Finanzmathe Mitschrift vom 24.10.24

Sisam Khanal

10. Dezember 2024

II.1 Einführung des Einperiodenmodells

Sei $d, p \in \mathbb{N}$. Wir betrachten einen Finanzmarkt mit $d+1$ Wertpapieren. Beim Einperiodenmodell gibt es genau zwei Zweitpunkt, den Anfangszeitpunkt 0 und der Endzeitpunkt 1. Es kann nur zum Zeitpunkt 0 gehandelt werden wobei man die Preise zum Zeitpunkt 0 kennt, aber i.A noch nicht klar ist, welches von l Szenarien für die Preise zum Zeitpunkt 1 eintreten wird.

Preisvektor zur Zeit 0 :

$$\overline{S_0} = \left(S_0^0, S_0^1, \cdots, S_0^d\right)^T = \left(S_0^0, S_0^T\right)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$$

wobei S_0^i der Preis des i-ten Wertpapiers zur Zeit 0 für $i \in \{0, 1, \cdots, d\}$ ist.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum mit

$$\begin{aligned}
&|\Omega| = l, \Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_l\}, \\
&\mathcal{F} = 2^\Omega = \mathcal{P}(\Omega), \\
&\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], \\
&\mathbb{P}[A] = \sum_{\omega_k \in A} \mathbb{P}[\{\omega_k\}] \text{ für } A \subseteq \Omega, \\
&\mathbb{P}[\{\omega_k\}] > 0 \; \forall k \in \{1, \cdots, l\}
\end{aligned}$$

Zufallsvektor der Preise zur Zeit l :

$$\overline{S_1} = \left(S_1^0, S_1^1, \cdots, S_1^d\right)^T = \left(S_1^0, S_1^T\right)^T : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$$

wobei $S_1^i(\omega_k) \in \mathbb{R}$ der Preis der i-ten Wertpapiers zur Zeit 1 unter Szenario k ist für $i \in (0, 1, \cdots, d), k \in (1, \cdots, l)$

Alternative können wir die Preise zur Zeit 1 als eine Preismatrix auffassen:

$$S_1 = \left[\, \overline{S_1}(\omega_1)\ \overline{S_1}(\omega_2)\ \cdots\ \overline{S_1}(\omega_l) \,\right] = \begin{pmatrix} S_1^0(\omega_1) & S_1^0(\omega_2) & \cdots & S_1^0(\omega_l) \\ S_1^1(\omega_1) & S_1^1(\omega_2) & \cdots & S_1^1(\omega_l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1^d(\omega_1) & S_1^d(\omega_2) & \cdots & S_1^d(\omega_l) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times l}$$

Wir nehmen an, dass das Orte Wertpapiers eine Anleihe mit fester Verzinsung $r \geq 0$ (Bankkonto) ist mit

$$S_0^0 = 1 \text{ und } \forall \omega \in \Omega : S_1^0(\omega) = 1 + r$$

Diskontierte Preise:

$$X_0 = \left(X_0^1, \cdots, X_0^d\right)^T, X_1 = \left(X_1^1, \cdots, X_1^d\right)^T, \Delta X_1 = \left(\Delta X_1^1, \cdots, \Delta X_1^d\right)^T,$$

$$\text{mit } X_0^i = S_0^i, X_1^i = \frac{S_1^i}{1+r}, \Delta X_1^i = X_1^i - X_0^i, i \in \{1, \cdots, d\}$$

Zum Zeitpunkt 0 nählt man ein Portfolio.

1.1 Definition: Eine Handelsstrategie oder ein Portfolio (im Einperiodenmodell) ist ein Vektor

$$\overline{H} = \left(H^0, H^1, \cdots, H^d\right)^T = \left(H^0, H^T\right)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$$

Bei einer Handelsstrategie $\overline{H} = \left(H^0, H^1, \cdots, H^d\right)^T$ beschreibt $H^i \in \mathbb{R}$ die Stückzahl von Wertpapier i in Portfolio Zwischen den beiden Zeitpunkten (für $i \in \{0, 1, \cdots, d\}$. Dabei ist H^i nicht zufällig.
Falls $H^0 < 0$: Kreditaufnahme,
Falls $H^i < 0$ für ein $i \in \{1, \cdots, d\}$: Leerverkauf (short sell)

1.2 Definition: Sei $\overline{H} \in \mathbb{R}^{d+1}$. Der Wert der Handelsstrategie $\overline{H}$ ist zur Zeit 0 durch:

$$V_0^{\overline{H}} = \left\langle \overline{S_0}, \overline{H} \right\rangle = \overline{S_0^T}\,\overline{H} = \sum_{i=0}^{d} S_0^i H^i$$

Und zur Zeit 1 durch die Zufallsvariable $V_1^{\overline{H}} : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$V_1^{\overline{H}} = \left\langle \overline{S_1}(\omega), \overline{H} \right\rangle = \sum_{i=0}^{d} S_0^i(\omega) H^i$$

definiert. Weiter definieren wir die diskontierten Werte als

$$D_0^{\overline{H}} = V_0^{\overline{H}} \text{ und } D_1^{\overline{H}} = \frac{V_1^{\overline{H}}}{1+r}$$

1.3 Lemma: Sei $\overline{H} = \left(H^0, H^T\right)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ eine Handelsstrategie. Dann gilt

$$D_1^{\overline{H}} = D_0^{\overline{H}} + \langle \Delta X_1, H \rangle$$

Beweis: Übung

Beispiel 1.4

Seien $d = 1, l = 1, p \in (0,1), \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = p, \mathbb{P}[\{\omega_2\}] = 1 - p, S_0^1 = 1, S_1^1(\omega_1) = 2, S_1^1(\omega_2) = \frac{1}{2}$
Sei $r = 2$ und wähle die Handelsstrategie $\overline{H}(1, -1)$ Dann ist,

$$\begin{aligned} V_0^{\overline{H}} &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0, \\ V_1^{\overline{H}}(\omega_1) &= (1+r) \cdot 1 + S_1^1(\omega_1) \cdot (-1) = 1, \\ V_1^{\overline{H}}(\omega_2) &= (1+r) \cdot 1 + S_1^1(\omega_2) \cdot (-1) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

II.2 No-Arbitrage und FTAP1

- Ziel: Charakterirrung vom Markt, in dem es keine Arbitrage-Möglichkeiten gibt.

- Hilfsmittel: äquivalente Martingallmaße

- Hauptresultat: First Fundamental theorem of asset pricing (FTAP1)

- Praktische Umsetzung: prüfe Gleichungssystem auf Lösbarkeit (unter Nebenbedingungen)

2.1 Definition: Eine Handelsstrategie $\overline{H} \in \mathbb{R}^{d+1}$ heißt Arbitragemöglichkeit falls gelte:

a) $V_0^{\overline{H}} \leq 0$,

b) $\forall \omega \in \Omega : V_1^{\overline{H}}(\omega) \geq 0$ und

c) $\exists \omega \in \Omega : V_1^{\overline{H}}(\omega) > 0$

Wir sagen, es gilt No-Arbitrage (NA), falls keine Arbitragemöglichkeit existieren.

