

Nichtlineare Optimierung - 4. Hausaufgabe

Claudia Wohlgemuth *366323*
Thorsten Lucke *363089*
Felix Thoma *358638*

Tutor: Mathieu Rosière

21. Juni 2017

4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	Σ

Anmerkungen:

Aufgabe 4.1

Aufgabe 4.2

Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexer Kegel mit $0 \in K$.

- (i) Wir zeigen, dass K^* abgeschlossen ist. Sei dazu $(x_n)_n \subset K^*$ eine in \mathbb{R}^d konvergente Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}^d$. Sei $y \in K$ beliebig. Nach Definition des Dualkegels gilt

$$\langle x_n, y \rangle \leq 0$$

und mit der Stetigkeit der dualen Paarung folgt

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle \leq 0.$$

Weil y beliebig war, ist $x \in K^*$.

- (ii) Wir zeigen, dass K genau dann abgeschlossen ist, wenn $K = K^{**}$ ist.
 \Leftarrow Wegen $K^{**} = (K^*)^*$ folgt mit (i) die Abgeschlossenheit von $K^{**} = K$.
 \Rightarrow Für jeden Kegel gilt $K \subset K^{**}$, denn ist $x \in K$ beliebig, so gilt für alle $s \in K^*$

$$\langle x, s \rangle \leq 0,$$

d.h. $x \in K^{**}$. Bleibt noch die zweite Inklusion $K \supset K^{**}$ zu zeigen. Angenommen, es gäbe $y \in K^{**} \setminus \{K\}$. Nach dem Trennungssatz gibt es ein $s \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\langle s, y - x \rangle > 0$$

für alle $x \in K$. Wegen $0 \in K$ ist insbesondere

$$\langle s, y \rangle > 0.$$

Für $\lambda > 0$ und $x \in K$ gilt

$$0 < \langle s, y - \lambda x \rangle = \langle s, y \rangle - \lambda \langle s, x \rangle.$$

Weil λ beliebig war, folgt $\langle s, x \rangle \leq 0$ für alle $x \in K$. Damit ist $s \in K^*$. Dann müsste aber auch

$$\langle s, y \rangle \leq 0$$

sein, was uns den ersehnten Widerspruch liefert. Folglich ist $K \supset K^{**}$.

- (iii) Es sei $f \in K^*$ und es gelte $\langle f, x_0 \rangle \leq 0$ für einen inneren Punkt $x_0 \in K$. Wir zeigen mittels Widerspruchsbeweis, dass $f = 0$ ist. Sei also $f \neq 0$. Da x_0 ein innerer Punkt von K ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset K$. Damit ist insbesondere $x_0 + \frac{\varepsilon}{\|f\|} f \in K$ und es gilt

$$0 \geq \langle f, x_0 + \frac{\varepsilon}{\|f\|} f \rangle = \langle f, x_0 \rangle + \langle f, \frac{\varepsilon}{\|f\|} f \rangle = 0 + \varepsilon \|f\|.$$

Dies kann aber nur gelten, wenn $\|f\| = 0$ ist, was im Widerspruch zur Annahme $f \neq 0$ steht.

(iv) Diese Aussage ist falsch. Dazu betrachten wir für $d = 2$ den Kegel

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : 0 < x_1 \wedge 0 < x_2 \right\} \cup \{0\}$$

und

$$K^* = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} : 0 \geq s_1 \wedge 0 \geq s_2 \right\}.$$

Dass K und K^* Kegel sind, ist offensichtlich. Außerdem gilt für jedes $s \in K^*$

$$\langle s, x \rangle = s_1 x_1 + s_2 x_2 \leq 0$$

für alle $x \in K$. Andererseits ist für $y \in \mathbb{R}^2 \setminus K^*$ entweder $y_1 > 0$ oder $y_2 > 0$; sei o.B.d.A. $y_1 > 0$. Dann gilt für $x := (y_1 + |y_2|, \frac{y_1}{2})^T \in K$

$$\langle x, y \rangle \geq y_1^2 + \frac{|y_2|y_1}{2} > 0.$$

Damit ist gezeigt, dass K^* tatsächlich der Dualkegel von K ist. Offensichtlich ist der erste Einheitsvektor nicht in K enthalten, dennoch gilt

$$\langle e_1, s \rangle \leq 0$$

für alle $s \in K^*$.

Aufgabe 4.3

Es sei $C \in \mathbb{R}^d$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge. Für einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$ definieren wir

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2$$

und

$$P_C(x_0) := \arg \min_{x \in C} f(x) = \arg \min_{x \in C} \|x - x_0\|.$$

- (i) Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}^d$. Da f strikt konvex ist, ist die Lösung des Problems eindeutig. Und es gilt genau dann $p(x_0) = x$, wenn x die Variationsungleichung

$$0 \leq \langle \nabla f(x), y - x \rangle = \langle x - x_0, y - x \rangle \quad \text{für alle } y \in C$$

erfüllt. Dies ist äquivalent zu

$$0 \geq \langle x_0 - x, y - x \rangle \quad \text{für alle } y \in C,$$

mit anderen Worten $x_0 - x \in N(C, x)$.

