Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической физики

Кереселидзе Диана Арчиловна

Конструктивные методы в линейных обратных задачах теории переноса

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
И.В. Тихонов

Москва, 2022

Содержание

Введение

Линейные обратные задачи для уравнения переноса часто возникают в прикладной математической физике.

Настоящая выпускная квалификационная работа посвящена изучению линейной обратной задачи для одномерного уравнения простого переноса с поглощением при особом выборе правой части дифференциального уравнения. Требуется определить плотность дополнительных источников субстанции, а также саму плотность субстанции внутри ограниченного интервала на $\mathbb{R}$ при заданном входящем потоке по известной информации о начальном и финальном состояниях системы. Основная цель нашего исследования состоит в разработке конструктивного алгоритма решения поставленной задачи и в проведении численных экспериментов, реализующих данный алгоритм.

При исследовании поставленной задачи используется результат статьи [2], в которой указан общий алгоритм решения абстрактной обратной задачи специального вида для эволюционного уравнения с нильпотентной полугруппой. В данной работе представлен наиболее полный вывод решения абстрактной задачи на языке теории полугрупп, а полученный результат перенесен на случай задачи для уравнения переноса с поглощением. Основные понятия и утверждения из теории полугрупп и теории функционального анализа имеются в работах [1],[4],[6]. Сведения из теории дифференциальных уравнений в частных производных были взяты из книг [7],[8],[10].

Также в работе приведены результаты компьютерных экспериментов и дан их подробный анализ. Для практической оценки корректности работы алгоритма программируются многочисленные примеры с различными входными данными, например, случаи с наличием или отсутствием поглощения, примеры с нулевым входным потоком и др. Программа была подготовлена с помощью языка MATLAB, документация которого представлена в электронном ресурсе [9].

1 Необходимые теоретические сведения

1.1 Линейные операторы и полугруппы

Напомним некоторые понятия из функционального анализа, необходимые для исследования поставленной обратной задачи в терминах теории полугрупп. Всюду далее считаем, что E – вещественное банахово пространство. В нем мы будем рассматривать линейные замкнутые операторы A с областью определения $D(A) \subset E$ и линейные ограниченные операторы $B\colon E \to E$. Сформулируем точные определения.

Определение 1. Оператор A называется *линейным* в E, если его область определения $D(A)$ является линейным подпространством в E, причем

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A f + \beta A g$$

для любых элементов $f, g \in D(A)$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Линейный оператор A с областью определения $D(A)$ называется *замкнутым* в E, если из соотношений

$$f_n \in D(A),\ \ f_n \to f_0,\ \ Af_n \to g_0$$

следует, что $f_0 \in D(A)$ и $Af_0 = g_0$.

Определение 3. Линейный оператор B, определенный на всем пространстве E, называется *ограниченным*, если конечна величина

$$\|B\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|Bf\|,$$

называемая нормой оператора B. При этом $\|Bf\| \leqslant \|B\| \cdot \|f\|$ для любого элемента $f \in E$. Ограниченность оператора эквивалентна его непрерывности в каждой точке пространства E.

Определение 4. Семейство линейных ограниченных операторов $U(t)\colon E \to E$ с параметром $t \geqslant 0$ называется *полугруппой* (или *полугруппой линейных ограниченных операторов*), если

a) $U(0) = I$, где I — тождественный оператор в E,
b) $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2) = U(t_2)U(t_1)$ для любых $t_1, t_2 \geqslant 0$.

Определение 5. Полугруппа $U(t)$ называется *сильно непрерывной* в пространстве E или *полугруппой класса* C_0, если

$$\lim_{t\to 0+0} U(t)f = f, \quad \forall f \in E.$$

Такие полугруппы будем коротко называть C_0-полугруппами.

Определение 6. Оператор A называется *производящим оператором* полугруппы $U(t)$, если

$$Af = \lim_{t\to 0+0} \frac{U(t)f - f}{t}$$

на области определения

$$D(A) = \left\{ f \in E \,\middle|\, \exists \lim_{t\to 0+0} \frac{U(t)f - f}{t} \right\}.$$

В указанных формулах предел понимается по норме пространства E. Также говорят, что оператор A *порождает* полугруппу $U(t)$.

Определение 7. Полугруппа $U(t)$ называется *нильпотентной* в E, если

$$U(t) = 0, \quad \forall t \geqslant t_0 > 0,$$

с фиксированным значением $t_0 > 0$. Это значение называют также *индексом нильпотентности* полугруппы $U(t)$. Нильпотентные полугруппы возникают при рассмотрении уравнения переноса.

1.2 Свойства производящего оператора

Утверждение 1. *Пусть оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0. Тогда, если $f \in E$, то $\int\limits_0^t U(t)f \in D(A)$ и справедливо равенство*

$$A\left(\int\limits_0^t U(s)f\,ds\right) = U(t)f - f, \quad t > 0. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $f \in E$ и $h > 0$. Тогда

$$\frac{U(h)-I}{h} \int\limits_0^t U(s)f\,ds = \frac{1}{h} \int\limits_0^t \left(U(s+h)f - U(s)f\right)\,ds =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} U(s)f\,ds - \frac{1}{h} \int\limits_0^h U(s)f\,ds.$$

Переходя к пределу при $h \to 0+0$, получим

$$A\left(\int\limits_0^t U(s)f\,ds\right) = U(t)f - f.$$

$\square$

Утверждение 2. *Пусть оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0. Тогда справедливо равенство*

$$A\int_{t_1}^{t_2} U(s)f\,ds = U(t_2)f - U(t_1)f, \qquad \forall t_1, t_2 > 0,\ \ \forall f \in E. \tag{2}$$

Доказательство. Представим интеграл в ином виде

$$\int_{t_1}^{t_2} U(s)f\,ds = \int_0^{t_2} U(s)f\,ds - \int_0^{t_1} U(s)f\,ds$$

Под действием оператора A с учетом (1) получим

$$A\int_{t_1}^{t_2} U(s)f\,ds = U(t_2)f - U(t_1)f.$$

$\square$

Утверждение 3. *Пусть оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0. Тогда, если $f \in D(A)$, то $U(t)f \in D(A)$ и справедливо равенство*

$$\frac{d}{dt}U(t)f = AU(t)f = U(t)Af, \quad t > 0. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $f \in D(A)$ и $h > 0$. Сначала покажем, что

$$\frac{U(t)-I}{h}U(t)f = U(t)\left(\frac{U(t)-I}{h}\right)f \xrightarrow[h\to 0]{} U(t)Af. \tag{4}$$

Значит, $U(t)f \in D(A)$ и $AU(t)f = U(t)Af$.

Выражение (4) подразумевает также, что

$$\frac{d^+}{dt}U(t)f = AU(t)f = U(t)Af.$$

Для доказательства (3) покажем, что левая производная $\frac{d^-}{dt}U(t)f$ существует и равна $U(t)Af$.

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{U(t)f - U(t-h)f}{h} - U(t)Af\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0} U(t-h)\left[\frac{U(h)f - f}{h} - Af\right] + \lim_{h\to 0}\Big(U(t-h)Af - U(t)Af\Big).$$

Первое слагаемое из правой части равно 0 из того, что $f \in D(A)$ и $\|U(t-h)\|$ ограниченна на отрезке $0 \leqslant h \leqslant t$. Второе слагаемое также равно нулю из сильной непрерывности полугруппы. То есть правая и левые производные равны $U(t)Af$, значит утверждение доказано. $\square$

Утверждение 4. *Пусть оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0. Тогда A есть линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, всюду плотной в E.*

Доказательство. Из сильной непрерывности полугруппы следует, что

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{1}{t}\int\limits_0^t U(s)f\,ds = f, \quad f \in E.$$

Из утверждения 1 знаем, что

$$\int\limits_0^t U(s)f\,ds \in D(A).$$

Из этих двух выражений можно сделать вывод, что замыкание множества $D(A)$ совпадает с банаховым пространством E, то есть область определения $D(A)$ всюду плотна в E.

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов из $D(A)$, сходящаяся к элементу f_0 и такая, что соответствующая последовательность $\{Af_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к элементу g_0.

Покажем, что $f_0 \in D(A)$ и $Af_0 = g_0$. Для $f_n \in D(A)$ получим

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t U(s)Af_n\,ds = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}U(s)Af_n\,ds = \frac{1}{t}[U(t)f_n - f_n] = A_t f_n.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$ и используя оценку, имеем

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t U(s)g_0\,ds = A_t f_0.$$

Предел левой части существует при $t \to 0+0$ и равен g_0, тогда элемент f_0 принадлежит области определения $D(A)$, причем $g_0 = Af_0$. □

1.3 Неоднородная абстрактная задача Коши

В банаховом пространстве E на отрезке $[0, T] \subset \mathbb{R}$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для эволюционного уравнения вида

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + \varphi(t)g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$u(0) = f. \tag{6}$$

Считаем, что

- A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A) \subset E$, при этом оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0,
- $\varphi(t)g$ — неоднородное слагаемое, произведение скалярной функции $\varphi(t)$ на элемент $g \in E$,
- f — заданный элемент в E,
- $T > 0$ — продолжительность измерений,
- $u(t)$ — неизвестная функция.

Определение 8. Функцию $u : [0, T] \to D(A)$ назовем *классическим решением* задачи (5)–(6) на отрезке $[0, T]$, если u непрерывна на $[0, T]$, u непрерывно дифференцируема на $(0,T)$, $u(t) \in D(A)$ для любого $t \in (0,T)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнениям (5) и (6).

Теорема 1. *Формальное решение задачи Коши* (5)–(6) *записывается с помощью интеграла Дюамеля*

$$u(t) = U(t)f + \int\limits_0^t U(t-s)\varphi(s)g\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{7}$$

Доказательство. Если $U(t)$ – полугруппа класса C_0, порожденная оператором A и u – решение задачи (5)–(6), то функция $g(s) = U(t-s)u(s)$ дифференцируема на $0 < s < t$. Тогда, используя (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AU(t-s)u(s) + U(t-s)u'(s) = \\ &= -AU(t-s)u(s) + U(t-s)Au(s) + U(t-s)\varphi(s)g = \\ &= \quad U(t-s)\varphi(s)g. \end{aligned}$$

Продифференцируем это выражение по s от 0 до t:

$$g(t) - g(0) = \int\limits_0^t U(t-s)\varphi(s)g\,ds.$$

Учтем, что $g(s) = U(t-s)u(s)$, и получим выражение (7), которое и требовалось доказать

$$u(t) = U(t)f + \int\limits_0^t U(t-s)\varphi(s)g\,ds.$$

$\square$

2 Абстрактный вариант обратной задачи

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую одномерную задачу для эволюционного уравнения на отрезке, заданную в течение ограниченного отрезка времени

$$u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

$$u(0) = u_0, \quad u(T) = u_1. \tag{9}$$

Мы рассматриваем специальный случай данной задачи, когда функция $\varphi(t)$ кусочно-постоянна на отрезке $[0, T]$. Здесь и далее считаем, что

- A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A) \subset E$, при этом оператор A порождает нильпотентную полугруппу $U(t)$ с фиксированным значением $t_0 \geqslant 0$,
- $T > 0$ — продолжительность измерений,
- $\varphi(t)g$ — произведение скалярной функции $\varphi(t)$ на элемент $g \in E$,
- $u_0 \in D(A)$ — начальное состояние системы,
- $u_1 \in D(A)$ — финальное состояние системы.

