Nichtlineare Optimierung - 1. Hausaufgabe

Claudia Wohlgemuth	*366323*
Thorsten Lucke	*363089*
Felix Thoma	*358638*

Tutor: Mathieu Rosière, Di 8-10 Uhr

1. Mai 2017

1.1	1.2	1.3	1.4	Σ

Anmerkungen:

Aufgabe 1.1

(i) Es sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Wir werden zeigen, dass A genau dann positiv definit ist, wenn A stark positiv ist.

Beweis. Sei A zunächst stark positiv. Dann existiert ein $\alpha > 0$, sodass die Abschätzung

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2 \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist. Der positiven Definitheit von Normen wegen folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ unmittelbar

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2 > 0.$$

Die Abbildung A ist also positiv definit.

Sei A nun positiv definit und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig gewählt. Ist $x = 0$, so gilt (1) für alle $\alpha > 0$. Sei daher x von Null verschieden. Dann gilt (1) genau dann, wenn

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \geq \alpha$$

beziehungsweise

$$\langle Ay, y\rangle \geq \alpha$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| = 1$ erfüllt ist. Da lineare Abbildungen – auf endlichen Vekorräumen operierend – beschränkt und stetig sind, ist auch die Abbildung

$$f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R},\ y \mapsto \langle Ay, y\rangle$$

stetig. Weil die Einheitssphäre $\mathbb{S}^1$ kompakt ist, folgt aus dem Satz von Weierstraß die Existenz eines Minimums $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(y) \geq \alpha$ für alle $y \in \mathbb{S}^1$. Da A positiv definit ist, muss zudem $\alpha > 0$ gelten. Es folgt daher insgesamt

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und damit die starke Positivität von A. □

(ii) Wir zeigen nun, dass (i) im Allgemeinen falsch ist. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$A\colon \ell_2 \to \ell_2,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{1}{n} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $(x_n/n)^2 \leq (x_n)^2$ gilt, folgt wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} x_n\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2$$

die Wohldefiniertheit und Beschränktheit der Abbildung A aus dem Majorantenkriterium für Reihen.

Desweiteren folgt aus

$$\langle A(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n^2 \geq 0$$

die positive Definitheit.

Seien nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ zwei Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Dann ist A wegen

$$\begin{aligned}
A(\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= A((\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= A((\lambda x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= \left(\frac{1}{n}(\lambda x_n + y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \left(\lambda \frac{x_n}{n} + \frac{y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \lambda \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} + \left(\frac{y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \lambda A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + A(y_n)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

linear.

Sei nun $\alpha > 0$ beliebig gewählt. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \alpha$. Für den k-ten Einheitsbasisvektor $e_k = (\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ des ℓ_2 gilt dann

$$\langle Ae_k, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \delta_{k,n}^2 = \frac{1}{k} < \alpha.$$

Demnach kann kein $\alpha > 0$ existieren, welches der Forderung

$$\langle A(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle \geq \alpha \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2$$

für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ genügt.

Aufgabe 1.2

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion.

(i) Sei f zusätzlich konvex und seien $(x, \alpha), (y, \beta) \in \operatorname{epi}(f)$ sowie $\lambda \in [0, 1]$ beliebig gewählt. Dann folgt aus der Konvexität von f und der Definition des Epigraphen

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta.$$

Daher ist der Epigraph von f wegen

$$\lambda(x, \alpha) + (1 - \lambda)(y, \beta) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta) \in \operatorname{epi}(f)$$

konvex. Ist hingegen $\operatorname{epi}(f)$ konvex und sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ sowie $\lambda \in [0, 1]$ vorgegeben, erhalten wir mit $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \operatorname{epi}(f)$ auch

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \in \operatorname{epi}(f).$$

Die Behauptung

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

folgt sofort.

(ii) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch, wie sich leicht an

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

einsehen lässt. Offensichtlich ist f nicht stetig. Dennoch ist

$$\operatorname{epi}(f) = \mathbb{R} \times [0, \infty) \cup \{0\} \times [-1, \infty)$$

abgeschlossen.

(iii) Wir zeigen zunächst, dass f genau dann unterhalbstetig ist, wenn $\operatorname{epi}(f)$ abgeschlossen ist. Zuerst wollen wir die Unterhalbstetigkeit von f voraussetzen. Dann gilt

$$f(x) \leq \liminf_{t \to x} f(t)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Sei nun $(x_n, \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \operatorname{epi}(f)$ eine beliebige in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ konvergente Folge. Wir setzen $x \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n$ und $\alpha \coloneqq \lim_{n\to\infty} \alpha_n$. Dies ist wohldefiniert, da Folgenkonvergenz in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ äquivalent zu komponentenweiser Konvergenz ist. Dann gilt wegen der Unterhalbstetigkeit von f

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \geq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$$

und somit $(x, \alpha) \in \operatorname{epi}(f)$. Es folgt die Abgeschlossenheit des Epigraphen von f.

