

Analysis 2 (Prof. Scherbina) Notizen

Sisam Khanal

17. Juni 2024

Aktuelle Notizen unter:

<https://thisissisam.github.io/notes/ana2/main.pdf>

§1 Der \mathbb{R}^n und seine Topologie

Erklärt man auf der Menge $\mathbb{R}^n := \{\alpha = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$ aller geordneten n -Tupel reeller Zahlen eine Addition komponentenweise durch $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ für $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und eine Multiplikation mit reellen Skalaren. So erhält \mathbb{R}^n die Structure eines n -dimensionalen Vektorraums über \mathbb{R} ; eine Basis des \mathbb{R}^n ist durch die Vektoren $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \dots e_n = (0, \dots, 0, 1)$ gegeben. Man bezeichnet die Familie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ als *Standardbasis* oder auch kanonische Basis des \mathbb{R}^n .

euklidisches Skalarprodukt: Das euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ die je zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ die reellen Zahl $\langle x, y \rangle$ zugeordnet, welche man *euklidisches* Skalarprodukt von x und y nennt.

Eine weitere gebräuchliche Schreibweise für das euklidische Skalarprodukt zwei Vektor ist $\langle x, y \rangle =: x \cdot y$. Die wichtigsten Eigenschaft des euklidische Skalarprodukt nennt der folgende Satz, auf dessen trivialen Beweis wir verzichten werden.

Satz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

- a) $\langle (x + z), y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
- b) $\langle (\alpha \cdot x), y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- c) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- d) $\langle x, x \rangle$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Euklidische Norm: Sei $z \in \mathbb{R}^n$, dann nennt man die Zahl $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, die euklidische Norm von x . Es folgt

- a) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \iff x = 0$
- b) $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$
- c) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Schwarzsehe Ungleichung: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle x, y \rangle \leq |x| |y|$
(wurde in LA2 bewiesen)

Eigenschaft von Norm auf Vektorraum

Allgemein nennt man jede Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V eine Norm auf V , wenn sie die folgende Eigenschaften haben

- a) $\forall x \in V; \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- b) $\forall x \in V, \forall a \in \mathbb{R} \|ax\| = |a| \|x\|$
- c) $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Man nennt dann das Tupel $(V, \|\cdot\|)$ einem normierten Vektorraum
Dies wurde auch in LA2 bewiesen

Beispiel

- a) $V := \mathbb{R}^n$ und sei $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ . x = (x_1, x_2 \dots x_n) \rightarrow \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, |x_n|\}$. Dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf \mathbb{R}_n nennt.
- b) Der Vektorraum V aller linearen Abbildungen $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wird durch die Definition $\|L\| := \sup\{|L(x)| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$
- c) Fehlt

euklidische Metrik: Die Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y) := |x - y|$ heißt euklidische Metrik auf \mathbb{R}^n

Eigenschaften der euklidischen Metrik auf \mathbb{R}^n sind:

Eigenschaften der euklidischen Metrik: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gibt:

- a) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- b) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Metrik auf eine Menge: Eine Metrik auf eine Menge A ist eine Abbildung $f : A \times A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft a)- c) von Satz 1.16

Beispiel

Sei A beliebige Menge und $f : A \times A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$p(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Kugel: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und sei $r > 0$. Dann heißt die Menge $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$ als die *Kugel um a mit dem Radius r* .

Offene und abgeschlossene Menge: Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge

- a) S heißt *offen*, wenn $\forall a \in S \exists r > 0$ sodass $B(a, r) \subset S$
- b) S heißt *abgeschlossen*, wenn $\mathbb{R}^n \setminus S$ offen ist.

Sätze über offene Menge:

- a) \mathbb{R}^n und die leere Menge \emptyset sind offen.
- b) Sei $J \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und sei $\{U_i : i \in J\}$ eine Familie offener Menge $U_i \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist die Menge $V := \bigcup_{i \in J} U_i$ ebenfalls offen.
- c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und U_1, U_2, \dots, U_m offene Menge in \mathbb{R}^n . Dann ist die Menge $W := \bigcap_{i=1}^m U_i$ ebenfalls offen.

Beweis. a) Trivial

b) Sei $a \in V \implies \exists i \in J$ sodass $a \in U_i$. U_i offen $\implies r > 0$ sodass $B(a, r) \subset U_i \subset V \implies V$ – offen

c) Sei $a \in W \implies a \in U_i, i = 1, 2, \dots, m$. U_i – offen $\implies r_i > 0$ sodass $B(a, r_i) \subset U_i$. Sei $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_m\} > 0$. Dann $\forall i = 1, 2, \dots, m$ gilt $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset U_i \implies B(a, r) \subset \bigcap_{i=1}^m U_i = W \implies W$ – offen

□

Aus Satz 1.10 und aus der Definition von abgeschlossen Mengen folgt direkt

Weitere Eigenschaften von Menge:

- a) \mathbb{R}^n und die leere Menge \emptyset sind abgeschlossen
- b) Sei $J \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und sei $\{A_i : i \in J\}$ eine Familie abgeschlossener Menge $A_i \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist die Menge $A := \bigcap_{i \in J} A_i \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls abgeschlossen.
- c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien A_1, A_2, \dots, A_m abgeschlossene Mengen in \mathbb{R}^n . Dann ist die Menge $L := \bigcup_{i=1}^m A_i \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls abgeschlossen. $\bigcap_{i \in J} (\mathbb{R}^n \setminus A_i) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \in J} A_i$ und $\bigcup_{i \in J} (\mathbb{R}^n \setminus A_i) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i \in J} A_i$

Umgebung: Ist $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so nennt man jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ eine *offene Umgebung von a* . Für $\varepsilon > 0$ bezeichnet man die Kugel $B(a, \varepsilon)$ auch als ε -*Umgebung von a* .

Definition:

- a) Man bezeichnet die Menge $\overline{A} := \bigcap B$ mit $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, B -*abgeschlossen* als den *Abschluss* oder *abgeschlossene Hülle von A*
- b) Die Menge $\mathring{A} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup U$ mit $u \in U$ und U - *offen* heißt *offener Kern von A*
- c) Der Rand von A ist gegeben durch $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$

Bemerkung

Nach Satz 1.10 und 1.11 ist \overline{A} stets abgeschlossen und \mathring{A} stets offen. \mathring{A} ist die kleinste abgeschlossene Menge, die \overline{A} enthält, \mathring{A} ist die größte in A enthaltene offene Teilmenge von A . Insbesondere gilt $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

Beispiele

- a) Sei $A = [0, 1) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Dann ist $\overline{A} = (0, 1) \times (0, 1)$, $\overline{A} = [0, 1] \times [0, 1]$, $\partial A = \{0, 1\} \times [0, 1]$ und $\partial A = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0, 1\}$
- b) $A = B(0, 1) \cup (B(0, 2) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$ und $\overline{A} = \overline{B(0, 2)}$, $\mathring{A} = B(0, 1)$, $\partial A = B(0, 2) \setminus B(0, 1)$

Eigenschaften der abgeschlossenen Hülle und offener Kern:

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

- a) $x \in \partial A \iff$ jede offene Umgebung des Punktes x sowohl A als auch $\mathbb{R}^n \setminus A$ trifft. (Das heißt sowohl mit A , als auch mit $\mathbb{R}^n \setminus A$ einen nicht leeren Durchschnitt hat.)
- b) $A \setminus \partial A = \mathring{A}$
- c) $A \cup \partial A = \overline{A}$
- d) ∂A ist abgeschlossen.

innerer Punkt: Sei $A \in \mathbb{R}^n$.

