Analysis 2 (Prof. Scherbina) Notizen

Sisam Khanal

9. Mai 2024

Aktuelle Notizen unter:

https://thisissisam.github.io/notes/ana2/main.pdf

§1 Der $\mathbb{R}^n$ und seine Topologie

Erklärt man auf der Menge $R^n := \{\alpha = (x_1, x_2, x_3 \ldots) \, | x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \ldots n\}$ aller geordneten n-Tupel reeller Zahlen eine Addition komponenteweise durch $x + y = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n$ für $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2 \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$ und eine Multiplikation mit reellen Skalaren. So erhält $\mathbb{R}^n$ die Structure eines n-dimensionalen Vecktorraums über $\mathbb{R}$; eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist durch die Vektoren $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \ldots e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ gegeben. Man bezeichent die Familie $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ als *Standardbasis* oder auch kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$

euklidisches Skalarproduckt: Das euklidisches Skalarproduckt auf $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $\langle \circ, \circ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{1=1}^{n} x_i y_i$ die je zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ die reellen Zahl $\langle x, y \rangle$zugeordnet, welsche man *euklidisches* Skalarproduckt von x und y nennt.

Eine weitere gebräuchliche Schreibweise für das euklidische Skalarproduckt zwei Vektor ist $\langle x, y \rangle =: x \cdot y$ Die wichtigsten Eigenschaft des euklidische Skalarproduckt nennt der folgende Satz, auf dessen trivialen Beweis wir versichten werden.

Satz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\langle (x + z), y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$

b) $\langle (\alpha \cdot x), y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

c) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

d) $\langle x, x \rangle$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Euklidische Norm: Sei $z \in \mathbb{R}^n$, dann nennt man die Zahl $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, die euklidische Norm von x . Es folgt

a) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \iff x = 0$

b) $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$

c) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Schwarzsche Ungleichung: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle |x, y| \rangle \leq |x| \, |y|$
(wurde in LA2 beweiesen)

Eigenschaft von Norm auf Vektorraum

Allgemein nennt man jede Abbildung $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ auf einem R-Vektorraum V eine Norm auf V, wenn sie die folgende Eigenschaften haben

a) $\forall x \in V; \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$

b) $\forall x \in V, \forall a \in \mathbb{R} \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

c) $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Man nennt dann das Tupel $(V, \| \cdot \|)$ einem nominierten Vektorraum
Dies wurde auch in LA2 bewiesen

Beispiel

a) $V := \mathbb{R}^n$ und sei $\|.\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$. $x = (x_1, x_2 \ldots x_n) \to \|x\|_\infty := max \{|x_1|, |x_2|, |x_n|\}$. Dann ist $\|.\|_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}_n$ nennt.

b) Der Vektorraum V aller linearen Abbildungen $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird durch die Definition $\|L\| := sum \{|L(x)| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$

c) Fehlt

euklidische Metrik: Die Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y) := |x - y|$ heißt euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$

Eigenschaften der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^n$ sind:

Eigenschaften der euklidischen Metrik: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gibt:

a) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

c) $d(x, y) \geq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksgleichung)

Metrik auf eine Menge: Eine Metrik auf eine Menge A ist eine Abbildung $f : A \times A \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft a)- c) von Satz 1.16

Beispiel

Sei A beliebige Menge und $f : A \times A \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$p(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{falls} x \neq y \\ 0, & \text{falls} x = y \end{cases}$$

Kugel: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und sei $r > 0$. Dann heißt die Menge $B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$ als die *Kugel um a mit dem Radius* r .

Offene und abgeschlosse Menge: Sei $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge

a) $\mathcal{S}$ heißt *offen*, wenn $\forall a \in \mathcal{S}\ \exists r > 0$ sodass $B(a,r) < \mathcal{S}$

b) $\mathcal{S}$ heißt *abgeschlossen* , wenn $\mathbb{R}^n\ \mathcal{S}$ offen ist.

