Analysis 2 (Prof. Scherbina) Notizen

Sisam Khanal

28. Juli 2024

Aktuelle Notizen unter:

https://thisissisam.github.io/notes/ana2/main.pdf

Inhaltsverzeichnis

§1 Der $\mathbb{R}^n$ und seine Topologie

Erklärt man auf der Menge $R^n := \{\alpha = (x_1, x_2, x_3 \dots) \, | x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots n\}$ aller geordneten n-Tupel reeller Zahlen eine Addition komponentenweise durch $x + y = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n$ für $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2 \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$ und eine Multiplikation mit reellen Skalaren. So erhält $\mathbb{R}^n$ die Structure eines n-dimensionalen Vektorraums über $\mathbb{R}$; eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist durch die Vektoren $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \dots e_n = (0, \dots, 0, 1)$ gegeben. Man bezeichnet die Familie $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ als *Standardbasis* oder auch kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$

euklidisches Skalarprodukt: Das euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $\langle \circ, \circ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{1=1}^{n} x_i y_i$ die je zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ die reellen Zahl $\langle x, y \rangle$zugeordnet, welsche man *euklidisches* Skalarprodukt von x und y nennt.

Eine weitere gebräuchliche Schreibweise für das euklidische Skalarprodukt zwei Vektor ist $\langle x, y \rangle =: x \cdot y$ Die wichtigsten Eigenschaft des euklidische Skalarprodukt nennt der folgende Satz, auf dessen trivialen Beweis wir verzichten werden.

Satz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\langle (x + z), y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$

b) $\langle (\alpha \cdot x), y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

c) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

d) $\langle x, x \rangle$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Euklidische Norm: Sei $z \in \mathbb{R}^n$, dann nennt man die Zahl $|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, die euklidische Norm von x . Es folgt

a) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \iff x = 0$

b) $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$

c) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Schwarzsehe Ungleichung: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle |x, y| \rangle \leq |x| \, |y|$
(wurde in LA2 bewiesen)

Eigenschaft von Norm auf Vektorraum

Allgemein nennt man jede Abbildung $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ auf einem R-Vektorraum V eine Norm auf V, wenn sie die folgende Eigenschaften haben

a) $\forall x \in V; \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$

b) $\forall x \in V, \forall a \in \mathbb{R} \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

c) $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Man nennt dann das Tupel $(V, \| \cdot \|)$ einem nominierten Vektorraum
Dies wurde auch in LA2 bewiesen

Beispiel

a) $V := \mathbb{R}^n$ und sei $\|.\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$. $x = (x_1, x_2 \ldots x_n) \to \|x\|_\infty := max \{|x_1|, |x_2|, |x_n|\}$. Dann ist $\|.\|_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}_n$ nennt.

b) Der Vektorraum V aller linearen Abbildungen $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird durch die Definition $\|L\| := sum \{|L(x)| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$

c) Fehlt

euklidische Metrik: Die Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y) := |x - y|$ heißt euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$

Eigenschaften der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^n$ sind:

Eigenschaften der euklidischen Metrik: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gibt:

a) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksgleichung)

Metrik auf eine Menge: Eine Metrik auf eine Menge A ist eine Abbildung $f : A \times A \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft a)- c) von Satz 1.16

Beispiel

Sei A beliebige Menge und $f : A \times A \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$p(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{falls} x \neq y \\ 0, & \text{falls} x = y \end{cases}$$

Kugel: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und sei $r > 0$. Dann heißt die Menge $B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$ als die *Kugel um a mit dem Radius* r .

Offene und abgeschlossene Menge: Sei $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge

a) $\mathcal{S}$ heißt *offen*, wenn $\forall a \in \mathcal{S}\ \exists r > 0$ sodass $B(a,r) < \mathcal{S}$

b) $\mathcal{S}$ heißt *abgeschlossen* , wenn $\mathbb{R}^n\ \mathcal{S}$ offen ist.

Sätze über offene Menge:

a) $\mathbb{R}^n$ und die leere Menge $\emptyset$ sind offen.

b) Sei $J \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und sei $\{U_i : i \in J\}$ eine Familie offener Menge $U_i \subset \mathbb{R}^n$ Dann ist die Menge $V := \bigcup_{i \in J} U_i$ ebenfalls offen.

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $seine U_1, U_2, \ldots, U_m$ offene Menge in $\mathbb{R}^n$ Dann ist die Menge $W := \bigcap_{i=1}^{m} U_i$ ebenfalls offen

Beweis. a) Trivial

b) Sei $a \in V \implies \exists i \in J$ sodass $a \in U_i$ U_i offen $\implies r > 0$ sodass $B(a,r) \subset U_i \subset V \implies V - offen$

c) Sei $a \in W \implies a \in U_i, i = 1, 2 \ldots, m$. $U_i - offen \implies r_i > 0$ sodass $B(a, r_i) \subset U_i$. Sei $r := min\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} > 0$ Dann $\forall i = 1, 2, \ldots, m$ gilt $B(a,r) \subset B(a, r_i) \subset V_i \implies B(a,r) \subset \bigcap_{i=1}^{m} U_i = w \implies w - offen$

$\square$

Aus Satz 1.10 und aus der Definition von abgeschlossen Mengen folgt direkt

Weitere Eigenschaften von Menge:

a) $\mathbb{R}^n$ und die leere Menge $\emptyset$ sind abgeschlossen

b) Sei $J \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und sei $\{A_i : i \in J\}$ eine Familie abgeschlossener Menge $A_i \subset \mathbb{R}^n$ .Dann ist die Menge $A := \bigcap\limits_{i \in J} A_i \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls abgeschlossen.

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, A_2, \ldots A_m$ abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Menge $L := \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls abgeschlossen. $\bigcap\limits_{i \in J} (\mathbb{R}^n\ A_i) = \mathbb{R}^n \bigcup\limits_{i \in J} A_i$ und $\bigcup\limits_{i \in J} (\mathbb{R}^n A_i) = \mathbb{R}^n \bigcap\limits_{i \in J} A_i$

Umgebung: Ist $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so nennt man jede offene Menge $U \in \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ eine *offene Umgebung von a*. Für $\varepsilon > 0$ bezeichnet man die Kugel $B(a, \varepsilon)$ auch als ε *-Umgebung* von a

Definition:

a) Man bezeichnet die Menge $\overline{A} := \bigcap B$ mit $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, $B - abgeschlossen$ als den $Abschluss$ oder *abgeschlossene Hülle von A*

b) Die Menge $\mathring{A} \overset{\text{u}}{=} uU$ mit $u \in U$ und $U - offen$ heißt *offener Kern* von A

c) Der Rand von A ist gegeben durch $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$

Bemerkung

Nach Satz 1.10 und 1.11 ist $\overline{A}$ stets abgeschlossen und $\mathring{A}$ stets offen. $\mathring{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die $\overline{A}$ enthält, $\mathring{A}$ ist die größte in A enthaltene offene Teilmenge von A . Insbesondere gilt $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

Beisiele

a) Sei $A = [0,1) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Dann ist $\overline{A} = (0,1) \times (0,1), \overline{A} = [0,1]\ \times [0,1], \partial A = 0,1 \times [0,1]$ und $\partial A = 0,1 \times [0,1] \cup [0,1] \times 0,1$

b) $A = B(0,1) \cup (B(0,2) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$ und $\overline{A} = \overline{B(0,2)}, \mathring{A} = B(0,1), \partial A = B(0,2) \setminus B(0,1)$

Eigenschaften der abgeschlossenen Hülle und offener Kern:

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

a) $x \in \partial A \iff$ jede offene Umgebung des Punktes x sowohl A als auch $\mathbb{R}^n \setminus A$ trifft. (Das heißt sowohl mit A, als auch mit $\mathbb{R}^n \setminus A$ einen nicht leeren Durchschnitt hat.)

b) $A \setminus \partial A = \mathring{A}$

c) $A \bigcup \partial = \overline{A}$

d) ∂A ist abgeschlossen.

innerer Punkt: Sei $A \in \mathbb{R}^n$.

a) Man nennt $x \in A$ einen inneren Punkt der Menge A , wenn es eine offene Umgebung $U = U(x)$ des Punktes x gibt, so dass $U \subset A$ gilt.

b) Mann nennt $y \in \mathbb{R}^n$ einen Häufungspunkt der Menge A, wenn in jeder offenen Umgebung $U = U(y)$ des Punktes y ein von y verschiedener Punkt der Menge A liegt, dass heißt wenn gilt:

$$\forall U = U(y) \text{ offen } \exists x \in A \bigcup U : x \neq y$$

Die Menge der Häufungspunkt von A wird $HP(A)$

8 Satz: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, dann gilt:

a) $\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt con A}\}$

b) $\overline{A} = A \bigcup HP(A)$

Beweis. a) Ist $x \in \mathring{A}$ so it definitions gemäß $x \in U \bigcup : U \subset A, U -$ offen also existiert mindestens eine offene Umgebung $V = V(x)$ des Punktes x mit $V \subset A \implies x$ innerer Punkt von A ist. Ist anderseits x innerer Punkt von A , so existiert eine offene Umgebung $V = V(x)$ des Punktes x mit $x \in V \subset A \implies$ insbesondere x ist dann Element der Vereinigung. $\bigcup U : U \subset A, U-$ offen, das heißt $x \in \overline{A}$.

b) Wegen $\overline{A} A \bigcup \partial A = A \bigcup (\partial A \setminus A)$ und $HP(A) \bigcup = A \bigcup (HA(A) \setminus A)$ folgt die Behauptung aus der einfachen Beobachtung, dass alle nicht in A gelegene Randpunkte von A zwangsläufig Häufungspunkt von A sind und umgekehrt alle nicht in A gelegenen Häufungspunkt von A natürliche Randpunkte von A sind.

$\square$

§2 Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$

Definition: Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Punkten im $\mathbb{R}^n$. (x_k) heißt *konvergent* gegeben $a \in \mathbb{R}^n$ (in Zeichnen: $\lim_{h\to\infty} x_k = a$), wenn zu jeder offenen Umgebung $U = U(a)$ des Punktes a ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in U \forall x \geq k_0$ gibt.