- a) Man nennt $x \in A$ einen inneren Punkt der Menge A , wenn es eine offene Umgebung $U = U(x)$ des Punktes x gibt, so dass $U \subset A$ gilt.
- b) Man nennt $y \in \mathbb{R}^n$ einen Häufungspunkt der Menge A , wenn in jeder offenen Umgebung $U = U(y)$ des Punktes y ein von y verschiedener Punkt der Menge A liegt, das heißt wenn gilt:

$$\forall U = U(y) \text{ offen } \exists x \in A \bigcup U : x \neq y$$

Die Menge der Häufungspunkt von A wird $HP(A)$

8 Satz: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, dann gilt:

- a) $\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$
- b) $\overline{A} = A \cup HP(A)$

Beweis. a) Ist $x \in \mathring{A}$ so ist definitionsgemäß $x \in U \bigcup : U \subset A, U - \text{offen}$ also existiert mindestens eine offene Umgebung $V = V(x)$ des Punktes x mit $V \subset A \implies x$ innerer Punkt von A ist. Ist andererseits x innerer Punkt von A , so existiert eine offene Umgebung $V = V(x)$ des Punktes x mit $x \in V \subset A \implies$ insbesondere x ist dann Element der Vereinigung $\bigcup U : U \subset A, U - \text{offen}$, das heißt $x \in \mathring{A}$.

- b) Wegen $\overline{A} \setminus A = HP(A)$ und $HP(A) \subset \overline{A}$ folgt die Behauptung aus der einfachen Beobachtung, dass alle nicht in A gelegenen Randpunkte von A zwangsläufig Häufungspunkte von A sind und umgekehrt alle nicht in A gelegenen Häufungspunkte von A natürliche Randpunkte von A sind.

□

§2 Punktfolgen im \mathbb{R}^n

Definition: Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Punkten im \mathbb{R}^n . (x_k) heißt *konvergent* gegeben $a \in \mathbb{R}^n$ (in Zeichen: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$), wenn zu jeder offenen Umgebung $U = U(a)$ des Punktes a ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in U \forall n \geq k_0$ gilt.

Bemerkung

Definition $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ sodass $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$

9 Satz: Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge und sei $a \in \mathbb{R}^n$; es seien Komponentenschreibweise $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2} \dots x_{k_n}) \forall k \in \mathbb{N}, a = (a_1, a_2 \dots a_n)$, Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_j} = a_j \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Beweis. " \implies " $\forall \varepsilon > 0$ sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so gezählt, dass $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$ gilt. Für beliebiges $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ist dann

$$\begin{aligned} |x_{k_j} - a_j| &= \sqrt{(x_{k_j} - a_j)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_{k_1} - a_1)^2 + (x_{k_2} - a_2)^2 \dots (x_{k_n} - a_n)^2} \\ &= |x_k - a| \\ < \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_j = a \end{aligned}$$

" \Leftarrow " $\forall \varepsilon > 0$ wähle man $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, so gilt $\forall k \geq k_0$

$$\begin{aligned} |x_{k_j} - a_j| &= \sqrt{(x_{k_1} - a_1)^2 + (x_{k_2} - a_2)^2 \cdots (x_{k_n} - a_n)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2} \\ &= \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \end{aligned}$$

□

Definition: Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge. Man nennt $a \in \mathbb{R}^n$ einen Häufungspunkt der Folge (x_k) , falls es eine Teilfolge $(x_{k_y}) \subset (x_k)$ mit $\lim_{y \rightarrow \infty} x_{k_y} = a$ gibt.

10 Satz: Für eine Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) A ist abgeschlossen.
- b) Der Grenzwert einer jeden Folge $(x_k) \subset A$, die als Punktfolge in \mathbb{R}^n konvergiert, liegt in A

Beweis. 1) \implies 2) Sei A abgeschlossen und sei $(x_k) \subset A$ eine Folge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$. Falls x_n eine konstante Teilfolge $(x_{k_\gamma}) \subset (x_k)$, so gilt $x_{k_\gamma} = a \forall \gamma \in \mathbb{N}$, und es folgt $a \in A$ wegen $(x_{k_\gamma}) \subset A \implies a \in A$. Hat (x_k) keine konstante Teilfolge, so gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_k \neq a \forall k \geq k_0$ gilt, offenbar ist a ein Häufungspunkt der Menge $\{x_k : k \geq k_0\} \subset A$ und deshalb auch $a \in HP(A)$. Nach Satz 8 ist $HP(A) \subset \bar{A}$, aber $\bar{A} = A$, denn A ist abgeschlossen. Deshalb $a \in A$.

2) \implies 1) Sei $x \in HP(A)$. Dann gibt es eine Folge $(x_k) \subset A$, $x_k \neq x \forall k \in \mathbb{N}$, so dass $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ gilt. Nach Voraussetzung liegt der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Punkten aus A ebenfalls in A , und es folgt $x \in A$. Dann ist $HP(A) \subset A$ gezeigt, also ist $A = A \cup HP(A) = \bar{A}$, das heißt A – abgeschlossen. □

Definition: Eine Folge $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $|x_n - x_m| < \varepsilon \forall n, m \geq k_0$

11 Satz: Jede konvergente Folge $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ ist eine *Cauchy-Folge*

12 Satz: Sei $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ eine Folge, es sei $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \forall k \in \mathbb{N}$. Dann ist (x_k) eine *Cauchy-Folge* genau dann, wenn jede der Folgen x_{k_j} , $j = 1, 2, \dots, n$ eine *Cauchy-Folge* in \mathbb{R} ist.

Beweis. " \implies " (x_k) ist eine Cauchy-Folge $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|x_k - x_m| < \varepsilon \forall k, m \geq k_0 \implies \forall 1 \leq j \leq n$

" \Leftarrow " (x_{k_j}) -eine Cauchy-Folge $\forall 1 \leq j \leq \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|x_{k_j} - s_{m_j}| < \varepsilon \forall k, m \geq k_0$. Sei $k_0 := \max\{k_{0_1}, \dots, k_{0_n}\} \in \mathbb{N}$. Dann ist $|x_k - x_m| = \sqrt{(x_{k_1} - x_{m_1})^2 + \dots + (x_{k_n} - x_{m_n})^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon \forall k, m \geq k_0 \implies (x_k)$ -eine Cauchy-Folge. \square

13 Satz: Jede Cauchy-Folge im \mathbb{R}^n ist konvergent, das heißt \mathbb{R}^n ist vollständig.

§3 Funktionen, Abbildungen, Stetigkeit

Definition: Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig* an der Stelle $a \in U$, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0$ s.d. $|x - a| < \delta, x \in U \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
 f heißt *stetig* (auf U), wenn f in jedem Punkt $a \in U$ stetig ist.

Wir verallgemeinern diese Stetigkeitsdefinition sogleich auf Abbildungen mit Werten in \mathbb{R}^m . Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist gegeben durch ein m -Tupel $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ von Funktionen $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m \forall x \in U, f(x) \in \mathbb{R}^m$, d.h. $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

Definition: $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist *an der Stelle* $a \in U$ *stetig*, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d. $x \in U, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. f heißt *stetig* (auf U), wenn $\forall a \in U, f$ in a stetig ist.

14 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f ist stetig in a , genau dann, wenn jede der Komponenten Funktionen $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, m$ stetig in a ist.

Beweis. Der Beweis beruht wie der Beweis des Satzes 9 auf der Äquivalenz der Maximumnorm auf \mathbb{R}^m zur euklidischen Norm auf \mathbb{R}^m , genauer auf der Beziehung

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_1|, \dots, |x_m|\} \leq \sqrt{m} \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

□

15 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a \in U$. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann in a stetig, wenn zu jeder offenen Umgebung $F = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$ des Punktes $f(a) \in \mathbb{R}^m$ eine offene Umgebung $W = W(a) \subset \mathbb{R}^n$ des Punktes $a \in V$ existiert, so dass $f(W) = \{f(x) \mid x \in U \cap W\} \subset F$ gilt.

