

# Analysis 2 (Prof. Scherbina) Notizen

Sisam Khanal

9. Mai 2024

Aktuelle Notizen unter:

<https://thisissisam.github.io/notes/ana2/main.pdf>

## §1 Der $\mathbb{R}^n$ und seine Topologie

Erklärt man auf der Menge  $\mathbb{R}^n := \{\alpha = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$  aller geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen eine Addition komponentenweise durch  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$  für  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  und eine Multiplikation mit reellen Skalaren. So erhält  $\mathbb{R}^n$  die Structure eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums über  $\mathbb{R}$ ; eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  ist durch die Vektoren  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \dots e_n = (0, \dots, 0, 1)$  gegeben. Man bezeichnet die Familie  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  als *Standardbasis* oder auch kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$ .

**euklidisches Skalarprodukt:** Das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  die je zwei Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  die reellen Zahl  $\langle x, y \rangle$  zugeordnet, welche man *euklidisches* Skalarprodukt von  $x$  und  $y$  nennt.

Eine weitere gebräuchliche Schreibweise für das euklidische Skalarprodukt zwei Vektor ist  $\langle x, y \rangle =: x \cdot y$ . Die wichtigsten Eigenschaften des euklidischen Skalarprodukts nennt der folgende Satz, auf dessen trivialen Beweis wir verzichten werden.

**Satz:** Für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  und jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

- a)  $\langle (x + z), y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
- b)  $\langle (\alpha \cdot x), y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- c)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- d)  $\langle x, x \rangle$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

**Euklidische Norm:** Sei  $z \in \mathbb{R}^n$ , dann nennt man die Zahl  $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , die euklidische Norm von  $x$ . Es folgt

- a)  $|x| \geq 0$  und  $|x| = 0 \iff x = 0$
- b)  $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$
- c)  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Schwarzsche Ungleichung:** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt:  $\langle x, y \rangle \leq |x| |y|$   
(wurde in LA2 bewiesen)

### Eigenschaft von Norm auf Vektorraum

Allgemein nennt man jede Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  eine Norm auf  $V$ , wenn sie die folgende Eigenschaften haben

- a)  $\forall x \in V; \|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- b)  $\forall x \in V, \forall a \in \mathbb{R} \|ax\| = |a| \|x\|$
- c)  $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Man nennt dann das Tupel  $(V, \|\cdot\|)$  einem normierten Vektorraum  
Dies wurde auch in LA2 bewiesen

### Beispiel

- a)  $V := \mathbb{R}^n$  und sei  $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ . Dann ist  $\|\cdot\|_\infty$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  nennt.
- b) Der Vektorraum  $V$  aller linearen Abbildungen  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  wird durch die Definition  $\|L\| := \sup\{|L(x)| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$
- c) Fehlt

**euklidische Metrik:** Die Funktion  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y) := |x - y|$  heißt euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^n$

Eigenschaften der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  sind:

**Eigenschaften der euklidischen Metrik:**  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$  gibt:

- a)  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- b)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
- c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung)

**Metrik auf eine Menge:** Eine Metrik auf eine Menge  $A$  ist eine Abbildung  $f : A \times A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit der Eigenschaft a)- c) von Satz 1.16

### Beispiel

Sei  $A$  beliebige Menge und  $f : A \times A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definiert durch

$$p(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases}$$

**Kugel:** Sei  $a \in \mathbb{R}^n$  und sei  $r > 0$ . Dann heißt die Menge  $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$  als die *Kugel um  $a$  mit dem Radius  $r$* .

**Offene und abgeschlossene Menge:** Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  eine Menge

- a)  $S$  heißt *offen*, wenn  $\forall a \in S \exists r > 0$  sodass  $B(a, r) \subset S$
- b)  $S$  heißt *abgeschlossen*, wenn  $\mathbb{R}^n \setminus S$  offen ist.

