Finanzmathe Mitschrift vom 24.10.24

Sisam Khanal

4. November 2024

II.1 Einführung des Einperiodenmodells

Sei $d, p \in \mathbb{N}$. Wir betrachten einen Finanzmarkt mit $d+1$ Wertpapieren. Beim Einperiodenmodell gibt es genau zwei Zweitpunkt, den Anfangszeitpunkt 0 und der Endzeitpunkt 1. Es kann nur zum Zeitpunkt 0 gehandelt werden wobei man die Preise zum Zeitpunkt 0 kennt, aber i.A noch nicht klar ist, welches von l Szenarien für die Preise zum Zeitpunkt 1 eintreten wird.

Preisvektor zur Zeit 0 :

$$\overline{S_0} = \left(S_0^0, S_0^1, \cdots, S_0^d\right)^T = \left(S_0^0, S_0^T\right)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$$

wobei S_0^i der Preis des i-ten Wertpapiers zur Zeit 0 für $i \in \{0, 1, \cdots, d\}$ ist.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum mit

$$\begin{aligned}
&|\Omega| = l, \Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_l\}, \\
&\mathcal{F} = 2^\Omega = \mathcal{P}(\Omega), \\
&\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], \\
&\mathbb{P}[A] = \sum_{\omega_k \in A} \mathbb{P}[\{\omega_k\}] \text{ für } A \subseteq \Omega, \\
&\mathbb{P}[\{\omega_k\}] > 0 \; \forall k \in \{1, \cdots, l\}
\end{aligned}$$

Zufallsvektor der Preise zur Zeit l :

$$\overline{S_1} = \left(S_1^0, S_1^1, \cdots, S_1^d\right)^T = \left(S_1^0, S_1^T\right)^T : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$$

wobei $S_1^i(\omega_k) \in \mathbb{R}$ der Preis der i-ten Wertpapiers zur Zeit 1 unter Szenario k ist für
$i \in (0, 1, \cdots, d), k \in (1, \cdots, l)$
Alternative können wir die Preise zur Zeit 1 als eine Preismatrix auffassen:

$$S_1 = \left[\, \overline{S_1}(\omega_1) \; \overline{S_1}(\omega_2) \; \cdots \; \overline{S_1}(\omega_l) \,\right] = \begin{pmatrix} S_1^0(\omega_1) & S_1^0(\omega_2) & \cdots & S_1^0(\omega_l) \\ S_1^1(\omega_1) & S_1^1(\omega_2) & \cdots & S_1^1(\omega_l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1^d(\omega_1) & S_1^d(\omega_2) & \cdots & S_1^d(\omega_l) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times l}$$

Wir nehmen an, dass das Orte Wertpapiers eine Anleihe mit fester Verzinsung $r \geq 0$ (Bankkonto) ist mit

$$S_0^0 = 1 \text{ und } \forall \omega \in \Omega : S_1^0(\omega) = 1 + r$$

Diskontierte Preise:

$$X_0 = \left(X_0^1, \cdots, X_0^d\right)^T, X_1 = \left(X_1^1, \cdots, X_1^d\right)^T, \Delta X_1 = \left(\Delta X_1^1, \cdots, \Delta X_1^d\right)^T,$$

$$\text{mit } X_0^i = S_0^i, X_1^i = \frac{S_1^i}{1+r}, \Delta X_1^i = X_1^i - X_0^i, i \in \{1, \cdots, d\}$$

Zum Zeitpunkt 0 nählt man ein Portfolio.

