

# Analysis 2 (Prof. Scherbina) Notizen

Sisam Khanal

25. Juni 2024

Aktuelle Notizen unter:

<https://thisissisam.github.io/notes/ana2/main.pdf>

## §1 Der $\mathbb{R}^n$ und seine Topologie

Erklärt man auf der Menge  $\mathbb{R}^n := \{\alpha = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$  aller geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen eine Addition komponentenweise durch  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$  für  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  und eine Multiplikation mit reellen Skalaren. So erhält  $\mathbb{R}^n$  die Structure eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums über  $\mathbb{R}$ ; eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  ist durch die Vektoren  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \dots e_n = (0, \dots, 0, 1)$  gegeben. Man bezeichnet die Familie  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  als *Standardbasis* oder auch kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$ .

**euklidisches Skalarprodukt:** Das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  die je zwei Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  die reellen Zahl  $\langle x, y \rangle$  zugeordnet, welche man *euklidisches* Skalarprodukt von  $x$  und  $y$  nennt.

Eine weitere gebräuchliche Schreibweise für das euklidische Skalarprodukt zwei Vektor ist  $\langle x, y \rangle =: x \cdot y$ . Die wichtigsten Eigenschaft des euklidische Skalarprodukt nennt der folgende Satz, auf dessen trivialen Beweis wir verzichten werden.

**Satz:** Für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  und jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

- a)  $\langle (x + z), y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
- b)  $\langle (\alpha \cdot x), y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- c)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- d)  $\langle x, x \rangle$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

**Euklidische Norm:** Sei  $z \in \mathbb{R}^n$ , dann nennt man die Zahl  $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , die euklidische Norm von  $x$ . Es folgt

- a)  $|x| \geq 0$  und  $|x| = 0 \iff x = 0$
- b)  $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$
- c)  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Schwarzsehe Ungleichung:** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt:  $\langle x, y \rangle \leq |x| |y|$   
(wurde in LA2 bewiesen)

### Eigenschaft von Norm auf Vektorraum

Allgemein nennt man jede Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  eine Norm auf  $V$ , wenn sie die folgende Eigenschaften haben

- a)  $\forall x \in V; \|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- b)  $\forall x \in V, \forall a \in \mathbb{R} \|ax\| = |a| \|x\|$
- c)  $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Man nennt dann das Tupel  $(V, \|\cdot\|)$  einem normierten Vektorraum  
Dies wurde auch in LA2 bewiesen

### Beispiel

- a)  $V := \mathbb{R}^n$  und sei  $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ . x = (x_1, x_2 \dots x_n) \rightarrow \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, |x_n|\}$ . Dann ist  $\|\cdot\|_\infty$  eine Norm auf  $\mathbb{R}_n$  nennt.
- b) Der Vektorraum  $V$  aller linearen Abbildungen  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  wird durch die Definition  $\|L\| := \sup\{|L(x)| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$
- c) Fehlt

**euklidische Metrik:** Die Funktion  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y) := |x - y|$  heißt euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^n$

Eigenschaften der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  sind:

**Eigenschaften der euklidischen Metrik:**  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$  gibt:

- a)  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- b)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
- c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung)

**Metrik auf eine Menge:** Eine Metrik auf eine Menge  $A$  ist eine Abbildung  $f : A \times A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit der Eigenschaft a)- c) von Satz 1.16

### Beispiel

Sei  $A$  beliebige Menge und  $f : A \times A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definiert durch

$$p(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases}$$

**Kugel:** Sei  $a \in \mathbb{R}^n$  und sei  $r > 0$ . Dann heißt die Menge  $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$  als die *Kugel um  $a$  mit dem Radius  $r$* .

**Offene und abgeschlossene Menge:** Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  eine Menge

- a)  $S$  heißt *offen*, wenn  $\forall a \in S \exists r > 0$  sodass  $B(a, r) \subset S$
- b)  $S$  heißt *abgeschlossen*, wenn  $\mathbb{R}^n \setminus S$  offen ist.

### Sätze über offene Menge:

- a)  $\mathbb{R}^n$  und die leere Menge  $\emptyset$  sind offen.
- b) Sei  $J \neq \emptyset$  eine beliebige Indexmenge und sei  $\{U_i : i \in J\}$  eine Familie offener Menge  $U_i \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $V := \bigcup_{i \in J} U_i$  ebenfalls offen.
- c) Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $U_1, U_2, \dots, U_m$  offene Menge in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $W := \bigcap_{i=1}^m U_i$  ebenfalls offen.

*Beweis.* a) Trivial

b) Sei  $a \in V \implies \exists i \in J$  sodass  $a \in U_i$ .  $U_i$  offen  $\implies r > 0$  sodass  $B(a, r) \subset U_i \subset V \implies V$  – *offen*

c) Sei  $a \in W \implies a \in U_i, i = 1, 2, \dots, m$ .  $U_i$  – *offen*  $\implies r_i > 0$  sodass  $B(a, r_i) \subset U_i$ . Sei  $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_m\} > 0$ . Dann  $\forall i = 1, 2, \dots, m$  gilt  $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset U_i \implies B(a, r) \subset \bigcap_{i=1}^m U_i = W \implies W$  – *offen*

□

Aus Satz 1.10 und aus der Definition von abgeschlossen Mengen folgt direkt

**Weitere Eigenschaften von Menge:**

- a)  $\mathbb{R}^n$  und die leere Menge  $\emptyset$  sind abgeschlossen
- b) Sei  $J \neq \emptyset$  eine beliebige Indexmenge und sei  $\{A_i : i \in J\}$  eine Familie abgeschlossener Menge  $A_i \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $A := \bigcap_{i \in J} A_i \subset \mathbb{R}^n$  ebenfalls abgeschlossen.
- c) Sei  $m \in \mathbb{N}$  und seien  $A_1, A_2, \dots, A_m$  abgeschlossene Mengen in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $L := \bigcup_{i=1}^m A_i \subset \mathbb{R}^n$  ebenfalls abgeschlossen.  $\bigcap_{i \in J} (\mathbb{R}^n \setminus A_i) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \in J} A_i$  und  $\bigcup_{i \in J} (\mathbb{R}^n \setminus A_i) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i \in J} A_i$

**Umgebung:** Ist  $a \in \mathbb{R}^n$  gegeben, so nennt man jede offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $a \in U$  eine *offene Umgebung von  $a$* . Für  $\varepsilon > 0$  bezeichnet man die Kugel  $B(a, \varepsilon)$  auch als  $\varepsilon$ -*Umgebung von  $a$* .

**Definition:**

- a) Man bezeichnet die Menge  $\overline{A} := \bigcap B$  mit  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B$ -*abgeschlossen* als den *Abschluss* oder *abgeschlossene Hülle von  $A$*
- b) Die Menge  $\mathring{A} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup U$  mit  $u \in U$  und  $U$  - *offen* heißt *offener Kern von  $A$*
- c) Der Rand von  $A$  ist gegeben durch  $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$

**Bemerkung**

Nach Satz 1.10 und 1.11 ist  $\overline{A}$  stets abgeschlossen und  $\mathring{A}$  stets offen.  $\mathring{A}$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, die  $\overline{A}$  enthält,  $\mathring{A}$  ist die größte in  $A$  enthaltene offene Teilmenge von  $A$ . Insbesondere gilt  $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

**Beispiele**

- a) Sei  $A = [0, 1) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $\overline{A} = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\overline{A} = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\partial A = \{0, 1\} \times [0, 1]$  und  $\partial A = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0, 1\}$
- b)  $A = B(0, 1) \cup (B(0, 2) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$  und  $\overline{A} = \overline{B(0, 2)}$ ,  $\mathring{A} = B(0, 1)$ ,  $\partial A = B(0, 2) \setminus B(0, 1)$

**Eigenschaften der abgeschlossenen Hülle und offener Kern:**

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

- a)  $x \in \partial A \iff$  jede offene Umgebung des Punktes  $x$  sowohl  $A$  als auch  $\mathbb{R}^n \setminus A$  trifft. (Das heißt sowohl mit  $A$ , als auch mit  $\mathbb{R}^n \setminus A$  einen nicht leeren Durchschnitt hat.)
- b)  $A \setminus \partial A = \mathring{A}$
- c)  $A \cup \partial A = \overline{A}$
- d)  $\partial A$  ist abgeschlossen.

**innerer Punkt:** Sei  $A \in \mathbb{R}^n$ .

- a) Man nennt  $x \in A$  einen inneren Punkt der Menge  $A$ , wenn es eine offene Umgebung  $U = U(x)$  des Punktes  $x$  gibt, so dass  $U \subset A$  gilt.
- b) Man nennt  $y \in \mathbb{R}^n$  einen Häufungspunkt der Menge  $A$ , wenn in jeder offenen Umgebung  $U = U(y)$  des Punktes  $y$  ein von  $y$  verschiedener Punkt der Menge  $A$  liegt, das heißt wenn gilt:

$$\forall U = U(y) \text{ offen } \exists x \in A \bigcup U : x \neq y$$

Die Menge der Häufungspunkt von  $A$  wird  $HP(A)$

**8 Satz:** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ , dann gilt:

- a)  $\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$
- b)  $\overline{A} = A \cup HP(A)$

*Beweis.* a) Ist  $x \in \mathring{A}$  so ist definitionsgemäß  $x \in U \bigcup : U \subset A, U - \text{offen}$  also existiert mindestens eine offene Umgebung  $V = V(x)$  des Punktes  $x$  mit  $V \subset A \implies x$  innerer Punkt von  $A$  ist. Ist andererseits  $x$  innerer Punkt von  $A$ , so existiert eine offene Umgebung  $V = V(x)$  des Punktes  $x$  mit  $x \in V \subset A \implies$  insbesondere  $x$  ist dann Element der Vereinigung  $\bigcup U : U \subset A, U - \text{offen}$ , das heißt  $x \in \mathring{A}$ .

