ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γραμμικός Προγραμματισμός είναι η διαδικασία εύρεσης μιας βέλτιστης λύσης μιας γραμμικής συνάρτησης, η οποία να είναι συμβατή με ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών ανισοτήτων, δηλαδή, ο γραμμικός προγραμματισμός περιγράφει ένα μοντέλο που αφορά τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης κάτω από κάποιους γραμμικούς περιορισμούς. Από την οικονομική σκοπιά, ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια τεχνική που ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των περιορισμένων πόρων ενός συστήματος σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο (καθώς και με άλλα προβλήματα με ανάλογη ή παραπλήσια διαμόρφωση). Θεωρείται σαν μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα και στις μέρες μας αποτελεί ένα μοντέλο ευρείας χρήσης για καθημερινά ζητήματα των περισσότερων μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικών - βιομηχανικών εταιρειών. Ο όρος «προγραμματισμός» δεν έχει την έννοια του «προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών» αλλά αυτήν του «σχεδιασμού». Ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με τη σχεδίαση των δραστηριοτήτων του συστήματος που περιγράφει για να προκύψει το άριστο αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα δηλαδή εκείνο, που μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών λύσεων πραγματώνει τον προκαθορισμένο σκοπό κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Ο γραμμικός προγραμματισμός παρουσιάζει, επίσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη θεωρητική πληροφορική. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση και την επίλυση πολλών συνδυαστικών προβλημάτων τα οποία εκ πρώτης όψεως δεν σχετίζονται με το γραμμικό προγραμματισμό. Έτσι, ο ελλειψοειδής αλγόριθμος (ο πρώτος αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το γραμμικό προγραμματισμό) ή οι πιο πρόσφατες **μέθοδοι των εσωτερικών σημείων** μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αποδοτική επίλυση πολλών συνδυαστικών προβλημάτων, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός βέλτιστων ροών σε ένα δίκτυο, η εύρεση ενός μέγιστου ταιριάσματος (maximal matching) σε ένα γράφο, ή ενός χρωματισμού σε ένα τέλειο γράφημα. Η αρχική μαθηματική διατύπωση του προβλήματος καθώς και μια συστηματική διαδικασία λύσης του, **η μέθοδος Simplex,** οφείλεται στον G. B. Dantzig στα 1947. Νωρίτερα διάφορα προβλήματα τύπου γραμμικού προγραμματισμού είχαν διαμορφωθεί και επιλυθεί. Τα σημαντικότερα από αυτά αφορούν το πρόβλημα μεταφοράς (Hitchcock 1941, Koopmans 1949) και το πρόβλημα της δίαιτας (Stigler 1945). Ο Dantzig ήταν όμως ο άνθρωπος που κατασκεύασε το γενικό πλαίσιο και ταυτόχρονα ανακάλυψε μέθοδο επίλυσης του.

Πολλά από τα προβλήματα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε ανάγονται σε γραμμικά προβλήματα. Κλασικά παραδείγματα αποτελούν τα προβλήματα προγραμματισμού των πληρωμάτων σε μια αεροπορική εταιρία, ο υπολογισμός του συνδυασμού πρώτων υλών σε ένα εργοστάσιο που μεγιστοποιεί το κέρδος του τελικού προϊόντος, ή ο υπολογισμός των ροών αυτοκινήτων σε ένα οδικό δίκτυο, ή του φόρτου πληροφοριών σε ένα δίκτυο επικοινωνίας.

1.1 ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μια πολύ σημαντική κλάση προβλημάτων, τόσο από αλγοριθμική, όσο και από συνδυαστική σκοπιά. Από αλγοριθμική σκοπιά, ο αλγόριθμος Simplex προτάθηκε στη δεκαετία του 1940 (λίγο μετά τον πόλεμο) και, παρά το ότι λειτουργεί πολύ αποδοτικά στην πράξη, είναι γνωστό ότι έχει εκθετικό χρόνο εκτέλεσης στη χειρότερη περίπτωση. Από την άλλη πλευρά, είναι ήδη γνωστό από τις αρχές της δεκαετίας του 1970, όταν οι κλάσεις P, NP ορίστηκαν, παρατηρήθηκε ότι ο γραμμικός προγραμματισμός ανήκει στην $NP \cap co-NP$, παρά το γεγονός ότι κανένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος δεν ήταν γνωστός μέχρι τότε. Ο πρώτος πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος, ο Ελλειψοειδής, ανακαλύφθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1970. Ο αλγόριθμος του Καρμακαρ που ανακαλύφτηκε στη δεκαετία του 1980, οδήγησε στη συστηματική μελέτη των μεθόδων εσωτερικών σημείων για το γραμμικό προγραμματισμό.

Από συνδυαστικής άποψης, τα συστήματα γραμμικών ανισοτήτων μελετήθηκαν από τους Farkas και Minkovsky από τα τέλη του 19ου αιώνα. Ο γραμμικός προγραμματισμός, και ιδιαίτερα η δυϊκότητα, αποτελούν πολύ ισχυρά αποδεικτικά εργαλεία. Η δύναμη τους αξιοποιήθηκε ιδιαίτερα στους προσεγγιστικούς αλγορίθμους που μελετήθηκαν εκτενώς στη δεκαετία του 1990 και συνεχίζουν να μελετώνται εντατικά και σήμερα. Επίσης στους αλγορίθμους δικτυακών ροών ο γραμμικός προγραμματισμός παίζει πολύ σημαντικό ρόλο, τόσο αλγοριθμικά όσο και από συνδυαστικής απόψεως.

1.2 ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (Π.Γ.Π.)

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, **αν κάποιος καταφέρει να προσαρμόσει το πρόβλημα του στο πρότυπο του γραμμικού προγραμματισμού,** έχει στη διάθεση του ένα σύνολο εργαλείων, όχι μόνο για να βρει την καλύτερη λύση στο ερώτημα που τον απασχολεί, αλλά και για να προχωρήσει σε μια ανάλυση υποθέσεων για τις διάφορες παραμέτρους του προβλήματος. Εν τούτοις, κι αυτό είναι κάτι που δεν πρέπει ποτέ να ξεχνάμε καθώς βυθιζόμαστε στις λεπτομέρειες της όποιας λύσης, το κύριο μέρος κάθε εφαρμογής της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι η μοντελοποίηση. Η λύση, ανεξάρτητα από το πόσο λεπτομερής ή εξεζητημένη είναι, έχει απλά έναν υποστηρικτικό ρόλο.

Το γραμμικό μοντέλο-πρότυπο, σχηματίζεται από τα εξής τρία βασικά συστατικά:

- τις μεταβλητές (αγνώστους) του προβλήματος,
- έναν αντικειμενικό στόχο που θα πρέπει να επιτευχθεί, και
- τους περιορισμούς που θα πρέπει να ενσωματώσουμε στις μεταβλητές ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του προβλήματος.

Οι μεταβλητές είναι τα δομικά στοιχεία του προβλήματος που μπορεί να επηρεάσει ο αναλυτής. Για το λόγο αυτό συχνά αναφέρονται και ως μεταβλητές ελέγχου ή μεταβλητές απόφασης. Ας πάρουμε για παράδειγμα μια βιομηχανία γάλακτος που προετοιμάζει την ημερήσια γραμμή παραγωγής της. Πολλές είναι οι μεταβλητές που υπάρχουν σ' ένα τέτοιο πρόβλημα. Μεταξύ τους, εύκολα μπορούμε να αναφέρουμε την ποσότητα των διαφορών τύπου γάλακτος, τυριού και γιαουρτιού που θα παρασκευαστούν:

x_1 = η ποσότητα (lit) πλήρους γάλακτος που θα παρασκευαστεί,

x_2 = η ποσότητα (lit) άπαχου γάλακτος που θα παρασκευαστεί,

x_3 = η ποσότητα (Kg) τυριού φέτας που θα παρασκευαστεί,

$x_4 = \dots$

…

(χρησιμοποιούμε συνήθως το γράμμα x για να παραστήσουμε μια μεταβλητή και με έναν δείκτη $i = 1,2,3,\dots$ επιτυγχάνουμε τη μεταξύ τους διάκριση).

