.

Prin urmare, $f_{1982}(1) = \frac{1}{1983!} \Rightarrow \int_0^1 f_{1981}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t^{1982}}{1982!}\,dt$, de unde deducem că $\int_0^1\left(f_{1981}(t) - \frac{t^{1982}}{1982!}\right)dt = 0$. Aplicînd teorema de medie rezultă că există $x_{1981} \in [0, 1]$ așa încît $f_{1981}(x_{1981}) - \frac{(x_{1981})^{1982}}{1982!} = 0$, de unde urmează că $\int_0^x\left(f_{1980}(t) - \frac{t^{1981}}{1981!}\right)dt = 0$ și aplicînd din nou teorema de medie obținem că există $x_{1980} \in [0, x_{1981}]$ așa încît $f_{1980}(x_{1980}) - \frac{(x_{1980})^{1981}}{1981!} = 0$. Continuînd raționamentul se obține că există $x_0 \in [0, x_1]$ pentru care $f_0(x_0) = \frac{(x_0)^1}{1!}$ și deci există $x_0 \in [0, 1]$ astfel încît $f_0(x_0) = x_0$.

Anul 1984

Etapa județeană

1. a) Fie $x_1 \in H_1 \setminus \{e\}$ și $x_2 \in H_2 \setminus \{e\}$. Atunci $x_1x_2 \notin H_1$ deoarece dacă $x_1x_2 = h_1 \in H_1$, atunci $x_2 = x_1^{-1} h_1 \in H_1 \cap H_2$, absurd. Analog $x_1x_2 \notin H_2$, deci $x_1x_2 \in G \setminus (H_1 \cup H_2)$. Deoarece $G \setminus (H_1 \cup H_2)$ are $2n - (2(n-1)+1) = 1$ element, rezultă $\{x_1x_2\} = G \setminus (H_1 \cup H_2)$; b) Presupunem $n > 2$. Există atunci $x_2, x_2' \in H_2 \setminus \{e\}$, $x_2 \neq x_2'$. Dacă $x_1 \in H_1 \setminus \{e\}$, atunci, conform cu punctul a, $x_1x_2 = x_1x_2'$, de unde $x_2 = x_2'$, absurd. Deci $n=2$. Deoarece $n=2$, atunci $H_1 = \{e, a\}$, $H_2 = \{e, b\}$ și deci $G = \{e, a, b, c\}$. Deoarece $a^2 \in H_1$ rezultă $a^2 \in \{e, a\}$ și datorită faptului că $a^2 = a \Rightarrow a = e$ obținem o absurditate, deci $a^2 = e$. Analog $b^2 = e$. Conform cu punctul a avem $ab = c$. Tabla legii lui G este

	e	a	b	
e		a	b	
a	a			b
b	b		e	a
c	c	b	a	e

de unde se deduce că grupul G este izomorf cu grupul K al lui Klein; c) Evident, grupul lui Klein, $K = \{1, u, v, w\}$, satisface condițiile din enunț deoarece putem lua $H_1 = \{1, u\}$, $H_2 = \{1, v\}$.

2. a) $(A, *)$ este grup deoarece în general produsul cartezian a două grupuri este tot un grup; b) Fie e elementul neutru al lui G. Dacă $G = \{e\}$, atunci $f_0 : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \{e\}$, $f_0(n) = (n, e)$ este un morfism bijectiv de grupuri, deci izomorfism. Reciproc, să presupunem că există un izomorfism de grupuri $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times G$. Dacă $f(1) = (n, x)$, se demonstrează ușor că $f(k) = (kn, x^k)$. Deoarece $(1, e) \in \mathbf{Z} \times G \Rightarrow (\exists)\, k \in \mathbf{Z}$ așa încît $(kn, x^k) = (1, e) \Leftrightarrow kn = 1$ și $x^k = e \Rightarrow n = \pm 1$ și $k = \pm 1$. Dacă $n = 1$, atunci $k = 1$ și $x = e \Rightarrow \mathbf{Z} \times G = \{(k, e) \mid k \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z} \times \{e\}$, deci $G = \{e\}$. Dacă $n = -1$, atunci $k = -1 \Rightarrow x^{-1} = e \Rightarrow x = e \Rightarrow \mathbf{Z} \times G = \{(-k, e) \mid k \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z} \times \{e\}$, de unde $G = \{e\}$.

3. *Lema 1.* Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție iar $c \in \mathbf{R}$ este așa încît $f_1 : (-\infty, c] \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = f(x)$ și $f_2 : [c, \infty) \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = f(x)$ sînt funcții care au primitive, atunci și f admite primitivă.

Demonstrație. Deoarece f_1 admite primitive, există $F_1 : (-\infty, c] \to \mathbf{R}$ derivabilă și $F_1'(x) = f_1(x)$, $(\forall)\, x \in (-\infty, c]$. La fel există $F_2 : [c, \infty) \to \mathbf{R}$ derivabilă cu $F_2'(x) = f_2(x)$, $(\forall)\, x \in [c, \infty)$. Considerăm funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in (-\infty, c], \\ F_2(x) + F_1(c) - F_2(c), & x \in [c, \infty). \end{cases}$$

Se constată cu ușurință că F este o primitivă a lui f.

Lema 2. Dacă $f, g : I \to \mathbf{R}$ au proprietățile: f admite primitive iar g este derivabilă cu derivata continuă, atunci fg admite primitive.

Demonstrație. Fie $u : I \to \mathbf{R}$, $u(x) = g(x)F(x)$, unde F este o primitivă a funcției f. Avem $u' = g'F + gf$. Deoarece u' are primitive și $g'F$ are primitive ($g'F$ este continuă) deducem că fg admite primitive.

Pentru $x \in \mathbf{R}_+$, $g(x) = f(x + x^2) = \dfrac{1}{2x+1}((2x+1)f(x+x^2))$, conform teoremei de schimbare de variabilă g_1 cu $g_1(x) = (2x+1)f(x+x^2)$ admite primitive

iar g_2 cu $g_2(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ este derivabilă cu derivata continuă. Conform lemei 2, g_1g_2 admite primitive, deci g admite primitive pe $\mathbf{R}_+$. Analog se arată că g admite primitive pe $\mathbf{R}_-$ şi atunci conform lemei 1, rezultă că g admite primitive pe $\mathbf{R}$.

4. a) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ şi $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ să notăm $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$. Atunci,

$$G(b) - G(a) = G(x_n) - G(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} (G(x_{k+1}) - G(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} g(c_k)(x_{k+1} - x_k),$$

unde $c_k \in (x_k, x_{k+1})$ sînt daţi de teorema lui Lagrange. Din $g \geqslant f$ pe $[a, b]$, rezultă $G(b) - G(a) \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k)$. Trecînd la limită în ultima relaţie, deducem

$$G(b) - G(a) \geqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

Etapa finală

1. a) Observăm că $f(x,y) = (xy)^2 - x^2y^2 = x(yx - xy)y$ şi atunci $f(1+x, y) = (1+x)(yx - xy)y$, $f(x, 1+y) = x(yx - xy)(1+y)$, $f(1+x, 1+y) = (1+x)(yx - xy)(1+y)$ şi de aici rezultă imediat că $E(x, y) = yx - xy$.
b) Condiţia $(xy)^2 - (yx)^2 = x^2y^2 - y^2x^2$ se mai scrie $f(x, y) = f(y, x)$ şi atunci rezultă $E(x, y) = E(y, x)$, adică $2(xy - yx) = 0$ şi folosind ipoteza $(x + x = 0 \Rightarrow x = 0)$ deducem $xy - yx = 0$, adică $xy = yx$, $(\forall)\, x, y \in A$.

2. a) În grupul abelian $(A, +)$ avem (1) $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{8 \text{ termeni}} = 0$. Fie $k \in 2\mathbf{N}+1$; atunci $k = 8s + r$, cu $r \in \{1, 3, 5, 7\}$, şi dacă ţinem seama de (1) rezultă că $\underbrace{1+1+1+\quad+1}_{k \text{ termeni}} = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{r \text{ termeni}}$. Să admitem prin absurd că $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{r \text{ termeni}} = 0$. Dacă $r = 1$ ar rezulta $1 = 0$, ceea ce este imposibil. Dacă $r = 3$ atunci din (1) deducem $1 + 1 = 0$. Deci $1 + 1 + 1 = 0$ şi $1 + 1 = 0$ de unde iarăşi deducem $1 = 0$. Dacă $r = 5$ atunci din (1) rezultă $1 + 1 + 1 = 0$, deci $1 + 1 = 0$ şi atunci $1 = 0$, ceea ce este absurd. Dacă $r = 7$ atunci din (1) deducem $1 = 0$, ceea ce este absurd. Prin urmare dacă $k \in 2\mathbf{N} + 1$, atunci $\underbrace{1 + 1 + \quad + 1}_{k \text{ termeni}} = 0$.
b) Dacă $a = 0$ ar rezulta $1 = 0$, ceea ce este absurd iar dacă $a = 1$, atunci rezultă $1 + 1 + 1 = 0$ şi se contrazice punctul precedent $(k = 3)$. Fie n cel mai mic număr natural cu proprietatea că $\underbrace{1 + 1 + \quad + 1}_{n \text{ termeni}} = 0$ şi fie H subgrupul aditiv ciclic generat de 1, adică $H = \{0, 1, 1 + 1, 1+1+1, \ldots \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{(n-1) \text{ termeni}}\}$.
Datorită demonstraţiei de la punctul a deducem că $n \in 2\mathbf{N}$, adică $n \in \{2, 4, 6, 8\}$. Arătăm mai intîi că $n \neq 8$. Într-adevăr, dacă $n = 8$, atunci $H = A$, dar $H \neq A$ deoarece $a \notin H$. Este evident că $a \notin H$ deoarece $a^3 + a + 1 = 0$ în timp ce pentru orice $i \in H$ avem $i^3 + i + 1 \neq 0$ (căci numărul natural $i^3 + i + 1$ este impar). Contradicţia obţinută arată că $n \neq 8$. De aşemenea, nu putem avea $n = 6$ deoarece din (1) ar rezulta $1 + 1 = 0$ şi se contrazice minimalitatea lui $n = 6$. Arătăm acum că $n \neq 4$. Presupunem deci că $n = 4$. Atunci elementele $0, 1, 2, 3$ (unde $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$) sînt distincte şi de aşemenea vor fi distincte şi elementele a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$. Totodată, $a + k = m$ pentru

$k, m \in \{0, 1, 2, 3\}$, căci dacă am presupune $a+k = m$ ar rezulta $a \in H$, ceea ce nu este posibil. Rezultă atunci că avem egalitatea

$$A = \{0, 1, 2, 3, a, a+1, a+2, a+3\} = \{i + ja \mid i \in \{0, 1, 2, 3\};\ j \in \{0, 1\}\}.$$

Considerăm elementul $a^2 \in A$ și atunci $a^2 = i + ja$, cu $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $j \in \{0, 1\}$. Avem următoarele cazuri:

$j = 0$, adică $a^2 = i$ și atunci din relația (2) $a^3 + a + 1 = 0$, ar rezulta $0 = a^3 + a + 1 = ai + a + 1 = a(i+1) + 1$. Avem subcazurile:

i) $i = 0$; atunci $a + 1 = 0$ și rezultă $a = 3 \in H$, ceea ce este imposibil;

ii) $i = 1$; atunci $2a + 1 = 0$ și înmulțind cu 2 rezultă $2 = 0$, ceea ce contrazice minimalitatea lui $n = 4$;

iii) $i = 2$; atunci $3a + 1 = 0$ și înmulțind cu 3 rezultă $a + 3 = 0$, adică $a = 1$, ceea ce este imposibil; iv) $i = 3$; atunci $4a + 1 = 0$, de unde ar rezulta $1 = 0$, adică o imposibilitate. $j = 1$. Atunci $a^2 = a + i$ și din (2) deducem $0 = a^3 + a + 1 = (a + i)a + a + 1 = (i + 2)a + (i + 1)$. Avem și aici subcazurile: i) $i = 0$; atunci $2a + 1 = 0$, de unde prin înmulțire cu 2 obținem contradicția $2 = 0$. ii) $i = 1$; atunci $3a + 2 = 0$, de unde prin înmulțire cu 3 deducem $a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \in H$, ceea ce nu este posibil. iii) $i = 2$; atunci $4a + 3 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3 = 0$ adică o imposibilitate. iv) $i = 3$; atunci $a + 4 = 0 \Rightarrow a = 0$, ceea ce este imposibil. Cu aceasta am arătat că $n \neq 4$. Rămîne atunci singura posibilitate $n = 2$, adică $1 + 1 = 0$. Arătăm acum că $a^7 = 1$. Într-adevăr, $a^3 + a + 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a^3 = -(a + 1)$, de unde prin ridicare la pătrat obținem $a^6 = a^2 + 2a + 1 =$ $= a^2 + 1$, $(2a = a + a = 0)$ și deci prin înmulțire cu a deducem $a^7 = a^3 + a =$ $= -1 = 1$. În sfîrșit, să arătăm că $(A, +, \cdot)$ este corp. Din $a^7 = 1$ deducem că a este inversabil (inversul său este a^6), adică $a \in U(A)$, unde $U(A)$ este grupul multiplicativ al elementelor inversabile ale inelului $(A, +, \cdot)$. Fie $q \in \mathbf{N}^*$ ordinul elementului $a \in A$ în grupul $(U(A), \cdot)$. Din $a^7 = 1$ deducem că q divide pe 7, adică $q \in \{1, 7\}$. Dacă $q = 1$ ar rezulta imposibilitatea $a = 1$, deci $q = 7$ iar aceasta arată că grupul $(U(A), \cdot)$ este ciclic de ordinul 7 generat de a. Rezultă că orice element nenul din A aparține lui $U(A)$, adică este inversabil. Prin urmare $(A, +, \cdot)$ este corp.

