

Bài 1: Giải phương trình phi tuyến $x^2 + 2\sin(x) - 0.5 = 0$ trong khoảng $[-1, 2]$ với sai số 10^{-3}

Bài làm

- **Thuật toán:**

+ Bước 1: Lặp bước $1, 2, \dots, k$

+ Bước 2: Tính $x = \frac{a+b}{2}$

Nếu $f(x)$ và $f(a)$ cùng dấu thì gán $a = x$

Nếu $f(x)$ và $f(a)$ trái dấu thì gán $b = x$

+ Bước 3: Nếu $|x-a| \leq \varepsilon$ thì dừng và x là nghiệm xấp xỉ

Nếu $|x-a| > \varepsilon$ thì chuyển sang bước $k+1$

- **Tính**

Đặt $f(x) = x^2 + 2\sin(x) - 0.5$

Ta có $f(-1).f(2) < 0 \Rightarrow [-1, 2]$ là khoảng phân ly nghiệm

+ Bước 1: Gán $a = -1 \Rightarrow f(a) = -1.18294197$

$$b = 2 \Rightarrow f(b) = 5.318594854$$

$$|b-a| > \varepsilon \Rightarrow x = \frac{a+b}{2} = 0,5$$

$$\Rightarrow f(x) = 0.7088510772$$

$$f(x).f(a) > 0 \Rightarrow b = x = 0.5$$

Khoảng nghiệm thu lại $[-1, 0.5]$

+ Bước 2: Gán $a = -1 \Rightarrow f(a) = -1.18294197$

$$b = 0.5 \Rightarrow f(b) = 0.7088510772$$

$$|b-a| > \varepsilon$$

$$\Rightarrow x = \frac{a+b}{2} = -0,25 \Rightarrow f(x) = -0.9323079185$$

$$f(a).f(x) > 0 \Rightarrow a = x = -0.25$$

Khoảng nghiệm thu lại $[-0.25, 0.5]$

+ Lặp lại đến bước k , khi $|b-a| \leq \varepsilon$ thì dừng và nghiệm xấp xỉ của phương trình là x

Kết quả: $x = 0.2268$

- **Code**

```
function x = Bisection(f,a,b,epsilon)
a= -1;
b=2;
epsilon= 10^(-3);
f=@(x) x^2+ 2*sin(x) -1/2;
```

```
while abs(b-a)>=epsilon
    x=(b+a)/2;
    fx = subs(f,x);
    fa = subs(f,a);
    if fx *fa>0
        a=x;
    else
        b=x;
    end
end
end
```

```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Examples, or read Getting Started.
>> bail_ktra0711
ans =
0.2268

```

Bài 2: Cho bảng số liệu vào x ra y của hàm $y = y(x)$:

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	1.2341	3.9241	2.4563	-0.2224	-1.3215	0.5506

Tìm hàm xấp xỉ Newton và đa thức bậc 2

Tính giá trị hàm y tại $x=4$ với 2 phương pháp trên. Nhận xét

Bài làm

- **Phương pháp nội suy Newton**

Ta cần tính giá trị tại $x=4$ gần với $x=3.5$ nên ta dùng Newton tiến

Ta có biểu thức nội suy Newton tiến:

$$P(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + a_6(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

Trong đó:

$$a_1 = y_1 = 1.2341$$

$$a_2 = f_1(x_1, x_2) = 5.38$$

$$a_3 = f_2(x_1, x_2, x_3) = -8.3156$$

$$a_4 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3.9292$$

$$a_5 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -0.1042666665$$

$$a_6 = f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = -0.3313333334$$

$$+ \text{Tỷ sai phân cấp 1: } f_1(x_i, x_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$+ \text{Tỷ sai phân cấp 2: } f_2(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

$$+ \text{Tỷ sai phân cấp 3: } f_3(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}) - f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})}{x_{i+3} - x_i}$$

$$+ \text{Tỷ sai phân cấp 4: } f_4(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}) - f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})}{x_{i+4} - x_i}$$

$$+ \text{Tỷ sai phân cấp 5: } f_5(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}, x_{i+5}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}, x_{i+5}) - f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4})}{x_{i+5} - x_i}$$

$$\Rightarrow P(x) = 1.2341 + 5.38(x-1) - 8.3156(x-1)(x-1.5) + 3.9292(x-1)(x-1.5)(x-2) - 0.1042666665(x-1)(x-1.5)(x-2)(x-2.5) - 0.3313333334(x-1)(x-1.5)(x-2)(x-2.5)(x-3)$$

$$\Rightarrow P(4) = 4.144100002$$

Code

```

function N = PP_NS_Newton(x,y,x0)
dodai=length(x);
n=dodai;
a=[0 0];
a(1)=y(1);
dem = 0;
tmp = 1;
N=a(1);
for i=1:dodai
    k(i,1)=y(i);
end
for j=2:dodai