### Sätze über offene Menge:

- a)  $\mathbb{R}^n$  und die leere Menge  $\emptyset$  sind offen.
- b) Sei  $J \neq \emptyset$  eine beliebige Indexmenge und sei  $\{U_i : i \in J\}$  eine Familie offener Menge  $U_i \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $V := \bigcup_{i \in J} U_i$  ebenfalls offen.
- c) Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $U_1, U_2, \dots, U_m$  offene Menge in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $W := \bigcap_{i=1}^m U_i$  ebenfalls offen.

*Beweis.* a) Trivial

b) Sei  $a \in V \implies \exists i \in J$  sodass  $a \in U_i$ .  $U_i$  offen  $\implies r > 0$  sodass  $B(a, r) \subset U_i \subset V \implies V$  – offen

c) Sei  $a \in W \implies a \in U_i, i = 1, 2, \dots, m$ .  $U_i$  – offen  $\implies r_i > 0$  sodass  $B(a, r_i) \subset U_i$ . Sei  $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_m\} > 0$ . Dann  $\forall i = 1, 2, \dots, m$  gilt  $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset U_i \implies B(a, r) \subset \bigcap_{i=1}^m U_i = W \implies W$  – offen

□

Aus Satz 1.10 und aus der Definition von abgeschlossen Mengen folgt direkt

**Weitere Eigenschaften von Menge:**

- a)  $\mathbb{R}^n$  und die leere Menge  $\emptyset$  sind abgeschlossen
- b) Sei  $J \neq \emptyset$  eine beliebige Indexmenge und sei  $\{A_i : i \in J\}$  eine Familie abgeschlossener Menge  $A_i \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $A := \bigcap_{i \in J} A_i \subset \mathbb{R}^n$  ebenfalls abgeschlossen.
- c) Sei  $m \in \mathbb{N}$  und seien  $A_1, A_2, \dots, A_m$  abgeschlossene Mengen in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $L := \bigcup_{i=1}^m A_i \subset \mathbb{R}^n$  ebenfalls abgeschlossen.  $\bigcap_{i \in J} (\mathbb{R}^n \setminus A_i) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \in J} A_i$  und  $\bigcup_{i \in J} (\mathbb{R}^n \setminus A_i) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i \in J} A_i$

**Umgebung:** Ist  $a \in \mathbb{R}^n$  gegeben, so nennt man jede offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $a \in U$  eine *offene Umgebung von  $a$* . Für  $\varepsilon > 0$  bezeichnet man die Kugel  $B(a, \varepsilon)$  auch als  $\varepsilon$ -*Umgebung von  $a$* .

**Definition:**

- a) Man bezeichnet die Menge  $\overline{A} := \bigcap B$  mit  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B$  – *abgeschlossen* als den *Abschluß* oder *abgeschlossene Hülle von  $A$*
- b) Die Menge  $\overset{\circ}{A} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup U$  mit  $u \in U$  und  $U$  – *offen* heißt *offener Kern von  $A$*
- c) Der Rand von  $A$  ist gegeben durch  $\partial A := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

**Bemerkung**

Nach Satz 1.10 und 1.11 ist  $\overline{A}$  stets abgeschlossen und  $\overset{\circ}{A}$  stets offen.  $\overset{\circ}{A}$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, die  $\overline{A}$  enthält,  $\overset{\circ}{A}$  ist die größte in  $A$  enthaltene offene Teilmenge von  $A$ . Insbesondere gilt  $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$

**Beispiele**

- a) Sei  $A = [0, 1) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $\overline{A} = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\overline{A} = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\partial A = \{0, 1\} \times [0, 1]$  und  $\partial A = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0, 1\}$
- b)  $A = B(0, 1) \cup (B(0, 2) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$  und  $\overline{A} = \overline{B(0, 2)}$ ,  $\overset{\circ}{A} = B(0, 1)$ ,  $\partial A = B(0, 2) \setminus B(0, 1)$

**Eigenschaften der abgeschlossenen Hülle und offener Kern:**

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

- a)  $x \in \partial A \iff$  jede offene Umgebung des Punktes  $x$  sowohl  $A$  als auch  $\mathbb{R}^n \setminus A$  trifft. (Das heißt sowohl mit  $A$ , als auch mit  $\mathbb{R}^n \setminus A$  einen nicht leeren Durchschnitt hat.)
- b)  $A \setminus \partial A = \overset{\circ}{A}$
- c)  $A \cup \partial A = \overline{A}$
- d)  $\partial A$  ist abgeschlossen.