3. Din $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ prin schimbarea de variabilă $x = \varphi(t) = at$, cu $\varphi : [0, 1] \to$ $\to [0, a]$, deducem $\int_0^1 f(ax)\,dx = 0$. Din teorema lui Lagrange, cu $M = \sup_{x \in (0, 1)} f'(x)$ deducem $f(x) - f(ax) \leqslant (1 - a)xM$. Prin integrare deducem $\left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| =$ $= \left| \int_0^1 (f(x) - f(ax))\,dx \right| \leqslant (1 - a)M \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}(1 - a)M$. Egalitatea se realizează pentru funcții $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = M\left(x - \frac{1}{2}a\right)$.

4. Fie $m \in \mathbf{R}_+$ astfel încît $\int_0^1 xf(x)\,dx = m$. Atunci din ultima condiție a enunțului deducem $\int_0^1 f(x^3)\,dx \leqslant 3m^2$. Conform enunțului avem de determinat funcțiile $f : [0, 1] \to \mathbf{R}_+$ care satisfac simultan condițiile $\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 1$; $\int_0^1 xf(x)\,dx = m$;

$$\int_0^1 f(x^3)\,dx \leqslant 3m^2.$$

Din condiția de monotonie a funcției f vom avea

$$f(x^3) \geqslant f(\sqrt[3]{x}) \Rightarrow \int_0^1 f(x^3)\,dx \geqslant \int_0^1 f(\sqrt[3]{x})\,dx = 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$$

și atunci condițiile anterioare devin

$$\text{i)} \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 1; \quad \text{ii)} \int_0^1 xf(x)\,dx = m; \quad \text{iii)} \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leqslant m^2.$$

Mai departe, înmulțim relația i) cu m^2, relația ii) cu $-2m$, după care adunăm ultimele două relații obținute cu relația iii) și deducem

$$\int_0^1 (x^2 - 2mx + m^2)f(x)\,dx \leqslant 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (x-m)^2 f(x)\,dx \leqslant 0 \Rightarrow f(x) = 0, \ (\forall)x \in [0, 1].$$

Prin urmare, singura funcție care verifică enunțul este $f : [0, 1] \to \mathbf{R}_+$, $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [0, 1]$.

Anul 1985

Etapa județeană

1. Fie $H_i \subset G$, $i \in \{1, 2, 3\}$ subgrupuri ale grupului G astfel încît $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. Cum prin enunț două dintre aceste grupuri au cîte două elemente, fie $H_1 = \{e, a\}$ și $H_2 = \{e, b\}$, unde e este elementul neutru al grupului G și $a \neq b$, $a \neq e$, $b \neq e$. Evident, $a^2 \in H_1 \Rightarrow a^2 \neq a$ (dacă $a^2 = a \Rightarrow a = e$ contradicție) și deci $a^2 = e$. În mod analog arătăm că $b^2 = e$. Fie $c \in H_3$, $c \neq a$, $c \neq b$, $c \neq e$. Dacă $ac \in H_3$, atunci $a \in H_3$ și este necesar ca $b \notin H_3$ (dacă $b \in H_3$, atunci $G = H_3$), de unde rezultă că $bc \notin U_3$ și deci $bc \in H_2$. Dacă $bc = b \Rightarrow c = e$, contradicție iar dacă $bc = e$ rezultă $b \in H_3$, contradicție. Deducem că $a, b \notin H_3$ și de aici că ca, $cb \notin H_3$ de unde $ca = b$ și $cb = a$ (nu putem avea $ca = a$ sau $cb = b$ deoarece ar rezulta $c = e$). Ținînd cont că $a^2 = b^2 = e$ rezultă că $c = ab = ba$ și prin urmare $H_3 = \{e, ab\}$. Evident, $(ab)^2 = e$. Deoarece $(\forall)x \in G$, $x^2 = e$ rezultă că grupul este comutativ. Tabla grupului G arată astfel:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Rezultă imediat că grupul $(G, \quad)$ este izomorf cu grupul lui Klein.

2. a) Din $1 + 1 = 0$, înmulțind cu $x \in A$, obținem $x + x = 0$ sau $x = -x$. Relația $xy = yx$ este echivalentă deci cu $xy + yx = 0$ sau $(x + y)^2 = x^2 + y^2$. Dar $(x + y)^2$ și $x^2 + y^2$ nu pot fi decît 0 sau 1. Presupunem prin absurd că $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, deci unul din termeni ar fi 1 iar celălalt termen ar fi 0. Dacă $(x + y)^2 = 1$ și $x^2 + y^2 = 0$ rezultă că $xy + yx = 1$. Dacă $(x + y)^2 = 0$ și $x^2 + y^2 = 1$ rezultă că $xy + yx = 1$. În concluzie, dacă presupunem că $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, atunci este necesar ca (1) $xy + yx = 1$. Înmulțind această relație cu x la stînga și cu y la dreapta obținem (2) $x^2y^2 + (xy)^2 = xy$. Din (2) deducem că $xy = 0$ sau $xy = 1$. Să presupunem că $xy = 0$. Din (1) rezultă $yx = 1 \Rightarrow y(yx)x = yx \Rightarrow y^2x^2 \quad yx = 1 \Rightarrow y^2 = 1$ și $x^2 = 1$ (dacă $x^2 = 0$ sau $y^2 = 0 \Rightarrow y^2x^2 = 0$), de unde rezultă $x^2y^2 = 1$. Dar din (2) rezultă $x^2y^2 = 0$, deci am ajuns la o contra-

dicție. Să presupunem că $xy = 1 \Rightarrow x(xy)y = xy = 1 \Rightarrow x^2y^2 = 1$. Dar din (1) rezultă că $x^2y^2 = 0$, deci o contradicție. În concluzie, deducem că $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, $(\forall)\, x, y \in A$, ceea ce este echivalent cu proprietatea că inelul A este comutativ. b) Considerăm

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_2).$$

Se demonstrează ușor că adunarea și înmulțirea matricilor din A determină pe mulțimea A o structură de inel comutativ în care au loc proprietățile din enunț.

3. Din ipoteza că f este inversabilă și derivabilă rezultă că f este bijectivă și continuă și deci și funcția inversă f^{-1} este continuă. Funcția f^{-1} fiind continuă admite primitive și cum f este derivabilă cu derivata continuă putem aplica teorema de schimbare de variabilă în a doua integrală și obținem

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f^{-1}(f(x))\,f'(x)\,dx =$$

$$= \int_a (f(x) + xf'(x))\,dx = \int_a^b (xf(x))'\,dx = bf(b) - af(a).$$

Dacă considerăm funcția $f : [1, e] \to [0, 1]$, $f(x) = \sqrt{\ln x}$, atunci $f^{-1} : [0, 1] \to [1, e]$ și $f^{-1}(y) = e^{y^2}$. Obținem în acest caz

$$\int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx + \int_0^1 e^{y^2}\,dy = e. \tag{1}$$

Să demonstrăm că pentru $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+$ avem $e^x \geqslant x + 1$. Fie funcția $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$. Obținem $f'(x) = e^x - 1$ și deci $f'(x) \geqslant 0$, de unde deducem că f este crescătoare și deci $f(x) \geqslant f(0)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+$, de unde rezultă că $e^x \geqslant x + 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+$. Prin urmare, $e^{y^2} \geqslant y^2 + 1$ și

$$\int_0^1 e^{y^2}\,dy > \int_0^1 (y^2 + 1)\,dy = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă $\int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx = e - \int_0^1 e^{y^2}\,dy < e - \frac{4}{3}$.

4. Fie un șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n \geqslant 1}$ ale intervalului $[0, 1]$ dat de $\Delta_n = \frac{k}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Evident $\lim\limits_{n \to \infty} \Delta_n = 0$. Funcția f fiind integrabilă Riemann pe $[0, 1]$ este mărginită pe acest interval. Notăm cu $m_k = \inf f(x)$ pentru $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ și cu $M_k = \sup f(x)$ pentru $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Atunci

$$m_k \leqslant f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leqslant M_k \text{ și } -M_k \leqslant -f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -m_k \Rightarrow m_k - M_k \leqslant$$

$$\leqslant f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant M_k - m_k \Rightarrow \left| f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant M_k - m_k, \tag{1}$$

$$(\forall)\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Notăm cu $b_0 = 0$ și $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $n \in \mathbf{N}$. Atunci

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)(\sigma_k - \sigma_{k-1}) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\sigma_k - f\left(\frac{k}{n}\right)\sigma_{k-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{k-1}\left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) + \frac{1}{n}\sigma_n f(1).$$

Deci

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\sigma_{k-1}\left(f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| + \frac{1}{n}|\sigma_n| \cdot |f(1)| \leqslant$$

$$(2) \qquad \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\sigma_{k-1}|\left|f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \frac{1}{n}|\sigma_n| \cdot |f(1)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}M\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \frac{1}{n}M|f(1)| \leqslant \frac{1}{n}M\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) + \frac{1}{n}M|f(1)|,$$

unde am ținut seama de inegalitățile (1).
Pe de altă parte, avem

$$(3) \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)M_k -$$

$$- \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)m_k = S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f),$$

unde $S_{\Delta_n}(f)$ și $s_{\Delta_n}(f)$ sînt suma Darboux superioară și respectiv suma Darboux inferioară asociată funcției f și diviziunii Δ_n. Din (1) și (2) rezultă

$$(4) \qquad |a_n| \leqslant M(S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)) + M|f(1)|\frac{1}{n}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Funcția f fiind integrabilă, conform criteriului lui Darboux de integrabilitate avem

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty}(S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)) = 0.$$

Trecînd la limită în (4) și ținînd cont de (5) obținem $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$, de unde rezultă $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, adică $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_k = 0$.

Etapa finală

1. a) $(x+1)^2 = x^2 + x + x + 1 = x^2 + x(1+1) + 1 = x^2 + 1$; $(x+1)^3 = (x+1)^2(x+1) = (x^2+1)(x+1) = x^3 + x^2 + x + 1$; $(x+1)^4 = (x^2+1)^2 = x^4 + x^2 + x^2 + 1 = x^4 + x^2(1+1) + 1 = x^4 + 1$; $(x+1)^5 = (x+1)^3(x+1)^2 = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2+1) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^5 + x^4 + x + 1$. b) Avem

$$x^{n+1} = x^n, \ (\forall)\, x \in A \Rightarrow (-1)^{n+1} = (-1)^n \Rightarrow 1 = -1 \Rightarrow 1 + 1 = 0.$$

Vom demonstra prin inducție că $(\forall)\, k \in \mathbf{N}$ avem $x^{n+k} = x^n$, $(\forall)\, x \in A$. Într-adevăr, pentru $k = 0$ rezultă $x^n = x^n$, $(\forall)\, x \in A$, ceea ce este evident. Pentru

$k = 1$ avem conform proprietății din enunț că $x^{n-1} = x^n$, $(\forall)\, x \in A$. Presupunem deci că $x^{n+k} = x^n$, $(\forall)\, k \leqslant m$, $(\forall)\, x \in A$ și să demonstrăm că $x^{n+m+1} = x^n$, $(\forall)\, x \in A$. Într-adevăr, $x^{n+m+1} = x \cdot x^{n+m} = x \cdot x^n = x^{n+1} = x^n$, $(\forall)\, x \in A$ și deci afirmația este demonstrată. Din $1 + 1 = 0$ deducem $x^n + x^n = 0$, $(\forall)\, x \in A$, și deoarece $x^n = x^{n+1}$, $(\forall)\, x \in A$ rezultă că $x^{n+1} + x^n = 0$, $(\forall)\, x \in A \Rightarrow x^n(x + 1) = 0$, $(\forall)\, x \in A$ iar de aici înlocuind x cu $x + 1$ deducem $0 = (x + 1)^n(x + 1 + 1) = (x + 1)^n x$, $(\forall)\, x \in A$. În ultima egalitate dezvoltăm după formula binomului lui Newton și obținem $0 = (x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} x + 1)x$ $(\forall) x \in A$. De aici prin înmulțire cu x^{n-2}, după ce ținem seama că $x^{n+k} = x^n$, $(\forall)\, x \in A$, $(\forall)\, k \in \mathbf{N}$, deducem

$$0 = (2^n - 1)x^n + x^{n-1} = -x^n + x^{n-1} \Rightarrow x^n = x^{n-1},\ (\forall)\, x \in A.$$

Prin același procedeu ca mai sus deducem $x^{n-1} = x^{n-2}$, $(\forall)\, x \in A$ ș.a.m.d. obținem $x^2 = x$, $(\forall)\, x \in A$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

2. Să demonstrăm mai întîi următoarea:

Lemă. Fie $p \geqslant 3$ un număr prim. Următoarele afirmații sînt echivalente: a) există $a, b \in \mathbf{Z}_p$, $a \neq \hat{0}$ sau $b \neq \hat{0}$, așa încît $a^2 + b^2 = \hat{0}$; b) există $x \in \mathbf{Z}_p$ așa încît $x^2 = -\hat{1}$; c) $p = 4k + 1$, $k \in \mathbf{N}^*$.