```

```

dem = dem + 1;
for i = 1:n-1
    k(i,j)=(k(i+1,j-1)-k(i,j-1))/(x(i+dem)-x(i));
end
n=n-1;
a(j)=k(1,j);
end
for i=2:dodai
    tmp=tmp*(x0-x(i-1));
    N=N+a(i)*tmp;
end
disp('He so a:')
disp(a)
end

```

Command Window

New to MATLAB? Watch this [Video](#), see [Examples](#), or read [Getting Started](#).

```

>> x=[1 1.5 2 2.5 3 3.5]
x =
    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000    3.5000
>> y=[1.2341 3.9241 2.4563 -0.2224 -1.3215 0.5506]
y =
    1.2341    3.9241    2.4563   -0.2224   -1.3215    0.5506
>> PP_NS_Newton(x,y,4)
He so a:
    1.2341    5.3800   -8.3156    3.9292   -0.1043   -0.3313
ans =
    4.1441

```

- **Phương pháp nội suy đa thức**

Gọi hàm cần tìm là $h(x) = ax^2 + bx + c$

$h(x)$ là hàm giả thiết đầu vào x

$h(x)$, $y(x)$ luôn có sai số

Gọi $J = (h(x) - y(x))^2$ là hàm sai số

$$J = \sum_{i=1}^6 [h(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^6 [ax^2 + bx + c - y_i]^2$$

J phụ thuộc vào a, b, c

$$\Rightarrow J(a,b,c) = \sum_{i=1}^6 [ax_i^2 + bx_i + c - y_i]^2$$

Bài toán đưa về tìm min $J(a,b,c)$

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^6 2 * [ax_i^2 + bx_i + c - y_i] * x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^6 2 * [ax_i^2 + bx_i + c - y_i] * x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^6 2 * [ax_i^2 + bx_i + c - y_i] * 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a * \sum_{i=1}^6 x_i^4 + b * \sum_{i=1}^6 x_i^3 + c * \sum_{i=1}^6 x_i^2 = \sum_{i=1}^6 x_i^2 y_i \\ a * \sum_{i=1}^6 x_i^3 + b * \sum_{i=1}^6 x_i^2 + c * \sum_{i=1}^6 x_i = \sum_{i=1}^6 x_i y_i \\ a * \sum_{i=1}^6 x_i^2 + b * \sum_{i=1}^6 x_i + 6c = \sum_{i=1}^6 y_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -0.1867642857 \\ b = -0.4071607143 \\ c = 3.101321429 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(4) \approx -1.5155$$

Code

```

function Cost_Function(x,y,x0)
syms a b
m=sum(x.^2);
n=sum(x);
p=sum(x.*y);
q=sum(y);

```

```

pt1=m*a+n*b-p;
pt2=n*a+length(x)*b-q;
[a b] = solve(pt1,pt2);
disp('He so a: ')
disp(double(a))
disp('He so b: ')
disp(double(b))
y0 = a*x0+b;
disp('Ket qua xap xi: ')
disp(double(y0))
end

```

```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Examples, or read Getting Started.
>> Cost_Function(x,y,4)
He so a:
-1.2476

He so b:
3.9106

Ket qua xap xi:
-1.0798

fz >> |

```

Bài 3: Giải phương trình vi phân $y' - x^2 y = y$, $y(0) = 1$ theo Euler và Runge Kutta. Nhận xét
Bài làm

Chọn $x \in [0,1]$, $h = 0.1$

Chia đoạn $[0,1]$ thành $n = \frac{b-a}{h} = 10$ đoạn nhỏ bằng nhau

Đặt $f(x, y) = y + x^2 y$

- **Phương pháp Euler**

Chọn $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = u_0 = 1 \end{cases}$

Tính $\begin{cases} x_i = a + i.h \\ u_i = u_{i-1} + h.f(x_{i-1}, u_{i-1}) \end{cases}$

Thực hiện lặp từ 1 đến 10

$$+ i=1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1 \\ u_1 = u_0 + h.f(x_0, u_0) = 0 + 0.1(x_0^2 * u_0 + u_0) = 1.1 \end{cases}$$

$$i=2 \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 + 2 * 0.1 = 0.2 \\ u_2 = u_1 + h.f(x_1, u_1) = 0 + 0.1(x_1^2 * u_1 + u_1) = 1.2111 \end{cases}$$

...

