

Finanzmathe Mitschrift vom 24.10.24

Sisam Khanal

27. November 2024

II.1 Einführung des Einperiodenmodells

Sei $d, p \in \mathbb{N}$. Wir betrachten einen Finanzmarkt mit $d + 1$ Wertpapieren. Beim Einperiodenmodell gibt es genau zwei Zeitpunkte, den Anfangszeitpunkt 0 und der Endzeitpunkt 1. Es kann nur zum Zeitpunkt 0 gehandelt werden wobei man die Preise zum Zeitpunkt 0 kennt, aber i.A. noch nicht klar ist, welches von l Szenarien für die Preise zum Zeitpunkt 1 eintreten wird.

Preisvektor zur Zeit 0 :

$$\overline{S}_0 = (S_0^0, S_0^1, \dots, S_0^d)^T = (S_0^0, S_0^T)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$$

wobei S_0^i der Preis des i -ten Wertpapiers zur Zeit 0 für $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ ist.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum mit

$$\begin{aligned} |\Omega| &= l, \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_l\}, \\ \mathcal{F} &= 2^\Omega = \mathcal{P}(\Omega), \\ \mathbb{P} : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1], \\ \mathbb{P}[A] &= \sum_{\omega_k \in A} \mathbb{P}[\{\omega_k\}] \text{ für } A \subseteq \Omega, \\ \mathbb{P}[\{\omega_k\}] &> 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, l\} \end{aligned}$$

Zufallsvektor der Preise zur Zeit l :

$$\overline{S}_1 = (S_1^0, S_1^1, \dots, S_1^d)^T = (S_1^0, S_1^T)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$$

wobei $S_1^i(\omega_k) \in \mathbb{R}$ der Preis der i -ten Wertpapiers zur Zeit 1 unter Szenario k ist für $i \in \{0, 1, \dots, d\}, k \in \{1, \dots, l\}$

Alternative können wir die Preise zur Zeit 1 als eine Preismatrix auffassen:

$$S_1 = [\overline{S}_1(\omega_1) \quad \overline{S}_1(\omega_2) \quad \dots \quad \overline{S}_1(\omega_l)] = \begin{pmatrix} S_1^0(\omega_1) & S_1^0(\omega_2) & \dots & S_1^0(\omega_l) \\ S_1^1(\omega_1) & S_1^1(\omega_2) & \dots & S_1^1(\omega_l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1^d(\omega_1) & S_1^d(\omega_2) & \dots & S_1^d(\omega_l) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1) \times l}$$

Wir nehmen an, dass das erste Wertpapier eine Anleihe mit fester Verzinsung $r \geq 0$ (Bankkonto) ist mit

$$S_0^0 = 1 \text{ und } \forall \omega \in \Omega : S_1^0(\omega) = 1 + r$$

Diskontierte Preise:

$$X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^d)^T, X_1 = (X_1^1, \dots, X_1^d)^T, \Delta X_1 = (\Delta X_1^1, \dots, \Delta X_1^d)^T,$$

$$\text{mit } X_0^i = S_0^i, X_1^i = \frac{S_1^i}{1+r}, \Delta X_1^i = X_1^i - X_0^i, i \in \{1, \dots, d\}$$

Zum Zeitpunkt 0 wählt man ein Portfolio.

1.1 Definition: Eine Handelsstrategie oder ein Portfolio (im Einperiodenmodell) ist ein Vektor

$$\bar{H} = (H^0, H^1, \dots, H^d)^T = (H^0, H^T)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$$

Bei einer Handelsstrategie $\bar{H} = (H^0, H^1, \dots, H^d)^T$ beschreibt $H^i \in \mathbb{R}$ die Stückzahl von Wertpapier i in Portfolio. Zwischen den beiden Zeitpunkten (für $i \in \{0, 1, \dots, d\}$). Dabei ist H^i nicht zufällig.

Falls $H^0 < 0$: Kreditaufnahme,

Falls $H^i < 0$ für ein $i \in \{1, \dots, d\}$: Leerverkauf (short sell)

1.2 Definition: Sei $\bar{H} \in \mathbb{R}^{d+1}$. Der Wert der Handelsstrategie \bar{H} ist zur Zeit 0 durch:

$$V_0^{\bar{H}} = \langle \bar{S}_0, \bar{H} \rangle = \bar{S}_0^T \bar{H} = \sum_{i=0}^d S_0^i H^i$$

Und zur Zeit 1 durch die Zufallsvariable $V_1^{\bar{H}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V_1^{\bar{H}} = \langle \bar{S}_1(\omega), \bar{H} \rangle = \sum_{i=0}^d S_0^i(\omega) H^i$$

definiert. Weiter definieren wir die diskontierten Werte als

$$D_0^{\bar{H}} = V_0^{\bar{H}} \text{ und } D_1^{\bar{H}} = \frac{V_1^{\bar{H}}}{1+r}$$

1.3 Lemma: Sei $\bar{H} = (H^0, H^T)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ eine Handelsstrategie. Dann gilt

$$D_1^{\bar{H}} = D_0^{\bar{H}} + \langle \Delta X_1, H \rangle$$

Beweis: Übung

Beispiel 1.4

Seien $d = 1, l = 1, p \in (0, 1), \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = p, \mathbb{P}[\{\omega_2\}] = 1 - p, S_0^1 = 1, S_1^1(\omega_1) = 2, S_1^1(\omega_2) = \frac{1}{2}$
 Sei $r = 2$ und wähle die Handelsstrategie $\bar{H}(1, -1)$ Dann ist,

$$\begin{aligned} V_0^{\bar{H}} &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0, \\ V_1^{\bar{H}}(\omega_1) &= (1+r) \cdot 1 + S_1^1(\omega_1) \cdot (-1) = 1, \\ V_1^{\bar{H}}(\omega_2) &= (1+r) \cdot 1 + S_1^1(\omega_2) \cdot (-1) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

II.2 No-Arbitrage und FTAP1

- Ziel: Charakterisierung vom Markt, in dem es keine Arbitrage-Möglichkeiten gibt.
- Hilfsmittel: äquivalente Martingallmaße
- Hauptresultat: First Fundamental theorem of asset pricing (FTAP1)
- Praktische Umsetzung: prüfe Gleichungssystem auf Lösbarkeit (unter Nebenbedingungen)

2.1 Definition: Eine Handelsstrategie $\bar{H} \in \mathbb{R}^{d+1}$ heißt Arbitragemöglichkeit falls gelte:

- a) $V_0^{\bar{H}} \leq 0$,
- b) $\forall \omega \in \Omega : V_1^{\bar{H}}(\omega) \geq 0$ und
- c) $\exists \omega \in \Omega : V_1^{\bar{H}}(\omega) > 0$

Wir sagen, es gilt No-Arbitrage (NA), falls keine Arbitragemöglichkeit existieren.

