

# Analysis 2 (Prof. Scherbina) Notizen

Sisam Khanal

14. Juli 2024

Aktuelle Notizen unter:

<https://thisissisam.github.io/notes/ana2/main.pdf>

# Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
1. Der $\mathbb{R}^n$ und seine Topologie	3
2. Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$	8
3. Funktionen, Abbildungen, Stetigkeit	11
4. Kompakte Mengen	14
5. Partielle Ableitung	19
6. Totale Differenzierbarkeit	21
7. Mittelwertsatz	25
8. Die Taylorformel	28
9. Lokale Extrema	31
10. Implizite Funktionen	34
11. Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren	38
Index	41

## §1 Der $\mathbb{R}^n$ und seine Topologie

Erklärt man auf der Menge  $\mathbb{R}^n := \{\alpha = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$  aller geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen eine Addition komponentenweise durch  $x + y = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$  für  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  und eine Multiplikation mit reellen Skalaren. So erhält  $\mathbb{R}^n$  die Structure eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums über  $\mathbb{R}$ ; eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  ist durch die Vektoren  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \dots e_n = (0, \dots, 0, 1)$  gegeben. Man bezeichnet die Familie  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  als *Standardbasis* oder auch kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$ .

**euklidisches Skalarprodukt:** Das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung  $\langle \circ, \circ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  die je zwei Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  die reellen Zahl  $\langle x, y \rangle$  zugeordnet, welsche man *euklidisches* Skalarprodukt von  $x$  und  $y$  nennt.

Eine weitere gebräuchliche Schreibweise für das euklidische Skalarprodukt zwei Vektor ist  $\langle x, y \rangle =: x \cdot y$ . Die wichtigsten Eigenschaft des euklidische Skalarprodukt nennt der folgende Satz, auf dessen trivialen Beweis wir verzichten werden.

**Satz:** Für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  und jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

- a)  $\langle (x + z), y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
- b)  $\langle (\alpha \cdot x), y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- c)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- d)  $\langle x, x \rangle$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

**Euklidische Norm:** Sei  $z \in \mathbb{R}^n$ , dann nennt man die Zahl  $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , die euklidische Norm von  $x$ . Es folgt

- a)  $|x| \geq 0$  und  $|x| = 0 \iff x = 0$
- b)  $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$
- c)  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Schwarzsehe Ungleichung:** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt:  $\langle x, y \rangle \leq |x| |y|$   
(wurde in LA2 bewiesen)

### Eigenschaft von Norm auf Vektorraum

Allgemein nennt man jede Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem  $R$ -Vektorraum  $V$  eine Norm auf  $V$ , wenn sie die folgende Eigenschaften haben

- a)  $\forall x \in V; \|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- b)  $\forall x \in V, \forall a \in \mathbb{R} \|ax\| = |a| \|x\|$
- c)  $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Man nennt dann das Tupel  $(V, \|\cdot\|)$  einem normierten Vektorraum  
Dies wurde auch in LA2 bewiesen

### Beispiel

- a)  $V := \mathbb{R}^n$  und sei  $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ . x = (x_1, x_2 \dots x_n) \rightarrow \|x\|_\infty := \max \{|x_1|, |x_2|, |x_n|\}$ . Dann ist  $\|\cdot\|_\infty$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  nennt.
- b) Der Vektorraum  $V$  aller linearen Abbildungen  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  wird durch die Definition  $\|L\| := \sum \{|L(x)| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$
- c) Fehlt

**euklidische Metrik:** Die Funktion  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y) := |x - y|$  heißt euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^n$

Eigenschaften der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  sind:

**Eigenschaften der euklidischen Metrik:**  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$  gibt:

- a)  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- b)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
- c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung)

**Metrik auf eine Menge:** Eine Metrik auf eine Menge  $A$  ist eine Abbildung  $f : A \times A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit der Eigenschaft a)- c) von Satz 1.16

### Beispiel

Sei  $A$  beliebige Menge und  $f : A \times A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definiert durch

$$p(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases}$$

**Kugel:** Sei  $a \in \mathbb{R}^n$  und sei  $r > 0$ . Dann heißt die Menge  $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$  als die *Kugel um  $a$  mit dem Radius  $r$* .

**Offene und abgeschlossene Menge:** Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  eine Menge

- a)  $S$  heißt *offen*, wenn  $\forall a \in S \exists r > 0$  sodass  $B(a, r) \subset S$
- b)  $S$  heißt *abgeschlossen*, wenn  $\mathbb{R}^n \setminus S$  offen ist.

### Sätze über offene Menge:

- a)  $\mathbb{R}^n$  und die leere Menge  $\emptyset$  sind offen.
- b) Sei  $J \neq \emptyset$  eine beliebige Indexmenge und sei  $\{U_i : i \in J\}$  eine Familie offener Menge  $U_i \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $V := \bigcup_{i \in J} U_i$  ebenfalls offen.
- c) Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $U_1, U_2, \dots, U_m$  offene Menge in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $W := \bigcap_{i=1}^m U_i$  ebenfalls offen

*Beweis.* a) Trivial

b) Sei  $a \in V \implies \exists i \in J$  sodass  $a \in U_i$ .  $U_i$  offen  $\implies r > 0$  sodass  $B(a, r) \subset U_i \subset V \implies V$  – offen

c) Sei  $a \in W \implies a \in U_i, i = 1, 2, \dots, m$ .  $U_i$  – offen  $\implies r_i > 0$  sodass  $B(a, r_i) \subset U_i$ . Sei  $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_m\} > 0$ . Dann  $\forall i = 1, 2, \dots, m$  gilt  $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset U_i \implies B(a, r) \subset \bigcap_{i=1}^m U_i = W \implies W$  – offen

□

Aus Satz 1.10 und aus der Definition von abgeschlossen Mengen folgt direkt

**Weitere Eigenschaften von Menge:**

- a)  $\mathbb{R}^n$  und die leere Menge  $\emptyset$  sind abgeschlossen
- b) Sei  $J \neq \emptyset$  eine beliebige Indexmenge und sei  $\{A_i : i \in J\}$  eine Familie abgeschlossener Menge  $A_i \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $A := \bigcap_{i \in J} A_i \subset \mathbb{R}^n$  ebenfalls abgeschlossen.
- c) Sei  $m \in \mathbb{N}$  und seien  $A_1, A_2, \dots, A_m$  abgeschlossene Mengen in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die Menge  $L := \bigcup_{i=1}^m A_i \subset \mathbb{R}^n$  ebenfalls abgeschlossen.  $\bigcap_{i \in J} (\mathbb{R}^n \setminus A_i) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \in J} A_i$  und  $\bigcup_{i \in J} (\mathbb{R}^n \setminus A_i) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i \in J} A_i$

**Umgebung:** Ist  $a \in \mathbb{R}^n$  gegeben, so nennt man jede offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $a \in U$  eine *offene Umgebung von  $a$* . Für  $\varepsilon > 0$  bezeichnet man die Kugel  $B(a, \varepsilon)$  auch als  $\varepsilon$ -*Umgebung von  $a$*

**Definition:**

- a) Man bezeichnet die Menge  $\overline{A} := \bigcap \{B : A \subset B \subset \mathbb{R}^n, B \text{ abgeschlossen}\}$  als den *Abschluss* oder *abgeschlossene Hülle von  $A$*
- b) Die Menge  $\mathring{A} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{U : U \text{ offen, } U \subset A\}$  mit  $U \text{ offen}$  heißt *offener Kern von  $A$*
- c) Der Rand von  $A$  ist gegeben durch  $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$

**Bemerkung**

Nach Satz 1.10 und 1.11 ist  $\overline{A}$  stets abgeschlossen und  $\mathring{A}$  stets offen.  $\mathring{A}$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, die  $\overline{A}$  enthält,  $\mathring{A}$  ist die größte in  $A$  enthaltene offene Teilmenge von  $A$ . Insbesondere gilt  $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

**Beispiele**

- a) Sei  $A = [0, 1) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $\overline{A} = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\partial A = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0, 1\}$
- b)  $A = B(0, 1) \cup (B(0, 2) \setminus \overline{B(0, 1)})$  und  $\overline{A} = \overline{B(0, 2)}$ ,  $\mathring{A} = B(0, 1) \cup B(0, 2) \setminus \overline{B(0, 1)}$ ,  $\partial A = \overline{B(0, 2)} \setminus B(0, 1)$

**Eigenschaften der abgeschlossenen Hülle und offener Kern:**

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

- a)  $x \in \partial A \iff$  jede offene Umgebung des Punktes  $x$  sowohl  $A$  als auch  $\mathbb{R}^n \setminus A$  trifft. (Das heißt sowohl mit  $A$ , als auch mit  $\mathbb{R}^n \setminus A$  einen nicht leeren Durchschnitt hat.)
- b)  $A \setminus \partial A = \mathring{A}$
- c)  $A \cup \partial A = \overline{A}$
- d)  $\partial A$  ist abgeschlossen.

**innerer Punkt:** Sei  $A \in \mathbb{R}^n$ .

- a) Man nennt  $x \in A$  einen inneren Punkt der Menge  $A$ , wenn es eine offene Umgebung  $U = U(x)$  des Punktes  $x$  gibt, so dass  $U \subset A$  gilt.
- b) Man nennt  $y \in \mathbb{R}^n$  einen Häufungspunkt der Menge  $A$ , wenn in jeder offenen Umgebung  $U = U(y)$  des Punktes  $y$  ein von  $y$  verschiedener Punkt der Menge  $A$  liegt, das heißt wenn gilt:

$$\forall U = U(y) \text{ offen } \exists x \in A \bigcup U : x \neq y$$

Die Menge der Häufungspunkt von  $A$  wird  $HP(A)$

**8 Satz:** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ , dann gilt:

- a)  $\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$
- b)  $\overline{A} = A \cup HP(A)$

*Beweis.* a) Ist  $x \in \mathring{A}$  so ist definitionsgemäß  $x \in U \bigcup : U \subset A, U - \text{offen}$  also existiert mindestens eine offene Umgebung  $V = V(x)$  des Punktes  $x$  mit  $V \subset A \implies x$  innerer Punkt von  $A$  ist. Ist andererseits  $x$  innerer Punkt von  $A$ , so existiert eine offene Umgebung  $V = V(x)$  des Punktes  $x$  mit  $x \in V \subset A \implies$  insbesondere  $x$  ist dann Element der Vereinigung  $\bigcup U : U \subset A, U - \text{offen}$ , das heißt  $x \in \mathring{A}$ .

