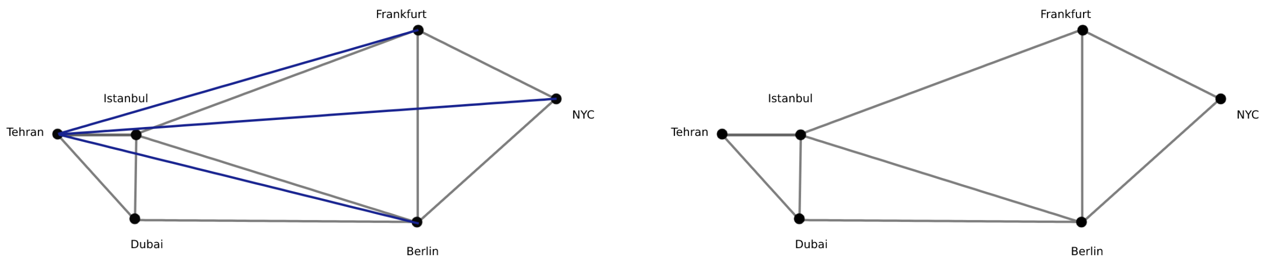
**دانشکده علوم ریاضی**
**دانشگاه صنعتی شریف**

# Airline Dynamic Pricing

**طیب پورابراهیم**

## مقدمه

یک شبکه از پروازهای مختلف بین چند شهر داریم، می‌خواهیم یک سیستم قیمت گذاری پویا طراحی کنیم که بدون در نظر گرفتن توزیع قبلی‌ای [۱] برای تابع‌های تقاضای این مسیرها؛ ظرفیت جابه‌جایی این شبکه را بفروشیم، به‌طوری که اختلاف درآمد انتظاری نسبت به بهترین قیمت ثابت برای آن مسیر اختلاف کمی داشته باشد. با توجه به محدود بودن ظرفیت هر مسیر، به دنبال بیشینه کردن سود انتظاری فروشنده توسط **بیشینه کردن مازاد استخراجی بازار** هستیم. افراد را بر مبنای مبدأ و مقصدشان به بخش‌های مختلفی تقسیم می‌کنیم و قیمت هر مسیر را بر مبنای کشش قیمتی هر بخش تخمین میزنیم. باتوجه به اینکه مسافران فقط در مبدأ و مقصد مشخص می‌توانند از پرواز استفاده کنند امکان اینکه خودشان را در قسم [۲] دیگری جا بزنند، وجود ندارد؛ و این سیستم با تبعیض قیمتی [۳] به واقعیت نزدیک است. [۴] لازم به ذکر است که این تبعیض قیمتی بر مبنای اقتصاد کلاسیک است و فرض معقولیت [۵] افراد همچنان بر قرار است. همچنین تبعیض قیمتی بر مبنای رفاه اجتماعی کارا است [Var85] و نسبت به «قیمت یکسان برای همه» انتخاب بهتری است.




(آ) شبکه پرواز مستقیم

(ب) شبکه پرواز شامل بسته‌ها

شکل ۱: شبکه پرواز فرضی

[1] Prior-free
[2] Type
[3] Price Discrimination
[۴] البته قیمت گذاری تبعیضی در ایران متداول نیست.
[5] Rationality