- (ii) Sei zusätzlich $x_1 \in \mathbb{R}^d$. Wegen $P_C(x_0), P_C(x_1) \in C$ haben wir mit Aufgabenteil (ii)

$$0 \geq \langle x_0 - P_C(x_0), P_C(x_1) - P_C(x_0) \rangle$$

und

$$0 \geq \langle x_1 - P_C(x_1), P_C(x_0) - P_C(x_1) \rangle.$$

Durch Addition ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle x_0 - P_C(x_0), P_C(x_1) - P_C(x_0) \rangle + \langle x_1 - P_C(x_1), P_C(x_0) - P_C(x_1) \rangle \\ &= \langle x_0 - P_C(x_0), P_C(x_1) - P_C(x_0) \rangle + \langle P_C(x_1) - x_1, P_C(x_1) - P_C(x_0) \rangle \\ &= \langle P_C(x_1) - P_C(x_0), P_C(x_1) - P_C(x_0) \rangle + \langle x_0 - x_1, P_C(x_1) - P_C(x_0) \rangle. \end{aligned}$$

Somit ist mit CAUCHY-SCHWARZ

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_0)\|^2 \leq \langle x_1 - x_0, P_C(x_1) - P_C(x_0) \rangle \leq \|x_1 - x_0\| \|P_C(x_1) - P_C(x_0)\|$$

und damit insbesondere

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_0)\| \leq \|x_1 - x_0\|,$$

was gerade die Stetigkeit von P_C bedeutet.

Aufgabe 4.4

Bevor wir die gestellten Aufgaben lösen, beweisen wir den folgenden Hilfssatz.

Lemma. Ist $S := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$, so gilt $K(S, 0) = \mathbb{R}^2$.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Dann können wir dieses x durch die Wahl eines geeigneten $\varphi_x \in [0, 2\pi[$ in Polarkoordinaten wie folgt darstellen:

$$x = \|x\|_2 \cdot (\cos(\varphi_x), \sin(\varphi_x)).$$

Setzen wir $\tilde{x} := (\cos(\varphi_x), \sin(\varphi_x))$, so ist $\|\tilde{x}\|_2 = 1$ und damit $\tilde{x} \in S$. Nach Konstruktion folgt dann aus

$$x = \|x\|_2 \cdot (\tilde{x} - 0) \in K(S, 0)$$

die Behauptung. □

Nun widmen wir uns den gestellten Aufgaben. Dabei übernehmen wir jeweils die gegebenen Voraussetzungen und Notationen.

- (i) Da die Eigenschaft der Konvexität translationsinvariant ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x_0 = 0$ gilt. Da x_0 nach Voraussetzung ein innerer Punkt von C ist, muss ein $\varepsilon > 0$ existieren, mit

$$\overline{U_\varepsilon(0)} \subseteq C.$$

Da Konvexität auch unter Skalierung invariant bleibt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon = 1$ annehmen.

Ist nun ein $x \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben, dann gibt es einen Unterraum E_x mit $\dim(E) = 2$ sodass $x \in E_x$ und trivialerweise auch $x_0 \in E$ gilt. Da E_x isomorph zu \mathbb{R}^2 ist und wir $E_x \cap \overline{U_\varepsilon(0)}$ mit S identifizieren können, folgt aus dem eingangs bewiesenen Lemma $K(C, 0) \cap E_x = E_x$. Da x beliebig gewählt war, gilt folglich

$$K(C, 0) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} E_x = \mathbb{R}^n.$$

Des Weiteren gilt $N(C, 0) = \{0\}$. Wäre dies nicht der Fall, so müsste eine Normalenrichtung $s \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existieren, die für alle $y \in C$ die Abschätzung

$$\langle s, y \rangle \leq 0$$

erfüllt. Wegen $C = \mathbb{R}^n$ muss diese Bedingungen insbesondere für $y = s$ erfüllt sein. Das ist aber der positiven Definitheit von Skalarprodukten wegen nicht möglich. Es gilt nämlich $\langle s, s \rangle > 0$.

- (ii) Es sei $H^+ := \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ die offene obere Halbebene des \mathbb{R}^2 . Wir werden die Mengengleichheit $K(M, 0) = H^+$ beweisen.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass $K(H^+, 0) = H^+$ gilt. Wäre dem nicht so, dann ließe sich ein $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $y_2 \leq 0$ und $y \in K(H^+, 0)$ finden. Wegen $K(H^+, 0) = \{(\alpha x_1, \alpha x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha > 0, x_2 > 0\}$ kann aber so ein y nicht existieren. Wegen $M \subseteq H^+$ folgt dann unmittelbar $K(M, 0) \subseteq K(H^+, 0) = H^+$.