Sätze über offene Menge:

a) $\mathbb{R}^n$ und die leere Menge $\emptyset$ sind offen.

b) Sei $J \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und sei $\{U_i : i \in J\}$ eine Familie offener Menge $U_i \subset \mathbb{R}^n$ Dann ist die Menge $V := \bigcup_{i \in J} U_i$ ebenfalls offen.

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $seine U_1, U_2, \ldots, U_m$ offene Menge in $\mathbb{R}^n$ Dann ist die Menge $W := \bigcap_{i=1}^{m} U_i$ ebenfalls offen

Beweis. a) Trivial

b) Sei $a \in V \implies \exists i \in J$ sodass $a \in U_i$ U_i offen $\implies r > 0$ sodass $B(a,r) \subset U_i \subset V \implies V - offen$

c) Sei $a \in W \implies a \in U_i, i = 1, 2 \ldots, m$. $U_i - offen \implies r_i > 0$ sodass $B(a, r_i) \subset U_i$. Sei $r := min\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} > 0$ Dann $\forall i = 1, 2, \ldots, m$ gilt $B(a,r) \subset B(a, r_i) \subset V_i \implies B(a,r) \subset \bigcap_{i=1}^{m} U_i = w \implies w - offen$

□

Aus Satz 1.10 und aus der Definition von abgeschlossen Mengen folgt direkt

Weitere Eigenschaften von Menge:

a) $\mathbb{R}^n$ und die leere Menge $\emptyset$ sind abgeschlossen

b) Sei $J \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und sei $\{A_i : i \in J\}$ eine Familie abgeschlossner Menge $A_i \subset \mathbb{R}^n$ .Dann ist die Menge $A := \bigcap\limits_{i\in J} A_i \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls abgeschlossen.

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, A_2, \dots A_m$ abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Menge $L := \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls abgeschlossen. $\bigcap\limits_{i\in J} (\mathbb{R}^n\ A_i) = \mathbb{R}^n \bigcup\limits_{i\in J} A_i$ und $\bigcup\limits_{i\in J} (\mathbb{R}^n A_i) = \mathbb{R}^n \bigcap\limits_{i\in J} A_i$

Umgebung: Ist $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so nennt man jede offene Menge $U \in \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ eine *offene Umgebung von a*. Für $\varepsilon > 0$ bezeichnet man die Kugel $B(a, \varepsilon)$ auch als ε *-Umgebung* von a

Definition:

a) Man bezeichnet die Menge $\overline{A} := \bigcap B$ mit $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, $B - abgeschlossen$ als den *Abschlüß* oder *abgeschlossene Hülle von A*

b) Die Menge $\mathring{A} \overset{\mathrm{u}}{=} uU$ mit $u \in U$ und $U - offen$ heißt *offener Kern* von A

c) Der Rand von A ist gegeben durch $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$

Bemerkung

Nach Satz 1.10 und 1.11 ist $\overline{A}$ stets abgeschlossen und $\mathring{A}$ stets offen. $\mathring{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die $\overline{A}$ enthält, $\mathring{A}$ ist die größte in A enthälte offene Teilmenge von A . Insbosendere gilt $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

Beisiele

a) Sei $A = [0, 1) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Dann ist $\overline{A} = (0, 1) \times (0, 1), \overline{A} = [0, 1] \times [0, 1], \partial A = 0, 1 \times [0, 1]$ und $\partial A = 0, 1 \times [0, 1] \cup [0, 1] \times 0, 1$

b) $A = B(0, 1) \cup (B(0, 2) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$ und $\overline{A} = \overline{B(0, 2)}, \mathring{A} = B(0, 1), \partial A = B(0, 2) \setminus B(0, 1)$

Eigenschaften der abgeschlossenen Hülle und offener Kern:

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

a) $x \in \partial A \iff$ jede offene Umgebug des Punktes x sowhol A als auch $\mathbb{R}^n \setminus A$ trifft. (Das heißt sowhol mit A, als auch mit $\mathbb{R}^n \setminus A$ einen nicht leeren Durchschnitt hat.)