2.2 Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent

a) Es gibt eine Arbitragemöglichkeit.

b) Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}^d$, sodass

- $\forall \omega \in \Omega : \langle \Delta X_1(\omega), \alpha \rangle \geq 0$ und
- $\exists \omega \in \Omega : \langle \Delta X_1(\omega), \alpha \rangle > 0$

c) Es gibt eine Arbitragemöglichkeit $\overline{H} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $V_0^{\overline{H}} = 0$

Beweis

Übung Eine Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ können wir durch den Vektoren $q \in \mathbb{R}^l$ mit $q_k = Q\left[\{\omega_k\}\right], k \in \{1, \cdots, l\}$ charakterisieren. Für eine Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ notieren wir mit

$$\mathbb{E}^Q\left[Y\right] = \sum_{k=1}^{l} q_k Y\left(\omega_k\right)$$

den Erwartungswert von Y bzgl. Q. Für $m \in \mathbb{N}$ und einen m-dim Zufallsvektor $Y = \left(Y^1, , \cdots, Y^m\right)^T : \Omega to \mathbb{R}^m$ setzen wir

$$\mathbb{E}^Q\left[Y\right] = \left(\mathbb{E}^Q\left[Y^1\right], \cdots, \mathbb{E}^Q\left[Y^m\right]\right)^T$$

2.3 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt risikoneutral oder Martingalmaße, falls $\forall i \in \{1, \cdots, d\}$:

$$\mathbb{E}^Q\left[X_1^i\right] = X_0^i$$

2.4 Lemma: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ und $q_k = Q\left[\{\omega_k\}\right], k \in \{1, \cdots, l\}$. Es bezeichne e_i den i-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

a) Q ist eine Martingalmaße

b) $\forall i \in \{1, \cdots, d\} : \sum_{k=1}^{l} q_k \langle \Delta X_1(\omega_k), e_i \rangle = 0$

c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^d : \sum_{k=1}^{l} q_k \langle \Delta X_1(\omega_k), \alpha \rangle = 0$

Beweis

Übung

2.5 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt (zu $\mathbb{P}$) äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn $\forall k \in \{1, \cdots, l\} : q_k = Q\left[\{\omega_k\}\right] > 0$

Wir hatten angenommen, dass $\forall k \in \{1, \cdots, l\} : \mathbb{P}\left[\{\omega_k\}\right] > 0$ ein $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ ist, dann stimmen also die Mengen der möglichen Szenarien unter $\mathbb{P}$ und Q überein (aber die genauen Wahrscheinlichkeiten sind in der Regel unterschiedlich)

2.6 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ heißt äquivalentes Martingalmaße (ÄMM) falls Q risikoneutral und äquivalent ist. Wir definieren

$$\mathcal{P} = \{Q : Q \text{ ist ÄMM }\}$$

Beispiel 2.7:

Seien $d = 1, l = 2, p \in (0,1), \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = p, \mathbb{P}[\{\omega_2\}] = 1 - p, S_0^1 = 1, S_1^1(\omega_1) = 2, S_1^1(\omega_2) = \frac{1}{2}$ und $r = 0$. Wir versuchen, ein ÄMM zu finden. Wenn Q ein ÄMM (charakterisiert durch $q \in \mathbb{R}_2$ ist, dann müssen gelten: $q_1 > 0, q_2 > 0$

$$\sum_{k=1}^{2} q_k S_1^1(\omega_k) = q_1 \underbrace{S_1^1(\omega_1)}_{=2} + q_2 \underbrace{S_1^1(\omega_2)}_{=\frac{1}{2}} = 1$$

LGS lösen:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 1 \\ 2q_1 + \frac{1}{2} q_2 &= 1 \end{aligned}$$

Andere Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Im ersten fundamentalsatz wird ein Zusammenhang zwischen der Existenz von ÄMMs und NA hergestellt:

2.8 Satz (FTAP1): Es gilt: $NA \iff \mathcal{P} \neq \emptyset$. Andereseits gilt: Ein Vektor $q \in \mathbb{R}^l$ definiert genau dann ein ÄMM (via $Q[\{\omega_k\}] := q_k, k \in \{1, , \cdots, l\}$, wenn $k \in \{1, \cdots, l\} : q_k > 0$ gilt, und q eine Lösung des Systems: $\forall i \in \{1, \cdots, d\}$

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + \cdots + q_l &= 1 \\ \frac{1}{1+r}\left(S_1^i(\omega_1)q_1 + S_1^i(\omega_2)q_2 + \cdots + S_1^i(\omega_l)q_l\right) &= S_0^i \end{aligned}$$

ist. Um zu überprüfung, ab NA gilt, kann man wegen FTAP1 also testen, ob

$$S_1 q = (1+r)\overline{S_0}$$

eine Lösung $q \in \mathbb{R}^l$ mit $\forall k \in \{1, \cdots, l\} : q_k > 0$ besitzt

Für den Beweis des FTAP1 benötigen wir folgenden Trennungssatz (in $\mathbb{R}^l$)

2.9 Satz (Trennungssatz): Sei $n \in \mathbb{N}$

a) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, konvex und nichtleer mit $0 \notin C$. Dann existieren $y \in C$ und $\delta > 0$ sodass $\forall x \in C : \langle x, y \rangle \geq \delta > 0$

b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex und nicht leer und sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine linearen Unterraum mit $K \cap U = \emptyset$. Dann existiert $y \in \mathbb{R}^n$ sodass

- $\forall x \in K : \langle x, y \rangle > 0,$
- $\forall x \in U : \langle x, y \rangle = 0$

2.10 Proposition

Die Menge $\mathcal{P}$ aller ÄMMs ist konvex. Insbesondere gilt:

$$|\mathcal{P}| \implies |\mathcal{P}| = \infty$$

Beweis: Übung

II.3 Arbitragefreie Preise

Wir Identifizieren im Folgenden ein Derivat mit seiner Auszahlung zur Zeit $T = 1$

3.1 Definition: Ein *Derivat* ist eine Zufallsvariable $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ notieren wir

$$(x-y)^+ = \max \{x-y, 0\}$$

3.2 Beispiel

Beispiele für Derivate:

a) Forward contract: Vereinbarung, zu einem zukünftigen, festgelegten Termin T ein Gut (z.B Wertpapier) zu einem heute vereinbarten Preis k zu kaufen bzw. zu verkaufen. Im Einperiodenmodell: Forward auf Papier

$$i : \xi = S_1^i - k$$

b) Call-Option: Recht, ein Gut zu festgelegt Preis K (dem *Strike*) zu zukünftigen Zeitpunkt T zu kaufen. Im Einperiodenmodell: Call auf Papier

$$i : \xi = \left(S_1^i - k\right)^+$$

c) Put-Option: Analog zu Call, aber Verkaufen. Im Einperiodenmodell: Put auf Papier

$$i : \xi = \left\{k - S_1^i\right\}^+$$

d) Basket-Option: Option auf einen Index von Wertpapier z.B Basket-Call-Option mit Strike k und Gewicht $\alpha \in \mathbb{R}^d$ im Einperiodenmodell :

$$i : \xi = \left(K - S_1^i\right)$$

e) Basket-Option: Option auf einen Index von Wertpapier z.B Basket-Call-Option mit Strike k und Gewicht $\alpha \in \mathbb{R}^d$ im Einperiodenmodell :

$$(\langle S_1, \alpha \rangle - k)^+$$

3.3 Beispiel

Seien $d = 1, l = 2, \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = \frac{1}{2} = \mathbb{P}[\{\omega_1\}], S_0^0 = 1, S_1^0 = 1 (r = 0), S_0^1 = 1, S_1^1(\omega_1) = 2, S_1^1(\omega_1) = \frac{1}{2}$. Betrachte Call $\xi = \left(S_1^1\right)^+$. Was ist ein angemessener Preis $P_0(\xi)$ für ξ zur Zeit 0?
Ersten Ansatz: Preis von ξ ist mittlere Auszahlung von ξ bei wiederhaltern Spiel, d.h

$$p_0(\xi) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi] = \frac{1}{2} \cdot (2-1)^+ + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)^+ = \frac{1}{2}$$

Dadurch ergibt sich allerdings eine Arbitragemöglichkeit.
Zeit 0: Verkaufe $6\times$ Call zum Preis $\frac{1}{2}$, Kaufe $3\times$ die Aktie; Startkapital 0.
Zeit 1 Szenario ω_1 : Endkapital ist $3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 (2-1)^+ = 0$
Szenario ω_2: Endkapital ist $3 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 1 \left(\frac{1}{2} - 1\right)^+ = 1,5$

Fischer Ansatz: Preis von ξ ist im Mittelwert unabhängig von ξ bei wiederholtem Spiel, d.h.

$$p_0(\xi) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi] = \frac{1}{2}(2-1)^+ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^+ = \frac{1}{2}$$

Dadurch ergibt sich allerdings eine Arbitragemöglichkeit:
Zeit 0:

- Verkaufe $6\times$ Call zum Preis $\frac{1}{2}$.
- Kaufe $3\times$ die Aktie; Startkapital 0.