- b) Wegen  $\overline{A} \setminus A = HP(A)$  und  $HP(A) \subset \overline{A}$  folgt die Behauptung aus der einfachen Beobachtung, dass alle nicht in  $A$  gelegenen Randpunkte von  $A$  zwangsläufig Häufungspunkte von  $A$  sind und umgekehrt alle nicht in  $A$  gelegenen Häufungspunkte von  $A$  natürliche Randpunkte von  $A$  sind.

□

## §2 Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$

**Definition:** Sei  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge von Punkten im  $\mathbb{R}^n$ .  $(x_k)$  heißt *konvergent* gegeben  $a \in \mathbb{R}^n$  (in Zeichen:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ ), wenn zu jeder offenen Umgebung  $U = U(a)$  des Punktes  $a$  ein Index  $k_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $x_n \in U \forall n \geq k_0$  gilt.

### Bemerkung

Definition  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$

**9 Satz:** Sei  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge und sei  $a \in \mathbb{R}^n$ ; es seien Komponentenschreibweise  $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2} \dots x_{k_n}) \forall k \in \mathbb{N}, a = (a_1, a_2 \dots a_n)$ , Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_j} = a_j \forall j = 1, 2, \dots, n$$

*Beweis.* " $\implies$ "  $\forall \varepsilon > 0$  sei  $k_0 \in \mathbb{N}$  so gezählt, dass  $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$  gilt. Für beliebiges  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ist dann

$$\begin{aligned} |x_{k_j} - a_j| &= \sqrt{(x_{k_j} - a_j)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_{k_1} - a_1)^2 + (x_{k_2} - a_2)^2 \dots (x_{k_n} - a_n)^2} \\ &= |x_k - a| \\ < \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_j = a \end{aligned}$$

"  $\Leftarrow$  "  $\forall \varepsilon > 0$  wähle man  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , so gilt  $\forall k \geq k_0$

$$\begin{aligned} |x_{k_j} - a_j| &= \sqrt{(x_{k_1} - a_1)^2 + (x_{k_2} - a_2)^2 \cdots (x_{k_n} - a_n)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2} \\ &= \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \end{aligned}$$

□

**Definition:** Sei  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge. Man nennt  $a \in \mathbb{R}^n$  einen Häufungspunkt der Folge  $(x_k)$ , falls es eine Teilfolge  $(x_{k_y}) \subset (x_k)$  mit  $\lim_{y \rightarrow \infty} x_{k_y} = a$  gibt.

**10 Satz:** Für eine Mengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $A$  ist abgeschlossen.
- b) Der Grenzwert einer jeden Folge  $(x_k) \subset A$ , die als Punktfolge in  $\mathbb{R}^n$  konvergiert, liegt in  $A$

*Beweis.* 1)  $\implies$  2) Sei  $A$  abgeschlossen und sei  $(x_k) \subset A$  eine Folge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$ . Falls  $x_n$  eine konstante Teilfolge  $(x_{k_\gamma}) \subset (x_k)$ , so gilt  $x_{k_\gamma} = a \forall \gamma \in \mathbb{N}$ , und es folgt  $a \in A$  wegen  $(x_{k_\gamma}) \subset A \implies a \in A$ . Hat  $(x_k)$  keine konstante Teilfolge, so gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass  $x_k \neq a \forall k \geq k_0$  gilt, offenbar ist  $a$  ein Häufungspunkt der Menge  $\{x_k : k \geq k_0\} \subset A$  und deshalb auch  $a \in HP(A)$ . Nach Satz 8 ist  $HP(A) \subset \bar{A}$ , aber  $\bar{A} = A$ , denn  $A$  ist abgeschlossen. Deshalb  $a \in A$ .

2)  $\implies$  1) Sei  $x \in HP(A)$ . Dann gibt es eine Folge  $(x_k) \subset A$ ,  $x_k \neq x \forall k \in \mathbb{N}$ , so dass  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  gilt. Nach Voraussetzung liegt der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Punkten aus  $A$  ebenfalls in  $A$ , und es folgt  $x \in A$ . Dann ist  $HP(A) \subset A$  gezeigt, also ist  $A = A \cup HP(A) = \bar{A}$ , das heißt  $A$  – abgeschlossen. □

**Definition:** Eine Folge  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn es  $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ , s.d.  $|x_n - x_m| < \varepsilon \forall n, m \geq k_0$

**11 Satz:** Jede konvergente Folge  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  ist eine *Cauchy-Folge*

**12 Satz:** Sei  $(x_k) \in \mathbb{R}^n$  eine Folge, es sei  $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(x_k)$  eine *Cauchy-Folge* genau dann, wenn jede der Folgen  $x_{k_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  eine *Cauchy-Folge* in  $\mathbb{R}$  ist.

*Beweis.* "  $\implies$  "  $(x_k)$  ist eine Cauchy-Folge  $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  s.d.  $|x_k - x_m| < \varepsilon \forall k, m \geq k_0 \implies \forall 1 \leq j \leq n$



"  $\Leftarrow$  "  $(x_{k_j})$ -eine Cauchy-Folge  $\forall 1 \leq j \leq \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  s.d.  $|x_{k_j} - s_{m_j}| < \varepsilon \forall k, m \geq k_0$ . Sei  $k_0 := \max\{k_{0_1}, \dots, k_{0_n}\} \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $|x_k - x_m| = \sqrt{(x_{k_1} - x_{m_1})^2 + \dots + (x_{k_n} - x_{m_n})^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon \forall k, m \geq k_0 \implies (x_k)$ -eine Cauchy-Folge.  $\square$

**13 Satz:** Jede Cauchy-Folge im  $\mathbb{R}^n$  ist konvergent, das heißt  $\mathbb{R}^n$  ist vollständig.

## §3 Funktionen, Abbildungen, Stetigkeit

**Definition:** Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetig* an der Stelle  $a \in U$ , wenn gilt:  $\forall \varepsilon > 0$  s.d.  $|x - a| < \delta, x \in U \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$   
 $f$  heißt *stetig* (auf  $U$ ), wenn  $f$  in jedem Punkt  $a \in U$  stetig ist.

Wir verallgemeinern diese Stetigkeitsdefinition sogleich auf Abbildungen mit Werten in  $\mathbb{R}^m$ . Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist gegeben durch ein  $m$ -Tupel  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  von Funktionen  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m \forall x \in U, f(x) \in \mathbb{R}^m$ , d.h.  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

**Definition:**  $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist *an der Stelle*  $a \in U$  *stetig*, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  s.d.  $x \in U, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .  $f$  heißt *stetig* (auf  $U$ ), wenn  $\forall a \in U, f$  in  $a$  stetig ist.

**14 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in U$  und  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.  $f$  ist stetig in  $a$ , genau dann, wenn jede der Komponenten Funktionen  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, m$  stetig in  $a$  ist.

*Beweis.* Der Beweis beruht wie der Beweis des Satzes 9 auf der Äquivalenz der Maximumnorm auf  $\mathbb{R}^m$  zur euklidischen Norm auf  $\mathbb{R}^m$ , genauer auf der Beziehung

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_1|, \dots, |x_m|\} \leq \sqrt{m} \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

□

**15 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $a \in U$ . Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann in  $a$  stetig, wenn zu jeder offenen Umgebung  $F = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$  des Punktes  $f(a) \in \mathbb{R}^m$  eine offene Umgebung  $W = W(a) \subset \mathbb{R}^n$  des Punktes  $a \in V$  existiert, so dass  $f(W) = \{f(x) \mid x \in U \cap W\} \subset F$  gilt.

*Beweis.* " $\Rightarrow$ " " $f$  ist stetig. sei  $V = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$  eine offene Umgebung des Punktes  $a \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ , s.d.  $B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$ .  $f$  ist stetig in  $a \Rightarrow \exists \delta > 0$ , s.d.  $x \in \underbrace{B(a, \delta) \cap U}_{:=W}$

$\Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$

" $\Leftarrow$ " Sei  $\forall V(f(a))$ -offen,  $\exists W(a)$ -offen s.d.  $f(W) \subset V$  gilt.  $\forall \varepsilon > 0$  sei  $V = B(f(a), \varepsilon)$ , dann  $\exists W(a)$ -offen s.d.  $f(W) \subset B(f(a), \varepsilon) \Rightarrow \exists \delta > 0$  s.d.  $B(a, \delta) \subset W$   
 $\Rightarrow f(B(a, \delta) \cap U) \subset B(f(a), \varepsilon) \Rightarrow f$  ist stetig in  $a$  □

**16 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.  $f$  ist genau dann auf  $U$  stetig, wenn das Urbild  $f^{-1}(V) := \{x \in U : f(x) \in V\}$  einer jeden offenen Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^m$  unter  $f$  selbst wieder offen ist.