Beweis. " \Rightarrow " " f ist stetig. sei $V = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Umgebung des Punktes $a \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, s.d. $B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$. f ist stetig in $a \Rightarrow \exists \delta > 0$, s.d. $x \in \underbrace{B(a, \delta) \cap U}_{:=W}$

$\Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$

" \Leftarrow " Sei $\forall V(f(a))$ -offen, $\exists W(a)$ -offen s.d. $f(W) \subset V$ gilt. $\forall \varepsilon > 0$ sei $V = B(f(a), \varepsilon)$, dann $\exists W(a)$ -offen s.d. $f(W) \subset B(f(a), \varepsilon) \Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d. $B(a, \delta) \subset W$
 $\Rightarrow f(B(a, \delta) \cap U) \subset B(f(a), \varepsilon) \Rightarrow f$ ist stetig in a □

16 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f ist genau dann auf U stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(V) := \{x \in U : f(x) \in V\}$ einer jeden offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ unter f selbst wieder offen ist.

Beweis. " \Rightarrow " " f ist stetig auf U . Sei V in \mathbb{R}^m offen. Sei $a \in f^{-1}(V)$, d.h. $f(a) \in V \xrightarrow{\text{Satz 15}} \exists W(a) \subset \mathbb{R}^n$ offen, s.d. $f(W(a) \cap U) \subset V \Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d. $B(a, \delta) \subset W(a) \Rightarrow W(a) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$
" \Leftarrow " Für $a \in f^{-1}(V)$ sei $W(a) := f^{-1}(V) \xrightarrow{\text{Satz 15}} f$ stetig in a □

Für stetige Abbildung des \mathbb{R}^n mit Werten in \mathbb{R} gelten Rechenregeln, die denen für das Rechnen mit stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entsprechen und die völlig analog zu beweisen sind:

17 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ seien beide stetig an der Stelle $a \in U$, dann gilt :

- a) Die Funktion $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in a
- b) Die Funktion $(f \cdot g) : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in a
- c) Falls $g(a) \neq 0$ existiert eine offene Umgebung $V = V(g)$ mit $g(x) \neq 0 \forall x \in V$, die Funktion $\left(\frac{f}{g}\right) : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in a .

Bemerkung

Die Übertragung des Satzes 17 auf dem Fall \mathbb{R}^m -wertiger Abbildungen ist nicht uneingeschränkt möglich. Folgende Version auf deren Beweis wie ebenfalls verzichten können, ist aber gültig.

18 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig in a . Dann gilt:

- a) Ist die Abbildung $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig in a , so ist auch die Abbildung $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in a .
- b) Ist die Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in a , so ist auch die Abbildung $(f \cdot g) : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in a .
- c) Ist die Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in a und $g(a) \neq 0$, so existiert eine offene Umgebung $V = V(a)$ mit $g(x) \neq 0 \forall x \in V$; die Abbildung $\left(\frac{f}{g}\right) : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in a .

Auch die Komposition stetiger Abbildungen liefert wieder eine stetige Abbildung:

19 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und seien $f : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ sowie $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ Abbildungen für die gilt: f ist stetig in $x_0 \in V$, g ist stetig in $y_0 = f(x_0) \in V$. Dann ist die Abbildung $(g \cdot f) : U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ stetig in x_0

Beweis. Ist $W = W((g \cdot f)(x_0))$ eine offene Umgebung des Punktes $|g \cdot f| = g(y_0) \in \mathbb{R}^k$, so gibt es wegen der Stetigkeit von g an der Stelle y_0 nach Satz 15 eine offene y_0 -Umgebung $W_1 = W(y_0) = W(f(x_0)) \subset \mathbb{R}^m$ mit $g(W_1) \subset W$. Ebenso impliziert die Stetigkeit von f in x_0 die Existenz einer offenen Umgebung $W_2 = W_2(x_0)$ mit $f(W_2) \subset W_1$. Offenbar ist dann $(g \cdot f)(W_2) \subset g(f(W_2)) \subset g(W_1) \subset W$, und die Stetigkeit von $(g \cdot f)$ in x_0 ist bewiesen \square

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und sei (f_k) eine Folge von Abbildungen $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$.

- a) (f_k) heißt auf D *gleichmäßig konvergent* gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \forall x \in D, \forall k \geq k_0$$

- b) (f_k) heißt auf D *lokal-gleichmäßig konvergent* gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn es $\forall a \in D \exists V = V(a) \subset \mathbb{R}^n$ -offen s.d. die Folge $(f_k|_{D \cap V})$ auf $D \cap V$ gleichmäßig gegen $f|_{D \cap V}$ konvergiert.

Bemerkung

- b) $\not\Rightarrow$ a). *Gegenbeispiel:* Sei $D = (0, +\infty)$ und $f_k(x) := \frac{1}{kx}$ für $1, 2, \dots$ lokal-gleichmäßig konvergiert gegen 0, aber nicht gleichmäßig.

20 Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und sei (f_k) eine Folge stetiger Abbildungen $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ welche auf D lokal-gleichmäßig gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ konvergiert. Dann ist f stetig auf D

§4 Kompakte Mengen

Definition: Sei $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

a) Unter dem *Durchmesser von \mathcal{S}* versteht man die Zahl

$$d(\mathcal{S}) := \sup \{ |x - y| : x, y \in \mathcal{S} \} \leq \infty$$

b) \mathcal{S} heißt *beschränkt*, falls $d(\mathcal{S}) < \infty$ gilt.

Bemerkung

a) Ist $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und ist $x_0 \in \mathcal{S}$ gilt $\mathcal{S} \subset B(0, |x_0| + d(\mathcal{S}))$, denn $\forall y \in \mathcal{S}$ ist $|y| = |y - x_0 + x_0| \leq |y - x_0| + |x_0| \leq d(\mathcal{S}) + |x_0|$.

b) Ist $\mathcal{S} \subset B(0, r)$, so folgt $d(\mathcal{S}) \leq 2r$, denn $\forall x, y \in \mathcal{S}$ gilt $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2r \implies d(\mathcal{S}) \leq 2r$.

c) Für $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ gilt $d(\mathcal{S}_1) \leq d(\mathcal{S}_2)$

Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ und sei J eine beliebige (endlich oder unendliche) Indexmenge.

- a) Eine Familie $(V_j)_{j \in J}$ von offenen Menge $V_j \subset \mathbb{R}^n$ heißt (offene) Überdeckung von K wenn $K \subset \bigcup V_j$ gibt.
- b) K heißt *kompakt*, wenn es *zu jeder* offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ der Menge K endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_m \in I$ gibt, so dass bereits

$$K \subset \bigcup_{p=1}^m U_{i_p}$$

gibt. Mann nennt ein solches endliches Mengensystem $\{U_{i_p}; p = 1, 2, \dots, m\}$ offener Menge der Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von K , welches die Eigenschaft $K \subset \bigcup_{p=1}^m U_{i_p}$ hat eine $(U_i)_{i \in I}$ zugehörige *offene Teilüberdeckung* der Menge \mathbb{R}

Beispiele

- a) Die Menge $K_1 := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ nicht kompakt, weil sie nicht abgeschlossen ist.
- b) $K_2 \cup \{0\}$ ist aber kompakt.

21 Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt: Ist K kompakt, so ist K abgeschlossen und beschränkt.

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \iff K \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

Beweis. a) K ist beschränkt. Wir betrachten folgende Überdeckung von \mathbb{R}^n bei offene Menge $U_k := B(0, k)$, $k \in \mathbb{N}$ Dann ist $K \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$. K -kompakt, $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine offene Überdeckung von $K \implies \exists k_1, k_2, \dots, k_m$ s.d. $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_{k_i}$. Sei $k^* := \max\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$. Dann ist $K \subset B(0, k^*) \implies d(K) < 2k^* \implies K$ -beschränkt

b) " \Leftarrow " K ist abgeschlossen (Widerspruchsbeweis!) Sei K ist nicht abgeschlossen. Dann gibt es ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ eine Folge $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in K \forall i \in \mathbb{N}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$. Wir betrachten folgende offene Überdeckungen K : $U_i := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x, \frac{1}{i})}$, $i = 1, 2, \dots$. Denn $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \mathbb{R}^n \setminus x \supset K \implies \exists i_1, i_2, \dots, i_m$ s.d. $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$. Sei $i^* = \max\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ Dann ist $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x, \frac{1}{i^*})} \implies K \cap \overline{B(x, \frac{1}{i^*})} = \emptyset$ Widerspruch.