Demonstrație. Arătăm mai întîi echivalența afirmațiilor a) și b). a) $\Rightarrow$ b). Să presupunem că $a^2 + b^2 = \hat{0}$, unde $a, b \in \mathbf{Z}_p$ și, de exemplu, $b \neq \hat{0}$. Înmulțind cu $(b^{-1})^2$ rezultă $(ab^{-1})^2 + \hat{1} = \hat{0}$ și dacă notăm $x = ab^{-1} \in \mathbf{Z}_p$, obținem $x^2 = -\hat{1}$. (Se spune că $-\hat{1}$ este rest pătratic modulo p.) b) $\Rightarrow$ a). Dacă există $x \in \mathbf{Z}_p$, așa că $x^2 = -\hat{1}$, atunci $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$, și deci luăm $a = x$, $b = \hat{1}$ și rezultă că afirmația a) este verificată. Arătăm acum echivalența afirmațiilor b) și c). b) $\Rightarrow$ c). Să presupunem că există $x \in \mathbf{Z}_p$ așa încît $x^2 = -\hat{1}$. Ridicînd la puterea $\frac{1}{2}(p - 1)$ obținem $x^{p-1} = (-\hat{1})^{\frac{1}{2}(p-1)}$ dar în grupul $(\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$ avem $x^{p-1} = \hat{1}$ (teorema lui Fermat), încît egalitatea precedentă devine $\hat{1} = (-\hat{1})^{\frac{1}{2}(p-1)}$. Dacă numărul întreg $\frac{1}{2}(p - 1)$ ar fi impar, se obține $\hat{1} = -\hat{1}$, adică $\hat{2} = \hat{0}$, contradicție cu faptul că $p \geqslant 3$. Prin urmare, $\frac{1}{2}(p - 1)$ este par, deci $\frac{1}{2}(p - 1) = 2k$, ceea ce înseamnă că $p = 4k + 1$. c) $\Rightarrow$ b). Să presupunem că $p = 4k + 1$. Conform teoremei lui Fermat polinomul $f = X^{p-1} - \hat{1} \in \mathbf{Z}_p[X]$ are toate cele $p - 1$ rădăcini în corpul $\mathbf{Z}_p$ (chiar în $\mathbf{Z}_p^*$). Dar $f = f_1 f_2$, unde $f_1 = X^{\frac{1}{2}(p-1)} + \hat{1}$, $f_2 = X^{\frac{1}{2}(p-1)} - \hat{1}$ și atunci înseamnă că fiecare din polinoamele f_1 și f_2 au toate cele $\frac{1}{2}(p - 1)$ rădăcini în $\mathbf{Z}_p$ (căci rădăcinile lui f_1 și f_2 sînt rădăcini ale lui f). Fie $u \in \mathbf{Z}_p$ o rădăcină a polinomului f_1, adică $u^{\frac{1}{2}(p-1)} + \hat{1} = \hat{0}$. Această egalitate se mai scrie $u^{2k} + \hat{1} = \hat{0}$ și dacă notăm $x = u^k \in \mathbf{Z}_p$, obținem $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$, adică $x^2 = -\hat{1}$. Cu aceasta lema este demonstrată. Să trecem acum la soluția propriu-zisă a problemei. Este ușor de văzut că $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ este un inel unitar (și chiar comutativ). Atunci K este corp dacă și

numai dacă orice matrice nenulă din K are determinantul un element inversabil (adică un element nenul din corpul $\mathbf{Z}_p$) în corpul $\mathbf{Z}_p$. Cazul $p = 2$ iese ușor din discuție, deoarece matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$ este nenulă, dar $\det A = \hat{0}$, deci în acest caz $(K, +, \cdot)$ nu este corp. Rămîne să considerăm cazul $p \geqslant 3$. Să presupunem mai întîi că inelul $(K, +, \cdot)$ este un corp și să dovedim că $p \equiv 3 \pmod 4$. Dacă prin absurd $p \not\equiv 3 \pmod 4$, deoarece p este număr prim rezultă $p \equiv 1 \pmod 4$, adică se verifică condiția c) din lemă. Are loc atunci și afirmația a) din lemă, deci există $a, b \in \mathbf{Z}_p$ $a \neq \hat{0}$ sau $b \neq \hat{0}$ așa încît $a^2 + b^2 = \hat{0}$. Luînd $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K$, rezultă că A este o matrice nenulă din K, dar neinversabilă, deoarece $\det A = a^2 + b^2 = \hat{0}$. Aceasta contrazice faptul că în corpul $(K, +, \cdot)$ toate elementele nenule sînt inversabile. Contradicția obținută arată că trebuie să avem $p \equiv 3 \pmod 4$. Reciproc, să presupunem că $p \equiv 3 \pmod 4$ și să arătăm că inelul $(K, +, \cdot)$ este un corp. Dacă, prin reducere la absurd, $(K, +, \cdot)$ nu este corp, există $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K$, matrice nenulă și neinversabilă, adică $\det A = \hat{0}$. Prin urmare, $a \neq \hat{0}$ sau $b \neq \hat{0}$, dar $a^2 + b^2 = \hat{0}$, ceea ce înseamnă că se verifică afirmația a) din lemă. Deci are loc afirmația c) din lemă, adică $p \equiv 1 \pmod 4$ iar aceasta contrazice presupunerea $p \equiv 3 \pmod 4$. Contradicția obținută arată că în mod necesar $(K, +, \cdot)$ este un corp. Cu aceasta soluția este obținută.

3. Schimbînd eventual f cu $-f$ putem presupune că $f''(x) > 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$. Considerăm funcția $g : [a, b] \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt - (x - a) f\left(\frac{1}{2}(a + x)\right).$$

Este evident că $g(a) = 0$ și că g este derivabilă pe $[a, b]$. Avem $g'(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{2}(a + x)\right) - \frac{1}{2}(x - a) f'\left(\frac{1}{2}(a + x)\right)$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $\left[\frac{1}{2}(a + x), x\right]$ și rezultă că există $c_x \in \left(\frac{1}{2}(a + x), x\right)$ așa încît $f(x) - f\left(\frac{1}{2}(a + x)\right) = \frac{1}{2}(x - a) f'(c_x)$ și deci rezultă că $g'(x) = \frac{1}{2}(x - a)\left(f'(c_x) - f'\left(\frac{1}{2}(a + x)\right)\right)$. Deoarece $f''(x) > 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$ rezultă că f' este strict crescătoare pe $[a, b]$ și deci $f'(c_x) > f'\left(\frac{1}{2}(a + x)\right)$, adică $g'(x) > 0$, $(\forall)\, x \in (a, b]$, de unde deducem că g este strict crescătoare pe $[a, b]$ și deci $0 = g(a) < g(b)$. Cu aceasta afirmația din enunț este verificată.

4. Avem $h(x) \leqslant \left| \int_a^x h(t)\, dt \right|$, $(\forall)\, x \in [a, b]$. Deoarece h este continuă pe compactul $[a, b]$ rezultă că este mărginită și își atinge marginile. Există deci $M \in \mathbf{R}_+^*$ așa încît $h(x) \leqslant M$, $(\forall)\, x \in [a, b]$. Deci

$$h(x) \leqslant \left| \int_a^x h(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^x h(t)\, dt \leqslant M \int_a^x dt = M(x - a).$$

De asemenea, avem

$$|h(t)| \leqslant \left|\int_a^x h(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^x |h(t)|\,dt \leqslant \int_a^x \left|\int_a^t h(u)\,du\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x \left(\int_a^t |h(u)|\,du\right) dt \leqslant \int_a^x M\left(\int_a^t du\right) dt = M\int_a^x (t-a)\,dt = M\frac{(x-a)^2}{2!}.$$

La fel obținem

$$|h(x)| \leqslant \left|\int_a^x h(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^x |h(t)|\,dt \leqslant \int_a^x \left|\int_a^t h(u)\,du\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x \left(\int_a^t |h(u)|\,du\right) dt \leqslant \int_a^x \left(\int_a^t \left|\int_a^u h(v)\,dv\right| du\right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x \left(\int_a^t \left(\int_a^u |h(v)|\,dv\right) du\right) dt \leqslant M\int_a^x \left(\int_a^t \left(\int_a^u dv\right) du\right) dt = M\frac{(x-a)^3}{3!}.$$

Repetînd procedeul obținem că $|h(x)| \leqslant M\dfrac{(x-a)^n}{n!}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, $(\forall)\, x \in [a, b]$.

Din ultima inegalitate prin trecere la limită după $n \to \infty$ obținem că $0 \leqslant |h(x)| \leqslant 0$, $(\forall)\, x \in [a, b] \Leftrightarrow |h(x)| = 0$, $(\forall)\, x \in [a, b] \Leftrightarrow h(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$. O problemă asemănătoare cu aceasta pe care o supunem atenției cititorilor este problema 20585 din „Gazeta Matematică", nr. 10 (1985), 399.

Anul 1986

Etapa județeană

1. a) Este evident că A_k este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ în raport cu operațiile „+" și „ ". Totodată $(A_k, +)$ este grup abelian, $(A_k, \cdot)$ este monoid, „ " este distributivă și la stînga și la dreapta față de „+" iar „ · " se probează fără dificultate că este comutativă. Deci $(A_k, +, \cdot)$ este inel comutativ. b) Vom demonstra că inelul $(A_k, +, \cdot)$ are divizori ai lui zero dacă și numai dacă numărul întreg k este pătrat perfect. Într-adevăr, să presupunem că A_k are divizori ai lui zero și fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ kd & c \end{pmatrix}$ două matrici nenule din A_k așa încît $XY = O_2$. Rezultă egalitățile $ac + kbd = 0$, $ad + bc = 0$. Înmulțind a doua relație cu c și ținînd seama de prima deducem (1) $ac = -kbd$ și deci $-kbd^2 + c^2b = 0$. În mod necesar $b \neq 0$ deoarece în caz contrar ar rezulta $X = aI_2$, cu $a \in \mathbf{R}^*$ și deci din $XY = O_2$ ar rezulta $Y = O_2$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza în care raționăm. Analog rezultă $d \in \mathbf{R}^*$ și deci împărțind în (1) cu $bd^2 \in \mathbf{R}^*$ rezultă $k = \left(\dfrac{c}{d}\right)^2$, ceea ce arată că numărul k este pătratul unui număr rațional și deoarece $k \in \mathbf{Z}$ rezultă că numărul k este chiar pătratul unui număr întreg și deci k este pătrat perfect.

Reciproc, dacă numărul k este pătrat perfect luînd matricile $X = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 1 \\ k & \sqrt{k} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -\sqrt{k} & 1 \\ k & -\sqrt{k} \end{pmatrix}$ rezultă că $X \neq O_2$, $Y \neq O_2$ dar $XY = O_2$, ceea ce arată

că în acest caz A_k are divizori ai lui zero. c) Să presupunem că există un izomorfism de inele $f : A_k \to A_p$ și să considerăm matricea $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix} \in A_k$ și imaginea sa prin izomorfismul f, $Y = f(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix} \in A_p$. Este evident că $b \in \mathbf{R}^*$ deoarece din $b = 0$ ar rezulta $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2 = af(I_2) = f(aI_2)$ și deoarece f este injectivă deducem $aI_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$, ceea ce este imposibil. Să mai observăm că $X^2 = kI_2$ și atunci aplicînd izomorfismul f rezultă $Y^2 = kI_2$, adică $\begin{pmatrix} a & b \\ pb & a \end{pmatrix}^2 = kI_2$, de unde $\begin{pmatrix} a^2 + pb^2 & 2ab \\ 2pab & a^2 + pb^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + pb^2 = k \\ 2ab = 0 \end{cases}$ Deoarece $b \in \mathbf{R}^*$ din sistemul precedent rezultă că $a = 0$ și atunci $pb^2 = k$; aceasta arată că p divide pe k și mai mult că ele au și același semn. Considerînd izomorfismul invers $f^{-1} : A_p \to A_k$ și procedînd ca mai sus rezultă k divide p. Din p divide k și k divide p, ținînd seama că ele au același semn deducem că $p = k$. Reciproc, pentru $k = p$ avem $A_p = A_k$ și evident că A_p este izomorf cu A_k prin izomorfismul $1_{A_k} : A_k \to A_p$.

2. Din $(xy)^4 = x^4y^4$ ținînd seama de prima egalitate din enunț deducem $x^4y^4 = (xy)^4 = (xy)^3xy = x^3y^3xy$, de unde multiplicînd la stînga cu x^{-3} și la dreapta cu y^{-1}, obținem $y^3x = xy^3$. Această egalitate arată că x comută cu y^3 și deci x comută cu orice putere întreagă a lui y^3, adică

$$(1) \qquad xy^{3k} = y^{3k}x, \ (\forall)\, k \in \mathbf{Z} \text{ și } (\forall)\, x, y \in G.$$

De asemenea, avem $(xy)^5 = x^5y^5 \Leftrightarrow x^5y^5 = (xy)^5 = (xy)^4xy = x^4y^4xy \Leftrightarrow x^5y^5 = x^4y^4xy$, de unde înmulțind la stînga cu x^{-4} și la dreapta cu y^{-1} deducem $xy^4 = y^4x$. Această egalitate arată că x comută cu orice putere întreagă a lui y^4, adică

$$(2) \qquad xy^{4p} = y^{4p}x, \ (\forall)\, p \in \mathbf{Z}, \ (\forall)\, x, y \in G.$$

Deoarece numerele 3 și 4 sînt prime între ele, deducem că există $k, p \in \mathbf{Z}$ așa încît $3k + 4p = 1$. Rezultă atunci că

$$xy = xy^{3k+4p} = (xy^{3k})y^{4p} \overset{(1)}{=} (y^{3k}x)y^{4p} = y^{3k}(xy^{4p}) \overset{(2)}{=} y^{3k}(y^{4p}x) =$$
$$= (y^{3k}y^{4p})x = y^{3k+4p}x = yx, \ (\forall)\, x, \ y \in G,$$

ceea ce arată că G este comutativ.

3. Fie $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\, dx$. Avem $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ Calculînd J prin schimbarea de variabilă $t = u(x) = \frac{\pi}{2} - x$ deducem $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t + \cos^3 t}\, dt = I$ și dacă ținem seama că $I + J = \frac{\pi}{2}$ rezultă $I = \frac{\pi}{4}$.