- b) Wegen  $\overline{A} \setminus A = \partial A \setminus A$  und  $HP(A) \cup A = A \cup (HP(A) \setminus A)$  folgt die Behauptung aus der einfachen Beobachtung, dass alle nicht in  $A$  gelegenen Randpunkte von  $A$  zwangsläufig Häufungspunkte von  $A$  sind und umgekehrt alle nicht in  $A$  gelegenen Häufungspunkte von  $A$  natürliche Randpunkte von  $A$  sind.

□

## §2 Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$

**Definition:** Sei  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge von Punkten im  $\mathbb{R}^n$ .  $(x_k)$  heißt *konvergent* gegeben  $a \in \mathbb{R}^n$  (in Zeichen:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ ), wenn zu jeder offenen Umgebung  $U = U(a)$  des Punktes  $a$  ein Index  $k_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $x_n \in U \forall n \geq k_0$  gilt.

### Bemerkung

Definition  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$

**9 Satz:** Sei  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge und sei  $a \in \mathbb{R}^n$ ; es seien Komponentenschreibweise  $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2} \dots x_{k_n}) \forall k \in \mathbb{N}, a = (a_1, a_2 \dots a_n)$ , Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_j} = a_j \forall j = 1, 2, \dots, n$$

*Beweis.* " $\implies$ "  $\forall \varepsilon > 0$  sei  $k_0 \in \mathbb{N}$  so gezählt, dass  $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$  gilt. Für beliebiges  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ist dann

$$\begin{aligned} |x_{k_j} - a_j| &= \sqrt{(x_{k_j} - a_j)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_{k_1} - a_1)^2 + (x_{k_2} - a_2)^2 \dots (x_{k_n} - a_n)^2} \\ &= |x_k - a| \\ < \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_j = a \end{aligned}$$



"  $\Leftarrow$  "  $\forall \varepsilon > 0$  wähle man  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , so gilt  $\forall k \geq k_0$

$$\begin{aligned} |x_{k_j} - a_j| &= \sqrt{(x_{k_1} - a_1)^2 + (x_{k_2} - a_2)^2 \cdots (x_{k_n} - a_n)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2} \\ &= \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \end{aligned}$$

□

**Definition:** Sei  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge. Man nennt  $a \in \mathbb{R}^n$  einen Häufungspunkt der Folge  $(x_k)$ , falls es eine Teilfolge  $(x_{k_y}) \subset (x_k)$  mit  $\lim_{y \rightarrow \infty} x_{k_y} = a$  gibt.

**10 Satz:** Für eine Mengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $A$  ist abgeschlossen.
- b) Der Grenzwert einer jeden Folge  $(x_k) \subset A$ , die als Punktfolge in  $\mathbb{R}^n$  konvergiert, liegt in  $A$

*Beweis.* 1)  $\implies$  2) Sei  $A$  abgeschlossen und sei  $(x_k) \subset A$  eine Folge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$ . Falls  $x_n$  eine konstante Teilfolge  $(x_{k_\gamma}) \subset (x_k)$ , so gilt  $x_{k_\gamma} = a \forall \gamma \in \mathbb{N}$ , und es folgt  $a \in A$  wegen  $(x_{k_\gamma}) \subset A \implies a \in A$ . Hat  $(x_k)$  keine konstante Teilfolge, so gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass  $x_k \neq a \forall k \geq k_0$  gilt, offenbar ist  $a$  ein Häufungspunkt der Menge  $\{x_k : k \geq k_0\} \subset A$  und deshalb auch  $a \in HP(A)$ . Nach Satz 8 ist  $HP(A) \subset \bar{A}$ , aber  $\bar{A} = A$ , denn  $A$  ist abgeschlossen. Deshalb  $a \in A$ .

2)  $\implies$  1) Sei  $x \in HP(A)$ . Dann gibt es eine Folge  $(x_k) \subset A$ ,  $x_k \neq x \forall k \in \mathbb{N}$ , so dass  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  gilt. Nach Voraussetzung liegt der Grenzwert jeder konvergente Folge von Punkten aus  $A$  ebenfalls in  $A$ , und es folgt  $x \in A$ . Dann ist  $HP(A) \subset A$  gezeigt, also ist  $A = A \cup HP(A) = \bar{A}$ , das heißt  $A$  – abgeschlossen. □

**Definition:** Eine Folge  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn es  $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  s.d.  $|x_n - x_m| < \varepsilon \forall n, m \geq k_0$

**11 Satz:** Jede konvergente Folge  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  ist eine *Cauchy-Folge*

**12 Satz:** Sei  $(x_k) \in \mathbb{R}^n$  eine Folge, es sei  $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(x_k)$  eine *Cauchy-Folge* genau dann, wenn jede der Folgen  $x_{k_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  eine *Cauchy-Folge* in  $\mathbb{R}$  ist.

*Beweis.* "  $\implies$  "  $(x_k)$  ist eine Cauchy-Folge  $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  s.d.  $|x_k - x_m| < \varepsilon \forall k, m \geq k_0 \implies \forall 1 \leq j \leq n$

"  $\Leftarrow$  "  $(x_{k_j})$ -eine Cauchy-Folge  $\forall 1 \leq j \leq n \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_{0_j} \in \mathbb{N}$  s.d.  $|x_{k_j} - s_{m_j}| < \varepsilon \forall k, m \geq$

$k_{0_j}$ . Sei  $k_0 := \max \{k_{0_1}, \dots, k_{0_n}\} \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $|x_k - x_m| = \sqrt{(x_{k_1} - x_{m_1})^2 + \dots + (x_{k_n} - x_{m_n})^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon \quad \forall k, m \geq k_0 \implies (x_k)\text{-eine Cauchy-Folge.} \quad \square$

**13 Satz:** Jede Cauchy-Folge im  $\mathbb{R}^n$  ist konvergent, das heißt  $\mathbb{R}^n$  ist vollständig.

## §3 Funktionen, Abbildungen, Stetigkeit

**Definition:** Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetig* an der Stelle  $a \in U$ , wenn gilt:  $\forall \varepsilon > 0$  s.d.  $|x - a| < \delta, x \in U \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$   
 $f$  heißt *stetig* (auf  $U$ ), wenn  $f$  in jedem Punkt  $a \in U$  stetig ist.

Wir verallgemeinern diese Stetigkeitsdefinition sogleich auf Abbildungen mit Werten in  $\mathbb{R}^m$ . Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist gegeben durch ein  $m$ -Tupel  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  von Funktionen  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m \forall x \in U, f(x) \in \mathbb{R}^m$ , d.h.  $f(x) = (f(x_1), \dots, f(x_m))$

**Definition:**  $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist an der Stelle  $a \in U$  *stetig*, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  s.d.  $x \in U, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .  $f$  heißt *stetig* (auf  $U$ ), wenn  $\forall a \in U, f$  in  $a$  stetig ist.

**14 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in U$  und  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.  $f$  ist stetig in  $a$ , genau dann, wenn jede der Komponenten Funktionen  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, m$  stetig in  $a$  ist.

*Beweis.* Der Beweis beruht wie der Beweis des Satzes 9 auf der Äquivalenz der Maximumnorm auf  $\mathbb{R}^m$  zur euklidischen Norm auf  $\mathbb{R}^m$ , genauer auf der Beziehung

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_1|, \dots, |x_m|\} \leq \sqrt{m} \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

□

**15 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $a \in U$ . Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann in  $a$  stetig, wenn zu jeder offenen Umgebung  $F = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$  des Punktes  $f(a) \in \mathbb{R}^m$  eine offene Umgebung  $W = W(a) \subset \mathbb{R}^n$  des Punktes  $a \in U$  existiert, so dass  $f(W) = \{f(x) \mid x \in U \cap W\} \subset F$  gilt.

*Beweis.* " $\implies$ "  $f$  ist stetig. Sei  $V = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$  eine offene Umgebung des Punktes  $a \implies \exists \varepsilon > 0$ , s.d.  $B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$ .  $f$  ist stetig in  $a \implies \exists \delta > 0$ , s.d.  $x \in \underbrace{B(a, \delta) \cap U}_{:=W}$

$\implies f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$

" $\Leftarrow$ " Sei  $\forall V(f(a))$ -offen,  $\exists W(a)$ -offen s.d.  $f(W) \subset V$  gilt.  $\forall \varepsilon > 0$  sei  $V = B(f(a), \varepsilon)$ , dann  $\exists W(a)$ -offen s.d.  $f(W) \subset B(f(a), \varepsilon) \implies \exists \delta > 0$  s.d.  $B(a, \delta) \subset W$   
 $\implies f(B(a, \delta) \cap U) \subset B(f(a), \varepsilon) \implies f$  ist stetig in  $a$  □

**16 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.  $f$  ist genau dann auf  $U$  stetig, wenn das Urbild  $f^{-1}(V) := \{x \in U : f(x) \in V\}$  einer jeden offenen Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^m$  unter  $f$  selbst wieder offen ist.

*Beweis.* " $\implies$ "  $f$  ist stetig auf  $U$ . Sei  $V$  in  $\mathbb{R}^m$  offen. Sei  $a \in f^{-1}(V)$ , d.h.  $f(a) \in V \xrightarrow{\text{Satz 15}} \exists W(a) \subset \mathbb{R}^n$  offen, s.d.  $f(W(a) \cap U) \subset V \implies \exists \delta > 0$  s.d.  $B(a, \delta) \subset W(a) \implies W(a) \subset f^{-1}(V) \implies B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$

" $\implies$ " Für  $a \in f^{-1}(V)$  sei  $W(a) := f^{-1}(V) \xrightarrow{\text{Satz 15}} f$  stetig in  $a$  □

Für stetige Abbildung des  $\mathbb{R}^n$  mit Werten in  $\mathbb{R}$  gelten Rechenregeln, die denen für das Rechnen mit stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entsprechen und die völlig analog zu beweisen sind:

**17 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Die Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  seien beide stetig an der Stelle  $a \in U$ , dann gilt :

- a) Die Funktion  $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$
- b) Die Funktion  $(f \cdot g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$
- c) Falls  $g(a) \neq 0$  existiert eine offene Umgebung  $V = V(g)$  mit  $g(x) \neq 0 \forall x \in V$ , die Funktion  $\left(\frac{f}{g}\right) : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$ .

