Der FEAST-Algorithmus

Thorsten Lucke

6. März 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Lösen von Eigenwertproblemen ist eine Standarddisziplin in der numerischen linearen Algebra. Gleichungen der Gestalt

$$Ax = \lambda Bx$$

begegnet man in ganz unterschiedlichen Kontexten. So sind sie beispielsweise bei der Bestimmung von Eigenfrequenzen oder dem Ermitteln von Fixpunkten beim Rotieren eines Fußballs[1] ebenso wie beim Untersuchen des PageRanks einer Website von Bedeutung. Entsprechend strotz der Kanon von angebotenen numerischen Lösungsmethoden von Vielfalt und Virtuosität.

[1] Hier wird auf den bekannten *Satz vom Fußball* angespielt. Dieser besagt, dass auf einem Fußball zwei Punkte existieren, die zu Spielbeginn und zur Halbzeit an der gleichen Stelle liegen – informell formuliert.

2 Mathematische Idee

Es seien nun zwei Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, die das reelle Intervall $I := [\lambda_1, \lambda_2] \subseteq \mathbb{R}$ definieren. Für zwei hermitesche Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit der zusätzlichen Forderung, dass B positiv definit ist, sollen Paare der Gestalt $(\lambda, x) \in I \times \mathbb{C}^n$ ermittelt werden, welche der verallgemeinerten Eigenwertgleichung

$$Ax = \lambda Bx \tag{1}$$

genügen.

Zur Bestimmung der Transformationsmatrix Q wird eine Konturintegration bemüht. Ausgangspunkt dieser Integration ist die durch

$$\begin{aligned} G\colon \Omega &\to \mathbb{C}^{n,n} \\ \omega &\mapsto (\omega B - A)^{-1} \end{aligned}$$

definierte Green-Funktion, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine passende Teilmenge der komplexen Zahlen ist. Insbesondere müssen Ω und das Spektrum von $B^{-1}A$ disjunkt sein, da G andernfalls nicht wohldefiniert ist.

Die Funktion G wird nun über eine geschlossene komplexe Kurve γ, die um das vorgegebene Intervall I herumläuft, in der Gestalt

$$-\frac{1}{2\pi\iota} \int_\gamma G(\omega)\, \mathrm{d}\omega$$

integriert.[2]

[2] Mit ι ist im Folgenden stets die imaginäre Einheit bezeichnet, also $\iota = \sqrt{-1}$.