Chương 4: Ứng dụng Matlab trong Giải tích số

Viện Toán ứng dụng và Tin học, ĐHBK Hà Nội

Hà Nội, tháng 8 năm 2015

Nội dung

Đa thức nội suy

Trong thực tế, nhiều khi ta phải tìm hàm $y = f(x)$ mà chỉ biết giá trị y_i tại các điểm $x_i \in [a, b]$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Hoặc trong nhiều trường hợp biểu diễn giải tích của $f(x)$ đã cho nhưng quá cồng kềnh. Khi dùng phép nội suy ta có thể dễ dàng tính được f tại bất kỳ điểm $x \in [a, b]$ mà độ chính xác không kém bao nhiêu.

Bài toán đặt ra:

Cho các mốc nội suy $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Hãy tìm đa thức (bậc n) $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ sao cho:

$$P_n(x_i) = y_i = f(x_i) \quad (i = 0 \div n) \tag{1.1}$$

Đa thức $P_n(x)$ gọi là đa thức nội suy của hàm $y = f(x)$. Ta chọn đa thức để nội suy hàm vì đa thức là loại hàm đơn giản, luôn có đạo hàm và nguyên hàm. Việc tính giá trị của nó theo thuật toán Horner cũng đơn giản.

Đa thức nội suy

Cách tiếp cận Vandermond

Các hệ số $c_0, c_1, \ldots, c_n$ của đa thức nội suy bậc n có thể được tính bằng cách giải hệ

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

hay

$$Ac = y$$

Hệ trên có định thức Vandermond $|A| = \prod_{1 \leq i < j}^{n} (x_j - x_i) \neq 0$ nên có nghiệm duy nhất.

Nội suy Lagrange

Trước hết tìm đa thức $L_i(x)$ có bậc n sao cho:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}, \quad (\forall i, j = 0 \div n)$$

Dễ thấy $L_i(x)$ có dạng:

$$L_i(x) = \frac{\prod\limits_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Đặt $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i . L_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \frac{\prod\limits_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)}$ ta có ngay:

$$P(x_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i . L_i(x_j) = y_j \quad (j = 0 \div n) \tag{1.2}$$

Vậy $P(x)$ là đa thức nội suy duy nhất cần tìm.

Nội suy Newton

Nội suy Newton tiến

Công thức nội suy Lagrange có ưu điểm là đơn giản, dễ lập trình nhưng nếu thêm mốc nội suy thì phải tính lại toàn bộ. Nhược điểm này sẽ được khắc phục trong công thức Newton.

Công thức nội suy Newton tiến

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n], \end{aligned}$$

trong đó các tỷ hiệu được tính theo công thức

$$\begin{aligned} f[x_{i-1}, x_i] &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}; \\ f[x_0, x_1, \ldots, x_n] &= \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Nội suy Newton

Nội suy Newton tiến

Công thức nội suy Lagrange có ưu điểm là đơn giản, dễ lập trình nhưng nếu thêm mốc nội suy thì phải tính lại toàn bộ. Nhược điểm này sẽ được khắc phục trong công thức Newton.

Công thức nội suy Newton tiến

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n], \end{aligned}$$

trong đó các tỷ hiệu được tính theo công thức

$$\begin{aligned} f[x_{i-1}, x_i] &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}; \\ f[x_0, x_1, \ldots, x_n] &= \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \qquad (1.3) \end{aligned}$$

Nội suy Newton

Nội suy Newton lùi

Nếu các mốc nội suy được sắp xếp theo thứ tự giảm dần

$$x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$$

thì ta có công thức nội suy Newton lùi xuất phát từ mốc x_n:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_n) + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] \\ & + \dots + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0], \end{aligned}$$

trong đó các tỷ hiệu được tính như trong công thức (1.3).

Sai số của phép nội suy

Định lý 1.1

Giả sử hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *khả vi liên tục đến cấp* $n+1$ *trên* $[a,b]$ *(*$f \in C^{(n+1)}[a,b]$*) và* $x_i \in [a,b], \quad i = 0 : n$*. Khi đó tồn tại* $\xi = \xi(x) \in [a,b]$ *sao cho*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)\dots(x - x_n).$$

Từ đó ta có công thức ước lượng sai số

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}(f) \left|(x - x_0)\dots(x - x_n)\right|,$$

trong đó $M_{n+1}(f) = \max\limits_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

- Xét trường hợp nội suy đa thức cho hàm $f(x)$ trên đoạn $[-1, 1]$ dựa trên các mốc nội suy $-1 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq 1$. Khi đó công thức đánh giá sai số của các đa thức nội suy Lagrange và Newton đều có dạng

$$|f(x) - P_n(x)| \leq |w(x)| \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [-1,1]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|,$$

trong đó đa thức bậc $n+1$:

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

- Ta muốn chọn các mốc nội suy $\{x_i\}_{i=0}^n$ để cực tiểu giá trị $\max_{-1 \leq x \leq 1} |w(x)|$. Điều này dẫn tới việc sử dụng đa thức nội suy Chebyshev.

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

- Xét trường hợp nội suy đa thức cho hàm $f(x)$ trên đoạn $[-1, 1]$ dựa trên các mốc nội suy $-1 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq 1$. Khi đó công thức đánh giá sai số của các đa thức nội suy Lagrange và Newton đều có dạng

$$|f(x) - P_n(x)| \leq |w(x)| \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [-1,1]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|,$$

trong đó đa thức bậc $n+1$:

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

- Ta muốn chọn các mốc nội suy $\{x_i\}_{i=0}^n$ để cực tiểu giá trị $\max_{-1 \leq x \leq 1} |w(x)|$.