**innerer Punkt:** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

- a) Man nennt  $x \in A$  einen inneren Punkt der Menge  $A$ , wenn es eine offene Umgebung  $U = U(x)$  des Punktes  $x$  gibt, so dass  $U \subset A$  gilt.
- b) Man nennt  $y \in \mathbb{R}^n$  einen Häufungspunkt der Menge  $A$ , wenn in jeder offenen Umgebung  $U = U(y)$  des Punktes  $y$  ein von  $y$  verschiedener Punkt der Menge  $A$  liegt, das heißt wenn gilt:

$$\forall U = U(y) \text{ offen } \exists x \in A \cap U : x \neq y$$

Die Menge der Häufungspunkt von  $A$  wird  $HP(A)$

**8 Satz:** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ , dann gilt:

- a)  $\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$
- b)  $\overline{A} = A \cup HP(A)$

*Beweis.* a) Ist  $x \in \mathring{A}$  so ist definitionsgemäß  $x \in U \cap A : U \subset A, U - \text{offen}$  also existiert mindestens eine offene Umgebung  $V = V(x)$  des Punktes  $x$  mit  $V \subset A \implies x$  innerer Punkt von  $A$  ist. Ist andererseits  $x$  innerer Punkt von  $A$ , so existiert eine offene Umgebung  $V = V(x)$  des Punktes  $x$  mit  $x \in V \subset A \implies$  insbesondere  $x$  ist dann Element der Vereinigung  $\bigcup U : U \subset A, U - \text{offen}$ , das heißt  $x \in \mathring{A}$ .

- b) Wegen  $\overline{A} \setminus A = \partial A \setminus A$  und  $HP(A) \cap A = HP(A) \cap (A \cup (\partial A \setminus A))$  folgt die Behauptung aus der einfachen Beobachtung, dass alle nicht in  $A$  gelegenen Randpunkte von  $A$  zwangsläufig Häufungspunkt von  $A$  sind und umgekehrt alle nicht in  $A$  gelegenen Häufungspunkt von  $A$  natürliche Randpunkte von  $A$  sind.

□

## §2 Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$

**Definition:** Sei  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge von Punkten im  $\mathbb{R}^n$ .  $(x_k)$  heißt *konvergent* gegeben  $a \in \mathbb{R}^n$  (in Zeichen:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ ), wenn zu jeder offenen Umgebung  $U = U(a)$  des Punktes  $a$  ein Index  $k_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $x_k \in U \forall k \geq k_0$  gilt.

### Bemerkung

Definition  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$

**9 Satz:** Sei  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge und sei  $a \in \mathbb{R}^n$ ; es seien Komponentenschreibweise  $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \forall k \in \mathbb{N}, a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_j} = a_j \forall j = 1, 2, \dots, n$$

*Beweis.* " $\implies$ "  $\forall \varepsilon > 0$  sei  $k_0 \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass  $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$  gilt. Für beliebiges  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ist dann

$$\begin{aligned} |x_{k_j} - a_j| &= \sqrt{(x_{k_j} - a_j)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_{k_1} - a_1)^2 + (x_{k_2} - a_2)^2 + \dots + (x_{k_n} - a_n)^2} \\ &= |x_k - a| \\ &< \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_j = a \end{aligned}$$

"  $\Leftarrow$  "  $\forall \varepsilon > 0$  wähle man  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , so gilt  $\forall k \geq k_0$

$$\begin{aligned} |x_{k_j} - a_j| &= \sqrt{(x_{k_1} - a_1)^2 + (x_{k_2} - a_2)^2 \cdots (x_{k_n} - a_n)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2} \\ &= \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \end{aligned}$$

□

**Definition:** Sei  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge. Man nennt  $a \in \mathbb{R}^n$  einen Häufungspunkt der Folge  $(x_k)$ , falls es eine Teilfolge  $(x_{k_y}) \subset (x_k)$  mit  $\lim_{y \rightarrow \infty} x_{k_y} = a$  gibt.