b) $A \setminus \partial A = \mathring{A}$

c) $A \bigcup \partial = \overline{A}$

d) ∂A ist abgeschlossen.

innerer Punkt: Sei $A \in \mathbb{R}^n$.

a) Man nennt $x \in A$ einen inneren Punkt der Menge A , wenn es eine offene Umgebung $U = U(x)$ des Punktes x gibt, so dass $U \subset A$ gilt.

b) Mann nennt $y \in \mathbb{R}^n$ einen Häufungsspunkt der Menge A, wenn in jeder offenen Umgebung $U = U(y)$ des Punktes y ein von y verschiedener Punkt der Menge A liegt, dass heißt wenn gilt:

$$\forall U = U(y) \text{ offen } \exists x \in A \bigcup U : x \neq y$$

Die Menge der Häufungsspunkt von A wird $HP(A)$

8 Satz: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, dann gilt:

a) $\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ ist inerer Punkt con A}\}$

b) $\overline{A} = A \bigcup HP(A)$

Beweis. a) Ist $x \in \mathring{A}$ so it definitions gemäß $x \in U \bigcup : U \subset A, U-$ offen also existiert mindestens eine offene Umgebung $V = V(x)$ des Punktes x mit $V \subset A \implies x$ innerer Punkt von A ist. Ist anderseites x innerer Punkt von A , so existiert eine offene Umgebung $V = V(x)$ des Punktes x mit $x \in V \subset A \implies$ insbesondere x ist dann Element der Vereinigung. $\bigcup U : U \subset A, U-$ offen, das heißt $x \in \overline{A}$.

b) Wegen $\overline{A} A \bigcup \partial A = A \bigcup (\partial A \setminus A)$ und $HP(A) \bigcup = A \bigcup (HA(A) \setminus A)$ folgt die Behauptung aus der einfachen Beobachtung, dass alle nicht in A gelegene Randpunkte von A zwangsläufig Häufungsspunkt von A sind und umgekehrt alle nicht in A gelegenen Häufungsspunkt von A naturliche Randpunkte von A sind.

□

§2 Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$

Definition: Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Punkten im $\mathbb{R}^n$. (x_k) heißt *konvergent* gegeben $a \in \mathbb{R}^n$ (in Zeichnen: $\lim_{h\to\infty} x_k = a$), wenn zu jeder offenen Umgebung $U = U(a)$ des Punktes a ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in U \forall x \geq k_0$ gibt.

Bemerkung

Definition $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ sodass $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$

9 Satz: Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge und sei $a \in \mathbb{R}^n$; es seien Komponentschreibweise $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2} \cdots x_{k_n}) \forall k \in \mathbb{N}, a = (a_1, a_2 \cdots a_n)$, Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \iff \lim_{k\to\infty} x_{k_j} a_j \forall j = 1, 2 \cdots, n$$

Beweis. " $\Longrightarrow$ " $\forall \varepsilon > 0$ sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so gesählt, dass $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$ gilt. Für beliebiges $j \in \{1, 2, \cdots n\}$ ist dann

$$\begin{aligned}
|x_{k_j} - a_j| &= \sqrt{(x_{k_j} - a_j)^2} \\
&\leq \sqrt{(x_{k_1} - a_1)^2 + (x_{k_2} - a_2)^2 \cdots (x_{k_n} - a_n)^2} \\
&= |x_k - a| \\
&< \varepsilon \implies \lim_{k\to\infty} x_j = a
\end{aligned}$$

" $\Longleftarrow$ " $\forall\varepsilon > 0$ wähle mann $\forall j \in \{1, 2, \cdots n\}$, so gilt $\forall k \geq k_0$

$$\begin{aligned}\left|x_{k_j} - a_j\right| &= \sqrt{\left(x_{k_1} - a_1\right)^2 + \left(x_{k_2} - a_2\right)^2 \cdots \left(x_{k_n} - a_n\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2} \\ &= \varepsilon \implies \lim_{k\to\infty} x_k = a\end{aligned}$$

□

Definition: Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge. Man nennt $a \in \mathbb{R}^n$ einen Häufungsspunkt der Folge (x_k), falls es eine Teilfolge $\left(x_{k_y}\right) \subset (x_k)$ mit $\lim_{y\to\infty} x_{k_y} = a$ gibt.

