21 Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt: Ist K kompakt, so ist K abgeschlossen und beschränkt.

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt } \iff k \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

Beweis. a) *K ist beschränkt.* Wir betrachten folgende Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ bei offene Menge $U_k := B(0,k),\ k \in \mathbb{N}$ Dann ist $K \subset \mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$. K-kompakt, $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine offene Überdeckung von $K \implies \exists k_1, k_2, \cdots k_m$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{k_i}$. Sei $k^* := max\,\{k_1, k_2, \cdots k_m\}$. Dann ist $K \subset B(0,k^*)$ $\implies d(K) < 2k^* \implies k-$beschränkt

b) " $\Longleftarrow$ " *K ist abgeschlossen (Wiederspruchbeweis!)* Sei K ist nicht abgeschlossen. Dann gitb es ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ eine Folge $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in K\ \forall i \in \mathbb{N}, \lim_{i\to\infty} x_i = x$. Wir betrachten folgende offen Überdeckungen K: $U_i := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B\left(x, \frac{1}{i}\right), i = 1, 2, \cdots}$. Denn $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i = \mathbb{R}^n \setminus x \supset K \implies \exists i_1, i_2, \cdots i_m$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k}$. Sei $i^* = max\,\{i_1, i_2, \cdots i_m\}$ Dann ist $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B\left(x, \frac{1}{i^*}\right)} \implies K \cap B\left(x, \frac{1}{i^*}\right) = \emptyset$ Wiederspruch.

□

22 Satz: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist jede abgeschlossene Menge $A \subset K$ ebenfalls Kompakt.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung vom A. Dann ist die Familie $\left\{\{U_i\}_{i\in I}, \mathbb{R}^n \setminus A\right\}$- eine Überdeckung von $\mathbb{R}^n \supset K, K - kompakt \implies \exists U_{i_1}, \cdots U_{i_k}$ s.d. $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \implies A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k}$ (Weil $A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$) $\implies A-$kompakt. □

Quader: Eine Menge in $Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossene Quader*, wenn es beschränkt, abgeschlossene Intervalle $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$ $, -\infty < a_k < b_k < +\infty,\ k = 1, 2, \cdots, n$ gibt, so dass $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}^n : a_k \le x_k \le b_k,\ \forall k = 1, 2, \cdots n\}$ gilt.

23 Satz: Jede abgeschlossene Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Wir werden folgende Resultat brauchen: *Cantorsche Schachtelungsprinzip* :

24 Satz: Sei (A_k) eine Folge nicht-leerer, abgeschlossene Menge $A_k \subset \mathbb{R}^n$ mit der folgende Eigenschaften:

a) (A_k) ist absteigend, d.h es gilt $A_{k+1} \subset A \; \forall k \in \mathbb{N}$

b) Die Folge $(d(A_k))$ der Durchmesser der Menge A_k ist eine Nullfolge (d.h $d(A_k) \to 0$

Dann gibt es genau einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ der allen Menge A_k angehört:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}$$

Beweis. a) Wir zeigen dass $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$. Sei $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge s.d. $x_k \in A_k \; \forall k \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass $d(A_k) \to 0$ wenn $k \to \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in N$ s.d. $d(A_k) < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$. Dann ist $\forall k, m \geq k_0$ $x_k \in A_k \subset A_{k_0},\; x_m \in A_m A_{k_0} \implies x_k, x_m \in A_{k_0} \implies \|x_k - x_m\| \leq d(A_{k_0}) < \varepsilon \implies (x_k)$-eine Cauchy-Folge. $\implies \exists x \in \mathbb{R}^n$ s.d. $\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad \forall x \in \mathbb{N}$ ist $x_m \in A_m \subset A_k,\; m \geq k,\; A_k$-abgeschlossen $\implies x = \lim_{m\to\infty} x_m \in A_k \; \forall k \in \mathbb{N} \implies x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$

b) Wir zeigen, dass $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ nur eine Punkt x. (Wiederspruchbeweis). Sei $x \neq y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann ist $x, y \in A_k, k \in \mathbb{N} \implies \|x - y\| \leq d(A_k) \to 0$ wenn $k \to \infty \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y$-Wiederspruch

□

Das Contorsche Schachtelungsprinzip werden wir zum Beweis des Satzes 23 auf eine geeignete absteigende Folge abgeschl. Quader an: Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschl. Quader und (U_i) eine offene Überdeckung von Q.

Annahme: Zu (U_i) gibt es keine endliche Teilüberdeckung von Q. Wir konstruieren induktiv eine absteigende Folge

$$Q = Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots$$

abgeschl. Quader $Q_m \subset \mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaften:

a) $\forall m \in \mathbb{N}:$ Es gibt keine (U_i) zugehörige endliche Teilüberdeckung von Q_m

b) $d(Q_m) = \frac{1}{2^m} d(Q_m)\,(\implies \lim_{n\to\infty} d(Q_m) = 0)$