4. Considerăm funcția $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = F(x) - x$. Rezultă că $G'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1 \leq \frac{|x|}{1 + |x|} - 1 = -\frac{1}{1 + x} < 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, ceea ce arată că

funcția G este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$. Pentru $\in \mathbf{R}_-$ inegalitatea precedentă devine $G'(x) \leqslant -\frac{1}{1+x}$, adică $(G(x) + \ln(1+x)) \leqslant 0$, iar aceasta ne arată că funcția $H : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $H(x) = G(x) + \ln(1+x)$ este descrescătoare. Prin urmare, $G(x) = H(x) - \ln(1+x) \leqslant H(0) - \ln(1+x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}_-$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} (H(0) - \ln(1+x)) = -\infty$ din inegalitatea precedentă deducem (1) $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = -\infty$.

Pentru $x \in \mathbf{R}_-$ inegalitatea $G'(x) \leqslant -\frac{1}{1+x}$ se mai scrie $G'(x) < -\frac{1}{1-x} \Rightarrow$ $\Rightarrow (G(x) - \ln(1-x))' \leqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_-$, ceea ce arată că funcția $K : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}$, $K(x) = G(x) - \ln(1-x)$ este descrescătoare și atunci deducem că $G(x) = K(x) + \ln(1-x) \geqslant K(0) + \ln(1-x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_-$. De aici rezultă ca mai sus că (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = \infty$. Datorită faptului că G are proprietatea lui Darboux, pe baza relațiilor (1) și (2) deducem că există $x_0 \in \mathbf{R}$ așa încît $G(x_0) = 0 \Leftrightarrow F(x_0) = x_0$. Totodată avem în vedere că din cele demonstrate mai sus rezultă că G este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$ și atunci este injectivă, de unde deducem că punctul $x_0 \in \mathbf{R}$ așa încît $G(x_0) = 0$ este unic.

Etapa finală

1. Vom da o soluție care se bazează pe criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue. În acest scop reamintim mai întîi următoarea definiție: o mulțime $A \subset \mathbf{R}$ se numește de măsură Lebesgue nulă (mulțime neglijabilă) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un șir de intervale deschise $(I_n)_{n\geqslant 1}$ așa încît $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$, unde $l(I)$ este lungimea intervalului I. Reamintim, de asemenea, că o submulțime a unei mulțimi neglijabile este neglijabilă, iar o reuniune numărabilă de mulțimi neglijabile este tot o mulțime neglijabilă. În sfîrșit reamintim criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue: o funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann dacă și numai dacă este mărginită și mulțimea $D(f)$ a punctelor sale de discontinuitate este de măsură Lebesgue nulă. Să trecem acum la soluția propriu-zisă a problemei noastre. Deoarece f este integrabilă, rezultă că f este mărginită și atunci și g este o funcție mărginită. Rămîne să arătăm că mulțimea $D(g)$ a discontinuităților funcției g este de măsură Lebesgue nulă. Folosind definiția cu șiruri a continuității se poate dovedi ușor că x_0 este punct de continuitate pentru funcția f dacă și numai dacă $\sqrt{x_0}$ este punct de continuitate pentru funcția g. Deci vom avea $x_0 \in D(f) \Leftrightarrow \sqrt{x_0} \in D(g)$, ceea ce înseamnă

$$D(g) = \sqrt{D(f)} \overset{\text{def}}{=} \{\sqrt{x} \mid x \in D(f)\}.$$

Putem presupune că $D(g)$ este mulțimea discontinuităților funcției g doar în intervalul $(0, 1]$, căci adăugînd eventual punctul 0, măsura Lebesgue nu se modifică. Deci putem scrie

$$D(g) = D(g) \cap (0, 1] = D(g) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}, 1\right]\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(D(g) \cap \left[\frac{1}{k}, 1\right]\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k(g),$$

unde am notat cu $D_k(g)$ mulțimea discontinuităților funcției g pe intervalul $\left[\frac{1}{k}, 1\right]$.

Va fi suficient să demonstrăm că fiecare mulțime $D_k(g)$ este de măsură Lebesgue

nulă, $(\forall) k \in \mathbf{N}^*$. Într-adevăr, pentru $k \in \mathbf{N}^*$ fixat, mulțimea $D_k(f) \overset{\text{def}}{=} D(f) \cap \left[\frac{1}{k^2}, 1\right]$ care reprezintă discontinuitățile funcției f pe intervalul $\left[\frac{1}{k^2}, 1\right]$, este o mulțime neglijabilă (căci este submulțime a lui $D(f)$, care este neglijabilă). Înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un șir de intervale deschise $(I_n^k)_{n \geq 1}$, $I_n^k = (a_n^k, b_n^k) \subset \subset \left[\frac{1}{k^2}, 1\right]$, așa încît $D_k(f) \subset \bigcup_{n=1} I_n^k$ și

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_k^n) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^k - a_n^k) < \frac{\varepsilon}{2k}. \tag{1}$$

Dacă notăm $J_n^k = (\sqrt{a_n^k}, \sqrt{b_n^k})$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, rezultă imediat $D_k(g) = \sqrt{D_k(f)} \subset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^k$ și folosind (1) și faptul că $a_n^k, b_n^k \geq k^{-2}$ avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n^k) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{b_n^k} - \sqrt{a_n^k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^k - a_n^k}{\sqrt{b_n^k} + \sqrt{a_n^k}} \leq 2k \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^k - a_n^k) < 2k \frac{\varepsilon}{2k} =$$

ceea ce arată că mulțimea $D_k(g)$ este măsură Lebesgue nulă. Cu aceasta soluția se încheie.

2. Notînd cu I, J respectiv integralele din membrul stîng și din membrul drept, putem scrie

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\left(\sin^2 x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos^2 x\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}(2\sin^2 x - 1 -$$

$$- \sin x \cos^2 x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2} e^{\sin x}\left(-\cos 2x - \frac{1}{2}\cos x \sin 2x\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 e^{\sin x} \cos 2x + e^{\sin x} \cos x \sin 2x)\, dx = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} (\sin 2x)' +$$

$$+ (e^{\sin x})' \sin 2x)\, dx = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} \sin 2x)'\, dx = -\frac{1}{4} e^{\sin x} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

de unde $I =$

3. 1) Fie $H = \{e, a, a^2, a^3\}$ subgrupul ciclic generat de elementul a și să notăm $bH = \{b, ba, ba^2, ba^3\}$. Mulțimile H și bH au cîte patru elemente și sînt disjuncte, deoarece dacă ar exista $x \in bH \cap H$, atunci $x = by$, cu $y \in H$ și de aici ar rezulta $b = xy^{-1} \in H$, contradicție cu ipoteza $b \in G \setminus H$. Deoarece $H \subset G$, $bH \subset G$, rezultă $bH \cup H \subset G$ și deoarece fiecare din mulțimile $bH \cup H$ și G au cîte 8 elemente, incluziunea de mai sus este chiar o egalitate. Deci $G = bH \cup H = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$.
2) Nu putem avea $ab \in H$ deoarece din $ab = t \in H$ ar rezulta $b = a^{-1}t \in H$, contradicție. Prin urmare $ab \in bH = \{b, ba, ba^2, ba^3\}$. Dacă am avea $ab = b$ ar rezulta $a = e$, contradicție. Dacă am avea $ab = b$ avînd în vedere că toate elementele lui G se scriu sub forma $b^i a^j$ $(i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, 2, 3\})$, ar rezulta că G este abelian, contradicție. Dacă am avea $ab = ba^2$, ar rezulta $a^2 b = a(ab) = = a(ba^2) = (ab)a^2 = (ba^2)a^2 = ba^4 = b$, adică $a^2 = e$, contradicție cu faptul că

a este element de ordinul 4 în grupul G. Rămîne drept singură posibilitate $ab = ba^3$. 3) Nu putem avea $b^2 \in bH$, deoarece din $b^2 = bu$, cu $u \in H$, ar rezulta $b = u \in H$, contradicție. Prin urmare, $b^2 \in H = \{e, a, a^2, a^3\}$. Dacă am avea $b^2 = a$, atunci ținînd seama că a are ordinul 4 ar rezulta că 4 este cel mai mic număr natural cu proprietatea $(b^2)^4 = e$, adică 8 este cel mai mic număr natural așa încît $b^8 = e$. Deci b ar fi un element de ordinul 8 în grupul G; atunci grupul G ar fi ciclic (generat de b) și deci abelian, contradicție. Dacă am avea $b^2 = a^3$, constatînd ușor că și a^3 are tot ordinul 4 în grupul G, conform raționamentului anterior am ajunge la concluzia că b este element de ordinul 8 în grupul G, ceea ce ar însemna că G este ciclic, deci abelian, contradicție. Prin urmare, neapărat $b^2 \in \{e, a^2\}$. Un exemplu de grup necomutativ cu 8 elemente îl constituie grupul multiplicativ al cuaternionilor de normă 1, adică $C_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, unde operația grupului este definită astfel: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Dacă în acest grup luăm $a = i$, $b = j$, obținem $b^2 = a^2$ (vezi punctul 3) al problemei noastre).

4. a) $\Rightarrow$ b) Numărul elementelor inversabile din inelul $\mathbf{Z}_n$ este $\varphi(n)$, unde φ este indicatorul lui Euler. Prin urmare ipoteza este echivalentă cu $\varphi(n) = \frac{1}{2n}$, adică (1) $n = 2\varphi(n)$. Fie $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ descompunerea în factori primi a numărului natural n, unde $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ sînt numere prime, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sînt numere naturale nenule. Se știe atunci că

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1} \ldots p_k^{\alpha_k - 1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_k - 1)$$

și deci egalitatea (1) devine

$$(2) \qquad p_1 p_2 \ldots p_k = 2(p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_k - 1).$$

Din (2) avem că 2 divide produsul $p_1 p_2 \ldots p_k$, deci în mod necesar vom avea $p_1 = 2$. Dacă presupunem $k > 1$, egalitatea (2) devine

$$(3) \qquad p_2 p_3 \ldots p_k = (p_2 - 1) \ldots (p_k - 1).$$

Dar (3) este imposibilă, deoarece membrul stîng este evident mai mare decît cel drept. Prin urmare, $k = 1$ și $p_1 = 2$, ceea ce înseamnă că $n = 2^{\alpha_1}$. b) $\Rightarrow$ a) Dacă $n = 2^k$, atunci elementele inversabile din inelul $\mathbf{Z}_{2^k}$ sînt clasele $\hat{a}$ cu proprietatea $(a, 2^k) = 1$, adică clasele impare, iar clasele neinversabile sînt cele pare. Prin urmare, există 2^{k-1} elemente inversabile și tot 2^{k-1} elemente neinversabile.

Anul 1987

Etapa județeană

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, integrînd prin părți, obținem

$$I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}, \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}} \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

2. Avem

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x^2}{x^6 + 1} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\, dx = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + C.$$

Pentru $x \geqslant 2$ problema revine la a arăta că există $P, Q \in \mathbf{Z}(X)$ astfel încît $\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^3 = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{P(x)}{Q(x)}$ sau $\frac{P(x)}{Q(x)} = \operatorname{tg}(3 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x^3) = \frac{3x(1-x^2)}{x^4 - 4x^2 + 1}$ și atunci $P(x) = -3x^3 + 3x$, $Q(x) = x^4 - 4x^2 + 1$. Deoarece $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\} \subset (-\infty, 2)$ rezultă că pe intervalul $J = (-\infty, 2]$ răspunsul este negativ.

3. Pentru $a_i = 0$, $(\forall)\, i = \overline{1, n}$, egalitatea din enunț are loc pentru orice $c \in [a, b]$. Dacă $\sum_{k=1}^{n} a_k > 0$ considerăm funcția $F : [a, b] \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ căreia îi studiem continuitatea. Fie $u \in [a, b]$, arbitrar. $F(x) - F(u) = \int_u^x f(t)\, dt = p(x - u)$, unde $p \in [m, M]$, cu $m = \inf_{t \in [a, b]} f(t)$, $M = \sup_{t \in [a, b]} f(t)$ a căror existență este asigurată de integrabilitatea lui f pe $[a, b]$ și a f este mărginită pe $[a, b]$. Rezultă deci că $\lim_{x \to u} F(x) = F(u)$. Deoarece u fost arbitrar pe $[a, b]$ rezultă că F este continuă pe $[a, b]$ și deci are proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$. Avem de demonstrat egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(F(x_i) - F(c)) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i F(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = F(c).$$

Deoarece

$$\min_{i=\overline{1, n}} F(x_i) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i F(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \max_{i=\overline{1, n}} F(x_i)$$

și F are proprietatea lui Darboux pe intervalul $[a, b]$ deducem că există $c \in [a, b]$ astfel încît

$$\sum_{i=1}^{n} a_i F(x_i) = F(c) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

ceea ce încheie demonstrația.

4. Punînd $x + y$ în loc de x în relația din enunț deducem

$$(x^2 \quad xy + yx \quad y^2 - x - y)y = y(x^2 \quad xy \quad yx + y^2 - x - y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2y + xy^2 + yxy + y^3 - xy - y^2 = yx^2 \quad yxy \quad y^2x + y^3 - yx - y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2 - x)y + xy^2 = y(x^2 - x) + y^2x$$

și deoarece $(x^2 - x)y = y(x^2 - x)$, rezultă că $xy^2 = y^2x$, $(\forall)\, x, y \in A$. Dacă în ultima relație punem z în loc de y și y în loc de x, obținem $yz^2 = z^2y$, $(\forall)\, y, z \in A$. Totodată, din enunț avem $x^2y - xy = yx^2 - yx$ și deci, folosind cele demonstrate anterior, rezultă $-xy = -yx$, $(\forall)\, x, y \in A \Rightarrow xy = yx$, $(\forall)\, x, y \in A$. Prin urmare A este comutativ.