10 Satz: Für eine Mengne $A \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist abgeschlossen.

b) Der Grenzwert einer jeden Folge $(x_k) \subset A$, die als Punktfolge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert, liegt in A

Beweis. 1) $\implies$ 2) Sei A abgeschlossen und sei $(x_k) \subset A$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$. Falls x_n eine konsatante Teilfolge $\left(x_{k_\gamma}\right) \subset (x_k)$, so gilt $x_{k_\gamma} = a \forall\gamma \in \mathbb{N}$, und es folgt $a \in A$ wegen $\left(x_{k_\gamma}\right) \subset A \implies a \in A$ Hat (x_k) keine konsatante Teilfolge, so gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_k \neq a$ $\forall k \geq k_0$ gilt, offenbar ist a ein Häufungspunkt der Menge $\{x_k : k \geq k_0\} \subset A$ und deshalb auch $a \in HP(A)$. Nach Satz 8 ist $HP(A) \subset \overline{A}$, aber $\overline{A} = A$, denn A is abgeschlossen. Deshalb $a \in A$
2) $\implies$ 1) Sei $x \in HP(A)$. Dann gibt es eine Folge $(x_k) \subset A, x_k \neq x$ $\forall x \in \mathbb{N}$, so dass $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ gilt. Nach Voraussetzung liegt der Grenzwert jeder jonvergente Folge von Punkten aus A ebenfalls in A, und es folgt $x \in A$. Dann ist $HP(A) \subset A$ gezeigt, also ist $A = A \cup HP(A) = \overline{A}$, das heißt $A - abgeschlossen$ □

Definition: Eine Folge $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es $\forall\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$,s.d $|x_n - x_m| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq k_0$

11 Satz: Jede konvergente Folge $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ ist eine *Cauchy-Folge*

12 Satz: Sei $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ eine Folge, es sei $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}) \forall\, k \in \mathbb{N}$. Dann ist (x_k) eine *Cauchy-Folge* genau dann, wenn jede der Folgen x_{k_j}, $j = 1, 2, \cdots, n$ eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$ ist.

Beweis. " $\implies$ " (x_k) ist eine Cauchy-Folge $\implies$ $\forall\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ s.d $|x_k - x_m| < \varepsilon$ $\forall k, m \geq k_0$ $\implies$ $\forall 1 \leq j \leq n$
" $\Longleftarrow$ " $\left(x_{k_j}\right)$-eine Cauchy-Folge $\forall 1 \leq j \leq \implies$ $\forall\varepsilon > 0 \exists k_{0_j} \in \mathbb{N}$ s.d $\left|x_{k_j} - s_{m_j}\right| < \varepsilon$ $\forall k, m \geq$

k_{0_j}. Sei $k_0 := max\{k_{0_1}, \cdots, k_{0_n}\} \in \mathbb{N}$. Dann ist $|x_k - x_m| = \sqrt{(x_{k_1} - x_{m_1})^2 + \cdots + (x_{k_n} - x_{m_n})^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon \; \forall k, m \geq k_0 \implies (x_k)$-eine Cauchy-Folge. $\square$

13 Satz: Jede Cauchy-Folge im $\mathbb{R}^n$ ist konvergent, das heißt $\mathbb{R}^n$ ist vollstandig.

§2 Funktionen, Abbildungen, Stetigkeit

Definition: Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* and der Stell $a \in U$, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0$ s.d $|x - a| < \delta, x \in U \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
f heißt *stetig* (auf U), wenn f in jedem Punkt $a \in U$ stetig ist.