Το πρόβλημα αφορά βέβαια τον εντοπισμό τιμής για την κάθε μεταβλητή απόφασης ώστε να ... Χρειαζόμαστε δηλαδή έναν **αντικειμενικό στόχο.** Ο στόχος αυτός μπορεί να αφορά τη μεγιστοποίηση του κέρδους, της καλύτερης αξιοποίησης του εργατικού δυναμικού, ή την ελαχιστοποίηση του κόστους, της υπερωριακής απασχόλησης, κτλ. Ψάχνουμε να βρούμε εκείνες τις τιμές των μεταβλητών ελέγχου οι οποίες θα βελτιστοποιήσουν το κριτήριο απόδοσης που ορίζουμε σ' αυτό το στάδιο της μοντελοποίησης. Στο παράδειγμα της γαλακτοβιομηχανίας που αναφέρθηκε πιο πάνω, θα μπορούσαμε να ορίσουμε σαν στόχο την ημερήσια μεγιστοποίηση των κερδών κι επομένως να αναζητήσουμε έναν τρόπο έκφρασης του συνολικού κέρδους σαν συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης (προϊόντων που παρασκευάζονται) εκτιμώντας τη συνεισφορά του καθενός χωριστά.

Ο αντικειμενικός στόχος που θα οριστεί θα πρέπει να επιτευχθεί κάτω από τους συνθήκες λειτουργίας του συστήματος που μελετάμε. **Περιορισμοί,** όπως η ανεπάρκεια των πόρων του συστήματος (π.χ. πρώτων υλών, εργατικού δυναμικού), η απορροφητικότητα της αγοράς, οι συμφωνίες με προμηθευτές και αγοραστές, οι χρόνοι παράδοσης των παραγόμενων προϊόντων, κτλ. δημιουργούν αυτές τις συνθήκες. Αν η προαναφερόμενη βιομηχανία γάλακτος ήταν σε θέση να εξασφαλίσει απεριόριστη πρώτη ύλη και παραγωγική δυναμικότητα καθώς επίσης και μονοπωλιακή παρουσία στην αγορά θα εκτόξευε τα κέρδη της στο άπειρο. Τα πράγματα βέβαια είναι εντελώς διαφορετικά. Στο στάδιο αυτό της μοντελοποίησης, καλούμαστε να εντοπίσουμε και να καταγράψουμε σαν συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης τους παράγοντες οι οποίοι επιβάλλουν όρια στις τιμές τους και συνεπώς και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Στο πρότυπο του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού τόσο ο αντικειμενικός στόχος, όσο και οι περιορισμοί εκφράζονται σαν γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης.

Παράδειγμα 1.1

Ας δούμε όμως ένα παράδειγμα γραμμικού προγραμματισμού, το κλασικό πλέον πρόβλημα της ΔΙΑΙΤΑΣ . Ας υποθέσουμε ότι ο ελάχιστος αριθμός των θερμίδων που μπορούμε να λαμβάνουμε καθημερινά είναι ορισμένος. Επίσης, σε καθημερινή βάση απαιτείται να προσλαμβάνουμε μια ελάχιστη ποσότητα πρωτεϊνών και ασβεστίου, ενώ παράλληλα επιθυμούμε να δαπανούμε το ελάχιστο δυνατό ποσό κάθε μέρα. Ο πίνακας του σχήματος 1.1 απεικονίζει τις παρεχόμενες πρωτεΐνες και ασβέστιο (σε miligrams ανά μερίδα) που εξασφαλίζει συγκεκριμένη ποσότητα (δηλαδή, η τυπική δοσολογία) κάθε είδους τροφής που έχουμε στη διάθεση μας, καθώς επίσης και τις θερμίδες που περιέχουν.

Είδος τροφής	Δοσολ.	θερμ.(Kcal)	Πρωτ.(gr)	Ασβ.(mg)	Τιμή(ευρώ)
(1) Δημητριακά	28 γρ.	110	4	2	0.3
(2) Κοτόπουλο	100 γρ.	205	32	12	2.4
(3) Αβγά	2	160	13	54	1.3
(4) Γάλα	237κ.ε.	160	8	285	0.9
(5) Γλυκό	170 γρ.	420	4	22	2.0
(6) Χοιρινό	260 γρ.	260	14	80	1.9
Απαιτήσεις		2000	55	800	

Σχήμα 1.1: Ο πίνακας με τα στοιχεία του παραδείγματος για το πρόβλημα της Δίαιτας.

Η τελευταία γραμμή του πίνακα απεικονίζει τις καθημερινές μας απαιτήσεις σε θερμίδες, πρωτεΐνες και ασβέστιο. Ας υποθέσουμε ότι από το *i-στό* είδος τροφής χρησιμοποιούμε x_i δόσεις (δηλαδή, τόσες φορές επί τη δοσολογία που ορίζει ο πίνακας). Τότε εύκολα εκφράζει κανείς τους *περιορισμούς* που περιγράφει η τελευταία γραμμή του πίνακα ως εξής:

$$110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000$$
$$4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55$$
$$2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800$$

θυμηθείτε όμως ότι επιθυμούμε να πληρώνουμε το ελάχιστο δυνατό ποσό ημερησίως, συνεπώς ο στόχος μας είναι ο εξής:

$$\text{minimize} \quad 0.3x_1 + 2.4x_2 + 1.3x_3 + 0.9x_4 + 2x_5 + 1.9x_6$$

Φυσικά, δεν είναι δυνατόν να καταναλώνουμε αρνητικές ποσότητες τροφών. Συνολικά, το πρόβλημα της Δίαιτας μπορεί να περιγραφεί φορμαλιστικά όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2. Χρησιμοποιώντας μια οποιαδήποτε εφαρμογή για επίλυση

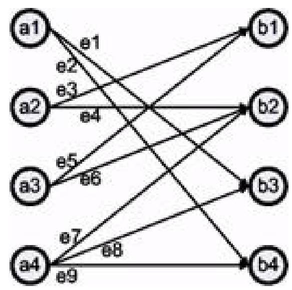
γραμμικών προβλημάτων (πχ, LINDO®) μπορεί κάποιος εύκολα να διαπιστώσει ότι η βέλτιστη λύση του προβλήματος αυτού είναι
$x_1 = \frac{44200}{3103} \approx 14.24$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = \frac{8400}{3130} \approx 2.707$, $x_5 = x_6 = 0$.

minimize	$0.3x_1 + 2.4x_2 + 1.3x_3 + 0.9x_4 + 2x_5 + 1.9x_6$
subject to:	$110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000$
	$4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55$
	$2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800$
	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Σχήμα 1.2: Το γραμμικό πρόγραμμα που αναπαριστά το πρόβλημα της Δίαιτας.

Παράδειγμα 1.2

Ας δούμε όμως και ένα δεύτερο παράδειγμα, που σχετίζεται με τη θεωρία γραφημάτων. Έστω ότι μας δίνεται ένας διμερής γράφος $G = (V_1, V_2, E)$ (δηλαδή, δυο πεπερασμένα σύνολα κορυφών V_1, V_2 και ένα σύνολο ακμών $E \subseteq V_1 \times V_2$.



Σχήμα 1.3: Παράδειγμα ενός διμερή γράφου.