2.2 Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent

- a) Es gibt eine Arbitragemöglichkeit.
- b) Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}^d$, sodass
 - $\forall \omega \in \Omega : \langle \Delta X_1(\omega), \alpha \rangle \geq 0$ und
 - $\exists \omega \in \Omega : \langle \Delta X_1(\omega), \alpha \rangle > 0$
- c) Es gibt eine Arbitragemöglichkeit $\bar{H} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $V_0^{\bar{H}} = 0$

Beweis

Übung Eine Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf (Ω, \mathcal{F}) können wir durch den Vektoren $q \in \mathbb{R}^l$ mit $q_k = Q[\{\omega_k\}]$, $k \in \{1, \dots, l\}$ charakterisieren. Für eine Zufallsvariable $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ notieren wir mit

$$\mathbb{E}^Q[Y] = \sum_{k=1}^l q_k Y(\omega_k)$$

den Erwartungswert von Y bzgl. Q . Für $m \in \mathbb{N}$ und einen m -dim Zufallsvektor $Y = (Y^1, \dots, Y^m)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ setzen wir

$$\mathbb{E}^Q[Y] = (\mathbb{E}^Q[Y^1], \dots, \mathbb{E}^Q[Y^m])^T$$

2.3 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf (Ω, \mathcal{F}) heißt risikoneutral oder Martingalmaße, falls $\forall i \in \{1, \dots, d\}$:

$$\mathbb{E}^Q[X_1^i] = X_0^i$$

2.4 Lemma: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ und $q_k = Q[\{\omega_k\}]$, $k \in \{1, \dots, l\}$. Es bezeichne e_i den i -ten Einheitsvektor im \mathbb{R}^d . Dann sind äquivalent:

- a) Q ist eine Martingalmaße
- b) $\forall i \in \{1, \dots, d\} : \sum_{k=1}^l q_k \langle \Delta X_1(\omega_k), e_i \rangle = 0$
- c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^d : \sum_{k=1}^l q_k \langle \Delta X_1(\omega_k), \alpha \rangle = 0$

Beweis

Übung

2.5 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf (Ω, \mathcal{F}) heißt (zu \mathbb{P}) äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn $\forall k \in \{1, \dots, l\} : q_k = Q[\{\omega_k\}] > 0$

Wir hatten angenommen, dass $\forall k \in \{1, \dots, l\} : \mathbb{P}[\{\omega_k\}] > 0$ ein \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ ist, dann stimmen also die Mengen der möglichen Szenarien unter \mathbb{P} und Q überein (aber die genauen Wahrscheinlichkeiten sind in der Regel unterschiedlich)

2.6 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ heißt äquivalentes Martingalmaß (ÄMM) falls Q risikoneutral und äquivalent ist. Wir definieren

$$\mathcal{P} = \{Q : Q \text{ ist ÄMM}\}$$

Beispiel 2.7:

Seien $d = 1, l = 2, p \in (0, 1), \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = p, \mathbb{P}[\{\omega_2\}] = 1 - p, S_0^1 = 1, S_1^1(\omega_1) = 2, S_1^1(\omega_2) = \frac{1}{2}$ und $r = 0$. Wir versuchen, ein ÄMM zu finden. Wenn Q ein ÄMM (charakterisiert durch $q \in \mathbb{R}_2$ ist, dann müssen gelten: $q_1 > 0, q_2 > 0$

$$\sum_{k=1}^2 q_k S_1^1(\omega_k) = q_1 \underbrace{S_1^1(\omega_1)}_{=2} + q_2 \underbrace{S_1^1(\omega_2)}_{=\frac{1}{2}} = 1$$

LGS lösen:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 1 \\ 2q_1 + \frac{1}{2}q_2 &= 1 \end{aligned}$$

Andere Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Im ersten Fundamentalsatz wird ein Zusammenhang zwischen der Existenz von ÄMMs und NA hergestellt:

2.8 Satz (FTAP1): Es gilt: $NA \iff \mathcal{P} \neq \emptyset$. Andererseits gilt: Ein Vektor $q \in \mathbb{R}^l$ definiert genau dann ein ÄMM (via $Q[\{\omega_k\}] := q_k, k \in \{1, \dots, l\}$), wenn $k \in \{1, \dots, l\} : q_k > 0$ gilt, und q eine Lösung des Systems: $\forall i \in \{1, \dots, d\}$

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + \dots + q_l &= 1 \\ \frac{1}{1+r} (S_1^i(\omega_1)q_1 + S_1^i(\omega_2)q_2 + \dots + S_1^i(\omega_l)q_l) &= S_0^i \end{aligned}$$

ist. Um zu überprüfen, ob NA gilt, kann man wegen FTAP1 also testen, ob

$$S_1 q = (1+r) \bar{S}_0$$

eine Lösung $q \in \mathbb{R}^l$ mit $\forall k \in \{1, \dots, l\} : q_k > 0$ besitzt

Für den Beweis des FTAP1 benötigen wir folgenden Trennungssatz (in \mathbb{R}^l)

2.9 Satz (Trennungssatz): Sei $n \in \mathbb{N}$

- Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, konvex und nichtleer mit $0 \notin C$. Dann existieren $y \in C$ und $\delta > 0$ sodass $\forall x \in C : \langle x, y \rangle \geq \delta > 0$
- Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex und nicht leer und sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum mit $K \cap U = \emptyset$. Dann existiert $y \in \mathbb{R}^n$ sodass
 - $\forall x \in K : \langle x, y \rangle > 0$,
 - $\forall x \in U : \langle x, y \rangle = 0$

2.10 Proposition

Die Menge \mathcal{P} aller ÄMMs ist konvex. Insbesondere gilt:

$$|\mathcal{P}| \implies |\mathcal{P}| = \infty$$

Beweis: Übung

II.3 Arbitragefreie Preise

Wir identifizieren im Folgenden ein Derivat mit seiner Auszahlung zur Zeit $T = 1$

3.1 Definition: Ein *Derivat* ist eine Zufallsvariable $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ notieren wir

$$(x - y)^+ = \max \{x - y, 0\}$$

3.2 Beispiel

Beispiele für Derivate:

- a) Forward contract: Vereinbarung, zu einem zukünftigen, festgelegten Termin T ein Gut (z.B. Wertpapier) zu einem heute vereinbarten Preis k zu kaufen bzw. zu verkaufen. Im Einperiodenmodell: Forward auf Papier

$$i : \xi = S_1^i - k$$

- b) Call-Option: Recht, ein Gut zu festgelegtem Preis K (dem *Strike*) zu zukünftigen Zeitpunkt T zu kaufen. Im Einperiodenmodell: Call auf Papier

$$i : \xi = (S_1^i - k)^+$$

- c) Put-Option: Analog zu Call, aber Verkaufen. Im Einperiodenmodell: Put auf Papier

$$i : \xi = \{k - S_1^i\}^+$$

- d) Basket-Option: Option auf einen Index von Wertpapier z.B. Basket-Call-Option mit Strike k und Gewicht $\alpha \in \mathbb{R}^d$ im Einperiodenmodell :

$$i : \xi = (K - S_1^i)$$

- e) Basket-Option: Option auf einen Index von Wertpapier z.B. Basket-Call-Option mit Strike k und Gewicht $\alpha \in \mathbb{R}^d$ im Einperiodenmodell :

$$(\langle S_1, \alpha \rangle - k)^+$$

3.3 Beispiel

Seien $d = 1, l = 2, \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = \frac{1}{2} = \mathbb{P}[\{\omega_2\}]$, $S_0^0 = 1, S_1^0 = 1$ ($r = 0$), $S_0^1 = 1, S_1^1(\omega_1) = 2, S_1^1(\omega_2) = \frac{1}{2}$. Betrachte Call $\xi = (S_1^1)^+$. Was ist ein angemessener Preis $P_0(\xi)$ für ξ zur Zeit 0?