Wir verallgemeinern diese Stetigkeitsdefinition sogleich auf Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^m$. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \subset U \to \mathbb{R}^m$ ist gegeben durch ein $m-$Tupel $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ von Funktionen $f_j : U \to \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m \; \forall x \in U, f(x) \in \mathbb{R}^m,$ d.h $f(x) = (f(x_1), \cdots, f(x_m))$

Definition: $f : \mathbb{R}^n \subset U \to \mathbb{R}^m$ ist *an der stelle* $a \in U$ *stetig*, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d $x \in U, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. f heißt *stetig* (auf U), wenn $\forall a \in U$, f in a stetig ist.

14 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ ein Abbildung. f ist stetig in a, genau dann, wenn jede der Komponentenfunktionen $f_j : U \to \mathbb{R}, j = 1, 2, \cdots, m$ stetig in a ist.

Beweis. Der Beweis beruht wie der Beweis des Sates 9 auf der Äquivalenz der Maximumnorm auf $\mathbb{R}^m$ zur euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^m$, genauer auf der Beziehung

$$\|x\|_\infty := max \left\{ |x_1|, \cdots, |x_m| \leq \sqrt{m} \|x\|_\infty \right\} \; \forall x \in \mathbb{R}^m$$

□

15 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a \in U$. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann in a stetig, wenn zu jeder offenen umgebung $F = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$ des Punktes $f(a) inn \mathbb{R}^m$ eine offene Umgebug $W = W(a) \subset \mathbb{R}^n$ des Punktes $a \in V$ existiert, so dass $f(W) = \{f(x) := x \in U \cap W\} \subset V$ gilt.

Beweis. " $\implies$ "f ist stetig. sei $V = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Umgebung des Punktes a $\implies \exists \varepsilon > 0$,s.d $B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$. f ist stetig in a $\implies \exists \delta > 0$,s.d. $x \in \underbrace{B(a, \delta) \cap U}_{:=W}$

$\implies f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$

" $\impliedby$ " Sei $\forall V(f(a))$-offen, $\exists W(a)$-offen s.d. $f(W) \subset V$ gilt. $\forall \varepsilon > 0$ sei $V = N(f(a), \varepsilon)$,dann $\exists W(a)$-offen s.d. $f(W) \subset B(f(a), \varepsilon) \implies \exists \delta > 0$ s.d. $B(a, \delta) \subset W$
$\implies f(B(a, \varepsilon) \cap U \subset B(f(a), \varepsilon) \implies f$ ist stetig in a ☐

16 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f ist genau dann auf U stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(V) := \{x \in U : f(x) \in V\}$ einer jeden offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ unter f selbst wieder offen ist.

Beweis. " $\implies$ " f ist stetig auf U. Sei V in $\mathbb{R}^n$ offen. Sei $a \in f^{-1}(V)$,d.h. $f(a) \in V \xrightarrow{Satz15} \exists W(a) \subset \mathbb{R}^n$ offen, s.d $f(W(a) \cap V) \subset V \implies \exists \delta > 0$ s.d. $B(a, \delta) \subset W(a) \implies W(a) \subset f^{-1}(V) \implies B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$
" $\implies$ " Für $a \in f^{-1}(V)$ sei $W(a) := f^{-1}(V) \xrightarrow{Satz15} f$ stetig in a ☐

Für stetige Abbildung des $\mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}$ gelten Rechenregeln, die denen für das Rechnen mit stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entsprechen und die völlig analog zu beweisen sind:

17 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ seien beide stetig an der Stelle $a \in U$, dann gilt :

a) Die Funktion $(f + g) : U \to \mathbb{R}$ ist stetig in a

b) Die Funktion $(f \cdot g) : U \to \mathbb{R}$ ist stetig in a

c) Falls $g(a) \neq 0$ existiert eine offene Umgebung $V = V(g)$ mit $g(x) \neq 0 \; \forall x \in V$, die Funktion $\left(\frac{f}{g}\right) : V \to \mathbb{R}$ ist stetig in a.