# ۱ فرضیات

یک سیستم قیمت گذاری پویا با عرضه محدود داریم، در این مدلسازی فرض میکنیم که قیمت کران‌دار است و این کران برای فروشنده مشخص است، و با استفاده از نرمال سازی $p_i \in [0, 1]$. اگر ظرفیت هر پرواز مستقیم را بدانیم و آن را با $k_i$ نشان بدهیم، برای مسیرهایی که در بسته‌های [6] پروازی وجود دارند، می‌توانیم ظرفیت‌های مصنوعی‌ای تعریف کنیم. همچنین فرض میکنیم که برای هر مسیر تعداد مشتری‌های بالقوه $n_j$ را میدانیم. سازوکار فروش به این صورت است که هر خریدار فقط یکبار مراجعه می‌کند، قیمتی برای مسیر درخواستی او پیشنهاد می‌کنیم فقط و تنها اگر این عدد از ارزش سفر برای آن فرد دارد ($v_i$) بیشتر بود، قیمت را قبول می‌کند [7]. اگرچه این فرض در مکانیزم‌های فروش آنلاین فرض کاملاً درستی نیست ولی در ادبیات این حوزه متداول است؛ (مثال: [BBDS11]، [BZ09] و [KL03]). همچنین فرض کرده‌ایم که مطلوبیت [8] برای مشتری فقط بر مبنای قیمت است و از مدل‌سازی زمان سفر برای بسته‌های پرواز صرف نظر شده است، یعنی مشتری برای دو بسته متفاوت با مبدأ و مقصد یکسان، بسته با قیمت کمتر را انتخاب می‌کند.

# ۲ مقدمات و تعاریف

در هر دور، الگوریتم از میان مجموعه ثابتی از «بازوها» [9] (قیمت‌ها) مقداری را انتخاب می‌کند و نتیجه [10] را مشاهده می‌کند، هدف این است که کل سود را در یک افق زمانی معین به حداکثر برساند. در محیط راهزن چند دست تصادفی مسئله را بررسی می‌کنیم، البته در محیط‌های دشمنانه تعریف‌های عمومی پشیمانی کارا نیستند [ISSS19]. اگر تابع توزیع تجمعی درآمد را با $F(p)$ نشان دهیم، می‌توان مسئله را برای بیشینه کردن مقدار مورد انتظاری در هر دور مدل کرد $R(p) \triangleq p(1 - F(p))$. البته این روش به صورت کلی برای فروش تعداد محدودی کالا رویکرد غلطی است، به این دلیل که ممکن است موجودی‌ای که بتوان در قیمت بالاتری فروخت را در قیمت‌های کمتر بفروشیم و موجودی کالا تمام شود. باتوجه به اینکه الگوریتم UCB1 اکتشاف و بهره برداری [11] را از هم جدا نمی‌کند، شهودی داریم که بتوان در همچین مسائلی از آن بهره برد، و در این روش از مدل تغییر یافته‌ای از الگوریتم UCB1 استفاده می‌کنیم. در این روش شاخص‌هایی [12] بر مبنای تخمین درآمد نهایی [و نه بر مبنای نتیجه در یک دور] تعریف می‌شوند. در هر دور قیمت مربوط به شاخص حداکثری را پیشنهاد می‌دهیم، و آنگاه مشتری حق قبول کردن قیمت و یا رد آن را دارد.

**قضیه ۱.** [*BDKS15*] برای فروش k کالا و n مشتری بالقوه، یک استراتژی قیمت گذاری بدون اطلاعات قبلی [13] وجود دارد که پشیمانی‌ای $O\left((k \log n)^{2/3}\right)$ نسبت به قیمت گذاری ثابت می‌دهد.

**تعریف ۲.** نرخ فروش در قیمت $p$ را با $S(p) = 1 - F(p)$ نشان می‌دهیم، که در واقع احتمال فروش در این قیمت است. تابع درآمد که مقدار انتظاری فروش در یک مرحله را در قیمت $p$ نشان می‌دهد را به شکل $R(p) = pS(p)$ تعریف می‌کنیم. همچنین استراتژی قیمت گذاری $\mathcal{A}_k^n(p)$، برای $k$ مشتری و $n$ کالا، قیمت ثابت $p$ را پیشنهاد می‌دهد تا تمام کالا به فروش برسد. درآمد انتظاری به دست آمده از مکانیزم $\mathcal{A}$ را با $\text{Rev}(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم. **پشیمانی** را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Regret}(\mathcal{A}) \triangleq \max_p \text{Rev}\left[\mathcal{A}_k^n(p)\right] - \text{Rev}(\mathcal{A})$$