Bemerkung

Definition $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ sodass $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$

9 Satz: Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge und sei $a \in \mathbb{R}^n$; es seien Komponentenschreibweise $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2} \cdots x_{k_n}) \forall k \in \mathbb{N}, a = (a_1, a_2 \cdots a_n)$, Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \iff \lim_{k\to\infty} x_{k_j} a_j \forall j = 1, 2 \cdots, n$$

Beweis. " $\implies$ " $\forall \varepsilon > 0$ sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so gezählt, dass $x_k \in B(a, \varepsilon) \forall k \geq k_0$ gilt. Für beliebiges $j \in \{1, 2, \cdots n\}$ ist dann

$$\begin{aligned}
\left|x_{k_j} - a_j\right| &= \sqrt{\left(x_{k_j} - a_j\right)^2} \\
&\leq \sqrt{\left(x_{k_1} - a_1\right)^2 + \left(x_{k_2} - a_2\right)^2 \cdots \left(x_{k_n} - a_n\right)^2} \\
&= |x_k - a| \\
&< \varepsilon \implies \lim_{k\to\infty} x_j = a
\end{aligned}$$

" $\impliedby$ " $\forall \varepsilon > 0$ wähle man $\forall j \in \{1, 2, \cdots n\}$, so gilt $\forall k \geq k_0$

$$\begin{aligned}
\left|x_{k_j} - a_j\right| &= \sqrt{\left(x_{k_1} - a_1\right)^2 + \left(x_{k_2} - a_2\right)^2 \cdots \left(x_{k_n} - a_n\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\varepsilon^2} \\
&= \varepsilon \implies \lim_{k\to\infty} x_k = a
\end{aligned}$$

$\square$

Definition: Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge. Man nennt $a \in \mathbb{R}^n$ einen Häufungspunkt der Folge (x_k), falls es eine Teilfolge $\left(x_{k_y}\right) \subset (x_k)$ mit $\lim_{y\to\infty} x_{k_y} = a$ gibt.

10 Satz: Für eine Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist abgeschlossen.

b) Der Grenzwert einer jeden Folge $(x_k) \subset A$, die als Punktfolge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert, liegt in A

Beweis. 1) $\implies$ 2) Sei A abgeschlossen und sei $(x_k) \subset A$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$. Falls x_n eine konstante Teilfolge $\left(x_{k_\gamma}\right) \subset (x_k)$, so gilt $x_{k_\gamma} = a \forall \gamma \in \mathbb{N}$, und es folgt $a \in A$ wegen $\left(x_{k_\gamma}\right) \subset A \implies a \in A$ Hat (x_k) keine konstante Teilfolge, so gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_k \neq a \ \forall k \geq k_0$ gilt, offenbar ist a ein Häufungspunkt der Menge $\{x_k : k \geq k_0\} \subset A$ und deshalb auch $a \in HP(A)$. Nach Satz 8 ist $HP(A) \subset \overline{A}$, aber $\overline{A} = A$, denn A is abgeschlossen. Deshalb $a \in A$
2) $\implies$ 1) Sei $x \in HP(A)$. Dann gibt es eine Folge $(x_k) \subset A, x_k \neq x \ \forall x \in \mathbb{N}$, so dass $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ gilt. Nach Voraussetzung liegt der Grenzwert jeder convergente Folge von Punkten aus A ebenfalls in A, und es folgt $x \in A$. Dann ist $HP(A) \subset A$ gezeigt, also ist $A = A \cup HP(A) = \overline{A}$, das heißt $A - abgeschlossen$ $\square$

Definition: Eine Folge $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$,s.d $|x_n - x_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geq k_0$

11 Satz: Jede konvergente Folge $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ ist eine *Cauchy-Folge*

12 Satz: Sei $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ eine Folge, es sei $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}) \forall \ k \in \mathbb{N}$. Dann ist (x_k) eine *Cauchy-Folge* genau dann, wenn jede der Folgen $x_{k_j}, \ j = 1, 2, \cdots, n$ eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$ ist.

Beweis. " $\implies$ " (x_k) ist eine Cauchy-Folge $\implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ s.d $|x_k - x_m| < \varepsilon \ \forall k, m \geq k_0 \implies \forall 1 \leq j \leq n$
" $\impliedby$ " (x_{k_j})-eine Cauchy-Folge $\forall 1 \leq j \leq \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_{0_j} \in \mathbb{N}$ s.d $\left|x_{k_j} - s_{m_j}\right| < \varepsilon \ \forall k, m \geq k_{0_j}$. Sei $k_0 := max\{k_{0_1}, \cdots, k_{0_n}\} \in \mathbb{N}$. Dann ist $|x_k - x_m| = \sqrt{(x_{k_1} - x_{m_1})^2 + \cdots + (x_{k_n} - x_{m_n})^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon \ \forall k, m \geq k_0 \implies (x_k)$-eine Cauchy-Folge. $\square$

13 Satz: Jede Cauchy-Folge im $\mathbb{R}^n$ ist konvergent, das heißt $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

§3 Funktionen, Abbildungen, Stetigkeit

Definition: Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* and der Stell $a \in U$, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0$ s.d $|x - a| < \delta, x \in U \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
f heißt *stetig* (auf U), wenn f in jedem Punkt $a \in U$ stetig ist.

Wir verallgemeinern diese Stetigkeitsdefinition sogleich auf Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^m$. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \subset U \to \mathbb{R}^m$ ist gegeben durch ein $m-$Tupel $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ von Funktionen $f_j : U \to \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m \; \forall x \in U, f(x) \in \mathbb{R}^m,$ d.h $f(x) = (f(x_1), \cdots, f(x_m))$

Definition: $f : \mathbb{R}^n \subset U \to \mathbb{R}^m$ ist *an der stelle* $a \in U$ *stetig*, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d $x \in U, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. f heißt *stetig* (auf U), wenn $\forall a \in U$, f in a stetig ist.

14 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ ein Abbildung. f ist stetig in a, genau dann, wenn jede der Komponenten Funktionen $f_j : U \to \mathbb{R}, j = 1, 2, \cdots, m$ stetig in a ist.

Beweis. Der Beweis beruht wie der Beweis des Sates 9 auf der Äquivalenz der Maximumnorm auf $\mathbb{R}^m$ zur euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^m$, genauer auf der Beziehung

$$\|x\|_\infty := max \left\{ |x_1|, \cdots, |x_m| \leq \sqrt{m} \|x\|_\infty \right\} \; \forall x \in \mathbb{R}^m$$

□

15 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a \in U$. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann in a stetig, wenn zu jeder offenen Umgebung $F = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$ des Punktes $f(a) \in \mathbb{R}^m$ eine offene Umgebung $W = W(a) \subset \mathbb{R}^n$ des Punktes $a \in V$ existiert, so dass $f(W) = \{f(x) | \, x \in U \cap W\} \subset V$ gilt.

Beweis. " $\Longrightarrow$ "f ist stetig. sei $V = V(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Umgebung des Punktes a $\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0$,s.d $B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$. f ist stetig in a $\Longrightarrow \exists \delta > 0$,s.d. $x \in \underbrace{B(a,\delta) \cap U}_{:=W}$

$\Longrightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset V(f(a))$

" $\Longleftarrow$ " Sei $\forall V(f(a))$-offen, $\exists W(a)$-offen s.d. $f(W) \subset V$ gilt. $\forall \varepsilon > 0$ sei $V = N(f(a), \varepsilon)$,dann $\exists W(a)$-offen s.d. $f(W) \subset B(f(a), \varepsilon) \Longrightarrow \exists \delta > 0$ s.d. $B(a, \delta) \subset W$
$\Longrightarrow f(B(a, \varepsilon) \cap U \subset B(f(a), \varepsilon) \Longrightarrow f$ ist stetig in a ☐

16 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f ist genau dann auf U stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(V) := \{x \in U : f(x) \in V\}$ einer jeden offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ unter f selbst wieder offen ist.

Beweis. " $\Longrightarrow$ " f ist stetig auf U. Sei V in $\mathbb{R}^n$ offen. Sei $a \in f^{-1}(V)$,d.h. $f(a) \in V \xrightarrow{Satz15} \exists W(a) \subset \mathbb{R}^n$ offen, s.d $f(W(a) \cap V) \subset V \Longrightarrow \exists \delta > 0$ s.d. $B(a, \delta) \subset W(a) \Longrightarrow W(a) \subset f^{-1}(V) \Longrightarrow B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$
" $\Longrightarrow$ " Für $a \in f^{-1}(V)$ sei $W(a) := f^{-1}(V) \xrightarrow{Satz15} f$ stetig in a ☐

Für stetige Abbildung des $\mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}$ gelten Rechenregeln, die denen für das Rechnen mit stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entsprechen und die völlig analog zu beweisen sind:

17 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ seien beide stetig an der Stelle $a \in U$, dann gilt :

a) Die Funktion $(f + g) : U \to \mathbb{R}$ ist stetig in a

b) Die Funktion $(f \cdot g) : U \to \mathbb{R}$ ist stetig in a

c) Falls $g(a) \neq 0$ existiert eine offene Umgebung $V = V(g)$ mit $g(x) \neq 0 \; \forall x \in V$, die Funktion $\left(\frac{f}{g}\right) : V \to \mathbb{R}$ ist stetig in a.

Bemerkung

Die Übertragung des Sates 17 auf dem Fall $\mathbb{R}^m$-wertiger Abbildungen ist nicht uneingeschränkt möglich. Folgende Version auf deren Beweis wie ebenfalls verzichten können, ist aber gültig.

18 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ sei stetig in a. Dann gilt:

a) Ist die Abbildung $g : V \to \mathbb{R}^m$ stetig in a, so ist auch die Abbildung $(f + g) : U \to \mathbb{R}$ ist stetig in a .

b) Ist die Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ stetig in a, so ist auch die Abbildung $(f \cdot g) : U \to \mathbb{R}$ ist stetig in a .

c) Ist die Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ stetig in a und $g(a) \neq 0$, so existiert eine offene Umgebung $V = V(a)$ mit $g(x) \neq 0 \; \forall x \in V$; die Abbildung $\left(\frac{f}{g}\right) : V \to \mathbb{R}$ ist stetig in a.

Auch die Komposition stetiger Abbildungen liefert wieder eine stetige Abbildung:

19 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und seien $f : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ sowie $g : V \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen für die gilt: f ist stetig in $x_0 \in V, g$ ist stetig in $y_0 = f(x_0) \in V$ .Dann ist die Abbildung $(g \cdot f) : U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ stetig in x_0

Beweis. Ist $W = W((g \cdot f)(x_0))$ eine offene Umgebung des Punktes $|g \cdot f| = g(y_0) \in \mathbb{R}^k$, so gibt es wegen der Stetigkeit von g an der Stell y_0 nach Satz 15 eine offene y_0 -Umgebung $W_1 = W(y_0) = W(f(x_0)) \subset \mathbb{R}^m$ mit $g(w_1) \subset W$. Ebenso impliziert die Stetigkeit von f in x_0 die Existenz einer offenen Umgebung $W_2 = W_2(x_0)$ mit $f(W_2) \subset W_1$. Offenbar ist dann $(g \cdot f)(W_2) \subset g(f(W_2)) \subset g(W_1) \subset W$, und die Stetigkeit von $(g \cdot f)$ in x_0 sit beweisen □

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und sei (f_k) ein Folge von Abbildungen $f_k : D \to \mathbb{R}^m,\ k \in \mathbb{N}$.

a) (f_k) heißt auf D *gleichmäßig konvergent* gegen $f : D \to \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D,\ \forall k \geq k_0$$

b) (f_k) heißt auf D *lokal-gleichmäßig konvergent* gegen $f : D \to \mathbb{R}^n$, wenn es $\forall a \in D\ \exists V = V(a) \subset \mathbb{R}^n$-offen s.d. die Folge $(\left.f_k\right|_{D \cap V})$ auf $D \cap V$ gleichmäßig gegen $\left.f\right|_{D \cap V}$ konvergiert.