Bemerkung

Die Übertragung des Sates 17 auf dem Fall $\mathbb{R}^m$-wertiger Abbildungen ist nicht uneingeschränkt möglich. Folgende Version auf deren Beweis wie ebenfalls versichten können, ist aber gültig.

18 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ sei stetig in a. Dann gilt:

a) Ist die Abbildung $g : V \to \mathbb{R}^m$ stetig in a, so ist auch die Abbildung $(f + g) : U \to \mathbb{R}$ ist stetig in a .

b) Ist die Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ stetig in a, so ist auch die Abbildung $(f \cdot g) : U \to \mathbb{R}$ ist stetig in a .

c) Ist die Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ stetig in a und $g(a) \neq 0$, so existiert eine offene Umgebung $V = V(a)$ mit $g(x) \neq 0 \; \forall x \in V$; die Abbildung $\left(\frac{f}{g}\right) : V \to \mathbb{R}$ ist stetig in a.

Auch die Komposition stetiger Abbildungen liefert wieder eine stetige Abbildung:

19 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und seien $f : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ sowie $g : V \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen für die gilt: f ist stetig in $x_0 \in V, g$ ist stetig in $y_0 = f(x_0) \in V$ .Dann ist die Abbildung $(g \cdot f) : U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ stetig in x_0

Beweis. Ist $W = W((g \cdot f)(x_0))$ eine offene Umgebung des Punktes $|g \cdot f| = g(y_0) \in \mathbb{R}^k$, so gibt es wegen der Stetigkeitvon g an der Stell y_0 nach Satz 15 eine offene y_0 -Umgebung $W_1 = W(y_0) = W(f(x_0)) \subset \mathbb{R}^m$ mit $g(w_1) \subset W$. Ebenso impliziert die Stetigkeit von f in x_0 die Existenz einer offenen Umgebung $W_2 = W_2(x_0)$ mit $f(W_2) \subset W_1$. Offenbar ist dann $(g \cdot f)(W_2) \subset g(f(W_2)) \subset g(W_1) \subset W$, und die Stetigkeit von $(g \cdot f)$ in x_0 sit beweisen □

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und sei (f_k) ein Folge von Abbildungen $f_k : D \to \mathbb{R}^m,\ k \in \mathbb{N}$.

a) (f_k) heißt auf D *gleichmäßig konvergent* gegen $f : D \to \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \; \forall x \in D, \; \forall k \geq k_0$$

b) (f_k) heißt auf D *lokal-gleichmäßig konvergent* gegen $f : D \to \mathbb{R}^n$, wenn es $\forall a \in D \; \exists V = V(a) \subset \mathbb{R}^n$-offen s.d. die Folge $(f_k|_{D \cap V})$ auf $D \cap V$ gleichmäßig gegen $f|_{D \cap V}$ konvergiert.

Bemerkung

b) $\not\Longrightarrow$ a) . *Gegenbeispiel*: Sei $D = (0, +\infty)$ und $f_k(x) := \frac{1}{kx}$ für $1, 2 \cdots$ lokal-gleichmäßig konvergiert gegen 0, aber nicht gleichmäßig.

20 Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und sei (f_k) eine Folge stetiger Abbildungen $f_k : D \to \mathbb{R}^m$ welsche auf D lokal-gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}^m$ konvergiert. Dann ist f stetig auf D

§4 Kompakte Mengen

Definition: Sei $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

a) Unter dem *Durchmesser von* $\mathcal{S}$ versteht man die Zahl

$$d\,(\mathcal{S}) := sup\,\{|x-y| :\ x, y \in \mathcal{S}\} \leq \infty$$

b) $\mathcal{S}$ heißt *beschränkt*, falls $d\,(\mathcal{S}) < \infty$ gilt.