$$i=10 \rightarrow \begin{cases} x_{10} = 0 + 10 * 0.1 = 1 \\ u_{10} = u_1 + h.f(x_9, u_9) = 0 + 0.1(x_9^2 * u_9 + u_9) = 3.3404 \end{cases}$$

Code:

```

a=0;
b=1;
f= @(x,y) y+y*x^2;
x(1)=0;
y(1)=1;
h=0.1;
n=(b-a)/h;

for i=2:1:10
    x(i)=a+i*h
    y(i)= y(i-1)+h*f(x(i-1),y(i-1))
end
plot (y);

```

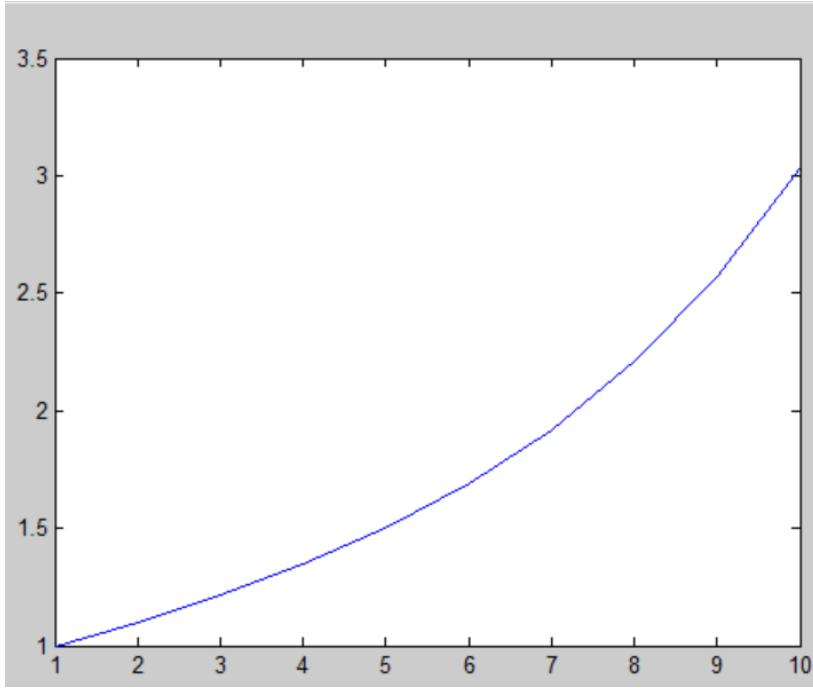
Command Window

New to MATLAB? Watch this [Video](#), see [Examples](#), or read [Getting Started](#).

```
x =
0 0.1000 0.2000 0.3000 0.4000 0.5000 0.6000 0.7000 0.8000 0.9000 1.0000

y =
1.0000 1.1000 1.2111 1.3371 1.4628 1.6548 1.8616 2.1148 2.4299 2.8285 3.3404
```

Tập giá trị (x_i, y_i) là tập gần đúng của hàm



- Phương pháp Runge Kutta

Chọn $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = u_0 = 1 \end{cases}$

Tính $\begin{cases} x_i = a + i * h \\ k_{1i} = h * f(x_{i-1}, u_{i-1}) \\ k_{2i} = h * f(x_{i-1} + \frac{h}{2}, u_{i-1} + \frac{k_{1i}}{2}) \\ k_{3i} = h * f(x_{i-1} + \frac{h}{2}, u_{i-1} + \frac{k_{2i}}{2}) \\ k_{4i} = h * f(x_{i-1} + h, u_{i-1} + k_{3i}) \\ u_i = u_{i-1} + \frac{1}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}) \end{cases}$