Điều này dẫn tới việc sử dụng đa thức nội suy Chebyshev.

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Định nghĩa 1.1

Các hàm

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gọi là các đa thức Chebyshev trong đoạn $[-1, 1]$.

Chú ý 1.1

Các hàm trên thực sự là các đa thức. Thật vậy, đặt $\delta = \arccos(x)$. Đồng nhất thức

$$\cos(n+1)\delta + \cos(n-1)\delta = 2\cos\delta\cos n\delta$$

cho ta công thức truy hồi

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Với $T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$, rõ ràng $T_n(x) \in \mathcal{P}_n$.

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Bảng một số đa thức nội suy Chebyshev đầu tiên

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 - 1\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Một số tính chất của đa thức Chebyshev

- Các hệ số của đa thức Chebyshev T_n đều nguyên.
- Hệ số ứng với bậc cao nhất là $a_n = 2^{n-1}$.
- T_{2n} là hàm chẵn, T_{2n+1} là hàm lẻ.
- $|T_n(x)| \leq 1$ với $x \in [-1, 1]$ và $T_n(x) = 1$ với $x_k = \cos(k\pi/n)$.
- $T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n$.
- $T_n(\overline{x}_k) = 0$ với $\overline{x}_k = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2k}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Một số tính chất của đa thức Chebyshev

- Các hệ số của đa thức Chebyshev T_n đều nguyên.
- Hệ số ứng với bậc cao nhất là $a_n = 2^{n-1}$.
- T_{2n} là hàm chẵn, T_{2n+1} là hàm lẻ.
- $|T_n(x)| \leq 1$ với $x \in [-1, 1]$ và $T_n(x) = 1$ với $x_k = \cos(k\pi/n)$.
- $T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n$.
- $T_n(\overline{x}_k) = 0$ với $\overline{x}_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2k}\right), \quad k = 1, \ldots, n$.

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Một số tính chất của đa thức Chebyshev

- Các hệ số của đa thức Chebyshev T_n đều nguyên.
- Hệ số ứng với bậc cao nhất là $a_n = 2^{n-1}$.
- T_{2n} là hàm chẵn, T_{2n+1} là hàm lẻ.
- $|T_n(x)| \leq 1$ với $x \in [-1, 1]$ và $T_n(x) = 1$ với $x_k = \cos(k\pi/n)$.
- $T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n$.
- $T_n(\overline{x}_k) = 0$ với $\overline{x}_k = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2k}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Một số tính chất của đa thức Chebyshev

- Các hệ số của đa thức Chebyshev T_n đều nguyên.
- Hệ số ứng với bậc cao nhất là $a_n = 2^{n-1}$.
- T_{2n} là hàm chẵn, T_{2n+1} là hàm lẻ.
- $|T_n(x)| \leq 1$ với $x \in [-1, 1]$ và $T_n(x) = 1$ với $x_k = \cos(k\pi/n)$.
- $T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n$.
- $T_n(\overline{x}_k) = 0$ với $\overline{x}_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2k}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Một số tính chất của đa thức Chebyshev

- Các hệ số của đa thức Chebyshev T_n đều nguyên.
- Hệ số ứng với bậc cao nhất là $a_n = 2^{n-1}$.
- T_{2n} là hàm chẵn, T_{2n+1} là hàm lẻ.
- $|T_n(x)| \leq 1$ với $x \in [-1, 1]$ và $T_n(x) = 1$ với $x_k = \cos(k\pi/n)$.
- $T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n$.
- $T_n(\overline{x}_k) = 0$ với $\overline{x}_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2k}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Một số tính chất của đa thức Chebyshev

- Các hệ số của đa thức Chebyshev T_n đều nguyên.
- Hệ số ứng với bậc cao nhất là $a_n = 2^{n-1}$.
- T_{2n} là hàm chẵn, T_{2n+1} là hàm lẻ.
- $|T_n(x)| \leq 1$ với $x \in [-1, 1]$ và $T_n(x) = 1$ với $x_k = \cos(k\pi/n)$.
- $T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n$.
- $T_n(\overline{x}_k) = 0$ với $\overline{x}_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2k}\right), \quad k = 1, \dots, n.$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Định lý 1.2

Giả sử n *cố định. Trong số tất cả các cách chọn* $w(x)$ *và các mốc phân biệt* $\{x_i\}_{i=0}^{n} \in [-1,1]$, *đa thức* $T(x) = T_{n+1}(x)/2^n$ *là sự lựa chọn suy nhất thỏa mãn*

$$\max_{-1\le x\le 1}\{|T(x)|\} \le \max_{-1\le x\le 1}\{|w(x)|\}.$$

Hơn nữa

$$\max_{-1\le x\le 1}\{|T(x)|\} = \frac{1}{2^n}.$$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

- Các mốc nội suy trên đoạn $[-1, 1]$ được xác định bởi

$$t_k = \cos\left(\frac{(2n+1-2k)\pi}{2n+2}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

- Sử dụng phép đổi biến $[-1, 1] \to [a, b]$:

$$x = \left(\frac{b-a}{2}\right) t + \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow t = 2\frac{x-a}{b-a} - 1$$

- Các mốc nội suy trên đoạn $[a, b]$ bất kỳ

$$\begin{aligned} x_k &= t_k \left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{a+b}{2} \\ &= \cos\left(\frac{(2n+1-2k)\pi}{2n+2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{a+b}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