Bemerkung

a) Ist $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und ist $x_0 \in \mathcal{S}$ gilt $\mathcal{S} \subset B\,(0, |x_0| + d(\mathcal{S}))$, denn $\forall y \in \mathcal{S}$ ist $|y| = |y - x_0 + x_0| \leq |y - x_0| + |x_0| \leq d\,|\mathcal{S}| + |x|$.

b) Ist $\mathcal{S} \subset B(0, r)$, so folgt $d\,|\mathcal{S}| \leq 2r$, denn $\forall x, y \in \mathcal{S}$ gilt $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2r \implies d\,|\mathcal{S}| \leq 2r$.

c) Für $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ gilt $d\,(\mathcal{S}_1) \subset (\mathcal{S}_2)$

Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ und sie J eine beliebige (endlich oder unendliche) Indexmenge.

a) Eine Familie $(V_j)_{j\in J}$ von offenen Menge $V_j \subset \mathbb{R}^n$ heißt (offene) Überdeckung von K wenn $K \subset \cup V_j$ gibt.

b) K heißt *kompakt*, wenn es *zujeder* offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ der Menge K endlich viele Indizes $i_1, \cdots, i_m \in I$ gibt, so dass bereits

$$K \subset \bigcup_{p=1}^{m} U_{i_p}$$

gibt. Mann nennt ein solches endliches Mengensystem $\left\{U_{i_p};\ p = 1, 2, \cdots m\right\}$ offener Menge der Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von K, welsches die Eigenschaft $K \subset \bigcup_{p=1}^{m} U_{i_p}$ hat eine $(U_i)_{i\in I}$ zugehörige *offene Teilüberdeckung* der Menge $\mathbb{R}$

Beispiele

a) Die Menge $K_1 := \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ nicht kompakt, weil sie nicht abgeschlossen ist.

b) $K_2 \cup \{0\}$ ist aber kompakt.

21 Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt: Ist K kompakt, so ist K abgeschlossen und beschränkt.

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt } \iff k \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

Beweis. a) *K ist beschränkt*. Wir betrachten folgende Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ bei offene Menge $U_k := B(0, k),\ k \in \mathbb{N}$ Dann ist $K \subset \mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$. K-kompakt, $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine offene Überdeckung von $K \implies \exists k_1, k_2, \cdots k_m$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{k_i}$. Sei $k^* := max\{k_1, k_2, \cdots k_m\}$. Dann ist $K \subset B(0, k^*)$ $\implies d(K) < 2k^* \implies k-$beschränkt

b) " $\impliedby$ " *K ist abgeschlossen (Wiederspruchbeweis!)* Sei K ist nicht abgeschlossen. Dann gitb es ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ eine Folge $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in K\ \forall i \in \mathbb{N}, \lim_{i\to\infty} x_i = x$. Wir betrachten folgende offen Überdeckungen K: $U_i := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B\left(x, \frac{1}{i}\right), i = 1, 2, \cdots}$. Denn $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i = \mathbb{R}^n \setminus x \supset K \implies \exists i_1, i_2, \cdots i_m$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k}$. Sei $i^* = max\{i_1, i_2, \cdots i_m\}$ Dann ist $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B\left(x, \frac{1}{i^*}\right)} \implies K \cap B\left(x, \frac{1}{i^*}\right) = \emptyset$ Wiederspruch.

□

22 Satz: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist jede abgeschossene Menge $A \subset K$ ebenfalls Kompakt.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung vom A. Dann ist die Familie $\left\{\{U_i\}_{i\in I}, \mathbb{R}^n \setminus A\right\}$- eine Überdeckung von $\mathbb{R}^n \supset K, K - kompakt \implies \exists U_{i_1}, \cdots U_{i_k}$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k}$ (Weil $A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$) $\implies A-$kompakt. □

Quader: Eine Menge in $Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossene Quader*, wenn es beschränkt, abgeschlossene Intervalle $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$, $-\infty < a_k < b_k < +\infty$, $k = 1, 2, \cdots, n$ gibt, so dass $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k, \ \forall k = 1, 2, \cdots n\}$ gilt.