Για παράδειγμα, στο σχήμα 1.3 δίνεται ένας διμερής γράφος. Ένα ταίριασμα σε ένα γράφο $G = (V, E)$ είναι ένα υποσύνολο των ακμών του $M \subseteq E$ τέτοιο ώστε να μην υπάρχει ζευγάρι ακμών στο M που να μοιράζονται κάποια κορυφή. Στο παράδειγμα μας το σύνολο ακμών $\{e1, e5, e7\}$ είναι ένα ταίριασμα. Ένα μέγιστο ταίριασμα είναι εκείνο το ταίριασμα που περιλαμβάνει το μεγαλύτερο αριθμό ακμών στο γράφημα. Στο παράδειγμα μας, το ταίριασμα που προαναφέραμε δεν είναι μέγιστο αφού το ταίριασμα $\{e1, e4, e5, e9\}$ έχει μεγαλύτερο πληθαριθμό. Ένα κλασικό ερώτημα είναι πώς μπορεί κανείς να κατασκευάσει ένα μέγιστο ταίριασμα ενός διμερή γράφου.
Κατ' αρχήν θεωρούμε ότι κάθε λύση $M \subseteq E$ που παράγουμε (δηλαδή, οποιοδήποτε ταίριασμα) αναπαριστάται από ένα σύνολο ενδεικτικών μεταβλητών, μια για κάθε ακμή του γράφου: $\forall e \in E, x(e) = I_{\{e \in M\}}$. Από αυτό εύκολα συνάγει κανείς ότι θα πρέπει οι μεταβλητές που χρησιμοποιούμε να παίρνουν μη αρνητικές τιμές. Ποιοι είναι όμως οι σωστοί περιορισμοί που μας εξασφαλίζουν ότι ένα υποσύνολο ακμών που επιλέγουμε είναι ταίριασμα του γράφου; Παρατηρείστε ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι ότι οποιαδήποτε κορυφή είναι το άκρο το πολύ μιας ακμής του M. Άρα λοιπόν χρειαζόμαστε ένα περιορισμό για κάθε κορυφή που να φράζει με το 1 τον αριθμό των ακμών που την αγγίζουν. Στο παράδειγμα μας, για την κορυφή $a1$ ο αντίστοιχος περιορισμός είναι ο εξής: $x(e1) + x(e2) \leq 1$, ενώ για την κορυφή $b2$ είναι $x(e4) + x(e6) + x(e7) \leq 1$. Όλοι αυτοί οι περιορισμοί είναι γραμμικοί ως προς τις μεταβλητές που χρησιμοποιούμε για να αποτυπώσουμε τη λύση που παράγουμε.

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x(e1)+x(e2)+\ldots\ldots+x(e9) \\
\text{subject to:} & x(e1)+x(e2)\leq 1 \\
 & x(e3)+x(e4)\leq 1 \\
 & x(e5)+x(e6)\leq 1 \\
 & x(e7)+x(e8)+x(e9)\leq 1 \\
 & x(e3)+x(e5)\leq 1 \\
 & x(e4)+x(e6)+x(e7)\leq 1 \\
 & x(e1)+x(e8)\leq 1 \\
 & x(e2)+x(e9)\leq 1 \\
 & \forall e\in E,\ x(e)\in\{0,1\}
\end{array}
$$

Σχήμα 1.4: Το (ακέραιο) γραμμικό πρόγραμμα που αναπαριστά το πρόβλημα του ταιριάσματος για το παράδειγμά μας.

Στόχος μας τέλος είναι η επιλογή εκείνου του συνόλου που θα είναι ταίριασμα (αυτό εξασφαλίζεται από τους περιορισμούς) και θα έχει το μέγιστο δυνατό αριθμό ακμών. Δηλαδή, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\sum_{e\in E} x(e)$ η οποία είναι επίσης γραμμική ως προς τις μεταβλητές του προβλήματος. Στο σχήμα 1.4 φαίνεται το γραμμικό πρόβλημα που περιγράφει το παράδειγμα μας. Το συγκεκριμένο γραμμικό πρόβλημα έχει την ιδιαιτερότητα ότι οι τιμές των μεταβλητών του θα πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί (για την ακρίβεια, 0 ή 1). Τέτοιου είδους γραμμικά προβλήματα ονομάζονται ακέραια γραμμικά προβλήματα. Εμείς δε μπορούμε να επιλύσουμε αποδοτικά (δηλαδή, σε πολυωνυμικό χρόνο) ένα ακέραιο γραμμικό πρόβλημα, μπορούμε όμως να επιλύσουμε ένα παρόμοιο πρόβλημα, το οποίο φαίνεται στο σχήμα 1.5.
Έστω ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο τη βέλτιστη λύση για το γραμμικό πρόβλημα που αντιστοιχεί στο πρόβλημα του ταιριάσματος σε διμερή γράφο. Γενικά τίποτε δε μας εγγυάται ότι η βέλτιστη λύση ενός γραμμικού προβλήματος θα έχει ακέραιες τιμές στις μεταβλητές απόφασης που χρησιμοποιούμε. Στην περίπτωση του μέγιστου ταιριάσματος σε διμερή γραφήματα γνωρίζουμε όμως ότι υπάρχει πάντοτε μια βέλτιστη λύση που αναθέτει τιμές 0 ή 1 στις ενδεικτικές μεταβλητές που χρησιμοποιούμε για τις ακμές του γράφου. Συνεπώς, θα μπορούσαμε ενδεχομένως να εξασφαλίσουμε την εύρεση της βέλτιστης ακέραιας λύσης χωρίς επιπλέον κόπο. Φυσικά θα πρέπει με κάποιο τρόπο να εξασφαλίσει κανείς ότι η επιστρεφόμενη βέλτιστη λύση είναι και ακέραια, ή να κατασκευάσει (αν είναι δυνατόν) μια βέλτιστη ακέραια λύση με την ίδια τιμή της συνάρτησης-στόχου.

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & x(e1)+x(e2)+\ldots\ldots+x(e9) \\
\text{subject to:} & x(e1)+x(e2)\leq 1 \\
 & x(e3)+x(e4)\leq 1 \\
 & x(e5)+x(e6)\leq 1 \\
 & x(e7)+x(e8)+x(e9)\leq 1 \\
 & x(e3)+x(e5)\leq 1 \\
 & x(e4)+x(e6)+x(e7)\leq 1 \\
 & x(e1)+x(e8)\leq 1 \\
 & x(e2)+x(e9)\leq 1 \\
 & \forall e\in E,\ x(e)\in\{0,1\}
\end{array}
$$

Σχήμα 1.5: Το χαλαρωμένο γραμμικό πρόγραμμα που αναπαριστά το πρόβλημα του ταιριάσματος για το παράδειγμα μας.

Παράδειγμα 1.3

Το πρόβλημα μεταφοράς είναι ένα από τα πρώτα είδη προβλημάτων που αναλύθηκαν με την χρήση του γραμμικού προγραμματισμού. Το γενικό πρόβλημα εμφανίστηκε όταν τα διαθέσιμα αγαθά αποθηκευμένα σε διάφορες πηγές έπρεπε να διανεμηθούν σε ποικίλους προορισμούς. Το πρόβλημα είναι να βρούμε τον βέλτιστο τρόπο μεταφοράς έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος μεταφοράς. Συγκεκριμένα, διαθέτουμε ποσότητες ενός ομοιόμορφου προϊόντος σε έναν αριθμό αποθηκών και θέλουμε να μεταφέρουμε καθορισμένες ποσότητες του προϊόντος σε έναν αριθμό από διαφορετικούς προορισμούς. Το κόστος για την μεταφορά μιας μονάδας ποσότητας από οποιαδήποτε αποθήκη σε οποιοδήποτε κατάστημα είναι γνωστό, ενώ η μεταφορά από κάθε αποθήκη σε κάθε κατάστημα είναι δυνατή. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο κόστος μεταφοράς από τις αποθήκες στα καταστήματα λιανικής πώλησης.