Bemerkung

b) $\not\Longrightarrow$ a) . *Gegenbeispiel*: Sei $D = (0, +\infty)$ und $f_k(x) := \frac{1}{kx}$ für $1, 2 \cdots$ lokal-gleichmäßig konvergiert gegen 0, aber nicht gleichmäßig.

20 Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und sei (f_k) eine Folge stetiger Abbildungen $f_k : D \to \mathbb{R}^m$ welsche auf D lokal-gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}^m$ konvergiert. Dann ist f stetig auf D

§4 Kompakte Mengen

Definition: Sei $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

a) Unter dem *Durchmesser von* $\mathcal{S}$ versteht man die Zahl

$$d(\mathcal{S}) := sup\{|x-y| : \ x, y \in \mathcal{S}\} \leq \infty$$

b) $\mathcal{S}$ heißt *beschränkt*, falls $d(\mathcal{S}) < \infty$ gilt.

Bemerkung

a) Ist $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und ist $x_0 \in \mathcal{S}$ gilt $\mathcal{S} \subset B(0, |x_0| + d(\mathcal{S}))$, denn $\forall y \in \mathcal{S}$ ist $|y| = |y - x_0 + x_0| \leq |y - x_0| + |x_0| \leq d|\mathcal{S}| + |x|$.

b) Ist $\mathcal{S} \subset B(0, r)$, so folgt $d|\mathcal{S}| \leq 2r$, denn $\forall x, y \in \mathcal{S}$ gilt $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2r \implies d|\mathcal{S}| \leq 2r$.

c) Für $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ gilt $d(\mathcal{S}_1) \subset (\mathcal{S}_2)$

Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ und sie J eine beliebige (endlich oder unendliche) Indexmenge.

a) Eine Familie $(V_j)_{j \in J}$ von offenen Menge $V_j \subset \mathbb{R}^n$ heißt (offene) Überdeckung von K wenn $K \subset \cup V_j$ gibt.

b) K heißt *kompakt*, wenn es *zu jeder* offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ der Menge K endlich viele Indizes $i_1, \cdots, i_m \in I$ gibt, so dass bereits

$$K \subset \bigcup_{p=1}^{m} U_{i_p}$$

gibt. Mann nennt ein solches endliches Mengensystem $\left\{U_{i_p};\ p = 1, 2, \cdots m\right\}$ offener Menge der Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von K, welsches die Eigenschaft $K \subset \bigcup_{p=1}^{m} U_{i_p}$ hat eine $(U_i)_{i \in I}$ zugehörige *offene Teilüberdeckung* der Menge $\mathbb{R}$

Beispiele

a) Die Menge $K_1 := \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ nicht kompakt, weil sie nicht abgeschlossen ist.

b) $K_2 \cup \{0\}$ ist aber kompakt.

21 Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt: Ist K kompakt, so ist K abgeschlossen und beschränkt.

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \iff k \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

Beweis. a) *K ist beschränkt.* Wir betrachten folgende Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ bei offene Menge $U_k := B(0,k),\ k \in \mathbb{N}$ Dann ist $K \subset \mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$. K-kompakt, $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine offene Überdeckung von $K \implies \exists k_1, k_2, \cdots k_m$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{k_i}$. Sei $k^* := max\{k_1, k_2, \cdots k_m\}$. Dann ist $K \subset B(0,k^*)$ $\implies d(K) < 2k^* \implies k-$beschränkt

b) " $\Longleftarrow$ " *K ist abgeschlossen (Wiederspruchbeweis!)* Sei K ist nicht abgeschlossen. Dann gitb es ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ eine Folge $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in K\ \forall i \in \mathbb{N}, \lim_{i\to\infty} x_i = x$. Wir betrachten folgende offen Überdeckungen K: $U_i := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B\left(x, \frac{1}{i}\right), i = 1, 2, \cdots}$. Denn $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i = \mathbb{R}^n \setminus x \supset K \implies \exists i_1, i_2, \cdots i_m$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k}$. Sei $i^* = max\{i_1, i_2, \cdots i_m\}$ Dann ist $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B\left(x, \frac{1}{i^*}\right)} \implies K \cap B\left(x, \frac{1}{i^*}\right) = \emptyset$ Wiederspruch.

□

22 Satz: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist jede abgeschossene Menge $A \subset K$ ebenfalls Kompakt.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung vom A. Dann ist die Familie $\left\{\{U_i\}_{i\in I}, \mathbb{R}^n \setminus A\right\}$- eine Überdeckung von $\mathbb{R}^n \supset K, K-kompakt \implies \exists U_{i_1}, \cdots U_{i_k}$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k}$ (Weil $A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$) $\implies A-$kompakt. □

Quader: Eine Menge in $Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossene Quader*, wenn es beschränkt, abgeschlossene Intervalle $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$ $, -\infty < a_k < b_k < +\infty,\ k = 1, 2, \cdots, n$ gibt, so dass $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k,\ \forall k = 1, 2, \cdots n\}$ gilt.

23 Satz: Jede abgeschlossene Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Wir werden folgende Resultat brauchen: *Cantorsche Schachtelungsprinzip* :

24 Satz: Sei (A_k) eine Folge nicht-leerer, abgeschlossene Menge $A_k \subset \mathbb{R}^n$ mit der folgende Eigenschaften:

a) (A_k) ist absteigend, d.h es gilt $A_{k+1} \subset A \; \forall k \in \mathbb{N}$

b) Die Folge $(d(A_k))$ der Durchmesser der Menge A_k ist eine Nullfolge (d.h $d(A_k) \to 0$

Dann gibt es genau einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ der allen Menge A_k angehört:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}$$

Beweis. a) Wir zeigen dass $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$. Sei $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge s.d. $x_k \in A_k \; \forall k \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass $d(A_k) \to 0$ wenn $k \to \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in N$ s.d. $d(A_k) < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$. Dann ist $\forall k, m \geq k_0$ $x_k \in A_k \subset A_{k_0}$, $x_m \in A_m A_{k_0} \implies x_k, x_m \in A_{k_0} \implies \|x_k - x_m\| \leq d(A_{k_0}) < \varepsilon \implies (x_k)$-eine Cauchy-Folge. $\implies \exists x \in \mathbb{R}^n$ s.d. $\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad \forall x \in \mathbb{N}$ ist $x_m \in A_m \subset A_k,\; m \geq k,\; A_k$-abgeschlossen $\implies x = \lim_{m\to\infty} x_m \in A_k \; \forall k \in \mathbb{N} \implies x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$

b) Wir zeigen, dass $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ nur eine Punkt x. (Wiederspruchbeweis). Sei $x \neq y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann ist $x, y \in A_k, k \in \mathbb{N} \implies \|x - y\| \leq d(A_k) \to 0$ wenn $k \to \infty \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y$-Wiederspruch

□

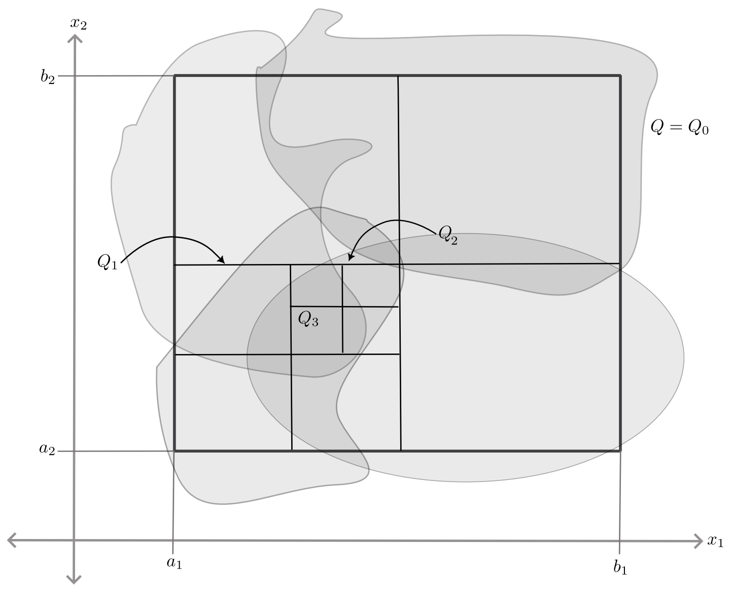
Das Contorsche Schachtelungsprinzip werden wir zum Beweis des Satzes 23 auf eine geeignete absteigende Folge abgeschl. Quader an: Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschl. Quader und (U_i) eine offene Überdeckung von Q.
Annahme: Zu (U_i) gibt es keine endliche Teilüberdeckung von Q. Wir konstruieren induktiv eine absteigende Folge

$$Q = Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots$$

abgeschl. Quader $Q_m \subset \mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaften:

a) $\forall m \in \mathbb{N}$: Es gibt keine (U_i) zugehörige endliche Teilüberdeckung von Q_m

b) $d(Q_m) = \frac{1}{2^m} d(Q_m)$ ($\implies \lim_{n\to\infty} d(Q_m) = 0$)



Unsere Ausgangsquader $Q_0 = Q$ hat die geforderten Eigenschaften. Seine $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$ bereits konstruiert. Es gelte $Q_m = I_1 \times I_2 \times \cdots I_n$, $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}\ \forall k = 1, 2, \cdots, n$. Wir splitten jedes der Intervalle I_k in der Intervalllemitte auf und erhalten Unterteilung $I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}$ mit $I_{k_1} = \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right]$, $I_{k_2} = \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right]$, $1 \leq k \leq n$. Die kartesischen Produckte $I_{1_{\gamma_1}} \times I_{2_{\gamma_2}} \times \cdots I_{n_{\gamma_n}}$, $\gamma \in 1, 2\ \forall 1 \leq k \leq n$ aller Intervallhälften der I_k , $k = 1, 2, \cdots n$ unterteilen den abgeschlossener Quader Q_m in in insgesamt 2^n vielen kleinere abgeschlos. Quader Nur können wir folgendes Kriterium formulieren:

25 Satz von Heine-Borel: Für ein Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Ausagen äquivalent:

a) K ist abgeschlossen und beschränkt

b) K ist kompakt

Beweis. Siehe Satz 21. □

Korollar

Für jede kompakte Teilmenge $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$supA \in A,\ infA \in A$$

Beweis. Da A als kompakte Menge insbesondere beschränkt ist, existeren $supA,\ infA \in R$. Weil sowohl $supA$ als auch $infA$ Häufungspunkte geeigneter Folgen in A sind, impliziert die Abgeschlossenheit von A in Verbindung mit Satz 8, dass $supA \in A$ und $infA \in A$ gilt. □

26 Satz: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $K \subset U$-kompakt und $f : U \to \mathbb{R}^m$ -stetige Abbildung, so ist $f(k) \subset \mathbb{R}^m$ ebenfalls kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(k)$. Sei $\forall i \in I,\ V_i := f^{-1}(U_i)$, $f-$stetig $\implies i \in I$ V_i-offen. Die Familie $(V_i)_{i\in I}$ ist dine Überdeckungvon K , K-kompakt $\implies \exists V_{i_1}, V_{i_2}, \cdots V_{i_n}$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{p=1}^{k} U_{i_p} \implies f(k) \subset \bigcup\limits_{p=1}^{k} U_{i_p} \implies f(k)$-kompakt □