□

22 Satz: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist jede abgeschlossene Menge $A \subset K$ ebenfalls Kompakt.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Dann ist die Familie $\{\{U_i\}_{i \in I}, \mathbb{R}^n \setminus A\}$ eine Überdeckung von $\mathbb{R}^n \supset K$, K -kompakt $\implies \exists U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ s.d. $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$ (Weil $A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$) $\implies A$ -kompakt.

□

Quader: Eine Menge in $Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossene Quader*, wenn es beschränkt, abgeschlossene Intervalle $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$, $-\infty < a_k < b_k < +\infty$, $k = 1, 2, \dots, n$ gibt, so dass $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k, \forall k = 1, 2, \dots, n\}$ gilt.

23 Satz: Jede abgeschlossene Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Wir werden folgende Resultat brauchen: *Cantorsche Schachtelungsprinzip* :

24 Satz: Sei (A_k) eine Folge nicht-leerer, abgeschlossene Menge $A_k \subset \mathbb{R}^n$ mit der folgende Eigenschaften:

- a) (A_k) ist absteigend, d.h es gilt $A_{k+1} \subset A_k \forall k \in \mathbb{N}$
- b) Die Folge $(d(A_k))$ der Durchmesser der Menge A_k ist eine Nullfolge (d.h $d(A_k) \rightarrow 0$

Dann gibt es genau einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ der allen Menge A_k angehört:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}$$

Beweis. a) Wir zeigen dass $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$. Sei $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge s.d. $x_k \in A_k \forall k \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass $d(A_k) \rightarrow 0$ wenn $k \rightarrow \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $d(A_k) < \varepsilon \forall k \geq k_0$. Dann ist $\forall k, m \geq k_0$ $x_k \in A_k \subset A_{k_0}, x_m \in A_m \subset A_{k_0} \implies x_k, x_m \in A_{k_0} \implies \|x_k - x_m\| \leq d(A_{k_0}) < \varepsilon \implies (x_k)$ -eine Cauchy-Folge. $\implies \exists x \in \mathbb{R}^n$ s.d. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \forall x \in \mathbb{N}$ ist $x_m \in A_m \subset A_k, m \geq k, A_k$ -abgeschlossen $\implies x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m \in A_k \forall k \in \mathbb{N} \implies x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

b) Wir zeigen, dass $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ nur eine Punkt x . (Widerspruchsbeweis). Sei $x \neq y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann ist $x, y \in A_k, k \in \mathbb{N} \implies \|x - y\| \leq d(A_k) \rightarrow 0$ wenn $k \rightarrow \infty \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y$ -Widerspruch

□

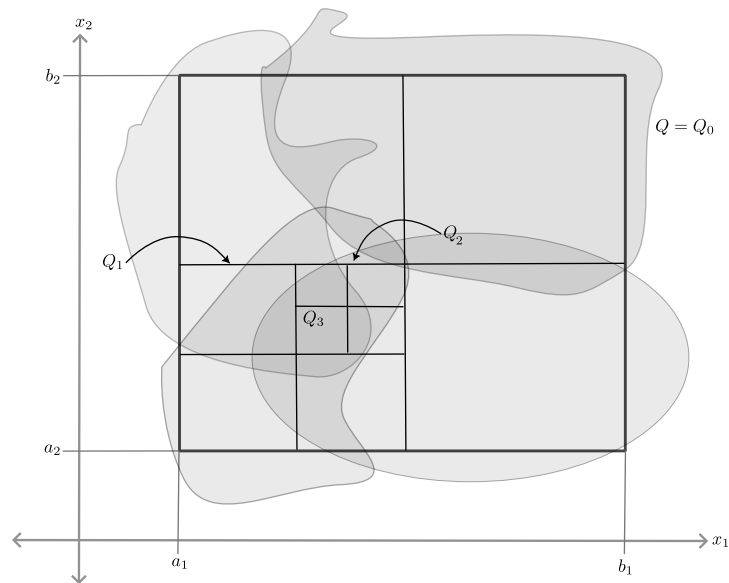
Das Cantorsche Schachtelungsprinzip werden wir zum Beweis des Satzes 23 auf eine geeignete absteigende Folge abgeschl. Quader an: Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschl. Quader und (U_i) eine offene Überdeckung von Q .

Annahme: Zu (U_i) gibt es keine endliche Teilüberdeckung von Q . Wir konstruieren induktiv eine absteigende Folge

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

abgeschl. Quader $Q_m \subset \mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaften:

- a) $\forall m \in \mathbb{N}$: Es gibt keine (U_i) zugehörige endliche Teilüberdeckung von Q_m
- b) $d(Q_m) = \frac{1}{2^m} d(Q_0) (\implies \lim_{m \rightarrow \infty} d(Q_m) = 0)$



Unsere Ausgangsquader $Q_0 = Q$ hat die geforderten Eigenschaften. Seine $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ bereits konstruiert. Es gelte $Q_m = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R} \forall k = 1, 2, \dots, n$. Wir splitten jedes der Intervalle I_k in der Intervallmitte auf und erhalten Unterteilung $I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}$ mit $I_{k_1} = [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$, $I_{k_2} = [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$, $1 \leq k \leq n$. Die kartesischen Producte $I_{1_{\gamma_1}} \times I_{2_{\gamma_2}} \times \dots \times I_{n_{\gamma_n}}$, $\gamma \in 1, 2 \forall 1 \leq k \leq n$ aller Intervallhälften der I_k , $k = 1, 2, \dots, n$ unterteilen den abgeschlossener Quader Q_m in in insgesamt 2^n vielen kleinere abgeschlos. Quader Nur können wir folgendes Kriterium formulieren:

25 Satz von Heine-Borel: Für ein Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) K ist abgeschlossen und beschränkt
- b) K ist kompakt

Beweis. Siehe Satz 21. □

Korollar

Für jede kompakte Teilmenge $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\sup A \in A, \inf A \in A$$

Beweis. Da A als kompakte Menge insbesondere beschränkt ist, existieren $\sup A, \inf A \in \mathbb{R}$. Weil sowohl $\sup A$ als auch $\inf A$ Häufungspunkte geeigneter Folgen in A sind, impliziert die Abgeschlossenheit von A in Verbindung mit Satz 8, dass $\sup A \in A$ und $\inf A \in A$ gilt. □

26 Satz: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $K \subset U$ -kompakt und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ -stetige Abbildung, so ist $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ ebenfalls kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Sei $\forall i \in I, V_i := f^{-1}(U_i)$, f -stetig $\implies i \in I$ V_i -offen. Die Familie $(V_i)_{i \in I}$ ist eine Überdeckung von K , K -kompakt $\implies \exists V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_n}$ s.d. $K \subset \bigcup_{p=1}^n U_{i_p} \implies f(K) \subset \bigcup_{p=1}^n U_{i_p} \implies f(K)$ -kompakt □

27 Satz: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset U$ kompakt und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf U , so gibt es Punkte $p, q \in K$ mit $f(p) = \sup \{f(x) : x \in K\}$, $f(q) = \inf \{f(x) : x \in K\}$

Beweis. Laut Satz 26 ist $A := f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also im Hinblick auf dem Korollar zu Satz 25: $\sup f(K) \in f(K)$, $\inf f(K) \in f(K)$. Deshalb können wir $p, q \in K$ mit gewünschten Eigenschaften finden \square

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Dann nennt man f *gleichmäßig stetig* auf U wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } |x - y| < \delta, x, y \in U \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