Τρία παραρτήματα ενός εργοστασίου, τα Α, Β, Γ, που παράγουν το ίδιο προϊόν, βρίσκονται σε τρεις διαφορετικές περιοχές της χώρας, που απέχουν πολύ μεταξύ τους. Οι αγοραστές του προϊόντος βρίσκονται σε πέντε διαφορετικές πόλεις. Τα παραρτήματα παράγουν ποσότητες αντίστοιχα 150, 350 και 280 μονάδων του προϊόντος, ενώ οι αγοραστές έχουν παραγγείλει αντίστοιχα 100, 130, 160, 210, και 150 μονάδες. Το κόστος μεταφοράς του προϊόντος από τα παραρτήματα Α, Β , Γ δίνεται στον πίνακα:

Παράρτημα	Αγοραστές				
	1	2	3	4	5
Α	10	22	8	14	9
Β	12	16	26	20	19
Γ	18	21	15	11	17

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις απαραίτητες ποσότητες (μεταβλητών αποφάσεως) x_{ij} που θα πρέπει να μεταφερθούν από το παράρτημα i στον αγοραστή j ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς. Άγνωστες είναι οι ποσότητες x_{ij}, όπου i είναι τα Α, Β, Γ και j τα 1, 2, 3, 4, 5. Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (κόστος μεταφοράς), της οποίας αναζητάμε το ελάχιστο, γράφεται

$$\begin{aligned} z = {} & 10x_{A1} + 22x_{A2} + 8x_{A3} + 14x_{A4} + 9x_{A5} + \\ & +12x_{B1} + 16x_{B2} + 26x_{B3} + 20x_{B4} + 19x_{B5} + \\ & +18x_{\Gamma1} + 21x_{\Gamma2} + 15x_{\Gamma3} + 11x_{\Gamma4} + 17x_{\Gamma5} \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να φορτώσουμε περισσότερα προϊόντα από ένα παράρτημα από όσα παράγονται στο παράρτημα αυτό. Συνεπώς έχουμε τους περιορισμούς:

$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} + x_{A5} \le 150$ (παραγωγή παραρτήματος Α)

$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} + x_{B5} \le 350$ (παραγωγή παραρτήματος Β)

$x_{\Gamma1} + x_{\Gamma2} + x_{\Gamma3} + x_{\Gamma4} + x_{\Gamma5} \le 280$ (παραγωγή παραρτήματος Γ)

Επίσης κάθε αγοραστής πρέπει να εφοδιαστεί με τον επιθυμητό αριθμό μονάδων. Συνεπώς έχουμε τους περιορισμούς:

$x_{A1} + x_{B1} + x_{\Gamma1} = 100$ (ζήτηση αγοραστή 1)

$x_{A2} + x_{B2} + x_{\Gamma2} = 130$ (ζήτηση αγοραστή 2)

$x_{A3} + x_{B3} + x_{\Gamma3} = 160$ (ζήτηση αγοραστή 3)

$x_{A4}+x_{B4}+x_{\Gamma4}=210$ (ζήτηση αγοραστή 4)

$x_{A5}+x_{B5}+x_{\Gamma5}=150$ (ζήτηση αγοραστή 5)

Επίσης

$x_{ij}\geq 0$, με $i=\mathrm{A,B,\Gamma}$ και $j=1,2,3,4,5$

1.3 ΟΡΙΣΜΟΙ

Ένα γραμμικό πρόβλημα είναι το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας γραμμικής συνάρτησης ωφέλειας (ή ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης κόστους), η οποία εξαρτάται από ένα σύνολο μεταβλητών απόφασης $x_1,\ldots x_n$, με την προϋπόθεση ότι τηρούνται κάποιοι περιορισμοί ως προς τις τιμές των μεταβλητών αυτών, οι οποίοι εκφράζονται μέσα από ένα σύνολο γραμμικών ισοτήτων και/ή ανισοτήτων. Ο πιο διαδεδομένος τρόπος αναπαράστασης (καλείται γενική μορφή-general form) ενός γραμμικού προβλήματος φαίνεται στο σχήμα 1.6.

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots\ldots+c_nx_n \\
\text{subject to} & \\
 & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots..+a_{1n}x_n\ \{\leq,=,\geq\}\ b_1 \\
 & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots..+a_{2n}x_n\ \{\leq,=,\geq\}\ b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots..+a_{mn}x_n\ \{\leq,=,\geq\}\ b_m \\
 & \qquad x_j\geq 0\ \ j=1,2,\ldots.,n
\end{array}
$$

Σχήμα 1.6

Ορισμός 1.1

Μια πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών

$$f:R^n\to R: x=(x_1,x_2,\ldots.,x_n)\to f(x)$$

Είναι γραμμική αν και μόνον αν για κάποιο σύνολο πραγματικών σταθερών αριθμών $c_1,c_2,\ldots.,c_n$ ισχύει:

$$f(x_1,x_2,\ldots.,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots.+c_nx_n$$

Ορισμός 1.2

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) όταν

1. Αφορά την μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης των αγνώστων (μεταβλητών). Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση.
2. Οι τιμές των αγνώστων (μεταβλητών) ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών. Κάθε περιορισμός πρέπει να είναι μια γραμμική εξίσωση ή ανίσωση.
3. Κάθε μεταβλητή x_j είναι μη αρνητική $(x_j\geq 0)$ ή δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο $(x_j\in R)$

Ορισμός 1.3

Κάθε συνδυασμός τιμών $(x_1,x_2,\ldots.,x_n)$ των μεταβλητών απόφασης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ονομάζεται λύση του προβλήματος.

Ορισμός 1.4

Το υποσύνολο F του $\mathbf{R}^n$ που σχηματίζεται από τα σημεία – λύσεις $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ονομάζεται εφικτή περιοχή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, τα δε σημεία $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ εφικτές λύσεις.
Μια λύση, που παραβιάζει τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς, ονομάζεται μη-εφικτή λύση και δεν είναι σημείο της εφικτής περιοχής του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Ορισμός 1.5

Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης άριστη ή βέλτιστη λύση ονομάζεται κάθε εφικτή λύση, η οποία μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση:

$$x^* \in F : f\left(x^*\right) \geq f(x) \;\; \forall x \in F.$$

Όμοια σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης θα είχαμε:

$$x^* \in F : f\left(x^*\right) \leq f(x) \;\; \forall x \in F.$$

Ορισμός 1.6

Ένας περιορισμός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού χαρακτηρίζεται σαν δεσμευτικός αν και μόνον αν η άριστη λύση τον καθιστά ισότητα. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται χαλαρός.

Το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:
Να βρεθούν οι τιμές των μεταβλητών $x_1,\ldots x_n$ που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την συνάρτηση

$$z=f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots\ldots+c_nx_n$$

Οι μεταβλητές πρέπει να ικανοποιούν τους περιορισμούς

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots..+a_{1n}x_n \;\{\leq,=,\geq\}\; b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots..+a_{2n}x_n \;\{\leq,=,\geq\}\; b_2\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots..+a_{mn}x_n \;\{\leq,=,\geq\}\; b_m
\end{aligned}$$

και $x_j \geq 0 \;\; j=1,2,\ldots.,n$

όπου τα $a_{i,j}$, b_i, c_j είναι γνωστές σταθερές.
Η συνάρτηση:

$$z=f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση (objective function). Αυτή η συνάρτηση είναι γραμμική ως προς τις μεταβλητές $x_j,\; j=1,2,3,\ldots..,n$. Επίσης, κάθε περιορισμός είναι μια γραμμική συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές $x_j,\; j=1,2,3,\ldots..,n$.
Οι συντελεστές $c_j,\; j=1,2,3,\ldots..,n$ της αντικειμενικής συνάρτησης γενικά αναφέρονται σαν αντικειμενικοί συντελεστές. Σε προβλήματα μεγιστοποίησης χαρακτηρίζονται σαν συντελεστές κέρδους ενώ σε προβλήματα ελαχιστοποίησης σαν συντελεστές κόστους.
Η συνθήκη $x_j \geq 0 \;\; j=1,2,\ldots,n$ αναφέρεται και ως συνθήκη της μη αρνητικότητας.
Λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα ονομάζεται κάθε σύνολο $x_j,\; j=1,2,3,\ldots..,n$ το οποίο ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος.

Εφικτή ή δυνατή λύση είναι κάθε λύση που ικανοποιεί τους περιορισμούς μη αρνητικότητας.
Βέλτιστη λύση είναι κάθε εφικτή λύση η οποία βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.
Συνήθως σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού υπάρχουν άπειρες λύσεις και επιδιώκουμε την εύρεση της βέλτιστης δυνατής λύσης.
Αν όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις της ίδιας φοράς, ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί με την χρήση πινάκων ως εξής:

$$\boxed{\begin{array}{l} z = \max f(x) = c^T x \\ A \cdot x \{\leq, =, \geq\} b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

όπου:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}$$

και $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$

Με $M_{m\times n}$ παριστάνουμε το διανυσματικό χώρο των $m \times n$ πινάκων.
Η σπουδαιότητα της διατύπωσης αυτής έγκειται στο ότι μπορεί με τον παραπάνω τρόπο να διατυπωθεί με σαφήνεια μια μεγάλη ποικιλία οικονομικών, επιστημονικών, βιομηχανικών, επιχειρηματικών και κοινωνικών προβλημάτων.