27 Satz: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \subset U$ kompakt und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf U, so gibt es Punkte $p, q \in K$ mit $f(p) = sup\{f(x) : x \in K\}$, $f(q) = inf\{f(x) : x \in K\}$

Beweis. Laut Satz 26 ist $A := f(k) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also im Hinblick auf dem Korollar zu Satz 25: $supf(k) \in f(k),\ inff(k) \in f(k)$. Deshalb können wir $p, q \in K$ mit gewünschten Eigenschaften finden □

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Dann nennt man f *gleichmäßig stetig* auf U wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ s.d. } |x - y| < \delta,\ x, y \in U \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

28 Satz: Sei $R \in \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Dann ist f gleichmäßig stetig auf K

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vergegeben. $\forall a \in K\ \exists r(a) > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in B(a, r(a)) \cap K$ (wegen der Stetigkeit von f in a) Offenbar ist $K \subset \bigcup\limits_{a \in K} B(a, \frac{r(a)}{2})$. K-kompakt $\implies a_1, a_2, \cdots, c_k$ s.d $K \subset \bigcup\limits_{p=1} B\left(a_p, \frac{r(a_p)}{2}\right)$. Man setz nun $\delta := \frac{1}{2} min \{r(a_1), \cdots, (a_k)\}$ Seien dann $x_1, x_2 \in K$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ beliebig gewählt. Wir fixieren ein $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ mit $x_1 \in B\left(a_i, \frac{r(a_i)}{2}\right)$; dann gilt auch $|x_2 - a_i| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 + a_i| < \delta + \frac{r(a_i)}{2} < r(a_i)$ also liegt mit x_1 auch x_2 in $B(a_i, r(a_i))$, und wir erhalten $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Damit ist die gleichmäßig Stetigkeit von f auf K beweisen. $\square$

§5 Partielle Ableitung

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ferner

$$f : U \to \mathbb{R}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_n$$

eine Funktion auf U und $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in U$

a) f heißt in a *partiell differenzierbar* nach x_i oder auch *partiell differenzierbar bezüglich der i-ten Koordinate*, wenn der Grenzwert

$$D_i f(a) : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)_i := \ = \lim_{\substack{t \to a_i \\ t \neq a_i}} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)}{t - a_i}$$

dann $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ die *partille Ableitung von f nach x_i an der Stelle a*

b) f heißt in a partiall differenzierbar, wenn f in a nach *allen* $x_i, i = 1, \cdots, n$ partiell differenzierbarist. In diesem Fall nennt man den Vektor $grad(f(a)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ den *Gradient von f in a*

c) f heißt auf U *partiell differenzierbar*, wenn f partiell differenzierbar in a für jedes $a \in U$ ist.

d) f heißt in a *stetig partiell differenzierbar*, wenn f auf U partiell differenzierbar ist und zusätzlich alle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f_i U \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$, an der Stelle a stetig sind.

e) f heißt *stetig partiell differenzierbar auf U*, wenn f in jedem $a \in U$ stetig partiell differenzierbar ist. Für die Menge aller solcher Funktion führen wir die Bezeichnung

$$C^1(U) := \{f : U \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig partiell differenzierbar auf } U\}$$

ein.

Beispiel

...

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ferner $f : U \to \mathbb{R}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_n$ eine Funktion auf U und $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in U$. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $i \in 1, \cdots, n$

a) f heißt in a *k-mal partiell differenzierbar nach x_i* ,wenn f $(k-1)$ -mal partiell differenzierbar auf U ist und alle partiell Ableitungen $(k-1)$-ter Ordnung von f an der Stell a partiell differenzierbar nach x_i sind.

b) f heißt in a *k-mal partiell differenzierbar*, wenn f in a k-mal partiell differenzierbar ist. Nach x_j für alle $j \in 1, 2, \cdots, n$ ist. Die partielle Ableitungen der Ordnung k von f in a sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} D_{i_k}\left(D_{i_{k-1}}\left(\cdots D_{i_2}\left(D_{i_1}(f)\right)\cdots\right)\right)(a) &:= \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(a) \\ &:= D_{i_k} D_{i_{k-1}} \cdots D_{i_1} f(a) \\ &:= f^{(k)}_{x_{i_k} x_{i_{k-1}} \cdots x_{i_1}}(a) \end{aligned}$$

wobei die Indizes $i_1, \cdots, i_k$ voneinandere unabhängig die Menge $1, 2, \cdots, n$ durchlaufen.

c) f heißt *k- mal partiell differenzierbar auf U* , wenn f in jedem $a \in U$ $k-$mal partiell differenzierbar sit. Die Funktionen $D_{i_k} \cdots D_{i_1} f : U \to \mathbb{R}, i_1, i_2, \cdots, i_k \in 1, \cdots, n$ heißen *partiell Ableitung k-te Ordnung von f.*

d) f heißt *k-mal stetig partiell differenzierbar auf U* wenn $f k-$mal partiell differenzierbar auf U ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ auf U stetig sind. Für die Menge aller solcher Funktionen führen wir die Bezeichnung

$$C^k(U) := \{f : U \to \mathbb{R} : f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar auf } U\}$$

ein.

29 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar auf U; außerhalb seien alle partiellen Ableitungen 2.Ordnung von f stetig auf U. Dann gilt :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \forall i, j \in 1, \cdots, n$$

Korollar

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 2$ und sei $f \in C^k(U)$. Dann gilt für jedes k-Tupel von Indizes $\left(i_1, i_2, \cdots, i_k \in 1, 2, \cdots, n^k\right)$ und für jedes Permutation $\pi : \{1, \cdots, k\} \to \{1, \cdots, k\}$:

$$D_{i_k} D_{i_{k-1}} \cdots D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} D_{i_{\pi(k-1)}} \cdots D_{i_{\pi(1)}} f$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über k. Den Induktions Anfang bildet Satz 29 im Induktionsschluss verwendet man die Tatsache, dass sich jede Permutation als Hintereinanderausführung endliche vieler Vertauchungen benachbarter Glider darstellen lässt.

□

§6 Totale Differezierbarkeit

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 = (x_{0_1} \cdots x_{o_n}) \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf U. f heißt *(total) differenzierbar in* x_0 , wenn es reele Zahlen $a_1, \cdots, a_n \in R$ und eine Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} = 0$ gibt, dass

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_{0_i}) + \varphi(x) \; \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in U$$

gilt. Man bezeichnet den Vektor $A := (a_1, \cdots, a_n)$ als *Differential* von f in x

30 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ sei ferner $f : U \to \mathbb{R}$ total differenz in x_0 und $A = (a_1, \cdots, a_n)$ wie in der letzen Definition. Dann gilt:

a) f ist stetig in x_0 .

b) f ist partiell differenzierbar in x_0 und es gilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = a_i \; \forall i = 1, \cdots, n$

31 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei partiell differenzierbar auf U, und alle partielle Ableitungen $D_i \left(\text{oder auch } \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$, $1 \leq i \leq n$, seien stetig in $x_0 \in U$. Dann ist f in x_0 total differenzierbar.

Korollar

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf U und x_0. Dann gilt:

a) Ist f stetig partiell differenzierbar in x_0, so ist f an de stelle x_0 stetig.

b) Ist f k-mal partiell differenzierbar auf u und sind alle partiell Ableitungen k-te Ordnung von f stetig in x_0, so sind alle partielle Ableitungen der Ordnungen $\varphi, 0 \leq \varphi \leq k$ ebenfalls stetig in x_0

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 = (x_{0_1}, \cdots, x_{0_n}) \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung auf U, f heißt (total) differenzierbar in x_0, wenn es eine Matrix $A = (a_{ij})_{i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n}$ und eine Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ mit $\lim_{x\to 0} \frac{|\varphi(x)|}{|x-x_0|} = 0$ gibt, sodass

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x)\ \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in U$$

gilt. Der Deutlichkeit halber schreiben wir die obige Gleichung einmal komponentweise auf:
Ist $f = (f_1, \cdots, f_m)$ mit $f_i : U \to \mathbb{R},\ \forall i = 1, \cdots, m$ und entsprechend $\varphi = (\varphi_1, \cdots \varphi_m)$ mit $\varphi_i : U \to \mathbb{R}\ \forall i = 1, \cdots, m$ so ist die Bedingung $\lim_{x\to x_0} \frac{|\varphi(x)|}{|x-x_0|} = 0$ gelichdeutend mit $\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi_i(x)}{|x-x_0|} = 0\ \forall i = 1, \cdots, m$ und die Gleichung bedeutet ausfrülich, dass $\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in U$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m_1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{0_1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$$

Daran kann man sofort ablesen, dass folgende Satz richtig ist.

32 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f = (f_1, \cdots, f_m)$ eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

a) f ist total differenzierbar in x_0 genau dann, wenn jede der Komponentenfunktion $f_i, 1 \le i \le m$ total differenzierbar in x_0 ist.

b) Wenn f in x_0 total differenzierbar ist, so ist f an der Stelle x_0 stetig.

c) Wenn f in x_0 total differenzierbar und die $(m \times n)$ Matrix A wie Definition von oben gewählt ist, dann ist alle Komponentenfunktion $f_i, 1 \le i \le m$ in x_0 partiell differenzierbar mit $D_\nu f_i(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}(x_0) = a_{i\nu};\ \forall \nu = 1, \cdots n;\ \forall i = 1, \cdots, m$.

d) Wenn alle Komponentenfunktion f_i auf U partiell differenzierbar sind und alle partiell Ableitungen $D_\nu f_i$ an der Stelle x_0 stetig sind, dann ist f in x_0 total differenzierbar.