Значения параметра T, элементов u_0, u_1 и функция $\varphi(t)$ предполагаются известными; обратная задача заключается в поиске g и $u(t)$, удовлетворяющих условиям задачи (8)–(9).

Для дальнейших рассуждений удобно будет представить кусочно-постоянную функцию $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha_1, & \tau_0 \leqslant t < \tau_1, \\ \alpha_2, & \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \alpha_p, & \tau_{p-1} \leqslant t \leqslant \tau_p, \end{cases} \tag{10}$$

где α_1,α_2,...,α_p – действительные числа, причем $\alpha_{j+1} \neq \alpha_j$ для $j = 1, 2, ..., p-1$ и $\alpha_p \neq 0$. Значения τ_0,τ_1,...,τ_p задают разбиение временного отрезка по правилу $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_{p-1} < \tau_p = T$.

2.2 Общая схема исследования

Формальное решение задачи Коши (8)–(9) записывается через интеграл Дюамеля (7)

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(t-s)\varphi(s)g\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

При $t = T$ получим

$$u(T) = U(T)u_0 + \int\limits_0^T U(T-s)\varphi(s)g\,ds.$$

$$u_1 - U(T)u_0 = \int\limits_0^T U(s)\varphi(T-s)g\,ds.$$

Подставим в полученное равенство представление (10) функции $\varphi(t)$

$$u_1 - U(T)u_0 = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \int\limits_{T-\tau_j}^{T-\tau_{j-1}} U(s)g\,ds.$$

Введем новый элемент $h = u_1 - U(T)u_0$, подействуем на него оператором $(-A)$ и по (2) получим операторное уравнение

$$\beta g - Bg = -Ah,$$

где $\beta = \alpha_p \neq 0$, а оператор B задается выражением

$$B = \alpha_p U(T-\tau_{p-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j (U(T-\tau_{j-1}) - U(T-\tau_j)).$$

Введем $\alpha_0 = 0$ и запишем выражение для оператора B в более удобном виде

$$B = \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) U(T-\tau_{k-1}).$$

Из условий на оператор A известно, что $U(t)$ – нильпотентная полугруппа, следовательно оператор B также оказывается нильпотентным. Отсюда можно сделать вывод, что $B = 0$ и $B^n = 0$ для всех показателей $n \in \mathbb{N}$: $n \geqslant \dfrac{t_0}{t-\tau_{p-1}}$.

Поэтому выражение для неизвестного элемента g можно однозначно найти с помощью формулы

$$g = \sum_{n=0}^{N_0} \frac{1}{\beta^{n+1}} B^n(-Ah), \quad N_0 = \left\lceil \frac{t_0}{T - \tau_{p-1}} \right\rceil - 1.$$

3 Одномерное уравнение переноса с поглощением

3.1 Постановка прямой задачи

Рассмотрим следующую одномерную задачу для уравнения простого переноса с поглощением

$$u_t + au_x + \sigma(x)u = f(x,t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{11}$$

$$u(0,t) = \gamma(t), \tag{12}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{13}$$

Считаем, что

- $a = \text{const} > 0$ — скорость переноса,
- $T > 0$ — продолжительность измерений,
- $l > 0$ — длина стрежня с субстанцией,
- $\sigma(x)$ — коэффициент поглощения,
- $\gamma(t)$ — входящий поток,
- $f(x,t)$ — плотность дополнительных источников субстанции,
- $u_0(x)$ — начальное состояние системы,
- $u(x,t)$ — плотность переносимой субстанции.

Значения параметров a, l, T и функций $\sigma(x), u_0(x), \gamma(t), f(x,t)$ предполагаются известными; требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям задачи (11)–(13).

Постановка задачи в таком виде может возникнуть при исследовании различных физических явлений. Например, при рассмотрении движения субстанции по трубке длиной l со скоростью a, когда внутри трубки есть какие-либо радиоактивные частицы (т.е. дополнительные источники субстанции), которые начинают двигаться вместе с рассматриваемой изначально субстанцией. Процесс поглощения средой характеризуется величиной $\sigma(x)$. А $\gamma(t)$ будет обозначать количество субстанции, вдуваемой через левый край трубки.

3.2 Решение прямой задачи

Многие задачи поиска решений уравнений в частных производных первого порядка принято решать методом характеристик. Применим его для получения явных разрешающих формул решения задачи (11)–(13). Сведем уравнение (11) к уравнению

$$\frac{d}{d\tau}u\big(\alpha(\tau),\beta(\tau)\big)+\sigma\big(\alpha(\tau)\big)u\big(\alpha(\tau),\beta(\tau)\big)=f\big(\alpha(\tau),\beta(\tau)\big), \tag{14}$$

где $\big(\alpha(\tau),\beta(\tau)\big)$ – характеристика.

Воспользуемся свойством производной сложной функции и получим

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\tau}+\sigma\big(\alpha(\tau)\big)u\big(\alpha(\tau),\beta(\tau)\big)=f\big(\alpha(\tau),\beta(\tau)\big).$$

Положим, что $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\tau}=a$ и $\dfrac{\partial\beta}{\partial\tau}=1$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&\alpha'(\tau)=a \;\;\Rightarrow\;\; \alpha(\tau)=a\tau+x_0,\\&\beta'(\tau)=1 \;\;\Rightarrow\;\; \beta(\tau)=\tau+t_0.\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения для $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ в уравнение (13)

$$\frac{d}{d\tau}u(x_0+a\tau,t_0+\tau)+\sigma(x_0+a\tau)u(x_0+a\tau,t_0+\tau)=f(x_0+a\tau,t_0+\tau).$$

Заменив точку (x_0,t_0) на произвольную точку (x,t), получим уравнение переноса в новом виде

$$\frac{d}{d\tau}u(x+a\tau,t+\tau)+\sigma(x+a\tau)u(x+a\tau,t+\tau)=f(x+a\tau,t+\tau). \tag{15}$$

Умножим полученное уравнение на интегрирующий множитель

$$\mu(\tau)=\exp\Big(\int\limits_0^\tau\sigma(as+x)\,ds\Big).$$

Тогда получим уравнение переноса с поглощением на характеристиках в частично проинтегрированной форме

$$\frac{d}{d\tau}\left[u(x+a\tau,t+\tau)\exp\Big(\int\limits_0^\tau\sigma(as+x)\,ds\Big)\right]=f(x+a\tau,t+\tau)\exp\Big(\int\limits_0^\tau\sigma(as+x)\,ds\Big). \tag{16}$$

1. В области $x-at>0$ проинтегрируем выражение (16) по τ от $(-t)$ до 0:

$$u(x,t)-u(x-at,0)\exp\Big(\int\limits_0^{-t}\sigma(as+x)\,ds\Big)=\int\limits_{-t}^{0}f(x+a\tau,t+\tau)\exp\Big(\int\limits_0^\tau\sigma(as+x)\,ds\Big)d\tau,$$

$$u(x,t)=u_0(x-at)\exp\Big(-\int\limits_0^{t}\sigma(x-as)\,ds\Big)+\int\limits_0^{t}f(x-a\tau,t-\tau)\exp\Big(-\int\limits_0^\tau\sigma(x-as)\,ds\Big)d\tau.$$

2. В области $x-at<0$ проинтегрируем выражение (16) по τ от $(-x/a)$ до 0:

$$u(x,t)-u\Big(0,t-\frac{x}{a}\Big)\exp\Big(\int\limits_0^{-x/a}\sigma(as+x)\,ds\Big)=\int\limits_{-x/a}^{0}f(x+a\tau,t+\tau)\exp\Big(\int\limits_0^\tau\sigma(as+x)\,ds\Big)d\tau,$$

$$u(x,t)=\gamma\Big(t-\frac{x}{a}\Big)\exp\Big(-\int\limits_0^{x/a}\sigma(x-as)\,ds\Big)+\int\limits_0^{x/a}f(x-a\tau,t-\tau)\exp\Big(-\int\limits_0^\tau\sigma(x-as)\,ds\Big)d\tau.$$

В итоге получаем формулу для решения задачи (11)–(13)

$$u(x,t)=\begin{cases} u_0(x-at)\exp\Big(-\int\limits_0^{t}\sigma(x-as)\,ds\Big)+ \\ +\int\limits_0^{t}f(x-a\tau,t-\tau)\exp\Big(-\int\limits_0^\tau\sigma(x-as)\,ds\Big)d\tau, \quad x-at\geqslant 0, \\ \gamma\Big(t-\frac{x}{a}\Big)\exp\Big(-\int\limits_0^{x/a}\sigma(x-as)\,ds\Big)+ \\ +\int\limits_0^{x/a}f(x-a\tau,t-\tau)\exp\Big(-\int\limits_0^\tau\sigma(x-as)\,ds\Big)d\tau, \quad x-at\leqslant 0. \end{cases}$$

После ряда замен запишем выражение для искомой функции при фиксированном t, двигаясь по отрезку $[0, l]$ слева направо:

$$u(x,t) = \begin{cases} \gamma\Big(t - \dfrac{x}{a}\Big) \exp\Big(- \dfrac{1}{a} \displaystyle\int\limits_0^x \sigma(s)\, ds\Big) + \\ + \dfrac{1}{a} \displaystyle\int\limits_0^x f(\tau, t - \dfrac{x-\tau}{a}) \exp\Big(- \dfrac{1}{a} \int\limits_\tau^x \sigma(s)\, ds\Big) d\tau, \qquad 0 \leqslant x \leqslant at, \\ u_0(x - at) \exp\Big(- \dfrac{1}{a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^x \sigma(s)\, ds\Big) + \\ + \dfrac{1}{a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^x f(\tau, \tau - \dfrac{x-\tau}{a}) \exp\Big(- \dfrac{1}{a} \int\limits_\tau^x \sigma(s)\, ds\Big) d\tau, \quad at \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{17}$$

В случае, если значение at оказалось больше l, то используется только первая часть формулы (17). Это соглашение действует в дальнейшем для всех аналогичных двухсоставных формул.