### Bemerkung

Die Übertragung des Satzes 17 auf dem Fall  $\mathbb{R}^m$ -wertiger Abbildungen ist nicht uneingeschränkt möglich. Folgende Version auf deren Beweis wie ebenfalls verzichten können, ist aber gültig.

**18 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, die Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei stetig in  $a$ . Dann gilt:

- a) Ist die Abbildung  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig in  $a$ , so ist auch die Abbildung  $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ .
- b) Ist die Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ , so ist auch die Abbildung  $(f \cdot g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$ .
- c) Ist die Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a$  und  $g(a) \neq 0$ , so existiert eine offene Umgebung  $V = V(a)$  mit  $g(x) \neq 0 \forall x \in V$ ; die Abbildung  $\left(\frac{f}{g}\right) : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $a$ .

Auch die Komposition stetiger Abbildungen liefert wieder eine stetige Abbildung:

**19 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen und seien  $f : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  sowie  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  Abbildungen für die gilt:  $f$  ist stetig in  $x_0 \in V$ ,  $g$  ist stetig in  $y_0 = f(x_0) \in V$ . Dann ist die Abbildung  $(g \cdot f) : U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$  stetig in  $x_0$

*Beweis.* Ist  $W = W((g \cdot f)(x_0))$  eine offene Umgebung des Punktes  $|g \cdot f| = g(y_0) \in \mathbb{R}^k$ , so gibt es wegen der Stetigkeit von  $g$  an der Stelle  $y_0$  nach Satz 15 eine offene  $y_0$ -Umgebung  $W_1 = W(y_0) = W(f(x_0)) \subset \mathbb{R}^m$  mit  $g(W_1) \subset W$ . Ebenso impliziert die Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$  die Existenz einer offenen Umgebung  $W_2 = W_2(x_0)$  mit  $f(W_2) \subset W_1$ . Offenbar ist dann  $(g \cdot f)(W_2) \subset g(f(W_2)) \subset g(W_1) \subset W$ , und die Stetigkeit von  $(g \cdot f)$  in  $x_0$  ist bewiesen  $\square$

**Definition:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $(f_k)$  ein Folge von Abbildungen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

- a)  $(f_k)$  heißt auf  $D$  *gleichmäßig konvergent* gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \forall x \in D, \forall k \geq k_0$$

- b)  $(f_k)$  heißt auf  $D$  *lokal-gleichmäßig konvergent* gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wenn es  $\forall a \in D \exists V = V(a) \subset \mathbb{R}^n$ -offen s.d. die Folge  $(f_k|_{D \cap V})$  auf  $D \cap V$  gleichmäßig gegen  $f|_{D \cap V}$  konvergiert.

#### Bemerkung

b)  $\not\Rightarrow$  a). *Gegenbeispiel:* Sei  $D = (0, +\infty)$  und  $f_k(x) := \frac{1}{kx}$  für  $1, 2, \dots$  lokal-gleichmäßig konvergiert gegen 0, aber nicht gleichmäßig.

**20 Satz:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $(f_k)$  eine Folge stetiger Abbildungen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  welche auf  $D$  lokal-gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  konvergiert. Dann ist  $f$  stetig auf  $D$

## §4 Kompakte Mengen

**Definition:** Sei  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ .

a) Unter dem *Durchmesser von  $\mathcal{S}$*  versteht man die Zahl

$$d(\mathcal{S}) := \sup \{ |x - y| : x, y \in \mathcal{S} \} \leq \infty$$

b)  $\mathcal{S}$  heißt *beschränkt*, falls  $d(\mathcal{S}) < \infty$  gilt.

### Bemerkung

a) Ist  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und ist  $x_0 \in \mathcal{S}$  gilt  $\mathcal{S} \subset B(0, |x_0| + d(\mathcal{S}))$ , denn  $\forall y \in \mathcal{S}$  ist  $|y| = |y - x_0 + x_0| \leq |y - x_0| + |x_0| \leq d(\mathcal{S}) + |x_0|$ .

b) Ist  $\mathcal{S} \subset B(0, r)$ , so folgt  $d(\mathcal{S}) \leq 2r$ , denn  $\forall x, y \in \mathcal{S}$  gilt  $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2r \implies d(\mathcal{S}) \leq 2r$ .

c) Für  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$  gilt  $d(\mathcal{S}_1) \leq d(\mathcal{S}_2)$

**Definition:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $J$  eine beliebige (endlich oder unendliche) Indexmenge.

- a) Eine Familie  $(V_j)_{j \in J}$  von offenen Menge  $V_j \subset \mathbb{R}^n$  heißt (offene) Überdeckung von  $K$  wenn  $K \subset \bigcup V_j$  gibt.
- b)  $K$  heißt *kompakt*, wenn es *zu jeder* offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  der Menge  $K$  endlich viele Indizes  $i_1, \dots, i_m \in I$  gibt, so dass bereits

$$K \subset \bigcup_{p=1}^m U_{i_p}$$

gibt. Mann nennt ein solches endliches Mengensystem  $\{U_{i_p}; p = 1, 2, \dots, m\}$  offener Menge der Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $K$ , welches die Eigenschaft  $K \subset \bigcup_{p=1}^m U_{i_p}$  hat eine  $(U_i)_{i \in I}$  zugehörige *offene Teilüberdeckung* der Menge  $\mathbb{R}^n$

### Beispiele

- a) Die Menge  $K_1 := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  nicht kompakt, weil sie nicht abgeschlossen ist.
- b)  $K_2 \cup \{0\}$  ist aber kompakt.

**21 Definition:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt: Ist  $K$  kompakt, so ist  $K$  abgeschlossen und beschränkt.

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \iff K \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

*Beweis.* a)  $K$  ist beschränkt. Wir betrachten folgende Überdeckung von  $\mathbb{R}^n$  bei offene Menge  $U_k := B(0, k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  Dann ist  $K \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ .  $K$ -kompakt,  $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine offene Überdeckung von  $K \implies \exists k_1, k_2, \dots, k_m$  s.d.  $K \subset \bigcup_{i=1}^m U_{k_i}$ . Sei  $k^* := \max\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ . Dann ist  $K \subset B(0, k^*) \implies d(K) < 2k^* \implies K$ -beschränkt

- b) " $\Leftarrow$ "  $K$  ist abgeschlossen (Widerspruchsbeweis!) Sei  $K$  ist nicht abgeschlossen. Dann gibt es ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$  eine Folge  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $x_i \in K \forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ . Wir betrachten folgende offene Überdeckungen  $K$ :  $U_i := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x, \frac{1}{i})}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Denn  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \supset K \implies \exists i_1, i_2, \dots, i_m$  s.d.  $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$ . Sei  $i^* = \max\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  Dann ist  $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x, \frac{1}{i^*})} \implies K \cap \overline{B(x, \frac{1}{i^*})} = \emptyset$  Widerspruch.

□

**22 Satz:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann ist jede abgeschlossene Menge  $A \subset K$  ebenfalls Kompakt.

*Beweis.* Sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Dann ist die Familie  $\{\{U_i\}_{i \in I}, \mathbb{R}^n \setminus A\}$  eine Überdeckung von  $\mathbb{R}^n \supset K$ ,  $K$ -kompakt  $\implies \exists U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$  s.d.  $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$  (Weil  $A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$ )  $\implies A$ -kompakt.

□

**Quader:** Eine Menge in  $Q \subset \mathbb{R}^n$  heißt *abgeschlossene Quader*, wenn es beschränkt, abgeschlossene Intervalle  $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$ ,  $-\infty < a_k < b_k < +\infty$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  gibt, so dass  $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k, \forall k = 1, 2, \dots, n\}$  gilt.

**23 Satz:** Jede abgeschlossene Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ist kompakt.

Wir werden folgende Resultat brauchen: *Cantorsche Schachtelungsprinzip* :

**24 Satz:** Sei  $(A_k)$  eine Folge nicht-leerer, abgeschlossene Menge  $A_k \subset \mathbb{R}^n$  mit der folgende Eigenschaften:

- a)  $(A_k)$  ist absteigend, d.h es gilt  $A_{k+1} \subset A_k \forall k \in \mathbb{N}$
- b) Die Folge  $(d(A_k))$  der Durchmesser der Menge  $A_k$  ist eine Nullfolge ( d.h  $d(A_k) \rightarrow 0$

Dann gibt es genau einen Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  der allen Menge  $A_k$  angehört:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}$$

*Beweis.* a) Wir zeigen dass  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$ . Sei  $(x_k)_{k=1}^{\infty}$  eine Folge s.d.  $x_k \in A_k \forall k \in \mathbb{N}$ . Wir wissen, dass  $d(A_k) \rightarrow 0$  wenn  $k \rightarrow \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  s.d.  $d(A_k) < \varepsilon \forall k \geq k_0$ . Dann ist  $\forall k, m \geq k_0$   $x_k \in A_k \subset A_{k_0}$ ,  $x_m \in A_m \subset A_{k_0} \implies x_k, x_m \in A_{k_0} \implies \|x_k - x_m\| \leq d(A_{k_0}) < \varepsilon \implies (x_k)$ -eine Cauchy-Folge.  $\implies \exists x \in \mathbb{R}^n$  s.d.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \forall x \in \mathbb{N}$  ist  $x_m \in A_m \subset A_k, m \geq k$ ,  $A_k$ -abgeschlossen  $\implies x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m \in A_k \forall k \in \mathbb{N} \implies x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

b) Wir zeigen, dass  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  nur eine Punkt  $x$ . (Widerspruchsbeweis). Sei  $x \neq y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ . Dann ist  $x, y \in A_k, k \in \mathbb{N} \implies \|x - y\| \leq d(A_k) \rightarrow 0$  wenn  $k \rightarrow \infty \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y$ . Widerspruch

□

Das Cantorsche Schachtelungsprinzip werden wir zum Beweis des Satzes 23 auf eine geeignete absteigende Folge abgeschl. Quader an: Es sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  eine abgeschl. Quader und  $(U_i)$  eine offene Überdeckung von  $Q$ .