28 Satz: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Dann ist f gleichmäßig stetig auf K

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. $\forall a \in K \exists r(a) > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in B(a, r(a)) \cap K$ (wegen der Stetigkeit von f in a) Offenbar ist $K \subset \bigcup_{a \in K} B(a, \frac{r(a)}{2})$. K -kompakt $\implies a_1, a_2, \dots, a_k$ s.d $K \subset \bigcup_{p=1}^k B(a_p, \frac{r(a_p)}{2})$. Man setz nun $\delta := \frac{1}{2} \min \{r(a_1), \dots, r(a_k)\}$ Seien dann $x_1, x_2 \in K$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ beliebig gewählt. Wir fixieren ein $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ mit $x_1 \in B(a_i, \frac{r(a_i)}{2})$; dann gilt auch $|x_2 - a_i| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - a_i| < \delta + \frac{r(a_i)}{2} < r(a_i)$ also liegt mit x_1 auch x_2 in $B(a_i, r(a_i))$, und wir erhalten $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Damit ist die gleichmäßig Stetigkeit von f auf K beweisen. \square

§5 Partielle Ableitung

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ferner

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

eine Funktion auf U und $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$

- a) f heißt in a *partiell differenzierbar* nach x_i oder auch *partiell differenzierbar bezüglich der i -ten Koordinate*, wenn der Grenzwert

$$D_i f(a) : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)_i := \lim_{\substack{t \rightarrow a_i \\ t \neq a_i}} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{t - a_i}$$

dann $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ die *partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle a*

- b) f heißt in a *partiell differenzierbar*, wenn f in a nach *allen* $x_i, i = 1, \dots, n$ partiell differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man den Vektor $\text{grad}(f(a)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ den *Gradient von f in a*
- c) f heißt auf U *partiell differenzierbar*, wenn f partiell differenzierbar in a für jedes $a \in U$ ist.
- d) f heißt in a *stetig partiell differenzierbar*, wenn f auf U partiell differenzierbar ist und zusätzlich alle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$, an der Stelle a stetig sind.
- e) f heißt *stetig partiell differenzierbar auf U* , wenn f in jedem $a \in U$ stetig partiell differenzierbar ist. Für die Menge aller solcher Funktion führen wir die Bezeichnung

$$C^1(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig partiell differenzierbar auf } U\}$$

ein.

Beispiel

...

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ferner $f : U \rightarrow \mathbb{R}(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Funktion auf U und $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $i \in 1, \dots, n$

- a) f heißt in a k -mal partiell differenzierbar nach x_i , wenn f $(k-1)$ -mal partiell differenzierbar auf U ist und alle partiell Ableitungen $(k-1)$ -ter Ordnung von f an der Stelle a partiell differenzierbar nach x_i sind.
- b) f heißt in a k -mal partiell differenzierbar, wenn f in a k -mal partiell differenzierbar ist. Nach x_j für alle $j \in 1, 2, \dots, n$ ist. Die partielle Ableitungen der Ordnung k von f in a sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} D_{i_k} (D_{i_{k-1}} (\dots D_{i_2} (D_{i_1}(f)) \dots)) (a) &:= \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a) \\ &:= D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f(a) \\ &:= f_{x_{i_k} x_{i_{k-1}} \dots x_{i_1}}^{(k)}(a) \end{aligned}$$

wobei die Indizes i_1, \dots, i_k voneinander unabhängig die Menge $1, 2, \dots, n$ durchlaufen.

- c) f heißt k -mal partiell differenzierbar auf U , wenn f in jedem $a \in U$ k -mal partiell differenzierbar ist. Die Funktionen $D_{i_k} \dots D_{i_1} f : U \rightarrow \mathbb{R}, i_1, i_2, \dots, i_k \in 1, \dots, n$ heißen partiell Ableitung k -te Ordnung von f .
- d) f heißt k -mal stetig partiell differenzierbar auf U wenn f k -mal partiell differenzierbar auf U ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ auf U stetig sind. Für die Menge aller solcher Funktionen führen wir die Bezeichnung

$$C^k(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar auf } U\}$$

ein.

29 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar auf U ; außerhalb seien alle partiellen Ableitungen 2.Ordnung von f stetig auf U . Dann gilt :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \forall i, j \in 1, \dots, n$$

Korollar

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 2$ und sei $f \in C^k(U)$. Dann gilt für jedes k -Tupel von Indizes $(i_1, i_2, \dots, i_k \in 1, 2, \dots, n^k)$ und für jedes Permutation $\pi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$:

$$D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} D_{i_{\pi(k-1)}} \dots D_{i_{\pi(1)}} f$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über k . Den Induktions Anfang bildet Satz 29 im Induktionsschluss verwendet man die Tatsache, dass sich jede Permutation als Hintereinanderausführung endliche vieler Vertauschungen benachbarter Glider darstellen lässt.

□

§6 Totale Differenzierbarkeit

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 = (x_{01} \cdots x_{0n}) \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf U . f heißt (total) differenzierbar in x_0 , wenn es reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{|x-x_0|} = 0$ gibt, dass

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - x_{0i}) + \varphi(x) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$$

gilt. Man bezeichnet den Vektor $A := (a_1, \dots, a_n)$ als *Differential* von f in x

30 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ sei ferner $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ total differenz in x_0 und $A = (a_1, \dots, a_n)$ wie in der letzten Definition. Dann gilt:

- a) f ist stetig in x_0 .
- b) f ist partiell differenzierbar in x_0 und es gilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = a_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

31 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei partiell differenzierbar auf U , und alle partielle Ableitungen $D_i \left(\text{oder auch } \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$, $1 \leq i \leq n$, seien stetig in $x_0 \in U$. Dann ist f in x_0 total differenzierbar.

Korollar

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf U und x_0 . Dann gilt:

- a) Ist f stetig partiell differenzierbar in x_0 , so ist f an der Stelle x_0 stetig.

- b) Ist f k -mal partiell differenzierbar auf U und sind alle partiell Ableitungen k -te Ordnung von f stetig in x_0 , so sind alle partielle Ableitungen der Ordnungen $\varphi, 0 \leq \varphi \leq k$ ebenfalls stetig in x_0

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n}) \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung auf U , f heißt (total) differenzierbar in x_0 , wenn es eine Matrix $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ und eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\varphi(x)|}{|x - x_0|} = 0$ gibt, sodass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$$

gilt. Der Deutlichkeit halber schreiben wir die obige Gleichung einmal komponentenweise auf:

Ist $f = (f_1, \dots, f_m)$ mit $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m$ und entsprechend $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ mit $\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, m$ so ist die Bedingung $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\varphi(x)|}{|x - x_0|} = 0$ gleichdeutend mit $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_i(x)}{|x - x_0|} = 0 \forall i = 1, \dots, m$ und die Gleichung bedeutet ausführlich, dass $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{0_1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$$

Daran kann man sofort ablesen, dass folgende Satz richtig ist.

32 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f = (f_1, \dots, f_m)$ eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

- f ist total differenzierbar in x_0 genau dann, wenn jede der Komponentenfunktion $f_i, 1 \leq i \leq m$ total differenzierbar in x_0 ist.
- Wenn f in x_0 total differenzierbar ist, so ist f an der Stelle x_0 stetig.
- Wenn f in x_0 total differenzierbar und die $(m \times n)$ Matrix A wie Definition von oben gewählt ist, dann ist alle Komponentenfunktion $f_i, 1 \leq i \leq m$ in x_0 partiell differenzierbar mit $D_\nu f_i(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}(x_0) = a_{i\nu}; \forall \nu = 1, \dots, n; \forall i = 1, \dots, m$.
- Wenn alle Komponentenfunktion f_i auf U partiell differenzierbar sind und alle partiell Ableitungen $D_\nu f_i$ an der Stelle x_0 stetig sind, dann ist f in x_0 total differenzierbar.