Если коэффициент поглощения $\sigma(x) = 0$, то формула принимает вид

$$u(x,t) = \begin{cases} \gamma\Big(t - \dfrac{x}{a}\Big) + \dfrac{1}{a} \displaystyle\int\limits_0^x f\Big(\tau, t - \dfrac{x-\tau}{a}\Big) d\tau, \qquad 0 \leqslant x \leqslant at, \\ u_0(x - at) + \dfrac{1}{a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^x f\Big(\tau, \tau - \dfrac{x-\tau}{a}\Big) d\tau, \quad at \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

4 Обратная задача для уравнения переноса

4.1 Постановка обратной задачи

Рассмотрим обратную задачу для одномерного уравнения простого переноса с поглощением, исследование которой является основной целью этой работы.

$$u_t + au_x + \sigma(x)u = \varphi(t)g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{18}$$

$$u(0,t) = \gamma(t), \tag{19}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,T) = u_1(x). \tag{20}$$

Здесь считаем, что

- $a = \text{const} > 0$ — скорость переноса,
- $T > 0$ — продолжительность измерений,
- $l > 0$ — длина стрежня с субстанцией,
- $\sigma(x)$ — коэффициент поглощения,
- $\varphi(t)$ — кусочно-постоянная функция,
- $\gamma(t)$ — входящий поток,
- $u_0(x)$ — начальное состояние системы,
- $u_1(x)$ — финальное состояние системы,
- $u(x,t)$ — плотность переносимой субстанции.

Все параметры a, l, T и функции $\sigma(x), u_0(x), u_1(x), \gamma(t)$ предполагаются известными; требуется найти функции для плотности дополнительных источников $g(x)$ и для плотности исходной субстанции $u(x,t)$, удовлетворяющие условиям задачи (18)–(20).

Отметим, что сформулированное дифференциальное уравнение (18) является частным случаем уравнения (8), где $A = -a\dfrac{d}{dx} - \sigma(x)$ является оператором в пространстве $L_1[0,l]$ на области определения $D(A) = \{f \in AC[0,l] \,:\, f(0) = 0\}$.

Оператор простого переноса с поглощением A в данном случае порождает полугруппу $U(t)$, действующую по правилу

$$U(t)f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant at, \\ f(x-at)\exp\Big(-\dfrac{1}{a}\int\limits_0^{at}\sigma(x-s)\,ds\Big), & at < x \leqslant l. \end{cases} \tag{21}$$

4.2 Решение обратной задачи

Выведем теоретическую схему для решения обратной задачи для одномерного уравнения простого переноса с поглощением в специальном случае при кусочно-постоянности функции $\varphi(x)$.

Рассмотрим вспомогательную задачу, для этого введем новую функцию $w(x,t)$ и получим однородную задачу

$$w_t + aw_x + \sigma(x)w = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{22}$$

$$w(0,t) = \gamma(t), \tag{23}$$

$$w(x,0) = u_0(x). \tag{24}$$

Полученная постановка соответствует прямой задаче, которая была подробно исследована в предыдущей главе. Воспользуемся формулой (17) и выпишем разрешающую формулу для решения задачи (22)–(24):

$$w(x,t) = \begin{cases} \gamma\Big(t - \dfrac{x}{a}\Big) \exp\Big(-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^x \sigma(s)\,ds\Big), & 0 \leqslant x \leqslant at, \\ u_0(x-at) \exp\Big(-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^x \sigma(s)\,ds\Big), & at \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{25}$$

Для искомой в задаче (18)–(20) функции $u(x,t)$ сделаем замену

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{26}$$

с функцией $w(x,t)$, найденной по формуле (25).

Для новой неизвестной функции $v(x,t)$ получаем задачу

$$v_t + av_x + \sigma(x)v = \varphi(t)g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{27}$$

$$v(0,t) = 0, \tag{28}$$

$$v(x,0) = 0, \quad v(x,T) = u_1(x) - w(x,T). \tag{29}$$

Явные разрешающие формулы для данной задачи можно получить, используя формулы из пункта 2.2.

Введем новую функцию $h(x)$ в виде

$$h(x) = v(x,T) - U(T)v(x,0) = u_1(x) - w(x,T).$$

$$h(x) = \begin{cases} u_1(x) - \gamma\Big(T - \dfrac{x}{a}\Big)\exp\Big(-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^x \sigma(s)\,ds\Big), & 0 \leqslant x \leqslant aT, \\ u_1(x) - u_0(x - aT)\exp\Big(-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_{x-aT}^x \sigma(s)\,ds\Big), & aT \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{30}$$

Постановку редуцированной обратной задачи (27)–(29) удобно привести в абстрактном виде с помощью оператора простого переноса с поглощением A

$$\begin{aligned} &v'(t) = Av + \varphi(t)g, && 0 \leqslant t \leqslant T, \\ &v(0) = 0, \quad v(T) = h. \end{aligned}$$

Так как анализ абстрактной задачи был подробно описан в главе 2, проведем его для только что полученной задачи. Подействуем на элемент $h(x)$ оператором $(-A) = a\dfrac{d}{dx} + \sigma(x)$, получим

$$f(x) = (-Ah(x)) = a\frac{dh}{dx} + \sigma(x)h(x) = ah'(x) + \sigma(x)h(x). \tag{31}$$

Формула для $g(x)$ примет вид:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N_0} \frac{1}{\beta^{n+1}} B^n f(x), \quad N_0 = \left\lceil \frac{l}{a(T - \tau_{p-1})} \right\rceil - 1, \tag{32}$$

где оператор B действует на $(-Ah(x))$ по правилу

$$Bf(x) = \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) U(T - \tau_{k-1}) f(x). \tag{33}$$

В итоге, получив выражение для искомой функции $g(x)$, можно решить прямую задачу с неизвестной функцией $v(x,t)$ по формуле (17)

$$v(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^x \varphi\Big(t - \dfrac{x-\tau}{a}\Big) g(\tau) \exp\Big(-\dfrac{1}{a}\int_\tau^x \sigma(s)\,ds\Big) d\tau, & 0 \leqslant x \leqslant at, \\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^x \varphi\Big(t - \dfrac{x-\tau}{a}\Big) g(\tau) \exp\Big(-\dfrac{1}{a}\int_\tau^x \sigma(s)\,ds\Big) d\tau, & at \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{34}$$

Воспользуемся формулой (17) и вернемся к решению задачи (18)–(20), зная значения для $v(x,t)$ и $w(x,t)$ из выражений (25) и (34) соответственно, получим

$$u(x,t) = \begin{cases} \gamma\Big(t - \dfrac{x}{a}\Big) \exp\Big(-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^x \sigma(s)\,ds\Big) + \\ + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^x \varphi\Big(t - \dfrac{x-\tau}{a}\Big) g(\tau) \exp\Big(-\dfrac{1}{a}\int\limits_\tau^x \sigma(s)\,ds\Big)d\tau, \quad 0 \leqslant x \leqslant at, \\ u_0(x-at)\exp\Big(-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^x \sigma(s)\,ds\Big) + \\ + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^x \varphi\Big(t - \dfrac{x-\tau}{a}\Big) g(\tau) \exp\Big(-\dfrac{1}{a}\int\limits_\tau^x \sigma(s)\,ds\Big)d\tau, \quad at \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{35}$$

Если коэффициент поглощения $\sigma(x) = 0$, то формула принимает вид

$$u(x,t) = \begin{cases} \gamma\Big(t - \dfrac{x}{a}\Big) + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^x \varphi\Big(\tau - \dfrac{x-\tau}{a}\Big) g(\tau)d\tau, \quad 0 \leqslant x \leqslant at, \\ u_0(x-at) + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^x \varphi\Big(\tau - \dfrac{x-\tau}{a}\Big) g(\tau)d\tau, \quad at \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

4.3 Непрерывность и гладкость решения

В любой рассматриваемой ситуации функция $u(x,t)$ будет получаться непрерывной, но ее производные могут терпеть разрыв, например в точках разрыва функции $\varphi(t)$.

Далее отметим, с какими условиями связан характер полученной по формуле (32) функции $g(x)$.

Для существования функции $g(x)$ требуется выполнение равенств

$$\gamma(0) = u_0(0); \quad \gamma(T) = u_1(0). \tag{36}$$

Далее выведем условия, при которых функция $g(x)$ будет непрерывной. Для этого необходимо, чтобы функция $h(x)$ из формулы (30) была непрерывно-дифференцируемой, а функция $f(x)$ из формулы (31) была равна 0 при $x = 0$.

Получим условие непрерывности функции $h(x)$, для этого надо избежать разрыва в точке $x = aT$:

$$u_1(aT) - \gamma(0)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_0^{aT}\sigma(s)\,ds\Big) = u_1(aT) - u_0(0)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_{aT-aT}^{aT}\sigma(s)\,ds\Big),$$

Таким образом, условие непрерывности функции $h(x)$: $\gamma(0) = u_0(0)$.

Далее выведем условие непрерывно-дифференцируемости функции $h(x)$. Производная функции $h(x)$ в промежутке $0 \leqslant x \leqslant aT$ равна

$$\frac{d}{dx}\Bigg(u_1(x) - \gamma\Big(T - \frac{x}{a}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_0^x\sigma(s)\,ds\Big)\Bigg) =$$

$$= u_1'(x) - \gamma'\Big(T - \frac{x}{a}\Big)\Big(-\frac{1}{a}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_0^x\sigma(s)\,ds\Big) -$$

$$-\gamma\Big(T - \frac{x}{a}\Big)\Big(-\frac{1}{a}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_0^x\sigma(s)\,ds\Big)\sigma(x).$$

Производная функции $h(x)$ в промежутке $aT \leqslant x \leqslant l$ равна

$$\frac{d}{dx}\left(u_1(x) - u_0(x-aT)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_{x-aT}^{x}\sigma(s)\,ds\Big)\right) =$$

$$= u_1'(x) - u_0'(x-aT)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_{x-aT}^{x}\sigma(s)\,ds\Big) -$$

$$-u_0(x-aT)\Big(-\frac{1}{a}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_{x-aT}^{x}\sigma(s)\,ds\Big)\Big(\sigma(x) - \sigma(x-aT)\Big).$$

Чтобы избежать разрыва функции $h'(x)$ в точке $x = aT$ выведем условие

$$-\frac{1}{a}\gamma'(0)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{aT}\sigma(s)\,ds\Big) - \frac{1}{a}\gamma(0)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{aT}\sigma(s)\,ds\Big)\sigma(aT) =$$

$$= u_0'(0)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{aT}\sigma(s)\,ds\Big) - \frac{1}{a}u_0(0)\exp\Big(-\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{aT}\sigma(s)\,ds\Big)\Big(\sigma(aT) - \sigma(0)\Big).$$

Используя полученное выше условие на непрерывность $h(x)$, выведем следующее условие непрерывно-дифференцируемости $h(x)$:

$$\gamma'(0) + au_0'(0) + \sigma(0)u_0(0) = 0.$$

И наконец, выведем условие, при котором $f(0) = 0$, где $f(x)$ определяется формулой (31):

$$f(0) = ah'(0) + \sigma(0)h(0) = \gamma'(T) + au_1'(0) + \sigma(0)u_1(0) = 0.$$

В итоге для непрерывности функции $g(x)$ требуется к равенствам (36) добавить дополнительные условия

$$\gamma'(0) + au_0'(0) + \sigma(0)u_0(0) = 0, \quad \gamma'(T) + au_1'(0) + \sigma(0)u_1(0) = 0. \tag{37}$$

5 Описание программы

5.1 Краткий обзор

Программа написана на языке MATLAB. На вход подаются следующие параметры и функции

1. l — положительное число, длина отрезка $[0, l]$.