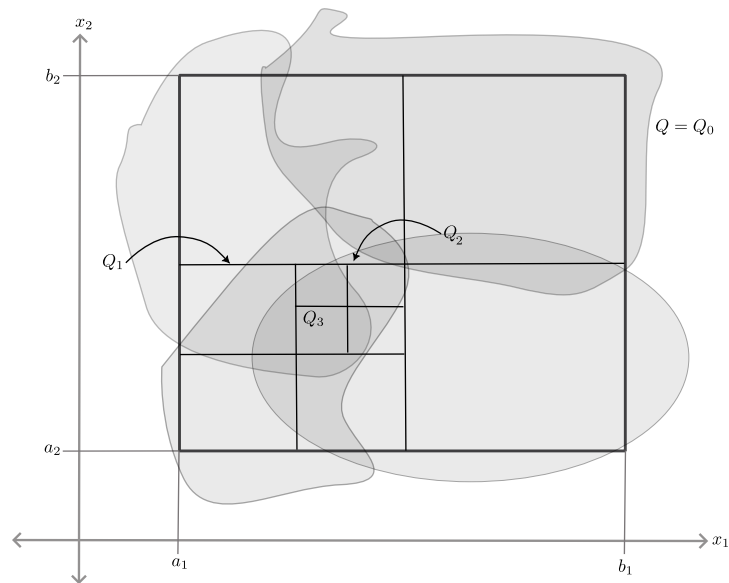
*Annahme:* Zu  $(U_i)$  gibt es keine endliche Teilüberdeckung von  $Q$ . Wir konstruieren induktiv eine absteigende Folge

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

abgeschl. Quader  $Q_m \subset \mathbb{R}^n$  mit der folgenden Eigenschaften:

- a)  $\forall m \in \mathbb{N}$  : Es gibt keine  $(U_i)$  zugehörige endliche Teilüberdeckung von  $Q_m$
- b)  $d(Q_m) = \frac{1}{2^m} d(Q_0) (\implies \lim_{m \rightarrow \infty} d(Q_m) = 0)$





Unsere Ausgangsquader  $Q_0 = Q$  hat die geforderten Eigenschaften. Seine  $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$  bereits konstruiert. Es gelte  $Q_m = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ ,  $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R} \forall k = 1, 2, \dots, n$ . Wir splitten jedes der Intervalle  $I_k$  in der Intervallmitte auf und erhalten Unterteilung  $I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}$  mit  $I_{k_1} = [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ ,  $I_{k_2} = [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Die kartesischen Producte  $I_{1_{\gamma_1}} \times I_{2_{\gamma_2}} \times \dots \times I_{n_{\gamma_n}}$ ,  $\gamma \in 1, 2 \forall 1 \leq k \leq n$  aller Intervallhälften der  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  unterteilen den abgeschlossener Quader  $Q_m$  in insgesamt  $2^n$  vielen kleinere abgeschlos. Quader Nur können wir folgendes Kriterium formulieren:

**25 Satz von Heine-Borel:** Für ein Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $K$  ist abgeschlossen und beschränkt
- b)  $K$  ist kompakt

*Beweis.* Siehe Satz 21. □

### Korollar

Für jede kompakte Teilmenge  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  gilt:

$$\sup A \in A, \inf A \in A$$

*Beweis.* Da  $A$  als kompakte Menge insbesondere beschränkt ist, existieren  $\sup A, \inf A \in \mathbb{R}$ . Weil sowohl  $\sup A$  als auch  $\inf A$  Häufungspunkte geeigneter Folgen in  $A$  sind, impliziert die Abgeschlossenheit von  $A$  in Verbindung mit Satz 8, dass  $\sup A \in A$  und  $\inf A \in A$  gilt. □

**26 Satz:** Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen  $K \subset U$ -kompakt und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ -stetige Abbildung, so ist  $f(K) \subset \mathbb{R}^m$  ebenfalls kompakt.

*Beweis.* Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $f(K)$ . Sei  $\forall i \in I, V_i := f^{-1}(U_i)$ ,  $f$ -stetig  $\implies i \in I$   $V_i$ -offen. Die Familie  $(V_i)_{i \in I}$  ist eine Überdeckung von  $K$ ,  $K$ -kompakt  $\implies \exists V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_n}$  s.d.  $K \subset \bigcup_{p=1}^n U_{i_p} \implies f(K) \subset \bigcup_{p=1}^n U_{i_p} \implies f(K)$ -kompakt □

**27 Satz:** Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $K \subset U$  kompakt und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf  $U$ , so gibt es Punkte  $p, q \in K$  mit  $f(p) = \sup \{f(x) : x \in K\}$ ,  $f(q) = \inf \{f(x) : x \in K\}$

*Beweis.* Laut Satz 26 ist  $A := f(K) \subset \mathbb{R}$  kompakt, also im Hinblick auf dem Korollar zu Satz 25:  $\sup f(K) \in f(K)$ ,  $\inf f(K) \in f(K)$ . Deshalb können wir  $p, q \in K$  mit gewünschten Eigenschaften finden  $\square$

**Definition:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Dann nennt man  $f$  *gleichmäßig stetig* auf  $U$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } |x - y| < \delta, x, y \in U \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

**28 Satz:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetige Abbildung. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $K$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben.  $\forall a \in K \exists r(a) > 0$  mit  $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in B(a, r(a)) \cap K$  (wegen der Stetigkeit von  $f$  in a) Offenbar ist  $K \subset \bigcup_{a \in K} B(a, \frac{r(a)}{2})$ .  $K$ -kompakt  $\implies a_1, a_2, \dots, c_k$  s.d.  $K \subset \bigcup_{p=1} B(a_p, \frac{r(a_p)}{2})$ . Man setz nun  $\delta := \frac{1}{2} \min \{r(a_1), \dots, r(a_k)\}$  Seien dann  $x_1, x_2 \in K$  mit  $|x_1 - x_2| < \delta$  beliebig gewählt. Wir fixieren ein  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  mit  $x_1 \in B(a_i, \frac{r(a_i)}{2})$ ; dann gilt auch  $|x_2 - a_i| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - a_i| < \delta + \frac{r(a_i)}{2} < r(a_i)$  also liegt mit  $x_1$  auch  $x_2$  in  $B(a_i, r(a_i))$ , und wir erhalten  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ . Damit ist die gleichmäßig Stetigkeit von  $f$  auf  $K$  beweisen.  $\square$

## §5 Partielle Ableitung

**Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, ferner

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

eine Funktion auf  $U$  und  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$

- a)  $f$  heißt in  $a$  *partiell differenzierbar* nach  $x_i$  oder auch *partiell differenzierbar bezüglich der  $i$ -ten Koordinate*, wenn der Grenzwert

$$D_i f(a) : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)_i := \lim_{\substack{t \rightarrow a_i \\ t \neq a_i}} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{t - a_i}$$

dann  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  die *partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $a$*

- b)  $f$  heißt in  $a$  *partiell differenzierbar*, wenn  $f$  in  $a$  nach *allen*  $x_i, i = 1, \dots, n$  partiell differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man den Vektor  $\text{grad}(f(a)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$  den *Gradient von  $f$  in  $a$*
- c)  $f$  heißt auf  $U$  *partiell differenzierbar*, wenn  $f$  partiell differenzierbar in  $a$  für jedes  $a \in U$  ist.
- d)  $f$  heißt in  $a$  *stetig partiell differenzierbar*, wenn  $f$  auf  $U$  partiell differenzierbar ist und zusätzlich alle Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ , an der Stelle  $a$  stetig sind.
- e)  $f$  heißt *stetig partiell differenzierbar auf  $U$* , wenn  $f$  in jedem  $a \in U$  stetig partiell differenzierbar ist. Für die Menge aller solcher Funktion führen wir die Bezeichnung

$$C^1(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig partiell differenzierbar auf } U\}$$

ein.

**Beispiel**

...

**Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, ferner  $f : U \rightarrow \mathbb{R}(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine Funktion auf  $U$  und  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$ . Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $i \in 1, \dots, n$

- a)  $f$  heißt in  $a$   $k$ -mal partiell differenzierbar nach  $x_i$ , wenn  $f$   $(k-1)$ -mal partiell differenzierbar auf  $U$  ist und alle partiell Ableitungen  $(k-1)$ -ter Ordnung von  $f$  an der Stelle  $a$  partiell differenzierbar nach  $x_i$  sind.
- b)  $f$  heißt in  $a$   $k$ -mal partiell differenzierbar, wenn  $f$  in  $a$   $k$ -mal partiell differenzierbar ist. Nach  $x_j$  für alle  $j \in 1, 2, \dots, n$  ist. Die partielle Ableitungen der Ordnung  $k$  von  $f$  in  $a$  sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} D_{i_k} (D_{i_{k-1}} (\dots D_{i_2} (D_{i_1}(f)) \dots)) (a) &:= \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a) \\ &:= D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f(a) \\ &:= f_{x_{i_k} x_{i_{k-1}} \dots x_{i_1}}^{(k)}(a) \end{aligned}$$

wobei die Indizes  $i_1, \dots, i_k$  voneinander unabhängig die Menge  $1, 2, \dots, n$  durchlaufen.

- c)  $f$  heißt  $k$ -mal partiell differenzierbar auf  $U$ , wenn  $f$  in jedem  $a \in U$   $k$ -mal partiell differenzierbar ist. Die Funktionen  $D_{i_k} \dots D_{i_1} f : U \rightarrow \mathbb{R}, i_1, i_2, \dots, i_k \in 1, \dots, n$  heißen partiell Ableitung  $k$ -te Ordnung von  $f$ .
- d)  $f$  heißt  $k$ -mal stetig partiell differenzierbar auf  $U$  wenn  $f$   $k$ -mal partiell differenzierbar auf  $U$  ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k$  auf  $U$  stetig sind. Für die Menge aller solcher Funktionen führen wir die Bezeichnung

$$C^k(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar auf } U\}$$

ein.

**29 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal partiell differenzierbar auf  $U$ ; außerhalb seien alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung von  $f$  stetig auf  $U$ . Dann gilt :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j \in 1, \dots, n$$

### Korollar

Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $k \geq 2$  und sei  $f \in C^k(U)$ . Dann gilt für jedes  $k$ -Tupel von Indizes  $(i_1, i_2, \dots, i_k \in 1, 2, \dots, n^k)$  und für jedes Permutation  $\pi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  :

$$D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} D_{i_{\pi(k-1)}} \dots D_{i_{\pi(1)}} f$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über  $k$ . Den Induktions Anfang bildet Satz 29 im Induktionsschluss verwendet man die Tatsache, dass sich jede Permutation als Hintereinanderausführung endliche vieler Vertauschungen benachbarter Glider darstellen lässt.