Definition: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \cdots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in $x_0 \in U$, so nennt man die Matrix $Df(x_0) := J_f(x_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$

$$:= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

das *Differential* oder die *Jacobi-Matrix* oder die *Funktionalmatrix* von f in x_0

33 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \subset U, c \in \mathbb{R}$, die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $g : U \to \mathbb{R}^m$ seien total differenzierbar in x_0. Dann gilt:

a) Die Abbildung $(f+g) : U \to \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar in x_0 mit $D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$

b) Die Abbildung $(c.f) : U \to \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar in x_0 mit $D(cf)(x_0) = cDf(x_0)$

Beweis. Wie in Analysis 1 für reellwertige Funktionen. □

Eine *Produktregel* gilt in folgender Form:

34 Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \subset U$ die Abbildung $f = (f_1, \cdots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ und die Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ seine total differenzierbar in x_0 . Dann gilt: Die Abbildung $(f \cdot g) : U \to \mathbb{R}^m$ $x \mapsto (f_1(g_1(x)), \cdots, f_m(g_x(x_m)))$ ist in x_0 total differenzierbar mit

$$\underbrace{D(f \cdot g)(x_0)}_{(m\times n)-Matrix} = \underbrace{f(x_0)}_{(m\times 1)} \cdot \underbrace{Dg(x_0)}_{(1\times n)} + g(x_0)\underbrace{Df(x_0)}_{(m\times n)}$$

Beweis. Die totale □

35 Kettenregel: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen Menge, ferner $g : U \to \mathbb{R}^m$ und $f : V \to \mathbb{R}^l$ Abbildungen mit $g(U) \subset V$. g sie total differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$, f sie total differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$. Dann ist die Abbildung $(f \cdot g) : U \to \mathbb{R}^l$ total differenzierbar in x_0 mit $\underbrace{D(f \circ g)(x_0)}_{l\times n} = \underbrace{Df(g(x_0))}_{l\times m} \cdot \underbrace{Dg(x_0)}_{m\times n}$

Korollar

$U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, die Abbildung $(g_1, \cdots, g_m) : U \to \mathbb{R}^m$ sei total differenzierbar in $x_0 \in U$, es gelte $g(U) \subset U$ und die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei total differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$. Dann ist die Funktion $h := (f \circ g) : U \to \mathbb{R}$ total differenzierbar in x_0 mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_0) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x_0)\ \forall 1 \leq j \leq n$$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ferner $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf U. Dann bezeichnet man für $v \in \mathbb{R}^n\ \{0\}$ den Grenzwert

$$D_v f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t}$$

(im Falle sinner Existenz) als *Richtungsableitung von f an der Stell x_0 in Richtung v* und nennt f *an der Stell x_0 in Richtung v differenzierbar*

36 Satz: Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in U$ total differenzierbar Funktion. Dann existiert für jedes $v = (v_1, \cdots, v_2) \in \mathbb{R}^n\ \{0\}$ die Richtungsableitung $D_v f(x_0)$ von f an der Stelle x_0 in Richtug v und es gilt:

$$D_v f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_1 = \langle Df(x_0), v\rangle$$

Wobei

$$gradf(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Beweis. Sei ein beliebiger Vektor $v \in \mathbb{R}^n\ \{0\}$ gegeben. Die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\ t \mapsto g(t) = x_0 + tv$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, und es ist $g(0) = x_0$. Aufgrund der Stetigkeit von g an der stelle 0 existiert ein Intervall $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbb{R}$ so dass $g(I_\varepsilon) \subset B(x_0, t)$ gilbt, hierbei sie $r > 0$ so gewählt, dass $B(x_0, r) \subset U$ erfüllt ist, was aufgrund der Offenheit von U möglich ist. Dann ist die Funktion $h := (f \circ g) : I_\varepsilon \to \mathbb{R}\ t \mapsto h(t) := f(x_0 + tv)$ differenzierbar der Stelle $t = 0$, und nach dem Korollar zur Kettenregel gilt:

$$D_\epsilon f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = h'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \frac{dg_i}{t}(0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i = \langle Df(x_0), v\rangle$$

$\square$

§7 Mittelwertsatz

37 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbar Funktion. Seien $a, b \in U$ zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke $|\gamma_{ab}| := \{\gamma_{ab} := a + t(b-a);\ t \in [0,1]\} \subset U$ in U enthalten ist. Dann gibt es ein $\xi \in |\gamma_{ab}|$ derart, dass $f(b) = f(a) + Df(\xi) \cdot (b-a)$.

Beweis. Die Abbildung $\gamma_{ab} : [0,1] \to U$ $t \mapsto \gamma_{ab}(t) = a + t(b-a)$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $D\gamma_{ab}(t) = (b-a)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Da $|\gamma_{ab}| = \gamma_{ab}([0,1]) \subset U$ gilt und f auf U differenzierbar ist, ist die Komposition $(f \cdot \gamma_{ab}) : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine auf $[0,1]$ differenzierbare Funktion, auf die der Mittelwertsatz für Funktionen eine Variabel anwendbar ist. Daher $\exists t_0 \in (0,1)$ so dass

$$(f \circ \gamma_{ab})(1) = (f \circ \gamma_{ab})(0) + (f \circ \gamma_{ab})(t_0) \cdot (1-0) \tag{1}$$

gilt. Da aber $\gamma_{ab}(1) = b$ und $\gamma_{ab}(0) = a$ ist, ferner für $s := \gamma_{ab}(t_0) \in |\gamma_{ab}|$ mit der Kettenregel $(f \circ \gamma_{ab})'(t_0) = Df(\gamma_{ab}(t_0)) \cdot D\gamma_{ab}(t_0) = Df(\xi) \cdot (b-a)$ folgt, ist Gleichung (1) äquivalent zu $f(b) = f(a) + Df(\xi) \cdot (b-a)$ □

38 Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine total differenzierbare Abbildung. Seien $a, b \in U$, sodass $|\gamma_{ab}| \subset U$. Dann gibt es $\phi_1, \cdots, \phi_m \in |\gamma_{ab}|$, sodass :

$$f(b) = f(a) + \begin{pmatrix} Df_1(\phi_1) \\ \vdots \\ Df_n(\phi_m) \end{pmatrix} \cdot (b-a)$$

Beweis. Satz 37 auf $f_1, \cdots, f_n$ anwenden. □

Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^2, t^3)$
Ist $[a,b] \subset R$ beschränkt, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare, so besagt der HDI:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

Ist wieder $\gamma_{ab}(f) = a + t(b-a)$, so erhält man durch Substitution

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 f'(\gamma_{ab}(t))\gamma'_{ab}(t)dt = \left(\int_0^1 f'\left(\gamma_{ab}(t)\right)dt\right).(b-a)$$

Definition: Sei $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$ und $A : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}}$ mit $a_{ij} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig für $i = 1, \cdots, m$ und $j = 1, \cdots, n$ Dann ist die Integral über die *matrixwertige Abbildung* A gegeben durch:

$$\int_\alpha^\beta A(t)dt = \left(\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)dt\right)_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}}$$

39 Satz: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Seien $a, b \in U$ sodass $|\gamma_{ab}| \subseteq U$. Dann gilt:

$$f(b) - f(a) = \underbrace{\left(\int_0^1 Df\left(\gamma_{ab}(t)\right)dt\right)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\in\mathbb{R}^n}$$

Beweis. Wir wenden den HDI an auf $g_i := (f_i \circ \gamma_{ab}) \in C^1\left([0,1]\right)$ für $i = 1, \cdots, m$ und erhalten mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
f_i(b) - f_i(a) = g_i(1) - g_i(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} g_i(t)dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma_{ab}(t)) \cdot (b_j - a_j)\right) dt \\
&= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(\gamma_{ab}(t)\right) \cdot dt\right)}_{v_j} \underbrace{(b_j - a_j}_{u_j} \\
&= \left\langle \left(\int_0^1 Df_i(\gamma_{ab}(t))dt\right), (b-a)\right\rangle
\end{aligned}$$

Dies zeigt die $i-$te Zeile der gewünschte Gleichung. □

Hilfssatz: Ist $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ ein Kompaktes Intervall, $v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildung. So gilt:

$$\left\|\int_\alpha^\beta v(t)dt\right\|_2 \leq \int_\alpha^\beta \|v(t)\|_1 dt$$

Beweis. Sei $u := \int_\alpha^\beta v(t)dt \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|u\|_2^2 = \langle u, u\rangle &= \sum_{j=1}^n \int_\alpha^\beta v_j(t)dt \cdot u_j \\
&= \int_\alpha^\beta \left(\sum_{j=1}^n v_j(t) \cdot u_j dt \right) \\
&= \int_\alpha^\beta \langle v(t), u\rangle \, dt \\
&\leq \int_\alpha^\beta |\langle v(t), u\rangle| \, dt \\
&\overset{Schwz.}{\leq} \int_\alpha^\beta (\|v(t)\|_2 \cdot \|u\|_2) \, dt \\
&= \|u\|_2 \int_\alpha^\beta \|v(t)\|_2 dt
\end{aligned}$$

Für

$$\|u\|_2 > 0 \implies \|u\|_2 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt$$

Für

$$\|u\|_2 = 0 \implies \|u\|_2 = 0 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt$$

□

Korollar

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : u \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar. Seien $a, b \in U$ mit $|\gamma_{ab}| \subseteq U$. Dann gilt:

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq M\|b - a\|_2$$

für $M := sup\{\, \|Df(x)\| \mid x \in |\gamma_{ab}|\}$ Dabei ist die Matrix norm $\|A\|$ für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben durch

$$\|A\| = \sup_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sup_{\substack{v\in\mathbb{R}^n \\ \|v\|_2=1}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$$

Es gilt:

$$M = \sup_{\substack{x\in|\gamma_{ab}| \\ v\in\mathbb{R}^n \\ \|v\|_2=1}} \underbrace{\frac{\|Df(x) \cdot v\|_2}{\|v\|_2}}_{G(x,v)} < \infty \text{ ,da}$$

$$G : \underbrace{\|\gamma_{ab}\| \times \partial\mathbb{B}(0, 1)}_{kompakt} \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Beweis. Es ist :

$$\begin{aligned}
\|f(b) - f(a)\|_2 &= \left|\left| \left(\int_0^1 Df(\gamma_{ab}(t))\, dt \right) \cdot (b - a) \right|\right|_2 \\
&\leq \int_0^1 ||Df(\gamma_{ab}(t)) \cdot (b - a)||_2 \, dt \\
&\leq \int_0^1 M \cdot \|b - a\|_2 dt \\
&= M \cdot \|b - a\|_2
\end{aligned}$$

□

§8 Die Taylorformel

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig partiell differenzierbar Funktion (C^k). Dann bezeichnet man für $0 \leq m \leq k$ das durch

$$T_{f,x_0,m}(x) : \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{\substack{|\alpha|=L \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right)$$

definiert Polynom $T_{f,x_0,m}$ als **m-tes Taylorpolynom von f in x_0** . Hierbei wird mit $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ die **Länge des Multiindex** $\alpha := (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und mit $\alpha!$ das Produkt $\alpha! := \alpha_1!, \cdots, \alpha_n!$ bezeichnet. Der **Differentialoperator** D^α ist für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gegeben durch $D^\alpha f = D_1^{\alpha} \cdots D_n^{\alpha_n} f \in C^{|\alpha|}$ dabei ist $D_\gamma^{\alpha r} := \underbrace{D_\gamma D_\gamma, \cdots, D_\gamma}_{\alpha\gamma \text{ -mal}}$ $\gamma = 1, \cdots, n$ für $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist mit y^α die reelle Zahl $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$ gemeint. Wie im Kapitel 7 werde für $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_{x_0 x}$ die c^∞ -Ableitung $\gamma_{x_0 x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma_{x_0 x}(t) := x_0 + t(x - x_0)$ und mit $|\gamma_{x_0 x}| = \gamma_{x_0 x}([0,1])$ die Verbindungsstrecke von x_0 und x bezeichnet. Die Taylorformel für C^{k+1} Fkten mehrerer veränderlichen lautet dann wie folgt:

40 Taylor: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \xrightarrow{c^{k+1}}$ eine $(k+1)$-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Ist dann $x \in U$ win Punkt mit $\|\gamma_{x_0 x}\| \in U$, so existiert ein $\xi \in |\gamma_{x_0 x}|$ mit

$$f(x) = \sum_{l=0}^{k} \left(\sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right) + \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D_\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

Bemerkung:

Unter den Voraussetzungen von Satz 40 wird die Funktion f an der Stell x durch das k-te Taylorpolynom von f in x_0 approximiert. Der Fehler $R_{k+1}(x) := f(x) - T_{f,x_0,k}(x)$ die Approximation, das **k-te Restglied** in x kann in de Form

$$R_{k+1}(x) = \sum_{\substack{|\alpha|=k+1 \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} \frac{D_\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

dargestellt werden, wobei $\xi \in |\gamma_{x_0x}|$ geeignet zu wählen ist.

