Nichtlineare Optimierung - 4. Hausaufgabe

Claudia Wohlgemuth	*366323*
Thorsten Lucke	*363089*
Felix Thoma	*358638*

Tutor: Mathieu Rosière

19. Juni 2017

4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	Σ

Anmerkungen:

Aufgabe 4.1

Aufgabe 4.2

Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexer Kegel mit $0 \in K$.

(i) Wir zeigen, dass K^* abgschlossen ist. Sei dazu $(x_n)_n \subset K^*$ eine in $\mathbb{R}^d$ konvergente Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}^d$. Sei $y \in K$ beliebig. Nach Definition des Dualkegels gilt

$$\langle x_n, y \rangle \leq 0$$

und mit der Stetigkeit der dualen Paarung folgt

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle \leq 0.$$

Weil y beliebig war, ist $x \in K^*$.

(ii) Wir zeigen, dass K genau dann abgeschlossen ist, wenn $K = K^{**}$ ist.

$\Leftarrow$ Wegen $K^{**} = (K^*)^*$ folgt mit (i) die Abgeschlossenheit von $K^{**} = K$.

$\Rightarrow$ Für jeden Kegel gilt $K \subset K^{**}$, denn ist $x \in K$ beliebig, so gilt für alle $s \in K^*$

$$\langle x, s \rangle \leq 0,$$

d.h. $x \in K^{**}$. Bleibt noch die zweite Inklusion $K \supset K^{**}$ zu zeigen. Angenommen, es gäbe $y \in K^{**}\backslash\{K\}$. Nach dem Trennungssatz gibt es ein $s \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\langle s, y - x \rangle > 0$$

für alle $x \in K$. Isbesondere ist also

$$\langle s, y \rangle > 0.$$

Für $\lambda > 0$ und $x \in K$ gilt

$$0 < \langle s, y - \lambda x \rangle = \langle s, y \rangle - \lambda \langle s, x \rangle.$$

Weil λ beliebig war, folgt $\langle s, x \rangle \leq 0$ für alle $x \in K$. Damit ist $s \in K^*$. Dann müsste aber auch

$$\langle s, y \rangle \leq 0$$

sein, was uns den ersehnten Widerspruch liefert. Folglich ist $K \supset K^{**}$.

(iii) Es sei $f \in K^*$ und es gelte $\langle f, x_0 \rangle \leq 0$ für einen einen inneren Punkt $x_0 \in K$. Wir zeigen mittels Widerspruchsbeweis, dass $f = 0$ ist. Sei also $f \neq 0$. Da x_0 ein innerer Punkt von K ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset K$. Damit ist insbesondere $x_0 + \frac{\varepsilon}{\|f\|} f \in K$ und es gilt

$$0 \geq \langle f, x_0 + \frac{\varepsilon}{\|f\|} f \rangle = \langle f, x_0 \rangle + \langle f, \frac{\varepsilon}{\|f\|} f \rangle = 0 + \varepsilon \|f\|.$$

Dies kann aber nur gelten, wenn $\|f\| = 0$ ist, was im Widerspruch zur Annahme $f \neq 0$ steht.

(iv) Diese Aussage ist falsch. Dazu betrachten wir für $d = 2$ den Kegel

$$K \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : 0 < x_1 \wedge 0 < x_2 \right\} \cup \{0\}$$

und

$$K^* = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} : 0 \geq s_1 \wedge 0 \geq s_2 \right\}.$$

Dass K und K^* Kegel sind, ist offensichtlich. Außerdem gilt für jedes $s \in K^*$

$$\langle s, x \rangle = s_1 x_1 + s_2 x_2 \leq 0$$

für alle $x \in K$. Andererseits ist für $y \in \mathbb{R}^2 \backslash K^*$ entweder $y_1 > 0$ oder $y_2 > 0$; sei o.B.d.A. $y_1 > 0$. Dann gilt für $x \coloneqq (y_1 + |y_2|, \frac{y_1}{2})^T \in K$

$$\langle x, y \rangle \geq y_1^2 + \frac{|y_2| y_1}{2} > 0.$$

Damit ist gezeigt, dass K^* tatsächlich der Dualkegel von K ist. Offensichtlich ist der erste Einheitsvektor nicht in K enthalten, dennoch gilt

$$\langle e_1, s \rangle \leq 0$$

für alle $s \in K^*$.