- Các mốc nội suy trên đoạn $[-1, 1]$ được xác định bởi

$$t_k = \cos\left(\frac{(2n+1-2k)\pi}{2n+2}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

- Sử dụng phép đổi biến $[-1, 1] \to [a, b]$:

$$x = \left(\frac{b-a}{2}\right) t + \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow t = 2\frac{x-a}{b-a} - 1$$

- Các mốc nội suy trên đoạn $[a, b]$ bất kỳ

$$\begin{aligned} x_k &= t_k \left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{a+b}{2} \\ &= \cos\left(\frac{(2n+1-2k)\pi}{2n+2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{a+b}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

- Các mốc nội suy trên đoạn $[-1, 1]$ được xác định bởi

$$t_k = \cos\left(\frac{(2n+1-2k)\pi}{2n+2}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

- Sử dụng phép đổi biến $[-1, 1] \to [a, b]$:

$$x = \left(\frac{b-a}{2}\right) t + \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow t = 2\frac{x-a}{b-a} - 1$$

- Các mốc nội suy trên đoạn $[a, b]$ bất kỳ

$$\begin{aligned} x_k &= t_k \left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{a+b}{2} \\ &= \cos\left(\frac{(2n+1-2k)\pi}{2n+2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{a+b}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Định lý 1.3

Giả sử $P_n(x)$ *là đa thức nội suy Lagrange với các mốc nội suy* (1.4). *Khi đó nếu* $f \in C^{n+1}[a,b]$ *thì ta có*

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{2(b-a)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!} \max_{a \le x \le b} \left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| \right\}.$$

Ví dụ 1

Xét hàm $f(x) = \sin x$ *trên* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. *Các mốc nội suy Chebyshev*

$$x_k = \cos\left(\frac{(11-2k)\pi}{12}\right)\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}, \quad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Sử dụng đánh giá $\left|f^{(6)}(x)\right| \le |-\sin(\pi/4)| = 2^{-1/2} =: M$ *ta thu được*

$$|f(x) - P_5(x)| \le \left(\frac{\pi}{8}\right)^6 \left(\frac{2}{6!}\right) 2^{-1/2} = 0.00000720.$$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Công thức nội suy Chebyshev

Hàm $f(x)$ được xấp xỉ bởi

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{n} c_m T_j\left(x'\right) \tag{1.5}$$

trong đó

- $x' = \dfrac{2}{b-a}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right);$
- $c_0 = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) T_0\left(x_k'\right) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right);$
- $c_j = \dfrac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) T_j\left(x_k'\right) =$
  $\dfrac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) \cos\dfrac{j(2n+1-2k)}{2(n+1)}\pi, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Công thức nội suy Chebyshev

Hàm $f(x)$ được xấp xỉ bởi

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{n} c_m T_j\left(x'\right) \tag{1.5}$$

trong đó

- $x' = \dfrac{2}{b-a}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)$;
- $c_0 = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) T_0\left(x'_k\right) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right)$;
- $c_j = \dfrac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) T_j\left(x'_k\right) =$
  $\dfrac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) \cos\dfrac{j(2n+1-2k)}{2(n+1)}\pi, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Công thức nội suy Chebyshev

Hàm $f(x)$ được xấp xỉ bởi

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{n} c_m T_j\left(x'\right) \tag{1.5}$$

trong đó

- $x' = \dfrac{2}{b-a}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right);$
- $c_0 = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) T_0\left(x'_k\right) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right);$
- $c_j = \dfrac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) T_j\left(x'_k\right) =$ $\dfrac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) \cos\dfrac{j(2n+1-2k)}{2(n+1)}\pi, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Ví dụ 2

Tìm đa thức nội suy Chebyshev bậc 3 của hàm $f(x) = e^x$ trên $[-1, 1]$.

- Các mốc nội suy: $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{8}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3;$

- Các hệ số:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} T_0(x_k) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} = 1.26606568 \\
c_1 &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} T_1(x_k) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} x_k = 1.13031500 \\
c_2 &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} T_2(x_k) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} \cos\left(2\pi\frac{2k+1}{8}\right) = 0.27145036 \\
c_3 &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} T_2(x_k) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} \cos\left(3\pi\frac{2k+1}{8}\right) = 0.04379392.
\end{aligned}
$$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Ví dụ 2

Tìm đa thức nội suy Chebyshev bậc 3 của hàm $f(x) = e^x$ trên $[-1, 1]$.

- Các mốc nội suy: $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{8}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3;$
- Các hệ số:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} T_0(x_k) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} = 1.26606568 \\
c_1 &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} T_1(x_k) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} x_k = 1.13031500 \\
c_2 &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} T_2(x_k) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} \cos\left(2\pi\frac{2k+1}{8}\right) = 0.27145036 \\
c_3 &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} T_2(x_k) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} \cos\left(3\pi\frac{2k+1}{8}\right) = 0.04379392.
\end{aligned}
$$

Nội suy bằng đa thức Chebyshev

Ví dụ 2 (tiếp)

Đa thức nội suy Chebyshev bậc 3

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= \sum_{j=0}^{3} c_j T_j(x) \\
&= 1.26606568T_0(x) + 1.13031500T_1(x) + 0.27145036T_2(x) + 0.04379392T_3(x) \\
&= 0.99461532 + 0.99893324x + 0.54290072x^2 + 0.17517568x^3.
\end{aligned}
$$

