Unsere Ausgangsquader $Q_0 = Q$ hat die geforderten Eigenschaften. Seine $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$ bereits konstruiert. Es gelte $Q_m = I_1 \times I_2 \times \cdots I_n$ , $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}\ \forall k = 1, 2, \cdots, n$ . Wir splitten jedes der Intervalle $I_k$ in der Intervalllemitte auf und erhalten Unterteilung $I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}$ mit $I_{k_1} = \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right]$ , $I_{k_2} = \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right]$ , $1 \leq k \leq n$. Die kartesischen Produckte $I_{1_{\gamma_1}} \times I_{2_{\gamma_2}} \times \cdots I_{n_{\gamma_n}}$ , $\gamma \in 1, 2\ \forall 1 \leq k \leq n$ aller Intervallhälften der $I_k$ , $k = 1, 2, \cdots n$ unterteilen den abgeschlossener Quader $Q_m$ in in insgesamt $2^n$ vielen kleinere abgeschlos. Quader Nur können wir folgendes Kriterium formulieren:

**25 Satz von Heine-Borel**: Für ein Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Ausagen äquivalent:

a) $K$ ist abgeschlossen und beschränkt

b) $K$ ist kompakt

*Beweis.* Siehe Satz 21. □

**Korollar**

Für jede kompakte Teilmenge $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$supA \in A,\ infA \in A$$

*Beweis.* Da $A$ als kompakte Menge insbesondere beschränkt ist, existeren $supA,\ infA \in R$. Weil sowohl $supA$ als auch $infA$ Häufungspunkte geeigneter Folgen in $A$ sind, impliziert die Abgeschlossenheit von $A$ in Verbindung mit Satz 8, dass $supA \in A$ und $infA \in A$ gilt. □

**26 Satz**: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $K \subset U$-kompakt und $f : U \to \mathbb{R}^m$ -stetige Abbildung, so ist $f(k) \subset \mathbb{R}^m$ ebenfalls kompakt.

*Beweis.* Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(k)$. Sei $\forall i \in I,\ V_i := f^{-1}(U_i)$, $f-$stetig $\implies i \in I$ $V_i-$offen. Die Familie $(V_i)_{i \in I}$ ist dine Überdeckungvon $K$ , $K$-kompakt $\implies \exists V_{i_1}, V_{i_2}, \cdots V_{i_n}$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{p=1}^{k} U_{i_p} \implies f(k) \subset \bigcup\limits_{p=1}^{k} U_{i_p} \implies f(k)$-kompakt □

**27 Satz**: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \subset U$ kompakt und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf $U$, so gibt es Punkte $p, q \in K$ mit $f(p) = sup\{f(x) : x \in K\}, f(q) = inf\{f(x) : x \in K\}$

*Beweis.* Laut Satz 26 ist $A := f(k) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also im Hinblick auf dem Korollar zu Satz 25: $supf(k) \in f(k),\ inff(k) \in f(k)$ . Deshalb können wir $p, q \in K$ mit gewünschten Eigenschaften finden □

**Definition**: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Dann nennt man $f$ *gleichmäßig stetig* auf $U$ wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ s.d. } |x - y| < \delta,\ x, y \in U \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

**28 Satz**: Sei $R \in \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f$ gleichmäßig stetig auf $K$

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$ vergegeben. $\forall a \in K\ \exists r(a) > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in B(a, r(a)) \cap K$ (wegen der Stetigkeit von $f$ in a) Offenbar ist $K \subset \bigcup\limits_{a \in K} B(a, \frac{r(a)}{2})$. $K$-kompakt $\implies a_1, a_2, \cdots, c_k$ s.d $K \subset \bigcup\limits_{p=1} B\left(a_p, \frac{r(a_p)}{2}\right)$. Man setz nun $\delta := \frac{1}{2} min \left\{r\left(a_1\right), \cdots, \left(a_k\right)\right\}$ Seien dann $x_1, x_2 \in K$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ beliebig gewählt. Wir fixieren ein $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ mit $x_1 \in B\left(a_i, \frac{r(a_i)}{2}\right)$; dann gilt auch $|x_2 - a_i| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 + a_i| < \delta + \frac{r(a_i)}{2} < r(a_i)$ also liegt mit $x_1$ auch $x_2$ in $B(a_i, r\left(a_i\right))$, und wir erhalten $|f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)| \leq |f\left(x_1\right) - f\left(a_i\right)| + |f\left(a_i\right) - f\left(x_2\right)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Damit ist die gleichmäßig Stetigkeit von $f$ auf $K$ beweisen. $\square$