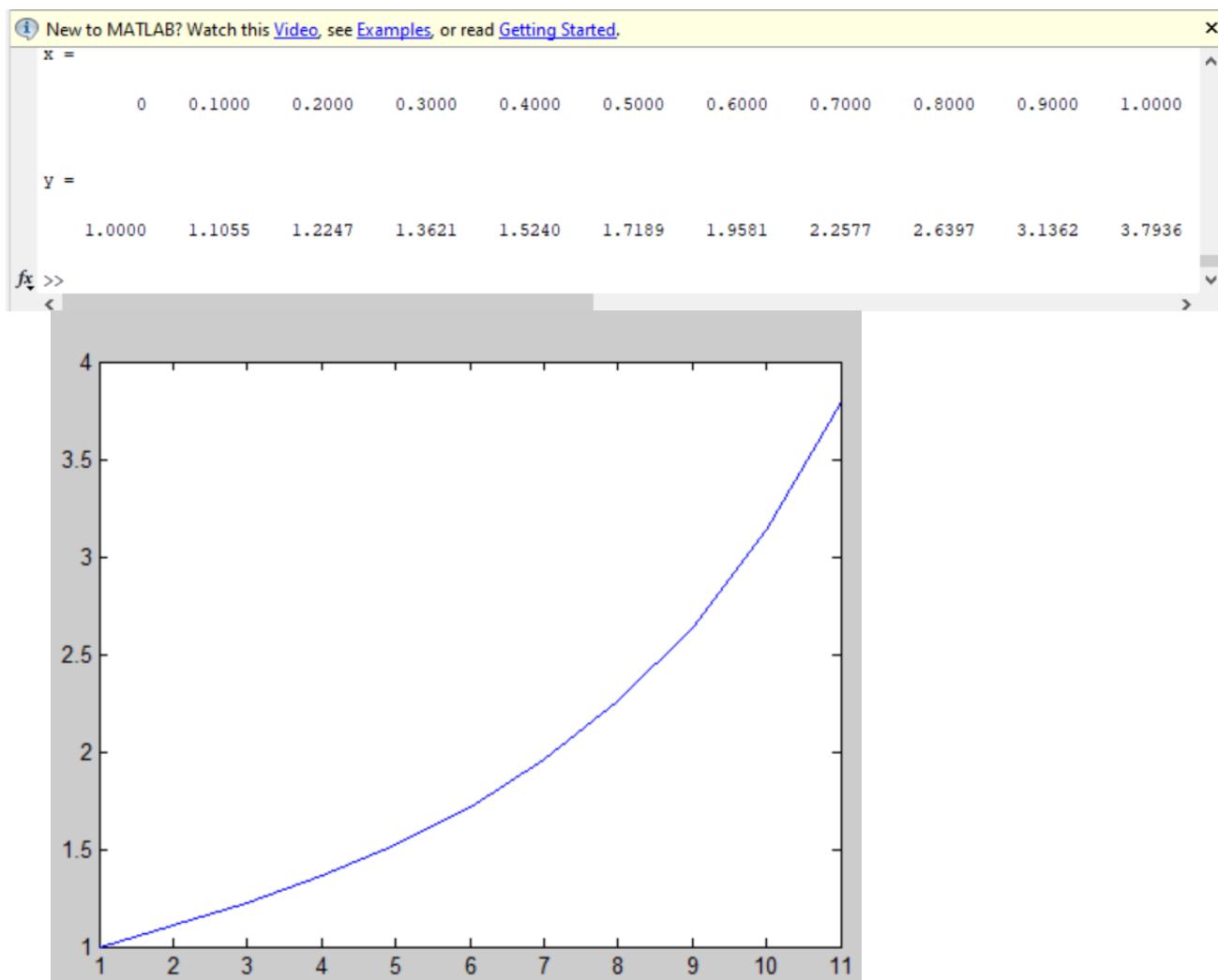
Thực hiện lặp từ 1 đến 10

$$+ i = 0 \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ k_{10} = h * f(x_0, u_0) = 0.1 \\ k_{20} = h * f(x_0 + \frac{h}{2}, u_0 + \frac{k_{10}}{2}) = 0.1053 \\ k_{30} = h * f(x_0 + \frac{h}{2}, u_0 + \frac{k_{20}}{2}) = 0.1055 \\ k_{40} = h * f(x_0 + h, u_0 + k_{30}) = 0.1117 \\ u_1 = u_0 + \frac{1}{6}(k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40}) = 1.1055 \end{array} \right.$$

....

Code:

```
a=0;
b=1;
f= @(x,y) y+y*x^2;
x(1)=0;
y(1)=1;
h=0.1;
n=10
for i=1:1:10
    x(i+1)=h*i;
    k1(i)=h*f(x(i), y(i));
    k2(i)=h*f(x(i)+h/2, y(i)+k1(i)/2);
    k3(i)=h*f(x(i)+h/2, y(i)+k2(i)/2);
    k4(i)=h*f(x(i)+h, y(i)+k3(i));
    y(i+1)= y(i)+(1/6)*(k1(i)+2*k2(i)+2*k3(i)+k4(i))
end
plot ( y);
```



Bài 4: Xây dựng sơ đồ mô phỏng Robot tự hành trên Matlab. Khảo sát đáp ứng và nhận xét

$$3 \frac{d^2 s}{dt^2} + 5s \frac{ds}{dt} + 2ts = 0$$

Bài làm

Ta biến đổi về dạng: $3\ddot{s} + 5s\dot{s} + 2ts = 0 \Leftrightarrow \ddot{s} = \frac{-5}{3}s\dot{s} - \frac{2}{3}ts$

