1. príklad

Nájdite obor pravdivosti výrokovej formy:

$$2|x-1|+3 \leq |5-4x|$$

definovanej nad oborom reálnych čísel. Dokážte, že vaše riešenie je správne. V dôkaze využite tieto dve vlastnosti absolútnej hodnoty:

$$\forall x \forall y (y \leq |x| \leftrightarrow y \leq x \vee y \leq -x) \quad (1)$$

$$\forall x \forall y (|x| \leq y \leftrightarrow x \leq y \wedge -x \leq y) \quad (2)$$

<u>Riešenie 1. úlohy:</u>

V tomto príklade môžeme použiť aj prvý aj druhý prípad pre vlastnosti absolútnych hodnôt. Aplikujeme tieto dva prípady do nerovnice a dostávame:

$2|x-1|+ 3\leq|5-4x| \leftrightarrow$ {podľa (1) aj (2)}

$[2*(x-1)+ 3\leq 5-4x] \vee [2* -(x-1)+ 3\leq 5-4x] \wedge [2*(x-1)+ 3\leq -(5-4x)] \vee [2*(x-1)+ 3\leq 5-4x]$

Jednotlive prípady pre x som dala do [], aby boli lepšie rozlíšiteľné logické operandy a - ∧ a alebo - ∨. Ďalej môžeme počítať jednotlivé prípady pre x.

$[2x-2 + 3\leq |5-4x|] \vee [-2x + 2 + 3\leq |5-4x|] \wedge [2|x-1|+ 3\leq -5+4x] \vee [2|x-1|+ 3\leq 5-4x]$

A ďalej už len upravujeme:

$[2(x-1)+ 3\leq -5+4x] \vee [2(x-1)+ 3\leq 5-4x] \wedge [2x-2 + 3\leq 5-4x] \vee [-2x + 2 + 3\leq 5-4x]$

$[2x-2+ 3\leq -5+4x] \vee [-2x+2+ 3\leq 5-4x] \wedge [2x-2 + 3\leq -5+4x] \vee [-2x + 2 + 3\leq -5+4x]$

$[2x-2+ 3\leq 5-4x] \vee [-2x+2+ 3\leq 5-4x] \wedge [2x-2 + 3\leq -5+4x] \vee [-2x + 2 + 3\leq -5+4x]$

$[2x+4x\leq 5-1] \vee [-2x+4x\leq 5-5] \wedge [2x-4x\leq -5-1] \vee [-2x-4x\leq -5-5]$

$[x \leq \frac{2}{3}] \vee [x \leq 0] \wedge [x \geq 3] \vee [x \geq \frac{5}{3}]$

Z doterajšieho riešenia nám vyšiel výsledný interval, a teda x patrí do intervalu $(-\infty, 0 > \cup < \frac{5}{3}, \infty)$

2. príklad

Nech a_n je postupnosť čísel definovaná vzťahom:

$a_0 = 0$

$a_1 = 0$

$a_2 = 2$

$a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí rovnosť:

$a_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$

<u>Riešenie 2. úlohy:</u>

Túto úlohu budeme riešiť pomocou princípu matematickej indukcie. Kde si určíme bázu indukcie, indukčný krok a nakoniec vyjadríme indukciu.

Báza indukcie:

Musíme dokázať tvrdenie pre n = 0, n = 1 a n = 2 a dostávame:

$a_0 = 0 = 3^0 - 2^{0+1} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$a_1 = 0 = 3^1 - 2^{1+1} + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$

$a_2 = 2 = 3^2 - 2^{2+1} + 1 = 9 - 8 + 1 = 2$

Indukčný krok:

Budeme predpokladať, že tvrdenie platí pre n, n+1, n+2 a n+3. A zapíšeme indukčné predpoklady (IP):

$a_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$

$a_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1+1} + 1 = 3^{n+1} - 2^{n+2} + 1$

$a_{n+2} = 3^{n+1+1} - 2^{n+1+1+1} + 1 = 3^{n+2} - 2^{n+3} + 1$

$a_{n+3} = 3^{n+1+1+1} - 2^{n+1+1+1+1} + 1 = 3^{n+3} - 2^{n+4} + 1$

A teraz môžeme ďalej dosadiť do rovnice podla IP:

$a_{n+3} = 6_{a_{n+2}} - 11_{a_{n+1}} + 6_{a_n} = 6 * [3^{n+2} - 2^{n+3} + 1] - 11 * [3^{n+1} - 2^{n+2} + 1] + 6 * [3^{n} - 2^{n+1} + 1] =$

$= 6 * [3^{n} * 3^{2} - (2^{n} * 2^{3}) + 1] - 11 * [3^{n} * 3^{1} - (2^{n} * 2^{2}) + 1] + 6 * [3^{n} - (2^{n} * 2^{1}) + 1] =$

$= 6 * [3^{n} * 3^{2} - (2^{n} * 2^{3})] - 11 * [3^{n} * 3^{1} - (2^{n} * 2^{2})] + 6 * [3^{n} - (2^{n} * 2^{1})] + 6 - 11 + 6 =$

$= 6 * [3^{n} * 3^{2} - (2^{n} * 2^{3})] - 11 * [3^{n} * 3^{1} - (2^{n} * 2^{2})] + 6 * [3^{n} - (2^{n} * 2^{1})] + 1 =$

$= [3^{n} * 3^{2} * 6 - 6 * 2^{n} * 2^{3}] - [3^{n} * 3^{1} * 11 - 2^{n} * 2^{2} * 11] + [3^{n} * 6 - 2^{n} * 2^{1} * 6] + 1 =$

$= 54 * 3^{n} - 42 * 2^{n} - 33 * 3^{n} + 2^{n} * 44 + 6 * 3^{n} - 12 * 2^{n} + 1 =$

$= 27 * 3^{n} - 16 * 2^{n} + 1 =$

$= 3^{n} * 3^{3} - 2^{n} * 2^{4} + 1 =$

$= \mathbf{3^{n+3} - 2^{n+4} + 1}$

Týmito výpočtami sme dokázali pravdivosť indukčného predpokladu pre n+3. A teda platí indukčný predpoklad.