5. Presupunem mai întîi că A este finit. a) $\Rightarrow$b). Avem $a^2 = -1 \Rightarrow -a^2 = 1 \Rightarrow a(-a) = (-a)a = 1 \Rightarrow a^{-1} = a$. Deoarece $a^2 = (-a)^2 = -1$ pe baza unicității lui a deducem $a = -a \Rightarrow a + a = 0 \Rightarrow a(1 + 1) = 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot a(1 + 1) = 0 \Rightarrow 1 + 1 = 0 \Rightarrow 1 = -1 \Rightarrow 1^2 = 1 = -1 = a^2$ și din unicitatea lui a obținem

a) 1. Este suficient să demonstrăm că funcția $f: A \to A, f(x) =$ este injectivă. Deoarece A este finit din surjectivitatea lui f rezultă și injectivitatea și reciproc. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 0$ și deoarece $y + y = y(1+1) = y \cdot 0 = 0 \Rightarrow y = -y$, deducem că $(x-y)^2 = 0$, și deci acum este suficient să demonstrăm că din $u^2 = 0 \Rightarrow u = 0$. Avem

$$0 = (u+1)^2 = u^2 + u + u + 1 = u^2 + u(1+1) + 1 = 1 \Rightarrow (u+1)^2 = -1$$

și din unicitatea lui a cu această proprietate deducem că $u + 1 = 1 \Rightarrow u = 0$.
b) $\Rightarrow$ a) De data aceasta funcția $f: A \to A$, $f(x) = x^2$ este surjectivă și deci din faptul că A este finit rezultă că f este injectivă. De asemenea, $1^2 = 1 = -1$ și atunci existența este demonstrată. Fie $a \in A$ astfel încît $a^2 = -1$. Rezultă $a^2 = -1 = 1^2$ și din injectivitatea lui f deducem că $a = 1 = -1$, și astfel unicitatea este și ea demonstrată. În cazul $A = \mathbf{Z}_2[X]$ afirmația de la punctul a este adevărată. (Dacă $f^2 = \hat{1} = \hat{0}$, atunci $(f + \hat{1})^2 = \hat{0} \Rightarrow f + \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow f = \hat{1}$.) Dar afirmația de a punctul b este falsă datorită faptului că polinoamele de grad impar din $\mathbf{Z}_2[X]$ nu pot fi pătrate de polinoame din $\mathbf{Z}_2[X]$.

Etapa finală

1. Avem

$$(F(x) \cdot F(x^{-1}))' = f(x) \cdot F(x^{-1}) - F(x) \cdot f(x^{-1})x^{-2} = 0, \ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$$

Rezultă că $F(x) \cdot F(x^{-1}) = c$, unde $c \in \mathbf{R}_+^*$, deoarece $f(x) \in I$, $(\forall)\, x \in I$. Egalitatea precedentă se scrie echivalent

$$F(x) \cdot (xf(x))^{-1} = c, \ (\forall)\, x \in I \Leftrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{cx} \Rightarrow (\ln F(x))' = (c^{-1} \cdot \ln x)',$$

de unde obținem $F(x) = c^{-1} \ln x + \ln d$, cu $d > 0$, adică $F(x) = d \cdot x^{\frac{1}{c}}$, cu $c, d > 0$. Egalitatea $F(x) \cdot F(x^{-1}) = c$ devine atunci $d^2 = c$, deci $d = \sqrt{c}$ și atunci

$$f(x) = \frac{1}{xF(x^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot x^{\frac{1}{c} - 1}.$$

2. Să presupunem prin absurd că avem $K = \bigcup_{i=1}^{3} K_i$. Atunci

$$K_i \not\subset K_j \cup K_p, \ (\forall)\, i < j, p, \text{ cu } i, j, p \in \{1, 2, 3\}.$$

Dacă am avea, de exemplu, $K_1 \subset K_2 \cup K_3$, atunci $K = K_2 \cup K_3$ și gîndind această egalitate la nivelul grupurilor aditive corespunzătoare, rezultă $K = K_2$ sau $K = K_3$, ceea ce este imposibil.) Prin urmare putem alege $x_1 \in K_1 \setminus (K_2 \cup K_3)$ și $x_2 \in K_2 \setminus (K_1 \cup K_3)$. Evident $x_1, x_2 \neq 0$ și $x_1 + x_2 \notin K_1 \cup K_2$ (căci dacă am avea, de exemplu, $x_1 + x_2 \in K_1$, atunci $x_2 = -x_1 + (x_1 + x_2) \in K_1$, contrar alegerii lui x_2). Prin urmare $x_1 + x_2 \in K_3$. Considerăm elementul $z = x_1^{-1}(x_1 + x_2) = 1 + x_1^{-1}x_2$. Deoarece $x_1^{-1} \in K_1$ și $x_1 + x_2 \in K_3 \setminus \{0\}$, rezultă la fel că $z \notin K_1 \cup K_3$. Deci $z \in K_2$. Atunci $1 + x_1^{-1}x_2 \in K_2$, adică $x_1^{-1}x_2 \in K_2$. În sfîrșit, din faptul că $x_2 \in K_2 \setminus \{0\}$, rezultă că $(x_1^{-1}x_2)x_2^{-1} \in K_2$, deci $x_1^{-1} \in K_2$, adică $x_1 \in K_2$ și aceasta este o contradicție cu alegerea lui x_1.

3. a) Dacă $x \in \mathbf{R}_+$ ecuația devine $\int_0^1 (t + x(1-t)^m)\, dt = \frac{1}{2}$ și are soluția unică $x = 0$. Dacă $x \in \mathbf{R}_-^*$ ecuația se scrie

$$-\int_0^{\frac{x}{x-1}} (t + (1-t)x)\, dx + \int_{\frac{x}{x-1}}^1 (t + x(1-t))\, dt = \frac{1}{2}$$

și are rădăcina $x = -1$. b) Căutăm rădăcini $\in \mathbf{R}_-^*$. Fie $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(t) = t + x(1-t)^m$. Deoarece $f(0)f(1) < 0$ și f este strict crescătoare, rezultă că există un unic $t_x \in (0, 1)$ astfel încît $f(t_x)=0$ și deoarece $x \in \mathbf{R}_-^*$ ecuația devine

$$-\int_0^{t_x} (t + x(1-t)^m)\, dt + \int_{t_x}^1 (t + x(1-t)^m)\, dt = \frac{1}{2},$$

adică (1) $2x(1-t_x)^{m+1} = x + (m+1)t_x^2$. Ținînd seama că $f(t_x) = 0$, avem $t_x + x(1-t_x)^m = 0$, de unde $2x(1-t_x)^{m+1} = -t_x(1+t_x)$ și, înlocuind în (1), se obține $x = -t_x - mt_x^2$. Deoarece t_x este unic, rezultă că soluția $x \in \mathbf{R}_-^*$ este unică. În cazul $x \in \mathbf{R}_+$ se arată ușor calculînd integrala că singura rădăcină este $x = 0$. Deci ecuația dată are exact două rădăcini distincte.

4. a) Dacă $|G|=1$, atunci $|G|=2^0$ și proprietatea are loc. Fie acum $|G| \geq 2$. Să alegem un element $x \in G \setminus \{\hat{1}\}$. Atunci, din $x^{-1} = x$ rezultă $x^2 = \hat{1}$, deci $\{\hat{1}, x\}$ este un subgrup al lui G de ordinul 2. Deci G conține subgrupuri de ordin puteri (nenule) ale lui 2. Fie H un subgrup al lui G, de ordin o putere maximală a lui 2, să zicem $2^k = |H|$. Vom arăta că în acest caz $H = G$. Pentru aceasta presupunem că ar exista un element $a \in G \setminus H$, adică $G \neq H$ și astfel vom demonstra că submulțimea $K = aH \cup H$ este un nou subgrup al lui G. Într-adevăr, fie $x, y \in K$; dacă $x, y \in H$, atunci $xy^{-1} \in H \subset K$; dacă $x, y \in aH$, avem $xy^{-1} = (au)(av)^{-1} = uaa^{-1}v^{-1} = uv^{-1} \in H \subset K$; în sfîrșit, dacă $x \in H$, $y \in aH$, avem $xy^{-1} = x(av)^{-1} = a^{-1}xv^{-1} = a(xv^{-1}) \in aH \subset K$. Deoarece $H \cap aH \neq \emptyset$ și H, aH au cîte 2^k elemente fiecare, deducem că mulțimea K are 2^{k+1} elemente, ceea ce contrazice maximalitatea lui k. Contradicția obținută ne arată că $G = H$ și deci $|G| = 2^k$. b) Fie $n = 2^k p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_s^{u_s}$, cu $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ numere prime impare și u_i, $i = \overline{1, s}$ numere naturale. Grupul G are $\varphi(n)$ elemente, iar conform punctului a ordinul său este o putere a lui 2; rezultă atunci că $\varphi(n)$ este o putere a lui 2. Deoarece

$$\varphi(n) = 2^{k-1} p_1^{u_1-1} \dots p_s^{u_s-1}(p_1 - 1) \dots (p_s - 1),$$

trebuie să avem $u_1 = u_2 = \dots = u_s = 1$ și $p_i = 2^{t_i} + 1$, $i = \overline{1, s}$. Așadar $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_s$ și rezultă izomorfismul de inele $\mathbf{Z}_n \simeq \mathbf{Z}_{2^k} \times \mathbf{Z}_{p_1} \times \dots \times \mathbf{Z}_{p_s}$ prin funcția $\hat{x} \xrightarrow{g} (\hat{x}, \hat{x}, \dots, \hat{x})$, unde $\hat{x}$ de pe prima poziție este clasa lui $x \in \mathbf{Z}$ văzută în $\mathbf{Z}_{2^k}$, $\hat{x}$ de pe a doua poziție este clasa lui x văzută în $\mathbf{Z}_{p_1}$ și așa mai departe. Fie $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ fixat. Luînd un element $\hat{x} \in U(\mathbf{Z}_n)$ vom avea $\hat{x}^2 = \hat{1}$ în $U(\mathbf{Z}_n)$ și datorită izomorfismului g rezultă $g(\hat{x}^2) = \hat{1}$, adică $\hat{x}^2 = \hat{1}$ în $U(\mathbf{Z}_{p_i})$. Deoarece $(2, p_i) = 1$, avem $\hat{2} \in U(\mathbf{Z}_{p_i})$, adică $\hat{3} = \hat{0}$ în $\mathbf{Z}_{p_i}$. Aceasta înseamnă că p_i divide 3, deci $p_i = 3$ și atunci rezultă obligatoriu $s = 1$ și prin urmare $n = 2^k \cdot 3^v$ cu $v \in \{0, 1\}$. De aici se vede că $(5, n) = 1$, deci $\hat{5} \in U(\mathbf{Z}_n)$, adică $\hat{5}^2 = \hat{1}$ sau $\widehat{24} = \hat{0}$, ceea ce arată că n divide pe 24. Rezultă că 2^k divide pe 24 și deci $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Prin urmare în mod necesar $n \in \{2, 4, 8, 3, 6, 12, 24\}$. Se constată ușor că toate aceste valori verifică enunțul.

Anul 1988

Etapa județeană

1. Cum $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$ este derivabilă pe $(0, 1)$, iar $f'(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}}$ este continuă pe $(0, 1)$, vom calcula prin părți integrala pe $(0, 1)$ a lui $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$. Avem

$$\int f(x)\,dx = \int x'f(x)\,dx = x\ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) -$$

$$-\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) - \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x}{2} + C.$$

Deci $F(x) = x\ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) - \dfrac{1}{2}\arcsin x - \dfrac{x}{2}$ este o primitivă a lui f pe $(0, 1)$. Fie $G(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (0, 1) \\ \ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$ Cum $G(x)$ este continuă în $x = 1$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} G'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} F'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \sqrt{2} - f(1) \Rightarrow G$ derivabilă în $x = 1$ și $G'(1) = f(1)$. În concluzie, $G'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0, 1]$, deci G este primitivă a lui f.

2. Fie $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ Cum f nu are limită în punctul $x = 0$ rezultă f nu este continuă pe **R**. Mai mult, f are primitive (vezi, *Analiză matematică*. Manual pentru clasa a XII-a). Fie g o funcție continuă. Cum f și g admit primitive, rezultă $h = f + g$ admite primitive, deci are proprietatea lui Darboux. Deci nu rezultă în mod necesar continuitatea lui f.

3. a) Fie $e > 1$ elementul neutru al grupului $(M, \circ)$. Atunci $x \circ e = xe + ax + be + c = x$ și $e \circ x = ex + ae + bx + c = x$, pentru orice $x > 1$, de unde $e + a = 1$, $be + c = 0$, $a + b = 1$, $ae + c = 0$. Din ultimele patru relații deducem $a = b$, $e = 1 - a > 1$ și $a(1-a) + c = 0$, deci $a = b < 0$ și $c = a^2 - a$. Legea de compoziție se scrie $x \circ y = xy + a(x+y) + a^2 - a$. Cum M este stabilă relativ la „$\circ$", rezultă $x \circ x = x^2 + 2ax + a^2 - a > 1$, pentru orice $x > 1$. Deci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x^2 + 2ax + a^2 - a) = a^2 + a + 1 \geqslant 1$, de unde $a(a+1) \geqslant 0$ și, cum $a < 0$, rezultă $a \leqslant -1$. Dacă $a < -1$, fie $x = \dfrac{1-x}{2} > 1$ și $y > 1$. Atunci

$$x \circ y = \frac{1-a}{2}y + a\left(\frac{1-a}{2} + y\right) + a^2 - a = \frac{(1-a)y + a - a^2 + 2ay + 2a^2 - 2a}{2} =$$

$$= \frac{(1+a)y + a^2 - a}{2} > 1 \Leftrightarrow (1+a)y + a^2 - a - 2 > 0 \Leftrightarrow (1+a)y +$$

$$+ (1+a)(a-2) > 0 \Leftrightarrow (1+a)(y + a - 2) > 0.$$

Cum $1 + a < 0$, rezultă $y + a - 2 < 0$, pentru orice $y > 1$, fals căci $\lim\limits_{y \to \infty} (y + a - 2) = +\infty$. Deci $a = -1$ și legea devine $x \circ y = xy - (x + y) + 2$. Se arată cu ușurință că $(M, \circ)$ este grup. b) Fie $f: M \to \mathbf{R}, f(x) = \ln(x - 1)$. Cum $f(x \circ y) = f(xy - (x + y) + 2) = \ln(xy - x - y + 1) = \ln(x - 1)(y - 1) = \ln(x - 1) + \ln(y - 1) = f(x) + f(y)$, rezultă f morfism de grupuri. Cum f este bijectivă, rezultă f izomorfism.