1.4 ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Έχοντας εξετάσει κάποιες περιπτώσεις όπου είναι δυνατό να εφαρμοστεί ο γραμμικός προγραμματισμός και τη γενική διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις απαιτούμενες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του σ' ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποιήσεως. Αυτές είναι που περιορίζουν γενικά το φάσμα των δυνατοτήτων εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι οι εξής:

α) Γραμμικότητα (Αναλογικότητα και Προσθετικότητα)
β) Διαιρετότητα και
γ) Βεβαιότητα (Προσδιοριστικότητα).

Γραμμικότητα (Αναλογικότητα και Προσθετικότητα)

Όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος, αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές $x_j,\ j = 1,2,3,\ldots,n$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας, δηλαδή εάν y είναι μια συνάρτηση n μεταβλητών και $a_j,\ j = 1,2,3,\ldots,n$ είναι σταθερές, πρέπει να ισχύει:

$$y(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_nx_n) = a_1y(x_1) + a_2y(x_2) + \ldots. + a_ny(x_n)$$

Σε πολλές περιπτώσεις στις οποίες δεν ισχύει απόλυτα η προϋπόθεση της γραμμικότητας μπορεί να γίνει μια αρκετά καλή προσέγγιση με γραμμικές συναρτήσεις.

Διαιρετότητα

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού υποθέτει ότι κάθε δραστηριότητα (δηλ μεταβλητή) είναι συνεχής και επομένως άπειρα διαιρετή. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές. Όταν η υπόθεση της διαιρετότητας δεν ισχύει υπάρχουν δύο ενδεχόμενα :

α) Να αγνοηθεί η υπόθεση αυτή, να λυθεί το πρόβλημα με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού, και οι τιμές των μεταβλητών να στρογγυλευθούν στην κοντινότερη ακέραια μονάδα. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μεγάλες.

β) Όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μικρές (π.χ. 0 ή 1) όπως σε πολλά προβλήματα επενδύσεων τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν τεχνικές του ακέραιου προγραμματισμού.

Βεβαιότητα (Προσδιοριστικότητα)

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού. προϋποθέτει ότι όλοι οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα.

Στην περίπτωση που μερικοί ή όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ή των περιορισμών είναι τυχαίες μεταβλητές το πρόβλημα γίνεται πρόβλημα στοχαστικού προγραμματισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν 2 ή 3 μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν και γραφικά. Προβλήματα με δυο μεταβλητές υλοποιούνται στο επίπεδο (δυο διαστάσεις), ενώ προβλήματα με τρεις μεταβλητές υλοποιούνται στον χώρο (τρεις διαστάσεις).

Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:

1) σχεδιασμός όλων των περιορισμών γραφικά
2) εύρεση εφικτής περιοχής
3) εύρεση άριστης ή βέλτιστης λύσης

Το τελευταίο βήμα υλοποιείται με δυο τρόπους προσέγγισης της επίλυσης.

Ο πρώτος τρόπος είναι η προσέγγιση της απαρίθμησης και ελέγχου όλων των ακραίων σημείων (κορυφών) της εφικτής περιοχής. Εντοπίζουμε τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής και επιλέγουμε εκείνη που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.

Ο δεύτερος τρόπος είναι η προσέγγιση της χάραξης των καμπύλων ίσου κέρδους (ή κόστους) της αντικειμενικής συνάρτησης. Βρίσκουμε το σημείο όπου η ισοκερδής εφάπτεται της εφικτής περιοχής πριν την εγκαταλείψει.

2.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Περιοριστική ευθεία είναι η ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιο περιορισμό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Κορυφή ή ακραίο σημείο είναι το σημείο που τέμνονται δυο περιοριστικές ευθείες.

Εφικτή περιοχή είναι η κυρτή περιοχή των εφικτών λύσεων που σχηματίζεται από τις περιοριστικές ευθείες.

Εφικτή λύση (ακραίου σημείου) είναι μια κορυφή της εφικτής περιοχής.

Γειτονικές εφικτές λύσεις (ακραίου σημείου) είναι αυτές που συνδέονται με μια ακμή (σύνορο) της εφικτής περιοχής.

Βασική λύση (λύση ακραίου σημείου) είναι μια λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή.

Βασική εφικτή λύση είναι μια βασική λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή της εφικτής περιοχής.

Άριστη (βέλτιστη) λύση είναι η βασική εφικτή λύση ακραίου σημείου (κορυφή της εφικτής περιοχής) που μας δίνει τη βέλτιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Δύναται να είναι ακριβώς μια, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις με άπειρες άριστες λύσεις, καμία άριστη λύση, ή η αντικειμενική συνάρτηση να τείνει στο άπειρο.

2.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ – ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Παράδειγμα 2.1

Γενικό γραμμικό πρόβλημα με πολυγωνική περιοχή εφικτών λύσεων

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

με περιορισμούς

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \le & 8 \\ & & x_2 & \le & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & \le & 15 \\ 2x_1 & + & x_2 & \le & 18 \end{array}$$

και $x_1, x_2 \ge 0$

Βήμα 1^o - Γεωμετρική ερμηνεία των περιορισμών του προβλήματος

Α. Εντοπισμός σημείων για τις ευθείες των περιορισμών του π.γ.π.

(1) Η $x_1 = 8$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα της x_2

(2) Η $x_2 = 6$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα της x_1

(3) Για την εξίσωση – ευθεία $x_1 + 2x_2 = 15$ πρέπει να υπολογίσουμε δύο σημεία που την επαληθεύουν. Για $x_1 = 0$, παίρνουμε $x_2 = \frac{15}{2}$, ενώ για $x_2 = 0$, παίρνουμε $x_1 = 15$. Άρα τα σημεία $(x_1, x_2) = (15, 0)$ και $(x_1, x_2) = \left(0, \frac{15}{2}\right)$ αρκούν για

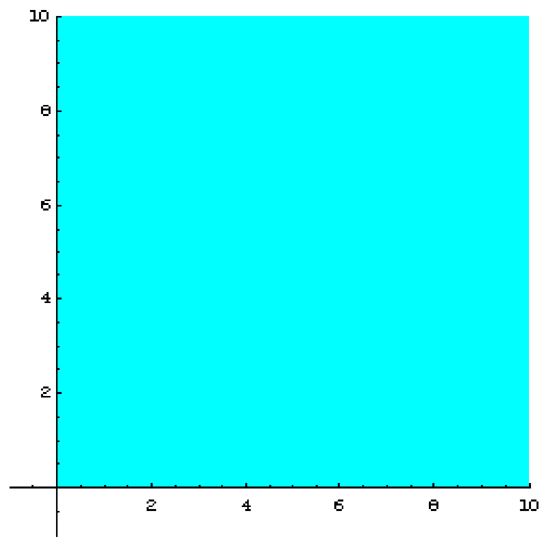
να σχεδιάσουμε την ευθεία, καθώς από δύο σημεία περνάει μια και μόνο μια ευθεία, όπως προκύπτει από την αναλυτική γεωμετρία.

(4) Για την εξίσωση – ευθεία $2x_1 + x_2 = 18$ πρέπει να υπολογίσουμε δύο σημεία που την επαληθεύουν. Για $x_1 = 0$, παίρνουμε $x_2 = 18$, ενώ για $x_2 = 0$, παίρνουμε $x_1 = 9$. Άρα τα σημεία $(x_1, x_2) = (0,18)$ και $(x_1, x_2) = (9,0)$ αρκούν για να σχεδιάσουμε την ευθεία.

Β. Εισαγωγή συστήματος ορθογωνίων συντεταγμένων (x_1, x_2) και σχεδιασμός των περιορισμών (ευθειών).