Beweis. Wir werden den Taylorschen Satz für Funktionen einer veränderlichen auf die Funktion g : $(f \circ \gamma_{x_0x}) : [0,1] \xrightarrow{c^{k+1}} \mathbb{R}$ an. Danach existiert ein $t_0 \in (0,1)$ mit

$$g(1) = g(0) + \sum_{l=1}^{k} \frac{g'(0)}{l!}(1-0)^l + \frac{g^{k+1}(t_0)}{(k+1)!}(1-0)^{k+1}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $f(x) = f(x_0)\sum_{l=1}^n \frac{g'(0)}{l!} + \frac{g^{k+1}(t_0)}{(k+1)!}$ Zum Beweis der Taylorformel genügt es also zu zeigen: □

Behauptung:

$\forall t \in [0,1]$, $l = 1, \cdots, k+1$:

$$g^{(l)}(t) = \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} l!\frac{D^\alpha f(\gamma_{x_0x}(t))}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha \tag{1}$$

Also Satz 40 für $\xi := \gamma_{x_0x}(t)$

Beweis. Nach der Kettenregel ist $g'(t) = \sum_{i=1}^m D_i f(\gamma_{x_0x}(t)) \cdot (x_i - x_0)$ $\forall t \in [0,1]$ durch Induktion über l folgt ebenso mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$g^{(l)}(t) = \sum_{i_1,\cdots,i_l=1}^{n} D_{i_l}, \cdots, D_{i_1} f(\gamma_{x_0x}(t)) \cdot (x_{i_1} - x_{0i_1}) \cdots (x_{i_l} - x_{0i_l}) \tag{2}$$

für alle $t \in [0,1]$ gilt zum Beweis von (1) müssen wir nur noch die Summanden in (2) geeignet zusammenfassen. Dabei nutzen wir:

Hilfssatz

Seien $U \in \mathbb{R}^n$ offen, $2 \le k \in \mathbb{N}, f \in C^k(U)$ und $(i_1, \cdots, i_n) \in \{1, \cdots, n\}^k$. Dann gilt für jede Permutation $\pi : \{1, \cdots, k\} \to \{1, \cdots, k\}$: $D_{i_n} D_{i_{n-1}} \cdots D_{i_2} D_{i_1} f = D_{i\pi(k)} D_{i\pi(k-1)} \cdots D_{i\pi(1)} f$ Der Beweis ist leicht durch Induktion über k zu führen. Für $k = 2$ geht der Hilfssatz in Satz 29 über, nach Induktionsvoraussetzung ist die Vertauschung benachbarter $D_\gamma \cdot D_\mu$ erlaubt, der Induktionsschritte kann also vollzogen werden, wenn man berücksichtigt, dass sich jede Permutation als Hintereinanderausführung solcher Vertauschungen beschreiben lässt □

Der Hilfssatz besagt, dass in Gl (2) alle Summanden $D_{i_l} \cdots D_{i_1} f(\gamma_{x_0x}(t)) \cdot (x_{i_1} x_{0i_1}) \cdots (x_{i_l} - x_{0i_l})$ in denen jeder index γ genau a_γ-mal auftritt. $(1 \le \gamma \le n, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = l, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n)$ folgt aus (2): $\forall t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} g^{(l)}(t) &= \sum_{i_1,\cdots,i_l=1}^{n} D_{i_l} \ldots D_{i_1} f(\gamma_{x_0x}(t)) \cdot \prod_{\alpha=1}^{n} (x_\gamma - x_{0\gamma})^{\alpha_\gamma} \\ &= \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} \frac{l!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f(\gamma_{x_0x}(t)) \cdot \prod_{\alpha=1}^{n} (x_\gamma - x_{0\gamma})^{\alpha_\gamma} \\ &= \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} l! \frac{D^\alpha f(\gamma_{x_0x}(t))}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha \end{aligned}$$

Damit ist sowohl (1), als auch der Taylorschen Satz bewiesen.

41 Satz: Seien $U \in \mathbb{R}^n$ offen $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Für $r > 0$ gelte $B(x_0, r) \subset U$ Dann gibt es eine Funktion $\eta : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ mit $\eta(x_0) = 0$ und $\lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^k} = 0$. Sodass $\forall x \in B(x_0, r)$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{\substack{|\alpha| = l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \cdot (x - x_0)^\alpha \right) \eta(x)$$

Spezialfall für $k = 2$

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f \in C^2(U)$ Dann gibt es $c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, sodass die durch

$$f(x) = c + \langle a, (x - x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - x_0), A \cdot (x - x_0) \rangle + \eta(x) \;\; \forall x \in U$$

definierte Funktion $\eta : U \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften

$$\eta(x_0) = 0, \; \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^2} = 0$$

hat.

Hesse Matrix: Sind $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ ist 2-mal stetig partiell differenzierbare, so heißt die symmetrische Matrix :

$$\text{Hess} f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Hessesche Matrix von f in x_0

§9 Lokale Extrema

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion

a) f hat in x_0 eine *lokales Minimum (bzw lokales Maximum)*, wenn es eine offene Umgebung $x_0 \in V \subset U$ gibt mit $\forall x \in V : f(x) \geq f(x_0)$ (bzw. $\leq$) Falls man sogar V so wählen dann, dass
$$\forall x \in V : \ f(x) > f(x_0) \ \text{(bzw. } <\text{)}$$
so spricht man von einem *isoliertes lokal Minimum (bzw. Maximum)* von f

b) Die Bezeichnung *(isoliertes) lokales Extremum* bezeichnet sowohl Minima als auch Maxima

42 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum und sei partiell differenzierbar in x_0 . Dann gilt grad $f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) = 0$

Beweis. Sei $r > 0$ sodass $B(x_0, r) \subset U$ gilt. Sei ferner $\{e_1, \cdots, e_n\}$ die Standardbasis. Dann sit für jedes $j \in \{1, \cdots, n\}$ die Funktion $g_{ij} : (-r, r) \to \mathbb{R}, \ t \mapsto f(x_0 + t \cdot e_j)$ in der Stelle $t = 0$ durch $g_j'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ differenzierbar und nimmt dort ein Extremum an. Aus Analysis 1 : $g_j'(0) = 0$ $\square$

Definition: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und Q_A die durch A gegebene quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ so nennt man A:

a) **positiv definit** ($A \gg 0$), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A\cdot\zeta\rangle > 0\;\forall \zeta \in \mathbb{R}^n\;\{0\}$$

b) **positiv semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A\cdot\zeta\rangle \geq 0\;\forall \zeta \in \mathbb{R}^n\;\{0\}$$

c) **negativ definit** ($A \ll 0$), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A\cdot\zeta\rangle < 0\;\forall \zeta \in \mathbb{R}^n\;\{0\}$$

d) **negativ semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A\cdot\zeta\rangle \leq 0\;\forall \zeta \in \mathbb{R}^n\;\{0\}$$

e) **indefinit**, falls Vektoren $\zeta, \overline{\zeta} \in \mathbb{R}^n\;\{0\}$ existieren mit:

$$Q_A(\zeta) < 0\,;\; Q_A\left(\overline{\zeta}\right) > 0$$

Zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit

a) $A\cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j\;\forall j = 1, \cdots, n$

b) $\forall i,j = 1,\cdots,n:\;\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$

Die Zahlen λ_j heißen *Eigenwerte von A* , die x_i sind *Eigenvektoren von A* zum Eigenwert λ_j. Bezüglich einer Orthonormalbasis hat, die durch A gegebene quadratische Form die Gestalt:

$$\begin{aligned}
\zeta = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \implies Q_A(\zeta) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, A\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j\right)\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \left\langle v_i,\, \underbrace{Av_j}_{=\lambda_j v_j}\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j\lambda_j\delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^n
\end{aligned}$$

Lemma

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Dann gilt:

a) A ist positiv definit genau dann, wenn $\lambda_j > 0\;\forall j = 1, \cdots, n$

b) A ist positiv semidefinit genau dann, wenn $\lambda_j \geq 0\;\forall j = 1, \cdots, n$

c) A ist negativ definit genau dann, wenn $\lambda_j < 0\;\forall j = 1, \ldots, n$

d) A ist negativ semidefinit genau dann, wenn $\lambda_j \leq 0\;\forall j = 1, \cdots, n$

e) A ist indefinit genau dann, wenn es $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ gibt mit $\lambda_i, \cdots, \lambda_j < 0$

43 Satz: Seien $U \in \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion, also zwei Mal stetig differenzierbar mit $\mathrm{grad} f(x_0) = 0$ Dann gilt:

a) Ist $\mathrm{Hess} f(x_0) \gg 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Minimum

b) Ist $\mathrm{Hess} f(x_0) \ll 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Maximum

c) Ist $\mathrm{Hess} f(x_0)$ indefinit, so hat f an der Stelle x_0 kein lokales Maximum

Beweis. Sei $A := \mathrm{Hess} f(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $D_a f$ eine C^2 Funktion ist, ist A symmetrisch, welsche nach Voraussetzung ist A positiv definit.
Die durch A gegebene quadratische Form Q_A eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Nimmt also auf dem Kompaktum:

$$S := \partial B(0,1) = \{\zeta \subset \mathbb{R}^n : |\zeta| = 1\}$$

ein Minimum an. Es gibt also $\xi \in S$ mit $Q_A(\xi) \leq Q_A(\zeta)\ \ \forall \zeta \in S$, wobei positiv Definitheit bedeutet: $4\varepsilon = Q_A(xi) > 0$ Daraus folgt

$$Q_A(\zeta) \geq 4\varepsilon |\zeta|^2\ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

da:

$$\begin{aligned} Q_A(S) &= Q_A\left(\frac{|\zeta|}{|\zeta|}\zeta\right) \\ &= |\zeta|^2 \underbrace{Q_A\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}_{\geq 4\varepsilon} \geq |\zeta|^2 4\varepsilon \end{aligned}$$

Aus dem Korollar zum Satz 4.1 folgt:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \langle \mathrm{grad} f(x_0), (x - x_0) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \underbrace{\langle x - x_0, A(x - x_0) \rangle}_{= Q_A(x - x_0)} + \eta(x) \end{aligned}$$

a) Siehe oben

b) Ist $\mathrm{Hess} f(x_0) \ll 0$, so ist

$$-\mathrm{Hess} f(x_0) = \mathrm{Hess}(-f)(x_0) \ll 0$$

Aus a folgt : $-f$ hat in x_0 ein isoliertes lokales Minimum

c) Ist A : $\mathrm{Hess} f(x_0)$ indefinit, so gibt es $\zeta, \overline{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ mit $|zeta| = |\overline{\zeta}| = 1$ und $Q_A(\zeta) =: \alpha > 0$ und $Q_A(\overline{\zeta}) =: \beta < 0$

Für genügende kleine $|t| \ll 1$ liegen die die Punkte $x_0 + t\zeta_1 x_0 + t\overline{\zeta} \in U$ und es gilt:

$$|\eta(x_0 + t\zeta)|$$

□

§10 Implizite Funktionen

Die zentrale Fragestellung dieses Paragraphen ist Folgende: Gegeben sei eine Gleichung (bzw. ein System von m Gleichung) $F(x,y)=0$ durch die Abbildung $F: U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sowie eine Lösung (a,b): $F(a,b)=0$ Gibt es dann eine Umgebung $V_1 \times V_2 \ni (a,b)$ in $U_1 \times U_2$ und eine Abbildung $g: V_1 \to V_2$ mit $F(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in V_1$? Und wenn ja, ist dieses g eindeutig? In diesem Fall sagen wir, dass die Abbildung g durch die Gleichung $F(x,y)=0$ *implizit definiert* ist.