2. T — положительное число, длина временного отрезка $[0, T]$.

3. a — положительное число, скорость переноса вещества.

4. $[\tau_1, ..., \tau_p]$ — массив чисел из интервала $(0, T)$, упорядоченных по возрастанию; внутренние точки разбиения отрезка $[0, T]$.

5. $[\alpha_1, ..., \alpha_p]$ — массив чисел; значения кусочно-постоянной функции $\varphi(t)$.

6. τ_0 и α_0 всегда равны 0.

7. $\gamma(t)$ — действительная функция, соответствующая граничному условию $u(0, t) = \gamma(t)$.

8. $u_0(x)$ — действительная функция, соответствующая начальному условию $u(x, 0) = u_0(x)$.

9. $u_1(x)$ — действительная функция, соответствующая финальному условию $u(x, T) = u_1(x)$.

Дополнительно выбирается количество точек равномерного разбиения отрезка $[0, l]$ и отрезка $[0, T]$.

На выходе получаем график для функции $g(x)$ и трехмерный график для $u(x, t)$.

5.2 Алгоритм

Рассмотрим основные пункты алгоритма построения решения задачи (18)–(20), которые были реализованы в программе на языке программирования MATLAB.

1. Поиск функции $h(x)$ по формуле (30). При этом автоматически учитывается результат вспомогательной задачи (22)–(24).

2. Поиск функции $f(x)$, полученной при воздействии оператора переноса на функцию $h(x)$ по формуле (31).

3. Поиск функции $Bf(x)$, полученной при воздействии оператора B на найденную в предыдущем пункте функцию по формуле (33). Функцию $B^2 f(x)$ можно найти применением оператора B на функцию $Bf(x)$. Все степени оператора B находятся последовательным применением этого оператора несколько раз.

4. Поиск функции $g(x)$ по формуле (32).

5. Поиск трехмерной функции $u(x, t)$ по формуле (35).

Специально подчеркнем, что используемый алгоритм в силу особенности метода дает решение поставленной задачи за конечное число шагов. При компьютерных вычислениях наблюдается лишь небольшая погрешность в ответе порядка 10^{-4} из-за накапливающейся вычислительной погрешности.

6 Результаты численных экспериментов

В данном разделе будут рассматриваться примеры решения обратных задач с помощью программы, написанной на языке MATLAB. Мы будем рассматривать следующую постановку задачи

$$
\begin{aligned}
&u_t + au_x + \sigma(x)u = \varphi(t)g(x), \qquad && 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,\\
&u(0,t) = \gamma(t), &&\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,T) = u_1(x). &&
\end{aligned}
$$

В качестве входных данных задаем параметры $l > 0,\ T > 0,\ a > 0$, а также функции

- $\sigma(x)$ — коэффициент поглощения,
- $\gamma(t)$ — входящий поток,
- $u_0(x)$ — начальное состояние,
- $u_1(x)$ — финальное состояние,
- $\varphi(t)$ — кусочно-постоянная аппаратная функция.

На выходе получаем функцию плотности источников $g(x)$ и основную функцию $u(x,t)$.

6.1 Пример 1

Пусть

$$
\begin{aligned}
&l = 3, \quad T = 2, \quad a = 1,\\
&\sigma(x) = 0, \quad \gamma(t) = 0, \quad u_0(x) = x^2 + x^3, \quad u_1(x) = \frac{x^3}{3}.
\end{aligned}
$$

Зададим функцию $\varphi(t)$ следующим образом

$$
\varphi(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leqslant t < 1,\\ \ \ 2, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}
$$

Получившаяся в процессе работы программы функция $g(x)$ выглядит так:

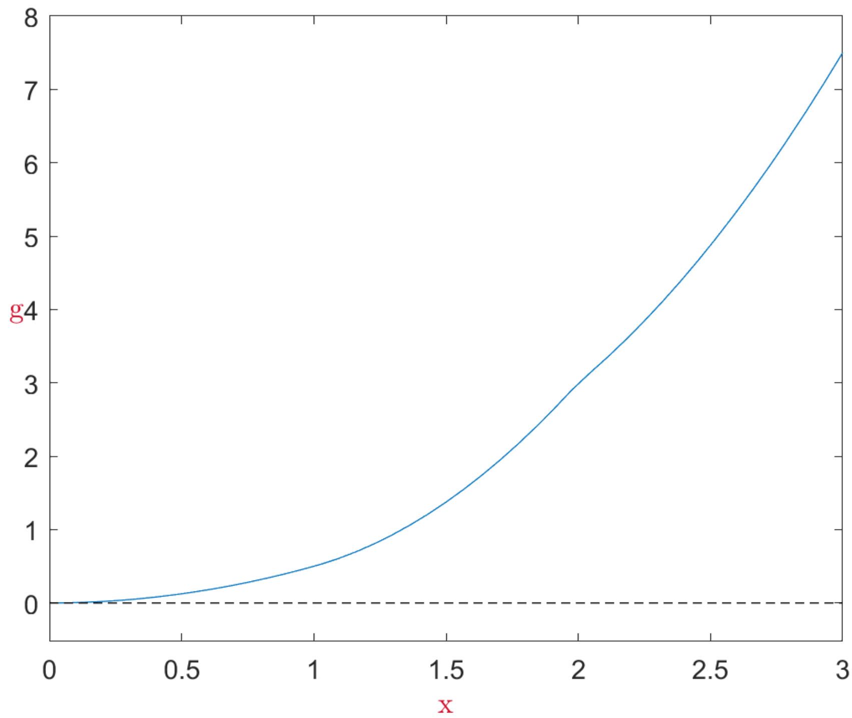

Рис. 1: Функция $g(x)$ в примере 1.

Функция $g(x)$ получается непрерывной, так как условия согласования (36) и (37) выполнены.

Рассмотрим подробно, как получается эта функция $g(x)$ по формуле (32). В данном примере постоянная переменная N_0 примет значение:

$$N_0 = \left\lceil \frac{3}{2-1} \right\rceil - 1 = 2.$$

Значит функция $g(x)$ будет составляться из суммы трех слагаемых, а именно:

$$g(x) = \frac{1}{\beta} f(x) + \frac{1}{\beta^2} B f(x) + \frac{1}{\beta^3} B^2 f(x), \quad \beta = 2.$$

Далее посмотрим, как составляются методом итерации функции из формулы для $g(x)$.

Ниже представлены графики для функций $h(x)$ и $f(x)$, полученных по формулам (30) и (31) соответственно.

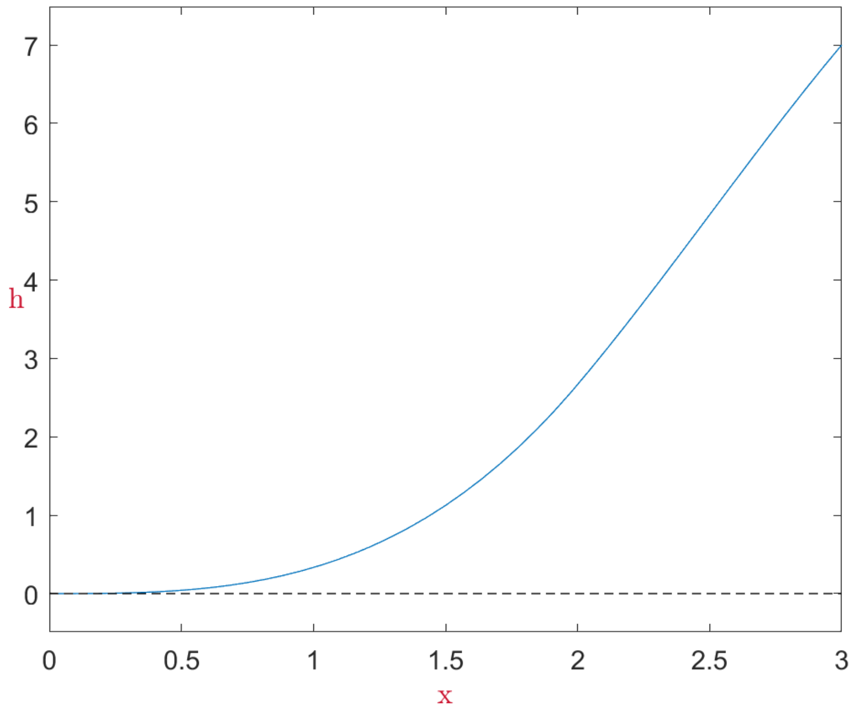

Рис. 2: Функция $h(x)$ в примере 1.

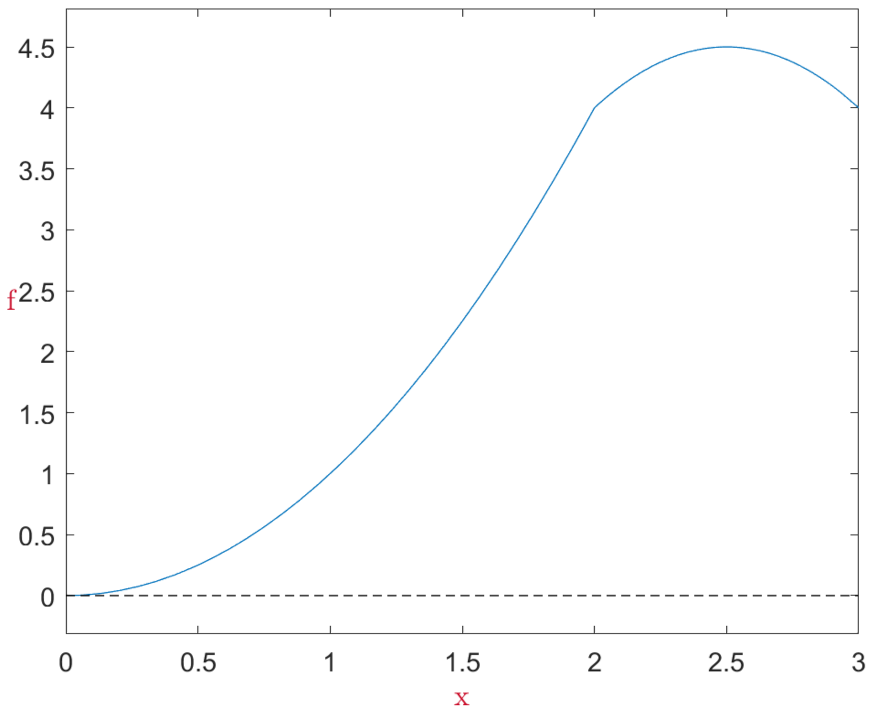

Рис. 3: Функция $f(x)$ в примере 1.

Далее представлены графики для функций $Bf(x)$ и $B^2f(x)$, полученных по формуле (33).