4. Cum $G \neq \{0\}$, fie $a \neq 0$, $a \in G$. Cum $-a \in G$, rezultă că G conține numere reale strict pozitive. Fie deci $a > 0$, $a \in G$ și $b = a + 1$. Cum $G \cap (-b, b)$ este finită și nevidă (conține numărul a), fie α cel mai mic număr real strict pozitiv al ei. Atunci α este cel mai mic număr real strict pozitiv al lui G (într-adevăr, fie $\beta \in G$, $\beta > 0$, $\beta < \alpha \Rightarrow \beta \in (-b, b) \cap G$, ceea ce contrazice alegerea lui α). Vom arăta că $G = \{\alpha k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Incluziunea $\{\alpha k \mid k \in \mathbf{Z}\} \subset G$ este imediată (se demonstrează prin inducție după $k > 0$ că $\alpha k \in G$ și, cum $\alpha(-k) = -(\alpha k) \in G$ pentru orice $k > 0$, rezultă incluziunea dorită). Pentru incluziunea inversă, fie $\beta > 0$, $\beta \in G$ și $p = \left[\frac{\beta}{\alpha}\right]$ Rezultă $p \leqslant \frac{\beta}{\alpha} < p + 1$ sau $p\alpha \leqslant \beta \leqslant p\alpha + \alpha$, de unde $0 \leqslant \beta - p\alpha < \alpha$. Cum $\beta \in G$, $p\alpha \in G \Rightarrow \beta - p\alpha \in G$ și ținând cont de alegerea lui α obținem $\beta - p\alpha = 0 \Rightarrow \beta = p\alpha \in \{\alpha k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Dacă $\beta < 0$, $\beta \in G \Rightarrow -\beta > 0$, $-\beta \in G$ și deci $-\beta \in \{\alpha k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, de unde $\beta \in \{\alpha k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Cum (vident $0 = \alpha \cdot 0 \in \{\alpha k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, rezultă $G = \{\alpha k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Grupurile $(G, +)$ și $(\mathbf{Z}, +)$ sînt izomorfe prin aplicația $f: G \to \mathbf{Z}, f(\alpha k) = k$.

Etapa finală

1. Fie $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x^{\frac{1}{n} - 1}$ $(n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2)$. 2) Se observă că $f'(x) = \left(\frac{1}{n} - 1\right) x^{\frac{1}{n} - 2} < 0$, $(\forall) x \in (0, \infty)$, deci f este strict descrescătoare. Putem scrie

$$\int_1^{2^n} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{2^n - 1} \int_k^{k+1} x^{\frac{1}{n} - 1}\,dx < \sum_{k=1}^{2^n - 1} \int_k^{k+1} k^{\frac{1}{n} - 1}\,dx = \sum_{k=1}^{2^n - 1} k^{\frac{1}{n} - 1} < \sum_{k=1}^{2^n} k^{\frac{1}{n} - 1}$$

Dar $\int_1^{2^n} f(x)\,dx = 2n - n = n$. Pe de altă parte, mai putem scrie

$$\int_1^{2^n} f(x)\,dx = \sum_{k=2}^{2^n} \int_{k-1}^{k} x^{\frac{1}{n} - 1}\,dx > \sum_{k=2}^{2^n} \int_{k-1}^{k} k^{\frac{1}{n} - 1}\,dx = \sum_{k=2}^{2^n} k^{\frac{1}{n} - 1} = \sum_{k=1}^{2^n} k^{\frac{1}{n} - 1} - 1.$$

În concluzie, putem scrie $n < \sum_{k=1}^{2^n} k^{\frac{1}{n} - 1} < n + 1$. Deci partea întreagă a numărului $\sum_{k=1}^{2^n} k^{\frac{1}{n} - 1}$ este egală cu n.

2. Trebuie demonstrat că funcția continuă $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - (f(x))^3$ se anulează pe intervalul $[0, 1]$. Presupunînd contrariul, deoarece g este continuă, am avea fie $g(x) > 0$, fie $g(x) < 0$, pentru orice $x \in [0, 1]$. Dacă $g(x) > 0$ se obține că pentru orice x din $[0, 1]$ avem $\int_0^x f(t)\,dt > (f(x))^3$. În particular, pentru $x = 0$ se obține $f(0) < 0$. Deoarece f este continuă, există o vecinătate $[0, a]$,

pe care $f(t) < 0$. Avem $a < 1$, căci în caz contrar am avea $\int_0^1 f(t)\,dt < 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Deoarece $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, există $\in [0, 1]$ pentru care $f(x) \geqslant 0$. Să notăm $A = \{x \mid f(x) \geqslant 0\}$ și $s = \inf A$. Evident $f(s) \geqslant 0$ și $s > 0$, deoarece $f(0) < 0$. Deoarece $g(s) > 0$, avem $\int_0^s f(t)\,dt > (f(s))^3 \geqslant 0$. Pe de altă parte, $f(t) < 0$, pentru orice $t \in [0, s)$, deci $\int_0^s f(t)\,dt < 0$, contradicție. Cazul $g(x) < 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$ se poate reduce la precedentul, schimbînd funcția f în $-f$.

3. Fie $\varphi : G \to G$, $\varphi(x) = f(x)x^{-1}$. Să demonstrăm că φ este injectivă. Dacă $\varphi(x) = \varphi(y)$, atunci obținem succesiv: $f(x)x^{-1} = f(y)y^{-1}$, $(f(y))^{-1}f(x) = y^{-1}x$, $f(y^{-1})f(x) = y^{-1}x$, $f(y^{-1}x) = y^{-1}x$. Conform ipotezei, deducem că $y^{-1}x = e$ sau $x = y$. Deci aplicația φ este injectivă și, cum grupul G este finit, rezultă că φ este bijectivă, adică $\varphi(G) = G$. Deci $\{f(x)x^{-1} \mid x \in G\} = G$. Deoarece φ este o surjecție, pentru $y \in G$ arbitrar ales, există $x \in G$, astfel încît $\varphi(x) = y$. Putem scrie $f(y) = f(f(x)x^{-1}) = f(f(x))f(x^{-1}) = xf(x^{-1}) = (f(x)x^{-1})^{-1} = y^{-1}$. Deci $f : G \to G$ are proprietatea că $f(x) = x^{-1}$, pentru orice $x \in G$. Rezultă că dacă $x, y \in G$, $f(xy) = f(x)f(y)$ sau $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, adică $xy = yx$, deci grupul G este abelian. Dacă $x \neq e$ avem $f(x) \neq x$, deci $x \neq x^{-1}$. Atunci submulțimile $\{x, x^{-1}\}$ formează o partiție a mulțimii $G \setminus \{e\}$ ale cărei clase conțin toate cîte două elemente. Deci $G \setminus \{e\}$ conține un număr par de elemente, deci n este impar.

4. Dacă $a = 0$ atunci $Q(X) = 2P(X)$ și afirmația este evidentă. Fie acum $a \neq 0$ și y o rădăcină a polinomului Q. Atunci $Q(y) = P(y + ia) + P(y - ia) = 0$, deci (1) $P(y + ia) = -P(y - ia)$. Dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt cele n rădăcini reale ale polinomului P, atunci $P(X) = (X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ și (1) se scrie $(y+ia-x_1)(y+ia-x_2)\ldots(y+ia-x_n) = -(y-ia-x_1)(y-ia-x_2)\ldots(y-ia-x_n)$, de unde se obține relația

$$(2) \qquad |y - (x_1 - ia)|\,|y - (x_2 - ia)| \ldots |y - (x_n - ia)| = |y - (x_1 + ia)|\,|y - (x_2 + ia)| \ldots |y - (x_n + ia)|$$

Din (2) se deduce că numărul y este real. Într-adevăr, este clar că polinomul Q are coeficienți reali. Dacă $\operatorname{Im} y \neq 0$, obținem $\operatorname{Im} y > 0$ sau $\operatorname{Im} y < 0$. Să presupunem de exemplu că $\operatorname{Im} y > 0$. Atunci dacă $a > 0$, notînd $z_j = x_j + ia$, pentru $j = 1, \ldots, n$, obținem că $|y - z_j| < |y - \bar{z}_j|$, pentru orice $j = 1, \ldots, n$, ceea ce contrazice (2). La fel, dacă $a < 0$, $|y - \bar{z}_j| < |y - z_j|$, ceea ce contrazice de asemenea (2). Deci y nu poate fi o rădăcină complexă cu $\operatorname{Im} y > 0$. La fel, y nu poate fi rădăcină complexă cu $\operatorname{Im} y < 0$ deoarece în acest caz $\bar{y}$ ar fi o rădăcină complexă cu $\operatorname{Im} \bar{y} > 0$, ceea ce am văzut că este imposibil.

Anul 1989

Etapa județeană

1. Vom putea presupune că $p \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, adică $p \leqslant n - p$. Atunci $1 + 2^p + 2^{n-p} < 2^n$. Lucrăm în inelul $\mathbf{Z}_{2^n}$. Avem $(1 + 2^p + 2^{n-p}, 2^n) = 1$ și atunci

$\widehat{1+2^p+2^{n-p}}$ este clasă inversabilă în inelul menționat. Deci există $x \in \mathbf{Z}_{2^n}$, cu $\widehat{1+2^p+2^{n-p}} \cdot \hat{x} = \hat{1}$ și atunci 2^n divide pe $(1+2^n+2^{n-p})x - 1$.

2. i) Se verifică condițiile de subgrup. Avem $V \subset U \subset T$. Fie $z = \rho(\cos x + i \sin x) \in T \Leftrightarrow \rho = 1$, deci $T = \{\cos x + i \sin x,\ x \in [0, 2\pi)\}$. $= \cos x + i \sin x \in U \Rightarrow (\exists)\, n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $\cos nx = 1$, $\sin nx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{n}$, $k = \overline{1, n-1}$. Deci $U = \{\cos 2r\pi + i \sin 2r\pi \mid r \in [0; 1) \cap \mathbf{Q}\}$. Totodată, $z = \cos 2r\pi + i \sin 2r\pi \in V \Leftrightarrow (\exists)\, t \in \mathbf{N}$, $(\exists)\, l \in \{0, 1, \ldots, p^t - 1\}$, astfel încît $r = \frac{l}{p^t}$. ii) Se notează $V_t = \{z \in V \mid z^{p^t} = 1\}$. V_t este ciclic fiind subgrupul rădăcinilor de ordinul p^t ale unității. Avem incluziunile

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \text{ și } V = \bigcup_{t=0}^{\infty} V_t.$$

Arătăm că dacă H este subgrup propriu în V, atunci H este un V_t. Presupunem că $H \neq V_t$. Atunci există un t (luăm cel mai mic număr cu această proprietate) astfel încît $\cos \frac{2\pi}{p^t} + i \sin \frac{2\pi}{p^t} \in H$, dar $\cos \frac{2\pi}{p^{t+1}} + i \sin \frac{2\pi}{p^{t+1}} \notin H$. Avem $V_t \subset H$ iar $V_{t+1} \not\subset H$. Vom arăta că $V_t = H$, prin reducere la absurd. Fie $z = \cos \frac{k}{p^s} \cdot 2\pi + i \sin \frac{k}{p^s} \cdot 2\pi$, unde $k \in \{0, 1, \ldots, p^s - 1\}$, $(k, p^s) = 1$, $s > t$, $z \in H$ și $z \notin V_t$. Deoarece $(k, p^s) = 1$, rezultă că există $a, b \in \mathbf{Z}$, astfel încît $ka + bp^s = 1 \Rightarrow \frac{1}{p^s} = b + \frac{ka}{p^s} \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{p^s} + i \sin \frac{2\pi}{p^s} = \left(\cos \frac{2k\pi}{p^s} + i \sin \frac{2k\pi}{p^s}\right)^a \in H$ și $V_s \subset H$, cu $s \geqslant t+1 \Rightarrow V_{t+1} \subset H$. Am ajuns la o absurditate. Pe de altă parte, V este grup infinit cu toate elementele de ordin finit, deci nu este ciclic. iii) $G_1 = \left\{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \middle| t \in [0, 2\pi)\right\} \simeq (T, \cdot)$. iv) $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$, $f(z) = \frac{z}{\ }$, $g(z) = |z|$.

3. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ și $f(-x) = -f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Avem $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} > 0$, de unde deducem că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ și $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, și cu aceasta rezultă enunțul.