**ادعا ۳.** [*BDKS15*] برای هر مکانیزم قیمت گذاری ثابت $\mathcal{A}$ در قیمت $p$. اگر داشته باشیم $v(p) = p\min(k, nS(p)))$ آنگاه:

$$v(p) - O(p\sqrt{k \log k}) \leq \text{Rev}(\mathcal{A}) \leq v(p)$$

اثبات. اگر بهترین قیمت ثابت $p^* = \text{argmax}_p\, \nu(p)$ باشد، $X_t$ تابع اندیکاتور فروش به مشتری t ام باشد. و $X = \sum_{t=1}^n X_t$ فرض کنیم $\mu = \mathbb{E}[X]$. با استفاده از کران چرنف برای احتمال حداقل $1 - \frac{1}{k}$ داریم:

$$P\left[X - \mu \leq -O(\sqrt{\mu \log k})\right] \leq \frac{1}{k}$$

تعداد فروش برابر است با:

$$min(k, X) \geq \min(k, \mu - O(\sqrt{\mu \log k})) \geq \min(k, \mu) - O(\sqrt{k \log k}) \tag{1}$$

□

[6] Bundle
[7] Posted price mechanism
[8] Utility
[9] arms
[10] payoff
[11] Explore and exploitation
[12] index
[13] detail-free

## ۳ قیمت گذاری پویای تک مسیره

**تعریف ۴.** [$BDKS15$] استراتژی قیمت گذاری $CappedUCB$

در این استراتژی با انتخاب مجموعه قیمت‌های گسسته شده $\mathcal{P}$ شروع می‌شود، و برای هر $p \in \mathcal{P}$ یک شاخص تعیین می‌کنیم. با توجه به ۳ درآمد انتظاری $\mathcal{A}_k^n(p)$ را با استفاده از $v(p) \triangleq p.min(k, nS(p)) = min(p.k, nR(p))$ تخمین می‌زنیم. در هر دور برای هر $p \in \mathcal{P}$ شاخص $I_t(p)$ به شکلی که یک $UCB$ بر روی $v(p)$ است، محاسبه می‌کنیم:

$$I_t(p) \triangleq p \cdot \min\left(k, nS_t^{\mathrm{UB}}(p)\right)$$

به صورتی که $S_t^{\mathrm{UB}}$ یک UCB روی نرخ فروش $S(p)$ باشد. به این صورت تعریف می‌کنیم که:

$$S_t^{UB}(p) = \hat{S}_t(p) + r_t(p)$$

جایی که $\hat{S}_t(p)$ نسبت «تعداد آیتم فروخته شده در t دور قبلی» به «تعداد انتخاب شدن قیمت $p$» در این دورها است، یعنی:

$$\hat{S}_t(p) = \min\{\frac{K_t(p)}{N_t(p)}, ۱\}$$

شعاع اطمینان یا $r_t(p)$ را به شکلی تعریف می‌کنیم که $\left|S(p) - \hat{S}_t(p)\right| \leq r_t(p) \quad (\forall p \in \mathcal{P}, t \leq n)$ با احتمال حداقل $۱ - n^{-۲}$ بر قرار باشد. برای کران بهتر در نرخ‌های فروش کم از شعاع اطمینان استفاده شده در [$KSU08$] استفاده می‌کنیم، به صورتی که:

$$r_t(p) \triangleq \frac{c \log n}{N_t(p) + ۱} + \sqrt{\frac{c \log n . \hat{S}_t(p)}{N_t(p) + ۱}}$$

گسسته سازی قیمت‌ها را بر مبنای $\mathcal{P} \leftarrow \left\{\delta(۱+\delta)^i \in [۰, ۱] : i \in \mathbb{N}\right\}$ انجام می‌دهیم، جایی که $\delta \in (۰, ۱)$ یک پارامتر باشد که در ابتدا تعیین می‌کنیم.