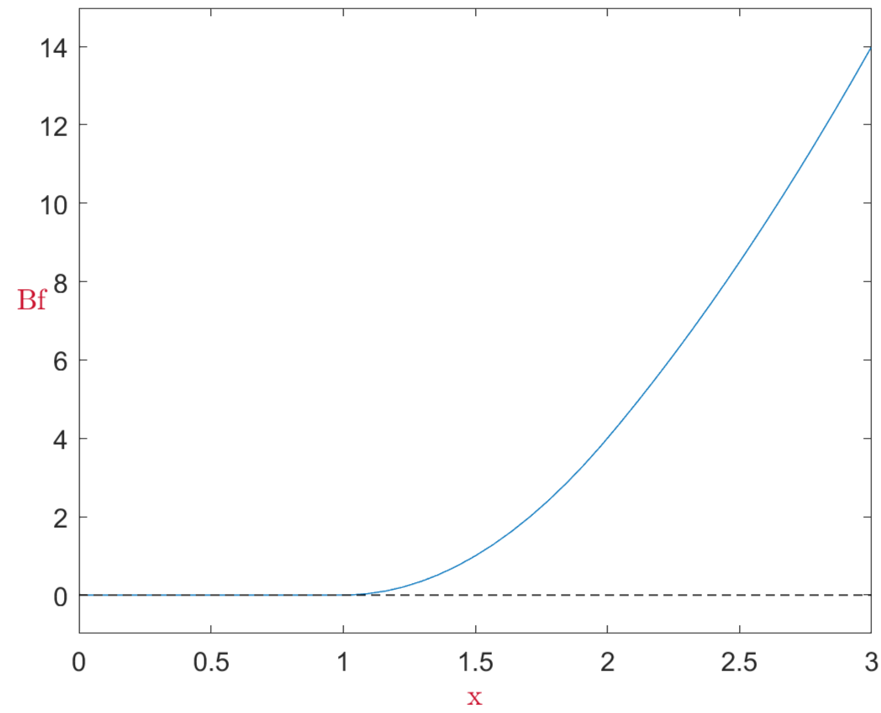

Рис. 4: Функция $Bf(x)$ в примере 1.

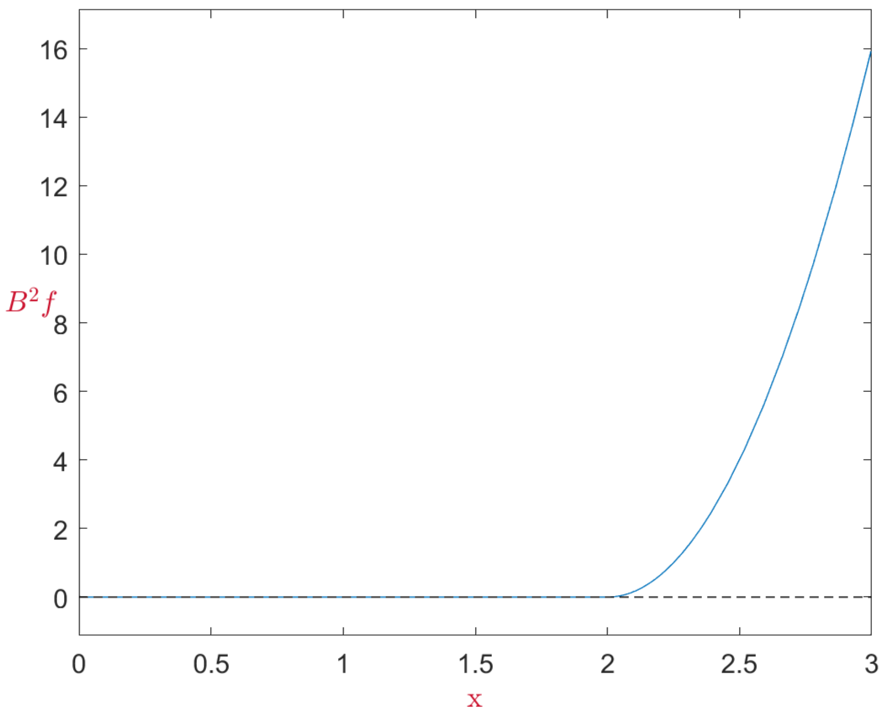

Рис. 5: Функция $B^2f(x)$ в примере 1.

Трехмерный график для функции $u(x,t)$, полученной по формуле (35):

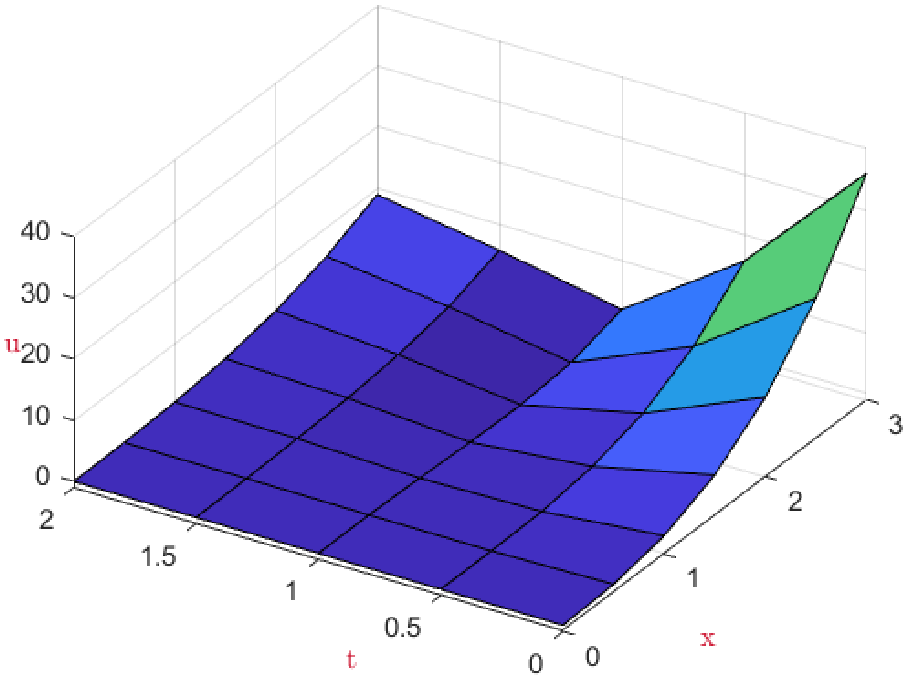

Рис. 6: Функция $u(x,t)$ в примере 1.

6.2 Пример 2

Пусть

$$l = 4, \quad T = 3, \quad a = 1,$$
$$\sigma(x) = 0, \quad \gamma(t) = 0, \quad u_0(x) = 0, \quad u_1(x) = x.$$

Зададим функцию $\varphi(t)$ следующим образом

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1, \\ -1, & 1 \leqslant t < 2, \\ 2, & 2 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

Получившаяся в процессе работы программы функция $g(x)$ выглядит так:

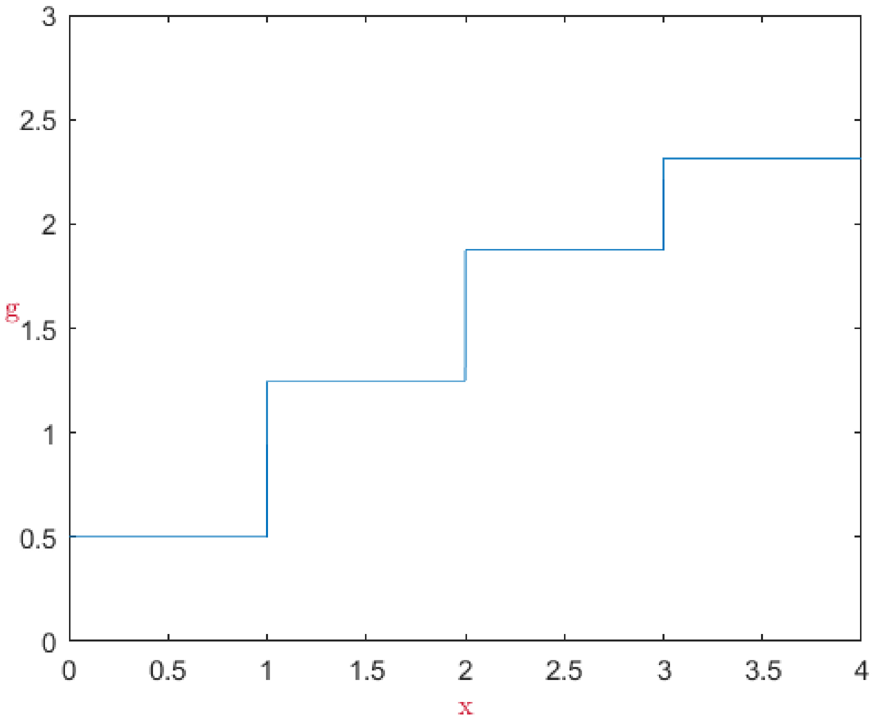

Рис. 7: Функция $g(x)$ в примере 2.

Функция $g(x)$ существует, но не является непрерывной, так как условия согласования (36) выполняются, а условия (37) – нет.

Рассмотрим подробно, как получается эта функция $g(x)$ по формуле (32). В данном примере постоянная переменная N_0 примет значение:

$$N_0 = \left\lceil \frac{4}{3-2} \right\rceil - 1 = 3.$$

Значит функция $g(x)$ будет составляться из суммы трех слагаемых, а именно:

$$g(x) = \frac{1}{\beta} f(x) + \frac{1}{\beta^2} Bf(x) + \frac{1}{\beta^3} B^2 f(x) + \frac{1}{\beta^4} B^3 f(x), \quad \beta = 2.$$

Далее посмотрим, как составляются методом итерации функции из формулы для $g(x)$.

Ниже представлены графики для функций $h(x)$ и $f(x)$, полученных по формулам (30) и (31) соответственно.

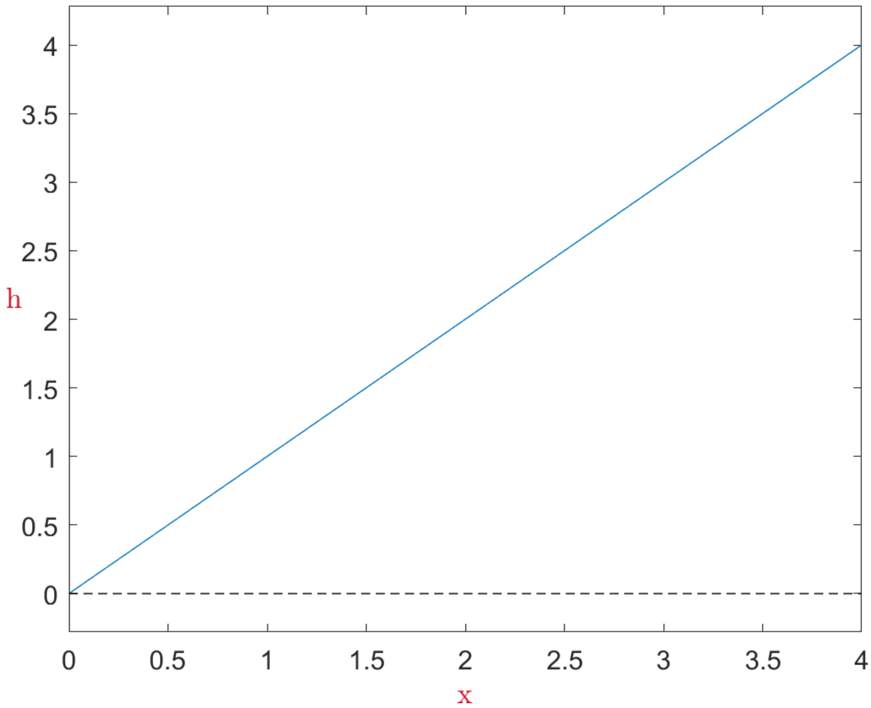

Рис. 8: Функция $h(x)$ в примере 2.