Ersten Ansatz: Preis von ξ ist mittlere Auszahlung von ξ bei wiederholtem Spiel, d.h.

$$p_0(\xi) = \mathbb{E}^\mathbb{P}[\xi] = \frac{1}{2} \cdot (2 - 1)^+ + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)^+ = \frac{1}{2}$$

Dadurch ergibt sich allerdings eine Arbitragemöglichkeit.

Zeit 0: Verkaufe $6 \times$ Call zum Preis $\frac{1}{2}$, Kaufe $3 \times$ die Aktie; Startkapital 0.

Zeit 1 Szenario ω_1 : Endkapital ist $3 \cdot 2 - 6 \cdot 1(2 - 1)^+ = 0$

Szenario ω_2 : Endkapital ist $3 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 1\left(\frac{1}{2} - 1\right)^+ = 1,5$

Fischer Ansatz: Preis von ξ ist im Mittelwert unabhängig von ξ bei wiederholtem Spiel, d.h.

$$p_0(\xi) = \mathbb{E}^\mathbb{P}[\xi] = \frac{1}{2} (2 - 1)^+ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right)^+ = \frac{1}{2}$$

Dadurch ergibt sich allerdings eine Arbitragemöglichkeit:

Zeit 0:

- Verkaufe $6 \times$ Call zum Preis $\frac{1}{2}$.
- Kaufe $3 \times$ die Aktie; Startkapital 0.

Zeit 1:

- Szenario w_1 : Endkapital ist $3 \cdot 2 - 6(2 - 1)^+ = 0$
- Szenario w_2 : Endkapital ist $3 \cdot \frac{1}{2} - 6(\frac{1}{2} - 1)^+ = 1.5$

Wir verwenden im Folgenden das No-Arbitrage-Prinzip zur Bewertung von Derivaten. Wähle den Preis $P_0(\xi)$ von ξ so, dass sich im um $(S_0^{d^0}, S_1^{d^1}) = (p_0(\xi), \xi)$ erweiterten Modell keine Arbitragemöglichkeit ergibt.

3.4 Definition: Sei ξ ein Derivat. Der Wert $p_0(\xi) \in \mathbb{R}$ heißt arbitragefreier/fairer Preis von ξ , falls das um $(S_0^{d+0}, S_1^{d+1}) = (p_0(\xi), \xi)$ erweiterte Marktmodell mit den Preisen $(S_0^0, \dots, S_0^d, S_0^{d+1})^T$ und $(S_1^0, \dots, S_1^{d+1})^T$ NA erfüllt. Wir bezeichnen mit $\Pi(\xi)$ die Menge aller arbitragefreien Preise von ξ .

Beachte: Wenn $\Pi(\xi)$ nicht leer ist, dann gilt im ursprünglichen Modell NA.

Also: Falls NA im ursprünglichen Modell nicht erfüllt ist, dann ist $\Pi(\xi) = \emptyset$.

Im Folgenden sei \mathcal{P} bezeichnet die Menge aller ÄMMs im ursprünglichen Modell.

3.5 Satz: Es gelte NA. Sei ξ ein Derivat. Dann ist $\Pi(\xi)$ nicht leer, und es gilt

$$\Pi(\xi) = \left\{ \mathbb{E}^Q \left[\frac{\xi}{1+r} \right] \mid Q \in \mathcal{P} \right\}.$$

Beweis:

" \subseteq ": Sei $Q \in \mathcal{P}$ und $p_0(\xi) = \mathbb{E}^Q \left[\frac{\xi}{1+r} \right]$. Dann ist Q auch ein ÄMM in dem um $(p_0(\xi), \xi)$ erweiterten Markt. FTAP1 impliziert, dass im erweiterten Markt NA gilt, also $p_0(\xi) \in \Pi(\xi)$.

" \supseteq ": $p_0(\xi) \in \mathbb{R}$ ist ein arbitragefreier Preis. Der um $(p_0(\xi), \xi)$ erweiterte Modell erfüllt dann NA. Wende FTAP1 auf dem erweiterten Markt an. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Q auf (Ω, \mathcal{F}) sodass $\forall k \in \{1, \dots, l\} : Q[\{\omega_k\}] > 0$ und $\forall k \in \{1, \dots, d\} : \mathbb{E}^Q[X_1^k] = X_0^k = 0$. Insbesondere gilt $Q \in \mathcal{P}$.

$$p_0(\xi) = S_0^{d+1} = X_0^{d+1} = \mathbb{E}^Q[X_1^{d+1}] = \mathbb{E}^Q \left[\frac{S_1^{d+1}}{1+r} \right] = \mathbb{E}^Q \left[\frac{\xi}{1+r} \right].$$

3.6 Beispiel

Fortsetzung von Bsp 3.3

Neuer Ansatz: NA-Prinzip Aus Bsp 2.7 ist bekannt, dass $q = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T \in \mathbb{R}^2$ in diesem Marktmodell ein ÄMM Q def. Somit ist (siehe Satz 3.5) $p_0(\xi) = \mathbb{E}^Q \left[\frac{\xi}{1+r} \right] = \mathbb{E}^Q \left[(S_1^1 - 1)^+ \right] = \frac{1}{3} (S_1^1(\omega_1) - 1)^+ + \frac{2}{3} (S_1^1(\omega_2) - 1)^+ = \frac{1}{3}$ ein arbitragefreier Preis.

3.5 Proposition

Es gelte NA. Sei ξ ein Derivat. Dann $\emptyset \neq \Pi(\xi) \subset \mathbb{R}$ Konvex und somit ein Intervall.

Beweis: Übung

Zum Folgenden wollen wir die Intervallgrenzen $\Pi^X(\xi_j) := \sup \Pi(\xi)$ und $\Pi_X(\xi)$ für ein keivert ξ

3.5 Definition: Wir sagen, es gilt Nicht-Redundanz NR wenn die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1^i(\omega_1) \\ \vdots \\ \Delta x_1^i(\omega_l) \end{pmatrix}, i \in (1, \dots, d)$$

linear unabhängig sind.

Damit NR erfüllt sein kann, muss notwendigerweise $d \leq l$ gelten. Falls NR nicht erfüllt ist, dann existiert eine strikte Teilmenge dieser Vektoren.

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1^i(\omega_1) \\ \vdots \\ \Delta x_1^i(\omega_l) \end{pmatrix}, i \in (1, \dots, d) \text{ s.d. } \forall j \in \{m+1, \dots, d\} \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1^j(\omega_1) \\ \vdots \\ \Delta x_1^j(\omega_l) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \begin{pmatrix} \Delta x_1^i(\omega_1) \\ \vdots \\ \Delta x_1^i(\omega_l) \end{pmatrix}$$

Die Vektoren (Wertpapier) für $j \in \{m+1, \dots, d\}$ sind also überflüssig redundant. Durch *Wegwerfen* von redundanten Wertpapieren können wir jeden Markt zu einem Markt, in dem NR gilt reduzieren.