**10 Satz:** Für eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $A$  ist abgeschlossen.
- b) Der Grenzwert einer jeden Folge  $(x_k) \subset A$ , die als Punktfolge in  $\mathbb{R}^n$  konvergiert, liegt in  $A$

*Beweis.* 1)  $\implies$  2) Sei  $A$  abgeschlossen und sei  $(x_k) \subset A$  eine Folge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$ . Falls  $x_n$  eine konstante Teilfolge  $(x_{k_\gamma}) \subset (x_k)$ , so gilt  $x_{k_\gamma} = a \forall \gamma \in \mathbb{N}$ , und es folgt  $a \in A$  wegen  $(x_{k_\gamma}) \subset A \implies a \in A$ . Hat  $(x_k)$  keine konstante Teilfolge, so gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass  $x_k \neq a \forall k \geq k_0$  gilt, offenbar ist  $a$  ein Häufungspunkt der Menge  $\{x_k : k \geq k_0\} \subset A$  und deshalb auch  $a \in HP(A)$ . Nach Satz 8 ist  $HP(A) \subset \bar{A}$ , aber  $\bar{A} = A$ , denn  $A$  ist abgeschlossen. Deshalb  $a \in A$ .

2)  $\implies$  1) Sei  $x \in HP(A)$ . Dann gibt es eine Folge  $(x_k) \subset A$ ,  $x_k \neq x \forall k \in \mathbb{N}$ , so dass  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  gilt. Nach Voraussetzung liegt der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Punkten aus  $A$  ebenfalls in  $A$ , und es folgt  $x \in A$ . Dann ist  $HP(A) \subset A$  gezeigt, also ist  $A = A \cup HP(A) = \bar{A}$ , das heißt  $A$  – abgeschlossen. □

**Definition:** Eine Folge  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn es  $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ , s.d.  $|x_n - x_m| < \varepsilon \forall n, m \geq k_0$

**11 Satz:** Jede konvergente Folge  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  ist eine *Cauchy-Folge*

**12 Satz:** Sei  $(x_k) \in \mathbb{R}^n$  eine Folge, es sei  $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(x_k)$  eine *Cauchy-Folge* genau dann, wenn jede der Folgen  $x_{k_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  eine *Cauchy-Folge* in  $\mathbb{R}$  ist.

*Beweis.* "  $\implies$  "  $(x_k)$  ist eine Cauchy-Folge  $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  s.d.  $|x_k - x_m| < \varepsilon \forall k, m \geq k_0 \implies \forall 1 \leq j \leq n$



"  $\Longleftarrow$  "  $(x_{k_j})$ -eine Cauchy-Folge  $\forall 1 \leq j \leq \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  s.d.  $|x_{k_j} - x_{k_m}| < \varepsilon \forall k, m \geq k_0$ . Sei  $k_0 := \max\{k_{0_1}, \dots, k_{0_n}\} \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $|x_k - x_m| = \sqrt{(x_{k_1} - x_{m_1})^2 + \dots + (x_{k_n} - x_{m_n})^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon \forall k, m \geq k_0 \implies (x_k)$ -eine Cauchy-Folge.  $\square$

**13 Satz:** Jede Cauchy-Folge im  $\mathbb{R}^n$  ist konvergent, das heißt  $\mathbb{R}^n$  ist vollständig.

## §2 Funktionen, Abbildungen, Stetigkeit

**Definition:** Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetig* an der Stelle  $a \in U$ , wenn gilt:  $\forall \varepsilon > 0$  s.d.  $|x - a| < \delta, x \in U \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$   
 $f$  heißt *stetig* (auf  $U$ ), wenn  $f$  in jedem Punkt  $a \in U$  stetig ist.

Wir verallgemeinern diese Stetigkeitsdefinition sogleich auf Abbildungen mit Werten in  $\mathbb{R}^m$ . Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist gegeben durch ein  $m$ -Tupel  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  von Funktionen  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m \forall x \in U, f(x) \in \mathbb{R}^m$ , d.h.  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

**Definition:**  $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist *an der Stelle*  $a \in U$  *stetig*, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  s.d.  $x \in U, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .  $f$  heißt *stetig* (auf  $U$ ), wenn  $\forall a \in U, f$  in  $a$  stetig ist.

