**38 Definition**: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine total differenzierbare Abbildung. Seien $a, b \in U$, sodass $|\gamma_{ab}| \subset U$. Dann gibt es $\phi_1, \cdots, \phi_m \in |\gamma_{ab}|$, sodass :

$$f(b) = f(a) + \begin{pmatrix} Df_1(\phi_1) \\ \vdots \\ Df_n(\phi_m) \end{pmatrix} \cdot (b - a)$$

*Beweis.* Satz 37 auf $f_1, \cdots, f_n$ anwenden. □

**Beispiel**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^2, t^3)$
Ist $[a, b] \subset R$ beschränkt, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare, so besagt der HDI:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

Ist wieder $\gamma_{ab}(f) = a + t(b - a)$, so erhält man durch Substitution

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 f'(\gamma_{ab}(t))\gamma'_{ab}(t)dt = \left(\int_0^1 f'\left(\gamma_{ab}(t)\right)dt\right).(b - a)$$

**Definition**: Sei $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$ und $A : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^{m \times n}$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$ mit $a_{ij} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig für $i = 1, \cdots, m$ und $j = 1, \cdots, n$ Dann ist die Integral über die *matrixwertige Abbildung A* gegeben durch:

$$\int_\alpha^\beta A(t)dt = \left(\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)dt\right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$$

**39 Satz**: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Seien $a, b \in U$ sodass $|\gamma_{ab}| \subseteq U$. Dann gilt:

$$f(b) - f(a) = \underbrace{\left(\int_0^1 Df\left(\gamma_{ab}(t)\right)dt\right)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \underbrace{(b - a)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

*Beweis.* Wir wenden den HDI an auf $g_i := (f_i \circ \gamma_{ab}) \in C^1([0, 1])$ für $i = 1, \cdots, m$ und erhalten mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f_i(b) - f_i(a) = g_i(1) - g_i(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} g_i(t)dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma_{ab}(t)) \cdot (b_j - a_j)\right) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(\gamma_{ab}(t)\right) \cdot dt\right)}_{v_j} \underbrace{(b_j - a_j)}_{u_j} \\ &= \left\langle \left(\int_0^1 Df_i(\gamma_{ab}(t))dt\right), (b - a)\right\rangle \end{aligned}$$

Dies zeigt die $i-$te Zeile der gewünschte Gleichung. □

**Halfsatz**: Ist $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ ein Kompaktes Intervall, $v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildung. So gilt:

$$\left\| \int_\alpha^\beta v(t)dt \right\|_2 \leq \int_\alpha^\beta \|v(t)\|_1 dt$$

*Beweis.* Sei $u := \int_\alpha^\beta v(t)dt \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
\|u\|_2^2 = \langle u, u \rangle &= \sum_{j=1}^n \int_\alpha^\beta v_j(t)dt \cdot u_j \\
&= \int_\alpha^\beta \left( \sum_{j=1}^n v_j(t) \cdot u_j dt \right) \\
&= \int_\alpha^\beta \langle v(t), u \rangle \, dt \\
&\leq \int_\alpha^\beta |\langle v(t), u \rangle| \, dt \\
&\overset{Schwz.}{\leq} \int_\alpha^\beta (\|v(t)\|_2 \cdot \|u\|_2) \, dt \\
&= \|u\|_2 \int_\alpha^\beta \|v(t)\|_2 dt
\end{aligned}$$

Für

$$\|u\|_2 > 0 \implies \|u\|_2 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt$$

Für

$$\|u\|_2 = 0 \implies \|u\|_2 = 0 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt$$

□

**Korollar**

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : u \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar. Seien $a, b \in U$ mit $|\gamma_{ab}| \subseteq U$. Dann gilt:

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq M\|b - a\|_2$$

für $M := sup\{\, \|Df(x)\| \mid x \in |\gamma_{ab}|\}$ Dabei ist die Matrix norm $\|A\|$ für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben durch

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|_2 = 1}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$$

Es gilt:

$$M = \sup_{\substack{x \in |\gamma_{ab}| \\ v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|_2 = 1}} \underbrace{\frac{\|Df(x) \cdot v\|_2}{\|v\|_2}}_{G(x,v)} < \infty \text{ ,da}$$

$$G : \underbrace{\|\gamma_{ab}\| \times \partial\mathbb{B}(0, 1)}_{kompakt} \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

*Beweis.* Es ist :

$$\begin{aligned}
\|f(b)-f(a)\|_2 &= \left|\left|\left(\int_0^1 Df\left(\gamma_{ab}(t)\right)dt\right)\cdot(b-a)\right|\right|_2 \\
&\le \int_0^1 \left|\left|Df(\gamma_{ab}(t))\cdot(b-a)\right|\right|_2 dt \\
&\le \int_0^1 M\cdot\|b-a\|_2 dt \\
&= M\cdot\|b-a\|_2
\end{aligned}$$

□