Zeit 1:

- Szenario w_1: Endkapital ist $3 \cdot 2 - 6\,(2-1)^+ = 0$
- Szenario w_2: Endkapital ist $3 \cdot \frac{1}{2} - 6\left(\frac{1}{2} - 1\right)^+ = 1.5$

Wir verwenden im Folgenden das No-Arbitrage-Prinzip zur Bewertung von Derivaten. Wähle den Preis $P_0(\xi)$ von ξ so, dass sich im um $\left(S_0^{d^0}, S_1^{d^1}\right) = (p_0(\xi), \xi)$ erweiterten Modell keine Arbitragemöglichkeit ergibt.

3.4 Definition: Sei ξ ein Derivat. Der Wert $p_0(\xi) \in \mathbb{R}$ heißt arbitragefreier/fairer Preis von ξ, falls das um $\left(S_0^{d+0}, S_1^{d+1}\right) = (p_0(\xi), \xi)$ erweiterte Marktmodell mit den Preisen $\left(S_0^0, \dots, S_0^d, S_0^{d+1}\right)^T$ und $\left(S_1^0, \dots, S_1^{d+1}\right)^T$ NA erfüllt. Wir bezeichnen mit $\Pi(\xi)$ die Menge aller arbitragefreien Preise von ξ.

Beachte: Wenn $\Pi(\xi)$ nicht leer ist, dann gilt im ursprünglichen Modell NA.
Also: Falls NA im ursprünglichen Modell nicht erfüllt ist, dann ist $\Pi(\xi) = \emptyset$.
Im Folgenden sei $\mathcal{P}$ bezeichnet die Menge aller ÄMMs im ursprünglichen Modell.

3.5 Satz: Es gelte NA. Sei ξ ein Derivat. Dann ist $\Pi(\xi)$ nicht leer, und es gilt

$$\Pi(\xi) = \left\{ \mathbb{E}^Q \left[\frac{\xi}{1+r} \right] \middle| Q \in \mathcal{P} \right\}.$$

Beweis:

" $\subseteq$ ": Sei $Q \in \mathcal{P}$ und $p_0(\xi) = \mathbb{E}^Q\left[\frac{\xi}{1+r}\right]$. Dann ist Q auch ein ÄMM in dem um $(p_0(\xi), \xi)$ erweiterten Markt. FTAP1 impliziert, dass im erweiterten Markt NA gilt, also $p_0(\xi) \in \Pi(\xi)$.

" $\supseteq$ ": $p_0(\xi) \in \mathbb{R}$ ist ein arbitragefreier Preis. Der um $(p_0(\xi), \xi)$ erweiterte Modell erfüllt dann NA. Wende FTAP1 auf dem erweiterten Markt an. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ sodass $\forall k \in \{1, \dots, l\} : Q\left[\{\omega_k\}\right] > 0$ und $\forall k \in \{1, \dots, d\} : \mathbb{E}^Q\left[X_1^i\right] = X_0^i = 0$
Insbesondere gilt $Q \in \mathcal{P}$

$$p_0(\xi) = S_0^{d+1} = X_0^{d+1} = \mathbb{E}^Q\left[X_1^{d+1}\right] = \mathbb{E}^Q\left[\frac{S_1^{d+1}}{1+r}\right] = \mathbb{E}^Q\left[\frac{\xi}{1+r}\right].$$

3.6 Beispiel

Fortsetzung von Bsp 3.3
Neuer Ansatz: NA-Prinzip Aus Bsp 2.7 ist bekannt, dass $q = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T \in \mathbb{R}^2$ in diesem Marktmodell ein ÄMM Q def. Somit ist (siehe Satz 3.5) $p_0(\xi) = \mathbb{E}^Q\left[\frac{S}{1+r}\right] = \mathbb{E}^Q\left[\left(S_1^1 - 1\right)^+\right] = \frac{1}{3}\left(S_1^1(\omega_1) - 1\right)^+ + \frac{2}{3}\left(S_1^1(\omega_2) - 1\right)^+ = \frac{1}{3}$ ein arbitragefreier Preis.

3.5 Proposition

Es gelte NA. Sei ξ ein Derivat. Dann $\emptyset \neq \Pi(\xi) \subset \mathbb{R}$ Konvex und somit ein Intervall.
Beweis: Übung
Zum Folgenden wollen wir die Intervallgrenzen $\Pi^X(\xi_j) := \sup \Pi(\xi)$ und $\Pi_X(\xi)$ für ein keivert ξ

3.5 Definition: Wir sagen, es gilt Nicht-Redundanz *NR* wenn die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1^i(\omega_1) \\ \vdots \\ \Delta x_1^i(\omega_l) \end{pmatrix}, i \in (1, \cdots, d)$$

linear unabhängig sind.

Damit NR erfüllt sein kann, muss notwendigerweise $d \leq l$ gelten. Falls NR nicht erfüllt ist, dann existiert eine strikte Teilmenge dieser Vektoren.

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1^i(\omega_1) \\ \vdots \\ \Delta x_1^i(\omega_l) \end{pmatrix}, i \in (1, \cdots, d) \text{ s.d } \forall j \in \{m+1, \cdots, d\} \, \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1^j(\omega_1) \\ \vdots \\ \Delta x_1^j(\omega_l) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \begin{pmatrix} \Delta x_1^i(\omega_1) \\ \vdots \\ \Delta x_1^i(\omega_l) \end{pmatrix}$$

Die Vektoren (Wertpapier) für $j \in \{m+1, \cdots, d\}$ sind also überflüssig redundant. Durch *Wegwerfen* von redundanten Wertpapieren können wir jeden Markt zu einem Markt, in dem NR gilt reduzieren.

Erinnerung:

Für eine Handelsstrategie $\overline{H} = \left(H^O, H^T\right)^T$ ist

$$V_0^{\overline{H}} = \langle \Delta_1, H \rangle = \frac{V_1^{\overline{H}}}{1+r}$$

3.9 Definition: Sei ξ ein Derivat. Ein Vektor $\left(X, H^T\right)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $x \in \mathbb{R}$ (Anfangskapital) und $H \in \mathbb{R}^d$ (Position in Aktien) wird als Superhedging-Strategie für ξ bezeichnet, wenn

Vorlesung 10. Dezember 2024

5.3 Definition: Seien $K, L \in \mathbb{R}$ mit $K \geq L$, sei $\lambda \in [0,1]$ und sei $M = \lambda K + (1-\lambda) L$. Wir nehem an, dass zur Zeit 0 die Call-Option $\left(S_1^1 - K\right)^+, \left(S_1^1 - L\right)^+$ zu dem Preisen $C(K), C(L)$ und $C(M)$ gehandelt werden. Der um $\left(C(K), \left(S_1^1 - K\right)^+\right), \left(C(L), \left(S_1^1 - L\right)^+\right)$ erweiterte Markt NA. Dann gilt:

a) $C(K) \leq C(L)$

b) $(1+r)\left(C(K) - C(L)\right) \leq L - K$

c) $C\left(\lambda K + (1-\lambda) L\right) \leq \lambda C(K) + (1-\lambda) C(L)$

§3 Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen, um das Einperiodenmodell auf mehrere Handelszeitpunkte zu erweitern und Informationszunahme im Lauf der Zeit zu modellieren.