1.1 Definition: Eine Handelsstrategie oder ein Portfolio (im Einperiodenmodell) ist ein Vektor

$$\overline{H} = \left(H^0, H^1, \cdots, H^d\right)^T = \left(H^0, H^T\right)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$$

Bei einer Handelsstrategie $\overline{H} = \left(H^0, H^1, \cdots, H^d\right)^T$ beschreibt $H^i \in \mathbb{R}$ die Stückzahl von Wertpapier i in Portfolio Zwischen den beiden Zeitpunkten (für $i \in \{0, 1, \cdots, d\}$. Dabei ist H^i nicht zufällig.
Falls $H^0 < 0$: Kreditaufnahme,
Falls $H^i < 0$ für ein $i \in \{1, \cdots, d\}$: Leerverkauf (short sell)

1.2 Definition: Sei $\overline{H} \in \mathbb{R}^{d+1}$. Der Wert der Handelsstrategie $\overline{H}$ ist zur Zeit 0 durch:

$$V_0^{\overline{H}} = \left\langle \overline{S_0}, \overline{H} \right\rangle = \overline{S_0^T}\,\overline{H} = \sum_{i=0}^{d} S_0^i H^i$$

Und zur Zeit 1 durch die Zufallsvariable $V_1^{\overline{H}} : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$V_1^{\overline{H}} = \left\langle \overline{S_1}(\omega), \overline{H} \right\rangle = \sum_{i=0}^{d} S_0^i(\omega) H^i$$

definiert. Weiter definieren wir die diskontierten Werte als

$$D_0^{\overline{H}} = V_0^{\overline{H}} \text{ und } D_1^{\overline{H}} = \frac{V_1^{\overline{H}}}{1+r}$$

1.3 Lemma: Sei $\overline{H} = \left(H^0, H^T\right)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ eine Handelsstrategie. Dann gilt

$$D_1^{\overline{H}} = D_0^{\overline{H}} + \langle \Delta X_1, H \rangle$$

Beweis: Übung

Beispiel 1.4

Seien $d = 1, l = 1, p \in (0,1), \mathbb{P}\left[\{\omega_1\}\right] = p, \mathbb{P}\left[\{\omega_2\}\right] = 1-p, S_0^1 = 1, S_1^1(\omega_1) = 2, S_1^1(\omega_2) = \frac{1}{2}$
Sei $r = 2$ und wähle die Handelsstrategie $\overline{H}(1, -1)$ Dann ist,

$$\begin{aligned} V_0^{\overline{H}} &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0, \\ V_1^{\overline{H}}(\omega_1) &= (1+r) \cdot 1 + S_1^1(\omega_1) \cdot (-1) = 1, \\ V_1^{\overline{H}}(\omega_2) &= (1+r) \cdot 1 + S_1^1(\omega_2) \cdot (-1) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

II.2 No-Arbitrage und FTAP1

- Ziel: Charakterirrung vom Markt, in dem es keine Arbitrage-Möglichkeiten gibt.
- Hilfsmittel: äquivalente Martingallmaße
- Hauptresultat: First Fundamental theorem of asset pricing (FTAP1)
- Praktische Umsetzung: prüfe Gleichungssystem auf Lösbarkeit (unter Nebenbedingungen)

2.1 Definition: Eine Handelsstrategie $\overline{H} \in \mathbb{R}^{d+1}$ heißt Arbitragemöglichkeit falls gelte:

a) $V_0^{\overline{H}} \leq 0$,

b) $\forall \omega \in \Omega : V_1^{\overline{H}}(\omega) \geq 0$ und

c) $\exists \omega \in \Omega : V_1^{\overline{H}}(\omega) > 0$

Wir sagen, es gilt No-Arbitrage (NA), falls keine Arbitragemöglichkeit existieren.

2.2 Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent

a) Es gibt eine Arbitragemöglichkeit.

b) Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}^d$, sodass

- $\forall \omega \in \Omega : \langle \Delta X_1(\omega), \alpha \rangle \geq 0$ und
- $\exists \omega \in \Omega : \langle \Delta X_1(\omega), \alpha \rangle > 0$

c) Es gibt eine Arbitragemöglichkeit $\overline{H} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $V_0^{\overline{H}} = 0$