□

## §6 Totale Differenzierbarkeit

**Definition:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 = (x_{0_1} \cdots x_{0_n}) \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $U$ .  $f$  heißt (total) differenzierbar in  $x_0$ , wenn es reelle Zahlen  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  und eine Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{|x-x_0|} = 0$  gibt, dass

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - x_{0_i}) + \varphi(x) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$$

gilt. Man bezeichnet den Vektor  $A := (a_1, \dots, a_n)$  als *Differential* von  $f$  in  $x$

**30 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  sei ferner  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar in  $x_0$  und  $A = (a_1, \dots, a_n)$  wie in der letzten Definition. Dann gilt:

- a)  $f$  ist stetig in  $x_0$ .
- b)  $f$  ist partiell differenzierbar in  $x_0$  und es gilt  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = a_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

**31 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei partiell differenzierbar auf  $U$ , und alle partielle Ableitungen  $D_i$  (oder auch  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ),  $1 \leq i \leq n$ , seien stetig in  $x_0 \in U$ . Dann ist  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar.

### Korollar

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $U$  und  $x_0$ . Dann gilt:

- a) Ist  $f$  stetig partiell differenzierbar in  $x_0$ , so ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  stetig.

- b) Ist  $f$   $k$ -mal partiell differenzierbar auf  $U$  und sind alle partiell Ableitungen  $k$ -te Ordnung von  $f$  stetig in  $x_0$ , so sind alle partielle Ableitungen der Ordnungen  $\varphi, 0 \leq \varphi \leq k$  ebenfalls stetig in  $x_0$

**Definition:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n}) \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung auf  $U$ ,  $f$  heißt (total) differenzierbar in  $x_0$ , wenn es eine Matrix  $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$  und eine Abbildung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\varphi(x)|}{|x - x_0|} = 0$  gibt, sodass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$$

gilt. Der Deutlichkeit halber schreiben wir die obige Gleichung einmal komponentenweise auf:

Ist  $f = (f_1, \dots, f_m)$  mit  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m$  und entsprechend  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  mit  $\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, m$  so ist die Bedingung  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\varphi(x)|}{|x - x_0|} = 0$  gleichdeutend mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_i(x)}{|x - x_0|} = 0 \forall i = 1, \dots, m$  und die Gleichung bedeutet ausführlich, dass  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{0_1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$$

Daran kann man sofort ablesen, dass folgende Satz richtig ist.

**32 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f = (f_1, \dots, f_m)$  eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dann gilt:

- $f$  ist total differenzierbar in  $x_0$  genau dann, wenn jede der Komponentenfunktion  $f_i, 1 \leq i \leq m$  total differenzierbar in  $x_0$  ist.
- Wenn  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar ist, so ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  stetig.
- Wenn  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar und die  $(m \times n)$  Matrix  $A$  wie Definition von oben gewählt ist, dann ist alle Komponentenfunktion  $f_i, 1 \leq i \leq m$  in  $x_0$  partiell differenzierbar mit  $D_\nu f_i(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}(x_0) = a_{i\nu}; \forall \nu = 1, \dots, n; \forall i = 1, \dots, m$ .
- Wenn alle Komponentenfunktion  $f_i$  auf  $U$  partiell differenzierbar sind und alle partiell Ableitungen  $D_\nu f_i$  an der Stelle  $x_0$  stetig sind, dann ist  $f$  in  $x_0$  total differenzierbar.

**Definition:** Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  total differenzierbar in  $x_0 \in U$ , so nennt man die Matrix  $Df(x_0) := J_f(x_0) := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$

$$:= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

das *Differential* oder die *Jacobi-Matrix* oder die *Funktionalmatrix* von  $f$  in  $x_0$

**33 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U, c \in \mathbb{R}$ , die Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  seien total differenzierbar in  $x_0$ . Dann gilt:

- a) Die Abbildung  $(f + g) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist total differenzierbar in  $x_0$  mit  $D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$
- b) Die Abbildung  $(c \cdot f) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist total differenzierbar in  $x_0$  mit  $D(cf)(x_0) = cDf(x_0)$

*Beweis.* Wie in Analysis 1 für reellwertige Funktionen. □

Eine *Produktregel* gilt in folgender Form:

**34 Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  die Abbildung  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und die Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  seien total differenzierbar in  $x_0$ . Dann gilt: Die Abbildung  $(f \cdot g) : U \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_1(g(x)), \dots, f_m(g(x)))$  ist in  $x_0$  total differenzierbar mit

$$\underbrace{D(f \cdot g)(x_0)}_{(m \times n)\text{-Matrix}} = \underbrace{f(x_0)}_{(m \times 1)} \cdot \underbrace{Dg(x_0)}_{(1 \times n)} + g(x_0) \underbrace{Df(x_0)}_{(m \times n)}$$

*Beweis.* Die totale □

**35 Kettenregel:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offene Menge, ferner  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$  Abbildungen mit  $g(U) \subset V$ .  $g$  sei total differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in U$ ,  $f$  sei total differenzierbar in  $y_0 = g(x_0)$ . Dann ist die Abbildung  $(f \circ g) : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  total differenzierbar in  $x_0$  mit  $\underbrace{D(f \circ g)(x_0)}_{l \times n} = \underbrace{Df(g(x_0))}_{l \times m} \cdot \underbrace{Dg(x_0)}_{m \times n}$

### Korollar

$U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offene Mengen, die Abbildung  $(g_1, \dots, g_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei total differenzierbar in  $x_0 \in U$ , es gelte  $g(U) \subset V$  und die Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  sei total differenzierbar in  $y_0 = g(x_0)$ . Dann ist die Funktion  $h := (f \circ g) : U \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar in  $x_0$  mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_0) \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

**Definition:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, ferner  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $U$ . Dann bezeichnet man für  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  den Grenzwert

$$D_v f(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t}$$

(im Falle seiner Existenz) als *Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $v$*  und nennt  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $v$  differenzierbar

**36 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $x_0 \in U$  total differenzierbare Funktion. Dann existiert für jedes  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  die Richtungsableitung  $D_v f(x_0)$  von  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $v$  und es gilt:

$$D_v f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i = \langle Df(x_0), v \rangle$$

Wobei

$$\text{grad} f(x_0) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

*Beweis.* Sei ein beliebiger Vektor  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gegeben. Die Abbildung  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$   $t \mapsto g(t) = x_0 + tv$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ , und es ist  $g(0) = x_0$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $g$  an der Stelle 0 existiert ein Intervall  $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$  so dass  $g(I_\varepsilon) \subset B(x_0, r)$  gilt, hierbei sei  $r > 0$  so gewählt, dass  $B(x_0, r) \subset U$  erfüllt ist, was aufgrund der Offenheit von  $U$  möglich ist. Dann ist die Funktion  $h := (f \circ g) : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$   $t \mapsto h(t) := f(x_0 + tv)$  differenzierbar der Stelle  $t = 0$ , und nach dem Korollar zur Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} D_v f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = h'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \frac{dg_i}{dt}(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i = \langle Df(x_0), v \rangle \end{aligned}$$

□



## §7 Mittelwertsatz

**37 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine total differenzierbar Funktion. Seien  $a, b \in U$  zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke  $|\gamma_{ab}| := \{\gamma_{ab} := a + t(b - a); t \in [0, 1]\} \subset U$  in  $U$  enthalten ist. Dann gibt es ein  $\xi \in |\gamma_{ab}|$  derart, dass  $f(b) = f(a) + Df(\xi) \cdot (b - a)$ .

*Beweis.* Die Abbildung  $\gamma_{ab} : [0, 1] \rightarrow U$   $t \mapsto \gamma_{ab}(t) = a + t(b - a)$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  mit  $D\gamma_{ab}(t) = (b - a) \forall t \in \mathbb{R}$ . Da  $|\gamma_{ab}| = \gamma_{ab}([0, 1]) \subset U$  gilt und  $f$  auf  $U$  differenzierbar ist, ist die Komposition  $(f \circ \gamma_{ab}) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf  $[0, 1]$  differenzierbare Funktion, auf die der Mittelwertsatz für Funktionen eine Variabel anwendbar ist. Daher  $\exists t_0 \in (0, 1)$  so dass

$$(f \circ \gamma_{ab})(1) = (f \circ \gamma_{ab})(0) + (f \circ \gamma_{ab})(t_0) \cdot (1 - 0) \quad (1)$$

gilt. Da aber  $\gamma_{ab}(1) = b$  und  $\gamma_{ab}(0) = a$  ist, ferner für  $s := \gamma_{ab}(t_0) \in |\gamma_{ab}|$  mit der Kettenregel  $(f \circ \gamma_{ab})'(t_0) = Df(\gamma_{ab}(t_0)) \cdot D\gamma_{ab}(t_0) = Df(\xi) \cdot (b - a)$  folgt, ist Gleichung (1) äquivalent zu  $f(b) = f(a) + Df(\xi) \cdot (b - a)$   $\square$

**38 Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine total differenzierbare Abbildung. Seien  $a, b \in U$ , sodass  $|\gamma_{ab}| \subset U$ . Dann gibt es  $\phi_1, \dots, \phi_m \in |\gamma_{ab}|$ , sodass :

$$f(b) = f(a) + \begin{pmatrix} Df_1(\phi_1) \\ \vdots \\ Df_n(\phi_m) \end{pmatrix} \cdot (b - a)$$

*Beweis.* Satz 37 auf  $f_1, \dots, f_n$  anwenden.  $\square$

**Beispiel**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$

Ist  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  beschränkt,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar, so besagt der HDI:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

Ist wieder  $\gamma_{ab}(t) = a + t(b - a)$ , so erhält man durch Substitution

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 f'(\gamma_{ab}(t)) \gamma'_{ab}(t) dt = \left( \int_0^1 f'(\gamma_{ab}(t)) dt \right) \cdot (b - a)$$

**Definition:** Sei  $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$  und  $A : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  mit  $a_{ij} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig für  $i = 1, \dots, m$  und  $j = 1, \dots, n$ . Dann ist die Integral über die *matrixwertige Abbildung*  $A$  gegeben durch:

$$\int_{\alpha}^{\beta} A(t) dt = \left( \int_{\alpha}^{\beta} a_{ij}(t) dt \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

**39 Satz:** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig partiell differenzierbar. Seien  $a, b \in U$  sodass  $|\gamma_{ab}| \subseteq U$ . Dann gilt:

$$f(b) - f(a) = \underbrace{\left( \int_0^1 Df(\gamma_{ab}(t)) dt \right)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \underbrace{(b - a)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