Definition: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in $x_0 \in U$, so nennt man die Matrix $Df(x_0) := J_f(x_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$

$$:= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

das *Differential* oder die *Jacobi-Matrix* oder die *Funktionalmatrix* von f in x_0

33 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U, c \in \mathbb{R}$, die Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ seien total differenzierbar in x_0 . Dann gilt:

- a) Die Abbildung $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar in x_0 mit $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$
- b) Die Abbildung $(c \cdot f) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar in x_0 mit $D(cf)(x_0) = cDf(x_0)$

Beweis. Wie in Analysis 1 für reellwertige Funktionen. □

Eine *Productregel* gilt in folgender Form:

34 Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ die Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und die Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ seien total differenzierbar in x_0 . Dann gilt: Die Abbildung $(f \circ g) : U \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_1(g(x)), \dots, f_m(g(x)))$ ist in x_0 total differenzierbar mit

$$\underbrace{D(f \circ g)(x_0)}_{(m \times n)\text{-Matrix}} = \underbrace{f(x_0)}_{(m \times 1)} \cdot \underbrace{Dg(x_0)}_{(1 \times n)} + \underbrace{Df(x_0)}_{(m \times n)\text{-Matrix}}$$

Beweis. Die totale □

35 Kettenregel: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Menge, ferner $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$ Abbildungen mit $g(U) \subset V$. g sei total differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$, f sei total differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$. Dann ist die Abbildung $(f \circ g) : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ total differenzierbar in x_0 mit $\underbrace{D(f \circ g)(x_0)}_{l \times n} = \underbrace{Df(g(x_0))}_{l \times m} \cdot \underbrace{Dg(x_0)}_{m \times n}$

Korollar

$U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, die Abbildung $(g_1, \dots, g_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei total differenzierbar in $x_0 \in U$, es gelte $g(U) \subset V$ und die Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ sei total differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$. Dann ist die Funktion $h := (f \circ g) : U \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar in x_0 mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_0) \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ferner $x_0 \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf U . Dann bezeichnet man für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ den Grenzwert

$$D_v f(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t}$$

(im Falle seiner Existenz) als *Richtungsableitung von f an der Stelle x_0 in Richtung v* und nennt f an der Stelle x_0 in Richtung v differenzierbar

36 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in U$ total differenzierbar Funktion. Dann existiert für jedes $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung $D_v f(x_0)$ von f an der Stelle x_0 in Richtung v und es gilt:

$$D_v f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i = \langle Df(x_0), v \rangle$$

Wobei

$$\text{grad} f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Beweis. Sei ein beliebiger Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gegeben. Die Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $t \mapsto g(t) = x_0 + tv$ ist differenzierbar auf \mathbb{R} , und es ist $g(0) = x_0$. Aufgrund der Stetigkeit von g an der Stelle 0 existiert ein Intervall $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ so dass $g(I_\varepsilon) \subset B(x_0, r)$ gilt, hierbei sei $r > 0$ so gewählt, dass $B(x_0, r) \subset U$ erfüllt ist, was aufgrund der Offenheit von U möglich ist. Dann ist die Funktion $h := (f \circ g) : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ $t \mapsto h(t) := f(x_0 + tv)$ differenzierbar an der Stelle $t = 0$, und nach dem Korollar zur Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} D_v f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = h'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \frac{dg_i}{dt}(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i = \langle Df(x_0), v \rangle \end{aligned}$$

□

§7 Mittelwertsatz

37 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine total differenzierbar Funktion. Seien $a, b \in U$ zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke $|\gamma_{ab}| := \{\gamma_{ab} := a + t(b - a); t \in [1, 0]\} \subset U$ in U enthalten ist. Dann gibt es ein $\xi \in |\gamma_{ab}|$ derart dass $f(b) = f(a) + Df(\xi) \cdot (b - a)$ gibt.

Beweis. Die Abbildung $\gamma_{ab} : [0, 1] \rightarrow U$ $t \mapsto \gamma_{ab}(t) = a + t(b - a)$ ist differenzierbar auf \mathbb{R} mit $D\gamma_{ab}(t) = (b - a) \forall t \in \mathbb{R}$. Da $|\gamma_{ab}| = \gamma_{ab}([0, 1]) \subset U$ gilt und f auf U differenzierbar ist, ist die Komposition $(f \circ \gamma_{ab}) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $[0, 1]$ differenzierbare Funktion, auf die der Mittelwertsatz für Funktionen einer Variabel anwendbar ist. Daher $\exists t_0 \in (0, 1)$ so dass

$$(f \circ \gamma_{ab})(1) = (f \circ \gamma_{ab})(0) + (f \circ \gamma_{ab})(t_0) \cdot (1 - 0) \quad (1)$$

gilt. Da aber $\gamma_{ab}(1) = b$ und $\gamma_{ab}(0) = a$ ist, ferner für $s := \gamma_{ab}(t_0) \in |\gamma_{ab}|$ mit der Kettenregel $(f \circ \gamma_{ab})'(t_0) = Df(\gamma_{ab}(t_0)) \cdot D\gamma_{ab}(t_0) = Df(\xi) \cdot (b - a)$ folgt, ist Gleichung (1) äquivalent zu $f(b) = f(a) + Df(\xi) \cdot (b - a)$ \square

38 Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine total differenzierbare Abbildung. Seien $a, b \in U$, sodass $|\gamma_{ab}| \subset U$. Dann gibt es $\phi_1, \dots, \phi_m \in |\gamma_{ab}|$, sodass :

$$f(b) = f(a) + \begin{pmatrix} Df_1(\phi_1) \\ \vdots \\ Df_m(\phi_m) \end{pmatrix} \cdot (b - a)$$

Beweis. Satz 37 auf f_1, \dots, f_m anwenden. \square

Beispiel

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$

Ist $[a, b] \subset \mathbb{R}$ beschränkt, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so besagt der HDI:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

Ist wieder $\gamma_{ab}(f) = a + t(b - a)$, so erhält man durch Substitution

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 f'(\gamma_{ab}(t)) \gamma'_{ab}(t) dt = \left(\int_0^1 f'(\gamma_{ab}(t)) dt \right) \cdot (b - a)$$

Definition: Sei $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$ und $A : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ mit $a_{ij} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$. Dann ist die Integral über die *matrixwertige Abbildung* A gegeben durch:

$$\int_{\alpha}^{\beta} A(t) dt = \left(\int_{\alpha}^{\beta} a_{ij}(t) dt \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

39 Satz: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Seien $a, b \in U$ sodass $|\gamma_{ab}| \subseteq U$. Dann gilt:

$$f(b) - f(a) = \underbrace{\left(\int_0^1 Df(\gamma_{ab}(t)) dt \right)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \underbrace{(b - a)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Beweis. Wir wenden den HDI an auf $g_i := (f_i \circ \gamma_{ab}) \in C^1([0, 1])$ für $i = 1, \dots, m$ und erhalten mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f_i(b) - f_i(a) &= g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g_i(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma_{ab}(t)) \cdot (b_j - a_j) \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma_{ab}(t)) \cdot dt \right)}_{v_j} \underbrace{(b_j - a_j)}_{u_j} \\ &= \left\langle \left(\int_0^1 Df_i(\gamma_{ab}(t)) dt \right), (b - a) \right\rangle \end{aligned}$$

Dies zeigt die i -te Zeile der gewünschte Gleichung. □

Halbsatz: Ist $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ ein Kompaktes Intervall, $v : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildung. So gilt:

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt \right\|_2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|v(t)\|_1 dt$$

Beweis. Sei $u := \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \|u\|_2^2 &= \langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} v_j(t) dt \cdot u_j \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{j=1}^n v_j(t) \cdot u_j \right) dt \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle v(t), u \rangle dt \\
 &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |\langle v(t), u \rangle| dt \\
 &\stackrel{\text{Schwz.}}{\leq} \int_{\alpha}^{\beta} (\|v(t)\|_2 \cdot \|u\|_2) dt \\
 &= \|u\|_2 \int_{\alpha}^{\beta} \|v(t)\|_2 dt
 \end{aligned}$$