الگوریتم به شکل زیر خواهد بود:

**الگوریتم ۱** CappedUCB1

**ورودی:** $\delta \in (۰, ۱)$
قیمت‌های فعال $\triangleleft$ $\mathcal{P} \leftarrow \left\{\delta(۱+\delta)^i \in [۰, ۱] : i \in \mathbb{N}\right\}$
تا وقتی یک آیتم برای فروش باشد:
یک قیمت را انتخاب کن به شکلی که $p \in \mathrm{argmax}_{p \in \mathcal{P}} I_t(p)$
برای خریدان باقی مانده، قیمت را بی‌نهایت تعیین کن. (فروش را خاتمه بده)

**قضیه ۵.** [$BDKS15$] الگوریتم $CappedUCB1$ با پارامتر $\delta = k^{\frac{-۱}{۳}}(\log n^{\frac{۲}{۳}})$ پشیمانی $O(k \log n)^{\frac{۲}{۳}}$ می‌دهد.

اثبات. در اثبات الگوریتم فرض می‌شود که الگوریتم با تمام شدن تمام کالا همچنان به فروش ادامه می‌دهد ولی قیمت را بی‌نهایت تعیین می‌کند. $X_t$ تابع اندیکاتور برای فروش به مشتری i ام است. میدانیم که $X_t \sim \mathrm{Bin}\left(S\left(p_t\right)\right)$. اگر تعریف کنیم: $X = \sum_{t=۱}^n X_t$ و $S \triangleq E[x] = \sum_{t=۱}^n S_t$ آنگاه:

$$N = \max\left\{N \leq n : \sum_{t=۱}^{N} X_t \leq k\right\} \text{ جایی که } \quad \widehat{\mathrm{Rev}} = \sum_{t=۱}^{N} p_t X_t \qquad (۲)$$

در ادامه آنالیز را به شکل احتمالاتی ادامه می‌دهیم. ادعا می‌کنیم لم پایین صحیح است، و از اثبات آن‌ها صرف نظر می‌کنیم. [از کران استاندارد و کران‌های غیر استاندارد چرنف حاصل شده است.]

**لم ۶.** با احتمال حداقل $a - n^{۲}$ برای هر مرحله $t \in [۱, ۲, ۳, ..., T]$ ، $p \in \mathcal{P}$ صحیح است.

$$\begin{aligned} \left|S(p) - \hat{S}_t(p)\right| &\leq r_t(p) \leq ۳\left(\frac{\alpha}{N_t(p)+۱} + \sqrt{\frac{\alpha S_t(p)}{N_t(p)+۱}}\right) \\ |X - S| &< O(\sqrt{S\log n} + \log n) \\ \left|\sum_{t=۱}^{n} p_t\left(X_t - S\left(p_t\right)\right)\right| &< O(\sqrt{S\log n} + \log n) \end{aligned} \tag{۳}$$

**آنالیز تک دور بازی** اگر $p_t$ قیمت انتخاب شده در دور t باشد و $p^*_{\text{act}} \in \operatorname{argmax}_{p\in\mathcal{P}} v(p)$ باشد، همچنین تعریف می‌کنیم $\nu^*_{\text{act}} \triangleq \nu\left(p^*_{\text{act}}\right)$.
اگر «بد بودن قیمت p را نسبت به تخمین بهینه درآمد» را با $\Delta(p) \triangleq \max\left(۰, \frac{۱}{n}v^*_{\text{act}} - pS(p)\right)$ نشان دهیم. با استفاده از این تعریف، پشیمانی را با استفاده از $\sum_{p\in\mathcal{P}} \Delta(p)N(p)$ کران می‌کنیم. به شکلی که $N(p)$ تعداد باری است که قیمت p انتخاب شده است.