Erinnerung:

Für eine Handelsstrategie $\bar{H} = (H^O, H^T)^T$ ist

$$V_0^{\bar{H}} = \langle \Delta_1, H \rangle = \frac{V_1^{\bar{H}}}{1+r}$$

3.9 Definition: Sei ξ ein Derivat. Ein Vektor $(X, H^T)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $x \in \mathbb{R}$ (Anfangskapital) und $H \in \mathbb{R}^d$ (Position in Aktien) wird als Superhedging-Strategie für ξ bezeichnet, wenn

Vorlesung 27. November 2024

5.3 Definition: Seien $K, L \in \mathbb{R}$ mit $K \geq L$, sei $\lambda \in [0, 1]$ und sei $M = \lambda K + (1 - \lambda)L$. Wir nehmen an, dass zur Zeit 0 die Call-Option $(S_1^1 - K)^+$, $(S_1^1 - L)^+$ zu den Preisen $C(K)$, $C(L)$ und $C(M)$ gehandelt werden. Der um $(C(K), (S_1^1 - K)^+)$, $(C(L), (S_1^1 - L)^+)$ erweiterte Markt NA. Dann gilt:

- a) $C(K) \leq C(L)$
- b) $(1+r)(C(K) - C(L)) \leq L - K$
- c) $C(\lambda K + (1 - \lambda)L) \leq \lambda C(K) + (1 - \lambda)C(L)$

§3 Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen, um das Einperiodenmodell auf mehrere Handelszeitpunkte zu erweitern und Informationszunahme im Lauf der Zeit zu modellieren.

Literatur:

- Kremer - Einführung in die diskrete Finanzmathe
- Shiryaev - Probability-1
- Klenke - Wahrscheinlichkeitstheorie
- Mentrup und Schäffler - Stochastik

III.1 σ -Algebra

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Bezeichne mit $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω

1.1 Definition: Ein Mengensystem $G \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Algebra auf Ω , falls gelten:

- a) $\Omega \in G$
- b) $A \in G \implies A^c \in G$
- c) $A, B \in G \implies A \cup B \in G$

1.2 Definition: Eine Algebra G auf Ω heißt σ -Algebra auf Ω , falls zusätzlich gilt:

$$A_n \in G \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in G$$

Beispiele für σ -Algebra (und damit auch für Algebra) sind die "triviale" σ -Algebra und die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. Wenn G eine Algebra ist, dann gilt $\emptyset \in G$ und $\forall A, B \in G$ sind $A \cap B = \left(A^c \cup B^c\right)^c \in G$ und $A \setminus B = A \cap B^c \in G$. Wenn G eine σ -Algebra ist, dann gilt zusätzlich $A_n \in G \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in G$

1.3 Lemma: Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ eine Familie von Algebren (bzw. σ -Algebra) auf Ω . Dann ist auch $\bigcap_{\lambda \in \Omega} G_\lambda$ eine Algebra (bzw. σ -Algebra) auf Ω .

Beweis: Übung

1.4 Definition: Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem. Wir definieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\sigma^{\mathcal{A}} &= \{G \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : G \text{ Algebra und } G \supseteq \mathcal{A}\} \\ \mathcal{B}_\sigma^{\mathcal{A}} &= \{G \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : G \text{ } \sigma\text{-Algebra und } G \supseteq \mathcal{A}\}\end{aligned}$$

Weiter definieren wir die durch \mathcal{A} erzeugte Algebra:

$$\alpha(\mathcal{A}) = \bigcap_{G \in \mathcal{B}_\sigma^{\mathcal{A}}} G$$

Lemma 13 Zeigt, dass $\alpha(A)$ eine Algebra und $\sigma(A)$ eine σ -Algebra ist.

1.5 Lemma: Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei G eine Algebra. Dann ist G eine σ -Algebra.

Beweis: Seien $A_n, n \in \mathbb{N}$, Elemente von G und $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Weil Ω endlich ist, hat G nur endlich viele Elemente und daher geht die Vereinigung nur über endlich viele verschiedene Elemente von G . Per Induktion und (iii) in Def 1.1 folgt, dass $B \in G$.

Also, auf endlichen Ω sind Algebren σ -Algebren äquivalent. Für allgemeines Ω gibt es aber Algebren, die keine σ -Algebren sind z.B:

1.6 Bsp.

Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| = 1\}$ und $G := \alpha(\mathcal{A})$. Dann gilt (Übung).

$$G = \{B \subseteq \mathbb{N} : |B| < \infty \text{ oder } |B^c| < \infty\}$$

. Aus Lemma 1.2 wissen wir, dass G eine Algebra ist. Aber G ist keine σ -Algebra, denn $\forall k \in \mathbb{N} : \{2k\} \in G$ und (wir setzen $\bigcup_{\lambda \in \emptyset} \dots = \emptyset$)

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{2k\} = 2\mathbb{N} \notin G$$

1.7 Definition: Sei Ω eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{D} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ heißt Partition oder Zerlegung von Ω , falls gelten:

- a) $\forall \lambda \in \Omega : D_\lambda \neq \emptyset$
- b) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Omega \text{ mit } \lambda_1 \neq \lambda_2 : D_{\lambda_1} \cap D_{\lambda_2} = \emptyset$
- c) $\bigcup_{\lambda \in \Omega} D_\lambda = \Omega$

1.8 Proposition

Sei Ω höchstens abzählbar und $\mathcal{D} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ eine Partition. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{D}) = \left\{ \bigcup_{\lambda \in A} D_\lambda : A \subseteq \Omega \right\}$$

Beweis: Sei $\mathcal{F} := \{\bigcup_{\lambda \in A} D_\lambda : A \subseteq \Omega\}$

\supseteq : Trivial

\subseteq : Zeige, dass $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_\sigma^{\mathcal{D}}$. Klar: $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$. Noch zu zeigen: \mathcal{F} ist σ -Algebra.

a) Wegen (iii) in Def 1.7 gilt $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Omega} D_\lambda \in \mathcal{F}$

b) Sei $A \subseteq \Omega$. Es gilt (wegen (ii) in Def 1.7)

$$\left(\bigcup_{\lambda \in A} D_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in A} D_\lambda^c = \bigcup_{\lambda \in \Omega \setminus A} D_\lambda \in \mathcal{F}$$

c) Seien $\mathcal{B}_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann $A_n \subseteq \Omega$ sodass $\mathcal{B}_n = \bigcup_{\lambda \in A_n} D_\lambda$. Es folgt, dass

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\lambda \in A_n} D_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} D_\lambda \in \mathcal{F}$$

1.9 Lemma: Es gelte $|\Omega| \leq \infty$. Seien \mathcal{D} und $\tilde{\mathcal{D}}$ zwei Partitionen mit $\sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\tilde{\mathcal{D}})$. Dann gilt $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}$

Beweis: Betrachte, dass die Partitionen nur endlich viele Elemente haben, und daher die Darstellung aus Proposition 1.8 gilt. Angenommen, es gibt ein $B \in \tilde{\mathcal{D}}$ mit $B \notin \mathcal{D}$.