44 Satz: Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}$ offene Mengen, $a \in U_1, b \in U_2$ und sei $F: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto F(x,y)$ eine differenzierbar Funktion mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

Es gebe eine differenzierbare Funktion $g: U_1 \to U_2$ mit $g(a)=b$ und $F(x, g(x)) = 0 \ x \in U_1$ Dann gilt: $\forall j = 1, \cdots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_j}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$$

Beweis. Bezeichne mit ϕ die differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} \phi: U_1 &\to U_1 \times U_2 \\ x &\mapsto (x, g(x)) \end{aligned}$$

So ist die Verkettung $F \circ \phi$ die konstante Nullfunktion ist. Aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= D(F \circ \phi)(x) \\ &= DF(\phi(x)) \cdot D\phi(x) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, g(x)), \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, g(x)), \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) & \cdots & & \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(x), \right) \end{aligned}$$

Für $x = a$ hat man aus $g(a) = b$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ also: $\forall j = 1, \cdots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)} \cdot \text{(die obige Matrix)}$$

□

In Verbindung mit der nicht-Entartungsbedingung $\frac{\partial F}{\partial g}(a,b) \neq 0$, kann man bereits aus der Stetigkeit der impliziert definition Funktion g auf f die Differenzierbarkeit schließen. Denn es gilt:

45 Satz: Seien $a \in \mathbb{R}^k, b \in \mathbb{R}, a, r_2 > 0$ sowie $U_1 = B(a, r_1) \subset \mathbb{R}^k, U_2 := B(b, r_2)$ Sei ferner $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}$ eine in (a,b) differenzierbare Funktion mit $F(a,b) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ Ist dann $g : U_1 \to \mathbb{R}$ ein stetige Funktion mit $g(a) = b$ $g(U_1) \subset U_2 : F(x, g(x)) = 0$ so folgt: g ist an der Stelle a differenzierbar und es gilt: $\forall j = 1, \cdots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$$

Beweis. Es seien $A := \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) := \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(a,b), \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)\right)$ und $B := \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ Nach Definition der Differenzierbarkeit von F in (a,b) hat die durch

$$F(x,y) = F(a,b) + A \cdot (x-a) + B \cdot (y-b) + \varphi(x,y) \; ; \forall x, y \in U_1 \times U_2 \tag{1}$$

definiert Fehlerfunktion $\varphi : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}$ die Eigenschaft

$$\varphi(a,b) = 0; \lim_{\substack{a \neq x \to a \\ b \neq y \to b}} \frac{\varphi(x,y)}{|x-a| + |y-b|} = 0 \tag{2}$$

Wegen $F(x, g(x)) = 0$ auf U_1 folgt aus (1) in Verbindung mit $F(a,b) = 0$ die Gleichung

$$g(x) = b - \frac{1}{B} \cdot A \cdot (x-a) - \frac{1}{B} \cdot \varphi(x, g(x)) \; \forall x \in U_1 \tag{3}$$

so dass, wegen $g(a) = b$ zum Beweis des Satzes nur noch zu zeigen ist:
Behauptung 1: Die durch $\psi :== \frac{1}{B}\varphi(x, g(x))$ definiert Fehlerfunktion $\psi : U_1 \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaft $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\varphi(x)}{|x-a|} = 0$ Wir werden den Beweis der Behauptung 1 auf folgendes Resultat zurückführen:
Behauptung 2: Die Funktion g ist Lipschitz-stetig in a, das heißt

$$\exists 0 < \delta < r_1, \exists L > 0 : \; |g(x) - g(a)| \leq L \cdot |x-a| \; \forall x \in B(a,\delta) \subset U_1$$

Beweis der Behauptung 2: Sei $c_1 := \frac{|A|}{|B|}$ die euklidische Länge des Vektors $\frac{1}{B} \cdot A \in \mathbb{R}^k$ und sei $c_2 := \frac{1}{|B|}$. Wegen (2) existiert ein $0 < \delta_1 < \min\{r_1, r_2\}$ derart, dass $|\varphi(x,y)| \leq \frac{1}{2c_2}(|x-a| + |y-b|) \; \forall x \in B(a,\delta)$ und $\forall y \in B(b, \delta_1)$ gilt. Da die Funktion g mit $g(a) = b$ an der Stelle a stetig ist, können wir ein $0 < \delta < delta_1$, so wählen, dass $g(x) \in B(b, \delta_1) \; \forall x \in B(a,\delta)$ erfüllt ist, Daraus folgt dann $|\varphi(x, g(x))| \leq \frac{1}{2c_2}(|x-a| + |g(x) - g(a)|) \; \forall x \in B(a,\delta)$ und in Verbindung mit (3) erhält man $|g(x) - g(a)| \leq c_1|x-a| + c_2|\varphi(x, g(x))| \leq c_1|x-a| + \frac{1}{2}(|x-a| + |g(x) - g(a)|) \; \forall x \in B(a,\delta)$ Was zu $|g(x) - g(a)| \leq (2c_1+1)|x-a| =: L|x-a| \; \forall x \in B(a,\delta)$. ***Beweis der Behauptung 1:*** Wir fixieren $\delta > 0$ und $L > 0$ wie in Behauptung 2. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so können wir wie beim Beweis der Behauptung 2 im Hinblick auf (2) und die Stetigkeit von g ein $0 < \delta' < \delta$ so wählen, dass die Abschätzung

$$|\psi(x)| = c_2 |\varphi(x, g(x))| < \frac{\varepsilon}{1+L}(|x-a| + |g(x) - g(a)|) \; \forall x \in B(a, \delta')$$

gültig ist. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von g in a ergibt sich sofort

$$|\psi| < \frac{\varepsilon}{1+L}(|x-a| + |g(x) - g(a)|) \leq \frac{\varepsilon}{1+L}(|x-a| + L|x-a|)\, \varepsilon|x-a| \; \forall x \in B(a, \delta')$$

womit sowohl Behauptung 1 als auch Satz 45 bewiesen wären. □

Ist in der Situation des Satzes 45 die Funktion F sogar *stetig differenzierbar* auf $U_1 \times U_2$, so impliziert das Nicht-Verschwinden von $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ die Existenz einer offenen Umgebung $(a,b) \subset V_1 \times V_2 \subset U_1 \times U_2$ des Punktes (a,b) mit $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0 \, \forall (x,y) \in V_1 \times V_2$. In diesem Fall ist die implizit definierte Funktion g aufgrund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von F *sogar differenzierbar auf* $V_1 = V_1(a)$! In erster Linie bemerkenswert ist allerdings eine andere Tatsache: Die stetige Differenzierbarkeit von F auf $U_1 \times U_2$ in Verbindung mit der Nicht-Entartungsbedingung $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ garantiert *die lokale Existenz* stetiger durch $F(x,y) = 0$ implizit definierte Funktion wie in Satz 45.

46 Satz: Seien $a \in \mathbb{R}^k, b \in R, r_1, r_2 > 0$ sowie $U_1 := B(a, r_1) \in \mathbb{R}^k, U_2 := B(a, r_2) \subset \mathbb{R}$ Sei ferner

$$\begin{aligned} F : U_1 \times U_2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto F(x,y) \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbar Funktion mit $F(a,b) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebung $V_1 = V_1(a) \subset U_1$, $V_2 = V_2(b) \subset U_2$ und eine stetige Funktion $g : V_1 \to V_2$ mit $g(a) = b$, $F(x, g(x)) = 0 \; \forall x \in U_1$, welsche die Auflösung der Gleichung $F(x,y) = 0$ nach y auf $V_1 \times V_2$ ermöglicht, insofern als gilt $\forall (x,y) \in V_1 \times V_2$ mit $F(x,y) = 0$ folgt $y = g(x)$.

Bemerkung

Wie oben erklärt, kann man durch eventuelle Verkleinerung von $V_1 = V_1(a)$ erreichen, dass g auf V_1 stetig differenzierbar ist. Nach Satz 44 ist das Differential von g in $x \in V_1$ durch

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$$

$\forall j = 1, \cdots, k$ festgelegt.

Fixpunkt: Sei $U \subseteq \mathbb{R}, f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $x^n \in U$ *Fixpunkt* von f, falls $f(x^n) = x^n$. Ein Fixpunkt x^n von f heißt anziehend, falls es eine Umgebung $V = V(x^n) \subseteq$ gibt, sodass für jedes $x_0 \in V$, die Folge $(x_0) \subseteq U$ mit $x_{n+1} = f(x_0) = f^{n+1}(x_0) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f(x_0)}_{n+1 \text{ mal}}$ gegen x^n konvergiert.