4. Notăm $g(x) = \lim\limits_{u \to x} f(u)$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, și observăm că g este continuă. Într-adevăr, $(\forall)\, \varepsilon > 0$ și $x \in [a, b]$, $(\exists)\, \delta_x > 0$, cu $|u - x| < \delta_x$, $u \neq x \Rightarrow |f(u) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci pentru $x, c \in [a, b]$ arbitrare, intercalăm u cu $u \neq x$, $|u - x| < \delta_x$, $|x - c| < \delta_c$ și avem

$$|g(x) - g(c)| \leqslant |g(x) - f(u)| + |f(u) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Fie $h(x) = f(x) - g(x)$. Deoarece g este continuă rezultă că f este integrabilă dacă și numai dacă h este integrabilă. Evident $\lim\limits_{x \to c} h(x) = 0$, $(\forall)\, c \in [a, b]$. Considerăm

mulțimea $A = \{x \in [a, b] \mid h(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \varepsilon > 0\}$. Această mulțime este finită, deoarece în caz contrar ar conține, conform lemei lui Cesaró, un șir convergent $(x_n)_{n \geqslant 0}$, $x_n \to d \in [a, b]$. Deoarece $\lim_{n \to \infty} h(x_n) = 0$, aceasta ar contrazice faptul că $h(x_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Să notăm deci $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ și $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} h(a_i)$.

Luînd o diviziune Δ a intervalului $[a, b]$, cu $\| \Delta \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2sM}$ găsim

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} | h(\xi_i) | (x_{i+1} - x_i) = \sum_{\substack{i=0 \\ \xi_i \notin A}}^{n-1} | h(\xi_i) | (x_{i+1} - x_i) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=0 \\ \xi_i \in A}}^{n-1} | h(\xi_i) | (x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\substack{i=0 \\ \xi_i \notin A}}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) + \frac{\varepsilon}{2sM} \sum_{\substack{i=0 \\ \xi_i \in A}}^{n-1} | h(\xi_i) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) + \frac{\varepsilon s M}{2sM} = \varepsilon.$$

Deci h este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b h(x)\, dx = 0$. Rezultă deci că și f este integrabilă pe $[a, b]$.

Etapa finală

1. Vom demonstra prin inducție după n proprietatea: $(\forall) x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$, $(\forall) k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, are loc inegalitatea:

$$(1) \qquad (-1)^k (P_n(1) - 1 + S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^k S_{k-1}) \geqslant 0,$$

unde $P_n(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$ și $S_l = S_l(x_1, \ldots, x_n) = \sum x_1 x_2 \ldots x_l = a_l$. Pentru $n = 1$ inegalitatea este evidentă (acum $k = 1$). Presupunem că are loc

$$(2) \qquad (-1)^k (P_n(1) - 1 + S_1 - S_2 + \quad + (-1)^k S_{k-1}) \geqslant 0$$

și demonstrăm că $(-1)^k (P_{n+1}(1) - 1 + S_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) - S_2(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) + \ldots + (-1)^k S_{k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})) \geqslant 0$, $(\forall) k \leqslant n + 1$. Înmulțind inegalitatea (2) cu $1 - x_{n+1} \geqslant 0$, rezultă

$$(-1)^k (P_n(1)(1 - x_{n+1}) - (1 - x_{n+1}) + a_1(1 - x_{n+1}) - a_2(1 - x_{n+1}) + \\ + \ldots + (-1)^k a_{k-1}(1 - x_{n+1})) \geqslant 0,$$

sau echivalent,

$$(-1)^k (P_{n+1}(1) - 1 + (a_1 + x_{n+1}) - (a_2 + a_1 x_{n+1}) + \quad + (-1)^k (a_{k-1} + \\ + a_{k-2} x_{n+1}) - (-1)^k a_{k-1} x_{n+1}) \geqslant 0,$$

de unde rezultă că

$$(-1)^k (P_{n+1}(1) - 1 + S_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) - S_2(x_1, \ldots, x_{n+1}) + \quad + \\ + (-1)^k S_{k-1}(x_1, \ldots, x_{n+1})) \geqslant a_{k-1} x_{n+1} \geqslant 0, \ (\forall) k = 1, \quad n.$$

Pentru $k = n + 1$ relația este imediată. S-a folosit relația $S_k(x_1, \ldots, x_n) = S_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) + x_n S_{k-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

2. Notăm $A = K_1 \times K_2 \times K_3$ și $B = K_4 \times K_5$. Considerăm în A elementele $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$, iar în B elementele $f_1 = (1, 0)$ și $f_2 = (0, 1)$. Aceste elemente satisfac relațiile: 1) $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_3^2 = e_3$, $f_1^2 = f_1$, $f_2^2 = f_2$ (sînt elemente idempotente); 2) $e_ie_j = e_je_i = 0$, $f_if_j = f_jf_i = 0$, pentru $i \neq j$ (elementele e_1, e_2, e_3, respectiv f_1, f_2 sînt ortogonale); 3) $e_1 + e_2 + e_3 = (1, 1, 1)$, $f_1 + f_2 = (1, 1)$. Presupunem, prin reducere la absurd, că există un izomorfism de inele $\varphi : A \to B$. Deoarece relațiile 1)—3) sînt algebrice, rezultă că $\varphi(e_i) \in B$, $i = 1, 2, 3$ sînt elemente idempotente, nenule și ortogonale două cîte două. Fie $(x, y) \in B$ un element idempotent. Atunci $x^2 = x$ în K_4 și $y^2 = y$ în K_5. Dar ecuația $z^2 = z$, echivalentă cu $z(z - 1) = 0$ are în orice corp K soluțiile $z_1 = 0$ și $z_2 = 1$. Rezultă că singurele elemente idempotente ale lui B sînt $0 = (0, 0)$, f_1, f_2, $1 = (1, 1)$. Rezultă că în B nu există trei elemente idempotente, nenule și ortogonale două cîte două, ceea ce contrazice existența izomorfismului φ.

3. i) Considerăm $F : [a, b] \to \mathbf{R}$, $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx - \alpha \int_a^b f(x)\,dx$. Deoarece f este integrabilă, deducem că F este continuă pe $[a, b]$. Pentru că $F(a) = -\alpha \int_a^b f(x)\,dx$, $F(b) = (1 - \alpha) \int_a^b f(x)\,dx$, deducem că $F(a)F(b) = \alpha(\alpha - 1)\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2$ Dacă $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$, atunci deoarece $\alpha \in (0, 1)$, deducem că $F(a)F(b) < 0$ și, cum F este continuă, deducem că $(\exists)\, c \in (a, b)$ astfel încît $F(c) = 0$ sau $\alpha \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$. Dacă $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, atunci putem lua $c = b \in (a, b]$ și egalitatea cerută este trivială; ii) Pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, numerele $\alpha_k = \frac{k}{n} \in (0, 1)$, deci conform cu punctul i, $(\exists)\, c_k \in (a, b]$, astfel încît să avem

$$\int_a^{c_k} f(x)\,dx = \frac{k}{n} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Obținem astfel un șir $(c_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ de numere reale distincte din intervalul (a, b), căci $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$. Numerele $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ sînt distincte, deoarece dacă pentru un k, $1 \leq k \leq n - 1$, am avea $c_k = c_{k+1}$, atunci din relațiile (1) am deduce imediat

$$\frac{k}{n} \int_a^b f(x)\,dx = \frac{k+1}{n} \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{sau} \quad \int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza făcută. Să presupunem că $c_k < c_{k+1}$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n - 2$. Atunci obținem

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx = \int_a^{c_{k+1}} f(x)\,dx - \int_a^{c_k} f(x)\,dx = \frac{k+1}{n} \int_a^b f(x)\,dx - \frac{k}{n} \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{n} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Notăm $c_0 = a$, $c_n = b$. Conform teoremei de medie pentru integrale, pentru orice $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, $(\exists)\, x_{k+1} \in (c_k, c_{k+1})$ astfel încît $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx =$

$=(c_{k+1}-c_k)f(x_{k+1})$, deci dacă ținem cont și de (2) obținem că $(c_{k+1}-c_k)f(x_{k+1})=$ $=\frac{1}{n}\int_a^b f(x)\,dx$, de unde $c_{k+1}-c_k=\frac{1}{nf(x_{k+1})}\int_a^b f(x)\,dx$. Este clar că $f(x_k)\neq 0$ deoarece $\int_a^b f(x)\,dx\neq 0$. Am obținut astfel numerele $x_1, \ldots, x_n\in(a, b)$ astfel încît

$$c_{k+1}-c_k=\frac{1}{nf(x_{k+1})}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{3}$$

unde $k=0, 1, \ldots, n-1$. Sumînd relațiile (3) pentru $k=0, 1, \ldots, n-1$ deducem că

$$\sum_{k=0}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{nf(x_{k+1})}\int_a^b f(x)\,dx,$$

sau, echivalent,

$$b-a=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{nf(x_{k+1})}\int_a^b f(x)\,dx,$$

adică relația cerută. Să mai observăm că dacă pentru un indice k, $1\leqslant k\leqslant n-2$, am avea $c_k>c_{k+1}$, atunci putem scrie

$$\int_{c_{k+1}}^{c_k} f(x)\,dx=\int_a^{c_k} f(x)\,dx-\int_a^{c_{k+1}} f(x)\,dx=-\frac{1}{n}\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Funcția f fiind continuă și crescătoare, vom descompune intervalul $[0, 1]$ astfel: $[0, 1]=[0, a)\cup[a, b]\cup(b, 1]$, unde $[0, a)=\{x\in[0, 1]\mid f(x)<0\}$, $[a, b]=$ $=\{x\in[0, 1]\mid f(x)=0\}$ și $(b, 1]=\{x\in[0, 1]\mid f(x)>0\}$. Trebuie să demonstrăm că în condițiile date $a=0$ și $b=1$. Să presupunem prin reducere la absurd că $\{a, b\}\neq\{0, 1\}$. Putem scrie

$$\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx=\int_0^a f(x)\varphi(x)\,dx+\int_b^1 f(x)\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

și avem de analizat următoarele cazuri: *cazul 1*: $0<a<b<1$; *cazul 2*: $a=$ $=0<b<1$; *cazul 3*: $0<a<b=1$. Astfel, în primul caz φ fiind continuă și descrescătoare și neconstantă pe $[0, 1]$, rezultă că ea nu este constantă fie pe $[0, a]$, fie pe $[b, 1]$. Dacă φ nu este constantă pe $[0, a]$, atunci avem $\int_0^a f(x)\varphi(x)\,dx<\varphi(a)\int_0^a f(x)\,dx$, deoarece din $0<x<a$ se deduce că $\varphi(x)>\varphi(a)$, deci $f(x)\varphi(x)<\varphi(a)f(x)$, căci pe intervalul $[0, a]$ funcția f ia valori negative. În acest subcaz, din relația (1) obținem

$$0=\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx=\int_0^a f(x)\varphi(x)\,dx+\int_b^1 f(x)\varphi(x)\,dx<\varphi(a)\int_0^a f(x)\,dx+$$
$$+\int_b^1 f(x)\varphi(x)\,dx\leqslant\varphi(a)\int_0^1 f(x)\,dx+\varphi(b)\int_b^1 f(x)\,dx.$$

Am folosit faptul că $b<x<1$ implică $\varphi(x)\leqslant\varphi(b)$ și deoarece $f(x)>0$ pe acest interval obținem că $f(x)\varphi(x)\leqslant\varphi(b)f(x)$. Dar funcția φ fiind descrescătoare, rezultă că $\varphi(b)\leqslant\varphi(a)$ și deci

$$\varphi(a)\int_0^a f(x)\,dx+\varphi(b)\int_b^1 f(x)\,dx\leqslant\varphi(a)\left(\int_0^a f(x)\,dx+\int_b^1 f(x)\,dx\right)=$$
$$=\varphi(a)\int_0^1 f(x)\,dx=0,$$

adică $0 < 0$, ceea ce este absurd. Dacă φ nu este constantă pe intervalul $[b, 1]$, atunci analog ca mai înainte, deducem că $\int_b^1 f(x)\varphi(x)\,dx < \varphi(b)\int_b^1 f(x)\,dx$ și din (1) se deduce că

$$0 = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^a f(x)\varphi(x)\,dx + \int_b^1 f(x)\varphi(x)\,dx < \int_0^a f(x)\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \varphi(b)\int_b^1 f(x)\,dx \leqslant \varphi(a)\int_0^a f(x)\,dx + \varphi(b)\int_b^1 f(x)\,dx < \varphi(a)\left(\int_0^a f(x)\,dx +\right.$$

$$\left. + \int_b^1 f(x)\,dx\right) = \varphi(a)\int_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

de unde ajungem din nou la contradicția $0 < 0$. Subcazul cînd φ nu este constantă pe ambele intervale se tratează analog. În cazul 2 avem $a = 0$ și deci

$$\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx = \int_b^1 f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Dacă φ nu este constantă pe intervalul $[b, 1]$, atunci putem scrie:

$$0 = \int_b^1 f(x)\varphi(x)\,dx < \varphi(b)\int_b^1 f(x)\,dx = \varphi(b)\int_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

adică $0 < 0$, ceea ce este absurd. Dacă φ este constantă pe intervalul $[b, 1]$, rezultă că $\int_b^1 f(x)\,dx = 0$, ceea ce este absurd căci $f > 0$ pe intervalul $[b, 1]$. Cazul 3, cînd $b = 1$, se tratează analog cu celelalte cazuri.