**14 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in U$  und  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.  $f$  ist stetig in  $a$ , genau dann, wenn jede der Komponentenfunktionen  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, m$  stetig in  $a$  ist.

*Beweis.* Der Beweis beruht wie der Beweis des Satzes 9 auf der Äquivalenz der Maximumnorm auf  $\mathbb{R}^m$  zur euklidischen Norm auf  $\mathbb{R}^m$ , genauer auf der Beziehung

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_1|, \dots, |x_m|\} \leq \sqrt{m} \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

□

**15 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $a \in U$ . Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann in  $a$  stetig, wenn zu jeder offenen Umgebung  $V = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$  des Punktes  $f(a)$  in  $\mathbb{R}^m$  eine offene Umgebung  $W = W(a) \subset \mathbb{R}^n$  des Punktes  $a \in U$  existiert, so dass  $f(W) = \{f(x) := x \in U \cap W\} \subset V$  gilt.

*Beweis.* " $\implies$ " " $f$  ist stetig. Sei  $V = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$  eine offene Umgebung des Punktes  $a \implies \exists \varepsilon > 0$ , s.d.  $B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$ .  $f$  ist stetig in  $a \implies \exists \delta > 0$ , s.d.  $x \in \underbrace{B(a, \delta) \cap U}_{:=W} \implies f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$

" $\Leftarrow$ " Sei  $\forall V(f(a))$ -offen,  $\exists W(a)$ -offen s.d.  $f(W) \subset V$  gilt.  $\forall \varepsilon > 0$  sei  $V = B(f(a), \varepsilon)$ , dann  $\exists W(a)$ -offen s.d.  $f(W) \subset B(f(a), \varepsilon) \implies \exists \delta > 0$  s.d.  $B(a, \delta) \subset W \implies f(B(a, \delta) \cap U) \subset B(f(a), \varepsilon) \implies f$  ist stetig in  $a$  □

**16 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.  $f$  ist genau dann auf  $U$  stetig, wenn das Urbild  $f^{-1}(V) := \{x \in U : f(x) \in V\}$  einer jeden offenen Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^m$  unter  $f$  selbst wieder offen ist.

*Beweis.* " $\implies$ " " $f$  ist stetig auf  $U$ . Sei  $V$  in  $\mathbb{R}^m$  offen. Sei  $a \in f^{-1}(V)$ , d.h.  $f(a) \in V \xrightarrow{\text{Satz 15}} \exists W(a) \subset \mathbb{R}^n$  offen, s.d.  $f(W(a) \cap U) \subset V \implies \exists \delta > 0$  s.d.  $B(a, \delta) \subset W(a) \implies W(a) \subset f^{-1}(V) \implies B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$   
" $\implies$ " Für  $a \in f^{-1}(V)$  sei  $W(a) := f^{-1}(V) \xrightarrow{\text{Satz 15}} f$  stetig in  $a$  □

Für stetige Abbildung des  $\mathbb{R}^n$  mit Werten in  $\mathbb{R}$  gelten Rechenregeln, die denen für das Rechnen mit stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entsprechen und die völlig analog zu beweisen sind:

**17 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Die Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  seien beide stetig an der Stelle  $a \in U$ , dann gilt :

- a) Die Funktion  $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$
- b) Die Funktion  $(f \cdot g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$
- c) Falls  $g(a) \neq 0$  existiert eine offene Umgebung  $V = V(g)$  mit  $g(x) \neq 0 \forall x \in V$ , die Funktion  $\left(\frac{f}{g}\right) : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$ .

### Bemerkung

Die Übertragung des Satzes 17 auf dem Fall  $\mathbb{R}^m$ -wertiger Abbildungen ist nicht uneingeschränkt möglich. Folgende Version auf deren Beweis wie ebenfalls versichten können, ist aber gültig.