Aufgabe 4.3

Aufgabe 4.4

Bevor wir die gestellten Aufgaben lösen, beweisen wir den folgenden Hilfssatz.

Lemma. Ist $S := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$, so gilt $K(S,0) = \mathbb{R}^2$.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Dann können wir dieses x durch die Wahl eines geeigneten $\varphi_x \in [0, 2\pi[$ in Polarkoordinaten wie folgt darstellen:

$$x = \|x\|_2 \cdot (\cos(\varphi_x), \sin(\varphi_x)).$$

Setzen wir $\widetilde{x} := (\cos(\varphi_x), \sin(\varphi_x))$, so ist $\|\widetilde{x}\|_2 = 1$ und damit $\widetilde{x} \in S$. Nach Konstruktion folgt dann aus

$$x = \|x\|_2 \cdot (\widetilde{x} - 0) \in K(S,0)$$

die Behauptung. □

Nun widmen wir uns den gestellten Aufgaben. Dabei übernehmen wir jeweils die gegebenen Voraussetzungen und Notationen.

(i) Da die Eigenschaft der Konvexität translationsinvariant ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x_0 = 0$ gilt. Da x_0 nach Voraussetzung ein innerer Punkt von C ist, muss ein $\varepsilon > 0$ existieren, mit

$$\overline{U_\varepsilon(0)} \subseteq C.$$

Da Konvexität auch unter Skalierung invariant bleibt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon = 1$ annehmen.

Ist nun ein $x \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben, dann gibt es einen Unterraum E_x mit $\dim(E) = 2$ sodass $x \in E_x$ und trivialerweise auch $x_0 \in E$ gilt. Da E_x isomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist, folgt aus dem eingangs bewiesenen Lemma $K(C,0) \cap E_x = E_x$. Da x beliebig gewählt war, gilt folglich

$$K(C,0) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} E_x = \mathbb{R}^n.$$

Des Weiteren gilt $N(C,0) = \{0\}$. Wäre dies nicht der Fall, so müsste eine Normalenrichtung $s \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existieren, die für alle $y \in C$ die Abschätzung

$$\langle s, y \rangle \leq 0$$

erfüllt. Wegen $C = \mathbb{R}^n$ muss diese Bedinungen insbesondere für $y = s$ erfüllt sein. Das ist aber der positiven Definitheit von Skalarprodukten wegen nicht möglich. Es gilt nämlich $\langle s, s \rangle > 0$.

Aufgabe 4.5

Es sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ symmetrisch und positiv de nit sowie $b \in \mathbb{R}^n$. Ferner bezeichne $\|\cdot\|_A$ die von A induzierte Norm und $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ die von A^{-1} induzierte Norm. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$ und sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ein völlig beliebiger Vektor.

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|x-\tilde{x}\|_A^2 &= (x-\tilde{x})^T A(x-\tilde{x})\\ &= (A^{-1}b-\tilde{x})^T(b-A\tilde{x})\\ &= (A^{-1}(b-A\tilde{x}))^T(b-A\tilde{x})\\ &= \|b-A\tilde{x}\|_{A^{-1}}^2.\end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann für beliebiges $w \in \mathbb{R}^n$

$$\|x-\tilde{x}\|_A = \|b-(w-w)-A\tilde{x}\|_{A^{-1}} \leq \|b-w\|_{A^{-1}} + \|A\tilde{x}-w\|_{A^{-1}}.$$

Wir betrachten nun $n = 1$ und $A = \mathrm{id}$. Dann gilt z.B. für $x = 0$, $\tilde{x} = 1$ und $w = 0$ die Gleichheit

$$|x-\tilde{x}| = |0-1| = 1 = |0-0| + |1-0| = |b-w| + |A\tilde{x}-w|.$$