Für

$$\|u\|_2 > 0 \implies \|u\|_2 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt$$

Für

$$\|u\|_2 = 0 \implies \|u\|_2 = 0 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt$$

□

Korollar

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar. Seien $a, b \in U$ mit $|\gamma_{ab}| \subseteq U$. Dann gilt:

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq M \|b - a\|_2$$

für $M := \sup \{ \|Df(x)\| \mid x \in |\gamma_{ab}| \}$. Dabei ist die Matrix norm $\|A\|$ für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben durch

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|_2=1}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 M &= \sup_{\substack{x \in |\gamma_{ab}| \\ v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|_2=1}} \underbrace{\frac{\|Df(x) \cdot v\|_2}{\|v\|_2}}_{G(x,v)} < \infty, \text{ da} \\
 G &: \underbrace{|\gamma_{ab}| \times \partial \mathbb{B}(0,1)}_{\text{kompakt}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}
 \end{aligned}$$

Beweis. Es ist :

$$\begin{aligned}
 \|f(b) - f(a)\|_2 &= \left\| \left(\int_0^1 Df(\gamma_{ab}(t)) dt \right) \cdot (b - a) \right\|_2 \\
 &\leq \int_0^1 \|Df(\gamma_{ab}(t)) \cdot (b - a)\|_2 dt \\
 &\leq \int_0^1 M \cdot \|b - a\|_2 dt \\
 &= M \cdot \|b - a\|_2
 \end{aligned}$$

□

§8 Die Taylorformel

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig partiell differenzierbar Funktion (C^k). Dann bezeichnet man für $0 \leq m \leq k$ das durch

$$T_{f,x_0,m}(x) := \sum_{i=0}^m \left(\sum_{\substack{|\alpha|=L \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{(x-x_0)^\alpha} \right)$$

definiert Polynom $T_{f,x_0,m}$ als **m -tes Taylorpolynom von f in x_0** . Hierbei wird mit $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ die **Länge des Multiindex** $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und mit $\alpha!$ das Produkt $\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$ bezeichnet. Der **Differentialoperator** D^α ist für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gegeben durch $D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f \in C^{|\alpha|}$ dabei ist $D_\gamma^{\alpha_r} := \underbrace{D_\gamma D_\gamma \dots D_\gamma}_{\alpha_r \text{ -mal}}$ $\gamma = 1, \dots, n$ für $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

mit y^α die reelle Zahl $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot y_n^{\alpha_n}$ gemeint. Wie im Kapitel 7 werde für $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_{x_0 x}$ die C^∞ -Ableitung $\gamma_{x_0 x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma_{x_0 x}(t) := x_0 + t(x - x_0)$ und mit $|\gamma_{x_0 x}| = \gamma_{x_0 x}([0, 1])$ die Verbindungsstrecke von x_0 und x bezeichnet. Die Taylorformel für C^{k+1} Fkten mehrerer veränderlichen lautet dann wie folgt:

40 Taylor: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \xrightarrow{C^{k+1}}$ eine $(k+1)$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Ist dann $x \in U$ ein Punkt mit $\|\gamma_{x_0 x}\| \in U$, so existiert ein $\xi \in |\gamma_{x_0 x}|$ mit

$$f(x) = \sum_{l=0}^k \left(\sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha \right) + \sum_{\substack{|\alpha|=k+1 \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha$$

Bemerkung:

Unter den Voraussetzungen von Satz 40 wird die Funktion f an der Stelle x durch das k -te Taylorpolynom von f in x_0 approximiert. Der Fehler $R_{k+1}(x) := f(x) - T_{f,x_0,k}(x)$ der Approximation, das **k -te Restglied** in x kann in der Form

$$R_{k+1}(x) = \sum_{\substack{|\alpha|=k+1 \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D_\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

dargestellt werden, wobei $\xi \in |\gamma_{x_0 x}|$ geeignet zu wählen ist.

Beweis. Wir wenden den Taylorschen Satz für Funktionen einer Veränderlichen auf die Funktion $g : (f \circ \gamma_{x_0 x}) : [0, 1] \xrightarrow{c^{k+1}} \mathbb{R}$ an. Danach existiert ein $t_0 \in (0, 1)$ mit

$$g(1) = g(0) + \sum_{l=1}^k \frac{g'(0)}{l!} (1-0)^l + \frac{g^{(k+1)}(t_0)}{(k+1)!} (1-0)^{k+1}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $f(x) = f(x_0) \sum_{l=1}^n \frac{g'(0)}{l!} + \frac{g^{(k+1)}(t_0)}{(k+1)!}$. Zum Beweis der Taylorformel genügt es also zu zeigen: \square

Behauptung:

$\forall t \in [0, 1], l = 1, \dots, k+1 :$

$$g^{(l)}(t) = \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} l! \frac{D_\alpha f(\gamma_{x_0 x}(t))}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \quad (1)$$

Also Satz 40 für $\xi := \gamma_{x_0 x}(t)$

Beweis. Nach der Kettenregel ist $g'(t) = \sum_{i=1}^m D_i f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot (x_i - x_0) \quad \forall t \in [0, 1]$ durch Induktion über l folgt ebenso mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$g^{(l)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^n D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot (x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_l} - x_{0i_l}) \quad (2)$$

für alle $t \in [0, 1]$ gilt zum Beweis von (1) müssen wir nur noch die Summanden in (2) geeignet zusammenfassen. Dabei nutzen wir:

Hilfssatz

Seien $U \in \mathbb{R}^n$ offen, $2 \leq k \in \mathbb{N}, f \in C^k(U)$ und $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, n\}^k$. Dann gilt für jede Permutation $\pi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\} : D_{i_n} D_{i_{n-1}} \dots D_{i_2} D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} D_{i_{\pi(k-1)}} \dots D_{i_{\pi(1)}} f$. Der Beweis ist leicht durch Induktion über k zu führen. Für $k = 2$ geht der Hilfssatz in Satz 29 über, nach Induktionsvoraussetzung ist die Vertauschung benachbarter $D_\gamma \cdot D_\mu$ erlaubt, der Induktionsschritt kann also vollzogen werden, wenn man berücksichtigt, dass sich jede Permutation als Hintereinanderausführung solcher Vertauschungen beschreiben lässt \square

Der Hilfssatz besagt, dass in Gl (2) alle Summanden $D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot (x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_l} - x_{0i_l})$ in denen jeder Index γ genau a_γ -mal auftritt. ($1 \leq \gamma \leq n, a_1 + \dots + a_n = l, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$) folgt aus (2): $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
g^{(l)}(t) &= \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^n D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot \prod_{\alpha=1}^n (x_\gamma - x_{0\gamma})^{\alpha_\gamma} \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{l!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot \prod_{\alpha=1}^n (x_\gamma - x_{0\gamma})^{\alpha_\gamma} \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} l! \frac{D^\alpha f(\gamma_{x_0 x}(t))}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha
\end{aligned}$$

Damit ist sowohl (1), als auch der Taylorsche Satz bewiesen.

41 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $x_0 \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Für $r > 0$ gelte $B(x_0, r) \subset U$. Dann gibt es eine Funktion $\eta : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\eta(x_0) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^k} = 0$. Sodass $\forall x \in B(x_0, r)$

$$f(x) = \sum_{l=0}^k \left(\sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \cdot (x - x_0)^\alpha \right) \eta(x)$$

Spezialfall für $k = 2$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f \in C^2(U)$. Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, sodass die durch

$$f(x) = c + \langle a, (x - x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - x_0), A \cdot (x - x_0) \rangle + \eta(x) \quad \forall x \in U$$

definierte Funktion $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Eigenschaften

$$\eta(x_0) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^2} = 0$$

hat.