*Beweis.* " $\Rightarrow$ " " $f$  ist stetig auf  $U$ . Sei  $V$  in  $\mathbb{R}^m$  offen. Sei  $a \in f^{-1}(V)$ , d.h.  $f(a) \in V \xrightarrow{\text{Satz 15}} \exists W(a) \subset \mathbb{R}^n$  offen, s.d.  $f(W(a) \cap U) \subset V \Rightarrow \exists \delta > 0$  s.d.  $B(a, \delta) \subset W(a) \Rightarrow W(a) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$   
" $\Leftarrow$ " Für  $a \in f^{-1}(V)$  sei  $W(a) := f^{-1}(V) \xrightarrow{\text{Satz 15}} f$  stetig in  $a$  □

Für stetige Abbildung des  $\mathbb{R}^n$  mit Werten in  $\mathbb{R}$  gelten Rechenregeln, die denen für das Rechnen mit stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entsprechen und die völlig analog zu beweisen sind:

**17 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Die Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  seien beide stetig an der Stelle  $a \in U$ , dann gilt :

- a) Die Funktion  $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$
- b) Die Funktion  $(f \cdot g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$
- c) Falls  $g(a) \neq 0$  existiert eine offene Umgebung  $V = V(g)$  mit  $g(x) \neq 0 \forall x \in V$ , die Funktion  $\left(\frac{f}{g}\right) : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$ .

### Bemerkung

Die Übertragung des Satzes 17 auf dem Fall  $\mathbb{R}^m$ -wertiger Abbildungen ist nicht uneingeschränkt möglich. Folgende Version auf deren Beweis wie ebenfalls verzichten können, ist aber gültig.

**18 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, die Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei stetig in  $a$ . Dann gilt:

- a) Ist die Abbildung  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig in  $a$ , so ist auch die Abbildung  $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ .
- b) Ist die Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ , so ist auch die Abbildung  $(f \cdot g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ .
- c) Ist die Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$  und  $g(a) \neq 0$ , so existiert eine offene Umgebung  $V = V(a)$  mit  $g(x) \neq 0 \forall x \in V$ ; die Abbildung  $\left(\frac{f}{g}\right) : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$ .

Auch die Komposition stetiger Abbildungen liefert wieder eine stetige Abbildung:

**19 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen und seien  $f : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  sowie  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  Abbildungen für die gilt:  $f$  ist stetig in  $x_0 \in V$ ,  $g$  ist stetig in  $y_0 = f(x_0) \in V$ . Dann ist die Abbildung  $(g \cdot f) : U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$  stetig in  $x_0$

*Beweis.* Ist  $W = W((g \cdot f)(x_0))$  eine offene Umgebung des Punktes  $|g \cdot f| = g(y_0) \in \mathbb{R}^k$ , so gibt es wegen der Stetigkeit von  $g$  an der Stelle  $y_0$  nach Satz 15 eine offene  $y_0$ -Umgebung  $W_1 = W(y_0) = W(f(x_0)) \subset \mathbb{R}^m$  mit  $g(W_1) \subset W$ . Ebenso impliziert die Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$  die Existenz einer offenen Umgebung  $W_2 = W_2(x_0)$  mit  $f(W_2) \subset W_1$ . Offenbar ist dann  $(g \cdot f)(W_2) \subset g(f(W_2)) \subset g(W_1) \subset W$ , und die Stetigkeit von  $(g \cdot f)$  in  $x_0$  ist bewiesen  $\square$

**Definition:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $(f_k)$  eine Folge von Abbildungen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

- a)  $(f_k)$  heißt auf  $D$  *gleichmäßig konvergent* gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \forall x \in D, \forall k \geq k_0$$

- b)  $(f_k)$  heißt auf  $D$  *lokal-gleichmäßig konvergent* gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wenn es  $\forall a \in D \exists V = V(a) \subset \mathbb{R}^n$ -offen s.d. die Folge  $(f_k|_{D \cap V})$  auf  $D \cap V$  gleichmäßig gegen  $f|_{D \cap V}$  konvergiert.

#### Bemerkung

- b)  $\not\Rightarrow$  a). *Gegenbeispiel:* Sei  $D = (0, +\infty)$  und  $f_k(x) := \frac{1}{kx}$  für  $1, 2, \dots$  lokal-gleichmäßig konvergiert gegen 0, aber nicht gleichmäßig.

**20 Satz:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $(f_k)$  eine Folge stetiger Abbildungen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  welche auf  $D$  lokal-gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  konvergiert. Dann ist  $f$  stetig auf  $D$

## §4 Kompakte Mengen

**Definition:** Sei  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ .

a) Unter dem *Durchmesser* von  $\mathcal{S}$  versteht man die Zahl

$$d(\mathcal{S}) := \sup \{ |x - y| : x, y \in \mathcal{S} \} \leq \infty$$

b)  $\mathcal{S}$  heißt *beschränkt*, falls  $d(\mathcal{S}) < \infty$  gilt.

### Bemerkung

a) Ist  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und ist  $x_0 \in \mathcal{S}$  gilt  $\mathcal{S} \subset B(0, |x_0| + d(\mathcal{S}))$ , denn  $\forall y \in \mathcal{S}$  ist  $|y| = |y - x_0 + x_0| \leq |y - x_0| + |x_0| \leq d(\mathcal{S}) + |x_0|$ .

b) Ist  $\mathcal{S} \subset B(0, r)$ , so folgt  $d(\mathcal{S}) \leq 2r$ , denn  $\forall x, y \in \mathcal{S}$  gilt  $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2r \implies d(\mathcal{S}) \leq 2r$ .

c) Für  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$  gilt  $d(\mathcal{S}_1) \leq d(\mathcal{S}_2)$

**Definition:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $J$  eine beliebige (endlich oder unendliche) Indexmenge.

- a) Eine Familie  $(V_j)_{j \in J}$  von offenen Menge  $V_j \subset \mathbb{R}^n$  heißt (offene) Überdeckung von  $K$  wenn  $K \subset \bigcup V_j$  gibt.
- b)  $K$  heißt *kompakt*, wenn es *zu jeder* offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  der Menge  $K$  endlich viele Indizes  $i_1, \dots, i_m \in I$  gibt, so dass bereits

$$K \subset \bigcup_{p=1}^m U_{i_p}$$

gibt. Mann nennt ein solches endliches Mengensystem  $\{U_{i_p}; p = 1, 2, \dots, m\}$  offener Menge der Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $K$ , welches die Eigenschaft  $K \subset \bigcup_{p=1}^m U_{i_p}$  hat eine  $(U_i)_{i \in I}$  zugehörige *offene Teilüberdeckung* der Menge  $\mathbb{R}$

### Beispiele

- a) Die Menge  $K_1 := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  nicht kompakt, weil sie nicht abgeschlossen ist.
- b)  $K_2 \cup \{0\}$  ist aber kompakt.

**21 Definition:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt: Ist  $K$  kompakt, so ist  $K$  abgeschlossen und beschränkt.

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \iff K \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

*Beweis.* a)  $K$  ist beschränkt. Wir betrachten folgende Überdeckung von  $\mathbb{R}^n$  bei offene Menge  $U_k := B(0, k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  Dann ist  $K \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ .  $K$ -kompakt,  $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine offene Überdeckung von  $K \implies \exists k_1, k_2, \dots, k_m$  s.d.  $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_{k_i}$ . Sei  $k^* := \max\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ . Dann ist  $K \subset B(0, k^*) \implies d(K) < 2k^* \implies k$ -beschränkt

b) " $\Leftarrow$ "  $K$  ist abgeschlossen (Widerspruchsbeweis!) Sei  $K$  ist nicht abgeschlossen. Dann gibt es ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$  eine Folge  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $x_i \in K \forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ . Wir betrachten folgende offene Überdeckungen  $K$ :  $U_i := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x, \frac{1}{i})}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Denn  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \mathbb{R}^n \setminus x \supset K \implies \exists i_1, i_2, \dots, i_m$  s.d.  $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$ . Sei  $i^* = \max\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  Dann ist  $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x, \frac{1}{i^*})} \implies K \cap \overline{B(x, \frac{1}{i^*})} = \emptyset$  Widerspruch.

□

**22 Satz:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann ist jede abgeschlossene Menge  $A \subset K$  ebenfalls Kompakt.

*Beweis.* Sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Dann ist die Familie  $\{\{U_i\}_{i \in I}, \mathbb{R}^n \setminus A\}$  eine Überdeckung von  $\mathbb{R}^n \supset K$ ,  $K$  - kompakt  $\implies \exists U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$  s.d.  $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$  (Weil  $A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$ )  $\implies A$ -kompakt.

□

**Quader:** Eine Menge in  $Q \subset \mathbb{R}^n$  heißt *abgeschlossene Quader*, wenn es beschränkt, abgeschlossene Intervalle  $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$ ,  $-\infty < a_k < b_k < +\infty$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  gibt, so dass  $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k, \forall k = 1, 2, \dots, n\}$  gilt.