Nội suy bằng đa thức Hermit

- Trong một số trường hợp, ta cần tìm hàm đa thức không những đi qua những điểm cho trước mà còn phải thỏa mãn điều kiện về đạo hàm tại các điểm đó. Ta gọi các đa thức đó là đa thức nội suy Hermit.
- Để đơn giản, ta khảo sát đa thức bậc 3:

$$h(x) = H_3x^3 + H_2x^2 + H_1x + H_0$$

đi qua hai điểm (x_0, y_0), (x_1, y_1) và có các đạo hàm là y_0', y_1'. Như vậy ta phải tìm các hệ số $H_i, i = \overline{0,3}$ bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} h\left(x_0\right) = H_3x_0^3 + H_2x_0^2 + H_1x_0 + H_0 = y_0 \\ h\left(x_1\right) = H_3x_1^3 + H_2x_1^2 + H_1x_1 + H_0 = y_1 \\ h'\left(x_0\right) = 3H_3x_0^2 + 2H_2x_0 + H_1 = y_0' \\ h'\left(x_1\right) = 3H_3x_1^2 + 2H_2x_1 + H_1 = y_1' \end{cases}$$

Nội suy bằng đa thức Hermit

- Các đạo hàm bậc nhất được tính gần đúng bởi

$$y_0' = \frac{h(x_0+\varepsilon)-h(x_0)}{\varepsilon} =: \frac{y_2-y_0}{\varepsilon}$$
$$y_0' = \frac{h(x_1)-h(x_1-\varepsilon)}{\varepsilon} =: \frac{y_1-y_3}{\varepsilon}$$

- Bây giờ ta tìm đa thức nội suy Lagange hay Newton đi qua 4 điểm

$$(x_0,y_0),\ \left(x_2=x_0+\varepsilon, y_2=y_0+y_0'\varepsilon\right),\left(x_3=x_1-\varepsilon, y_3=y_1+y_1'\varepsilon\right),(x_1,y_1).$$

Nội dung

Giải gần đúng phương trình

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu một số phương pháp giải phương trình một biến số:

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

trong đó $f(x)$ là một hàm số (hay siêu việt).
Phương trình (2.1) chỉ giải được đúng trong một số trường hợp đặc biệt, nói chung rất phức tạp, do đó chúng ta phải tìm cách giải gần đúng. Ngoài ra các hệ số của $f(x)$ trong thực tế chỉ biết gần đúng vì thế việc giải đúng (2.1) chẳng những không thực hiện được mà nhiều khi không có ý nghĩa.
Để giải (2.1) thông thường có hai bước:

1. Giải sơ bộ: Đi tìm một khoảng đủ bé chứa nghiệm
   - Vây nghiệm: Tìm đoạn bé chứa các nghiệm
   - Tách nghiệm: Tách các đoạn bé, mỗi đoạn chỉ chứa một nghiệm
2. Giải kiện toàn: Tìm nghiệm với độ chính xác cần thiết

Giải gần đúng phương trình

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu một số phương pháp giải phương trình một biến số:

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

trong đó $f(x)$ là một hàm số (hay siêu việt).
Phương trình (2.1) chỉ giải được đúng trong một số trường hợp đặc biệt, nói chung rất phức tạp, do đó chúng ta phải tìm cách giải gần đúng. Ngoài ra các hệ số của $f(x)$ trong thực tế chỉ biết gần đúng vì thế việc giải đúng (2.1) chẳng những không thực hiện được mà nhiều khi không có ý nghĩa.
Để giải (2.1) thông thường có hai bước:

1. Giải sơ bộ: Đi tìm một khoảng đủ bé chứa nghiệm
   - Vây nghiệm: Tìm đoạn bé chứa các nghiệm
   - Tách nghiệm: Tách các đoạn bé, mỗi đoạn chỉ chứa một nghiệm
2. Giải kiện toàn: Tìm nghiệm với độ chính xác cần thiết

Giải gần đúng phương trình

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu một số phương pháp giải phương trình một biến số:

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

trong đó $f(x)$ là một hàm số (hay siêu việt).
Phương trình (2.1) chỉ giải được đúng trong một số trường hợp đặc biệt, nói chung rất phức tạp, do đó chúng ta phải tìm cách giải gần đúng. Ngoài ra các hệ số của $f(x)$ trong thực tế chỉ biết gần đúng vì thế việc giải đúng (2.1) chẳng những không thực hiện được mà nhiều khi không có ý nghĩa.
Để giải (2.1) thông thường có hai bước:

1. Giải sơ bộ: Đi tìm một khoảng đủ bé chứa nghiệm
   - Vây nghiệm: Tìm đoạn bé chứa các nghiệm
   - Tách nghiệm: Tách các đoạn bé, mỗi đoạn chỉ chứa một nghiệm
2. Giải kiện toàn: Tìm nghiệm với độ chính xác cần thiết

Giải gần đúng phương trình

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu một số phương pháp giải phương trình một biến số:

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

trong đó $f(x)$ là một hàm số (hay siêu việt).
Phương trình (2.1) chỉ giải được đúng trong một số trường hợp đặc biệt, nói chung rất phức tạp, do đó chúng ta phải tìm cách giải gần đúng. Ngoài ra các hệ số của $f(x)$ trong thực tế chỉ biết gần đúng vì thế việc giải đúng (2.1) chẳng những không thực hiện được mà nhiều khi không có ý nghĩa.
Để giải (2.1) thông thường có hai bước:

1. Giải sơ bộ: Đi tìm một khoảng đủ bé chứa nghiệm
   - Vây nghiệm: Tìm đoạn bé chứa các nghiệm
   - Tách nghiệm: Tách các đoạn bé, mỗi đoạn chỉ chứa một nghiệm
2. Giải kiện toàn: Tìm nghiệm với độ chính xác cần thiết

Phương pháp chia đôi

- Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$.
- Chia $[a,b]$ thành 2 phần bởi điểm giữa $c = \dfrac{a+b}{2}$
  1. Nếu $f(c) = 0$ thì nghiệm $\xi = c$
  2. Nếu $f(c) \neq 0$ thì chọn $[a,c]$ hoặc $[c,b]$ mà giá trị hàm tại hai đầu trái dấu và ký hiệu là $[a_1, b_1]$. Đối với $[a_1, b_1]$ lại tiến hành như $[a,b]$.
- Ưu điểm của phương pháp chia đôi là thuật toán đơn giản do đó dễ lập trình. Tuy nhiên do phương pháp chia đôi sử dụng rất ít thông tin về hàm $f(x)$ nên tốc độ hội tụ khá chậm và chỉ sử dụng để giải sơ bộ phương trình.

Phương pháp chia đôi

- Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$.
- Chia $[a, b]$ thành 2 phần bởi điểm giữa $c = \dfrac{a+b}{2}$
  1. Nếu $f(c) = 0$ thì nghiệm $\xi = c$
  2. Nếu $f(c) \neq 0$ thì chọn $[a, c]$ hoặc $[c, b]$ mà giá trị hàm tại hai đầu trái dấu và ký hiệu là $[a_1, b_1]$. Đối với $[a_1, b_1]$ lại tiến hành như $[a, b]$.
- Ưu điểm của phương pháp chia đôi là thuật toán đơn giản do đó dễ lập trình. Tuy nhiên do phương pháp chia đôi sử dụng rất ít thông tin về hàm $f(x)$ nên tốc độ hội tụ khá chậm và chỉ sử dụng để giải sơ bộ phương trình.

Phương pháp chia đôi

- Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$.
- Chia $[a,b]$ thành 2 phần bởi điểm giữa $c = \dfrac{a+b}{2}$
  1. Nếu $f(c) = 0$ thì nghiệm $\xi = c$
  2. Nếu $f(c) \neq 0$ thì chọn $[a,c]$ hoặc $[c,b]$ mà giá trị hàm tại hai đầu trái dấu và ký hiệu là $[a_1,b_1]$. Đối với $[a_1,b_1]$ lại tiến hành như $[a,b]$.
- Ưu điểm của phương pháp chia đôi là thuật toán đơn giản do đó dễ lập trình. Tuy nhiên do phương pháp chia đôi sử dụng rất ít thông tin về hàm $f(x)$ nên tốc độ hội tụ khá chậm và chỉ sử dụng để giải sơ bộ phương trình.

Phương pháp chia đôi

- Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$.
- Chia $[a, b]$ thành 2 phần bởi điểm giữa $c = \dfrac{a+b}{2}$
  1. Nếu $f(c) = 0$ thì nghiệm $\xi = c$
  2. Nếu $f(c) \neq 0$ thì chọn $[a, c]$ hoặc $[c, b]$ mà giá trị hàm tại hai đầu trái dấu và ký hiệu là $[a_1, b_1]$. Đối với $[a_1, b_1]$ lại tiến hành như $[a, b]$.
- Ưu điểm của phương pháp chia đôi là thuật toán đơn giản do đó dễ lập trình. Tuy nhiên do phương pháp chia đôi sử dụng rất ít thông tin về hàm $f(x)$ nên tốc độ hội tụ khá chậm và chỉ sử dụng để giải sơ bộ phương trình.

Phương pháp chia đôi

- Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$.
- Chia $[a, b]$ thành 2 phần bởi điểm giữa $c = \dfrac{a+b}{2}$
  1. Nếu $f(c) = 0$ thì nghiệm $\xi = c$
  2. Nếu $f(c) \neq 0$ thì chọn $[a, c]$ hoặc $[c, b]$ mà giá trị hàm tại hai đầu trái dấu và ký hiệu là $[a_1, b_1]$. Đối với $[a_1, b_1]$ lại tiến hành như $[a, b]$.
- Ưu điểm của phương pháp chia đôi là thuật toán đơn giản do đó dễ lập trình. Tuy nhiên do phương pháp chia đôi sử dụng rất ít thông tin về hàm $f(x)$ nên tốc độ hội tụ khá chậm và chỉ sử dụng để giải sơ bộ phương trình.

Phương pháp dây cung

- Giả sử $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và thỏa mãn $f(a).f(b) < 0$. Không mất tổng quát ta giả sử $f(a) < 0$ và $f(b) > 0$. Khi đó, thay vì chia đôi đoạn $[a, b]$, ta chia theo tỷ lệ $-\dfrac{f(a)}{f(b)}$ và thu được nghiệm gần đúng

$$x_1 = a + h_1$$

trong đó

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a) + f(b)}(b - a).$$

- Tiếp theo dùng cách trên với một trong hai đoạn $[a, x_1]$ hay $[x_1, b]$ mà giá trị hàm tại hai đầu trái dấu ta thu được nghiệm gần đúng x_2.
- Công thức lặp của phương pháp dây cung:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{d - x_{n-1}}{f(d) - f(x_{n-1})}.f\left(x_{n-1}\right),$$

trong đó $x_0 = a$ (hoặc $x_0 = b$) thì $d = b$ (hoặc a).

