41 Satz: Seien $U \in \mathbb{R}^n$ offen $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Für $r > 0$ gelte $B(x_0, r) \subset U$ Dann gibt es eine Funktion $\eta : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ mit $\eta(x_0) = 0$ und $\lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^k} = 0$. Sodass $\forall x \in B(x_0, r)$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n}} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \cdot (x - x_0)^\alpha \right) \eta(x)$$

Spezialfall für $k = 2$

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f \in C^2(U)$ Dann gibt es $c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, sodass die durch

$$f(x) = c + \langle a, (x - x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - x_0), A \cdot (x - x_0) \rangle + \eta(x) \;\; \forall x \in U$$

definierte Funktion $\eta : U \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften

$$\eta(x_0) = 0, \; \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|^2} = 0$$

hat.

Hesse Matrix: Sind $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ ist 2-mal stetig partiell differenzierbare, so heißt die symmetrische Matrix :

$$\mathrm{Hess} f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Hessesche Matrix von f in x_0

§9 Lokale Extrema

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion

a) f hat in x_0 eine *lokales Minimum (bzw lokales Maximum)*, wenn es eine offene Umgebung $x_0 \in V \subset U$ gibt mit $\forall x \in V : f(x) \geq f(x_0)$ (bzw. $\leq$) Falls man sogar V so wählen dann, dass

$$\forall x \in V : \; f(x) > f(x_0) \; (\text{ bzw. } <)$$

so spricht man von einem *isoliertes lokal Minimum (bzw. Maximum)* von f

b) Die Bezeichnung *(isoliertes) lokales Extremum* bezeichnet sowohl Minima als auch Maxima

42 Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum und sei partiell differenzierbar in x_0 . Dann gilt grad $f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) = 0$

Beweis. Sei $r > 0$ sodass $B(x_0, r) \subset U$ gilt. Sei ferner $\{e_1, \cdots, e_n\}$ die Standardbasis. Dann sit für jedes $j \in \{1, \cdots, n\}$ die Funktion $g_{ij} : (-r, r) \to \mathbb{R}, \;\; t \mapsto f(x_0 + t \cdot e_j)$ in der Stelle $t = 0$ durch $g_j'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ differenzierbar und nimmt dort ein Extremum an. Aus Analysis 1 : $g_j'(0) = 0$ $\square$

Definition: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und Q_A die durch A gegebene quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ so nennt man A:

a) **positiv definit** ($A \gg 0$), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A\cdot\zeta\rangle > 0 \;\forall \zeta \in \mathbb{R}^n\ \{0\}$$

b) **positiv semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A\cdot\zeta\rangle \geq 0 \;\forall \zeta \in \mathbb{R}^n\ \{0\}$$

c) **negativ definit** ($A \ll 0$), falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A\cdot\zeta\rangle < 0 \;\forall \zeta \in \mathbb{R}^n\ \{0\}$$

d) **negativ semidefinit**, falls

$$Q_A(\zeta) := \langle \zeta, A\cdot\zeta\rangle \leq 0 \;\forall \zeta \in \mathbb{R}^n\ \{0\}$$

e) **indefinit**, falls Vektoren $\zeta, \overline{\zeta} \in \mathbb{R}^n\ \{0\}$ existieren mit:

$$Q_A(\zeta) < 0\,;\ Q_A\left(\overline{\zeta}\right) > 0$$

Zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit

a) $A\cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j \;\forall j = 1, \cdots, n$

b) $\forall i, j = 1, \cdots, n :\ \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$

Die Zahlen λ_j heißen *Eigenwerte von* A , die x_i sind *Eigenvektoren von* A zum Eigenwert λ_j. Bezüglich einer Orthonormalbasis hat, die durch A gegebene quadratische Form die Gestalt:

$$\begin{aligned}\zeta = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \implies Q_A(\zeta) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, A\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right)\right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \left\langle v_i,\ \underbrace{Av_j}_{=\lambda_j v_j}\right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j\lambda_j\delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^n\end{aligned}$$

Lemma

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Dann gilt:

a) A ist positiv definit genau dann, wenn $\lambda_j > 0 \;\forall j = 1, \cdots, n$

b) A ist positiv semidefinit genau dann, wenn $\lambda_j \geq 0 \;\forall j = 1, \cdots, n$

c) A ist negativ definit genau dann, wenn $\lambda_j < 0 \, \forall j = 1, \ldots, n$

d) A ist negativ semidefinit genau dann, wenn $\lambda_j \leq 0 \, \forall j = 1, \cdots, n$

e) A ist indefinit genau dann, wenn es $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ gibt mit $\lambda_i, \cdots, \lambda_j < 0$

43 Satz: Seien $U \in \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion, also zwei Mal stetig differenzierbar mit $\mathrm{grad} f\,(x_0) = 0$ Dann gilt:

a) Ist $\mathrm{Hess} f\,(x_0) \gg 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Minimum

b) Ist $\mathrm{Hess} f\,(x_0) \ll 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Maximum

c) Ist $\mathrm{Hess} f\,(x_0)$ indefinit, so hat f an der Stelle x_0 kein lokales Maximum