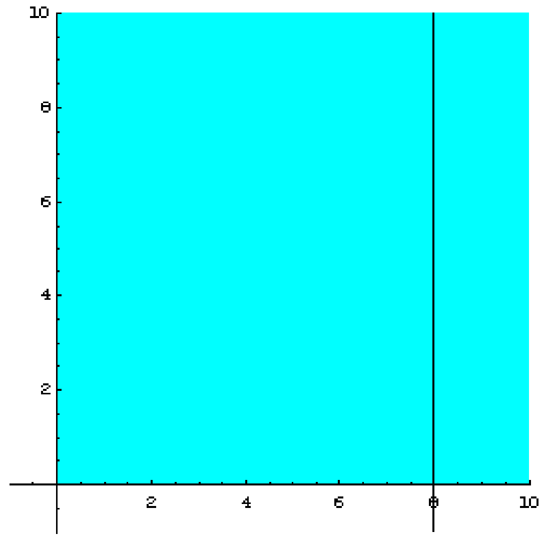
Μια ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δυο ημιεπίπεδα και η αντίστοιχη γραμμική ανίσωση ορίζει ένα από αυτά τα δυο ημιεπίπεδα. Ένας απλός τρόπος να βρούμε ποιο είναι το ημιεπίπεδο που ορίζει η ανίσωση είναι να επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο (όχι σημείο της ευθείας) το οποίο, αν επαληθεύει την ανίσωση τότε το ημιεπίπεδο που ορίζει η ανίσωση είναι αυτό στο οποίο βρίσκεται το σημείο, διαφορετικά το ημιεπίπεδο που ορίζει η ανίσωση είναι αυτό στο οποίο δεν βρίσκεται το σημείο.

Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί του πρόσημου των μεταβλητών $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$, ικανοποιούνται μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο, και συνεπώς τα ζεύγη τιμών των (x_1, x_2) που αποτελούν δυνατές λύσεις για το πρόβλημα αυτό, θα βρίσκονται σε αυτό το τεταρτημόριο. Στο σχήμα 2.1, μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$, δηλαδή την περιοχή που ορίζουν.



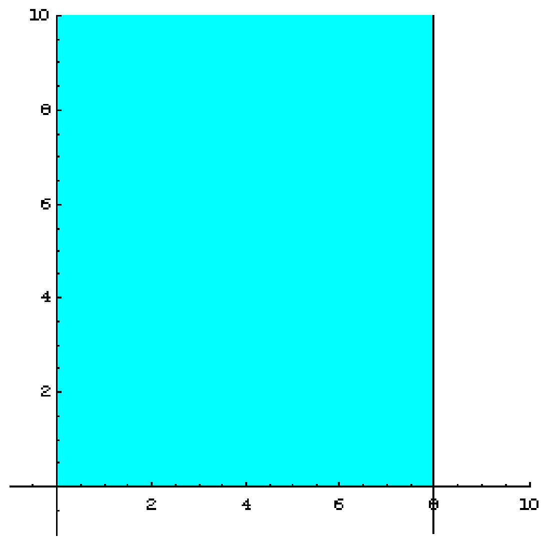
Σχήμα 2.1

Στο σχήμα 2.2, μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ και την ευθεία $x_1 = 8$.



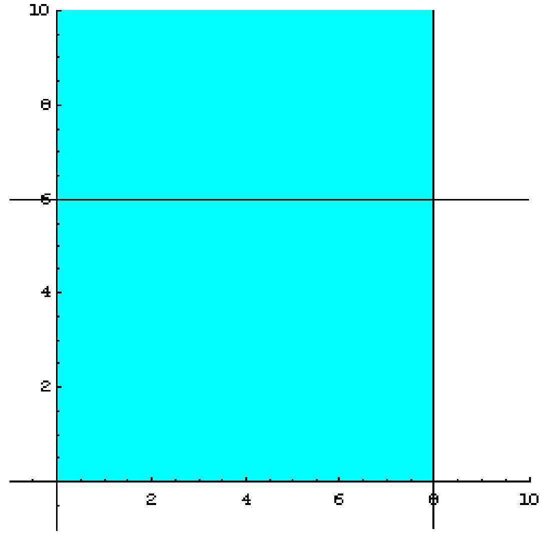
Σχήμα 2.2

Η ανίσωση $x_1 \leq 8$ επαληθεύεται από το σημείο $(0,0)$, επομένως στο σχήμα 2.3, μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ και $x_1 \leq 8$.



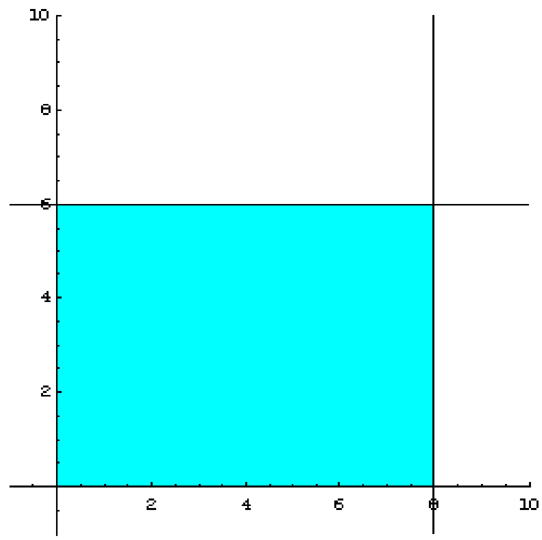
Σχήμα 2.3

Στο σχήμα 2.4, μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 8$ και την ευθεία $x_2 = 6$.



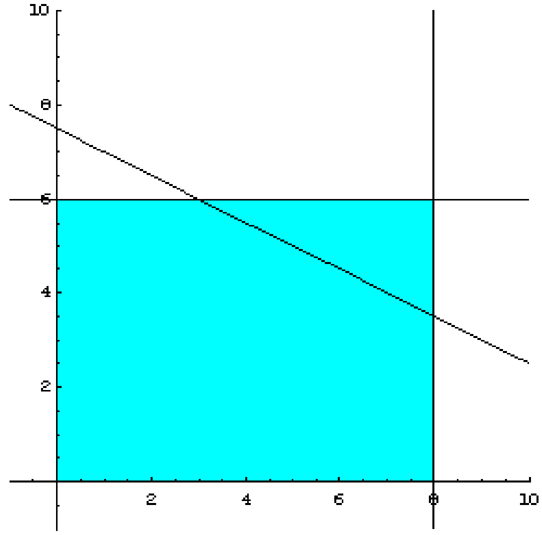
Σχήμα 2.4

Η ανίσωση $x_2 \le 6$ επαληθεύεται από το σημείο $(0,0)$, επομένως στο σχήμα 2.5, μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_1 \le 8$ και $x_2 \le 6$.



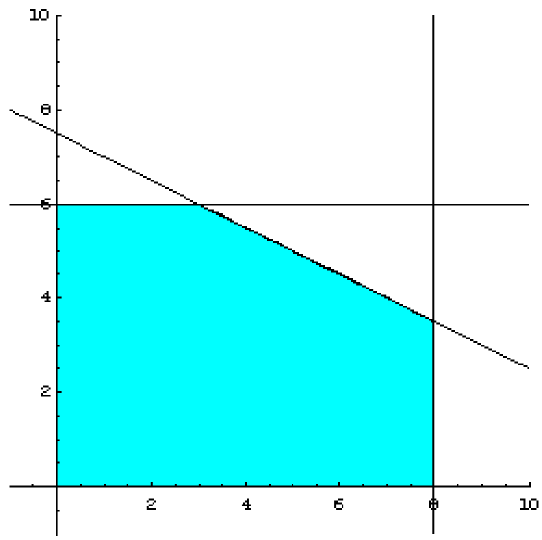
Σχήμα 2.5

Στο σχήμα 2.6, μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_1 \le 8$, $x_2 \le 6$ και την ευθεία $x_1 + 2x_2 = 15$.



