Nichtlineare Optimierung - 4. Hausaufgabe

Claudia Wohlgemuth	*366323*
Thorsten Lucke	*363089*
Felix Thoma	*358638*

Tutor: Mathieu Rosière

17. Juni 2017

4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	Σ

Anmerkungen:

Aufgabe 4.1

Aufgabe 4.2

Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexer Kegel mit $0 \in K$.

(i) Wir zeigen, dass K^* abgschlossen ist. Sei dazu $(x_n)_n \subset K^*$ eine in $\mathbb{R}^d$ konvergente Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}^d$. Sei $y \in K$ beliebig. Nach Definition des Dualkegels gilt

$$\langle x_n, y\rangle \leq 0$$

und mit der Stetigkeit der dualen Paarung folgt

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle \leq 0.$$

Weil y beliebig war, ist $x \in K^*$.

(ii) Wir zeigen, dass K genau dann abgeschlossen ist, wenn $K = K^{**}$ ist.

$\Leftarrow$ Wegen $K^{**} = (K^*)^*$ folgt mit (i) die Abgeschlossenheit von $K^{**} = K$.

$\Rightarrow$ Für jeden Kegel gilt $K \subset K^{**}$, denn ist $x \in K$ beliebig, so gilt für alle $s \in K^*$

$$\langle x, s\rangle \leq 0,$$

d.h. $x \in K^{**}$. Bleibt noch die zweite Inklusion $K \supset K^{**}$ zu zeigen. Angenommen, es gäbe $y \in K^{**}\backslash\{K\}$. Nach dem Trennungssatz gibt es ein $s \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\langle s, y - x\rangle > 0$$

für alle $x \in K$. Isbesondere ist also

$$\langle s, y\rangle > 0.$$

Für $\lambda > 0$ und $x \in K$ gilt

$$0 < \langle s, y - \lambda x\rangle = \langle s, y\rangle - \lambda\langle s, x\rangle.$$

Weil λ beliebig war, folgt $\langle s, x\rangle \leq 0$ für alle $x \in K$. Damit ist $s \in K^*$. Dann müsste aber auch

$$\langle s, y\rangle \leq 0$$

sein, was uns den ersehnten Widerspruch liefert. Folglich ist $K \supset K^{**}$.

(iii) Es sei $f \in K^*$ und es gelte $\langle f, x_0\rangle \leq 0$ für einen einen inneren Punkt $x_0 \in K$. Wir zeigen mittels Widerspruchsbeweis, dass $f = 0$ ist. Sei also $f \neq 0$. Da x_0 ein innerer Punkt von K ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset K$. Damit ist insbesondere $x_0 + \frac{\varepsilon}{\|f\|} f \in K$ und es gilt

$$0 \geq \langle f, x_0 + \frac{\varepsilon}{\|f\|} f\rangle = \langle f, x_0\rangle + \langle f, \frac{\varepsilon}{\|f\|} f\rangle = 0 + \varepsilon\|f\|.$$

Dies kann aber nur gelten, wenn $\|f\| = 0$ ist, was im Widerspruch zur Annahme $f \neq 0$ steht.

(iv) Diese Aussage ist falsch. Dazu betrachten wir für $d = 2$ den Kegel

$$K \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : 0 < x_1 \wedge 0 < x_2 \right\} \cup \{0\}$$

und

$$K^* = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} : 0 \geq s_1 \wedge 0 \geq s_2 \right\}.$$

Dass K und K^* Kegel sind, ist offensichtlich. Außerdem gilt für jedes $s \in K^*$

$$\langle s, x \rangle = s_1 x_1 + s_2 x_2 \leq 0$$

für alle $x \in K$. Andererseits ist für $y \in \mathbb{R}^2 \backslash K^*$ entweder $y_1 > 0$ oder $y_2 > 0$; sei o.B.d.A. $y_1 > 0$. Dann gilt für $x \coloneqq (y_1 + |y_2|, \frac{y_1}{2})^T \in K$

$$\langle x, y \rangle \geq y_1^2 + \frac{|y_2| y_1}{2} > 0.$$

Damit ist gezeigt, dass K^* tatsächlich der Dualkegel von K ist. Offensichtlich ist der erste Einheitsvektor nicht in K enthalten, dennoch gilt

$$\langle e_1, s \rangle \leq 0$$

für alle $s \in K^*$.

Aufgabe 4.3

Aufgabe 4.4

Aufgabe 4.5

Es sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ symmetrisch und positiv de nit sowie $b \in \mathbb{R}^n$. Ferner bezeichne $\|\cdot\|_A$ die von A induzierte Norm und $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ die von A^{-1} induzierte Norm. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$ und sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ein völlig beliebiger Vektor.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x - \tilde{x}\|_A^2 &= (x - \tilde{x})^T A (x - \tilde{x}) \\
&= (A^{-1}b - \tilde{x})^T (b - A\tilde{x}) \\
&= (A^{-1}(b - A\tilde{x}))^T (b - A\tilde{x}) \\
&= \|b - A\tilde{x}\|_{A^{-1}}^2.
\end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann für beliebiges $w \in \mathbb{R}^n$

$$\|x - \tilde{x}\|_A = \|b - (w - w) - A\tilde{x}\|_{A^{-1}} \leq \|b - w\|_{A^{-1}} + \|A\tilde{x} - w\|_{A^{-1}}.$$

Wir betrachten nun $n = 1$ und $A = \mathrm{id}$. Dann gilt z.B. für $x = 0$, $\tilde{x} = 1$ und $w = 0$ die Gleichheit

$$|x - \tilde{x}| = |0 - 1| = 1 = |0 - 0| + |1 - 0| = |b - w| + |A\tilde{x} - w|.$$