**18 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, die Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei stetig in  $a$ . Dann gilt:

- a) Ist die Abbildung  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig in  $a$ , so ist auch die Abbildung  $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ .
- b) Ist die Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ , so ist auch die Abbildung  $(f \cdot g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ .
- c) Ist die Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$  und  $g(a) \neq 0$ , so existiert eine offene Umgebung  $V = V(a)$  mit  $g(x) \neq 0 \forall x \in V$ ; die Abbildung  $\left(\frac{f}{g}\right) : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$ .

Auch die Komposition stetiger Abbildungen liefert wieder eine stetige Abbildung:

**19 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen und seien  $f : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  sowie  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  Abbildungen für die gilt:  $f$  ist stetig in  $x_0 \in V$ ,  $g$  ist stetig in  $y_0 = f(x_0) \in V$ . Dann ist die Abbildung  $(g \cdot f) : U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$  stetig in  $x_0$

*Beweis.* Ist  $W = W((g \cdot f)(x_0))$  eine offene Umgebung des Punktes  $|g \cdot f| = g(y_0) \in \mathbb{R}^k$ , so gibt es wegen der Stetigkeit von  $g$  an der Stelle  $y_0$  nach Satz 15 eine offene  $y_0$ -Umgebung  $W_1 = W(y_0) = W(f(x_0)) \subset \mathbb{R}^m$  mit  $g(W_1) \subset W$ . Ebenso impliziert die Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$  die Existenz einer offenen Umgebung  $W_2 = W_2(x_0)$  mit  $f(W_2) \subset W_1$ . Offenbar ist dann  $(g \cdot f)(W_2) \subset g(f(W_2)) \subset g(W_1) \subset W$ , und die Stetigkeit von  $(g \cdot f)$  in  $x_0$  ist bewiesen  $\square$

**Definition:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $(f_k)$  ein Folge von Abbildungen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

- a)  $(f_k)$  heißt auf  $D$  *gleichmäßig konvergent* gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \forall x \in D, \forall k \geq k_0$$

- b)  $(f_k)$  heißt auf  $D$  *lokal-gleichmäßig konvergent* gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wenn es  $\forall a \in D \exists V = V(a) \subset \mathbb{R}^n$ -offen s.d. die Folge  $(f_k|_{D \cap V})$  auf  $D \cap V$  gleichmäßig gegen  $f|_{D \cap V}$  konvergiert.

#### Bemerkung

- b)  $\not\Rightarrow$  a). *Gegenbeispiel:* Sei  $D = (0, +\infty)$  und  $f_k(x) := \frac{1}{kx}$  für  $1, 2, \dots$  lokal-gleichmäßig konvergiert gegen 0, aber nicht gleichmäßig.

**20 Satz:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $(f_k)$  eine Folge stetiger Abbildungen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  welche auf  $D$  lokal-gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  konvergiert. Dann ist  $f$  stetig auf  $D$

## §4 Kompakte Mengen

**Definition:** Sei  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ .

a) Unter dem *Durchmesser von  $\mathcal{S}$*  versteht man die Zahl

$$d(\mathcal{S}) := \sup \{ |x - y| : x, y \in \mathcal{S} \} \leq \infty$$

b)  $\mathcal{S}$  heißt *beschränkt*, falls  $d(\mathcal{S}) < \infty$  gilt.

### Bemerkung

a) Ist  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und ist  $x_0 \in \mathcal{S}$  gilt  $\mathcal{S} \subset B(0, |x_0| + d(\mathcal{S}))$ , denn  $\forall y \in \mathcal{S}$  ist  $|y| = |y - x_0 + x_0| \leq |y - x_0| + |x_0| \leq d(\mathcal{S}) + |x_0|$ .

b) Ist  $\mathcal{S} \subset B(0, r)$ , so folgt  $d(\mathcal{S}) \leq 2r$ , denn  $\forall x, y \in \mathcal{S}$  gilt  $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2r \implies d(\mathcal{S}) \leq 2r$ .

c) Für  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$  gilt  $d(\mathcal{S}_1) \leq d(\mathcal{S}_2)$

**Definition:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $J$  eine beliebige (endlich oder unendliche) Indexmenge.

