Math Notes

ßßßßßß

October 18, 2024

Contents

Effektivzinsberechnung

Beispiel 4.1

Eine Kredit mit einer Kreditsumme vom $K_0 = 11000\$$ und einer Auszahlung von $\hat{K_0} = 10368\$$ soll bei exponential Verzinsung mit (nominellen) Zinssatz $r = 20\% p.a$ durch zwei gleichhohe Annuitäten der Höhe A zurückgezahlt werden
Die Annuitäten berechnen sich gemäß des Äquivalenzprinzips aus (s.a (2))

$$K_0(1,2)^2 = 10000\$(1,2)^2 = A1,2 + A \implies A = 7200\$$$

Die Äquivalenzprinzip bezieht sich hierbei auf die Kreditsumme K_0 und die Gegenleistung bei nominelle Zinssatz. Um die tatsächliche Leistung $\hat{K_0}$ und die Gegenleistung äquivalent zu machen, bräuchte es einen angepassten Zinssatz:

$$\hat{K_0}\left(1 + r_{eff}\right)^2 = A\left(1 + r_{eff}\right) + A \implies 10368(1+r_{eff})^2 = 7200(1+r_{eff}+A) \implies r_{eff} = 25\%$$

Unter dem <u>Effektivzinssatz</u> einer Zahlungsreihe versteht man der Zinssatz, bei dessen Anwendung Leistungen und Gegenleistung finanzmathematische äquivalent sind. Der Effektivzinssatz wird als Vergleichskriterium für unterschiedliche Anlage- oder Kreditgeschäfte genutzt.

Bei einem Annuitätendarlehen mit Kreditsumme $K_0 > 0$, Disagio (in Prozent) $d \in (0,1)$, nominellem Zinssatz $r > 0$ und Laufzeit $N \in \mathbb{N}$ hat man (s.a (2)) die Annuitäten

$$A = K_0 r \frac{(1+r)^N}{(1+r)^N - 1} (3)$$

und $(1-d)K_0(1+r_{eff})^N = A\sum_{i=0}^{N-1}(1+r_{eff})^i = A\frac{(1+r)^N - 1}{r_{eff}}(4)$

es ist eine Gleichung N-te Grades (in der Unbekannten r_{eff}) und daher i.A nicht explizit lösbar.

Lemma 4.2

Es existiert eine eindeutigen Lösung $r_{eff} > 0$ von (4). Es gilt $r_{eff} \in \left(r, \frac{A}{(1-d)K_0}\right)$

Beweis

Unter Verwendung von (3) ist (4) äquivalent zu

$$r_{eff} = \frac{A}{(1-d)K_0} \frac{(1+r_{eff})^N - 1}{(1+r_{eff})^N}$$

$$= \frac{r}{1-d} \frac{(1+r)^N}{(1+r)^N - 1} \frac{(1+r_{eff})^N - 1}{(1+r_{eff})^N}$$

("Fixpunktgleichung")
Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{r}{1-d} \frac{(1+r)^N}{(1+r)^N - 1} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$$

Beachte, dass

$$\frac{A}{(1-d)K_0} = \frac{r}{1-d} \frac{(1+r)^N}{(1+r)^N - 1} > r$$

Es gilt:

1. f ist strikt wachsend und stetig,
2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{A}{(1-d)K_0}$,
3. aus (1) und (2) folgt $f\left(\frac{A}{(1-d)K_0}\right) < \frac{A}{(1-d)K_0}$,
4. $f(r) = \frac{r}{1-d} > r$,
5. f ist strikt konkav

Sei $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}, F(x) = f(x) - x$. Aus (4) folgt $F(r) > 0$ und aus (3) folgt $F\left(\frac{A}{(1-d)K_0}\right) < 0$. Daher zeigen (1) und der ZWS, dass es eine $x^* \in \left(r, \frac{1}{(1-d)K_0}\right)$ gibt, s.d $F(x*) = 0$ Damit hat f einen Fixpunkt (d.h es ex. eine Lösung von (4)). Wegen (5) ist F strikt konkav und somit der Fixpunkt eindeutig.
Zur numerischen Berechnung von r_{eff} kann man Verfahren zur Nullstellenbrechung anwenden (z.B Bisektionsverfahren, Sekantverfahren, Newton-Verfahren, Regula falsi ...)