Beweis

Übung Eine Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ können wir durch den Vektoren $q \in \mathbb{R}^l$ mit $q_k = Q\left[\{\omega_k\}\right], k \in \{1, \cdots, l\}$ charakterisieren. Für eine Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ notieren wir mit

$$\mathbb{E}^Q\left[Y\right] = \sum_{k=1}^{l} q_k Y\left(\omega_k\right)$$

den Erwartungswert von Y bzgl. Q. Für $m \in \mathbb{N}$ und einen m-dim Zufallsvektor $Y = \left(Y^1, , \cdots, Y^m\right)^T : \Omega to \mathbb{R}^m$ setzen wir

$$\mathbb{E}^Q\left[Y\right] = \left(\mathbb{E}^Q\left[Y^1\right], \cdots, \mathbb{E}^Q\left[Y^m\right]\right)^T$$

2.3 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt risikoneutral oder Martingalmaße, falls $\forall i \in \{1, \cdots, d\}$:

$$\mathbb{E}^Q\left[X_1^i\right] = X_0^i$$

2.4 Lemma: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ und $q_k = Q\left[\{\omega_k\}\right], k \in \{1, \cdots, l\}$. Es bezeichne e_i den i-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

a) Q ist eine Martingalmaße

b) $\forall i \in \{1, \cdots, d\} : \sum_{k=1}^{l} q_k \langle \Delta X_1(\omega_k), e_i \rangle = 0$

c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^d : \sum_{k=1}^{l} q_k \langle \Delta X_1(\omega_k), \alpha \rangle = 0$

Beweis

Übung

2.5 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt (zu $\mathbb{P}$) äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn $\forall k \in \{1, \cdots, l\} : q_k = Q\left[\{\omega_k\}\right] > 0$

Wir hatten angenommen, dass $\forall k \in \{1, \cdots, l\} : \mathbb{P}\left[\{\omega_k\}\right] > 0$ ein $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ ist, dann stimmen also die Mengen der möglichen Szenarien unter $\mathbb{P}$ und Q überein (aber die genauen Wahrscheinlichkeiten sind in der Regel unterschiedlich)

2.6 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ heißt äquivalentes Martingalmaße (ÄMM) falls Q risikoneutral und äquivalent ist. Wir definieren

$$\mathcal{P} = \big\{Q : Q \text{ ist ÄMM } \big\}$$

Beispiel 2.7:

Seien $d = 1, l = 2, p \in (0, 1), \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = p, \mathbb{P}[\{\omega_2\}] = 1 - p, S_0^1 = 1, S_1^1(\omega_1) = 2, S_1^1(\omega_2) = \frac{1}{2}$ und $r = 0$. Wir versuchen, ein ÄMM zu finden. Wenn Q ein ÄMM (charakterisiert durch $q \in \mathbb{R}_2$ ist, dann müssen gelten: $q_1 > 0, q_2 > 0$

$$\sum_{k=1}^{2} q_k S_1^1(\omega_k) = q_1 \underbrace{S_1^1(\omega_1)}_{=2} + q_2 \underbrace{S_1^1(\omega_2)}_{=\frac{1}{2}} = 1$$

LGS lösen:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 1 \\ 2q_1 + \frac{1}{2}q_2 &= 1 \end{aligned}$$

Andere Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Im ersten fundamentalsatz wird ein Zusammenhang zwischen der Existenz von ÄMMs und NA hergestellt:

2.8 Satz (FTAP1): Es gilt: $NA \iff \mathcal{P} \neq \emptyset$. Andereseits gilt: Ein Vektor $q \in \mathbb{R}^l$ definiert genau dann ein ÄMM (via $Q[\{\omega_k\}] := q_k, k \in \{1, , \cdots, l\}$, wenn $k \in \{1, \cdots, l\} : q_k > 0$ gilt, und q eine Lösung des Systems: $\forall i \in \{1, \cdots, d\}$

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + \cdots + q_l &= 1 \\ \frac{1}{1+r}\left(S_1^i(\omega_1)q_1 + S_1^i(\omega_2)q_2 + \cdots + S_1^i(\omega_l)q_l\right) &= S_0^i \end{aligned}$$

ist. Um zu überprüfung, ab NA gilt, kann man wegen FTAP1 also testen, ob

$$S_1 q = (1 + r)\overline{S_0}$$

eine Lösung $q \in \mathbb{R}^l$ mit $\forall k \in \{1, \cdots, l\} : q_k > 0$ besitzt