**23 Satz:** Jede abgeschlossene Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ist kompakt.

Wir werden folgende Resultat brauchen: *Cantorsche Schachtelungsprinzip* :

**24 Satz:** Sei  $(A_k)$  eine Folge nicht-leerer, abgeschlossene Menge  $A_k \subset \mathbb{R}^n$  mit der folgende Eigenschaften:

- a)  $(A_k)$  ist absteigend, d.h es gilt  $A_{k+1} \subset A_k \forall k \in \mathbb{N}$
- b) Die Folge  $(d(A_k))$  der Durchmesser der Menge  $A_k$  ist eine Nullfolge ( d.h  $d(A_k) \rightarrow 0$

Dann gibt es genau einen Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  der allen Menge  $A_k$  angehört:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}$$

*Beweis.* a) Wir zeigen dass  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$ . Sei  $(x_k)_{k=1}^{\infty}$  eine Folge s.d.  $x_k \in A_k \forall k \in \mathbb{N}$ . Wir wissen, dass  $d(A_k) \rightarrow 0$  wenn  $k \rightarrow \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  s.d.  $d(A_k) < \varepsilon \forall k \geq k_0$ . Dann ist  $\forall k, m \geq k_0$   $x_k \in A_k \subset A_{k_0}, x_m \in A_m \subset A_{k_0} \implies x_k, x_m \in A_{k_0} \implies \|x_k - x_m\| \leq d(A_{k_0}) < \varepsilon \implies (x_k)$ -eine Cauchy-Folge.  $\implies \exists x \in \mathbb{R}^n$  s.d.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \forall x \in \mathbb{N}$  ist  $x_m \in A_m \subset A_k, m \geq k, A_k$ -abgeschlossen  $\implies x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m \in A_k \forall k \in \mathbb{N} \implies x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

b) Wir zeigen, dass  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  nur eine Punkt  $x$ . (Widerspruchsbeweis). Sei  $x \neq y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ . Dann ist  $x, y \in A_k, k \in \mathbb{N} \implies \|x - y\| \leq d(A_k) \rightarrow 0$  wenn  $k \rightarrow \infty \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y$ -Widerspruch

□

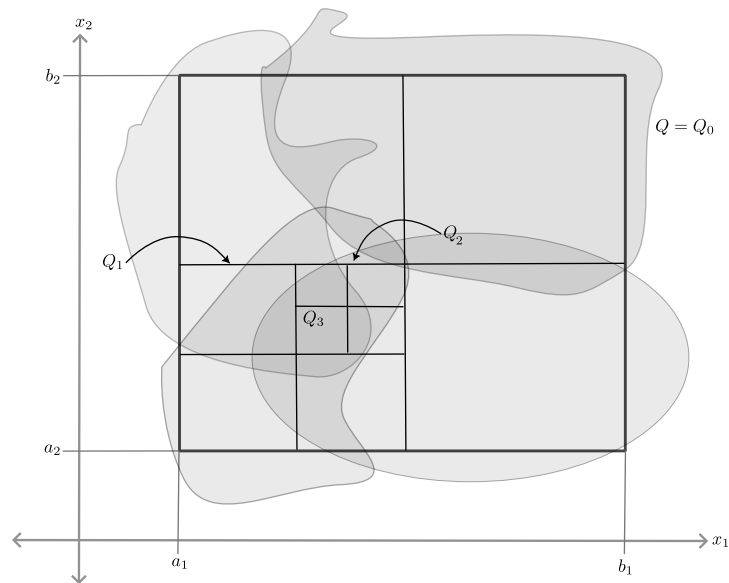
Das Cantorsche Schachtelungsprinzip werden wir zum Beweis des Satzes 23 auf eine geeignete absteigende Folge abgeschl. Quader an: Es sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  eine abgeschl. Quader und  $(U_i)$  eine offene Überdeckung von  $Q$ .

*Annahme:* Zu  $(U_i)$  gibt es keine endliche Teilüberdeckung von  $Q$ . Wir konstruieren induktiv eine absteigende Folge

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

abgeschl. Quader  $Q_m \subset \mathbb{R}^n$  mit der folgenden Eigenschaften:

- a)  $\forall m \in \mathbb{N}$ : Es gibt keine  $(U_i)$  zugehörige endliche Teilüberdeckung von  $Q_m$
- b)  $d(Q_m) = \frac{1}{2^m} d(Q_0) (\implies \lim_{m \rightarrow \infty} d(Q_m) = 0)$



Unsere Ausgangsquader  $Q_0 = Q$  hat die geforderten Eigenschaften. Seine  $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$  bereits konstruiert. Es gelte  $Q_m = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ ,  $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R} \forall k = 1, 2, \dots, n$ . Wir splitten jedes der Intervalle  $I_k$  in der Intervallmitte auf und erhalten Unterteilung  $I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}$  mit  $I_{k_1} = [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ ,  $I_{k_2} = [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Die kartesischen Producte  $I_{1_{\gamma_1}} \times I_{2_{\gamma_2}} \times \dots \times I_{n_{\gamma_n}}$ ,  $\gamma \in 1, 2 \forall 1 \leq k \leq n$  aller Intervallhälften der  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  unterteilen den abgeschlossener Quader  $Q_m$  in in insgesamt  $2^n$  vielen kleinere abgeschlos. Quader Nur können wir folgendes Kriterium formulieren:

**25 Satz von Heine-Borel:** Für ein Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $K$  ist abgeschlossen und beschränkt
- b)  $K$  ist kompakt

*Beweis.* Siehe Satz 21. □

### Korollar

Für jede kompakte Teilmenge  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  gilt:

$$\sup A \in A, \inf A \in A$$

*Beweis.* Da  $A$  als kompakte Menge insbesondere beschränkt ist, existieren  $\sup A, \inf A \in \mathbb{R}$ . Weil sowohl  $\sup A$  als auch  $\inf A$  Häufungspunkte geeigneter Folgen in  $A$  sind, impliziert die Abgeschlossenheit von  $A$  in Verbindung mit Satz 8, dass  $\sup A \in A$  und  $\inf A \in A$  gilt. □

**26 Satz:** Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen  $K \subset U$ -kompakt und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ -stetige Abbildung, so ist  $f(K) \subset \mathbb{R}^m$  ebenfalls kompakt.

*Beweis.* Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $f(K)$ . Sei  $\forall i \in I$ ,  $V_i := f^{-1}(U_i)$ ,  $f$ -stetig  $\implies i \in I$   $V_i$ -offen. Die Familie  $(V_i)_{i \in I}$  ist eine Überdeckung von  $K$ ,  $K$ -kompakt  $\implies \exists V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_n}$  s.d.  $K \subset \bigcup_{p=1}^n U_{i_p} \implies f(K) \subset \bigcup_{p=1}^n U_{i_p} \implies f(K)$ -kompakt □



**27 Satz:** Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $K \subset U$  kompakt und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf  $U$ , so gibt es Punkte  $p, q \in K$  mit  $f(p) = \sup \{f(x) : x \in K\}$ ,  $f(q) = \inf \{f(x) : x \in K\}$

*Beweis.* Laut Satz 26 ist  $A := f(K) \subset \mathbb{R}$  kompakt, also im Hinblick auf dem Korollar zu Satz 25:  $\sup f(K) \in f(K)$ ,  $\inf f(K) \in f(K)$ . Deshalb können wir  $p, q \in K$  mit gewünschten Eigenschaften finden  $\square$

**Definition:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Dann nennt man  $f$  *gleichmäßig stetig* auf  $U$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } |x - y| < \delta, x, y \in U \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

**28 Satz:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetige Abbildung. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $K$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben.  $\forall a \in K \exists r(a) > 0$  mit  $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in B(a, r(a)) \cap K$  (wegen der Stetigkeit von  $f$  in a) Offenbar ist  $K \subset \bigcup_{a \in K} B(a, \frac{r(a)}{2})$ .  $K$ -kompakt  $\implies a_1, a_2, \dots, a_k$  s.d  $K \subset \bigcup_{p=1}^k B(a_p, \frac{r(a_p)}{2})$ . Man setz nun  $\delta := \frac{1}{2} \min \{r(a_1), \dots, r(a_k)\}$  Seien dann  $x_1, x_2 \in K$  mit  $|x_1 - x_2| < \delta$  beliebig gewählt. Wir fixieren ein  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  mit  $x_1 \in B(a_i, \frac{r(a_i)}{2})$ ; dann gilt auch  $|x_2 - a_i| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - a_i| < \delta + \frac{r(a_i)}{2} < r(a_i)$  also liegt mit  $x_1$  auch  $x_2$  in  $B(a_i, r(a_i))$ , und wir erhalten  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ . Damit ist die gleichmäßig Stetigkeit von  $f$  auf  $K$  beweisen.  $\square$

## §5 Partielle Ableitung

**Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, ferner

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

eine Funktion auf  $U$  und  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$

- a)  $f$  heißt in  $a$  *partiell differenzierbar* nach  $x_i$  oder auch *partiell differenzierbar bezüglich der  $i$ -ten Koordinate*, wenn der Grenzwert

$$D_i f(a) : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)_i := \lim_{\substack{t \rightarrow a_i \\ t \neq a_i}} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{t - a_i}$$

dann  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  die *partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $a$*

- b)  $f$  heißt in  $a$  *partiell differenzierbar*, wenn  $f$  in  $a$  nach *allen*  $x_i, i = 1, \dots, n$  partiell differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man den Vektor  $\text{grad}(f(a)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$  den *Gradient von  $f$  in  $a$*
- c)  $f$  heißt auf  $U$  *partiell differenzierbar*, wenn  $f$  partiell differenzierbar in  $a$  für jedes  $a \in U$  ist.
- d)  $f$  heißt in  $a$  *stetig partiell differenzierbar*, wenn  $f$  auf  $U$  partiell differenzierbar ist und zusätzlich alle Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ , an der Stelle  $a$  stetig sind.
- e)  $f$  heißt *stetig partiell differenzierbar auf  $U$* , wenn  $f$  in jedem  $a \in U$  stetig partiell differenzierbar ist. Für die Menge aller solcher Funktion führen wir die Bezeichnung

$$C^1(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig partiell differenzierbar auf } U\}$$

ein.

**Beispiel**

...

**Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, ferner  $f : U \rightarrow \mathbb{R}(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine Funktion auf  $U$  und  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$ . Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $i \in 1, \dots, n$

- a)  $f$  heißt in  $a$   $k$ -mal partiell differenzierbar nach  $x_i$ , wenn  $f$   $(k-1)$ -mal partiell differenzierbar auf  $U$  ist und alle partiell Ableitungen  $(k-1)$ -ter Ordnung von  $f$  an der Stelle  $a$  partiell differenzierbar nach  $x_i$  sind.
- b)  $f$  heißt in  $a$   $k$ -mal partiell differenzierbar, wenn  $f$  in  $a$   $k$ -mal partiell differenzierbar ist. Nach  $x_j$  für alle  $j \in 1, 2, \dots, n$  ist. Die partielle Ableitungen der Ordnung  $k$  von  $f$  in  $a$  sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} D_{i_k} (D_{i_{k-1}} (\dots D_{i_2} (D_{i_1}(f)) \dots)) (a) &:= \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a) \\ &:= D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f(a) \\ &:= f_{x_{i_k} x_{i_{k-1}} \dots x_{i_1}}^{(k)}(a) \end{aligned}$$

wobei die Indizes  $i_1, \dots, i_k$  voneinander unabhängig die Menge  $1, 2, \dots, n$  durchlaufen.

- c)  $f$  heißt  $k$ -mal partiell differenzierbar auf  $U$ , wenn  $f$  in jedem  $a \in U$   $k$ -mal partiell differenzierbar ist. Die Funktionen  $D_{i_k} \dots D_{i_1} f : U \rightarrow \mathbb{R}, i_1, i_2, \dots, i_k \in 1, \dots, n$  heißen partiell Ableitung  $k$ -te Ordnung von  $f$ .
- d)  $f$  heißt  $k$ -mal stetig partiell differenzierbar auf  $U$  wenn  $f$   $k$ -mal partiell differenzierbar auf  $U$  ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k$  auf  $U$  stetig sind. Für die Menge aller solcher Funktionen führen wir die Bezeichnung

$$C^k(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar auf } U\}$$

ein.

**29 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal partiell differenzierbar auf  $U$ ; außerhalb seien alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung von  $f$  stetig auf  $U$ . Dann gilt :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \forall i, j \in 1, \dots, n$$

### Korollar

Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $k \geq 2$  und sei  $f \in C^k(U)$ . Dann gilt für jedes  $k$ -Tupel von Indizes  $(i_1, i_2, \dots, i_k \in 1, 2, \dots, n^k)$  und für jedes Permutation  $\pi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  :

$$D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} D_{i_{\pi(k-1)}} \dots D_{i_{\pi(1)}} f$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über  $k$ . Den Induktions Anfang bildet Satz 29 im Induktionsschluss verwendet man die Tatsache, dass sich jede Permutation als Hintereinanderausführung endliche vieler Vertauschungen benachbarter Glider darstellen lässt.

□

## §6 Totale Differenzierbarkeit

**Definition:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 = (x_{01} \cdots x_{0n}) \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $U$ .  $f$  heißt (total) differenzierbar in  $x_0$ , wenn es reelle Zahlen  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  und eine Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{|x-x_0|} = 0$  gibt, dass

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - x_{0i}) + \varphi(x) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$$

gilt. Man bezeichnet den Vektor  $A := (a_1, \dots, a_n)$  als *Differential* von  $f$  in  $x$

**30 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  sei ferner  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar in  $x_0$  und  $A = (a_1, \dots, a_n)$  wie in der letzten Definition. Dann gilt:

- a)  $f$  ist stetig in  $x_0$ .
- b)  $f$  ist partiell differenzierbar in  $x_0$  und es gilt  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = a_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

**31 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei partiell differenzierbar auf  $U$ , und alle partielle Ableitungen  $D_i \left( \text{oder auch } \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , seien stetig in  $x_0 \in U$ . Dann ist  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar.

### Korollar

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $U$  und  $x_0$ . Dann gilt:

- a) Ist  $f$  stetig partiell differenzierbar in  $x_0$ , so ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  stetig.

- b) Ist  $f$   $k$ -mal partiell differenzierbar auf  $U$  und sind alle partiell Ableitungen  $k$ -te Ordnung von  $f$  stetig in  $x_0$ , so sind alle partielle Ableitungen der Ordnungen  $\varphi, 0 \leq \varphi \leq k$  ebenfalls stetig in  $x_0$

**Definition:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n}) \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung auf  $U$ ,  $f$  heißt (total) differenzierbar in  $x_0$ , wenn es eine Matrix  $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$  und eine Abbildung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\varphi(x)|}{|x - x_0|} = 0$  gibt, sodass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$$

gilt. Der Deutlichkeit halber schreiben wir die obige Gleichung einmal komponentenweise auf:

Ist  $f = (f_1, \dots, f_m)$  mit  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m$  und entsprechend  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  mit  $\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, m$  so ist die Bedingung  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\varphi(x)|}{|x - x_0|} = 0$  gleichdeutend mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_i(x)}{|x - x_0|} = 0 \forall i = 1, \dots, m$  und die Gleichung bedeutet ausführlich, dass  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{0_1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$$

Daran kann man sofort ablesen, dass folgende Satz richtig ist.

**32 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f = (f_1, \dots, f_m)$  eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Dann gilt:

- $f$  ist total differenzierbar in  $x_0$  genau dann, wenn jede der Komponentenfunktion  $f_i, 1 \leq i \leq m$  total differenzierbar in  $x_0$  ist.
- Wenn  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar ist, so ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  stetig.
- Wenn  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar und die  $(m \times n)$  Matrix  $A$  wie Definition von oben gewählt ist, dann ist alle Komponentenfunktion  $f_i, 1 \leq i \leq m$  in  $x_0$  partiell differenzierbar mit  $D_\nu f_i(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}(x_0) = a_{i\nu}; \forall \nu = 1, \dots, n; \forall i = 1, \dots, m$ .
- Wenn alle Komponentenfunktion  $f_i$  auf  $U$  partiell differenzierbar sind und alle partiell Ableitungen  $D_\nu f_i$  an der Stelle  $x_0$  stetig sind, dann ist  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar.

**Definition:** Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  total differenzierbar in  $x_0 \in U$ , so nennt man die Matrix  $Df(x_0) := J_f(x_0) := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$

$$:= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

das *Differential* oder die *Jacobi-Matrix* oder die *Funktionalmatrix* von  $f$  in  $x_0$

**33 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U, c \in \mathbb{R}$ , die Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  seien total differenzierbar in  $x_0$ . Dann gilt:

- a) Die Abbildung  $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist total differenzierbar in  $x_0$  mit  $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$
- b) Die Abbildung  $(c \cdot f) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist total differenzierbar in  $x_0$  mit  $D(cf)(x_0) = cDf(x_0)$

*Beweis.* Wie in Analysis 1 für reellwertige Funktionen. □

Eine *Produktregel* gilt in folgender Form:

**34 Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  die Abbildung  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und die Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei total differenzierbar in  $x_0$ . Dann gilt: Die Abbildung  $(f \cdot g) : U \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_1(g(x)), \dots, f_m(g(x)))$  ist in  $x_0$  total differenzierbar mit

$$\underbrace{D(f \cdot g)(x_0)}_{(m \times n)\text{-Matrix}} = \underbrace{f(x_0)}_{(m \times 1)} \cdot \underbrace{Dg(x_0)}_{(1 \times n)} + g(x_0) \underbrace{Df(x_0)}_{(m \times n)}$$

*Beweis.* Die totale □

**35 Kettenregel:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offene Menge, ferner  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$  Abbildungen mit  $g(U) \subset V$ .  $g$  sei total differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in U$ ,  $f$  sei total differenzierbar in  $y_0 = g(x_0)$ . Dann ist die Abbildung  $(f \circ g) : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  total differenzierbar in  $x_0$  mit  $\underbrace{D(f \circ g)(x_0)}_{l \times n} = \underbrace{Df(g(x_0))}_{l \times m} \cdot \underbrace{Dg(x_0)}_{m \times n}$

### Korollar

$U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offene Mengen, die Abbildung  $(g_1, \dots, g_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei total differenzierbar in  $x_0 \in U$ , es gelte  $g(U) \subset V$  und die Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  sei total differenzierbar in  $y_0 = g(x_0)$ . Dann ist die Funktion  $h := (f \circ g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar in  $x_0$  mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_0) \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

**Definition:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, ferner  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $U$ . Dann bezeichnet man für  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  den Grenzwert

$$D_v f(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t}$$

(im Falle seiner Existenz) als *Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $v$*  und nennt  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $v$  differenzierbar

**36 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $x_0 \in U$  total differenzierbare Funktion. Dann existiert für jedes  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  die Richtungsableitung  $D_v f(x_0)$  von  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $v$  und es gilt:

$$D_v f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i = \langle Df(x_0), v \rangle$$

Wobei

$$\text{grad} f(x_0) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

*Beweis.* Sei ein beliebiger Vektor  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gegeben. Die Abbildung  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$   $t \mapsto g(t) = x_0 + tv$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ , und es ist  $g(0) = x_0$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $g$  an der Stelle 0 existiert ein Intervall  $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$  so dass  $g(I_\varepsilon) \subset B(x_0, r)$  gilt, hierbei sei  $r > 0$  so gewählt, dass  $B(x_0, r) \subset U$  erfüllt ist, was aufgrund der Offenheit von  $U$  möglich ist. Dann ist die Funktion  $h := (f \circ g) : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$   $t \mapsto h(t) := f(x_0 + tv)$  differenzierbar der Stelle  $t = 0$ , und nach dem Korollar zur Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} D_v f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = h'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \frac{dg_i}{dt}(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i = \langle Df(x_0), v \rangle \end{aligned}$$

□

## §7 Mittelwertsatz

**37 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine total differenzierbar Funktion. Seien  $a, b \in U$  zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke  $|\gamma_{ab}| := \{\gamma_{ab} := a + t(b - a); t \in [0, 1]\} \subset U$  in  $U$  enthalten ist. Dann gibt es ein  $\xi \in |\gamma_{ab}|$  derart, dass  $f(b) = f(a) + Df(\xi) \cdot (b - a)$ .