Phương pháp dây cung

- Giả sử $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và thỏa mãn $f(a).f(b) < 0$. Không mất tổng quát ta giả sử $f(a) < 0$ và $f(b) > 0$. Khi đó, thay vì chia đôi đoạn $[a, b]$, ta chia theo tỷ lệ $-\dfrac{f(a)}{f(b)}$ và thu được nghiệm gần đúng

$$x_1 = a + h_1$$

trong đó

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a) + f(b)}(b - a).$$

- Tiếp theo dùng cách trên với một trong hai đoạn $[a, x_1]$ hay $[x_1, b]$ mà giá trị hàm tại hai đầu trái dấu ta thu được nghiệm gần đúng x_2.
- Công thức lặp của phương pháp dây cung:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{d - x_{n-1}}{f(d) - f(x_{n-1})}.f(x_{n-1}),$$

trong đó $x_0 = a$ (hoặc $x_0 = b$) thì $d = b$ (hoặc a).

Phương pháp dây cung

- Giả sử $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và thỏa mãn $f(a).f(b) < 0$. Không mất tổng quát ta giả sử $f(a) < 0$ và $f(b) > 0$. Khi đó, thay vì chia đôi đoạn $[a,b]$, ta chia theo tỷ lệ $-\dfrac{f(a)}{f(b)}$ và thu được nghiệm gần đúng

$$x_1 = a + h_1$$

trong đó

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a) + f(b)}(b-a).$$

- Tiếp theo dùng cách trên với một trong hai đoạn $[a, x_1]$ hay $[x_1, b]$ mà giá trị hàm tại hai đầu trái dấu ta thu được nghiệm gần đúng x_2.
- Công thức lặp của phương pháp dây cung:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{d - x_{n-1}}{f(d) - f(x_{n-1})}.f\left(x_{n-1}\right),$$

trong đó $x_0 = a$ (hoặc $x_0 = b$) thì $d = b$ (hoặc a).

Phương pháp Newton - Raphson

Phương pháp Newton (còn gọi là phương pháp tiếp tuyến) được dùng nhiều vì nó hội tụ nhanh. Tuy nhiên phương pháp này đòi hỏi phải tính đạo hàm $f^{'}(x)$. Công thức Newton - raphson được suy từ khai triển Taylor của $f(x)$ trong lân cận x:

$$f\left(x_{i+1}\right) = f\left(x_i\right) + f^{'}\left(x_i\right)\left(x_{i+1} - x_i\right) + O\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 .$$

Nếu x_{i+1} là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì ta có

$$0 = f\left(x_i\right) + f^{'}\left(x_i\right)\left(x_{i+1} - x_i\right) + O\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 .$$

Giả sử x_i gần với x_{i+1}, ta có thể bỏ qua số hạng cuối và thu được công thức Newton - Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f\left(x_i\right)}{f'\left(x_i\right)} \quad (2.2)$$

Phương pháp Newton - Raphson

Thuật toán được tóm lược như sau

1. Cho x_0
2. Tính $\Delta x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$
3. Cho $x = x + \Delta x$
4. Lặp lại bước 2 và bước 3 cho đến khi $|\Delta x| < \varepsilon$

Phương pháp Newton - Raphson

Thuật toán được tóm lược như sau

1. Cho x_0
2. Tính $\Delta x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$
3. Cho $x = x + \Delta x$
4. Lặp lại bước 2 và bước 3 cho đến khi $|\Delta x| < \varepsilon$

Phương pháp Newton - Raphson

Thuật toán được tóm lược như sau

1. Cho x_0
2. Tính $\Delta x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$
3. Cho $x = x + \Delta x$
4. Lặp lại bước 2 và bước 3 cho đến khi $|\Delta x| < \varepsilon$

Phương pháp Newton - Raphson

Thuật toán được tóm lược như sau

1. Cho x_0
2. Tính $\Delta x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$
3. Cho $x = x + \Delta x$
4. Lặp lại bước 2 và bước 3 cho đến khi $|\Delta x| < \varepsilon$

Nội dung

Phương pháp lặp đơn

Xét hệ phương trình đại số tuyến tính:

$$Ax = b, \tag{3.3}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận cấp $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ là vector cho trước, còn $x \in \mathbb{R}^n$ là vector nghiệm cần tìm.

Để giải lặp hệ (4.1) ta biến đổi nó về dạng thuận tiện cho phép lặp

$$x = Bx + g, \tag{3.4}$$

Phương pháp lặp đơn

Xét hệ phương trình đại số tuyến tính:

$$Ax = b, \tag{3.3}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận cấp $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ là vector cho trước, còn $x \in \mathbb{R}^n$ là vector nghiệm cần tìm.
Để giải lặp hệ (4.1) ta biến đổi nó về dạng thuận tiện cho phép lặp

$$x = Bx + g, \tag{3.4}$$

Phương pháp lặp đơn

Dựa vào nguyên lý ánh xạ co ta có kết quả sau:

Định lý 3.1

Giả sử $\|B\| < 1$. *Khi đó mọi dãy lặp*

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \quad (k \geq 0) \tag{3.5}$$

trong đó $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *bất kỳ cho trước, đều hội tụ đến nghiệm duy nhất* x^* *của phương trình* (3.4). *Hơn nữa ta có các đánh giá sai số:*

$$\begin{aligned} \left\|x^{(k)} - x^{(0)}\right\| &\leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|, \\ \left\|x^{(k)} - x^*\right\| &\leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|. \end{aligned}$$