Literatur:

- Kremer - Einführung in die diskrete Finanzmathe
- Shiryaev - Probability-1
- Klenke - Wahrscheinlichkeitstheorie
- Mentrup und Schäffler - Stochastik

III.1 σ-Algebra

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Bezeichne mit $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω

1.1 Definition: Ein Mengensystem $G \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Algebra auf Ω, falls gelten:

a) $\Omega \in G$

b) $A \in G \implies A^c \in G$

c) $A, B \in G \implies A \cup B \in G$

1.2 Definition: Eine Algebra G auf Ω heißt σ-Algebra auf Ω, falls zusätzlich gilt:

$$A_n \in G \forall n \in \mathbb{N} \implies \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in G$$

Beispiele für σ-Algebra (und damit auch für Algebra) sind die "triviale"σ-Algebra und die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. Wenn G eine Algebra ist, dann gilt $\emptyset \in G$ und $\forall A, B \in G$ sind $A \cap B = \left(A^{\complement} \cup B^{\complement}\right)^{\complement} \in G$ und $A \setminus B = A \cap B^{\complement} \in G$. Wenn G eine σ-Algebra ist, dann gilt zusätzlich $A_n \in G \; \forall n \in \mathbb{N} \implies \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in G$

1.3 Lemma: Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ eine Familie von Algebren (bzw. σ-Algebra) auf Ω. Dann ist auch $\cap_{\lambda \in \Omega} G_\lambda$ eine Algebra (bzw. σ-Algebra) auf Ω.

Beweis: Übung

1.4 Definition: Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine Mengensystem. Wir definieren:

$$\mathcal{B}_\sigma^\mathcal{A} = \{G \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : G \text{ Algebra und } G \supseteq \mathcal{A}\}$$
$$\mathcal{B}_\sigma^\mathcal{A} = \{G \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : G\ \sigma - \text{ Algebra und } G \supseteq \mathcal{A}\}$$

Weiter definieren wir die durch $\mathcal{A}$ erzeugte Algebra:

$$\alpha(\mathcal{A}) = \bigcap_{G \in \mathcal{B}_\sigma^\mathcal{A}} G$$

Lemma 13 Zeigt, dass $\alpha(A)$ eine Algebra und $\sigma(A)$ eine σ -Algebra ist.

1.5 Lemma: Es gelte $|\Omega| < \infty$ Sei G ein Algebra. Dann ist G eine σ -Algebra.

Beweis: Seien $A_n, n \in \mathbb{N}$, Elemente von G und $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Weil Ω endlich ist, hat G nur endlich viele Element und daher geht die Vereinigung nur über endlich viele verschieden Elemente von G. Per Induktion und (iii) in Def 1.1 folgt, dass $B \in G$
Also, Auf endlichen Ω sind Algebren σ -Algebren äquivalent. Für allgemeines Ω gibt es aber Algebra , die keine σ -Algebra sind z.B:

1.6 Bsp.

Sei $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| = 1\}$ und $G := \alpha(A)$. Dann gilt (Übung).

$$G = \{B \subseteq \mathbb{N} : |B| < \infty \text{ oder } |B^\mathsf{c}| < \infty\}$$

. Aus Lemma 1.2 wissen wir, dass G eine Algebra ist. Aber G ist keine σ -Algebra, denn $\forall k \in \mathbb{N} : \{2k\} \in G$ und (wir setzen $\cup_{\lambda\in\emptyset} \cdots = \emptyset$

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{2k\} = 2\mathbb{N} \notin G$$

1.7 Definition: Sei Ω ein Menge. Ein Mengensystem $D = \{D_\lambda\}_{\lambda\in\Omega}$ heißt Partition oder Zerlegung von Ω, falls gelten:

a) $\forall \lambda \in \Omega : D_\lambda \neq \emptyset$

b) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \omega$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 : D_{\lambda_1} \cap D_{\lambda_2} = \emptyset$

c) $\cup_{\lambda\in\omega} D_\lambda = \Omega$

1.8 Proposition

Sei Ω höchstens abzählbar und $D = \{D_\lambda\}_{\lambda\in\Omega}$ eine Partition. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{D}) = \left\{ \bigcup_{\lambda\in A} D_\lambda : A \subseteq \Omega \right\}$$

Beweis: Sei $\mathcal{F} := \{\cup_{\lambda\in A} D_\lambda : A \subseteq \Omega\}$
$\supseteq$: Trivial
$\subseteq$: Zeige, dass $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_\sigma^\mathcal{D}$. Klar: $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$. Noch zu zeigen: $\mathcal{F}$ ist σ -Algebra.

a) Wegen (iii) in Def 1.7 gilt $\Omega = \cup_{\lambda\in\Omega} D_\lambda \in \mathcal{F}$

b) Sei $A \subseteq \mathcal{A}$. Es gilt (wegen (ii) in Def 1.7)

$$\left(\bigcup_{\lambda\in A} D_\lambda\right)^\mathsf{c} = \bigcap_{\lambda\in A} D_\lambda^\mathsf{c} = \bigcup_{\lambda\in\Omega\setminus A} D_\lambda \in \mathcal{F}$$

c) Seien $\mathcal{B}_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann $A_n \subseteq \Omega$ sodass $\mathcal{B}_n = \cup_{\lambda \in A_n} D_\lambda$. Es folgt, dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\lambda\in A_n} D_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n} D_\lambda \in \mathcal{F}$$

1.9 Lemma: Es gelte $|\Omega| \leq \infty$. Seien $\mathcal{D}$ und $\tilde{\mathcal{D}}$ zwei Partitionen mit $\sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\tilde{\mathcal{D}})$. Dann gilt $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}$

Beweis: Betrachte, dass die Partitionen nur endlich viele Elemente haben, und daher die Darstellung aus Proposition 1.8 gilt. Angenommen, es gibt ein $B \in \tilde{\mathcal{D}}$ mit $B \notin \mathcal{D}$.