- Falls es ein $D \in \mathcal{D}$ gibt, sodass $B \subsetneq D$, dann ist $B \notin \sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\tilde{\mathcal{D}})$. Widerspruch.
- Andernfalls gilt $\forall D \in \mathcal{D}$, dass B keine Teilmenge von D ist.
 - Falls es ein $C \in \mathcal{D}$ gibt mit $C \subsetneq B$, dann ist $C \notin \sigma(\tilde{\mathcal{D}}) = \sigma(\mathcal{D})$. Widerspruch.
 - Falls es kein $C \in \mathcal{D}$ gibt, das Teilmenge von B ist, dann folgt $B \notin \sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\tilde{\mathcal{D}})$. Widerspruch. \square

Jede σ -Algebra auf einem endlichen Ω kann durch eine Partition erzeugt werden:

1.10 Proposition

Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei G eine σ -Algebra auf Ω . Dann existiert genau eine Partition \mathcal{D} von Ω , sodass $G = \sigma(\mathcal{D})$

Beweis: Für alle $x \in \Omega$ sei $\mathcal{M}_x := \{A \in G : x \in A\}$ und $A_x := \bigcap_{A \in \mathcal{M}_x} A$. Für $x, y \in \Omega$ definiere $x \sim y : \iff y \in A_x$. Dann ist eine Äquivalenzrelation auf Ω denn:

- Reflexivität: Sei $x \in \Omega$. Es gilt $\forall A \in \mathcal{M}_x$, dass $x \in A$ also $x \in A_x$. Somit gilt $x \sim x$
- Symmetrie: Seien $x, y \in \Omega$ mit $x \sim y$. Dann ist $y \in A_x$. Deshalb gilt $\forall A \in G$ mit $x \in A$, dass $y \in A$. Angenommen, $x \notin A_y$. Dann ist $x \in A_x \setminus A_y$. Da G endlich ist, gilt $A_x \setminus A_y \in G$. Es folgt, dass $y \in A_x \setminus A_y$ Widerspruch zu $y \in A_y$. Somit gilt $y \sim x$.
- Transitivität: Seien $x, y, z \in \Omega$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Sei $C \in \mathcal{M}_x$. Dann ist $C \in G$ und $x \in C$. Wegen $y \in A_x$ folgt heraus $y \in C$, also $C \in \mathcal{M}_y$. Hieraus folgt mit $z \in A_y$, dass $z \in C$. Somit gilt $x \sim z$.

Die Menge der Äquivalenzklassen $\{A_x : x \in \Omega\}$ ist eine Partition \mathcal{D} von Ω . Sei $G' \in G$. Dann gilt $G' = \bigcup_{x \in G'} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in G'} A_x$. Für alle $x \in G'$ ist $G' \in \mathcal{M}_x$ und daher $A_x = \bigcap_{A \in \mathcal{M}_x} A \subseteq G'$. Also ist $G = \bigcup_{x \in G} A_x \in \sigma(\mathcal{D})$. Es folgt $G \subseteq \sigma(\mathcal{D})$. Für alle $x \in \Omega$ gilt $A_x = \bigcap_{A \in \mathcal{M}_x} A \in G$ und G ist eine σ -Algebra, somit $\sigma(\mathcal{D}) \in G$. Eindeutigkeit folgt aus Lemma 1.9. \square

1.11 Definition: Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei G eine σ -Algebra auf Ω . Die Partition \mathcal{D} , für die $G = \sigma(\mathcal{D})$ gilt, bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(G)$ und sagen dass $\mathcal{D}(G)$ die σ -Algebra G erzeugt.

1.12 Beispiel

Wenn $|\Omega| < \infty$ gilt, dass ist $\mathcal{D}(\mathcal{P}(\Omega)) = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$.

1.13 Definition: Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei G eine σ -Algebra auf Ω . Eine Abbildung $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt \mathcal{G} -messbar, falls ξ konstant auf den Mengen von $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ ist. (genauer: falls es für jedes $D \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall \omega \in D : \xi(\omega) = c$)

Beachte: Wenn $|\Omega| < \infty$ gilt und $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung ist, dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, sodass $\xi(\Omega) := \{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{x_1, \dots, x_m\}$

1.14 Lemma: Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei \mathcal{G} eine σ -Algebra auf Ω . Seien $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ und $\xi : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$. Dann sind äquivalent:

- a) ξ ist \mathcal{G} -messbar
- b) Für alle $A \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$ gilt $\xi^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A\} \in \mathcal{G}$

Beweis: Übung.

Im Allgemeinen (also auch wenn $|\Omega| = \infty$ definiert man Messbarkeit ähnlich zu (ii) in Lemma 1.14.)

1.15 Definition: Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Für jedes $\lambda \in \Omega$ sei $\xi_\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann definieren wir

$$\sigma(\xi_\lambda; \lambda \in \Omega) := \cap \{ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{G} \text{ ist } \sigma\text{-messbar und } \forall \lambda \in \Omega : \xi_\lambda \text{ ist } \mathcal{G}\text{-messbar} \}$$

In der Def 1.15 kann $\sigma(\xi_\lambda; \lambda \in \Omega)$ interpretiert werden als die kleinste σ -Algebra \mathcal{G} , sodass alle $\xi_\lambda, \lambda \in \Omega$ \mathcal{G} -messbar sind.

1.16 Beispiel

Wir betrachten einen Würfelwurf: Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ und $\xi(\omega)$ ist 1, wenn ω ungerade, wenn ω gerade.

Dann ist $\mathcal{D} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ eine Partition von Ω und es gilt $\sigma(\xi) = \sigma(\mathcal{D}) = \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$

Interpretation: Nach Beobachtung von $\xi(\omega)$ können wir für jedes Ereignis $A \in \sigma(\xi)$ sagen, ob es eingetreten ist oder nicht. Mit anderen Worten: Wir kennen zwar das eingetretene ω nicht, aber wir wissen, ob $\omega \in \emptyset$ (nie), $\omega \in \{1, 3, 5\}$, $\omega \in \{2, 4, 6\}$ und $\omega \in \Omega$ (immer). In diesen Sinne spiegelt $\sigma(\xi)$ die Information wider, die durch ξ erzeugt wird. Jede $\sigma(\xi)$ -messbare Zufallsvariable $\hat{\xi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ verwendet nur Information, die bereits in ξ enthalten ist. Man kann zeigen, dass $\hat{\xi} = g \circ \xi$ für eine geeignete Funktion $g : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$.

1.17 Lemma: Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei \mathcal{G} eine σ -Algebra auf Ω und seien $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{G} -messbar. Dann:

- $\xi + \eta, \xi - \eta$ und $\xi \cdot \eta$ sind \mathcal{G} -messbar.
- Falls $\forall \omega \in \Omega : \eta(\omega) \neq 0$ so ist $\frac{\xi}{\eta}$ \mathcal{G} -messbar.
- Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $f(\xi) = f \circ \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{G} -messbar.