Phương pháp Jacobi

Định nghĩa 3.1

Ma trận $A = (a_{ij})_1^n$ *được gọi là ma trận (đường) chéo trội (strictly diagonally dominant) nếu*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{với } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Định lý 3.2

Giả sử A là ma trận chéo trội. Khi đó hệ (4.1) có thể được biến đổi về dạng phương trình (3.4) với

$$g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad B = (b_{ij})_1^n, \quad b_{ij} = \begin{cases} 0, & j = i \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i \end{cases}.$$

Phương pháp Jacobi

Định nghĩa 3.1

Ma trận $A = (a_{ij})_1^n$ *được gọi là ma trận (đường) chéo trội (strictly diagonally dominant) nếu*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{với } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Định lý 3.2

Giả sử A *là ma trận chéo trội. Khi đó hệ* (4.1) *có thể được biến đổi về dạng phương trình* (3.4) *với*

$$g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad B = (b_{ij})_1^n, \quad b_{ij} = \begin{cases} 0, & j = i \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i \end{cases}.$$

Phương pháp Jacobi

Dễ thấy

$$\|B\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max_{1\le i\le n} \frac{\sum_{j\ne i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$$

Công thức lặp Jacobi

Giả sử phần tử thứ k của dãy lặp là $X^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$. Khi đó phần tử kế tiếp $X^{(k+1)} = \left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}\right)$ sẽ được tính theo công thức

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - \dots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{in}x_n^{(k)}\right), \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.7}$$

Phương pháp Gauss-Seidel

Công thức lặp Gauss-Seidel

Giả sử phần tử thứ k của dãy lặp là $X^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$. Khi đó phần tử kế tiếp $X^{(k+1)} = \left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}\right)$ sẽ được tính theo công thức

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)}\right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Để đơn giản, ta chỉ xét trong trường hợp hai chiều. Các kết quả này có thể dễ dàng mở rộng cho các trường hợp nhiều chiều hơn.

Mục tiêu

Tìm phương pháp giải hệ phương trình phi tuyến

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 0 \\ f_2(x,y) &= 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

trong đó f_1, f_2 là các hàm (phi tuyến) phụ thuộc vào hai biến x, y.

Định nghĩa 3.2

Ma trận Jacobi của các hàm $f_1(x,y)$ và $f_2(x,y)$ được xác định bởi

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Đạo hàm mở rộng

Giả sử các hàm $u = f_1(x, y)$ và $v = f_2(x, y)$ đã biết các giá trị tại điểm (x_0, y_0). Ta muốn dự đoán giá trị của chúng tại điểm lân cận (x, y). Khi đó theo các công thức vi phân toàn phần ta có

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0)\, dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0)\, dy \\ dv &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)\, dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0)\, dy \end{aligned}$$

hoặc có thể viết dưới dạng ma trận

$$dF = \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = J(x_0, y_0) \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J(x_0, y_0)\, dX. \tag{3.11}$$

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Định nghĩa 3.3

Điểm (p, q) *được gọi là* *điểm bất động* *của hai phương trình*

$$x = g_1(x, y) \tag{3.12a}$$
$$y = g_2(x, y) \tag{3.12b}$$

nếu $p = g_1(p, q)$ *và* $q = g_1(p, q)$.

Định nghĩa 3.4

Phép lặp điểm bất động *của phương trình* (3.12a), (3.12b) *được xác định bởi*

$$p_{k+1} = g_1(p_k, q_k) \tag{3.13a}$$
$$q_{k+1} = g_2(p_k, q_k), \quad k \geq 0. \tag{3.13b}$$

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Định lý 3.3

Giả sử các hàm trong hệ phương trình (3.12a), (3.12b) *và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong lân cận của điểm bất động* (p, q). *Khi đó nếu điểm xuất phát* (p_0, q_0) *được chọn "đủ gần"* (p, q), *đồng thời*

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial g_1}{\partial x}(p,q)\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial}(p,q)\right| &< 1 \\ \left|\frac{\partial g_2}{\partial x}(p,q)\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial}(p,q)\right| &< 1 \end{aligned}$$

thì dãy lặp (3.13a), (3.13b) *hội tụ đến điểm bất động* (p, q) *của hệ* (3.12a), (3.12b).

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Xét các hàm $u = f_1(x, y)$ và $v = f_2(x, y)$. Giả sử các hàm f_1, f_2 có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm (x_0, y_0). Khi đó trong lân cận này ta sẽ có các xấp xỉ tuyến tính:

$$
\begin{aligned}
u - u_0 &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\
u - u_0 &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),
\end{aligned}
$$

hay có thể viết dưới dạng

$$
\Delta F = \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = J(x_0, y_0)\Delta X. \tag{3.14}
$$

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Xét các hàm $u = f_1(x, y)$ và $v = f_2(x, y)$. Giả sử các hàm f_1, f_2 có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm (x_0, y_0). Khi đó trong lân cận này ta sẽ có các xấp xỉ tuyến tính:

$$\begin{aligned} u - u_0 &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ u - u_0 &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \end{aligned}$$

hay có thể viết dưới dạng

$$\Delta F = \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = J(x_0, y_0)\Delta X. \tag{3.14}$$

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Ta sẽ dùng (3.14) để xây dựng dãy lặp Newton giải hệ

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x, y) \\ 0 &= f_2(x, y). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Giả sử (p, q) là nghiệm của (3.15), tức là $0 = f_1(p, q)$ và $0 = f_2(p, q)$. Xét sự biến thiên của các hàm u, v tại điểm (p_0, q_0):

$$\begin{aligned} \Delta u &= u - u_0 \quad \Delta p = x - p_0 \\ \Delta v &= v - u_0 \quad \Delta q = y - q_0 \end{aligned}$$