- Falls es ein $D \in \mathcal{D}$ gibt, sodass $B \subsetneq D$, dann ist $B \notin \sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\tilde{\mathcal{D}}$. Widerspruch.
- Andernfalls gilt $\forall D \in \mathcal{D}$, dass B keine Teilmenge von D ist.
  - Falls es ein $C \in \mathcal{D}$ gibt mit $C \subsetneq B$, dann ist $C \notin \sigma(\tilde{\mathcal{D}}) = \sigma(\mathcal{D})$. Widerspruch.
  - Falls es kein $C \in \mathcal{D}$ gibt, das Teilmenge von B ist, dann folgt $B \notin \sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\tilde{\mathcal{D}})$. Widerspruch. □

Jede σ -Algebra auf einem endlichen Ω kann durch eine Partition erzeugt werden:

1.10 Proposition

Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei G eine σ-Algebra auf Ω. Dann existiert genau eine Partition $\mathcal{D}$ von Ω, sodass $G = \sigma(\mathcal{D})$
Beweis: Für alle $x \in \Omega$ sei $\mathcal{M}_x := \{A \in G : x \in A\}$ und $A_x := \cap_{A\in\mathcal{M}_x} A$. Für $x, y \in \Omega$ definiere
$x\ y :\iff y \in A_x$. Dann ist eine Äquivalenzrelation auf Ω denn:

- Reflexivität: Sei $x \in \Omega$. Es gilt $\forall A \in \mathcal{M}_x$, dass $x \in A$ also $x \in A_x$. Somit gilt $x \sim x$
- Symmetrie: Seien $x, y \in \Omega$ mit $x \sim y$. Dann ist $y \in A_x$. Deshalb gilt $\forall A \in G$ mit $x \in A$, dass $y \in A$. Angenommen, $x \notin A_y$. Dann ist $x \in A_x \setminus A_y$. Da G endlich ist, gilt $A_x \setminus A_y \in G$. Es folgt, dass $y \in A_x \setminus A_y$ Widerspruch zu $y \in A_y$. Somit gilt $y \sim x$.
- Transitivität: Seien $x, y, z \in \Omega$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Sei $C \in \mathcal{M}_x$. Dann ist $C \in G$ und $x \in C$. Wegen $y \in A_x$ folgt heraus $y \in C$, also $C \in \mathcal{M}_y$. Hieraus folgt mit $z \in A_y$, dass $z \in C$. Somit gilt $x \sim z$.

Die Menge der Äquivalenzklassen $\{A_x : x \in \Omega\}$ ist eine Partition $\mathcal{D}$ von Ω. Sei $G' \in G$. Dann gilt $G' = \cup_{x\in G}\{x\} \subseteq \cup_{x\in G} A_x$. Für alle $x \in G'$ ist $G' \in \mathcal{M}_x$ und daher $A_x = \cap_{A\in\mathcal{M}_x} A \subseteq G'$. Also ist $G = \cup_{x\in G} A_x \in \sigma(\mathcal{D})$. Es folgt $G \subseteq \sigma(\mathcal{D})$. Für alle $x \in \Omega$ gilt $A_x = \cap_{A\in\mathcal{M}_x} A \in G$ und G ist eine σ-Algebra, somit $\sigma(\mathcal{D}) \in G$. Eindeutigkeit folgt aus Lemma 1.9. □

1.11 Definition: Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei G eine σ-Algebra auf Ω. Die Partition $\mathcal{D}$, für die $G = \sigma(\mathcal{D})$ gilt, bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(G)$ und sagen dass $\mathcal{D}(G)$ die σ -Algebra G erzeugt.

1.12 Beispiel

Wenn $|\Omega| < \infty$ gilt, dass ist $\mathcal{D}(\mathcal{P}(\Omega)) = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$.

1.13 Definition: Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei G eine σ -Algebra auf Ω. Eine Abbildung $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt $\mathcal{G}$-messbar, falls ξ konstant auf den Mengen von $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ ist. (genauer: falls es für jedes $D \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall \omega \in D : \xi(\omega) = c$)

Beachte: Wenn $|\Omega| < \infty$ gilt und $\xi : \Omega \in \mathbb{R}$ eine Abbildung ist, dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{R}$, sodass $\xi(\Omega) := \{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{x_1, \cdots, x_m\}$

1.14 Lemma: Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra auf Ω. Seien $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{R}$ und $\xi : \Omega \to \{x_1, \cdots, x_m\}$. Dann sind äquivalent:

a) ξ ist $\mathcal{G}$-messbar

b) Für alle $A \subseteq \{x_1, \cdots, x_m\}$ gilt $\xi^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A\} \in \mathcal{G}$

Beweis: Übung.
Im Allgemeinen (also auch wenn $|\Omega| = \infty$ definiert man Messbarkeit ähnlich zu (ii) in Lemma 1.14.)

1.15 Definition: Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Für jedes $\lambda \in \Omega$ sei $\xi_\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann definieren wir

$$\sigma(\xi_\lambda; \lambda \in \Omega) := \cap \{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{G} \text{ ist } \sigma\text{-messbar und } \forall \lambda \in \Omega : \xi_\lambda \text{ ist } \mathcal{G}\text{-messbar } \}$$

In der Def 1.15 kann $\sigma(\xi_\lambda; \lambda \in \Omega)$ interpretiert werden als die kleinste σ-Algebra $\mathcal{G}$, sodass alle $\xi_\lambda, \lambda \in \Omega$ $\mathcal{G}$-messbar sind.

1.16 Beispiel

Wir betrachten einen Würfelwurf: Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\xi : \Omega \to \{0, 1\}$ und $\xi(\omega)$ ist 1, wenn ω und 0, wenn ω ungerade.
Dann ist $\mathcal{D} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ eine Partition von Ω und es gilt $\sigma(\xi) = \sigma(\mathcal{D}) = \{\emptyset, \omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$
Interpretation: Nach Beobachtung von $\xi(\omega)$ können wir für jedes Ereignis $A \in \sigma(\xi)$ sagen, ob es eingetreten ist oder nicht. Mit anderen Worten: Wir kennen zwar das eingetretene ω nicht, aber wir wissen, ob $\omega \in \emptyset$ (nie), $\omega \in \{1, 3, 5\}, \omega \in \{2, 4, 6\}$ und $\omega \in \Omega$ (immer). In diesen Sinne spiegelt $\sigma(\xi)$ die Information wider, die durch ξ erzeugt wird. Jede $\sigma(\xi)$-messbare Zufallsvariable $\hat{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}$ verwendet nur Information, die bereits in ξ enthalten ist. Man kann zeigen, dass $\hat{\xi} = g \circ \xi$ für eine geeignete Funktion $g : \{0, 1\} \to \mathbb{R}$.

1.17 Lemma: Es gelte $|\Omega| < \infty$. Sei $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra auf Ω und seien $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-messbar. Dann:

a) $\xi + \eta, \xi - \eta$ und $\xi \cdot \eta$ sind $\mathcal{G}$ -messbar.

b) Falls $\forall \omega \in \Omega : \eta(\omega) \neq 0$ so ist $\frac{\xi}{\eta}$ $\mathcal{G}$-messbar.

c) Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $f(\xi) = f \circ \xi : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-messbar.

Beweis:

a) Sei $D \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$. Es gibt $a, c \in \mathbb{R}$, sodass $\forall \omega \in D : \xi(\omega) = c$ und $\eta(\omega) = a$. Somit gilt $\omega \in D : (\xi + \eta)(\omega) = \xi(\omega) + \eta(\omega) = c + a$. Rest analog.

b) Analog

c) Sei $D \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$. Es gibt $c \in \mathbb{R}$, sodass $\forall \omega \in D : \xi(\omega) = c$. Also : $\forall \omega \in D : (f \circ \xi)(\omega) = f(\xi(\omega)) = f(c)$ $\square$

Wiederholung:

Wenn $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra auf Ω ist, dann heißt ein Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{G} \to [0, 1]$ Wahrscheinlichkeitsmaß (auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{G})$), falls $\mathbb{P}[\omega] = 1$ und aus $A_j \in \mathcal{G}, \forall j \in \mathbb{N}$ mit $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$ folgt, dass

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_j]$$

Weiter heißt dann $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

1.18 Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum mit $|\Omega| < \infty$. Zwei σ -Algebren $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ heißen <u>unabhängig</u>, falls $\forall A_1 \in \mathcal{G}_1$ und $A_2 \in \mathcal{G}_i$, $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_1] \cdot \mathbb{P}[A_2]$. Eine Zufallsvariable $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt <u>unabhängig</u> von einer σ-Algebra $\mathcal{G}$ wenn die σ-Algebra $\sigma(\xi)$ und $\mathcal{G}$ unabhängig sind. Zwei Zufallsvariable $\xi, \eta : \sigma \to \mathbb{R}$ heißen <u>unabhängig</u>, wenn die σ-Algebra $\sigma(\xi)$ und $\sigma(\eta)$ unabhängig sind.