Hesse Matrix: Sind $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist 2-mal stetig partiell differenzierbar, so heißt die symmetrische Matrix :

$$\text{Hess} f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Hessesche Matrix von f in x_0

§9 Lokale Extrema

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

- a) f hat in x_0 eine *lokales Minimum* (bzw *lokales Maximum*), wenn es eine offene Umgebung $x_0 \in V \subset U$ gibt mit $\forall x \in V : f(x) \geq f(x_0)$ (bzw. \leq) Falls man sogar V so wählen kann, dass

$$\forall x \in V : f(x) > f(x_0) \text{ (bzw. } < \text{)}$$

so spricht man von einem *isoliertes lokal Minimum* (bzw. *Maximum*) von f

- b) Die Bezeichnung *(isoliertes) lokales Extremum* bezeichnet sowohl Minima als auch Maxima

42 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum und sei partiell differenzierbar in x_0 . Dann gilt $\text{grad } f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = 0$

Beweis. Sei $r > 0$ sodass $B(x_0, r) \subset U$ gilt. Sei ferner $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis. Dann ist für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die Funktion $g_{ij} : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_0 + t \cdot e_j)$ in der Stelle $t = 0$ durch $g'_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ differenzierbar und nimmt dort ein Extremum an. Aus Analysis 1 : $g'_j(0) = 0$ \square

Definition: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und Q_A die durch A gegebene quadratische Form auf \mathbb{R}^n so nennt man A :

a) **positiv definit** ($A \gg 0$), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle > 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

b) **positiv semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle \geq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

c) **negativ definit** ($A \ll 0$), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle < 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

d) **negativ semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle \leq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

e) **indefinit**, falls Vektoren $\zeta, \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existieren mit:

$$Q_A(\zeta) < 0; \quad Q_A(\bar{\zeta}) > 0$$

Zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit

$$a) \quad A \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$b) \quad \forall i, j = 1, \dots, n : \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

Die Zahlen λ_j heißen *Eigenwerte von A* , die x_i sind *Eigenvektoren von A* zum Eigenwert λ_j . Bezüglich einer Orthonormalbasis hat, die durch A gegebene quadratische Form die Gestalt:

$$\begin{aligned} \zeta = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j &\implies Q_A(\zeta) = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, A \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \left\langle v_i, \underbrace{A v_j}_{=\lambda_j v_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \end{aligned}$$

Lemma

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt:

- a) A ist positiv definit genau dann, wenn $\lambda_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- b) A ist positiv semidefinit genau dann, wenn $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- c) A ist negativ definit genau dann, wenn $\lambda_j < 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- d) A ist negativ semidefinit genau dann, wenn $\lambda_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- e) A ist indefinit genau dann, wenn es $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $\lambda_i, \dots, \lambda_j < 0$

43 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion, also zwei Mal stetig differenzierbar mit $\text{grad} f(x_0) = 0$. Dann gilt:

- a) Ist $\text{Hess} f(x_0) \gg 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Minimum
- b) Ist $\text{Hess} f(x_0) \ll 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Maximum
- c) Ist $\text{Hess} f(x_0)$ indefinit, so hat f an der Stelle x_0 kein lokales Maximum

Beweis. Sei $A := \text{Hess} f(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $D_a f$ eine C^2 Funktion ist, ist A symmetrisch, welche nach Voraussetzung ist A positiv definit.

Die durch A gegebene quadratische Form Q_A eine stetige Funktion auf \mathbb{R}^n . Nimmt also auf dem Kompaktum:

$$S := \partial B(0, 1) = \{\zeta \in \mathbb{R}^n : |\zeta| = 1\}$$

ein Minimum an. Es gibt also $\xi \in S$ mit $Q_A(\xi) \leq Q_A(\zeta) \forall \zeta \in S$, wobei positiv Definitheit bedeutet: $4\varepsilon = Q_A(\xi) > 0$. Daraus folgt

$$Q_A(\zeta) \geq 4\varepsilon |\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

da:

$$\begin{aligned} Q_A(S) &= Q_A\left(\frac{|\zeta|}{|\zeta|}\zeta\right) \\ &= |\zeta|^2 \underbrace{Q_A\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}_{\geq 4\varepsilon} \geq |\zeta|^2 4\varepsilon \end{aligned}$$

Aus dem Korollar zum Satz 4.1 folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \langle \text{grad} f(x_0), (x - x_0) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\langle x - x_0, A(x - x_0) \rangle}_{=Q_A(x-x_0)} + \eta(x) \end{aligned}$$

a) Siehe oben

b) Ist $\text{Hess} f(x_0) \ll 0$, so ist

$$-\text{Hess} f(x_0) = \text{Hess}(-f)(x_0) \ll 0$$

Aus a) folgt: $-f$ hat in x_0 ein isoliertes lokales Minimum

c) Ist $A = \text{Hess} f(x_0)$ indefinit, so gibt es $\zeta, \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\zeta| = |\bar{\zeta}| = 1$ und $Q_A(\zeta) =: \alpha > 0$ und $Q_A(\bar{\zeta}) =: \beta < 0$

Für genügend kleine $|t| \ll 1$ liegen die Punkte $x_0 + t\zeta, x_0 + t\bar{\zeta} \in U$ und es gilt:

$$|\eta(x_0 + t\zeta)|$$

□

§10 Implizite Funktionen

Die zentrale Fragestellung dieses Paragraphen ist folgende: Gegeben sei eine Gleichung (bzw. ein System von m Gleichungen) $F(x, y) = 0$ durch die Abbildung $F : U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie eine Lösung (a, b) : $F(a, b) = 0$. Gibt es dann eine Umgebung $V_1 \times V_2 \ni (a, b)$ in $U_1 \times U_2$ und eine Abbildung $g : V_1 \rightarrow V_2$ mit $F(x, g(x)) = 0 \forall x \in V_1$? Und wenn ja, ist dieses g eindeutig? In diesem Fall sagen wir, dass die Abbildung g durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ *implizit definiert* ist.

44 Satz: Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $a \in U_1, b \in U_2$ und sei $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = 0$$

Es gebe eine differenzierbare Funktion $g : U_1 \rightarrow U_2$ mit $g(a) = b$ und $F(x, g(x)) = 0 \forall x \in U_1$. Dann gilt: $\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

Beweis. Bezeichne mit ϕ die differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned}\phi : U_1 &\rightarrow U_1 \times U_2 \\ x &\mapsto (x, g(x))\end{aligned}$$

So ist die Verkettung $F \circ \phi$ die konstante Nullfunktion ist. Aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
 0 &= D(F \circ \phi)(x) \\
 &= DF(\phi(x)) \cdot D\phi(x) \\
 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, g(x)), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, g(x)), \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) & \dots & & \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(x), \right)
 \end{aligned}$$

Für $x = a$ hat man aus $g(a) = b$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ also: $\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} \cdot (\text{die obige Matrix})$$

□

In Verbindung mit der nicht-Entartungsbedingung $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$, kann man bereits aus der Stetigkeit der implizit definierten Funktion g auf f die Differenzierbarkeit schließen. Denn es gilt:

45 Satz: Seien $a \in \mathbb{R}^k, b \in \mathbb{R}, a, r_2 > 0$ sowie $U_1 = B(a, r_1) \subset \mathbb{R}^k, U_2 := B(b, r_2)$ Sei ferner $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine in (a, b) differenzierbare Funktion mit $F(a, b) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ Ist dann $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(a) = b, g(U_1) \subset U_2 : F(x, g(x)) = 0$ so folgt: g ist an der Stelle a differenzierbar und es gilt: $\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

Index

abgeschlossene Hülle, 5

Dreiecksgleichung, 3

Häufungspunkt, 8

Häufungsspunkt, 6

innerer Punkt, 6

nominierter Vektorraum, 3

Norm, 3

Skalarprodukt, 2

Vektorraum, 2