*Beweis.* Die Abbildung  $\gamma_{ab} : [0, 1] \rightarrow U$   $t \mapsto \gamma_{ab}(t) = a + t(b - a)$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  mit  $D\gamma_{ab}(t) = (b - a) \forall t \in \mathbb{R}$ . Da  $|\gamma_{ab}| = \gamma_{ab}([0, 1]) \subset U$  gilt und  $f$  auf  $U$  differenzierbar ist, ist die Komposition  $(f \circ \gamma_{ab}) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf  $[0, 1]$  differenzierbare Funktion, auf die der Mittelwertsatz für Funktionen eine Variabel anwendbar ist. Daher  $\exists t_0 \in (0, 1)$  so dass

$$(f \circ \gamma_{ab})(1) = (f \circ \gamma_{ab})(0) + (f \circ \gamma_{ab})(t_0) \cdot (1 - 0) \quad (1)$$

gilt. Da aber  $\gamma_{ab}(1) = b$  und  $\gamma_{ab}(0) = a$  ist, ferner für  $s := \gamma_{ab}(t_0) \in |\gamma_{ab}|$  mit der Kettenregel  $(f \circ \gamma_{ab})'(t_0) = Df(\gamma_{ab}(t_0)) \cdot D\gamma_{ab}(t_0) = Df(\xi) \cdot (b - a)$  folgt, ist Gleichung (1) äquivalent zu  $f(b) = f(a) + Df(\xi) \cdot (b - a)$   $\square$

**38 Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine total differenzierbare Abbildung. Seien  $a, b \in U$ , sodass  $|\gamma_{ab}| \subset U$ . Dann gibt es  $\phi_1, \dots, \phi_m \in |\gamma_{ab}|$ , sodass :

$$f(b) = f(a) + \begin{pmatrix} Df_1(\phi_1) \\ \vdots \\ Df_n(\phi_m) \end{pmatrix} \cdot (b - a)$$

*Beweis.* Satz 37 auf  $f_1, \dots, f_n$  anwenden.  $\square$



**Beispiel**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$

Ist  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  beschränkt,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar, so besagt der HDI:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

Ist wieder  $\gamma_{ab}(f) = a + t(b - a)$ , so erhält man durch Substitution

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 f'(\gamma_{ab}(t)) \gamma'_{ab}(t) dt = \left( \int_0^1 f'(\gamma_{ab}(t)) dt \right) \cdot (b - a)$$

**Definition:** Sei  $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$  und  $A : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  mit  $a_{ij} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig für  $i = 1, \dots, m$  und  $j = 1, \dots, n$ . Dann ist die Integral über die *matrixwertige Abbildung*  $A$  gegeben durch:

$$\int_{\alpha}^{\beta} A(t) dt = \left( \int_{\alpha}^{\beta} a_{ij}(t) dt \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

**39 Satz:** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig partiell differenzierbar. Seien  $a, b \in U$  sodass  $|\gamma_{ab}| \subseteq U$ . Dann gilt:

$$f(b) - f(a) = \underbrace{\left( \int_0^1 Df(\gamma_{ab}(t)) dt \right)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \underbrace{(b - a)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

*Beweis.* Wir wenden den HDI an auf  $g_i := (f_i \circ \gamma_{ab}) \in C^1([0, 1])$  für  $i = 1, \dots, m$  und erhalten mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f_i(b) - f_i(a) &= g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g_i(t) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma_{ab}(t)) \cdot (b_j - a_j) \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left( \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma_{ab}(t)) \cdot dt \right)}_{v_j} \underbrace{(b_j - a_j)}_{u_j} \\ &= \left\langle \left( \int_0^1 Df_i(\gamma_{ab}(t)) dt \right), (b - a) \right\rangle \end{aligned}$$

Dies zeigt die  $i$ -te Zeile der gewünschte Gleichung. □

**Hilfssatz:** Ist  $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$  ein Kompaktes Intervall,  $v : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Abbildung. So gilt:

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt \right\|_2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|v(t)\|_1 dt$$

*Beweis.* Sei  $u := \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 \|u\|_2^2 &= \langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} v_j(t) dt \cdot u_j \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{j=1}^n v_j(t) \cdot u_j \right) dt \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle v(t), u \rangle dt \\
 &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |\langle v(t), u \rangle| dt \\
 &\stackrel{\text{Schwz.}}{\leq} \int_{\alpha}^{\beta} (\|v(t)\|_2 \cdot \|u\|_2) dt \\
 &= \|u\|_2 \int_{\alpha}^{\beta} \|v(t)\|_2 dt
 \end{aligned}$$

Für

$$\|u\|_2 > 0 \implies \|u\|_2 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt$$

Für

$$\|u\|_2 = 0 \implies \|u\|_2 = 0 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt$$

□

### Korollar

Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig partiell differenzierbar. Seien  $a, b \in U$  mit  $|\gamma_{ab}| \subseteq U$ . Dann gilt:

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq M \|b - a\|_2$$

für  $M := \sup \{ \|Df(x)\| \mid x \in |\gamma_{ab}| \}$ . Dabei ist die Matrix norm  $\|A\|$  für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gegeben durch

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|_2=1}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 M &= \sup_{\substack{x \in |\gamma_{ab}| \\ v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|_2=1}} \underbrace{\frac{\|Df(x) \cdot v\|_2}{\|v\|_2}}_{G(x,v)} < \infty, \text{ da} \\
 G &: \underbrace{|\gamma_{ab}| \times \partial \mathbb{B}(0,1)}_{\text{kompakt}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}
 \end{aligned}$$

*Beweis.* Es ist :

$$\begin{aligned}
 \|f(b) - f(a)\|_2 &= \left\| \left( \int_0^1 Df(\gamma_{ab}(t)) dt \right) \cdot (b - a) \right\|_2 \\
 &\leq \int_0^1 \|Df(\gamma_{ab}(t)) \cdot (b - a)\|_2 dt \\
 &\leq \int_0^1 M \cdot \|b - a\|_2 dt \\
 &= M \cdot \|b - a\|_2
 \end{aligned}$$

□

## §8 Die Taylorformel

**Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $k$ -mal stetig partiell differenzierbar Funktion ( $C^k$ ). Dann bezeichnet man für  $0 \leq m \leq k$  das durch

$$T_{f,x_0,m}(x) := \sum_{i=0}^m \left( \sum_{\substack{|\alpha|=L \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right)$$

definiert Polynom  $T_{f,x_0,m}$  als  **$m$ -tes Taylorpolynom von  $f$  in  $x_0$** . Hierbei wird mit  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  die **Länge des Multiindex**  $\alpha := (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  und mit  $\alpha!$  das Produkt  $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$  bezeichnet. Der **Differentialoperator**  $D^\alpha$  ist für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  gegeben durch  $D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f \in C^{|\alpha|}$  dabei ist  $D_\gamma^{\alpha_r} := \underbrace{D_\gamma D_\gamma \dots D_\gamma}_{\alpha_r \gamma \text{-mal}} \gamma = 1, \dots, n$  für  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  ist

mit  $y^\alpha$  die reelle Zahl  $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}$  gemeint. Wie im Kapitel 7 werde für  $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma_{x_0 x}$  die  $C^\infty$ -Ableitung  $\gamma_{x_0 x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \gamma_{x_0 x}(t) := x_0 + t(x - x_0)$  und mit  $|\gamma_{x_0 x}| = \gamma_{x_0 x}([0, 1])$  die Verbindungsstrecke von  $x_0$  und  $x$  bezeichnet. Die Taylorformel für  $C^{k+1}$  Fkten mehrerer veränderlichen lautet dann wie folgt:

**40 Taylor:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \xrightarrow{C^{k+1}}$  eine  $(k+1)$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Ist dann  $x \in U$  ein Punkt mit  $\|\gamma_{x_0 x}\| \in U$ , so existiert ein  $\xi \in |\gamma_{x_0 x}|$  mit

$$f(x) = \sum_{l=0}^k \left( \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right) + \sum_{\substack{|\alpha|=k+1 \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

**Bemerkung:**

Unter den Voraussetzungen von Satz 40 wird die Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  durch das  $k$ -te Taylorpolynom von  $f$  in  $x_0$  approximiert. Der Fehler  $R_{k+1}(x) := f(x) - T_{f, x_0, k}(x)$  die Approximation, das  **$k$ -te Restglied** in  $x$  kann in der Form

$$R_{k+1}(x) = \sum_{\substack{|\alpha|=k+1 \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D_\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

dargestellt werden, wobei  $\xi \in |\gamma_{x_0 x}|$  geeignet zu wählen ist.