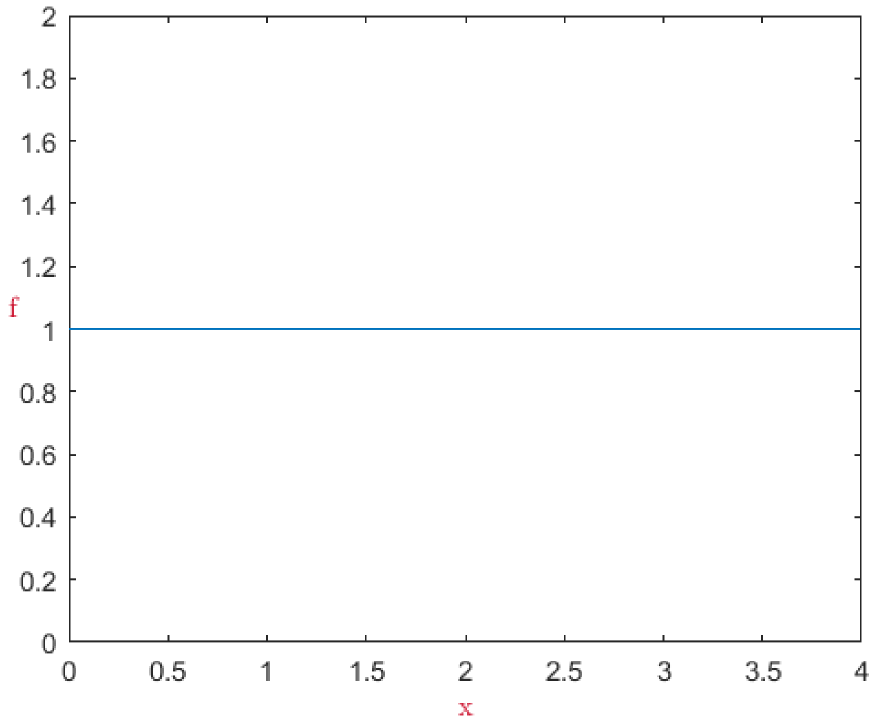

Рис. 9: Функция $f(x)$ в примере 2.

Далее представлены графики для функций $Bf(x)$ и $B^2f(x)$, полученных по формуле (33).

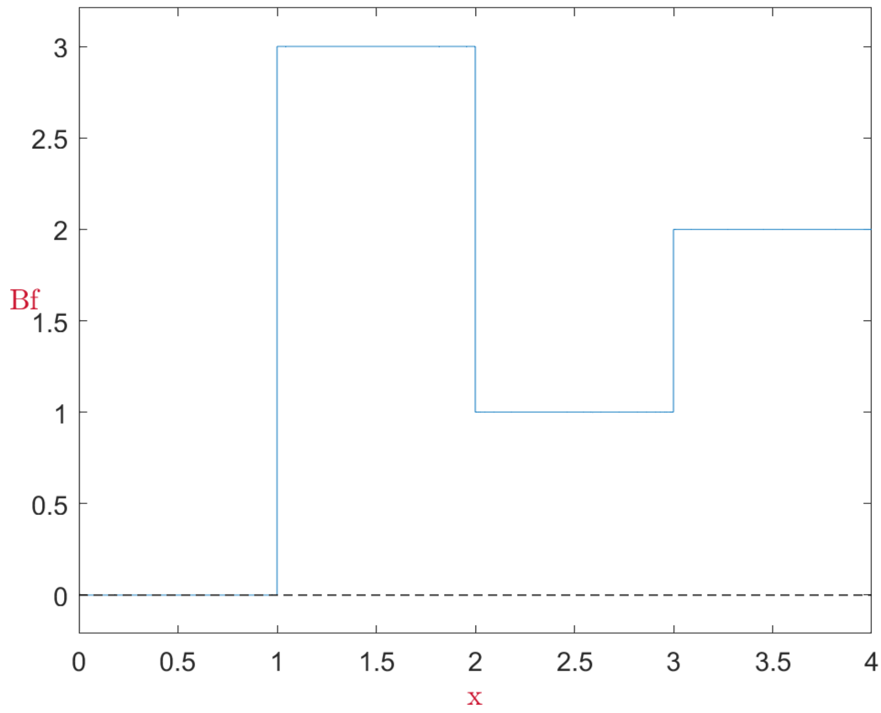

Рис. 10: Функция $Bf(x)$ в примере 2.

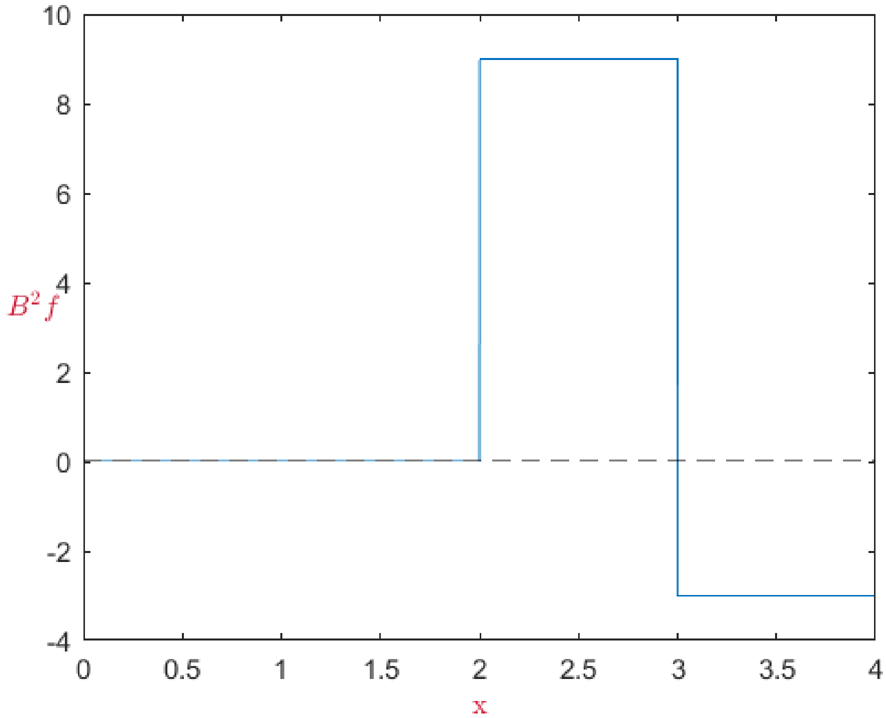

Рис. 11: Функция $B^2f(x)$ в примере 2.

Далее представлены графики для функций $B^3 f(x)$ и $u(x,t)$, полученных по формулам (33) и (35) соответственно.

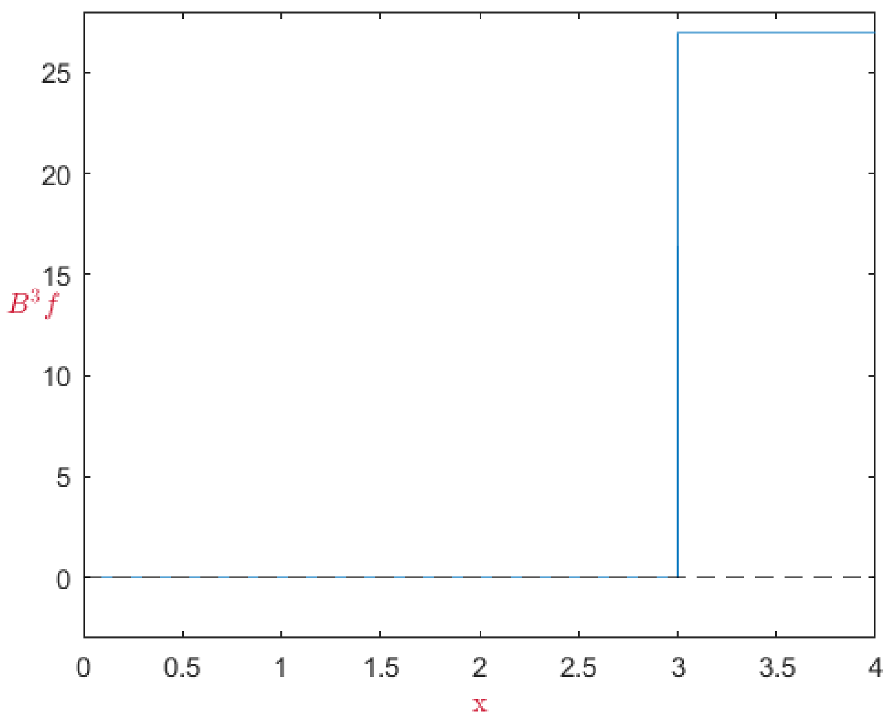

Рис. 12: Функция $B^3 f(x)$ в примере 2.

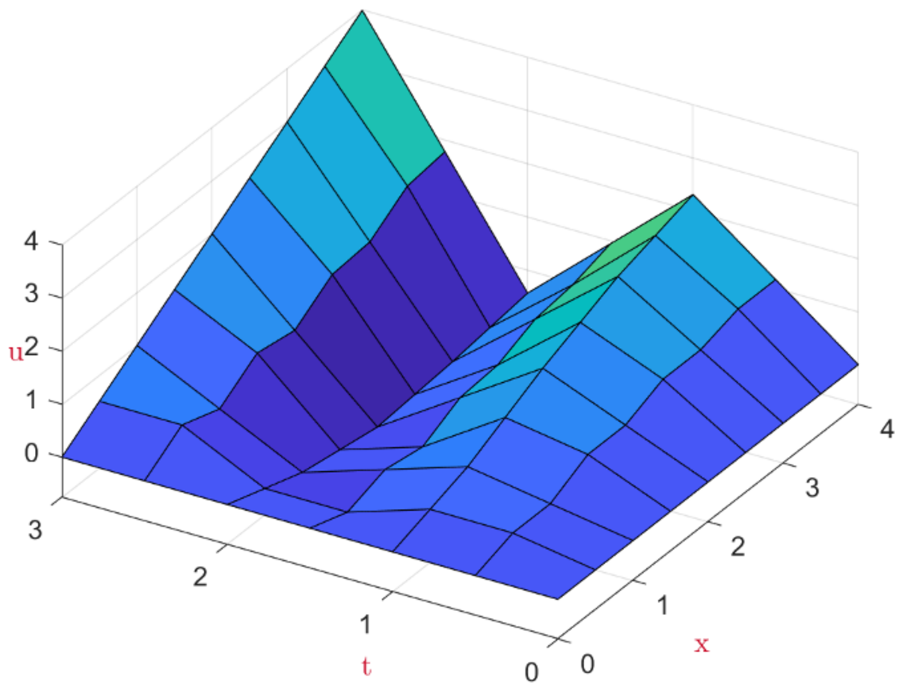

Рис. 13: Функция $u(x,t)$ в примере 2.