- a) Eine Familie  $(V_j)_{j \in J}$  von offenen Menge  $V_j \subset \mathbb{R}^n$  heißt (offene) Überdeckung von  $K$  wenn  $K \subset \bigcup V_j$  gibt.
- b)  $K$  heißt *kompakt*, wenn es *zu jeder* offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  der Menge  $K$  endlich viele Indizes  $i_1, \dots, i_m \in I$  gibt, so dass bereits

$$K \subset \bigcup_{p=1}^m U_{i_p}$$

gibt. Mann nennt ein solches endliches Mengensystem  $\{U_{i_p}; p = 1, 2, \dots, m\}$  offener Menge der Überdeckung  $(V_i)_{i \in I}$  von  $K$ , welches die Eigenschaft  $K \subset \bigcup_{p=1}^m U_{i_p}$  hat eine  $(U_i)_{i \in I}$  zugehörige *offene Teilüberdeckung* der Menge  $\mathbb{R}$

### Beispiele

- a) Die Menge  $K_1 := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  nicht kompakt, weil sie nicht abgeschlossen ist.
- b)  $K_2 \cup \{0\}$  ist aber kompakt.

**21 Definition:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt: Ist  $K$  kompakt, so ist  $K$  abgeschlossen und beschränkt.

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \iff K \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

*Beweis.* a)  $K$  ist beschränkt. Wir betrachten folgende Überdeckung von  $\mathbb{R}^n$  bei offene Menge  $U_k := B(0, k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  Dann ist  $K \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ .  $K$ -kompakt,  $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine offene Überdeckung von  $K \implies \exists k_1, k_2, \dots, k_m$  s.d.  $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_{k_i}$ . Sei  $k^* := \max\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ . Dann ist  $K \subset B(0, k^*) \implies d(K) < 2k^* \implies K$ -beschränkt

b) " $\Leftarrow$ "  $K$  ist abgeschlossen (Widerspruchsbeweis!) Sei  $K$  ist nicht abgeschlossen. Dann gibt es ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$  eine Folge  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $x_i \in K \forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ . Wir betrachten folgende offene Überdeckungen  $K$ :  $U_i := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x, \frac{1}{i})}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Denn  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \mathbb{R}^n \setminus x \supset K \implies \exists i_1, i_2, \dots, i_m$  s.d.  $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$ . Sei  $i^* = \max\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  Dann ist  $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x, \frac{1}{i^*})} \implies K \cap \overline{B(x, \frac{1}{i^*})} = \emptyset$  Widerspruch.

□

**22 Satz:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann ist jede abgeschlossene Menge  $A \subset K$  ebenfalls Kompakt.

*Beweis.* Sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Dann ist die Familie  $\{\{U_i\}_{i \in I}, \mathbb{R}^n \setminus A\}$  eine Überdeckung von  $\mathbb{R}^n \supset K$ ,  $K$ -kompakt  $\implies \exists U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$  s.d.  $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$  (Weil  $A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$ )  $\implies A$ -kompakt.

□

**Quader:** Eine Menge in  $Q \subset \mathbb{R}^n$  heißt *abgeschlossene Quader*, wenn es beschränkt, abgeschlossene Intervalle  $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$ ,  $-\infty < a_k < b_k < +\infty$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  gibt, so dass  $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k, \forall k = 1, 2, \dots, n\}$  gilt.

**23 Satz:** Jede abgeschlossene Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ist kompakt.

Wir werden folgende Resultat brauchen: *Cantorsche Schachtelungsprinzip* :

**24 Satz:** Sei  $(A_k)$  eine Folge nicht-leerer, abgeschlossene Menge  $A_k \subset \mathbb{R}^n$  mit der folgende Eigenschaften:

- a)  $(A_k)$  ist absteigend, d.h es gilt  $A_{k+1} \subset A_k \forall k \in \mathbb{N}$
- b) Die Folge  $(d(A_k))$  der Durchmesser der Menge  $A_k$  ist eine Nullfolge ( d.h  $d(A_k) \rightarrow 0$