Beweis:

- Sei $D \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$. Es gibt $a, c \in \mathbb{R}$, sodass $\forall \omega \in D : \xi(\omega) = c$ und $\eta(\omega) = a$. Somit gilt $\omega \in D : (\xi + \eta)(\omega) = \xi(\omega) + \eta(\omega) = c + a$. Rest analog.
- Analog
- Sei $D \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$. Es gibt $c \in \mathbb{R}$, sodass $\forall \omega \in D : \xi(\omega) = c$. Also : $\forall \omega \in D : (f \circ \xi)(\omega) = f(\xi(\omega)) = f(c)$ \square

Wiederholung:

Wenn \mathcal{G} eine σ -Algebra auf Ω ist, dann heißt ein Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ Wahrscheinlichkeitsmaß (auf dem messbaren Raum (Ω, \mathcal{G})), falls $\mathbb{P}[\omega] = 1$ und aus $A_j \in \mathcal{G}, \forall j \in \mathbb{N}$ mit $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$ folgt, dass

$$\mathbb{P} \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_j]$$

Weiter heißt dann $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

1.18 Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum mit $|\Omega| < \infty$. Zwei σ -Algebren $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ heißen unabhängig, falls $\forall A_1 \in \mathcal{G}_1$ und $A_2 \in \mathcal{G}_2, \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_1] \cdot \mathbb{P}[A_2]$. Eine Zufallsvariable $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt unabhängig von einer σ -Algebra \mathcal{G} wenn die σ -Algebra $\sigma(\xi)$ und \mathcal{G} unabhängig sind. Zwei Zufallsvariable $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißen unabhängig, wenn die σ -Algebra $\sigma(\xi)$ und $\sigma(\eta)$ unabhängig sind.

1.19 Bemerkung

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $|\Omega| < \infty$ und \mathcal{G} eine σ -Algebra auf Ω . Wenn $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängig von \mathcal{G} ist, dann gilt $\forall A \in \mathcal{G}$ und $\forall x \in \mathbb{R}$, dass $\mathbb{P}[\{\xi = x\} \cap A] = \mathbb{P}[\{\xi = x\}] \mathbb{P}[A]$.

§III.2 Bedingte Erwartung

In diesen Abschnitt setzen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ mit $|\Omega| < \infty$ und $\forall \omega \in \Omega : \mathbb{P}[\omega] > 0$ voraus.

Wiederholung:

Betrachte $m \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ und $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$. Dann ist der Erwartungswert von X gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}[\{\omega\}] = \sum_{j=1}^m x_j \mathbb{P}[X = x_j]$$

2.1 Beispiel

Wir betrachten einen Würfelwurf, also $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathbb{P}[\{\omega\}] = \frac{1}{6}, \omega \in \Omega$ mit $X : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, X(\omega) = \omega$, beschreiben wir die geworfene Augenzahl. Dann ist $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega=1}^6 \omega \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$.

Man kann \mathbb{E} als die "beste Schätzung von X ohne weitere Informationen interpretieren.

Wiederholung:

Wenn $D \in \Omega$ ist mit $\mathbb{P}[D] > 0$ ($\iff D \neq \emptyset$ hier) und $A \subseteq \Omega$ dann ist:

$$\mathbb{P}[A|D] := \frac{\mathbb{P}[A \cap D]}{\mathbb{P}[D]}$$

die elementare bedingte Wahrscheinlichkeit. Die Abbildung $\mathbb{P}[\cdot|D] : \mathcal{P}(\omega) \rightarrow [0, 1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

2.2 Bsp

Fortsetzung von Bsp. 2.1. Für $\omega \in \{1, 3, 5\}$ gilt:

$$\mathbb{P}[\{\omega\} | \{1, 3, 5\}] = \frac{\mathbb{P}[\{\omega\} \cap \{1, 3, 5\}]}{\mathbb{P}[\{1, 3, 5\}]} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

2.3 Definition: Die Indikatorfunktion einer Menge $A \subseteq \Omega$ ist definiert als

$$\mathbb{I}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{I}_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Für $A, D \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}[D] > 0$ gilt $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}[A]$ und

$$\frac{\mathbb{P}[A \cap D]}{\mathbb{P}[D]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_D]}{\mathbb{P}[D]}$$

2.4 Definition: Sei $X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und sei $D \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}[D] > 0$. Dann heißt die reelle Zahl

$$\mathbb{E}[X|D] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_D]}{\mathbb{P}[D]}$$

elementare bedingte Erwartung

2.5 Bemerkung

Seien $m \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ und $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$. Sei $D \subseteq \Omega$ und $\mathbb{P}[D] > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|D] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{1}_D(\omega) \frac{\mathbb{P}[\{\omega\}]}{\mathbb{P}[D]} = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \frac{\mathbb{P}[\{\omega\} \cap D]}{\mathbb{P}[D]} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}[\{\omega\} | D] = \sum_{j=1}^m x_j \mathbb{P}[X = x_j | D] \end{aligned}$$

Erinnerung:

Zu jeder σ -Algebra \mathcal{G} auf Ω gibt es eine (eindeutige) Partition mit endliche vielen Elementen, die \mathcal{G} erzeugt (wegen $|\omega| < \infty$ und Proposition III.1.10)

2.7 Definition: Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Sei \mathcal{G} eine σ -Algebra auf Ω und $\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{D_1, \dots, D_n\}$. Die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ ist die Zufallsvariable $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) &:= \begin{cases} \mathbb{E}[X|D_1], & \text{falls } \omega \in D_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X|D_n], & \text{falls } \omega \in D_n \end{cases} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|D_i] \mathbb{1}_{D_i}(\omega) \end{aligned}$$

Beachte: Die elementare bedingte Erwartung ist eine reelle Zahl, während die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ (vgl. Def 2.7) eine \mathcal{G} -messbare Abbildung

2.8 Bsp

Fortsetzung von Bsp 1.16, 2.1, 2.6 mit $\mathcal{G} = \sigma(\xi)$ also $\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 4, 6\}\}$ ist

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \begin{cases} \mathbb{E}[X|\{1, 3, 5\}] = 3, & \text{falls } \omega \in \{1, 3, 5\} \\ \mathbb{E}[X|\{2, 4, 6\}] = 4, & \text{falls } \omega \in \{2, 4, 6\} \end{cases}$$

Die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ kann als die "beste Schätzung von X (der Augenzahl) unter der Information \mathcal{G} (gerade oder ungerade) interpretiert werden.