Kontoaktionssatz: Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a,b] \to [a,b]$ eine Kontraktion, d.h $\exists c \in (0,1)$ s.d. $|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y| \; \forall x, y \in [a,b]$. Dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt. $x^n \in [a,b]$ und $\forall x_0 \in [a,b]$ gilt $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x$

46 Satz: $F : U_1 \times U_2 \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. $F(a,b) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0 \implies \exists! g : V_1 \in U_1 \to V_2 \in U_2$. $\forall (x,y) \in V_1 \times V_2$:

$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

47 Satz: Seien $U_1 \in \mathbb{R}^k, U_2 \in \mathbb{R}^m$ offen, $a \in U_1, b \in U_2$ und $F = (F_1, \cdots, F_m) : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ \vdots \\ F_m(x,y) \end{pmatrix}$$

eine Abbildung mit $F(a,b) = 0 \in \mathbb{R}^m$ und sie det $\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right) \neq 0$ und sei $g = (g_1, \cdots, g_m) : U_1 \to U_2$ eine Abbildung d.h $g(U_1) = U_2$ mit $g(a) = b$ und $f(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in U_1$ wie in (B) differenzierbar. Dann gilt:

$$\mathrm{Dg}(a) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\right)$$

48 Satz: Sei F wie in Satz 47 definiert und differenzierbar in (a,b) mit $U_1 = B(a,\tau_1) \subseteq \mathbb{R}^k, U_2 = B(a,\tau_2) \subseteq \mathbb{R}^m$ und det $\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right) \neq 0$. Sei g wie in Satz 47 stetig. Dann ist g differenzierbar in a mit

$$\mathrm{Dg}(a) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\right)$$

49 Satz über implizite Abbildungen: Sei F wie in Satz 47 stetig differenzierbar mit $U_1 = B(a,\tau_1) \subseteq \mathbb{R}^k, U_2 = B(a,\tau_2) \subseteq \mathbb{R}^m$ und det $\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right) \neq 0$ Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq U_1$ von a, $V_2 \subseteq U_2$ von b und $g : V_1 \to V_2$ stetige Abbildung, sodass: $\forall (x,y) \in V_1 \times V_2$

$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

50 Umkehrsatz: Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U_1 \to U_2$, stetig differenzierbar $a \in U_1$ mit $\det Df(a) \neq 0,\ b := f(a) \in U_2$ Dann gibt es offene Umgebungen $W_1 \subset U_1$ von a, $W_2 \subseteq U_2$ von b und eine stetig differenzierbar Abbildung $g : W_2 \to W_1$ mit $g \circ (f|_{W_1}) = \mathrm{id}_{W_1}\ (f|_{W_2}) \circ g = \mathrm{id}_{W_2}$

§11 Methode der Langrange'schen Multiplikatoren

Parametergebiet: Ein beschränktes Gebiet $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Parametergebiet*, wenn $\partial P = \partial(\overline{P})$

Parametrisiertes Flächenstück: Sei $P \subseteq \mathbb{R}^p$ ein Parametergebiet. Ein parametrisiertes Flächenstück über P ist eine stetig differenzierbar Abbildung $\varphi : P \to \mathbb{R}^n$, sodass:

- φ injektiv
- rang $D\varphi(x) = p \; \forall x \in P$
- Ist $x_0 \in P$ und $(x_y)_y$ s.d. $\lim_{y \to 0} \varphi_y = \varphi(x_0)$. so ist $\lim_{y \to \infty x_y = x_0}$

Die Zahl p heißt die Dimension des Flächenstücks. Für $p = 1$ heißt φ auch *glatter Weg*

Glatte Fläche, Untermannigfaltigkeit: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt $p-$dimensionale glatte Fläche (Untermannigfaltigkeit), falls es zu jedem $x_0 \in M$ eine Umgebung $U = U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein glattes parametrisiertes Flächenstück $\varphi P \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(\zeta) = x_0$ für ein ζ_0 und $\varphi(P) = U \cap M$ φ heißt dann *lokale Parametrisierung* von M in x_0. Für $p = n - 1$ nennen wir M eine *Hyperfläche*.

51 Satz: Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $M \subseteq B, 0 \leq q \leq n$. Es gebe stetige differenzierbar Funktion $f_1, \cdots, f_q : B \to \mathbb{R}$, sodass

1. $M = \{x \in B | f_1(x) = \cdots = f_q(x) = 0\}$
2. Die Vektoren grad $(f_1(x))\,, , \cdots ,$ grad $(f_q(x))$ sind $\forall x \in M$ linear unabhängig.

Dann ist M eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $p = n - q$

Definition: Sei M eine U-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $h : M \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, falls für jede Parametrisierung $\varphi : P \to \mathbb{R}^n$ von M, $h \circ \varphi : P \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist

Definition: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g = (g_1, \cdots, g_m)\, B : \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit rang $(Dg(x))\ \ \forall x \in B$. Weiter sei $H \{x \in B | g(x) = 0\}, a \in MU = U(a) \subseteq S$ offene Umgebung, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. f hat eine *relatives Maximum (bzw. Minimum)* in a unter der Nebenbedingungen $g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0$, falls $f(x) \leq f(a)\ \forall x \in M \cap U($ bzw. $f(x) \geq f(a)\ \forall x \in U \cap M)$

52 Methode der Langrange'schen Multiplikatoren: Hat f in a ein relatives Extremum unter den Nebenbedingungen $g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0$, so gibt es $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ sodass

$$\text{grad} f(a) = \lambda_1 \text{grad}(g_1(a)) + \cdots + \lambda_m \text{grad}(g_m(a)) \tag{$\star$}$$

Die Zahlen $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$

§12 Riemannsches Integral in $\mathbb{R}^n$

Definitionen: Eine Menge $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \,|a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \cdots, n\}$, wobei $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i$ heißt n-dimensionaler Quader. Die Zahl $|Q| = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ heißt *Volumen* des Quaders. Die Zahl

$$\delta(Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

heißt *Durchmesser* des Quaders. Eine Zerlegung des gegebenen Quaders Q bauen wir aus Zerlegungen der Intervalle $[a_i, b_i]$ mit $a_i = x_i^{(0)} < \cdots < x_i^{(p_i)} = b_i$ $(i = 1, \cdots, n)$. Daraus werden alle möglichen Teilquader der Form $\left[x^{(k_1)}, x^{(k+1)}\right] \times \cdots \times \left[x^{(kn)}, x^{(kn+1)}\right]$ gebildet. Diese werden in irgendeiner Reihenfolge durchnummeriert und mit $Q_1, \cdots, Q_m$ bezeichnet. Die Menge $Z = \{Q_1, , \cdots, Q_m\}$ Die Menge $Z = \{Q_1, \cdots, Q_m\}$ heißt *Zerlegung von Q* und

$$\|Z\| := max\,\{\delta(Q_k) : k = 1, \cdots, m\}$$

heißt die *Feinheit der Zerlegung.* Für jedes $\xi^{(k)} \in Q_k$ gilt dann mit $m^{(k)} = \inf\{f(x)|x \in Q_k\}, M^{(k)} = \sup\{f(x)|x \in Q_k\}$ die Ungleichhungskette $m^{(k)} \geq f(\xi^{(k)}) \geq M^{(k)}$. Wir bilden die Obersumme und die Untersumme wie folgt

$$\overline{S_z}(f) := \sum_{k=1}^{m} M^{(k)}\,|Q_k| \qquad \underline{S_z}(f) := \sum_{k=1}^{m} m^{(k)}\,|Q_k|$$

und die Riemann'sche Summe $\xi = \left(\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(m)}\right)$

$$\sum_{k=1}^{m} f\left(\xi^{(k)}\right)|Q_k|$$

Offenbar gilt: $\underline{S}_z \leq S_z(\xi, f) \leq \overline{S_z}(f)$. Dann nennt man $\overline{S}(f) = \inf\left\{\overline{S_z}(f) : Z \text{ Zerlegung}\right\}$ *Oberintegral* und $\underline{S}(f) = \sup\left\{\underline{S_z}(f) : Z \text{ Zerlegung}\right\}$ *Unterintegral*

Definition: $f : Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann heißt f auf Q *Riemann-integrierbar*, falls $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$, und man schreibt

$$\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x := \underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

Definition: Sei $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt und $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, d.h abgeschlossen und beschränkt. Außerdem sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, der B enthält. Wir setzen

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \in Q \setminus B \end{cases}$$

und definieren, falls $\tilde{f}$ auf Q integrierbar ist, $\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = \int_Q \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$. Wir nennen f, *integrierbar auf B* , wenn $\tilde{f}$ auf Q integrierbar ist. Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt *(Jordan)-messbar*, wenn das Integral $\int_B \mathrm{d}x$ existiert. $|B| = \int_B 1\,\mathrm{d}x$ heißt dann *Volumen von B*

53 Satz: $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für jede Zerlegung z von Q mit Feinheit $\|z\| < \delta$ und jede Wahl von Stützstellen ξ zu z gilt: $|S - S_z(\xi, f)| < \varepsilon$. In diesem Fall ist dann $S = \int_Q f(x)\,\mathrm{d}x$

54 Satz (Fubini): Es sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion auf dem Quader $Q = [a, b] \times [c, b]$. Existieren die Integrale $F(x_1) = \int_c^d f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \forall x \in [a, b]$ und $G(x_2) = \int_a^b f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \forall x_2 \in [c, d]$. So folgt

$$\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2$$

Analoges gilt für n-dimensionale Integrale für $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ falls die auftreffenden Integrale Existieren

$$\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1$$

bzw. mit Vertauschung auf der rechten Seite.

55 Satz: Seien $g, h \in C^0([a, b]), g \leq h$ und sie $B = \{(x_1, x_2)\,|a \leq x_1 \leq b, g(x_1) \leq x_2 \leq h(x_1)\}$. Ist $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{g(x_1)}^{h(x_1)} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1$$

Bemerkung

Unter geeigneten Voraussetzungen gilt für den Normalbereich $B = \{(x_1, \cdots, x_n) : a \leq x_1 \leq b,$
$g_2(x_1) \leq x_2 \leq h_2(x_1), g_3(x_1, x_2) \leq x_3 \leq h_3(x_1, x_2), \cdots, \ g_n(x_1, \cdots, x_n) \leq x_n \leq h_n(x_1, \cdots, x_{n-1})\}$

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{g_2(x_1)}^{h_2(x_1)} \left(\int_{h_3(x_1,x_2)}^{g_2(x_1,x_2)} \cdots \left(\int_{g_n(x_1,\cdots,x_n)}^{h_n(x_1,\cdots,x_n)} f(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \right) \cdots \mathrm{d}x_3 \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1$$

Folgerung

Für $B = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \cdots, x_n) \in B^*\right\}$ ist $|B| = \int_{B^*} f(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_1$ das Volumen zwischen der Ebene $x_{n+1} = 0$ und der durch f gegebenen Fläche.

56 Satz:

a) Jede Stetige Funktion auf einer messbaren kompakten Menge B ist integrierbar.

b) Sind f, g auf B integrierbar und ist $c \in \mathbb{R}$, so sind $f + g$ und cf integrierbar und es gilt:

$$\int_B (f+g)\,\mathrm{d}x = \int_B f\,\mathrm{d}x + \int_B g\,\mathrm{d}x \qquad \int_B cf\,\mathrm{d}x = c\int_B f\,\mathrm{d}x$$

c) Die kompakte Menge B sie zerlegt in kompakte Teilbereiche $B_1, \cdots, B_m$ das heißt $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$ und $mathringB_i \cap \mathring{B}_j = \emptyset$. Ist f auf jedem B_i integrierbar, so ist f auch auf B integrierbar und

$$\int_B f\,\mathrm{d}x = \int_{B_1} f\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{B_m} f\,\mathrm{d}x$$

d) Ist auf B integrierbar, so ist es auch $|f|$ und $\left|\int_B f\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_B |f|\,\mathrm{d}x$

Definition: $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt Tordanische Nullmenge in $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Quader Q_k, für $k = 1, 2, \cdots$ und $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass $E \subset \cup_{k=1}^N Q_k$ und $\sum_{k=1}^N |Q_k| < \varepsilon$. Nimmt man unendliche viele Quader Q_k anstelle für endliche viele, bekommt man Lebegsche Nullmenge.

Index