1.19 Bemerkung

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ eine Wahrscheinlichkeitsraum mit $|\Omega| < \infty$ und $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra auf Ω. Wenn $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig von $\mathcal{G}$ ist, dann gilt $\forall A \in \mathcal{G}$ und $\forall x \in \xi(\Omega)$, dass $\mathcal{P}[\{\xi = x\} \cap A] = \mathbb{P}[\{\xi = x\}] \mathbb{P}[A]$.

§III.2 Bedingte Erwartung

In diesen Abschnitt setzen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ mit $|\Omega| < \infty$ und $\forall \omega \in \Omega : \mathbb{P}[\omega] > 0$ voraus.

Wiederholung:

Betrachte $m \in \mathbb{N}, x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{R}$ und $X : \Omega \to \{x_1, \cdots, x_m\}$. Dann ist der Erwartungswert von X gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}[\{\omega\}] = \sum_{j=1}^{m} x_j \mathbb{P}[X = x_j]$$

2.1 Beispiel

Wir betrachten einen Würfelwurf, also $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathbb{P}[\{\omega\}] = \frac{1}{6}, \omega \in \Omega$ mit
$X : \Omega \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, X(\omega) = \omega$, beschreiben wir die geworfene Augenzahl. Dann ist
$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega=1}^{6} \omega \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$.
Man kann $\mathbb{E}$ als die "besteSSchätzung von X ohne weitere Informationen interpretieren.

Wiederholung:

Wenn $D \in \Omega$ ist mit $\mathbb{P}[D] > 0$ ($\iff$ $D \neq \emptyset$ hier) und $A \subseteq \Omega$ dann ist:

$$\mathbb{P}[A|D] := \frac{\mathbb{P}[A \cap D]}{\mathbb{P}[D]}$$

die elementare bedingte Wahrscheinlichkeit. Die Abbildung $\mathbb{P}[\cdot|D] : \mathcal{P}(\omega) \to [0, 1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

2.2 Bsp

Fortsetzung von Bsp. 2.1. Für $\omega \in \{1, 3, 5\}$ gilt:

$$\mathbb{P}[\{\omega\}| \{1, 3, 5\}] = \frac{\mathbb{P}[\{\omega\} \cap \{1, 3, 5\}]}{\mathbb{P}[\{1, 3, 5\}]} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

2.3 Definition: Die IndikatorFunktion einer Menge $A \in \Omega$ ist definiert als

$$\not\Vdash_A : \Omega \to \mathbb{R}, \not\Vdash_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Für $A, D \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}[D] > 0$ gilt $\mathbb{E}[\nVdash_A] = \mathbb{P}[A]$ und

$$\frac{\mathbb{P}[A \cap D]}{\mathbb{P}[D]} = \frac{\mathbb{E}[\nVdash_A \nVdash_D]}{\mathbb{P}[D]}$$

2.4 Definition: Sei $X : \omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und sei $D \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}[D] > 0$. Dann heißt die reelle Zahl

$$\mathbb{E}[X|D] = \frac{\mathbb{E}[X \nVdash_D]}{\mathbb{P}[D]}$$

elementare bedingte Erwartung

2.5 Bemerkung

Seien $m \in \mathbb{N}, x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{R}$ und $X : \Omega \to \{x_1, \cdots, x_m\}$. Sei $D \in \Omega$ und $\mathbb{P}[D] > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|D] &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) \nVdash_D(\omega) \frac{\mathbb{P}[\{\omega\}]}{\mathbb{P}[D]} = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) \frac{\mathbb{P}[\{\omega\} \cap D]}{\mathbb{P}[D]} \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) \mathbb{P}[\{\omega\}|D] = \sum_{j=1}^{m} x_j \mathbb{P}[X = x_j|D]\end{aligned}$$

Erinnerung:

Zu jeder σ-Algebra $\mathcal{G}$ auf Ω gibt es eine (eindeutige) Partition mit endliche vielen Elementen, die $\mathcal{G}$ erzeugt (wegen $|\omega| < \infty$ und Proposition III.1.10)

2.7 Definition: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Sei $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra auf Ω und $\mathcal{D}(y) = \{D_1, \cdots, D_n\}$. Die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|Y]$ ist die Zufallsvariable $\mathbb{E}[X|Y] : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y](\omega) &:= \begin{cases} \mathbb{E}[X|D_1], & \text{falls } \omega \in D_1 \\ \vdots & \\ \mathbb{E}[X|X_n], & \text{falls } \omega \in D_n \end{cases} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[E|D_i] \nVdash_{D_i}(\omega)\end{aligned}$$

Beachte: Die elementare bedingte Erwartung ist eine reelle Zahl, nährend die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ (vgl. Def 2.7) eine $\mathcal{G}$-messbare Abbildung

2.8 Bsp

Fortsetzung von Bsp 1.16, 2.1, 2.6 mit $\mathcal{G} = \sigma(\xi)$ also $\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{\{1,3,4\}, \{2,4,6\}\}$ ist

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \begin{cases} \mathbb{E}[X|\{1,3,5\}] = 3, & \text{falls } \omega \in \{1,3,5\} \\ \mathbb{E}[X|\{2,4,6\}] = 4, & \text{falls } \omega \in \{2,4,6\} \end{cases}$$

Die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ kann als die "besteSSchätzung von X (der Augenzahl) unter der Information $\mathcal{G}$ (gerade oder ungerade) interpretiert werden.
Einige wichtige Eigenschaften der bedingten Erwartung:

2.9 Proposition

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ σ-Algebren auf Ω. Dann gelten:

a) Linearität: $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$

b) Monotonie: $X \leq Y \implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$

c) X $\mathcal{G}$-messbar $\implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$

d) X unabhängig von $\mathcal{G} \implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,\mathbb{E}[X]$

e) Turmeigenschaft: $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \implies \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]\,|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ und $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]\,|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$

f) Y $\mathcal{G}$-messbar $\implies \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$

g) Jensen-Ungleichung: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex $\implies \mathbb{E}[f(x)|\mathcal{G}] \geq f(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$

Beweis:

a) Übungsaufgabe

b) Es gelte $\forall \omega \in \Omega$, dass $X(\omega) \leq Y(\omega)$. Sei $\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{D_1, \cdots, D_n\}$. Es gilt $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, dass

$$\mathbb{E}[X|D_i] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}[\{\omega\}\,|D_i] \leq \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{P}[\{\omega\}\,|D_i] = \mathbb{E}[Y|D_i]$$

Es gilt $\forall \omega \in \Omega$ dass

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|D_i]\nVdash_{D_i}(\omega) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y|D_i]\nVdash_{D_i}(\omega) = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}](\omega)$$

2.10 Bemerkung

Als spezialfälle in Proposition 2.9 erhält man $|\mathbb{E}[X|Y]| \leq \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ (aus 2. oder 7), $\mathbb{E}[X|\mathcal{P}(\omega)]$ (aus 3.) und $\mathbb{E}[X|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}[X]$ (aus 4) sowie $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$ (aus 4 und 5)

2.11 Lemma: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra auf Ω. Dann gelten:

a) $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ ist $\mathcal{G}$-messbar und

b) $\forall A \in \mathcal{G} : \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,\mathbb{1}_A]$

Beweis:

a) klar.