23 Satz: Jede abgeschlossene Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Wir werden folgende Resultat brauchen: *Cantorsche Schachtelungsprinzip* :

24 Satz: Sei (A_k) eine Folge nicht-leerer, abgeschlossene Menge $A_k \subset \mathbb{R}^n$ mit der folgende Eigenschaften:

a) (A_k) ist absteigend, d.h es gilt $A_{k+1} \subset A \ \forall k \in \mathbb{N}$

b) Die Folge $(d(A_k))$ der Durchmesser der Menge A_k ist eine Nullfolge (d.h $d(A_k) \to 0$

Dann gibt es genau einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ der allen Menge A_k angehört:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}$$

Beweis. a) Wir zeigen dass $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$. Sei $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge s.d. $x_k \in A_k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass $d(A_k) \to 0$ wenn $k \to \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in N$ s.d. $d(A_k) < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$. Dann ist $\forall k, m \geq k_0$ $x_k \in A_k \subset A_{k_0}$, $x_m \in A_m A_{k_0} \implies x_k, x_m \in A_{k_0} \implies \|x_k - x_m\| \leq d(A_{k_0}) < \varepsilon \implies (x_k)$-eine Cauchy-Folge. $\implies \exists x \in \mathbb{R}^n$ s.d. $\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad \forall x \in \mathbb{N}$ ist $x_m \in A_m \subset A_k$, $m \geq k$, A_k-abgeschlossen $\implies x = \lim_{m\to\infty} x_m \in A_k \ \forall k \in \mathbb{N} \implies x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$

b) Wir zeigen, dass $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ nur eine Punkt x. (Wiederspruchbeweis). Sei $x \neq y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann ist $x, y \in A_k, k \in \mathbb{N} \implies \|x - y\| \leq d(A_k) \to 0$ wenn $k \to \infty \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y$-Wiederspruch

□

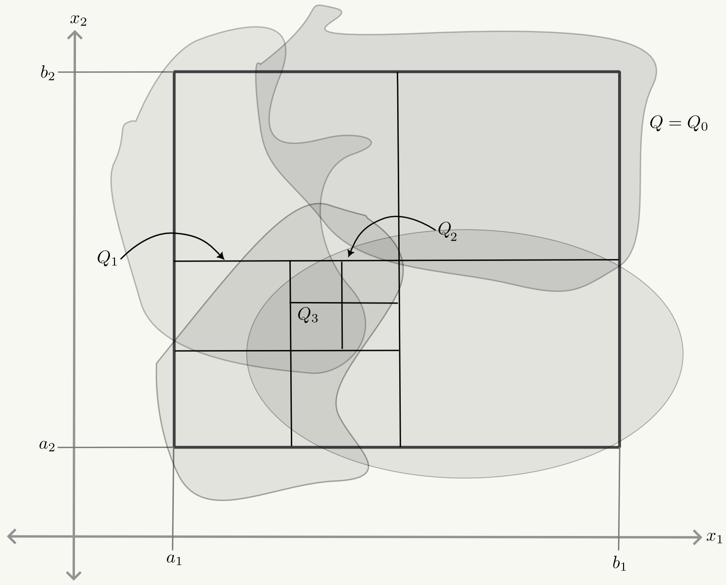
Das Contorsche Schachtelungsprinzip werden wir zum Beweis des Satzes 23 auf eine geeignete absteigende Folge abgeschl. Quader an: Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschl. Quader und (U_i) eine offene Überdeckung von Q.
Annahme: Zu (U_i) gibt es keine endliche Teilüberdeckung von Q. Wir konstruieren induktiv eine absteigende Folge

$$Q = Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots$$

abgeschl. Quader $Q_m \subset \mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaften:

a) $\forall m \in \mathbb{N}$: Es gibt keine (U_i) zugehörige endliche Teilüberdeckung von Q_m

b) $d(Q_m) = \frac{1}{2^m} d(Q_m)$ ($\implies \lim_{n\to\infty} d(Q_m) = 0$)


x_2
b_2
a_2
$Q = Q_0$
Q_1
Q_2
Q_3
a_1
b_1
x_1

Index