Ist nun $\mathrm{epi}(f)$ abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige in $\mathbb{R}^n$ konvergente Folge, so gilt wegen $(x_n, f(x_n)) \in \mathrm{epi}(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Abgeschlossenheit von $\mathrm{epi}(f)$ auch

$$\begin{aligned}(x, \liminf_{n\to\infty} f(x_n)) &= (\lim_{n\to\infty} x_n, \liminf_{n\to\infty} f(x_n)) \\ &= (\liminf_{n\to\infty} x_n, \liminf_{n\to\infty} f(x_n)) \\ &\overset{(*)}{=} \liminf_{n\to\infty} (x_n, f(x_n)) \in \mathrm{epi}(f).\end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir wieder die Äquivalenz von komponentenweiser und Folgenkonvergenz genutzt. Es gilt demnach

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

womit die Aussage bewiesen ist. $\square$

Die eigentliche Behauptung folgt nun aus der Analysis 1 Übung vom 9. Dezember 2016. Dort wurde gezeigt, dass koerzitive und unterhalbstetige Funktionen ein Minimum besitzen. $\square$

Aufgabe 1.3

Wir zeigen, dass ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ genau dann endlich dimensional ist, wenn die Niveaumenge $N(f, \alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes stetige koerzitive Funktional $f\colon X \to \mathbb{R}$ kompakt ist. Dazu nutzen wir im Folgenden die zum Hinweis äquivalente Aussage: Ein normierter Raum ist genau dann endlichdimensional, wenn beschränkte und abgeschlossene Mengen kompakt sind, dies ist insbesondere genau dann erfüllt, wenn die abgeschlossene Einheitskugel kompakt ist.

Beweis. Wir wollen zunächst annehmen, dass X endlichdimensional ist. Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ ein beliebig gewähltes stetiges und koerzitives Funktional und sei $\alpha \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in X$ mit $\|x\| > r$ bereits $f(x) > \alpha$ gilt. Somit ist $N(\alpha) := N(f, \alpha) \subset \overline{B(0, r)}$ und es folgt die Beschränktheit der Niveaumenge $N(\alpha)$.

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset N(\alpha) \subset X$ eine gegen $x \in X$ konvergente Folge. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \alpha = \alpha.$$

und somit wegen $x \in N(\alpha)$ die Abgeschlossenheit der Niveaumenge $N(\alpha)$. Da X endlichdimensional ist, folgt wegen des Satzes von Heine-Borel die Kompaktheit der Niveaumenge.

Sei nun für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes stetige, koerzive Funktional $f\colon X \to \mathbb{R}$ die Niveaumenge $N(\alpha)$ kompakt. Dann gilt dies insbesondere für jede Norm $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$. Dabei ist $\|\cdot\|$ offensichtlich koerziv und stetig. Weiterhin ist $N(1) = \overline{B(0, 1)}$ nach Voraussetzung kompakt. Dass die abgeschlossene Einheitskugel kompakt ist, ist äquivalent zur Endlichdimensionalität von X. $\square$

Aufgabe 1.4

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus der Aufgabenstellung und untersuchen die Matrix

$$H := \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2 & H_4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \xi_i^2 & \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \sum_{i=1}^m \xi_i & m \end{pmatrix}.$$

(i) Zum Beweis der positiven Definitheit bemühen wir das Hauptminorenkriterium: Da nach Voraussetzung $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j \in 1, \dots, m$ mit $i \neq j$ gilt, folgt unmittelbar

$$\det(H_1) = 2 \sum_{i=1}^m \xi_i^2 > 0.$$

Wir setzen nun $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$. Da bekanntermaßen die Abschätzung

$$\sqrt{m} \cdot \|\xi\|_2 \geq \|\xi\|_1$$

gilt, folgt auch

$$H_1 H_4 = 4m \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \geq 4 \left(\sum_{i=1}^m \xi_i \right)^2 = H_2^2.$$

Da nun alle Einträge von ξ verschieden sind, gilt sogar die strikte Ungleichung und damit

$$\det(H) = H_1 H_4 - H_2^2 > 0.$$

Es folgt die positive Definitheit von H.

Ferner ist f zweimal stetig differenzierar und damit genau dann konvex, wenn $f'' = H$ positiv definit ist. Hiermit folgt die Behauptung.

(ii) Mit 1.1. wissen wir, dass H sogar stark positiv ist. Wir haben also mit Cauchy-Schwarz und der starken Positivität ein $\alpha > 0$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\langle Hx, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \\ &\geq \frac{1}{2}\langle Hx, x\rangle - \|b\|_2 \|x\|_2 + c \\ &\geq \frac{1}{2}\alpha\|x\|_2^2 - \|b\|_2\|x\|_2 + c =: g(\|x\|_2). \end{aligned}$$

Wegen $\alpha > 0$ folgt unmittelbar

$$\infty = \lim_{\|x\|_2 \to \infty} g(\|x\|_2) \leq \lim_{\|x\|_2 \to \infty} f(x).$$

Somit ist f koerzitiv und zusammen mit der Stetigkeit folgt die Existenz eines Minimierers. Aufgrund der strengen Konvexität von f ist dieser eindeutig.