Dann gibt es genau einen Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  der allen Menge  $A_k$  angehört:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}$$

*Beweis.* a) Wir zeigen dass  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$ . Sei  $(x_k)_{k=1}^{\infty}$  eine Folge s.d.  $x_k \in A_k \forall k \in \mathbb{N}$ . Wir wissen, dass  $d(A_k) \rightarrow 0$  wenn  $k \rightarrow \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  s.d.  $d(A_k) < \varepsilon \forall k \geq k_0$ . Dann ist  $\forall k, m \geq k_0$   $x_k \in A_k \subset A_{k_0}, x_m \in A_m \subset A_{k_0} \implies x_k, x_m \in A_{k_0} \implies \|x_k - x_m\| \leq d(A_{k_0}) < \varepsilon \implies (x_k)$ -eine Cauchy-Folge.  $\implies \exists x \in \mathbb{R}^n$  s.d.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \forall x \in \mathbb{N}$  ist  $x_m \in A_m \subset A_k, m \geq k, A_k$ -abgeschlossen  $\implies x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m \in A_k \forall k \in \mathbb{N} \implies x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

b) Wir zeigen, dass  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  nur eine Punkt  $x$ . (Widerspruchsbeweis). Sei  $x \neq y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ . Dann ist  $x, y \in A_k, k \in \mathbb{N} \implies \|x - y\| \leq d(A_k) \rightarrow 0$  wenn  $k \rightarrow \infty \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y$ -Widerspruch

□

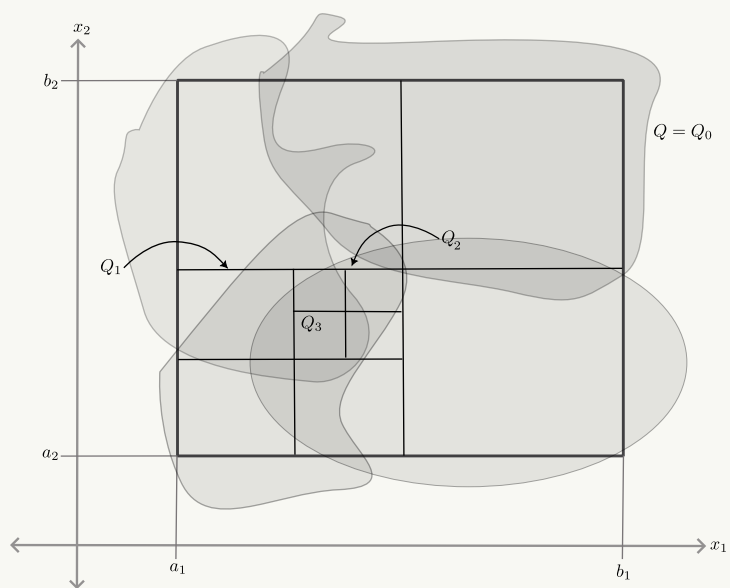
Das Cantorsche Schachtelungsprinzip werden wir zum Beweis des Satzes 23 auf eine geeignete absteigende Folge abgeschl. Quader an: Es sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  eine abgeschl. Quader und  $(U_i)$  eine offene Überdeckung von  $Q$ .

*Annahme:* Zu  $(U_i)$  gibt es keine endliche Teilüberdeckung von  $Q$ . Wir konstruieren induktiv eine absteigende Folge

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

abgeschl. Quader  $Q_m \subset \mathbb{R}^n$  mit der folgenden Eigenschaften:

- a)  $\forall m \in \mathbb{N}$ : Es gibt keine  $(U_i)$  zugehörige endliche Teilüberdeckung von  $Q_m$
- b)  $d(Q_m) = \frac{1}{2^m} d(Q_0) (\implies \lim_{m \rightarrow \infty} d(Q_m) = 0)$





# Index

abgeschlossene Hülle, 5

Dreiecksgleichung, 3

Häufungspunkt, 6, 8

innerer Punkt, 6

nominierter Vektorraum, 3

Norm, 3

Skalarprodukt, 2

Vektorraum, 2