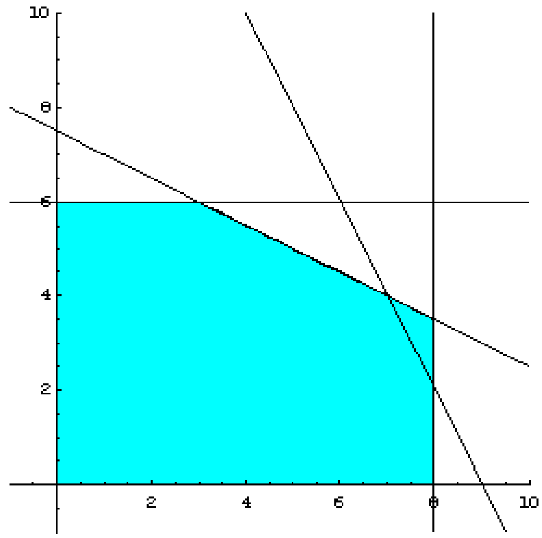
Σχήμα 2.6

Η ανίσωση $x_1 + 2x_2 \leq 15$ επαληθεύεται από το σημείο $(0,0)$, επομένως στο σχήμα 2.7, μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 8$, $x_2 \leq 6$ και $x_1 + 2x_2 \leq 15$.



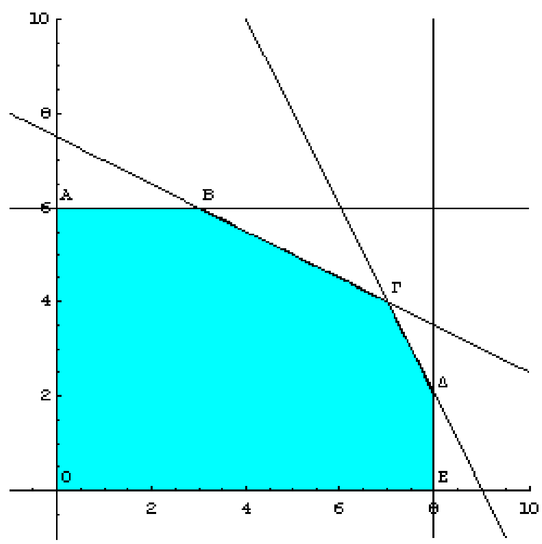
Σχήμα 2.7

Στο σχήμα 2.8, μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 8$, $x_2 \leq 6$, $x_1 + 2x_2 \leq 15$ και την ευθεία $2x_1 + x_2 = 18$.



Σχήμα 2.8

Η ανίσωση $2x_1 + x_2 \leq 18$ επαληθεύεται από το σημείο $(0,0)$, επομένως στο σχήμα 2.9, μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 8$, $x_2 \leq 6$, $x_1 + 2x_2 \leq 15$ και $2x_1 + x_2 \leq 18$, δηλαδή, την εφικτή περιοχή του προβλήματος.



Σχήμα 2.9

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι, η ανίσωση $x_1 \leq 8$ ικανοποιείται σε όλα τα σημεία του τεταρτημορίου που βρίσκονται πάνω στην ευθεία $x_1 = 8$ και αριστερά από αυτή, ενώ η ανίσωση $x_2 \leq 6$ σε όλα τα σημεία πάνω στην ευθεία $x_2 = 6$ και κάτω από αυτή. Για τις ανισότητες $x_1 + 2x_2 \leq 15$ και $2x_1 + x_2 \leq 18$, παρατηρούμε ότι το ζεύγος τιμών $(x_1, x_2) = (0,0)$, τις ικανοποιεί. Κάθε σημείο κάτω και μόνο κάτω από τις ευθείες $x_1 + 2x_2 = 15$ και $2x_1 + x_2 = 18$, συμπεριλαμβανομένων των ίδιων των ευθειών, ικανοποιεί και τις ανισότητες $x_1 + 2x_2 \leq 15$ και $2x_1 + x_2 \leq 18$. Στο σχήμα 2.9, μπορούμε να δούμε τα ζεύγη τιμών (x_1, x_2) που ικανοποιούν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς του προβλήματος (γραμμοσκιασμένη περιοχή - ΟΑΒΓΔΕ).

Βήμα 2^{ο} - Υπολογισμός της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης z

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα η βέλτιστη ή βέλτιστες λύσεις ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (αν υπάρχει), βρίσκεται σε κάποιο (ή κάποια) από τα ακραία σημεία – κορυφές της κλειστής κυρτής περιοχής εφικτών λύσεων του προβλήματος. Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων που ορίζουν την εφικτή περιοχή.

Σημείο Ο: $(x_1, x_2) = (0,0)$

Σημείο Α: $(x_1, x_2) = (0,6)$

Σημείο Β: $(x_1, x_2) = (3,6)$

Για το σημείο Β έχουμε ότι είναι το σημείο τομής των ευθειών $x_2 = 6$ και $x_1 + 2x_2 = 15$ οπότε λύνοντας το σύστημα $\begin{matrix} x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 15 \end{matrix}$ το ζεύγος λύσεων είναι $(x_1, x_2) = (3,6)$.

Σημείο Γ: $(x_1, x_2) = (7,4)$

Το σημείο Γ είναι η τομή των ευθειών $x_1 + 2x_2 = 15$ και $2x_1 + x_2 = 18$, οπότε λύνοντας το σύστημα $\begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 15 \\ 2x_1 + x_2 = 18 \end{matrix}$ το ζεύγος λύσεων είναι $(x_1, x_2) = (7,4)$.

Σημείο Δ: $(x_1, x_2) = (8,2)$

Όμοια για το σημείο Δ έχουμε ότι είναι το σημείο τομής των ευθειών $x_1 = 8$ και $2x_1 + x_2 = 18$, οπότε λύνοντας το σύστημα $\begin{matrix} x_1 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 18 \end{matrix}$ το ζεύγος λύσεων είναι $(x_1, x_2) = (8,2)$.

Σημείο Ε: $(x_1, x_2) = (8,0)$

Για κάθε ακραίο σημείο – κορυφή της περιοχής εφικτών λύσεων ΟΑΒΓΔΕ, υπολογίζουμε την τιμή της z. Έχουμε:

Σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ και $z = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

Σημείο $\mathrm{A}(0,6)$ και $z = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 6 = 18$

Σημείο $\mathrm{B}(3,6)$ και $z = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 30$

Σημείο $\Gamma(7,4)$ και $z = 4 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 40$

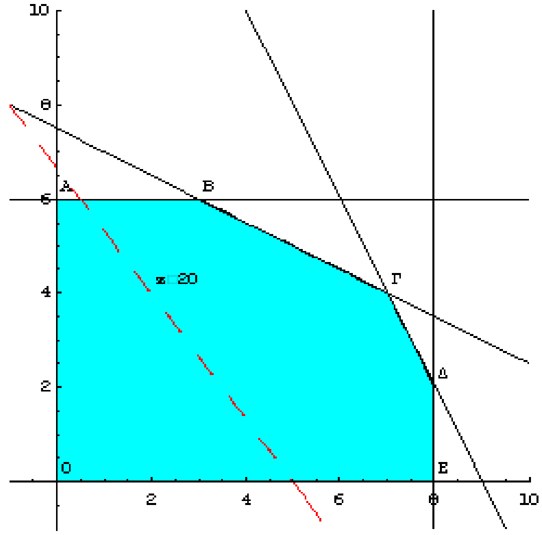
Σημείο $\Delta(8,2)$ και $z = 4 \cdot 8 + 3 \cdot 2 = 38$

Σημείο $\mathrm{E}(8,0)$ και $z = 4 \cdot 8 + 3 \cdot 0 = 32$

Δεδομένου ότι θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση z, από τα παραπάνω προκύπτει ότι το σημείο $\Gamma(7,4)$ είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 40$.