Einige wichtige Eigenschaften der bedingten Erwartung:

2.9 Proposition

Seien $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, $a, b \in \mathbb{R}$ und \mathcal{G}, \mathcal{H} σ -Algebren auf Ω . Dann gelten:

- a) Linearität: $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$
- b) Monotonie: $X \leq Y \implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$

- c) X \mathcal{G} -messbar $\implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$
- d) X unabhängig von $\mathcal{G} \implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$
- e) Turmeigenschaft: $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \implies \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ und $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$
- f) Y \mathcal{G} -messbar $\implies \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$
- g) Jensen-Ungleichung: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex $\implies \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}] \geq f(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$

Beweis:

- a) Übungsaufgabe
- b) Es gelte $\forall \omega \in \Omega$, dass $X(\omega) \leq Y(\omega)$. Sei $\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{D_1, \dots, D_n\}$. Es gilt $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$\mathbb{E}[X|D_i] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}[\{\omega\} | D_i] \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}[\{\omega\} | D_i] = \mathbb{E}[Y|D_i]$$

Es gilt $\forall \omega \in \Omega$ dass

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|D_i] \mathbb{1}_{D_i}(\omega) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y|D_i] \mathbb{1}_{D_i}(\omega) = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}](\omega)$$

2.10 Bemerkung

Als Spezialfälle in Proposition 2.9 erhält man $|\mathbb{E}[X|Y]| \leq \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ (aus 2. oder 7), $\mathbb{E}[X|\mathcal{P}(\omega)]$ (aus 3.) und $\mathbb{E}[X|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}[X]$ (aus 4) sowie $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$ (aus 4 und 5)

2.11 Lemma: Sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und \mathcal{G} eine σ -Algebra auf Ω . Dann gelten:

- a) $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ ist \mathcal{G} -messbar und
- b) $\forall A \in \mathcal{G}: \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A]$

Beweis:

- a) klar.
- b) Sei $A \in \mathcal{G}$. Dann gilt $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$

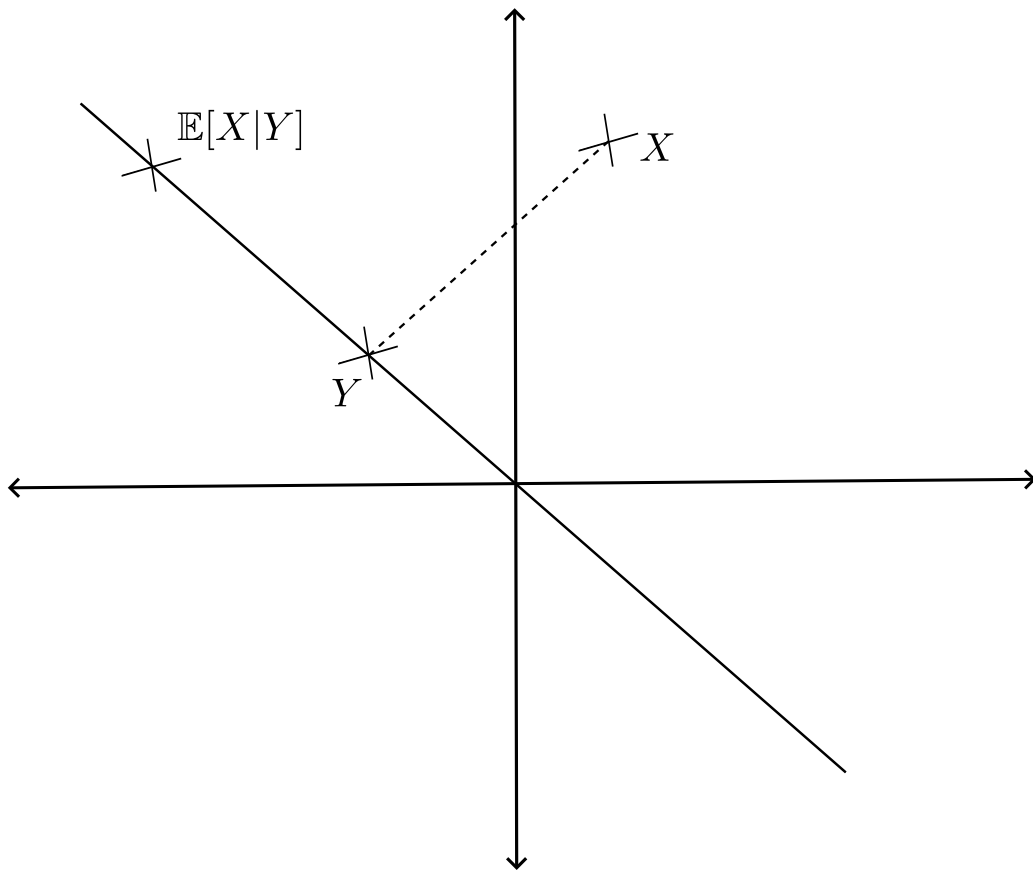
Im Allgemeinen (also auch wenn $|\Omega| = \infty$) definiert man die bedingte Erwartung über die Eigenschaft (i) und (ii) aus Lemma 2.11

Außerdem kann man die bedingte Erwartung als eine L^2 -Projektion auffassen (vgl. auch "besteSSchätzung von X unter der Information \mathcal{G})

2.12 Proposition

Seien $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, \mathcal{G} eine σ -Algebra auf Ω und Y \mathcal{G} -messbar. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] \leq \mathbb{E}[(X - Y)^2]$$



Beweis: Für alle \mathcal{G} -messbaren $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[Z(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - X)] \stackrel{2.9(6)}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[ZX|\mathcal{G}] - ZX] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[ZX|\mathcal{G}]] - \mathbb{E}[ZX] \stackrel{\text{Bem. 2.10}}{=} \mathbb{E}[ZX] - \mathbb{E}[ZX] = 0$$

Verwende dies man mit

$$\begin{aligned} Z &= \mathbb{E}[Y - X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \\ &= \mathbb{E}[(Y - X)^2] = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - X)^2] \\ &= \mathbb{E}[(Z + (\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - X))^2] \dots\dots \end{aligned}$$

§III.3 Prozesse

Sie $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $|\Omega| < \infty$ und $N \in \mathbb{N}$.

3.1 Definition: Eine Abbildung $X : \{0, \dots, N\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stochastischer Prozess. Schreibweise:
 $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$

Wenn $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ stochastischer Prozess:

- Für festes $n \in \{0, \dots, N\}$ ist $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, X_n(\omega) = X(n, \omega)$, eine Zufallsvariable.
- Für festes $\omega \in \Omega$ ist $X(\omega) : \{0, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}, X(\omega)(n) = X(n, \omega)$ ein "Pfand"

3.2 Definition: Eine filtration ist eine aufsteigende Folge $(\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ von σ -Algebra d.h.

$$\begin{aligned} \forall n \in \{0, \dots, N\} : \mathcal{F}_n \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra und} \\ \forall n \in \{0, \dots, N\} : \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

Weiter heißt dann $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), (\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}, \mathbb{P})$ eine filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

3.3 Definition: Sei $x = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein stochastischer Prozess: Die von X erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_n^\times)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ist gegeben durch :

$$\mathcal{F}_n^\times := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) := \sigma(X_k; k \in \{0, \dots, n\}), n \in \{0, \dots, N\}$$

3.4 Definition: Sei $(\mathcal{F}_n^\times)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ eine Filtration und $x = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein stoch. Prozess. Dann heißt X adaptiert (an $(\mathcal{F}_n^\times)_{n \in \{0, \dots, N\}}$) falls gilt:

$$\forall n \in \{0, \dots, N\} : X_n \text{ ist } \mathcal{F}_n \text{-messbar}$$

X heißt vorhersagbar (bzgl. $(\mathcal{F}_n^\times)_{n \in \{0, \dots, N\}}$), falls X_0 konstant ist und gilt:

$$\forall n \in \{1, \dots, N\} : X_n \text{ ist } \mathcal{F}_{n-1} \text{-messbar}$$

§III.4 Martingale

In diesem Abschnitt setzen wir einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), (\mathcal{F}_{n \in \{0, \dots, N\}}), \mathbb{P})$ mit $|\Omega| < \infty$ und $\forall \omega \in \Omega : \mathbb{P}[\{\omega\}] > 0$ voraus.