Дальнейшие примеры будут приводиться без подробностей, как в Примере 1 и Примере 2.

6.3 Пример 3

Пусть

$$l = 3, \quad T = 2, \quad a = 1,$$
$$\sigma(x) = 0, \quad \gamma(t) = 2 + \sin \pi t, \quad u_0(x) = -\pi x + 2, \quad u_1(x) = \frac{x^2}{2} - \pi x + 2.$$

Зададим функцию $\varphi(t)$ следующим образом

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Получившаяся в процессе работы программы функция $g(x)$ выглядит так:

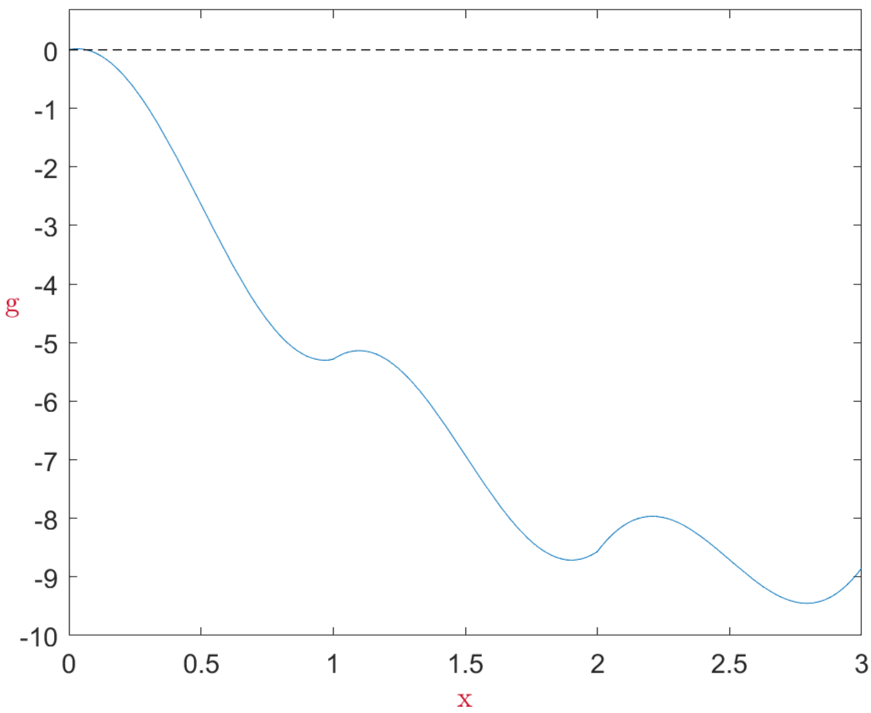

Рис. 14: Функция $g(x)$ в примере 3.

Функция $g(x)$ непрерывна, так как условия согласования (36) и (37) выполнены.

Далее, трехмерный график для функции $u(x,t)$:

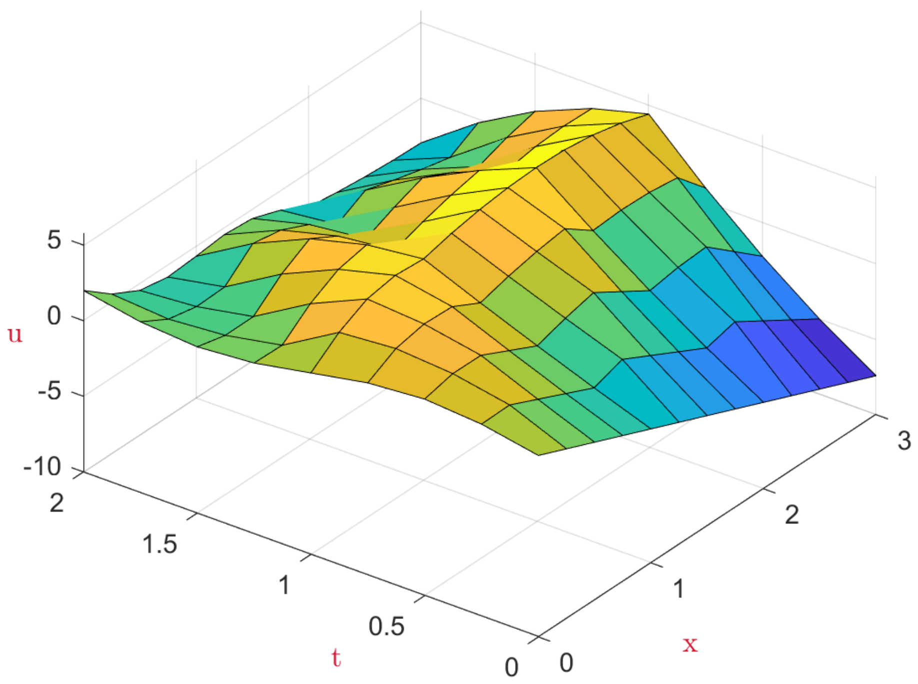

Рис. 15: Функция $u(x,t)$ в примере 3.

6.4 Пример 4

Пусть

$$l = 3, \quad T = 2, \quad a = 1,$$
$$\sigma(x) = -1, \quad \gamma(t) = 1, \quad u_0(x) = e^x, \quad u_1(x) = x + 1.$$

Зададим функцию $\varphi(t)$ следующим образом

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 2, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Условия согласования (36) и (37) выполнены, значит функция $g(x)$ получается непрерывной.

Далее представлены получившиеся в процессе работы программы функции $g(x)$ и $u(x, t)$.

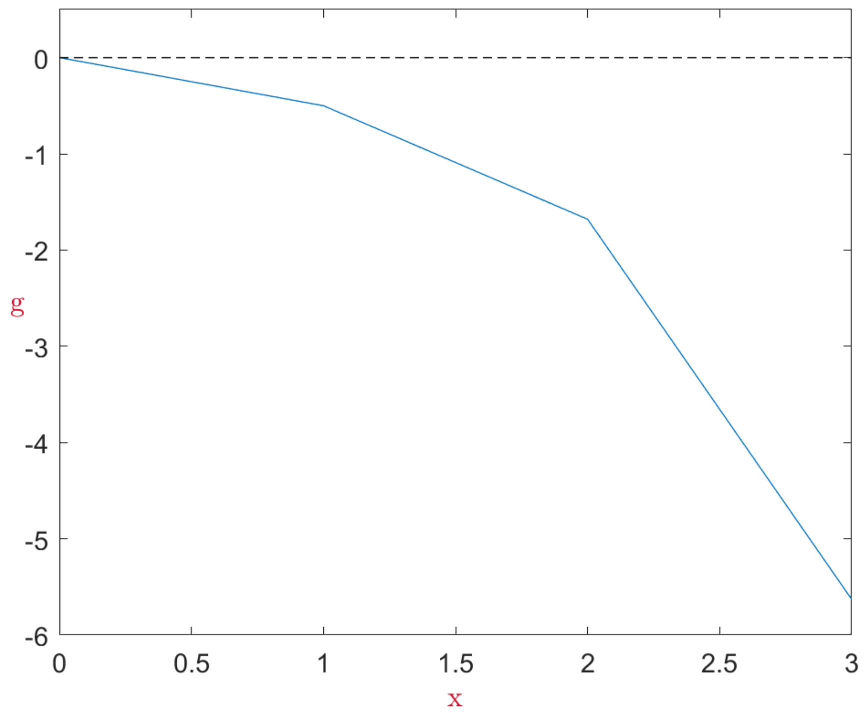

Рис. 16: Функция $g(x)$ в примере 4.

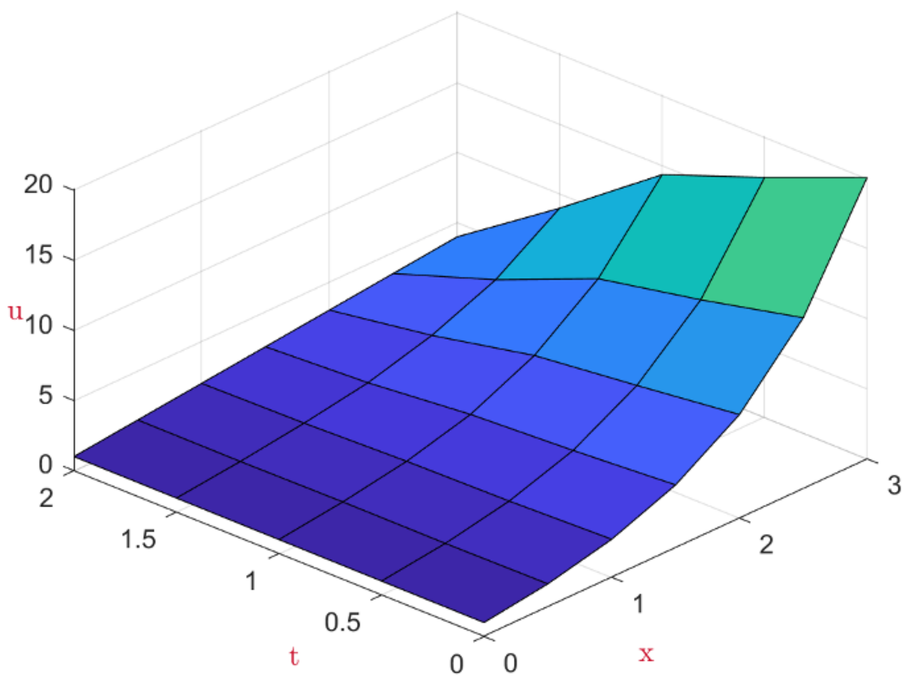

Рис. 17: Функция $u(x, t)$ в примере 4.