**ادعا ۷.** $[BDKS15]$ برای هر قیمت $p \in \mathcal{P}$ برقرار است:

$$N(p)\Delta(p) \leq O(\log n)\left(۱ + \frac{k}{n}\frac{۱}{\Delta(p)}\right)$$

**آنالیز درآمد کل**: به جای بررسی $Rev$ می‌خواهیم $\sum_{t=۱}^{n} p_t S(p_t)$ را بررسی کنیم، در بررسی از نامساوی‌های ۳ استفاده می‌شود. همچنین برای ساده‌سازی فرض می‌کنیم:

$$\beta(S) = O(\sqrt{S\log n} + \log n)$$

**ادعا ۸.** $[BDKS15]$

$$\widehat{\text{Rev}} \geq \min\left(v^*_{act}, \sum_{t=۱}^{n} p_t S\left(p_t\right)\right) - \beta(k) \tag{۴}$$

**ادعا ۹.** $[BDKS15]$ برای هر مجموعه قیمت‌های فعال (گسسته سازی شده) و هر $\epsilon > ۰$ بر قرار است:

$$v^*_{act} - \mathbb{E}[\widehat{Rev}] \leq \epsilon n + O(\log n)\left(|\mathcal{P}_\epsilon| + \frac{k}{n}\sum_{p\in\mathcal{P}_\epsilon}\frac{۱}{\Delta(p)}\right) + \beta(k) \tag{۵}$$

باید توجه کرد که این نامساوی برای هر مجموعه گسسته شده از قیمت‌ها برقرار است.

**ادعا ۱۰.** $[BDKS15]$

$$v^*_{act} \geq v^* - \delta k, \text{ where } v^* \triangleq \max_p v(p) \tag{۶}$$

اثبات. اگر $p^* = \operatorname{argmax}_p \nu(p)$ بهترین قیمت ثابت باشد، و $\delta \leq p^*$ آنگاه $\delta k \leq \nu^*$. در غیر این صورت، فرض کنیم $p_۰ = \max\{p \in \mathcal{P} : p \leq p^*\}$ داریم $۱ - \delta \leq \frac{۱}{۱+\delta} \leq p_۰/p$ و آنگاه: $v^*_{\text{act}} \geq v\left(p_۰\right) \geq \frac{p_۰}{p^*}v\left(p^*\right) \geq v^*(۱-\delta) \geq v^* - \delta k$ □

این اثبات را می‌توان برای هر سری غیر افزایشی دیگر هم نوشت. پس برای هر $\epsilon > ۰$ و $\delta \in (۰, ۱)$ داریم:

$$\text{Regret } \leq O(\log n)\left(|\mathcal{P}_\epsilon| + \frac{k}{n}\sum_{p\in\mathcal{P}_\epsilon}\frac{۱}{\Delta(p)}\right) + \epsilon n + \delta k + \beta(k) \tag{۷}$$

□

با جایگذاری دیگر نامساوی‌ها و فرض‌های $\frac{۱}{n} \geq \delta$ و $\epsilon = \delta\frac{k}{n}$ داریم:

$$\text{Regret } \leq O\left(\delta k + \frac{۱}{\delta^{۲}}(\log n)^{۲} + \sqrt{k\log n}\right) \tag{۸}$$

برای کمینه کردن مقدار بالا کافی است که $\delta = \frac{-۱}{۳}(\log n^{\frac{۲}{۳}})$ بگیریم تا به پشیمانی $O(k\log n)^{\frac{۲}{۳}}$ برسیم.

**مشاهده**

الگوریتم *CappedUCB1* با انتخاب $\delta = k^{\frac{-1}{3}}(\log n^{\frac{2}{3}})$ برای n و k های محدودی اجرا می‌شود، زمانی که $\delta \geq \frac{1}{2}(\sqrt{(5)} - 1) \approx 0.6181$ هیچ قیمتی را پیشنهاد نمی‌دهد. می‌توان مشاهده کرد برای $\delta > 0.3$ گسسته سازی قیمت‌ها بسیار فواصل زیادی دارند.

**قضیه ۱۱.** با استفاده از $\delta = C \cdot {}^{\frac{-1}{3}}(\log n^{\frac{2}{3}})$ و انتخاب مناسب $C \in (0.1, 1)$ می‌توان با پشیمانی $O(k \log n)^{\frac{2}{3}}$ برای n و k دلخواه از الگوریتم *CappedUCB1* استفاده کرد.