4.1 Definition: Ein stochastischer Prozess $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ heißt Martingal (bzw. Submartingal bzw. Supermartingal), falls gelten:

- X ist adaptiert (an $(\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ und
- $\forall n \in \{1, \dots, N\} : \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$ (bzw. $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1}$ bzw. $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \leq X_{n-1}$)

4.2 Bemerkung

$(X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ist genau dann ein Supermartingal, wenn $(-X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ Submartingal ist.
 $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ist genau dann ein Martingal, wenn X sowohl ein Sub- als auch ein Supermartingal ist.

4.3 Beispiel

Seien ξ_0, \dots, ξ_N unabhängige Zufallsvariablen,

$$X_n := \sum_{j=0}^n \xi_j, \quad n \in \{0, \dots, N\}$$

und $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X, n \in \{0, \dots, N\}$. Dann ist $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ adaptiert und es gilt $\forall n \in \{1, \dots, N\}$, dass $X_n = X_{n-1} + \xi_n$ und damit (da ξ_n und \mathcal{F}_{n-1} unabhängige)

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} + \mathbb{E}[\xi_n].$$

Also:

$$\begin{aligned} X \text{ Martingal} &\iff \forall n \in \{1, \dots, N\} : \mathbb{E}[\xi_n] = 0 \\ X \text{ Submartingal} &\iff \forall n \in \{1, \dots, N\} : \mathbb{E}[\xi_n] \geq 0 \\ X \text{ Supermartingal} &\iff \forall n \in \{1, \dots, N\} : \mathbb{E}[\xi_n] \leq 0 \end{aligned}$$

4.4 Proposition

Sei $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein adaptierter stochastischer Prozess. X ist genau dann ein Martingal (bzw. Sub-, Supermartingal), wenn für alle $n, m \in \{0, \dots, N\}$ mit $m < n$ gilt, dass $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_m] = X_m$ (bzw. $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_m] \geq X_m$ bzw. $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_m] \leq X_m$)

Beweis Betrachte Submartingal, sonst analog.

\Leftarrow : Klar (wähle $m = n - 1$)

\Rightarrow : Sei $n \in \{1, \dots, N\}$. Wir zeigen per Induktion, dass $\forall m \in \{0, \dots, n - 1\} : \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_m] \geq X_m$. Für $m = n - 1$ klar. Sei $m + 1 \in \{0, \dots, n - 2\}$. Wegen $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{m+1}] \geq X_{m+1}$ (IV) und (ii) in Def 4.1 gilt :

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{m+1}] | \mathcal{F}_m] \geq \mathbb{E}[X_{m+1} | \mathcal{F}_m] \geq X_m \quad \square$$

4.5 Bemerkung

Bei endlichen Zeithorizont $N < \infty$ ist ein Martingal $(X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ schon durch die Zufallsvariable X_N eindeutig bestimmt, da $\forall n \in \{0, \dots, N - 1\} : X_n = \mathbb{E}[X_N | \mathcal{F}_n]$.

4.6 Beispiel

Sei $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $X_n := \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_n]$, $n \in \{0, \dots, N\}$. Dann ist $\{X_n\}_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein Martingal. (folgt aus der Turmeigenschaft.)

4.7 Lemma: Sei $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein Martingal (bzw. Sub- Supermartingal). Dann ist $\{0, \dots, N\} \ni n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$ konstant (bzw. wachsend bzw. fallend).

Beweis Sei $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein Submartingal (sonst analog) und $n \in \{1, \dots, N\}$ Dann gilt :

$$\mathbb{E}[X_{n-1}] \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[X_n]$$

□

4.8 Bemerkung

Seien $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ σ -Algebra. Aus Lemma 1.17 erhalten wir, dass Linearkombinationen \mathcal{G} -messbarer Abbildungen wieder \mathcal{G} -messbar sind. Wenn Y eine \mathcal{H} -messbare Abbildung ist, dann zeigt Lemma 1.14, dass Y auch \mathcal{G} -messbar ist.

4.9 Lemma: Seien $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ und $Y = (Y_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ Martingal.

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $Z = aX + bY = ((aX_n + bY_n))_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein Martingal.

b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann ist $f(X) = (f(X_n))_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein Submartingal.

Beweis:

a) Folgt aus Bem. 4.8 und der Linearität der bedingter Erwartung.

b) Folgt aus Lemma 1.17 und der Jensen-Ungleichung :

$$\forall n \in \{1, \dots, N\} : \mathbb{E}[f(X_n) | \mathcal{F}_{n-1}] \geq f(\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}]) = f(X_{n-1})$$

4.10 Lemma: Sei $(X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein vorhersagbares Martingal. Dann gilt $\forall n \in \{0, \dots, N\} : X_n = X_0$.

Beweis: Übung.

4.11 Satz (Doob-Zerlegung): Sei $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein adaptierter Prozess. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$X = X_0 + M + A$$

derart, dass $M = (M_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein Martingal mit $M_0 = 0$ und $A = (A_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein vorhersagbarer Prozess mit $A_0 = 0$ ist. Die Prozesse sind gegeben durch:

$$A_n = \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}), \quad n \in \{1, \dots, N\} \quad A_0 = 0$$

$$M_n = \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}]), \quad n \in \{1, \dots, N\} \quad M_0 = 0$$

Beweis :

- a) Sei $n \in \{1, \dots, N\}$. Die \mathcal{F}_{n-1} -Messbarkeit von A_n folgt aus Bem. 4.8 und der Tatsache, dass für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ die Abbildungen $\mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}]$ und \mathcal{F}_{k-1} -messbar sind sowie $\mathcal{F}_{k-1} \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$ gilt. Analog ist M_n \mathcal{M}_n -messbar. Klar: $M_0 = 0$ ist \mathcal{F}_0 -messbar und $A_0 = 0$ ist konstant. Zudem gilt:

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] - M_{n-1} = \mathbb{E}[M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$$

Außerdem gilt $X_0 = X_0 + M_0 + A_0$ und

$$X_0 + M_n + A_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) = X_0 + X_n - X_0 = X_n.$$

- b) Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $X = X_0 + \widetilde{M} + \tilde{A}$ eine weitere Zerlegung mit einem Martingal $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ mit $\widetilde{M}_0 = 0$ und einem vorhersagbaren Prozess $\tilde{A} = (\tilde{A}_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ mit $\tilde{A}_0 = 0$. Dann ist

$$M - \widetilde{M} = X - X_0 - A - (X - X_0 - \tilde{A}) = \tilde{A} - A$$

ein vorhersagbares Martingal (Bem. 4.8 und Lemma 4.9) mit $M_0 - \widetilde{M}_0 = 0$. Es folgt aus Lemma 4.10 dass $M = \widetilde{M}$. Hieraus folgt weiter, dass $\tilde{A} = A$ □

4.12 Bemerkung

Wenn $X = (X_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ ein Submartingal (bzw. Supermartingal) ist, dann ist der vorhersagbare Prozess A aus der Doob-Zerlegung von X wachsend (bzw. fallend).