41 Satz: Seien $U \in \mathbb{R}^n$ offen $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Für $r > 0$ gelte $B(x_0, r) \subset U$ Dann gibt es eine Funktion $\eta : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ mit $\eta(x_0) = 0$ und $\lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^k} = 0$. Sodass $\forall x \in B(x_0, r)$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{\substack{|\alpha| = l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \cdot (x - x_0)^\alpha \right) \eta(x)$$

Spezialfall für $k = 2$

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f \in C^2(U)$ Dann gibt es $c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, sodass die durch

$$f(x) = c + \langle a, (x - x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - x_0), A \cdot (x - x_0) \rangle + \eta(x) \ \ \forall x \in U$$

definierte Funktion $\eta : U \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften

$$\eta(x_0) = 0, \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^2} = 0$$

hat.

Hesse Matrix: Sind $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ ist 2-mal stetig partiell differenzierbare, so heißt die symmetrische Matrix :

$$\mathrm{Hess} f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Hessesche Matrix von f in x_0

§9 Lokale Extrema

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion

a) f hat in x_0 eine *lokales Minimum (bzw lokales Maximum)*, wenn es eine offene Umgebung $x_0 \in V \subset U$ gibt mit $\forall x \in V : f(x) \geq f(x_0)$ (bzw. $\leq$) Falls man sogar V so wählen dann, dass

$$\forall x \in V : \; f(x) > f(x_0) \; (\text{ bzw. } <)$$

so spricht man von einem *isoliertes lokal Minimum (bzw. Maximum)* von f

b) Die Bezeichnung *(isoliertes) lokales Extremum* bezeichnet sowohl Minima als auch Maxima

42 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum und sei partiell differenzierbar in x_0 . Dann gilt grad $f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) = 0$

Beweis. Sei $r > 0$ sodass $B(x_0, r) \subset U$ gilt. Sei ferner $\{e_1, \cdots, e_n\}$ die Standardbasis. Dann sit für jedes $j \in \{1, \cdots, n\}$ die Funktion $g_{ij} : (-r, r) \to \mathbb{R}, \;\; t \mapsto f(x_0 + t \cdot e_j)$ in der Stelle $t = 0$ durch $g'_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ differenzierbar und nimmt dort ein Extremum an. Aus Analysis 1 : $g'_j(0) = 0$ $\square$

Definition: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und Q_A die durch A gegebene quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ so nennt man A:

a) **positiv definit** ($A \gg 0$), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle > 0 \; \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \; \{0\}$$

b) **positiv semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle \geq 0 \; \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \; \{0\}$$

c) **negativ definit** ($A \ll 0$), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle < 0 \; \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \; \{0\}$$

d) **negativ semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A \cdot \zeta \rangle \leq 0 \; \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \; \{0\}$$

e) **indefinit**, falls Vektoren $\zeta, \overline{\zeta} \in \mathbb{R}^n \; \{0\}$ existieren mit:

$$Q_A(\zeta) < 0 \,;\; Q_A\left(\overline{\zeta}\right) > 0$$

Zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit

a) $A \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j \; \forall j = 1, \cdots, n$

b) $\forall i, j = 1, \cdots, n : \; \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

Die Zahlen λ_j heißen *Eigenwerte von* A , die x_i sind *Eigenvektoren von* A zum Eigenwert λ_j. Bezüglich einer Orthonormalbasis hat, die durch A gegebene quadratische Form die Gestalt:

$$\begin{aligned}
\zeta = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \implies Q_A(\zeta) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, A\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right)\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \left\langle v_i, \underbrace{Av_j}_{=\lambda_j v_j} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^n
\end{aligned}$$

Lemma

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Dann gilt:

a) A ist positiv definit genau dann, wenn $\lambda_j > 0 \; \forall j = 1, \cdots, n$

b) A ist positiv semidefinit genau dann, wenn $\lambda_j \geq 0 \; \forall j = 1, \cdots, n$

c) A ist negativ definit genau dann, wenn $\lambda_j < 0 \; \forall j = 1, \ldots, n$

d) A ist negativ semidefinit genau dann, wenn $\lambda_j \leq 0 \; \forall j = 1, \cdots, n$

e) A ist indefinit genau dann, wenn es $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ gibt mit $\lambda_i, \cdots, \lambda_j < 0$

$sdfoiwqasfieofw$