*Beweis.* Wir wenden den HDI an auf  $g_i := (f_i \circ \gamma_{ab}) \in C^1([0, 1])$  für  $i = 1, \dots, m$  und erhalten mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f_i(b) - f_i(a) &= g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g_i(t) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma_{ab}(t)) \cdot (b_j - a_j) \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left( \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma_{ab}(t)) \cdot dt \right)}_{v_j} \underbrace{(b_j - a_j)}_{u_j} \\ &= \left\langle \left( \int_0^1 Df_i(\gamma_{ab}(t)) dt \right), (b - a) \right\rangle \end{aligned}$$

Dies zeigt die  $i$ -te Zeile der gewünschte Gleichung. □

**Hilfssatz:** Ist  $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$  ein Kompaktes Intervall,  $v : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Abbildung. So gilt:

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt \right\|_2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|v(t)\|_1 dt$$

*Beweis.* Sei  $u := \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 \|u\|_2^2 &= \langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} v_j(t) dt \cdot u_j \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{j=1}^n v_j(t) \cdot u_j \right) dt \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle v(t), u \rangle dt \\
 &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |\langle v(t), u \rangle| dt \\
 &\stackrel{\text{Schwz.}}{\leq} \int_{\alpha}^{\beta} (\|v(t)\|_2 \cdot \|u\|_2) dt \\
 &= \|u\|_2 \int_{\alpha}^{\beta} \|v(t)\|_2 dt
 \end{aligned}$$

Für

$$\|u\|_2 > 0 \implies \|u\|_2 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt$$

Für

$$\|u\|_2 = 0 \implies \|u\|_2 = 0 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt$$

□

### Korollar

Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig partiell differenzierbar. Seien  $a, b \in U$  mit  $|\gamma_{ab}| \subseteq U$ . Dann gilt:

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq M \|b - a\|_2$$

für  $M := \sup \{ \|Df(x)\| \mid x \in |\gamma_{ab}| \}$ . Dabei ist die Matrix norm  $\|A\|$  für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gegeben durch

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|_2=1}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 M &= \sup_{\substack{x \in |\gamma_{ab}| \\ v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|_2=1}} \underbrace{\frac{\|Df(x) \cdot v\|_2}{\|v\|_2}}_{G(x,v)} < \infty, \text{ da} \\
 G &: \underbrace{|\gamma_{ab}| \times \partial \mathbb{B}(0,1)}_{\text{kompakt}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}
 \end{aligned}$$

*Beweis.* Es ist :

$$\begin{aligned}
 \|f(b) - f(a)\|_2 &= \left\| \left( \int_0^1 Df(\gamma_{ab}(t)) dt \right) \cdot (b - a) \right\|_2 \\
 &\leq \int_0^1 \|Df(\gamma_{ab}(t)) \cdot (b - a)\|_2 dt \\
 &\leq \int_0^1 M \cdot \|b - a\|_2 dt \\
 &= M \cdot \|b - a\|_2
 \end{aligned}$$

□

## §8 Die Taylorformel

**Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $k$ -mal stetig partiell differenzierbar Funktion ( $C^k$ ). Dann bezeichnet man für  $0 \leq m \leq k$  das durch

$$T_{f,x_0,m}(x) : \sum_{i=0}^m \left( \sum_{\substack{|\alpha|=L \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right)$$

definiert Polynom  $T_{f,x_0,m}$  als  **$m$ -tes Taylorpolynom von  $f$  in  $x_0$** . Hierbei wird mit  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  die **Länge des Multiindex**  $\alpha := (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  und mit  $\alpha!$  das Produkt  $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$  bezeichnet. Der **Differentialoperator**  $D^\alpha$  ist für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  gegeben durch  $D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f \in C^{|\alpha|}$  dabei ist  $D_\gamma^{\alpha r} := \underbrace{D_\gamma D_\gamma \dots D_\gamma}_{\alpha \gamma \text{-mal}} \gamma = 1, \dots, n$  für  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  ist

mit  $y^\alpha$  die reelle Zahl  $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}$  gemeint. Wie im Kapitel 7 werde für  $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma_{x_0 x}$  die  $C^\infty$ -Ableitung  $\gamma_{x_0 x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \gamma_{x_0 x}(t) := x_0 + t(x - x_0)$  und mit  $|\gamma_{x_0 x}| = \gamma_{x_0 x}([0, 1])$  die Verbindungsstrecke von  $x_0$  und  $x$  bezeichnet. Die Taylorformel für  $C^{k+1}$  Fkten mehrerer veränderlichen lautet dann wie folgt:

**40 Taylor:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \xrightarrow{C^{k+1}}$  eine  $(k+1)$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Ist dann  $x \in U$  ein Punkt mit  $\|\gamma_{x_0 x}\| \in U$ , so existiert ein  $\xi \in |\gamma_{x_0 x}|$  mit

$$f(x) = \sum_{l=0}^k \left( \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right) + \sum_{\substack{|\alpha|=k+1 \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

**Bemerkung:**

Unter den Voraussetzungen von Satz 40 wird die Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  durch das  $k$ -te Taylorpolynom von  $f$  in  $x_0$  approximiert. Der Fehler  $R_{k+1}(x) := f(x) - T_{f,x_0,k}(x)$  die Approximation, das  **$k$ -te Restglied** in  $x$  kann in der Form

$$R_{k+1}(x) = \sum_{\substack{|\alpha|=k+1 \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D_\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

dargestellt werden, wobei  $\xi \in |\gamma_{x_0 x}|$  geeignet zu wählen ist.

*Beweis.* Wir wenden den Taylorschen Satz für Funktionen einer Veränderlichen auf die Funktion  $g : (f \circ \gamma_{x_0 x}) : [0, 1] \xrightarrow{c^{k+1}} \mathbb{R}$  an. Danach existiert ein  $t_0 \in (0, 1)$  mit

$$g(1) = g(0) + \sum_{l=1}^k \frac{g^{(l)}(0)}{l!} (1-0)^l + \frac{g^{(k+1)}(t_0)}{(k+1)!} (1-0)^{k+1}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit  $f(x) = f(x_0) + \sum_{l=1}^k \frac{g^{(l)}(0)}{l!} + \frac{g^{(k+1)}(t_0)}{(k+1)!}$ . Zum Beweis der Taylorformel genügt es also zu zeigen:  $\square$

**Behauptung:**

$\forall t \in [0, 1], l = 1, \dots, k+1 :$

$$g^{(l)}(t) = \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} l! \frac{D^\alpha f(\gamma_{x_0 x}(t))}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \quad (1)$$

Also Satz 40 für  $\xi := \gamma_{x_0 x}(t)$

*Beweis.* Nach der Kettenregel ist  $g^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^m D_i f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot (x_i - x_0) \quad \forall t \in [0, 1]$  durch Induktion über  $l$  folgt ebenso mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$g^{(l)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^n D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot (x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_l} - x_{0i_l}) \quad (2)$$

für alle  $t \in [0, 1]$  gilt zum Beweis von (1) müssen wir nur noch die Summanden in (2) geeignet zusammenfassen. Dabei nutzen wir:

**Hilfssatz**

Seien  $U \in \mathbb{R}^n$  offen,  $2 \leq k \in \mathbb{N}, f \in C^k(U)$  und  $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, n\}^k$ . Dann gilt für jede Permutation  $\pi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\} : D_{i_n} D_{i_{n-1}} \dots D_{i_2} D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} D_{i_{\pi(k-1)}} \dots D_{i_{\pi(1)}} f$ . Der Beweis ist leicht durch Induktion über  $k$  zu führen. Für  $k = 2$  geht der Hilfssatz in Satz 29 über, nach Induktionsvoraussetzung ist die Vertauschung benachbarter  $D_\gamma \cdot D_\mu$  erlaubt, der Induktionsschritte kann also vollzogen werden, wenn man berücksichtigt, dass sich jede Permutation als Hintereinanderausführung solcher Vertauschungen beschreiben lässt  $\square$

Der Hilfssatz besagt, dass in Gl (2) alle Summanden  $D_{i_l} \dots D_{i_1} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot (x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_l} - x_{0i_l})$  in denen jeder Index  $\gamma$  genau  $a_\gamma$ -mal auftritt. ( $1 \leq \gamma \leq n, a_1 + \dots + a_n = l, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ) folgt aus (2):  $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
g^{(l)}(t) &= \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^n D_{i_1} \dots D_{i_l} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot \prod_{\alpha=1}^n (x_\gamma - x_{0\gamma})^{\alpha_\gamma} \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{l!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(\gamma_{x_0 x}(t)) \cdot \prod_{\alpha=1}^n (x_\gamma - x_{0\gamma})^{\alpha_\gamma} \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} l! \frac{D^\alpha f(\gamma_{x_0 x}(t))}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha
\end{aligned}$$

Damit ist sowohl (1), als auch der Taylorsche Satz bewiesen.

**41 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $k$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Für  $r > 0$  gelte  $B(x_0, r) \subset U$ . Dann gibt es eine Funktion  $\eta : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\eta(x_0) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^k} = 0$ . Sodass  $\forall x \in B(x_0, r)$

$$f(x) = \sum_{l=0}^k \left( \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \cdot (x - x_0)^\alpha \right) \eta(x)$$

**Spezialfall für  $k = 2$**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f \in C^2(U)$ . Dann gibt es  $c \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch, sodass die durch

$$f(x) = c + \langle a, (x - x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - x_0), A \cdot (x - x_0) \rangle + \eta(x) \quad \forall x \in U$$

definierte Funktion  $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}$  die Eigenschaften

$$\eta(x_0) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^2} = 0$$

hat.