Regula falsi

Ziel: Finde Nullstell von $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^0$
Start : $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $F(a_0)F(b_0) < 0$
Ansatz: Lege Gerade durch $a_0, F(a_0)$ und $(b_0, F(b_0)$ und bestimme deren Nussstelle c_1 (wie bei Sekantenverfahren). Falls $F(a_0)$ und $F(c_1)$ verschiedene Vorzeichnen haben, nimm a_0 und c_1 als neue Intervallgrenze, sonst b_0 und c_1 (ähnlich zu Bisektionsverfahren).
Iteration: Setze

$$c_k := \frac{a_{k-1}F(b_{k-1}) - b_{k-1}F(a_{k-1L})}{F(b_{k-1}) - F(a_{k-1})}$$

Falls : $F(c_k)$ $\approx=$ 0: Ende.
Falls : $F(a_{k-1}) F(c_k) < 0$: Setze $a_k = a_{k-1}$ und $b_k = c_k$
Sonst : Setze $a_k = c_k$ und $b_k = b_{k-1}$

I.5 Festverzinsliche Wertpapiere

Ein Wertpapiere (genaür: eine Wertpapierurkunde) gibt der Investorin (Besitzerin) ein Forderungsrecht auf finanzielle Gegenleistung (z.B in Form von klar definierten Zahlungen zu definierten Zeitpunkten) des Emittenten (Verkäufers)
Wir betrachten hier nur festverzinsliche Wertpapiere. Dies sind Wertpapiere, bei denen die Höhe der regelmäßigen Gegenleistung fest vereinbart wird. Der Nennwert $N > 0$ ist der mit der Wertpapierurkunde verbriefte Darlehnsbetrag, der als Bezugsgröße für Preis, Verzinsung und Tilgung dient.

Charakteristische Leistungen und Gegenleistung von der Emission (Erstausgabe) bis zur Rücknahme:

- Leistung: Zum Emissionszeitpunkt $i = 0$ zahlt die Investorin C_0N Mann nennt C_0 den Emissionskurs
- Gegenleistung:
  - Während der Laufzeit zahlt der Emittent (z.B Bank, Statt Unternehmen, ...) Zinsen (in diesem Kontext auch Kuponzahlungen genannt) der Höhe pN pro Jahre. Dabei ist p der (jähliche) Zinssatz.
  - Am Ende des letzten Laufzeitjahres zahlt der Emittent eine Tilgung der Höhe C_nN. Man nennt C_n den Rücknahmekurs

Wenn die Rücknahme zum Nennwert erfolgt ($C_n = 100\%$) sagt man auch "zu pari" Auch $C_n > 100\%$ is üblich.
Auch $p = 0$ ist möglich. In diesem Fall handelt es sich um eine Nullkuponanleihe.

Beispiel 5.1

Bei Nennwert $N = 200$, Emissionskurs $C_0 = 96\%$ Laufzeit $n = 7$, Zinssatz $p = 8\% p.a.$ und den Rücknahmekurs $C_n = 103\%$ zahlt die Investor zu Beginn 192 erhält am Ende jedes i-ten Jahres 16 ($i \in \{1, \cdots, 6\}$ und erhält am Ende des letzten Jahres $16 + 206 = 222$. Die Rendite (oder der Effektivzinssatz) einer Anliehe ist der der Jahreszinssatz, für den die Leistung der Investor (also der Kaufpreis) finanzmathematische äquivalent zu den gegenleistungen des Emittenten ist.
Die rendite r_{eff} bei Laufzeit n, Emissionskurs C_0, Rücknahmekurs C_n und Zinssatz p bestimmt man anhand der Gleichung:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + r_{eff})^n} + \frac{P}{(1 + r_{eff})} \frac{(1 + r_{eff})^n - 1}{r_{eff}}$$