6.5 Пример 5

Пусть

$$l = 3, \quad T = 3, \quad a = 1,$$
$$\sigma(x) = x, \quad \gamma(t) = 0, \quad u_0(x) = x, \quad u_1(x) = \sin(x).$$

Зададим функцию $\varphi(t)$ следующим образом

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1, \\ -1, & 1 \leqslant t < 2, \\ 2, & 2 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

Получившаяся в процессе работы программы функция $g(x)$ выглядит так:

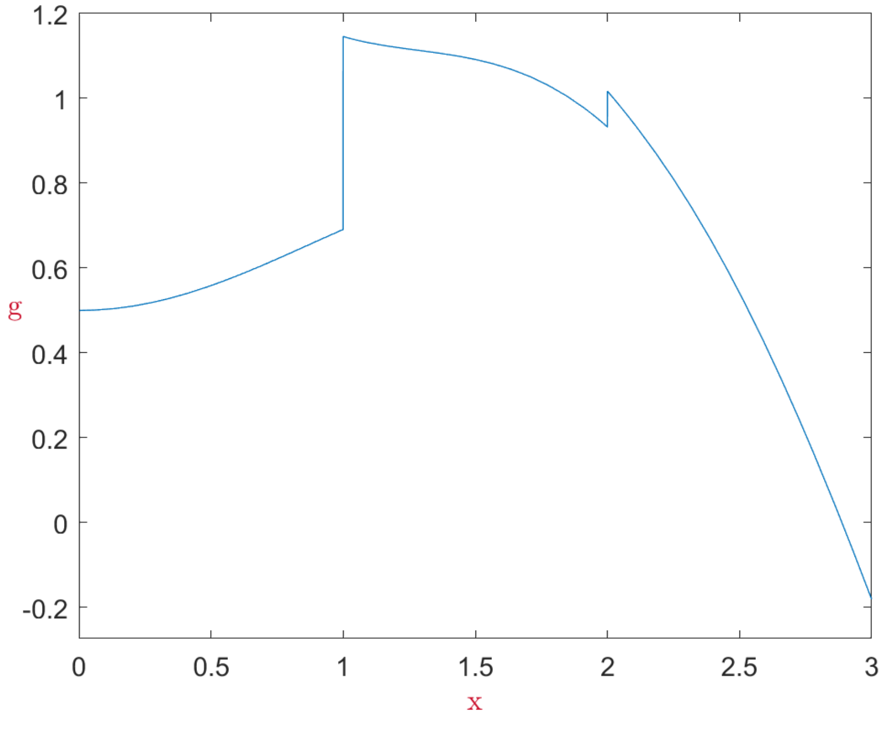

Рис. 18: Функция $g(x)$ в примере 5.

Функция $g(x)$ существует, но не является непрерывной, так как условия согласования (36) выполнены, а условия (37) не выполнены.

На основе полученной функции $g(x)$ получим график решения $u(x,t)$:

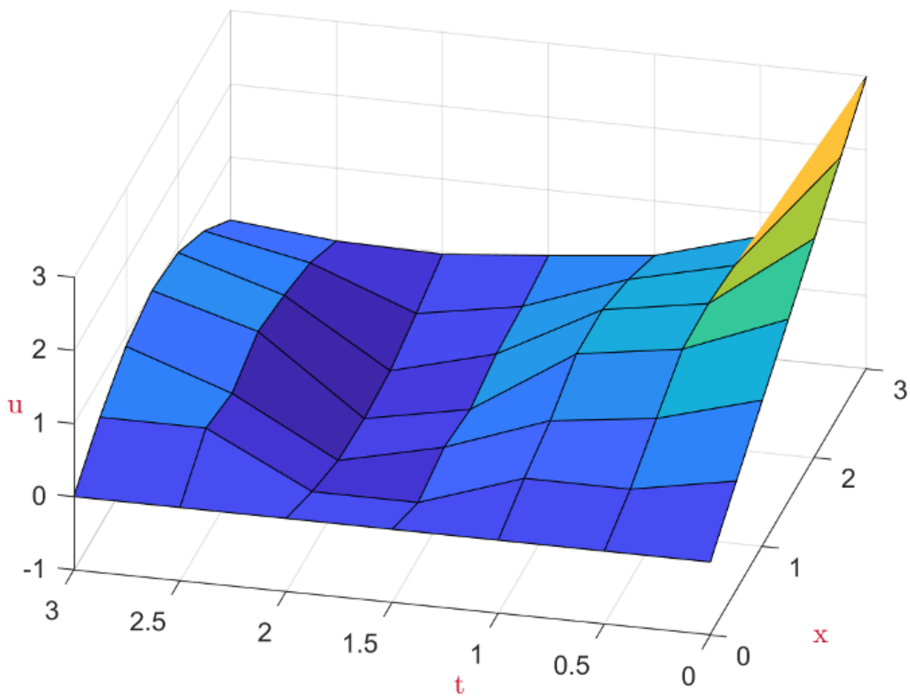

Рис. 19: Функция $u(x,t)$ в примере 5.

6.6 Пример 6

Пусть

$$l = 2, \quad T = 2, \quad a = 1,$$
$$\sigma(x) = 2x^{10}(2-x)^{10}, \quad \gamma(t) = 0, \quad u_0(x) = x^2, \quad u_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad \varphi(t) = 1.$$

Функция $g(x)$ получится непрерывной, так как условия согласования (36) и (37) выполнены.

Далее представлены получившиеся в процессе работы программы функции $g(x)$ и $u(x,t)$.

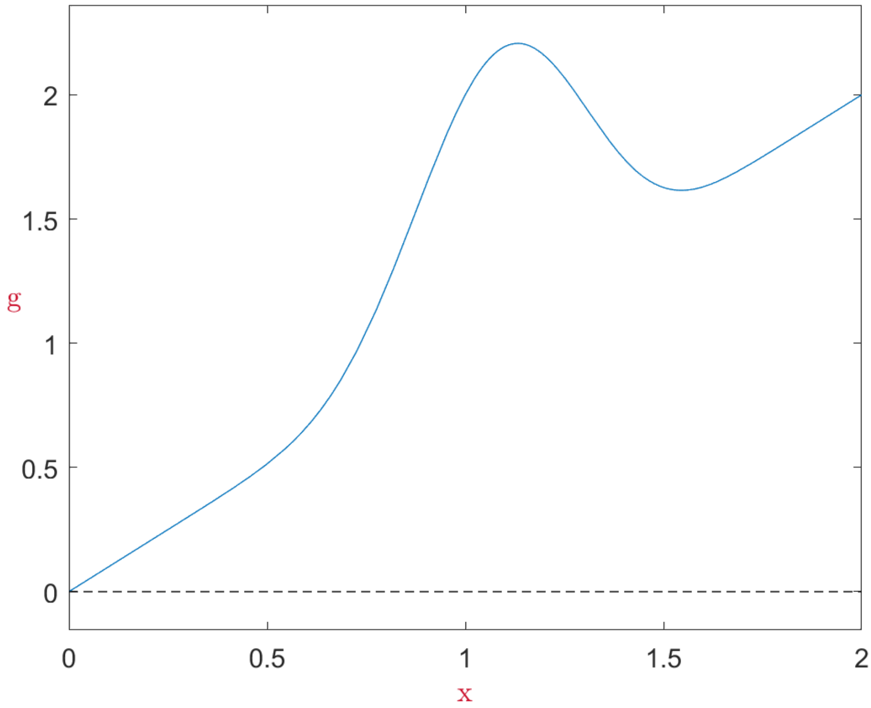

Рис. 20: Функция $g(x)$ в примере 6.

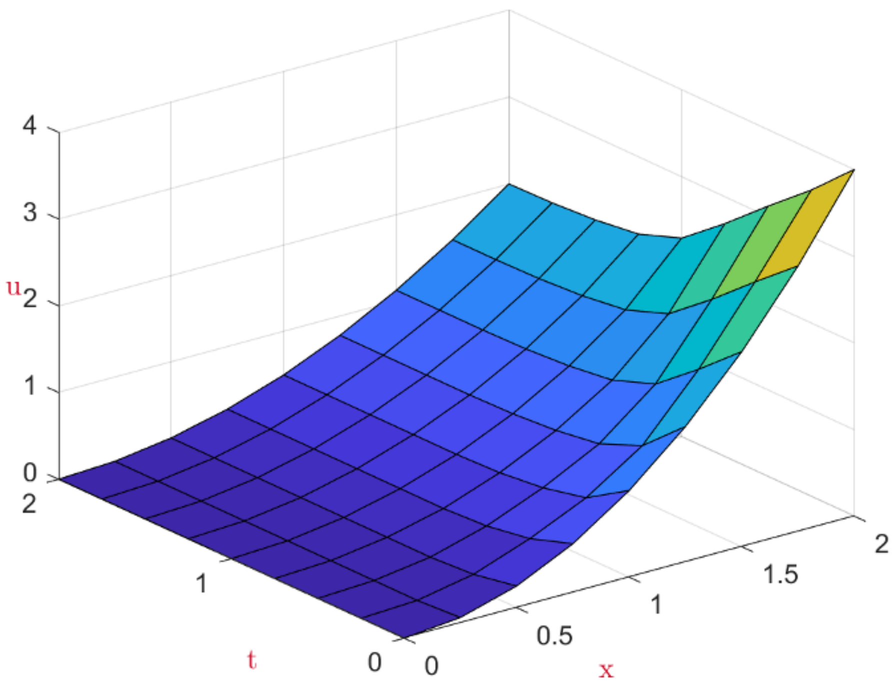

Рис. 21: Функция $u(x,t)$ в примере 6.

Заключение

В настоящей работе исследовался специальный случай обратной задачи для одномерного уравнения простого переноса с поглощением. При этом:

1. Проведен подробный вывод решения абстрактной задачи для эволюционного уравнения с нильпотентной полугруппой.

2. Разработана теоретическая схема решения обратной задачи и получены явные разрешающие формулы.

3. На основе полученных формул был получен алгоритм решения обратной задачи.

4. Исследован вопрос о непрерывности и гладкости получаемых решений.

5. Написана компьютерная программа, которая реализует теоретические алгоритмы, визуализирует вычисления и экспортирует данные.

6. Проведена серия вычислительных экспериментов для различных значений входных данных, подтвердившая высокую надёжность алгоритма.

В результате проделанной работы все поставленные цели достигнуты и исследование можно считать завершённым.

Список литературы

[1] Балакришнан А. В. *Прикладной функциональный анализ.* М.: Наука. Физматлист, 1980. – 383 с.

[2] Ву Нгуен Шон Тунг, Тихонов И. В. *О специальном случае одной обратной задачи для эволюционно уравнения с нильпотентной полугруппой* // Современные метода теории функций и смежные проблемы : Сборник трудов. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021, с. 83–88

[3] Кабдуали Б. И. *Исследование нелокальной задачи для уравнения переноса при специальных предположениях.* Нур-Султан: ВКР МГУ имени Ломоносова, КФ, 2020. – 33 с.

[4] Пази А. (Pazy A.) *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* N.Y.: Springer-Verlag, 1983. – 288 с.

[5] Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг. *Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой* // Вестник РУДН. Серия Математика, информатика, физика. 2018, Т. 26, №2, с. 103–118

[6] Треногин В. А. *Функциональный анализ.* М.: Физматлист, 2007. – 488 с.

[7] Филиппов А. Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений.* Москва: КомКнига, 2007. – 240 с.

[8] Филиппов А. Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.

[9] [Электронный ресурс] *MATLAB documentation.* https://uk.mathworks.com/help/matlab/index.html

[10] Якимов А. С. *Аналитический метод решения уравнений математической физики.* Томск: Изд-во Томского ун-та, 2010. – 197 с.