**Hesse Matrix:** Sind  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist 2-mal stetig partiell differenzierbar, so heißt die symmetrische Matrix :

$$\text{Hess} f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

**Hessesche Matrix von  $f$  in  $x_0$**

## §9 Lokale Extrema

**Definition:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

- a)  $f$  hat in  $x_0$  eine *lokales Minimum* (bzw *lokales Maximum*), wenn es eine offene Umgebung  $x_0 \in V \subset U$  gibt mit  $\forall x \in V : f(x) \geq f(x_0)$  ( bzw.  $\leq$ ) Falls man sogar  $V$  so wählen kann, dass

$$\forall x \in V : f(x) > f(x_0) \text{ ( bzw. } < \text{)}$$

so spricht man von einem *isoliertes lokal Minimum* ( bzw. *Maximum*) von  $f$

- b) Die Bezeichnung *(isoliertes) lokales Extremum* bezeichnet sowohl Minima als auch Maxima

**42 Satz:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  habe in  $x_0 \in U$  ein lokales Extremum und sei partiell differenzierbar in  $x_0$ . Dann gilt  $\text{grad } f(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = 0$

*Beweis.* Sei  $r > 0$  sodass  $B(x_0, r) \subset U$  gilt. Sei ferner  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Standardbasis. Dann ist für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  die Funktion  $g_{ij} : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(x_0 + t \cdot e_j)$  in der Stelle  $t = 0$  durch  $g'_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$  differenzierbar und nimmt dort ein Extremum an. Aus Analysis 1 :  $g'_j(0) = 0$   $\square$

**Definition:** Ist  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix und  $Q_A$  die durch  $A$  gegebene quadratische Form auf  $\mathbb{R}^n$  so nennt man  $A$ :

a) **positiv definit** ( $A \gg 0$ ), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle > 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

b) **positiv semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle \geq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

c) **negativ definit** ( $A \ll 0$ ), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle < 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

d) **negativ semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle \leq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

e) **indefinit**, falls Vektoren  $\zeta, \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  existieren mit:

$$Q_A(\zeta) < 0; \quad Q_A(\bar{\zeta}) > 0$$

Zu jeder symmetrischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  und  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  mit

$$a) \quad A \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$b) \quad \forall i, j = 1, \dots, n : \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

Die Zahlen  $\lambda_j$  heißen *Eigenwerte von  $A$* , die  $x_i$  sind *Eigenvektoren von  $A$*  zum Eigenwert  $\lambda_j$ . Bezüglich einer Orthonormalbasis hat, die durch  $A$  gegebene quadratische Form die Gestalt:

$$\begin{aligned} \zeta = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j &\implies Q_A(\zeta) = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, A \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \left\langle v_i, \underbrace{A v_j}_{=\lambda_j v_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \end{aligned}$$

### Lemma

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann gilt:

- a)  $A$  ist positiv definit genau dann, wenn  $\lambda_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- b)  $A$  ist positiv semidefinit genau dann, wenn  $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- c)  $A$  ist negativ definit genau dann, wenn  $\lambda_j < 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- d)  $A$  ist negativ semidefinit genau dann, wenn  $\lambda_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- e)  $A$  ist indefinit genau dann, wenn es  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gibt mit  $\lambda_i, \dots, \lambda_j < 0$



**43 Satz:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$  Funktion, also zwei Mal stetig differenzierbar mit  $\text{grad} f(x_0) = 0$ . Dann gilt:

- a) Ist  $\text{Hess} f(x_0) \gg 0$ , so hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein isoliertes lokales Minimum
- b) Ist  $\text{Hess} f(x_0) \ll 0$ , so hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein isoliertes lokales Maximum
- c) Ist  $\text{Hess} f(x_0)$  indefinit, so hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  kein lokales Maximum

*Beweis.* Sei  $A := \text{Hess} f(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $D_a f$  eine  $C^2$  Funktion ist, ist  $A$  symmetrisch, welche nach Voraussetzung ist  $A$  positiv definit.

Die durch  $A$  gegebene quadratische Form  $Q_A$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ . Nimmt also auf dem Kompaktum:

$$S := \partial B(0, 1) = \{\zeta \in \mathbb{R}^n : |\zeta| = 1\}$$

ein Minimum an. Es gibt also  $\xi \in S$  mit  $Q_A(\xi) \leq Q_A(\zeta) \forall \zeta \in S$ , wobei positiv Definitheit bedeutet:  $4\varepsilon = Q_A(\xi) > 0$ . Daraus folgt

$$Q_A(\zeta) \geq 4\varepsilon |\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

da:

$$\begin{aligned} Q_A(S) &= Q_A\left(\frac{|\zeta|}{|\zeta|}\zeta\right) \\ &= |\zeta|^2 \underbrace{Q_A\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}_{\geq 4\varepsilon} \geq |\zeta|^2 4\varepsilon \end{aligned}$$

Aus dem Korollar zum Satz 4.1 folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \langle \text{grad} f(x_0), (x - x_0) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\langle x - x_0, A(x - x_0) \rangle}_{=Q_A(x-x_0)} + \eta(x) \end{aligned}$$

a) Siehe oben

b) Ist  $\text{Hess} f(x_0) \ll 0$ , so ist

$$-\text{Hess} f(x_0) = \text{Hess}(-f)(x_0) \ll 0$$

Aus a) folgt:  $-f$  hat in  $x_0$  ein isoliertes lokales Minimum

c) Ist  $A = \text{Hess} f(x_0)$  indefinit, so gibt es  $\zeta, \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^n$  mit  $|\zeta| = |\bar{\zeta}| = 1$  und  $Q_A(\zeta) =: \alpha > 0$  und  $Q_A(\bar{\zeta}) =: \beta < 0$

Für genügend kleine  $|t| \ll 1$  liegen die Punkte  $x_0 + t\zeta, x_0 + t\bar{\zeta} \in U$  und es gilt:

$$|\eta(x_0 + t\zeta)|$$

□

## §10 Implizite Funktionen

Die zentrale Fragestellung dieses Paragraphen ist folgende: Gegeben sei eine Gleichung (bzw. ein System von  $m$  Gleichungen)  $F(x, y) = 0$  durch die Abbildung  $F : U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  sowie eine Lösung  $(a, b)$ :  $F(a, b) = 0$ . Gibt es dann eine Umgebung  $V_1 \times V_2 \ni (a, b)$  in  $U_1 \times U_2$  und eine Abbildung  $g : V_1 \rightarrow V_2$  mit  $F(x, g(x)) = 0 \forall x \in V_1$ ? Und wenn ja, ist dieses  $g$  eindeutig? In diesem Fall sagen wir, dass die Abbildung  $g$  durch die Gleichung  $F(x, y) = 0$  *implizit definiert* ist.

**44 Satz:** Seien  $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ ,  $U_2 \subset \mathbb{R}^m$  offene Mengen,  $a \in U_1, b \in U_2$  und sei  $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(x, y) \mapsto F(x, y)$  eine differenzierbare Funktion mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = 0$$

Es gebe eine differenzierbare Funktion  $g : U_1 \rightarrow U_2$  mit  $g(a) = b$  und  $F(x, g(x)) = 0 \forall x \in U_1$ . Dann gilt:  $\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

*Beweis.* Bezeichne mit  $\phi$  die differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned}\phi : U_1 &\rightarrow U_1 \times U_2 \\ x &\mapsto (x, g(x))\end{aligned}$$

So ist die Verkettung  $F \circ \phi$  die konstante Nullfunktion ist. Aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= D(F \circ \phi)(x) \\ &= DF(\phi(x)) \cdot D\phi(x) \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, g(x)), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, g(x)), \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \dots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) & \dots & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(x), \right) \end{aligned}$$

Für  $x = a$  hat man aus  $g(a) = b$  und  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$  also:  $\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} \cdot (\text{die obige Matrix})$$

□

In Verbindung mit der nicht-Entartungsbedingung  $\frac{\partial F}{\partial g}(a, b) \neq 0$ , kann man bereits aus der Stetigkeit der implizit definition Funktion  $g$  auf  $f$  die Differenzierbarkeit schließen. Denn es gilt:

**45 Satz:** Seien  $a \in \mathbb{R}^k, b \in \mathbb{R}, a, r_2 > 0$  sowie  $U_1 = B(a, r_1) \subset \mathbb{R}^k, U_2 := B(b, r_2)$  Sei ferner  $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $(a, b)$  differenzierbare Funktion mit  $F(a, b) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$  Ist dann  $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetige Funktion mit  $g(a) = b, g(U_1) \subset U_2 : F(x, g(x)) = 0$  so folgt:  $g$  ist an der Stelle  $a$  differenzierbar und es gilt:  $\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

*Beweis.* Es seien  $A := \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) := \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(a, b), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(a, b) \right)$  und  $B := \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$  Nach Definition der Differenzierbarkeit von  $F$  in  $(a, b)$  hat die durch

$$F(x, y) = F(a, b) + A \cdot (x - a) + B \cdot (y - b) + \varphi(x, y); \forall x, y \in U_1 \times U_2 \quad (1)$$

definiert Fehlerfunktion  $\varphi : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Eigenschaft

$$\varphi(a, b) = 0; \lim_{\substack{a \neq x \rightarrow a \\ b \neq y \rightarrow b}} \frac{\varphi(x, y)}{|x - a| + |y - b|} = 0 \quad (2)$$

Wegen  $F(x, g(x)) = 0$  auf  $U_1$  folgt aus (1) in Verbindung mit  $F(a, b) = 0$  die Gleichung

$$g(x) = b - \frac{1}{B} \cdot A \cdot (x - a) - \frac{1}{B} \cdot \varphi(x, g(x)) \quad \forall x \in U_1 \quad (3)$$

so dass, wegen  $g(a) = b$  zum Beweis des Satzes nur noch zu zeigen ist:

**Behauptung 1:** Die durch  $\psi := \frac{1}{B} \varphi(x, g(x))$  definiert Fehlerfunktion  $\psi : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Eigenschaft  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{\psi(x)}{|x - a|} = 0$  Wir werden den Beweis der Behauptung 1 auf folgendes Resultat zurückführen:

**Behauptung 2:** Die Funktion  $g$  ist Lipschitz-stetig in  $a$ , das heißt

$$\exists 0 < \delta < r_1, \exists L > 0 : |g(x) - g(a)| \leq L \cdot |x - a| \quad \forall x \in B(a, \delta) \subset U_1$$