اثبات. با استفاده از پشیمانی الگوریتم CappedUCB در (۸) داریم:

$$\text{Regret} \leq O\left(\delta k + \frac{1}{\delta^2}(\log n)^2 + \sqrt{k \log n}\right)$$

با جایگذاری $\delta = C \cdot {}^{\frac{-1}{3}}(\log n^{\frac{2}{3}})$ داریم:

$$\text{Regret} \leq O\left([\frac{1}{C^2} + C]k^{\frac{2}{3}} \log n^{\frac{2}{3}} + \sqrt{k \log n}\right) = O(k \log n)^{\frac{2}{3}}$$

□

قضیه بالا این امکان را می‌دهد که در گسسته سازی، گزینه‌های بیشتری را پیشنهاد دهیم، در انتخاب $C$ بده بستانی بین اکتشاف قیمت‌های کمتر و بهره برداری از قیمت‌های بالاتر وجود دارد. باید متذکر شد که این بده بستان در «درآمد» اتفاق می‌افتد و نه پشیمانی، و حتی کران پشیمانی با ضریب ثابتی بزرگتر شده است.

# ۴ قیمت گذاری در بسته

با توجه به اینکه، قیمت پیشنهاد شده مسیرها بر مبنای کشش قیمتی مبدأ و مقصد است، فروش در بسته [۱۴] هم می‌توان از استراتژی فروش قبلی استفاده کرد و در صورت فروش از تعداد صندلی‌های همه مسیرهای موجود در این بسته کم کنیم. به این معنی که در گراف مسیرها می‌توان برای بسته‌ها یال‌های مجازی فرض کرد که ظرفیت هر یال برابر با کمینه یال‌های درون بسته باشد. تفاوت مسئله «قیمت گذاری در بسته» با مسئله قبلی در این است که ظرفیت بسته وابسته به ظرفیت اعضای بسته است و در هر دور t الزاماً مقدار ثابتی ندارد.
**حدس.** در تمام *t-1* دور قبلی مقادیر پیشنهادی فروخته شده و فروخته نشده را نگه داریم. در هر دور ظرفیت بسته را محاسبه کنیم، و بر مبنای اطلاعات تا این لحظه شاخص $I_t(p)$ را محاسبه کنیم و بر مبنای الگوریتم *CappedUCB1* ادامه دهیم.

## ۱.۴ تعریف پشیمانی

باتوجه به اینکه ظرفیت بسته ثابت نیست و در هر دور متغیر است، برای بیشینه کردن سود فروش بسته باید قیمت‌های کمتر پیشنهاد دهیم، قبل از اینکه ظرفیت پروازی به صورت مجزا فروش رود که این برخلاف هدف یعنی «بیشینه کردن مازاد استخراجی بازار» است. به همین دلیل پشیمانی شبکه پرواز با بسته را به شکل زیر تعریف می کنیم.

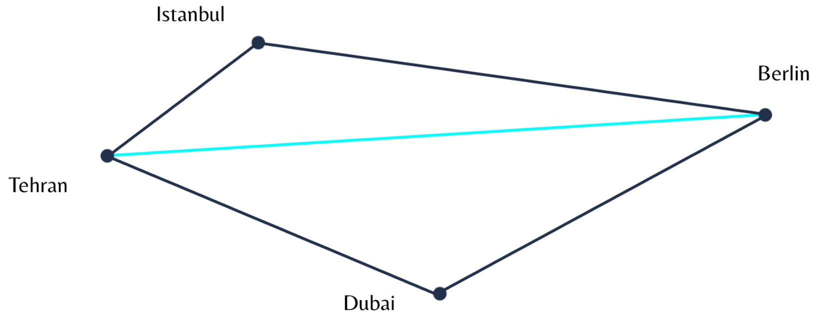
$$\text{Regret}(\mathcal{A}) \triangleq \sum_{c \in C} \max_p \text{Rev}\left[\mathcal{A}^n_{k,c}(p)\right] - \text{Rev}(\mathcal{A}_c)$$

مشکل این تعریف این است که برخورد مستقل با هر نوع مشتری، به دلیل اینکه از منابع مشترکی بهره می‌برند الزاماً به معنی بیشینه کردن مازاد استخراجی کل بازار نیست.