Nun zur anderen Mengeninklusion: Betrachten wir zunächst den Rand ∂M von M . Dann ist die eindeutig bestimmte Tangente von ∂M an x_0 durch den Unterraum $\text{Span}(1, 0)^T$ gegeben. Ist nun ein $x = (x_1, x_2) \in H^+$ gegeben, dann folgt aus $x_2 > 0$ für den Winkel $\angle((1, 0), x)$ zwischen x und dem ersten Einheitsvektor

$$\angle((1, 0), x) \in]0, \pi[.$$

Demnach muss die Verbindungsstrecke $\overline{x_0 x}$ oberhalb der Tangente liegen. Da nun aber $x_0 \in \partial M$ gilt, hat $\overline{x_0 x}$ zwei Schnittpunkte mit ∂M . Es gibt daher ein von x_0 und x verschiedenes Element $y \in \overline{x_0 x}$ mit $y \in M$. Wegen

$$x = \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot (y - 0)$$

folgt somit aus $x \in K(H^+, 0)$ die gewünschte Gleichheit. \square

Zum Abschluss zeigen wir noch die Mengengleichheit

$$N' := \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 0\} = N(M, 0).$$

Sei dafür zunächst ein $s = (0, s_2) \in N'$ gegeben. Dann gilt für alle $y = (y_1, y_2) \in H^+$ die Identität $\langle s, y - 0 \rangle = s_2 y_2$. Wegen $s_2 \leq 0$ und $y_2 > 0$, folgt $s_2 y_2 \leq 0$ und damit $s \in N(M, 0)$.

Sei nun $s = (s_1, s_2) \in N(M, 0)$. Dann gilt nach Definition für alle $y = (y_1, y_2) \in M$

$$\langle s, y - 0 \rangle = s_1 y_1 + s_2 y_2 \leq 0. \quad (1)$$

Ist $y = (0, y_2)$ für ein $y_2 \in \mathbb{R}$, so folgt mit (1) gerade $s_1 y_1 + s_2 y_2 = s_2 y_2$. Wegen $y_2 > 0$ kann die geforderte Ungleichung nur im Falle $s_2 \leq 0$ erfüllt werden. Ist $s_1 \neq 0$, dann folgt mit $y = (-s_2/s_1 + 1, 1)$

$$s_1 y_1 + s_2 y_2 = 1 > 0.$$

Demnach muss $s_1 = 0$ gelten. Damit folgt dann endlich $N(M, 0) = N'$. \square

- (iii) Es sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 6$. Dann ist die Lagrange-Funktion für das in der Aufgabe gestellte Minimierungsproblem durch

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

gegeben. Wir untersuchen die notwendige Optimalitätsbedingung

$$\begin{pmatrix} \nabla_x L(x, \lambda) \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda \\ x_2 + \lambda \\ x_3 + \lambda \\ x_1 + x_2 + x_3 - 6 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Erfüllung der Optimalitätsbedingung ist damit äquivalent zur Existenz einer Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Dieses System besitzt die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

d.h. bei $x = (2, 2, 2)^T$ wird das Minimum von $f(x) = \sqrt{3}$ angenommen.

Aufgabe 4.5

Es sei $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ symmetrisch und positiv definit sowie $b \in \mathbb{R}^n$. Ferner bezeichne $\|\cdot\|_A$ die von A induzierte Norm und $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ die von A^{-1} induzierte Norm. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$ und sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ein völlig beliebiger Vektor.

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|x - \tilde{x}\|_A^2 &= (x - \tilde{x})^T A (x - \tilde{x}) \\ &= (A^{-1}b - \tilde{x})^T (b - A\tilde{x}) \\ &= (A^{-1}(b - A\tilde{x}))^T (b - A\tilde{x}) \\ &= \|b - A\tilde{x}\|_{A^{-1}}^2.\end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann für beliebiges $w \in \mathbb{R}^n$

$$\|x - \tilde{x}\|_A = \|b - (w - w) - A\tilde{x}\|_{A^{-1}} \leq \|b - w\|_{A^{-1}} + \|A\tilde{x} - w\|_{A^{-1}}.$$

Wir betrachten nun $n = 1$ und $A = \text{id}$. Dann gilt z.B. für $x = 0$, $\tilde{x} = 1$ und $w = 0$ die Gleichheit

$$|x - \tilde{x}| = |0 - 1| = 1 = |0 - 0| + |1 - 0| = |b - w| + |A\tilde{x} - w|.$$