Beweis. Sei $A := \mathrm{Hess} f\,(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $D_a f$ eine C^2 Funktion ist, ist A symmetrisch, welsche nach Voraussetzung ist A positiv definit.
Die durch A gegebene quadratische Form Q_A eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Nimmt also auf dem Kompaktum:

$$S := \partial B\,(0,1) = \{\zeta \subset \mathbb{R}^n : |\zeta| = 1\}$$

ein Minimum an. Es gibt also $\xi \in S$ mit $Q_A\,(\xi) \leq Q_A\,(\zeta) \;\; \forall \zeta \in S$, wobei positiv Definitheit bedeutet: $4\varepsilon = Q_A\,(xi) > 0$ Daraus folgt

$$Q_A\,(\zeta) \geq 4\varepsilon |\zeta|^2 \; \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

da:

$$\begin{aligned} Q_A\,(S) &= Q_A\left(\frac{|\zeta|}{|\zeta|}\zeta\right) \\ &= |\zeta|^2 \underbrace{Q_A\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}_{\geq 4\varepsilon} \geq |\zeta|^2 4\varepsilon \end{aligned}$$

Aus dem Korollar zum Satz 4.1 folgt:

$$\begin{aligned} f\,(x) = f\,(x_0) &+ \langle \mathrm{grad} f\,(x_0)\,, (x - x_0)\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \underbrace{\langle x - x_0, A\,(x - x_0)\rangle}_{=Q_A(x - x_0)} + \eta\,(x) \end{aligned}$$

a) Siehe oben

b) Ist $\mathrm{Hess} f\,(x_0) \ll 0$, so ist

$$-\mathrm{Hess} f\,(x_0) = \mathrm{Hess}\,(-f)\,(x_0) \ll 0$$

Aus a folgt : $-f$ hat in x_0 ein isoliertes lokales Minimum

c) Ist $A : \mathrm{Hess} f\,(x_0)$ indefinit, so gibt es $\zeta, \overline{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ mit $|zeta| = |\overline{\zeta}| = 1$ und $Q_A\,(\zeta) =: \alpha > 0$ und $Q_A(\overline{\zeta}) =: \beta < 0$

Für genügende kleine $|t| \ll 1$ liegen die die Punkte $x_0 + t\zeta_1 x_0 + t\overline{\zeta} \in U$ und es gilt:

$$|\eta\,(x_0 + t\zeta)|$$

$\square$

§10 Implizite Funktionen

Die zentrale Fragestellung dieses Paragraphen ist Folgende: Gegeben sei eine Gleichung (bzw. ein System von m Gleichung) $F(x,y)=0$ durch die Abbildung $F: U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sowie eine Lösung (a,b): $F(a,b)=0$ Gibt es dann eine Umgebung $V_1 \times V_2 \ni (a,b)$ in $U_1 \times U_2$ und eine Abbildung $g: V_1 \to V_2$ mit $F(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in V_1$? Und wenn ja, ist dieses g eindeutig? In diesem Fall sagen wir, dass die Abbildung g durch die Gleichung $F(x,y)=0$ *implizit definiert* ist.

44 Satz: Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}$ offene Mengen, $a \in U_1, b \in U_2$ und sei $F: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto F(x,y)$ eine differenzierbar Funktion mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 0$$

Es gebe eine differenzierbare Funktion $g: U_1 \to U_2$ mit $g(a)=b$ und $F(x,g(x))=0$ $x \in U_1$
Dann gilt: $\forall j = 1, \cdots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_j}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$$

Beweis. Bezeichne mit ϕ die differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} \phi: U_1 &\to U_1 \times U_2 \\ x &\mapsto (x, g(x)) \end{aligned}$$

So ist die Verkettung $F \circ \phi$ die konstante Nullfunktion ist. Aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
0 &= D\left(F \circ \phi\right)(x) \\
&= DF(\phi(x)) \cdot D\phi\left(x\right) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, g(x)), \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, g(x)), \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x))\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) & \cdots & & \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial g}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(x), \right)
\end{aligned}$$

Für $x = a$ hat man aus $g(a) = b$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ also: $\forall j = 1, \cdots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} \cdot \text{(die obige Matrix)}$$

□

In Verbindung mit der nicht-Entartungsbedingung $\frac{\partial F}{\partial g}(a, b) \neq 0$, kann man bereits aus der Stetigkeit der impliziert definition Funktion g auf f die Differenzierbarkeit schließen. Denn es gilt:

45 Satz: Seien $a \in \mathbb{R}^k, b \in \mathbb{R}, a, r_2 > 0$ sowie $U_1 = B(a, r_1) \subset \mathbb{R}^k, U_2 := B(b, r_2)$ Sei ferner $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}$ eine in (a, b) differenzierbare Funktion mit $F(a, b) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ Ist dann $g : U_1 \to \mathbb{R}$ ein stetige Funktion mit $g(a) = b$ $g(U_1) \subset U_2 : F(x, g(x)) = 0$ so folgt: g ist an der Stelle a differenzierbar und es gilt: $\forall j = 1, \cdots, k$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$