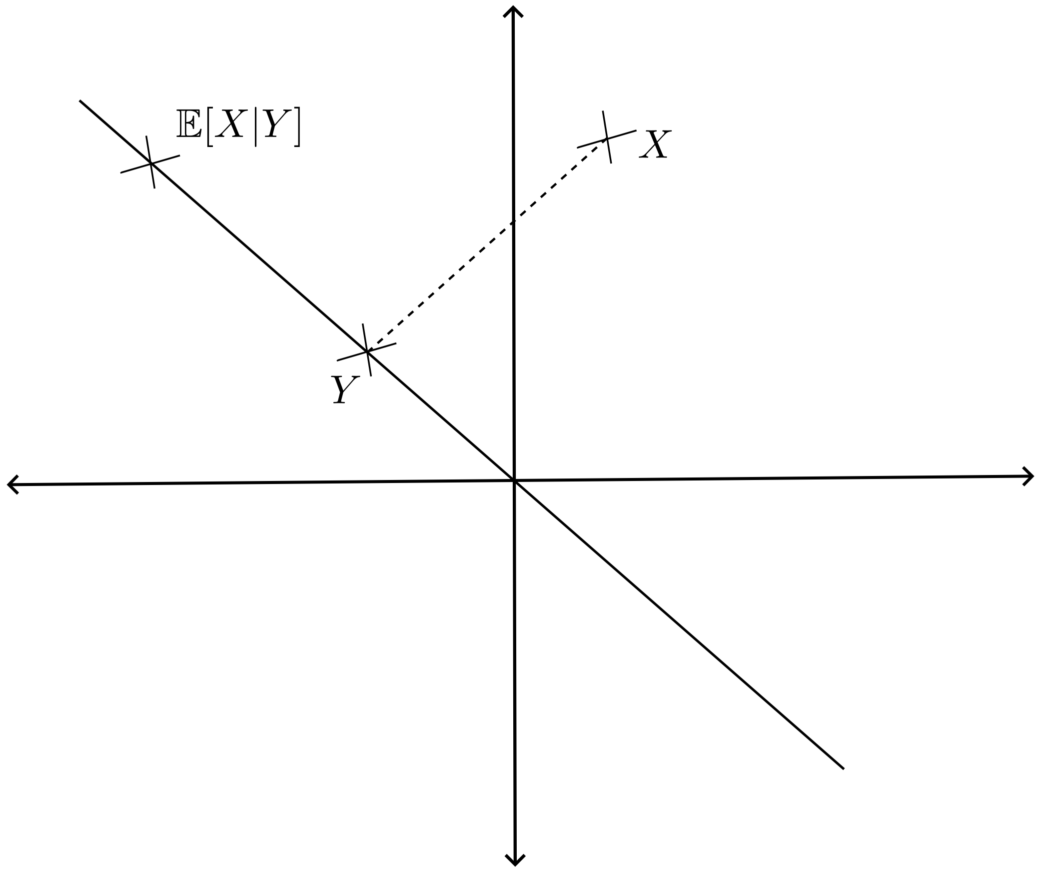
b) Sei $A \in \mathcal{G}$. Dann gilt $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$

Im Allgemeinen (also auch wenn $|\Omega| = \infty$) definiert man die bedingte Erwartung über die Eigenschaft (i) und (ii) aus Lemma 2.11
Außerdem kann man die bedingte Erwartung als eine L^2-Projektion auffassen (vgl. auch "besteSSchätzung von X unter der Information $\mathcal{G}$)

2.12 Proposition

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra auf Ω und Y $\mathcal{G}$-messbar. Dann gilt:

$$\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(X - Y)^2\right]$$



<u>Beweis:</u> Für alle $\mathcal{G}$-messbaren $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}\left[Z\left(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]-X\right)\right] \overset{2.9\,(6)}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[ZX|\mathcal{G}\right]-ZX\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[ZX|\mathcal{G}\right]\right]-\mathbb{E}\left[ZX\right] \overset{\text{Bem. } 2.10}{=} \mathbb{E}\left[ZX\right]-\mathbb{E}\left[ZX\right] = 0$$

Verwende dies man mit

$$\begin{aligned} Z &= \mathbb{E}\left[Y-X|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{G}\right]-\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] = Y-\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(Y-X)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(Y-\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]+\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]-X\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(Z+\left(\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]-X\right)\right)^2\right] \cdots\cdots \end{aligned}$$

§III.3 Prozesse

Sie $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $|\Omega| < \infty$ und $N \in \mathbb{N}$.

3.1 Definition: Eine Abbildung $X : \{0, \cdots, N\} \times \Omega \to \mathbb{R}$ heißt stochastischer Prozess. Schreibweise: $X = (X_n)_{n \in (0, \cdots, N)}$

Wenn $X = (X_n)_{n \in (0, \cdots, N)}$ stochastischer Prozess:

- Für festes $n \in (0, \cdots, N)$ ist $X_n : \Omega \to \mathbb{R}, X_n(\omega) = X(n, \omega)$, eine Zufallsvariable.
- Für festes $\omega \in \Omega$ ist $X(\omega) : \{0, \cdots, N\} \to \mathbb{R}, X(\omega)(n) = X(n, \omega)$ ein "Pfand"

3.2 Definition: Eine filtration ist eine aufsteigende Folge $(\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, \cdots, N\}}$ von σ-Algebra d.h

$$\begin{aligned} &\forall n \in \{0, \cdots, N\} : \mathcal{F}_n \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra und} \\ &\forall n \in \{0, \cdots, N\} : \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

Weiter heißt dann $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \left(\mathcal{F}_{n \in (0, \cdots, N)}\right), \mathbb{P}\right)$ eine filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

3.3 Definition: Sei $x = (X_n)_{n \in \{0, \cdots, N\}}$ ein stochastischer Prozess: Die von X erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_n^{\times})_{n \in \{0, \cdots, N\}}$ ist gegeben durch :

$$\mathcal{F}_n^{\times} := \sigma\left(X_0, X_1, \cdots, X_n\right) := \sigma\left(X_k; k \in \{0, \cdots, n\}\right), n \in \{0, \cdots, N\}$$

3.4 Definition: Sei $(\mathcal{F}_n^{\times})_{n \in \{0, \cdots, N\}}$ eine Filtration und $x = (X_n)_{n \in \{0, \cdots, N\}}$ ein stoch. Prozess. Dann heißt X adaptiert (an $(\mathcal{F}_n^{\times})_{n \in \{0, \cdots, N\}}$) falls gilt:

$$\forall n \in \{0, \cdots, N\} : X_n \text{ ist } \mathcal{F}_n \text{ -messbar}$$

X heißt vorhersagbar (bzgl. $(\mathcal{F}_n^{\times})_{n \in \{0, \cdots, N\}}$), falls X_0 konstant ist und gilt:

$$\forall n \in \{1, \cdots, N\} : X_n \text{ ist } \mathcal{F}_{n-1} \text{ -messbar}$$

§III.4 Martingale

In diesem Abschnitt setzen wir einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \left(\mathcal{F}_{n\in(0,\cdots,N)}\right), \mathbb{P}\right)$ mit $|\Omega| < \infty$ und $\forall \omega \in \Omega : \mathbb{P}[\{\omega\}] > 0$ voraus.