Anul 1990

Etapa județeană

1. Se observă că funcția f este bine definită, este continuă și $f'(x) = \frac{-x}{|x|\cdot\sqrt{1-x^2}}$, $(\forall)x \in (-1, 1)$, deci f este derivabilă pe $(-1, 1)\setminus\{0\}$. Integrînd prin părți obținem

$$\int \arcsin\sqrt{1-x^2}\,dx = x\arcsin\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$= x\arcsin\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}$, pentru $\in (-1, 0)$ și

$$\int \arcsin\sqrt{1-x^2}\,dx = x\arcsin\sqrt{1-x^2} \quad \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$= x\arcsin\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}$, pentru $x \in (0, 1)$. Deducem că o primitivă a lui f are forma

$$F(x) \quad \begin{cases} x\arcsin\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} \quad \mathcal{C}_1, & x \in (-1, 0] \\ x\arcsin\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}_2, & \in (0, 1) \end{cases}, \quad \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathbf{R}.$$

Condiția necesară și suficientă ca F să fie o primitivă a lui f este ca F să fie continuă în zero. Deci $\mathcal{C}_2 = 2 + \mathcal{C}_1$. În final obținem că primitivele lui f au forma

$$F(x) = \begin{cases} x \arcsin\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}, & x \in (-1, 0] \\ x \arcsin\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2 + \mathcal{C}, & x \in (0, 1) \end{cases}, \quad \mathcal{C} \in \mathbf{R}.$$

2. a) Fie $\lambda \in F$ și $a, z \in D$. Trebuie arătat că

$$(1) \qquad \left|\lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1,$$

pentru că $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ și $|\lambda| = 1$. Considerăm forma trigonometrică a numerelor z și a:

$$\begin{aligned} z &= r(\cos t + i \sin t) \\ a &= \rho(\cos\theta + i \sin\theta) \end{aligned} \quad r, \rho \in [0, 1), \ t, \theta \in [0, 2\pi).$$

Relația (1) revine la

$$|r(\cos t + i \sin t) - \rho(\cos\theta + i \sin\theta)| < |1 - \rho r(\cos(t-\theta) + i \sin(t-\theta))|.$$

Ridicăm la pătrat și se obține

$$r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(t-\theta) < 1 + \rho^2 r^2 - 2\rho r \cos(t-\theta) \Leftrightarrow \rho^2(1-r^2) < 1 - r^2.$$

Ultima relație este adevărată dacă ținem cont că $r, \rho \in [0, 1)$, sau

$$\left|\lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-a| < |1-\bar{a}z| \Leftrightarrow (z-a)(\overline{z-a}) <$$

$$< (1-\bar{a}z)(\overline{1-\bar{a}z}) \Leftrightarrow (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) < (1-\bar{a}z)(1-a\bar{z}) \Leftrightarrow z\bar{z} + a\bar{a} - a\bar{a}z\bar{z} - 1 <$$

$$< 0 \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 - |a|^2 \cdot |z|^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (1-|a|^2)(|z|^2 - 1) < 0.$$

Ultima egalitate este adevărată dacă ținem cont că $a, z \in D$. b) Conform celor demonstrate la punctul a funcțiile $\varphi_{r,a}$ sînt bine definite. Se demonstrează relativ ușor că:

$$\varphi_{\lambda, a} \circ \varphi_{\mu, b} = \varphi_{\lambda \frac{\mu + a\bar{b}}{1+\mu\bar{a}b}, \ \frac{\mu b + a}{\mu + a\bar{b}}}, \quad \lambda, \mu \in F, \ a, b \in D,$$

$$\lambda \frac{\mu + a\bar{b}}{1 + \mu\bar{a}b} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\mu + a\bar{b}}{\overline{(\mu + a\bar{b})}} \in F, \quad \frac{\mu b + a}{\mu + a\bar{b}} = \frac{a\bar{\mu} - (-b)}{1 - \overline{(a\bar{\mu})}(-\bar{b})} \in D.$$

Deci compunerea funcțiilor este stabilă pe G. Compunerea funcțiilor este asociativă și cum $\varphi_{1,0} = 1_D$ deducem că $(G, \circ)$ este monoid. A mai rămas de arătat că orice element din G este inversabil. Fie $\varphi_{\lambda, a} \in G$. Trebuie determinat $\varphi_{\mu, b} \in G$ astfel încît

$$\varphi_{\lambda, a} \circ \varphi_{\mu, b} = \varphi_{\mu, b} \circ \varphi_{\lambda, a} = \varphi_{1,0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \dfrac{\mu + a\bar{b}}{1 + \mu\bar{a}b} = 1 \\ \dfrac{\mu b + a}{\mu + a\bar{b}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \bar{\lambda} \\ b = -\lambda a \end{cases}$$

Deci $\varphi_{\lambda, a}^{-1} = \varphi_{\bar{\lambda}, -\lambda a} \in G$. Axiomele fiind verificate rezultă că $(G, \circ)$ este grup.

3. Dacă X este monoid luăm $T = X$ și considerăm aplicația $f : X \to \mathcal{F}(X)$, $f(a) = \rho_a$, unde $\rho_a : X \to X$, $\rho_a(x) = a * x$. Arătăm că f este injectivă.

$$(1) \qquad f(a) = f(b) \Leftrightarrow \rho_a = \rho_b \Leftrightarrow \rho_a(x) = \rho_b(x), \ (\forall) x \in X.$$

În (1) luăm $x = e$, e fiind elementul neutru, și avem $a * e = b * e \Rightarrow a = b$. Apoi

$$f(a*b)(x) = \rho_{a*b}(x) = (a*b)*x = a*(b*x) = \rho_a(b*x) = \rho_a(\rho_b(x)) =$$
$$= (\rho_a \circ \rho_b)(x) = (f(a) \circ f(b))(x).$$

Deci $f(a*b) = f(a) \circ f(b)$, $(\forall) a, b \in X$. Dacă X nu este monoid luăm un element $e \notin X$ și $T = X \cup \{e\}$. Definim operația internă $(**)$ pe T prin

$$a ** b = a * b \text{ dacă } a, b \in X,$$
$$a ** e = e ** a = a \text{ dacă } a \in X,$$
$$e ** e = e.$$

În aceste condiții $(T, **)$ este monoid. Definim $f : X \to \mathcal{F}(T)$, $f(a) = \pi_a$, unde $\pi_a : T \to T$, $\pi_a(x) = a ** x$. Proprietățile funcției f cerute de enunț se demonstrează și în acest caz ca și mai sus.

4. Vom arăta că h_0 are primitive. Avem $h_\alpha = h_0 + \delta_\alpha$, unde $\delta_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\delta_\alpha(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \neq 0 \\ \alpha \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$ δ_α admite primitive dacă și numai dacă $\alpha = 0$. Deci în final va rezulta că h_α admite primitive dacă și numai dacă $\alpha = 0$. Considerăm funcția auxiliară $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} g'(x) f'\left(\dfrac{1}{g(x)}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

și vom arăta că u are primitive. Pentru aceasta introducem funcția

$$H : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ H(x) = \begin{cases} (g(x))^2 f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Funcția H este evident derivabilă în $x \neq 0$. Arătăm că H este derivabilă și în $x = 0$. Funcția g păstrează semn constant pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$ și, cum g este continuă și $g(0) = 0$, deducem că limitele laterale ale lui $1/g$ în $x = 0$ există și sînt infinite. Folosind și faptul că $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \to \pm\infty} 0$ avem

$$H'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g^2(x) f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} \frac{f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)}{\dfrac{1}{g(x)}} = g'(0) \cdot 0 = 0.$$

Deci $H'(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2g(x)g'(x) f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right) - g'(x) f'\left(\dfrac{1}{g(x)}\right), & x \neq 0 \end{cases} = \varphi(x) - u(x)$, unde $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este continuă,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2g(x)g'(x) f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right), & x \neq 0. \end{cases}$$

În $x = 0$ avem

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} 2g'(x) \frac{f\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{\frac{1}{g(x)}} = 2g'(0)\cdot 0 = 0.$$

Din ultima relație găsim $u = \varphi - H'$ Cum φ și H' admit primitive, deducem că u admite primitive. Introducem acum funcția $G(x) = \frac{g(x)}{x}$ $G : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, care este derivabilă și $\lim_{x\to 0} G(x) = g'(0)$. Avem $g'(x) = G(x) + xG'(x)$. $(\forall)x \neq 0$, de unde deducem $u = \alpha + \beta + g'(0)h_0$, unde

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ xG'(x)f'\left(\frac{1}{g(x)}\right), & x \neq 0 \end{cases}$$

care este continuă (în $x \neq 0$ evident, iar pentru $x = 0$ rezultă din aceea că f' este mărginită și $\lim_{x\to 0} xG'(x) = \lim_{x\to 0} (g'(x) - G(x)) = \lim_{x\to 0} g'(x) - \lim_{x\to 0} G(x) = g'(0) - g'(0) = 0$,

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ (G(x) - g'(0))f'\left(\frac{1}{g(x)}\right), & x \neq 0, \end{cases}$$

care și ea este continuă. Deci $h_0 = \frac{1}{g'(0)}(u - \alpha - \beta)$ admite evident primitivă.

Etapa finală

1. a) Pentru $p = 1$. $y^n = xyx^{-1}$ are loc prin ipoteză. Pentru $p = 2$, $y^{n^2} = (y^n)^n = (xyx^{-1})(xyx^{-1})$ $(xyx^{-1}) = xy^nx^{-1} = x(xyx^{-1})x^{-1} = x^2yx^{-2}$. În continuare se face inducție după p. b) Vom demonstra mai întîi că oricare ar fi $p, q \in \mathbf{N}$ există relația $y^{qn^p} = x^py^qx^{-p}$. Într-adevăr,

$$y^{qn^p} = (y^{n^p})^q = (x^pyx^{-p})^q = (x^pyx^{-p})(x^pyx^{-p}) \dots (x^pyx^{-p}) = x^py^qx^{-p}.$$

Notînd $a = \sum_{i=1}^{k} b_in^i$, deducem:

$$y^a = y^{b_kn^k}y^{b_{k-1}n^{k-1}} \qquad y^{b_in} = x^ky^{b_k}x^{-k}x^{k-1}y^{b_{k-1}}x^{-k+1} \dots x^2y^{b_2}x^{-2}xy^{b_1}x^{-1} =$$
$$= y^{b_k}x^{-1}y^{b_{k-1}}x^{-1} \dots x^{-1}y^{b_1}x^{-1}.$$

2. Deoarece K este corp, rezultă că $\mathbf{Q} \subset K$. În ipoteza b), cu $a = 1$, rezultă $\sqrt{3} \in K$. În ipoteza a), cu $a = 1$, rezultă $\sqrt{2} \in K$ și apoi cu

$a = \sqrt{2}$ rezultă $\sqrt{3} \in K$. În orice corp K, $a \in K$ implică în condițiile ipotezei b) că

$$a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right).$$

Este clar că funcția $f: K \to K$, $f(a) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(a + \frac{1}{2}\right)$ este bijectivă. De asemenea, putem scrie:

$$a^2 + 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{1}{2}\right) + 1\right), \ (\forall) a \in K.$$

Deci (a) $\Leftrightarrow$ (b). Ca exemplu se poate lua $K = \mathbf{R}$.

3. a) Egalitatea de demonstrat se mai scrie

$$f(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 tf'(t)\,dt - \int_x^1 f'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 f(t)\,dt + tf(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)\,dt - f(1) + f(x),$$

ceea ce se verifică imediat. b) Din egalitatea precedentă obținem, pentru orice $x \in [0, 1]$,

$$|f(x)| \leqslant \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + A\left(\int_0^x t\,dt + \int_x^1 (1 - t)\,dt\right),$$

unde s-a notat $A = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f'(t)|$ și s-a ținut seama de inegalitatea

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Deci pentru orice $x \in [0, 1]$, avem

$$|f(x)| \leqslant \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + A\,\frac{x^2 + (1 - x)^2}{2}.$$

Prin integrare se obține

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx \leqslant \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + A\int_0^1 \frac{x^2 + (1 - x)^2}{2}\,dx = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + \frac{A}{3}.$$

4. Pentru orice $x \in [0, 1]$ are loc inegalitatea $\left|\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 + x + x^n}\right| \leqslant x^n$, deci

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{1 + x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{1 + x + x^n}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{n + 1}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2$. Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \infty$. Pentru orice $n \geqslant 1$ are loc următoarea minorare

$$J_n \geqslant \int_0^{n^{-1/n}} \frac{1}{1-x+x^n}\,dx \geqslant \int_0^{n^{-1/n}} \frac{1}{1-x+\frac{1}{n}}\,dx =$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-n^{-1/n}+\frac{1}{n}\right)$$

și această ultimă expresie tinde la infinit cînd $n \to \infty$.

BIBLIOGRAFIE

T. Andreescu, D.M. Bătinețu, M. Chiriță, T. Dăneț, V. Ghiorghiță, I.V. Maftei, D. Miheț, I. Popescu, I. Tomescu, M. Țena, *Enunțurile și soluțiile problemelor date la etapa județeană și etapa pe țară a concursurilor de matematică pentru licee din anii 1975—1983*, lucrare editată de Inspectoratul Școlar al județului Vrancea, Focșani, 1983.

2. **D.M. Bătinețu,** *Șiruri*, Ed. Albatros, București, 1979.

3. **I. Iliescu, B.B. Ionescu, D. Radu,** *Probleme de matematică pentru admiterea în învățămîntul superior*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1976.

4. **L. Panaitopol, C. Ottescu,** *Probleme date la olimpiadele de matematică 1968—1974*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1976.

T. Roman, O. Sacter, Gh. D. Simionescu, *Probleme date la concursurile de matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1970.

6. Gazeta Matematică, 1950—1990.

CUPRINS

Introducere 5

Partea întîi. **Enunțuri**

Clasa a VIII-a 7
Clasa a IX-a 20
Clasa a X-a 60
Clasa a XI-a 106
Clasa a XII-a 150

Partea a doua. **Soluții**

Clasa a VIII-a 189
Clasa a IX-a ... 203
Clasa a X-a 282
Clasa a XI-a 383
Clasa a XII-a 487

Bibliografie 582

Tehnoredactor : MARILENA DAMASCHINOPOL
Coli tipar : 36,50
Bun de tipar : 11.05.1992

Tiparul executat sub comanda nr. 10146
Regia Autonomă a Imprimeriilor
Imprimeria „CORESI" București
ROMÂNIA