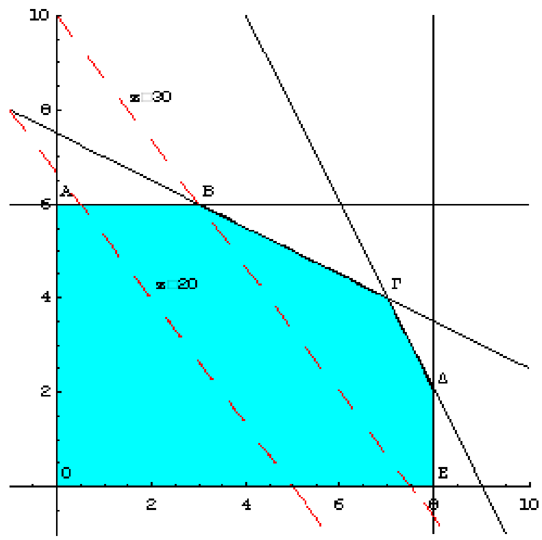
Εναλλακτικά μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με τον δεύτερο τρόπο, ο οποίος διαφοροποιείται στο βήμα εύρεσης της άριστης λύσης. Σχεδιάζουμε στην εφικτή περιοχή την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης (ευθείες σταθερού κέρδους για μεγιστοποίηση κόστους για ελαχιστοποίηση) και προσπαθούμε να βρούμε το σημείο όπου η ισοκερδής εφάπτεται της εφικτής περιοχής πριν την εγκαταλείψει.

Αρχικά σχεδιάζουμε στην εφικτή περιοχή την ευθεία σταθερού κέρδους $4x_1 + 3x_2 = 20$, δηλαδή, θεωρούμε ότι $z = 20$ (σχήμα 2.10).



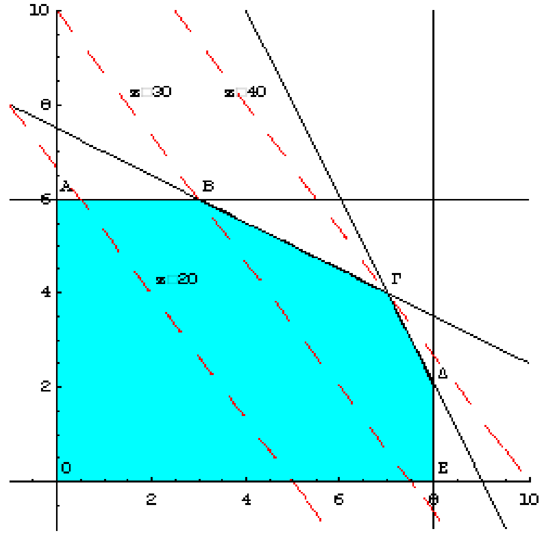
Σχήμα 2.10

Παρατηρούμε ότι η ευθεία σταθερού κέρδους $4x_1 + 3x_2 = 20$ διαπερνά την εφικτή περιοχή, άρα πρέπει να αυξήσουμε το κέρδος, δηλαδή, η ευθεία να μετατοπιστεί παράλληλα προς τα πάνω. Σχεδιάζουμε την ευθεία σταθερού κέρδους $4x_1 + 3x_2 = 30$ (σχήμα 2.11).



Σχήμα 2.11

Παρατηρούμε ότι η ευθεία σταθερού κέρδους $4x_1 + 3x_2 = 30$ διαπερνά και αυτή την εφικτή περιοχή, άρα πρέπει να αυξήσουμε εκ νέου το κέρδος, δηλαδή, η ευθεία να μετατοπιστεί παράλληλα προς τα πάνω. Σχεδιάζουμε την ευθεία σταθερού κέρδους $4x_1 + 3x_2 = 40$ (σχήμα 2.12).



Σχήμα 2.12

Παρατηρούμε ότι η ευθεία σταθερού κέρδους $4x_1+3x_2=40$ εφάπτεται στο σημείο Γ. Άρα η βέλτιστη λύση είναι το σημείο Γ με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όσο και ο σταθερός όρος της αντίστοιχης ευθείας σταθερού κέρδους, δηλαδή, $z=40$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι $(x_1,x_2)=(7,4)$, επειδή, το σημείο Γ είναι η τομή των ευθειών $x_1+2x_2=15$ και $2x_1+x_2=18$, οπότε λύνοντας το σύστημα $\begin{matrix} x_1+2x_2=15 \\ 2x_1+x_2=18 \end{matrix}$ το ζεύγος λύσεων είναι $(x_1,x_2)=(7,4)$.

Η διαφορά των δυο μεθόδων είναι στον υπολογισμό της άριστης (βέλτιστης) λύσης. Στην πρώτη μέθοδο υπολογίζουμε οι συντεταγμένες όλων των σημείων της εφικτής περιοχής και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε σημείο και επιλέγουμε την άριστη (βέλτιστη), ενώ, στην δεύτερη μέθοδο σχεδιάζουμε τις ευθείες σταθερού κέρδους (ή κόστους) και με παράλληλη μετατόπιση βρίσκουμε το σημείο που εφάπτεται η ευθεία πριν εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ο σταθερός όρος της ευθείας και πρέπει να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου.

Το μειονέκτημα της δεύτερης μεθόδου είναι ότι πρέπει να 'μαντέψουμε' τον σταθερό όρο και μπορεί να χρειαστούμε πολλές δοκιμές, ενώ, το πλεονέκτημα της είναι ότι δεν υπολογίζουμε τις συντεταγμένες όλων των σημείων.

Τα επόμενα παραδείγματα και οι ασκήσεις έχουν λυθεί με την πρώτη μέθοδο.

Παράδειγμα 2.2

Πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικό προγραμματισμού:

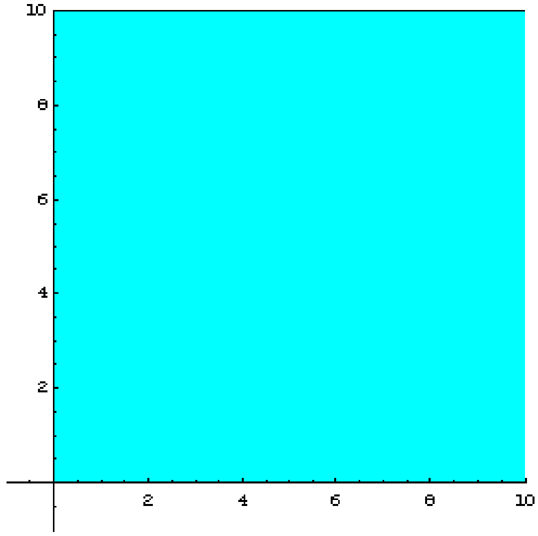
$$\min z = 6x_1+5x_2$$

με περιορισμούς

$$\begin{matrix} 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 15 \\ x_1 & + & 2x_2 & \geq & 6 \end{matrix}$$

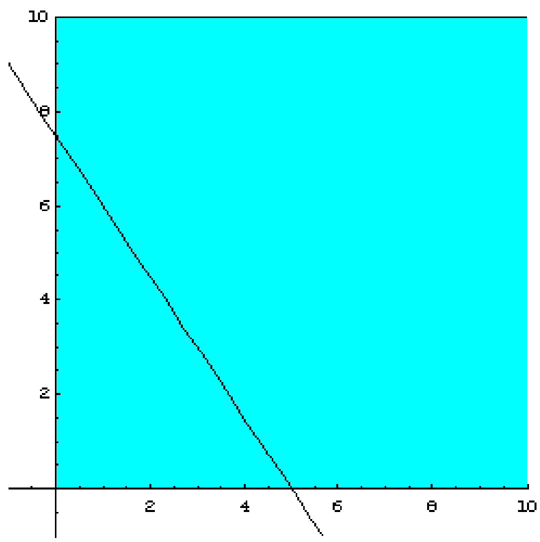
και $x_1,x_2 \geq 0$

Ξεκινάμε με την συνθήκη μη αρνητικότητας των μεταβλητών $x_1, x_2 \geq 0$ η οποία μας περιορίζει γραφικά τις λύσεις στο πρώτο τεταρτημόριο, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.13



Σχήμα 2.13

Σχεδιάζουμε την ευθεία $3x_1 + 2x_2 = 15$ η οποία έχει σημεία τομής με τους άξονες τα $\left(0, \frac{15}{2}\right)$ και $(5, 0)$. Η ευθεία φαίνεται στο σχήμα 2.14



Σχήμα 2.14

Το σημείο $(0,0)$ δεν επαληθεύει τον περιορισμό $3x_1 + 2x_2 \geq 15$, άρα η νέα εφικτή περιοχή είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 2.15