Für den Beweis des FTAP1 benötigen wir folgenden Trennungssatz (in $\mathbb{R}^l$)

2.9 Satz (Trennungssatz): Sei $n \in \mathbb{N}$

a) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, konvex und nichtleer mit $0 \notin C$. Dann existieren $y \in C$ und $\delta > 0$ sodass $\forall x \in C : \langle x, y\rangle \geq \delta > 0$

b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex und nicht leer und sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine linearen Unterraum mit $K \cap U = \emptyset$. Dann existiert $y \in \mathbb{R}^n$ sodass

- $\forall x \in K : \langle x, y\rangle > 0$,
- $\forall x \in U : \langle x, y\rangle = 0$

2.10 Proposition

Die Menge $\mathcal{P}$ aller ÄMMs ist konvex. Insbesondere gilt:

$$|\mathcal{P}| \implies |\mathcal{P}| = \infty$$

Beweis: Übung

II.3 Arbitragefreie Preise

Wir Identifizieren im Folgenden ein Derivat mit seiner Auszahlung zur Zeit $T = 1$

3.1 Definition: Ein *Derivat* ist eine Zufallsvariable $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ notieren wir

$$(x-y)^+ = \max \{x-y, 0\}$$

3.2 Beispiel

Beispiele für Derivate:

a) Forward contract: Vereinbarung, zu einem zukünftigen, festgelegten Termin T ein Gut (z.B Wertpapier) zu einem heute vereinbarten Preis k zu kaufen bzw. zu verkaufen. Im Einperiodenmodell: Forward auf Papier

$$i : \xi = S_1^i - k$$

b) Call-Option: Recht, ein Gut zu festgelegt Preis K (dem *Strike*) zu zukünftigen Zeitpunkt T zu kaufen. Im Einperiodenmodell: Call auf Papier

$$i : \xi = \left(S_1^i - k\right)^+$$

c) Put-Option: Analog zu Call, aber Verkaufen. Im Einperiodenmodell: Put auf Papier

$$i : \xi = \left\{k - S_1^i\right\}^+$$

d) Basket-Option: Option auf einen Index von Wertpapier z.B Basket-Call-Option mit Strike k und Gewicht $\alpha \in \mathbb{R}^d$ im Einperiodenmodell :

$$i : \xi = \left(K - S_1^i\right)$$

e) Basket-Option: Option auf einen Index von Wertpapier z.B Basket-Call-Option mit Strike k und Gewicht $\alpha \in \mathbb{R}^d$ im Einperiodenmodell :

$$(\langle S_1, \alpha\rangle - k)^+$$

3.3 Beispiel

Seien $d = 1, l = 2, \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = \frac{1}{2} = \mathbb{P}[\{\omega_1\}], S_0^0 = 1, S_1^0 = 1(r = 0), S_0^1 = 1, S_1^1(\omega_1) = 2, S_1^1(\omega_1) = \frac{1}{2}$. Betrachte Call $\xi = \left(S_1^1\right)^+$. Was ist ein angemessener Preis $P_0(\xi)$ für ξ zur Zeit 0?
Ersten Ansatz: Preis von ξ ist mittlere Auszahlung von ξ bei wiederhaltern Spiel, d.h

$$p_0(\xi) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi] = \frac{1}{2} \cdot (2-1)^+ + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)^+ = \frac{1}{2}$$

Dadurch ergibt sich allerdings eine Arbitragemöglichkeit.
Zeit 0: Verkaufe $6\times$ Call zum Preis $\frac{1}{2}$, Kaufe $3\times$ die Aktie; Startkapital 0.
Zeit 1 Szenario ω_1 : Endkapital ist $3 \cdot 2 - 6 \cdot 1(2-1)^+ = 0$
Szenario ω_2: Endkapital ist $3 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 1\left(\frac{1}{2} - 1\right)^+ = 1,5$