Daran kann man sofort ablesen, dass folgende Satz richtig ist.

32 Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f = (f_1, \cdots, f_m)$ eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

a) f ist total differenzierbar in x_0 genau dann, wenn jede der Komponentenfunktion $f_i, 1 \leq i \leq m$ total differenzierbar in x_0 ist.

b) Wenn f in x_0 total differenzierbar ist, so ist f an der Stelle x_0 stetig.

c) Wenn f in x_0 total differenzierbar und die $(m \times n)$ Matrix A wie Definition von oben gewählt ist, dann ist alle Komponentenfunktion $f_i, 1 \leq i \leq minx_0$ partiell differenzierbar mit $D_\nu f_i(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}(x_0) = a_{i\nu} \forall \nu = 1, \cdots n;\ \forall i = 1, \cdots, m$.

d) Wenn alle Komponentenfunktion f_i auf U partiell differenzierbar sind und alle partiell Ableitungen $D_\nu f_i$ an der Stelle x_0 stetig sind, dann ist f in x_0 total differenzierbar.

Definition: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \cdots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in $x_0 \in U$, so nennt man die Matrix $Df(x_0) := J_f(x_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$

$$:= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

das *Differential* oder die *Jacobi-Matrix* oder die *Funktionalmatrix* von f in x_0

33 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \subset U, c \in \mathbb{R}$, die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $g : U \to \mathbb{R}^m$ seien total differenzierbar in x_0. Dann gilt:

a) Die Abbildung $(f + g) : U \to \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar in x_0 mit $D\,(f + g)\,(x_0) = Df\,(x_0) + Dg\,(x_0)$

b) Die Abbildung $(c.f) : U \to \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar in x_0 mit $D\,(cf)\,(x_0) = cDf(x_0)$

Beweis. Wie in Analysis 1 für reellwertige Funktionen. □

Eine *Productregel* gilt in folgender Form:

34 Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \subset U$ die Abbildung $f = (f_1, \cdots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ und die Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ siene total differenzierbar in x_0 . Dann gilt: Die Abbildung $(f \cdot g) : U \to \mathbb{R}^m$ $x \mapsto (f_1(x)g(x), \cdots, f_m(x)g_x)$ ist in x_0 total differenzierbar mit $\underbrace{D\,(f \cdot g)\,(x_0)}_{(m\times n)-Matrix} = \underbrace{f\,(x_0)}_{(m\times 1)} \cdot \underbrace{Dg(x_0)}_{(1\times n)} + g(x_0) \quad \underbrace{Df(x_0)}_{(m\times n)-Matrix}$

Beweis. Die totale □

35 Kettenregel: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen Menge, ferner $g : U \to \mathbb{R}^m$ und $f : V \to \mathbb{R}^l$ Abbildungen mit $g(U) \subset V$. g sie total differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$, f sie total differenzierbar in $y_0 = g\,(x_0)$. Dann ist die Abbildung $(f \cdot g) : U \to \mathbb{R}^l$ total differenzierbar in x_0 mit $\underbrace{D\,(f \cdot g)\,(x_0)}_{l\times n} = \underbrace{Df(g(x_0))}_{l\times m} \cdot \underbrace{Dg(x_0)}_{m\times n}$

Korollar

$U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, die Abbildung $(g_1, \cdots, g_m) : U \to \mathbb{R}^m$ sei total differenzierbar in $x_0 \in U$, es gelte $g(U) \subset U$ und die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei total differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$. Dann ist die Funktion $h := (f \circ g) : U \to \mathbb{R}$ total differenzierbar in x_0 mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_0) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x_0) \;\forall 1 \leq j \leq n$$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ferner $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf U. Dann bezeichnet man für $v \in \mathbb{R}^n$ $\{0\}$ den Grenzwert

$$D_v f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t}$$

(im Falle siner Existenz) als *Richtungsableitung von* f *an der Stell* x_0 *in Richtug* v und nennt f *an der Stell* x_0 *in Richtug* v *differenzierbar*

36 Satz: Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in U$ total differenzierbar Funktion. Dann existiert für jedes $\upsilon = (\upsilon_1, \cdots, \upsilon_2) \in \mathbb{R}^n \ \{0\}$ die Richtungsableitung $D_\upsilon f(x_0)$ von f an der Stelle x_0 in Richtug υ und es gilt:

$$D_\upsilon f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \upsilon_1 = \langle Df(x_0), \upsilon \rangle$$

Wobei

$$gradf(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \right), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$$

Beweis. Sei ein beliebiger Vektor $\upsilon \in \mathbb{R}^n \ \{0\}$ gegeben. Die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ t \mapsto g(t) = x_0 + t\upsilon$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, und es ist $g(0) = x_0$. Aufgrund der Stetigkeit von g an der stelle 0 existiert ein Intervall $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbb{R}$ so dass $g(I_\varepsilon) \subset B(x_0, t)$ gilbt, hierbei sie $r > 0$ so gewahlt, dass $B(x_0, r) \subset U$ erfüllt ist, was aufgrund der Offenheit von U möglich ist. Dann ist die Funktion $h := (f \circ g) : I_\varepsilon \to \mathbb{R} \ t \mapsto h(t) := f(x_0 + t\upsilon)$ differenzierbaran der Stelle $t = 0$, und nach dem Korollar zur Kettenregel gilt:

$$D_\epsilon f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\upsilon) - f(x_0)}{t} = h'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \frac{dg_i}{t}(0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \upsilon_i = \langle Df(x_0), \upsilon \rangle$$

□

§7 Mittelwertsatz

37 Satz: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbar Funktion. Seien $a, b \in U$ zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke $|\gamma_{ab}| := \{\gamma_{ab} := a + t(b-a);\ t \in [1,0]\} \subset U$ in U enthalten ist. Dann gibt es ein $\xi \in |\gamma_{ab}|$ derart dass $f(b) = f(a) + Df(\xi) \cdot (b-a)$ gibt.

Beweis. Die Abbildung $\gamma_{ab} : [0,1] \to U\ t \mapsto \gamma_{ab}(t) = a + t(b-a)$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $D\gamma_{ab}(t) = (b-a)\ \forall t \in \mathbb{R}$. Da $|\gamma_{ab}| = \gamma_{ab}([0,1]) \subset U$ gilt und f auf U differenzierbar ist, ist die Komposition $(f \cdot \gamma_{ab}) : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine auf $[0,1]$ differenzierbare Funktion, auf die dier Mittelwertsatz für funktionen eine Variabel anwendbar ist. Daher $\exists t_0 \in (0,1)$ so dass

$$(f \circ \gamma_{ab})(1) = (f \circ \gamma_{ab})(0) + (f \circ \gamma_{ab})(t_0) \cdot (1-0) \tag{1}$$

gilt. Da aber $\gamma_{ab}(1) = b$ und $\gamma_{ab}(0) = a$ ist, ferner für $s := \gamma_{ab}(t_0) \in |\gamma_{ab}|$ mit der Kettenregel $(f \circ \gamma_{ab})'(t_0) = Df(\gamma_{ab}(t_0)) \cdot D\gamma_{ab}(t_0) = Df(\xi) \cdot (b-a)$ folgt, ist Gleichung (1) äquivalent zu $f(b) = f(a) + Df(\xi) \cdot (b-a)$ $\square$