# ۵ شبیه سازی

در شبیه سازی شبکه پروازی زیر را در نظر می‌گیریم:
در این شبکه، پرواز مستقیمی بین «تهران» و «برلین» وجود ندارد، ولی دو بسته متفاوت برای این مبدأ و مقصد داریم. همانطور که در ابتدا توضیح داده شد، «مطلوبیت» فقط بر مبنای قیمت است و مشتری در بین این دو بسته، بسته با قیمت کمتر را انتخاب می‌کند. در شبیه سازی ما قیمت

[14] Bundle




شکل ۲: شبکه پرواز شبیه‌سازی شده

تمام بسته‌های را تخمین می‌زنیم و کمترین قیمت را پیشنهاد می‌دهیم. برای هر مسیر یک تابع توزیع ثابت در نظر می‌گیریم که برای فروشنده مشخص نیست. مشتری‌ها به تصادف می‌آیند، بر مبنای مبدأ و مقصد هر مشتری قیمتی پیشنهاد می‌دهیم اگر از ارزش بلیت برای مشتری کمتر بود، بلیت را میفروشیم و ظرفیت را کم می‌کنیم.

## ۶ کران بهتر

در ابتدا به قضیه‌ای اشاره می‌کنیم که نشان دهیم پشیمانی نسبت به قمیت ثابت، خیلی بدتر از مقایسه پشیمانی با حالت آفلاین نیست.

**قضیه ۱۲.** [$Yan11$] برای هر تابع تقاضای خوب یک استراتژی قیمت ثابت وجود دارد، که درآمد انتظاری آن از حالت آفلاین $O(\sqrt{k})$ کمتر است.

**قضیه ۱۳.** [$BDKS15$] برای هر تابع تقاضای معمول F ضرایب ثابت مثبت $s_F$ و $c_F$ وجود دارد که الگوریتم $CappedUCB$ با انتخاب پارامتر $\delta = k^{\frac{-1}{2}} \log n$ پشیمانی $O(c_F\sqrt{K}\log n)$ می‌دهد، زمانی که $\frac{n}{k} \leq s_F$. برای توزیع‌های $Monotone\ Hazard\ Rate$، می‌توانیم $s_F = \frac{1}{4}$ بگیریم.

# مراجع


[BBDS11] *Moshe Babaioff, Liad Blumrosen, Shaddin Dughmi, and Yaron Singer. Posting prices with unknown distributions. In* In ICS*. Citeseer, 2011.*

[BDKS15] *Moshe Babaioff, Shaddin Dughmi, Robert Kleinberg, and Aleksandrs Slivkins. Dynamic pricing with limited supply, 2015.*

[BZ09] *Omar Besbes and Assaf Zeevi. Dynamic pricing without knowing the demand function: Risk bounds and near-optimal algorithms.* Operations Research*, 57(6):1407–1420, 2009.*

[ISSS19] *Nicole Immorlica, Karthik Abinav Sankararaman, Robert Schapire, and Aleksandrs Slivkins. Adversarial bandits with knapsacks. In* 2019 IEEE 60th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 202–219. IEEE, 2019.*

[KL03] *Robert Kleinberg and Tom Leighton. The value of knowing a demand curve: Bounds on regret for online posted-price auctions. In* 44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2003. Proceedings.*, pages 594–605. IEEE, 2003.*

[KSU08] *Robert Kleinberg, Aleksandrs Slivkins, and Eli Upfal. Multi-armed bandits in metric spaces. In* Proceedings of the fortieth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 681–690, 2008.*

[Var85] *Hal R Varian. Price discrimination and social welfare.* The American Economic Review*, 75(4):870–875, 1985.*

[Yan11] *Qiqi Yan. Mechanism design via correlation gap. In* Proceedings of the twenty-second annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms*, pages 710–719. SIAM, 2011.*