Nichtlineare Optimierung - 1. Hausaufgabe

Claudia Wohlgemuth	*366323*
Thorsten Lucke	*363089*
Felix Thoma	*358638*

Tutor: Mathieu Rosière, Di 8-10 Uhr

1. Mai 2017

1.1	1.2	1.3	1.4	Σ

Anmerkungen:

Aufgabe 1.1

(i) Es sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Wir werden zeigen, dass A genau dann positiv definit ist, wenn A stark positiv ist.

Beweis. Sei A zunächst stark positiv. Dann existiert ein $\alpha > 0$, sodass die Abschätzung

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2 \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist. Der positiven Definitheit von Normen wegen folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ unmittelbar

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2 > 0.$$

Die Abbildung A ist also positiv definit.

Sei A nun positiv definit und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig gewählt. Ist $x = 0$, so gilt (1) für alle $\alpha > 0$. Sei daher x von Null verschieden. Dann gilt (1) genau dann, wenn

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \geq \alpha$$

beziehungsweise

$$\langle Ay, y\rangle \geq \alpha$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| = 1$ erfüllt ist. Da lineare Abbildungen – auf endlichen Vekorräumen operierend – beschränkt und stetig sind, ist auch die Abbildung

$$f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R},\ y \mapsto \langle Ay, y\rangle$$

stetig. Weil die Einheitssphäre $\mathbb{S}^1$ kompakt ist, folgt aus dem Satz von Weierstraß die Existenz eines Minimums $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(y) \geq \alpha$ für alle $y \in \mathbb{S}^1$. Da A positiv definit ist, muss zudem $\alpha > 0$ gelten. Es folgt daher insgesamt

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und damit die starke Positivität von A. □

(ii) Wir zeigen nun, dass (i) im Allgemeinen falsch ist. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$A\colon \ell_2 \to \ell_2,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $(x_n/n)^2 \leq (x_n)^2$ gilt, folgt wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}x_n\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2$$

die Wohldefiniertheit und Beschränktheit der Abbildung A aus dem Majorantenkriterium für Reihen.

Desweiteren folgt aus

$$\langle A(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n^2 \geq 0$$

die positive Definitheit.

Seien nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ zwei Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Dann ist A wegen

$$\begin{aligned}
A(\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= A((\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= A((\lambda x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= \left(\frac{1}{n}(\lambda x_n + y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \left(\lambda \frac{x_n}{n} + \frac{y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \lambda \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} + \left(\frac{y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \lambda A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + A(y_n)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

linear.

Sei nun $\alpha > 0$ beliebig gewählt. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \alpha$. Für den k-ten Einheitsbasisvektor $e_k = (\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ des ℓ_2 gilt dann

$$\langle Ae_k, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \delta_{k,n}^2 = \frac{1}{k} < \alpha.$$

Demnach kann kein $\alpha > 0$ existieren, welches der Forderung

$$\langle A(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle \geq \alpha \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2$$

für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ genügt.

Aufgabe 1.2

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion.

(i) Sei f zusätzlich konvex und seien $(x, \alpha), (y, \beta) \in \operatorname{epi}(f)$ sowie $\lambda \in [0,1]$ beliebig gewählt. Dann folgt aus der Konvexität von f und der Definition des Epigraphen

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta.$$

Daher ist der Epigraph von f wegen

$$\lambda(x, \alpha) + (1-\lambda)(y, \beta) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \in \operatorname{epi}(f)$$

konvex.

Ist hingegen $\operatorname{epi}(f)$ konvex und sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ sowie $\lambda \in [0,1]$ vorgegeben, erhalten wir mit $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \operatorname{epi}(f)$ auch

$$(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \in \operatorname{epi}(f).$$

Die Behauptung

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

folgt sofort.

(ii) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch, wie sich leicht an

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

einsehen lässt. Offensichtlich ist f nicht stetig. Dennoch ist

$$\operatorname{epi}(f) = \mathbb{R} \times [0, \infty) \cup \{0\} \times [-1, \infty)$$

abgeschlossen.

(iii) Wir zeigen, dass f genau dann unterhalbstetig ist, wenn $\operatorname{epi}(f)$ abgeschlossen ist.

Zuerst wollen wir die Unterhalbstetigkeit von f voraussetzen. Dann gilt

$$f(x) \leq \liminf_{t \to x} f(t)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Sei nun $(x_n, \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \operatorname{epi}(f)$ eine beliebige in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ konvergente Folge. Wir setzen $x \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n$ und $\alpha \coloneqq \lim_{n\to\infty} \alpha_n$. Dies ist wohldefiniert, da Folgenkonvergenz in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ äquivalent zu komponentenweiser Konvergenz ist. Dann gilt wegen der Unterhalbstetigkeit von f

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \geq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$$

und somit $(x, \alpha) \in \operatorname{epi}(f)$. Es folgt die Abgeschlossenheit des Epigraphen von f.