**Beweis der Behauptung 2:** Sei  $c_1 := \frac{|A|}{|B|}$  die euklidische Länge des Vektors  $\frac{1}{B} \cdot A \in \mathbb{R}^k$  und sei  $c_2 := \frac{1}{|B|}$ . Wegen (2) existiert ein  $0 < \delta_1 < \min\{r_1, r_2\}$  derart, dass  $|\varphi(x, y)| \leq \frac{1}{2c_2} (|x - a| + |y - b|) \quad \forall x \in B(a, \delta)$

und  $\forall y \in B(b, \delta_1)$  gilt. Da die Funktion  $g$  mit  $g(a) = b$  an der Stelle  $a$  stetig ist, können wir ein  $0 < \delta < \delta_1$ , so wählen, dass  $g(x) \in B(b, \delta_1) \forall x \in B(a, \delta)$  erfüllt ist. Daraus folgt dann  $|\varphi(x, g(x))| \leq \frac{1}{2c_2} (|x - a| + |g(x) - g(a)|) \forall x \in B(a, \delta)$  und in Verbindung mit (3) erhält man  $|g(x) - g(a)| \leq c_1|x - a| + c_2|\varphi(x, g(x))| \leq c_1|x - a| + \frac{1}{2} (|x - a| + |g(x) - g(a)|) \forall x \in B(a, \delta)$ . Was zu  $|g(x) - g(a)| \leq (2c_1 + 1)|x - a| =: L|x - a| \forall x \in B(a, \delta)$ . **Beweis der Behauptung 1:** Wir fixieren  $\delta > 0$  und  $L > 0$  wie in Behauptung 2. Ist  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben, so können wir wie beim Beweis der Behauptung 2 im Hinblick auf (2) und die Stetigkeit von  $g$  ein  $0 < \delta' < \delta$  so wählen, dass die Abschätzung

$$|\psi(x)| = c_2 |\varphi(x, g(x))| < \frac{\varepsilon}{1+L} (|x - a| + |g(x) - g(a)|) \quad \forall x \in B(a, \delta')$$

gültig ist. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von  $g$  in  $a$  ergibt sich sofort

$$|\psi| < \frac{\varepsilon}{1+L} (|x - a| + |g(x) - g(a)|) \leq \frac{\varepsilon}{1+L} (|x - a| + L|x - a|) \varepsilon |x - a| \quad \forall x \in B(a, \delta')$$

womit sowohl Behauptung 1 als auch Satz 45 bewiesen wären.  $\square$

Ist in der Situation des Satzes 45 die Funktion  $F$  sogar *stetig differenzierbar* auf  $U_1 \times U_2$ , so impliziert das Nicht-Verschwinden von  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$  die Existenz einer offenen Umgebung  $(a, b) \subset V_1 \times V_2 \subset U_1 \times U_2$  des Punktes  $(a, b)$  mit  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in V_1 \times V_2$ . In diesem Fall ist die implizit definierte Funktion  $g$  aufgrund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von  $F$  sogar *differenzierbar* auf  $V_1 = V_1(a)$ ! In erster Linie bemerkenswert ist allerdings eine andere Tatsache: Die stetige Differenzierbarkeit von  $F$  auf  $U_1 \times U_2$  in Verbindung mit der Nicht-Entartungsbedingung  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$  garantiert die *lokale Existenz* stetiger durch  $F(x, y) = 0$  implizit definierte Funktion wie in Satz 45.

**46 Satz:** Seien  $a \in \mathbb{R}^k, b \in \mathbb{R}, r_1, r_2 > 0$  sowie  $U_1 := B(a, r_1) \in \mathbb{R}^k, U_2 := B(b, r_2) \subset \mathbb{R}$ . Sei ferner

$$\begin{aligned} F : U_1 \times U_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit  $F(a, b) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ . Dann gibt es offene Umgebung  $V_1 = V_1(a) \subset U_1, V_2 = V_2(b) \subset U_2$  und eine stetige Funktion  $g : V_1 \rightarrow V_2$  mit  $g(a) = b, F(x, g(x)) = 0 \forall x \in U_1$ , welche die Auflösung der Gleichung  $F(x, y) = 0$  nach  $y$  auf  $V_1 \times V_2$  ermöglicht, insofern als gilt  $\forall (x, y) \in V_1 \times V_2$  mit  $F(x, y) = 0$  folgt  $y = g(x)$ .

### Bemerkung

Wie oben erklärt, kann man durch eventuelle Verkleinerung von  $V_1 = V_1(a)$  erreichen, dass  $g$  auf  $V_1$  stetig differenzierbar ist. Nach Satz 44 ist das Differential von  $g$  in  $x \in V_1$  durch

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$$

$\forall j = 1, \dots, k$  festgelegt.

**Fixpunkt:** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}, f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann heißt  $x^n \in U$  *Fixpunkt* von  $f$ , falls  $f(x^n) = x^n$ . Ein Fixpunkt  $x^n$  von  $f$  heißt *anziehend*, falls es eine Umgebung  $V = V(x^n) \subseteq U$  gibt, sodass für jedes  $x_0 \in V$ , die Folge  $(x_0) \subseteq U$  mit  $x_{n+1} = f(x_0) = f^{n+1}(x_0) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n+1 \text{ mal}}(x_0)$  gegen  $x^n$  konvergiert.

**Kontoaktionssatz:** Seien  $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  eine Kontraktion, d.h.  $\exists c \in (0, 1)$  s.d.  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$ . Dann hat  $f$  einen eindeutigen Fixpunkt.  $x^n \in [a, b]$  und  $\forall x_0 \in [a, b]$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x$

**46 Satz:**  $F : U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar.  $F(a, b) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \implies \exists! g : V_1 \subset U_1 \rightarrow V_2 \subset U_2. \forall (x, y) \in V_1 \times V_2:$

$$F(x, y) = 0 \iff y = g(x)$$

**47 Satz:** Seien  $U_1 \subset \mathbb{R}^k, U_2 \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $a \in U_1, b \in U_2$  und  $F = (F_1, \dots, F_m) : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ \vdots \\ F_m(x, y) \end{pmatrix}$$

eine Abbildung mit  $F(a, b) = 0 \in \mathbb{R}^m$  und sie  $\det \left( \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \neq 0$  und sei  $g = (g_1, \dots, g_m) : U_1 \rightarrow U_2$  eine Abbildung d.h.  $g(U_1) = U_2$  mit  $g(a) = b$  und  $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U_1$  wie in (B) differenzierbar. Dann gilt:

$$Dg(a) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \right)$$

**48 Satz:** Sei  $F$  wie in Satz 47 definiert und differenzierbar in  $(a, b)$  mit  $U_1 = B(a, \tau_1) \subseteq \mathbb{R}^k, U_2 = B(a, \tau_2) \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $\det \left( \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \neq 0$ . Sei  $g$  wie in Satz 47 stetig. Dann ist  $g$  differenzierbar in  $a$  mit

$$Dg(a) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \right)$$

**49 Satz über implizite Abbildungen:** Sei  $F$  wie in Satz 47 stetig differenzierbar mit  $U_1 = B(a, \tau_1) \subseteq \mathbb{R}^k, U_2 = B(a, \tau_2) \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $\det \left( \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \neq 0$  Dann gibt es offene Umgebungen  $V_1 \subseteq U_1$  von  $a, V_2 \subseteq U_2$  von  $b$  und  $g : V_1 \rightarrow V_2$  stetige Abbildung, sodass:  $\forall (x, y) \in V_1 \times V_2$

$$F(x, y) = 0 \iff y = g(x)$$

**50 Umkehrsatz:** Seien  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U_1 \rightarrow U_2$ , stetig differenzierbar  $a \in U_1$  mit  $\det Df(a) \neq 0, b := f(a) \in U_2$  Dann gibt es offene Umgebungen  $W_1 \subset U_1$  von  $a, W_2 \subseteq U_2$  von  $b$  und eine stetig differenzierbar Abbildung  $g : W_2 \rightarrow W_1$  mit  $g \circ (f|_{W_1}) = \text{id}_{W_1} \quad (f|_{W_2}) \circ g = \text{id}_{W_2}$

## §11 Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

**Parametergebiet:** Ein beschränktes Gebiet  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *Parametergebiet*, wenn  $\partial P = \partial(\overline{P})$

**Parametrisiertes Flächenstück:** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^p$  ein Parametergebiet. Ein parametrisiertes Flächenstück über  $P$  ist eine stetig differenzierbar Abbildung  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass:

- $\varphi$  injektiv
- $\text{rang } D\varphi(x) = p \ \forall x \in P$
- Ist  $x_0 \in P$  und  $(x_y)_y$  s.d.  $\lim_{y \rightarrow 0} \varphi_y = \varphi(x_0)$ , so ist  $\lim_{y \rightarrow \infty} x_y = x_0$

Die Zahl  $p$  heißt die Dimension des Flächenstücks. Für  $p = 1$  heißt  $\varphi$  auch *glatter Weg*

**Glatte Fläche, Untermannigfaltigkeit:** Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt  $p$ -dimensionale glatte Fläche (Untermannigfaltigkeit), falls es zu jedem  $x_0 \in M$  eine Umgebung  $U = U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$  und ein glattes parametrisiertes Flächenstück  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(\zeta) = x_0$  für ein  $\zeta_0$  und  $\varphi(P) = U \cap M$   $\varphi$  heißt dann *lokale Parametrisierung* von  $M$  in  $x_0$ . Für  $p = n - 1$  nennen wir  $M$  eine *Hyperfläche*.

**51 Satz:** Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $M \subseteq B, 0 \leq q \leq n$ . Es gebe stetig differenzierbare Funktion  $f_1, \dots, f_q : B \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

1.  $M = \{x \in B \mid f_1(x) = \dots = f_q(x) = 0\}$
2. Die Vektoren  $\text{grad}(f_1(x)), \dots, \text{grad}(f_q(x))$  sind  $\forall x \in M$  linear unabhängig.

Dann ist  $M$  eine  $p$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit  $p = n - q$

**Definition:** Sei  $M$  eine  $U$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ . Eine Funktion  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar, falls für jede Parametrisierung  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $M$   $h \circ \varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist

**Definition:** Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $g = (g_1, \dots, g_m) : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar mit  $\text{rang}(Dg(x)) \forall x \in B$ . Weiter sei  $H = \{x \in B \mid g(x) = 0\}$ ,  $a \in MU = U(a) \subseteq S$  offene Umgebung,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar.  $f$  hat eine *relatives Maximum (bzw. Minimum)* in  $a$  unter der Nebenbedingungen  $g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0$ , falls  $f(x) \leq f(a) \forall x \in M \cap U$  (bzw.  $f(x) \geq f(a) \forall x \in U \cap M$ )

**52 Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren:** Hat  $f$  in  $a$  ein relatives Extremum unter den Nebenbedingungen  $g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0$ , so gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  sodass

$$\text{grad}f(a) = \lambda_1 \text{grad}(g_1(a)) + \dots + \lambda_m \text{grad}(g_m(a)) \quad (\star)$$

Die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$





# Index

abgeschlossene Hülle, 6

Dreiecksgleichung, 4

Häufungspunkt, 9

Häufungsspunkt, 7

innerer Punkt, 7

nominierter Vektorraum, 4

Norm, 4

Skalarprodukt, 3

Vektorraum, 3