*Beweis.* Wir wenden den Taylorschen Satz für Funktionen einer Veränderlichen auf die Funktion  $g : (f \circ \gamma_{x_0 x}) : [0, 1] \xrightarrow{c^{k+1}} \mathbb{R}$  an. Danach existiert ein  $t_0 \in (0, 1)$  mit

$$g(1) = g(0) + \sum_{l=1}^k \frac{g^{(l)}(0)}{l!} (1-0)^l + \frac{g^{(k+1)}(t_0)}{(k+1)!} (1-0)^{k+1}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit  $f(x) = f(x_0) + \sum_{l=1}^k \frac{g^{(l)}(0)}{l!} + \frac{g^{(k+1)}(t_0)}{(k+1)!}$ . Zum Beweis der Taylorformel genügt es also zu zeigen:  $\square$

**Behauptung:**

$\forall t \in [0, 1], l = 1, \dots, k+1 :$

$$g^{(l)}(t) = \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} l! \frac{D^\alpha f(\gamma_{x_0 x}(t))}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \quad (1)$$

Also Satz 40 für  $\xi := \gamma_{x_0 x}(t)$

*Beweis.* Nach der Kettenregel ist  $g^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^m D_i f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot (x_i - x_0) \quad \forall t \in [0, 1]$  durch Induktion über  $l$  folgt ebenso mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$g^{(l)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^n D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot (x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_l} - x_{0i_l}) \quad (2)$$

für alle  $t \in [0, 1]$  gilt zum Beweis von (1) müssen wir nur noch die Summanden in (2) geeignet zusammenfassen. Dabei nutzen wir:

**Hilfssatz**

Seien  $U \in \mathbb{R}^n$  offen,  $2 \leq k \in \mathbb{N}, f \in C^k(U)$  und  $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, n\}^k$ . Dann gilt für jede Permutation  $\pi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\} : D_{i_n} D_{i_{n-1}} \dots D_{i_2} D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} D_{i_{\pi(k-1)}} \dots D_{i_{\pi(1)}} f$ . Der Beweis ist leicht durch Induktion über  $k$  zu führen. Für  $k = 2$  geht der Hilfssatz in Satz 29 über, nach Induktionsvoraussetzung ist die Vertauschung benachbarter  $D_\gamma \cdot D_\mu$  erlaubt, der Induktionsschritt kann also vollzogen werden, wenn man berücksichtigt, dass sich jede Permutation als Hintereinanderausführung solcher Vertauschungen beschreiben lässt  $\square$

Der Hilfssatz besagt, dass in Gl (2) alle Summanden  $D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot (x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_l} - x_{0i_l})$  in denen jeder Index  $\gamma$  genau  $a_\gamma$ -mal auftritt. ( $1 \leq \gamma \leq n, a_1 + \dots + a_n = l, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ) folgt aus (2):  $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
g^{(l)}(t) &= \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^n D_{i_1} \dots D_{i_l} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot \prod_{\alpha=1}^n (x_\gamma - x_{0\gamma})^{\alpha_\gamma} \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{l!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot \prod_{\alpha=1}^n (x_\gamma - x_{0\gamma})^{\alpha_\gamma} \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} l! \frac{D^\alpha f(\gamma_{x_0 x}(t))}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha
\end{aligned}$$

Damit ist sowohl (1), als auch der Taylorsche Satz bewiesen.

**41 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $k$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Für  $r > 0$  gelte  $B(x_0, r) \subset U$ . Dann gibt es eine Funktion  $\eta : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\eta(x_0) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^k} = 0$ . Sodass  $\forall x \in B(x_0, r)$

$$f(x) = \sum_{l=0}^k \left( \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \cdot (x - x_0)^\alpha \right) \eta(x)$$

**Spezialfall für  $k = 2$**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f \in C^2(U)$ . Dann gibt es  $c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch, sodass die durch

$$f(x) = c + \langle a, (x - x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - x_0), A \cdot (x - x_0) \rangle + \eta(x) \quad \forall x \in U$$

definierte Funktion  $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}$  die Eigenschaften

$$\eta(x_0) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^2} = 0$$

hat.

**Hesse Matrix:** Sind  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist 2-mal stetig partiell differenzierbar, so heißt die symmetrische Matrix :

$$\text{Hess} f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

**Hessesche Matrix von  $f$  in  $x_0$**

## §9 Lokale Extrema

**Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

- a)  $f$  hat in  $x_0$  eine *lokales Minimum* (bzw *lokales Maximum*), wenn es eine offene Umgebung  $x_0 \in V \subset U$  gibt mit  $\forall x \in V : f(x) \geq f(x_0)$  ( bzw.  $\leq$ ) Falls man sogar  $V$  so wählen kann, dass

$$\forall x \in V : f(x) > f(x_0) \text{ ( bzw. } < \text{)}$$

so spricht man von einem *isoliertes lokal Minimum* ( bzw. *Maximum*) von  $f$

- b) Die Bezeichnung *(isoliertes) lokales Extremum* bezeichnet sowohl Minima als auch Maxima

**42 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  habe in  $x_0 \in U$  ein lokales Extremum und sei partiell differenzierbar in  $x_0$ . Dann gilt  $\text{grad } f(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = 0$

*Beweis.* Sei  $r > 0$  sodass  $B(x_0, r) \subset U$  gilt. Sei ferner  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Standardbasis. Dann ist für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  die Funktion  $g_{ij} : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(x_0 + t \cdot e_j)$  in der Stelle  $t = 0$  durch  $g'_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$  differenzierbar und nimmt dort ein Extremum an. Aus Analysis 1 :  $g'_j(0) = 0$   $\square$

**Definition:** Ist  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix und  $Q_A$  die durch  $A$  gegebene quadratische Form auf  $\mathbb{R}^n$  so nennt man  $A$ :

a) **positiv definit** ( $A \gg 0$ ), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle > 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

b) **positiv semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle \geq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

c) **negativ definit** ( $A \ll 0$ ), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle < 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

d) **negativ semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle \leq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

e) **indefinit**, falls Vektoren  $\zeta, \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  existieren mit:

$$Q_A(\zeta) < 0; \quad Q_A(\bar{\zeta}) > 0$$

Zu jeder symmetrischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  und  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  mit

$$a) \quad A \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$b) \quad \forall i, j = 1, \dots, n : \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

Die Zahlen  $\lambda_j$  heißen *Eigenwerte von  $A$* , die  $x_i$  sind *Eigenvektoren von  $A$*  zum Eigenwert  $\lambda_j$ . Bezüglich einer Orthonormalbasis hat, die durch  $A$  gegebene quadratische Form die Gestalt:

$$\begin{aligned} \zeta = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j &\implies Q_A(\zeta) = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, A \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \left\langle v_i, \underbrace{A v_j}_{=\lambda_j v_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \end{aligned}$$

### Lemma

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann gilt:

- a)  $A$  ist positiv definit genau dann, wenn  $\lambda_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- b)  $A$  ist positiv semidefinit genau dann, wenn  $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- c)  $A$  ist negativ definit genau dann, wenn  $\lambda_j < 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- d)  $A$  ist negativ semidefinit genau dann, wenn  $\lambda_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- e)  $A$  ist indefinit genau dann, wenn es  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gibt mit  $\lambda_i, \dots, \lambda_j < 0$

**43 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$  Funktion, also zwei Mal stetig differenzierbar mit  $\text{grad} f(x_0) = 0$ . Dann gilt:

- a) Ist  $\text{Hess} f(x_0) \gg 0$ , so hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein isoliertes lokales Minimum
- b) Ist  $\text{Hess} f(x_0) \ll 0$ , so hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein isoliertes lokales Maximum
- c) Ist  $\text{Hess} f(x_0)$  indefinit, so hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  kein lokales Maximum

*Beweis.* Sei  $A := \text{Hess} f(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $D_a f$  eine  $C^2$  Funktion ist, ist  $A$  symmetrisch, welche nach Voraussetzung ist  $A$  positiv definit.

Die durch  $A$  gegebene quadratische Form  $Q_A$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ . Nimmt also auf dem Kompaktum:

$$S := \partial B(0, 1) = \{\zeta \in \mathbb{R}^n : |\zeta| = 1\}$$

ein Minimum an. Es gibt also  $\xi \in S$  mit  $Q_A(\xi) \leq Q_A(\zeta) \forall \zeta \in S$ , wobei positiv Definitheit bedeutet:  $4\varepsilon = Q_A(\xi) > 0$ . Daraus folgt

$$Q_A(\zeta) \geq 4\varepsilon |\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

da:

$$\begin{aligned} Q_A(S) &= Q_A\left(\frac{|\zeta|}{|\zeta|}\zeta\right) \\ &= |\zeta|^2 \underbrace{Q_A\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}_{\geq 4\varepsilon} \geq |\zeta|^2 4\varepsilon \end{aligned}$$

Aus dem Korollar zum Satz 4.1 folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \langle \text{grad} f(x_0), (x - x_0) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\langle x - x_0, A(x - x_0) \rangle}_{= Q_A(x - x_0)} + \eta(x) \end{aligned}$$

a) Siehe oben

b) Ist  $\text{Hess} f(x_0) \ll 0$ , so ist

$$-\text{Hess} f(x_0) = \text{Hess}(-f)(x_0) \ll 0$$

Aus a) folgt:  $-f$  hat in  $x_0$  ein isoliertes lokales Minimum

c) Ist  $A = \text{Hess} f(x_0)$  indefinit, so gibt es  $\zeta, \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^n$  mit  $|\zeta| = |\bar{\zeta}| = 1$  und  $Q_A(\zeta) =: \alpha > 0$  und  $Q_A(\bar{\zeta}) =: \beta < 0$

Für genügend kleine  $|t| \ll 1$  liegen die Punkte  $x_0 + t\zeta, x_0 + t\bar{\zeta} \in U$  und es gilt:

$$|\eta(x_0 + t\zeta)|$$

□



## §10 Implizite Funktionen

Die zentrale Fragestellung dieses Paragraphen ist folgende: Gegeben sei eine Gleichung (bzw. ein System von  $m$  Gleichungen)  $F(x, y) = 0$  durch die Abbildung  $F : U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  sowie eine Lösung  $(a, b)$ :  $F(a, b) = 0$ . Gibt es dann eine Umgebung  $V_1 \times V_2 \ni (a, b)$  in  $U_1 \times U_2$  und eine Abbildung  $g : V_1 \rightarrow V_2$  mit  $F(x, g(x)) = 0 \forall x \in V_1$ ? Und wenn ja, ist dieses  $g$  eindeutig? In diesem Fall sagen wir, dass die Abbildung  $g$  durch die Gleichung  $F(x, y) = 0$  *implizit definiert* ist.