Ist nun $\operatorname{epi}(f)$ abgeschlossen, $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige gegen x konvergente Folge in $\mathbb{R}^n$, so gilt wegen $(x_n, f(x_n)) \in \operatorname{epi}(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Abgeschlossenheit von $\operatorname{epi}(f)$ auch

$$\begin{aligned}(x, \liminf_{n\to\infty} f(x_n)) &= (\lim_{n\to\infty} x_n, \liminf_{n\to\infty} f(x_n)) \\ &= (\liminf_{n\to\infty} x_n, \liminf_{n\to\infty} f(x_n)) \\ &\overset{(*)}{=} \liminf_{n\to\infty} (x_n, f(x_n)) \in \operatorname{epi}(f).\end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir wieder die Äquivalenz von komponentenweiser Konvergenz und Folgenkonvergenz genutzt. Es gilt demnach

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

womit die Aussage bewiesen ist.

Die eigentliche Behauptung folgt nun aus der Analysis-1-Übung vom 9. Dezember 2016. Dort wurde gezeigt, dass koerzitive und unterhalbstetige Funktionen ein Minimum besitzen. $\square$

Aufgabe 1.3

Wir zeigen, dass ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ genau dann endlichdimensional ist, wenn die Niveaumenge $N(f, \alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes stetige koerzitive Funktional $f\colon X \to \mathbb{R}$ kompakt ist. Dazu nutzen wir im Folgenden die zum Hinweis äquivalente Aussage: Ein normierter Raum ist genau dann endlichdimensional, wenn beschränkte und abgeschlossene Mengen kompakt sind; dies ist insbesondere genau dann erfüllt, wenn die abgeschlossene Einheitskugel kompakt ist.

Beweis. Wir wollen zunächst annehmen, dass X endlichdimensional ist. Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ ein beliebig gewähltes stetiges und koerzitives Funktional und sei $\alpha \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in X$ mit $\|x\| > r$ bereits $f(x) > \alpha$ gilt. Somit ist $N(\alpha) := N(f, \alpha) \subset \overline{B(0, r)}$ und es folgt die Beschränktheit der Niveaumenge $N(\alpha)$.

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset N(\alpha) \subset X$ eine gegen $x \in X$ konvergente Folge. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \alpha = \alpha.$$

und somit wegen $x \in N(\alpha)$ die Abgeschlossenheit der Niveaumenge $N(\alpha)$. Da X endlichdimensional ist, folgt wegen des Satzes von Heine-Borel die Kompaktheit der Niveaumenge.

Sei nun für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes stetige, koerzitive Funktional $f\colon X \to \mathbb{R}$ die Niveaumenge $N(\alpha)$ kompakt. Dann gilt dies insbesondere für jede Norm $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$. Dabei ist $\|\cdot\|$ offensichtlich koerzitiv und stetig. Weiterhin ist $N(1) = \overline{B(0, 1)}$ nach Voraussetzung kompakt. Dass die abgeschlossene Einheitskugel kompakt ist, ist äquivalent zur Endlichdimensionalität von X. $\square$

Aufgabe 1.4

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus der Aufgabenstellung und untersuchen die Matrix

$$H := \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2 & H_4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \xi_i^2 & \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \sum_{i=1}^m \xi_i & m \end{pmatrix}.$$

(i) Zum Beweis der positiven Definitheit bemühen wir das Hauptminorenkriterium: Da nach Voraussetzung $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j \in 1, \ldots, m$ mit $i \neq j$ gilt, folgt für $m \geq 2$

$$\det(H_1) = 2 \sum_{i=1}^m \xi_i^2 > 0.$$

Wir setzen nun $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$. Da bekanntermaßen die Abschätzung

$$\sqrt{m} \cdot \|\xi\|_2 \geq \|\xi\|_1$$

gilt, folgt auch

$$H_1 H_4 = 4m \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \geq 4 \left(\sum_{i=1}^m \xi_i \right)^2 = H_2^2.$$

Da nun alle Einträge von ξ verschieden sind, gilt sogar die strikte Ungleichung und damit

$$\det(H) = H_1 H_4 - H_2^2 > 0.$$

Es folgt die positive Definitheit von H.

Ferner ist f zweimal stetig differenzierbar und damit genau dann konvex, wenn $f'' = H$ positiv definit ist. Hiermit folgt die Behauptung.

(ii) Mit 1.1. wissen wir, dass H sogar stark positiv ist. Wir haben also mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der starken Positivität ein $\alpha > 0$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\langle Hx, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \\ &\geq \frac{1}{2}\langle Hx, x\rangle - \|b\|_2 \|x\|_2 + c \\ &\geq \frac{1}{2}\alpha \|x\|_2^2 - \|b\|_2 \|x\|_2 + c =: g(\|x\|_2). \end{aligned}$$

Wegen $\alpha > 0$ folgt unmittelbar

$$\infty = \lim_{\|x\|_2 \to \infty} g(\|x\|_2) \leq \lim_{\|x\|_2 \to \infty} f(x).$$

Somit ist f koerzitiv und zusammen mit der Stetigkeit folgt die Existenz eines Minimierers. Aufgrund der strengen Konvexität von f ist dieser eindeutig.