4.1 Definition: Ein stochastischer Prozess $X = (X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ heißt Martingal (bzw. Submartingal bzw. Supermartingal), falls gelten:

- X ist adaptiert (an $(\mathcal{F}_n)^{n\in\{0,\cdots,N\}}$ und
- $\forall n \in \{1, \cdots, N\} : \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$ (bzw. $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1}$ bzw. $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1}$

4.2 Bemerkung

$(X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ist genau dann ein Supermartingal, wenn $(-X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$l Submartingal ist.
$X = (X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ist genau dann ein Martingal, wenn X sowohl ein Sub- als auch ein Supermartingal ist.

4.3 Beispiel

Seien $\xi_0, \cdots, \xi_N$ unabhängige Zufallsvariablen,

$$X_n := \sum_{j=0}^{n} \xi_j, \quad n \in \{0, \cdots, N\}$$

und $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^{\times} n \in \{0, \cdots, N\}$. Dann ist $X = (X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ adaptiert und es gilt $\forall n \in \{1, \cdots, N\}$, dass $X_n = X_{n-1} + \xi_n$ und damit (da ξ_n und $\mathcal{F}_{n-1}$ unabhängige)

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} + \mathbb{E}[\xi_n].$$

Also:

$$\begin{aligned} X \text{ Martingal} &\iff \forall n \in \{1, \cdots, N\} : \mathbb{E}[\xi_n] = 0 \\ X \text{ Submartingal} &\iff \forall n \in \{1, \cdots, N\} : \mathbb{E}[\xi_n] \geq 0 \\ X \text{ Supermartingal} &\iff \forall n \in \{1, \cdots, N\} : \mathbb{E}[\xi_n] \leq 0 \end{aligned}$$

4.4 Proposition

Sei $X = (X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein adaptierter stochastischer Prozess. X ist genau dann ein Martingal (bzw. Sub-, Supermartingal), wenn für alle $n, m \in \{0, \cdots, N\}$ mit $m < n$ gilt, dass $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$ (bzw. $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \geq X_m$ bzw. $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \leq X_m$)

Beweis Betrachte Submartingal, sonst analog.
$\Longleftarrow$: Klar (wähle $m = n-1$)
$\Longrightarrow$: Sei $n \in \{1, \cdots, N\}$. Wir zeigen per Induktion, dass $\forall m \in \{0, \cdots, n-1\} : \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \geq X_m$. Für $m = n-1$ klar. Sei $m+1 \in \{0, \cdots, n-2\}$. Wegen $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{m+1}] \geq X_{m+1}$ (IV) und (ii) in Def 4.1 gilt :

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{m+1}]|\mathcal{F}_m] \geq \mathbb{E}[X_{m+1}|\mathcal{F}_m] \geq X_m \quad \square$$

4.5 Bemerkung

Bei endlichen Zeithorizont $N < \infty$ ist ein Martingal $(X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ schon durch die Zufallsvariable X_N eindeutig bestimmt, da $\forall n \in \{0, \cdots, N-1\} : X_n = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n]$.

4.6 Beispiel

Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $X_n := \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n], n \in \{0, \cdots, N\}$. Dann ist $\{X_n\}_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein Martingal. (folgt aus der Turmeigenschaft.)

4.7 Lemma: Sei $X = (X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein Martingal (bzw. Sub- Supermartingal). Dann ist $\{0, \cdots, N\} \ni n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$ konstant (bzw. wachsend bzw. fallend).

Beweis Sei $X = (X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein Submartingal (sonst analog) und $n \in \{1, \cdots, N\}$ Dann gilt :

$$\mathbb{E}[X_{n-1}] \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[X_n]$$

$\square$

4.8 Bemerkung

Seien $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ σ-Algebra. Aus Lemma 1.17 erhalten wir, dass Linearkombinationen $\mathcal{G}$-messbarer Abbildungen wieder $\mathcal{G}$-messbar sind. Wenn Y eine $\mathcal{H}$-messbare Abbildung ist, dann zeigt Lemma 1.14, dass Y auch $\mathcal{G}$ -messbar ist.

4.9 Lemma: Seien $X = (X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ und $Y = \{Y_n\}_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ Martingal.

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $Z = aX + bY = ((aX_n + bY_n))_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein Martingal.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann ist $f(X) = (f(X_n))_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein Submartingal.

Beweis:

a) Folgt aus Bem. 4.8 und der Linearität der bedingter Erwartung.

b) Folgt aus Lemma 1.17 und der Jensen-Ungleichung :
$\forall n \in \{1, \cdots, N\} : \mathbb{E}[f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] \geq f(\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]) = f(X_{n-1})$

4.10 Lemma: Sei $(X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein vorhersagbares Martingal. Dann gilt $\forall n \in \{0, \cdots, N\} : X_n = X_0$.

Beweis: Übung.

4.11 Satz (Doob-Zerlegung: Sei $X = (X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein adaptierter Prozess. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$X = X_0 + M + A$$

derart, dass $M = (M_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein Martingal mit $M_0 = 0$ und $A = (A_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein vorhersagbarer Prozess mit $A_0 = 0$ ist. Die Prozesse sind gegeben durch:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left[X_k|\mathcal{F}_{k-1}\right] - X_{k-1}\right), \quad n \in \{1,\cdots,N\}\; A_0 = 0$$

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k \mathbb{E}\left[X_k|\mathcal{F}_{k-1}\right]\right), \quad n \in \{1,\cdots,N\}\; M_0 = 0$$

Beweis :

a) Sei $n \in \{1,\cdots,N\}$. Die $\mathcal{F}_{n-1}$-Messbarkeit von A_n folgt aus Bem. 4.8 und der Tatsache, dass für alle $k \in \{1,\cdots,n\}$ die Abbildungen $\mathbb{E}\left[X_k|\mathcal{F}_{k-1}\right]$ und $\mathcal{F}_{k-1}$-messbar sind sowie $\mathcal{F}_{k-1} \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$ gilt. Analog ist M_n $\mathcal{M}_n$-messbar. Klar: $M_0 = 0$ ist $\mathcal{F}_0$-messbar und $A_0 = 0$ ist konstant. Zudem gilt:

$$\mathbb{E}\left[M_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] - M_{n-1} = \mathbb{E}\left[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}\right] = \mathbb{E}\left[X_n - \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_{n-1}\right]|\mathcal{F}_{n-1}\right] = \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] - \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] = 0$$

Außerdem gilt $X_0 = X_0 + M_0 + A_0$ und

$$X_0 + M_n + A_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - X_{k-1}\right) = X_0 + X_n - X_0 = X_n.$$

b) Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $X = X_0 + \widetilde{M} + \tilde{A}$ eine weiter Zerlegung mit einem Martingal $\widetilde{M} = \left(\widetilde{M}_n\right)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ mit $\widetilde{M}_0 = 0$ und einem vorhersagbaren Prozess $\tilde{A} = \left(\tilde{A}_n\right)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ mit $\tilde{A}_0 = 0$. Dann ist

$$M - \widetilde{M} = X - X_0 A - \left(X - X_0 - \tilde{A}\right) = \tilde{A} - A$$

ein vorhersagbares Martingal (Bem. 4.8 und Lemma 4.9) mit $M_0 - \widetilde{M}_0 = 0$. Es folgt aus Lemma 4.10 dass $M = \widetilde{M}$. Hieraus folgt weiter, dass $\tilde{A} = A$ □

4.12 Bemerkung

Wenn $X = (X_n)_{n\in\{0,\cdots,N\}}$ ein Submartingal (bzw. Supermartingal) ist, dann ist der vorhersagbare Prozess A aus der Doob-Zerlegung von X wachsend (bzw. fallend).