**44 Satz:** Seien  $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ ,  $U_2 \subset \mathbb{R}^m$  offene Mengen,  $a \in U_1, b \in U_2$  und sei  $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(x, y) \mapsto F(x, y)$  eine differenzierbare Funktion mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = 0$$

Es gebe eine differenzierbare Funktion  $g : U_1 \rightarrow U_2$  mit  $g(a) = b$  und  $F(x, g(x)) = 0 \forall x \in U_1$ . Dann gilt:  $\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

*Beweis.* Bezeichne mit  $\phi$  die differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned}\phi : U_1 &\rightarrow U_1 \times U_2 \\ x &\mapsto (x, g(x))\end{aligned}$$

So ist die Verkettung  $F \circ \phi$  die konstante Nullfunktion ist. Aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= D(F \circ \phi)(x) \\ &= DF(\phi(x)) \cdot D\phi(x) \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, g(x)), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, g(x)), \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \dots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) & \dots & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(x), \right) \end{aligned}$$

Für  $x = a$  hat man aus  $g(a) = b$  und  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$  also:  $\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} \cdot (\text{die obige Matrix})$$

□

In Verbindung mit der nicht-Entartungsbedingung  $\frac{\partial F}{\partial g}(a, b) \neq 0$ , kann man bereits aus der Stetigkeit der impliziert definition Funktion  $g$  auf  $f$  die Differenzierbarkeit schließen. Denn es gilt:

**45 Satz:** Seien  $a \in \mathbb{R}^k, b \in \mathbb{R}, a, r_2 > 0$  sowie  $U_1 = B(a, r_1) \subset \mathbb{R}^k, U_2 := B(b, r_2)$  Sei ferner  $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $(a, b)$  differenzierbare Funktion mit  $F(a, b) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$  Ist dann  $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetige Funktion mit  $g(a) = b, g(U_1) \subset U_2 : F(x, g(x)) = 0$  so folgt:  $g$  ist an der Stelle  $a$  differenzierbar und es gilt:  $\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

*Beweis.* Es seien  $A := \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) := \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(a, b), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(a, b) \right)$  und  $B := \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$  Nach Definition der Differenzierbarkeit von  $F$  in  $(a, b)$  hat die durch

$$F(x, y) = F(a, b) + A \cdot (x - a) + B \cdot (y - b) + \varphi(x, y); \forall x, y \in U_1 \times U_2 \quad (1)$$

definiert Fehlerfunktion  $\varphi : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Eigenschaft

$$\varphi(a, b) = 0; \lim_{\substack{a \neq x \rightarrow a \\ b \neq y \rightarrow b}} \frac{\varphi(x, y)}{|x - a| + |y - b|} = 0 \quad (2)$$

Wegen  $F(x, g(x)) = 0$  auf  $U_1$  folgt aus (1) in Verbindung mit  $F(a, b) = 0$  die Gleichung

$$g(x) = b - \frac{1}{B} \cdot A \cdot (x - a) - \frac{1}{B} \cdot \varphi(x, g(x)) \quad \forall x \in U_1 \quad (3)$$

so dass, wegen  $g(a) = b$  zum Beweis des Satzes nur noch zu zeigen ist:

**Behauptung 1:** Die durch  $\psi := \frac{1}{B} \varphi(x, g(x))$  definiert Fehlerfunktion  $\psi : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Eigenschaft  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{\varphi(x)}{|x - a|} = 0$  Wir werden den Beweis der Behauptung 1 auf folgendes Resultat zurückführen:

**Behauptung 2:** Die Funktion  $g$  ist Lipschitz-stetig in  $a$ , das heißt

$$\exists 0 < \delta < r_1, \exists L > 0 : |g(x) - g(a)| \leq L \cdot |x - a| \quad \forall x \in B(a, \delta) \subset U_1$$

**Beweis der Behauptung 2:** Sei  $c_1 := \frac{|A|}{|B|}$  die euklidische Länge des Vektors  $\frac{1}{B} \cdot A \in \mathbb{R}^k$  und sei  $c_2 := \frac{1}{|B|}$ . Wegen (2) existiert ein  $0 < \delta_1 < \min\{r_1, r_2\}$  derart, dass  $|\varphi(x, y)| \leq \frac{1}{2c_2} (|x - a| + |y - b|) \quad \forall x \in B(a, \delta)$

und  $\forall y \in B(b, \delta_1)$  gilt. Da die Funktion  $g$  mit  $g(a) = b$  an der Stelle  $a$  stetig ist, können wir ein  $0 < \delta < \delta_1$ , so wählen, dass  $g(x) \in B(b, \delta_1) \forall x \in B(a, \delta)$  erfüllt ist, Daraus folgt dann  $|\varphi(x, g(x))| \leq \frac{1}{2c_2} (|x - a| + |g(x) - g(a)|) \forall x \in B(a, \delta)$  und in Verbindung mit (3) erhält man  $|g(x) - g(a)| \leq c_1|x - a| + c_2|\varphi(x, g(x))| \leq c_1|x - a| + \frac{1}{2} (|x - a| + |g(x) - g(a)|) \forall x \in B(a, \delta)$  Was zu  $|g(x) - g(a)| \leq (2c_1 + 1)|x - a| =: L|x - a| \forall x \in B(a, \delta)$ . **Beweis der Behauptung 1:** Wir fixieren  $\delta > 0$  und  $L > 0$  wie in Behauptung 2. Ist  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben, so können wir wie beim Beweis der Behauptung 2 im Hinblick auf (2) und die Stetigkeit von  $g$  ein  $0 < \delta' < \delta$  so wählen, dass die Abschätzung

$$|\psi(x)| = c_2 |\varphi(x, g(x))| < \frac{\varepsilon}{1+L} (|x - a| + |g(x) - g(a)|) \forall x \in B(a, \delta')$$

gültig ist. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von  $g$  in  $a$  ergibt sich sofort

$$|\psi| < \frac{\varepsilon}{1+L} (|x - a| + |g(x) - g(a)|) \leq \frac{\varepsilon}{1+L} (|x - a| + L|x - a|) \varepsilon|x - a| \forall x \in B(a, \delta')$$

womit sowohl Behauptung 1 als auch Satz 45 bewiesen wären.  $\square$

Ist in der Situation des Satzes 45 die Funktion  $F$  sogar *stetig differenzierbar* auf  $U_1 \times U_2$ , so impliziert das Nicht-Verschwinden von  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$  die Existenz einer offenen Umgebung  $(a, b) \subset V_1 \times V_2 \subset U_1 \times U_2$  des Punktes  $(a, b)$  mit  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in V_1 \times V_2$ . In diesem Fall ist die implizit definierte Funktion  $g$  aufgrund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von  $F$  sogar *differenzierbar* auf  $V_1 = V_1(a)$ ! In erster Linie bemerkenswert ist allerdings eine andere Tatsache: Die stetige Differenzierbarkeit von  $F$  auf  $U_1 \times U_2$  in Verbindung mit der Nicht-Entartungsbedingung  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$  garantiert die *lokale Existenz* stetiger durch  $F(x, y) = 0$  implizit definierte Funktion wie in Satz 45.

**46 Satz:** Seien  $a \in \mathbb{R}^k, b \in \mathbb{R}, r_1, r_2 > 0$  sowie  $U_1 := B(a, r_1), U_2 := B(b, r_2) \subset \mathbb{R}$  Sei ferner

$$\begin{aligned} F : U_1 \times U_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbar Funktion mit  $F(a, b) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ . Dann gibt es offene Umgebung  $V_1 = V_1(a) \subset U_1, V_2 = V_2(b) \subset U_2$  und eine stetige Funktion  $g : V_1 \rightarrow V_2$  mit  $g(a) = b, F(x, g(x)) = 0 \forall x \in V_1$ , welche die Auflösung der Gleichung  $F(x, y) = 0$  nach  $y$  auf  $V_1 \times V_2$  ermöglicht, insofern als gilt  $\forall (x, y) \in V_1 \times V_2$  mit  $F(x, y) = 0$  folgt  $y = g(x)$ .

### Bemerkung

Wie oben erklärt, kann man durch eventuelle Verkleinerung von  $V_1 = V_1(a)$  erreichen, dass  $g$  auf  $V_1$  stetig differenzierbar ist. Nach Satz 44 ist das Differential von  $g$  in  $x \in V_1$  durch

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$$

$\forall j = 1, \dots, k$  festgelegt.

*Beweis.* Unser Beweis enthält den Kern Newton Verfahrens und den Kern des Fixpunkterhaltes dynamische System.  $\square$



# Index

abgeschlossene Hülle, 5

Dreiecksgleichung, 3

Häufungspunkt, 8

Häufungsspunkt, 6

innerer Punkt, 6

nominierter Vektorraum, 3

Norm, 3

Skalarprodukt, 2

Vektorraum, 2