Đặt $(x, y) = (p, q)$ trong (3.15) ta thấy $(u, v) = (0, 0)$, do đó

$$\begin{aligned} u - u_0 &= f_1(p, q) - f_1\left(p_0, q_0\right) = -f_1(p_0, q_0) \\ v - v_0 &= f_2(p, q) - f_2\left(p_0, q_0\right) = -f_2(p_0, q_0) \end{aligned}$$

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Từ đó ta thu được

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(p_0, q_0) \\ f_2(p_0, q_0) \end{bmatrix}$$

hay

$$J(p_0, q_0)\, \Delta P = -F(p_0, q_0). \tag{3.16}$$

Nếu ma trận $J(p_0, q_0)$ là không suy biến thì ta có

$$\Delta P = -\left[J(p_0, q_0)\right]^{-1} F(p_0, q_0). \tag{3.17}$$

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Lược đồ lặp Newton

Giả sử ở bước thứ k ta đã có P_k.

- *Bước 1*: Tính giá trị của vector hàm $F(P_k) = \begin{bmatrix} f_1(p_k, q_k) \\ f_2(p_k, q_k) \end{bmatrix}$;
- *Bước 2*: Tính giá trị của ma trận Jacobi
$$J(P_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p_k, q_k) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p_k, q_k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p_k, q_k) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p_k, q_k) \end{bmatrix};$$
- *Bước 3*: Giải hệ đại số tuyến tính với (ẩn ΔP): $J(P_k)\Delta P = -F(P_k)$;
- *Bước 4*: Tính xấp xỉ tiếp theo theo công thức: $P_{k+1} = P_k + \Delta P$;
- Lặp lại quá trình trên.

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Lược đồ lặp Newton

Giả sử ở bước thứ k ta đã có P_k.

- *Bước 1*: Tính giá trị của vector hàm $F(P_k) = \begin{bmatrix} f_1(p_k, q_k) \\ f_2(p_k, q_k) \end{bmatrix}$;
- *Bước 2*: Tính giá trị của ma trận Jacobi
  $$J(P_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p_k, q_k) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p_k, q_k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p_k, q_k) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p_k, q_k) \end{bmatrix};$$
- *Bước 3*: Giải hệ đại số tuyến tính với (ẩn ΔP): $J(P_k)\Delta P = -F(P_k)$;
- *Bước 4*: Tính xấp xỉ tiếp theo theo công thức: $P_{k+1} = P_k + \Delta P$;
- Lặp lại quá trình trên.

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Lược đồ lặp Newton

Giả sử ở bước thứ k ta đã có P_k.

- *Bước 1*: Tính giá trị của vector hàm $F(P_k) = \begin{bmatrix} f_1(p_k, q_k) \\ f_2(p_k, q_k) \end{bmatrix}$;
- *Bước 2*: Tính giá trị của ma trận Jacobi
$$J(P_k) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(p_k, q_k) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(p_k, q_k) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(p_k, q_k) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(p_k, q_k) \end{bmatrix};$$
- *Bước 3*: Giải hệ đại số tuyến tính với (ẩn ΔP): $J(P_k)\Delta P = -F(P_k)$;
- *Bước 4*: Tính xấp xỉ tiếp theo theo công thức: $P_{k+1} = P_k + \Delta P$;
- Lặp lại quá trình trên.

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Lược đồ lặp Newton

Giả sử ở bước thứ k ta đã có P_k.

- *Bước 1*: Tính giá trị của vector hàm $F\left(P_k\right) = \begin{bmatrix} f_1\left(p_k, q_k\right) \\ f_2\left(p_k, q_k\right) \end{bmatrix}$;
- *Bước 2*: Tính giá trị của ma trận Jacobi
$$J\left(P_k\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\left(p_k, q_k\right) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\left(p_k, q_k\right) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\left(p_k, q_k\right) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\left(p_k, q_k\right) \end{bmatrix};$$
- *Bước 3*: Giải hệ đại số tuyến tính với (ẩn ΔP): $J\left(P_k\right)\Delta P = -F\left(P_k\right)$;
- *Bước 4*: Tính xấp xỉ tiếp theo theo công thức: $P_{k+1} = P_k + \Delta P$;
- Lặp lại quá trình trên.

Phương pháp Newton giải hệ phương trình phi tuyến

Lược đồ lặp Newton

Giả sử ở bước thứ k ta đã có P_k.

- *Bước 1*: Tính giá trị của vector hàm $F\left(P_k\right)=\begin{bmatrix} f_1\left(p_k,q_k\right) \\ f_2\left(p_k,q_k\right)\end{bmatrix}$;
- *Bước 2*: Tính giá trị của ma trận Jacobi
$$J\left(P_k\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\left(p_k,q_k\right) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\left(p_k,q_k\right) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\left(p_k,q_k\right) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\left(p_k,q_k\right)\end{bmatrix};$$
- *Bước 3*: Giải hệ đại số tuyến tính với (ẩn ΔP): $J\left(P_k\right)\Delta P=-F\left(P_k\right)$;
- *Bước 4*: Tính xấp xỉ tiếp theo theo công thức: $P_{k+1}=P_k+\Delta P$;
- Lặp lại quá trình trên.

Nội dung

Bài toán giá trị ban đầu

Bài toán 4.1

Tìm hàm số $y = y(x)$ *thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(x, y), \quad x_0 \le x \le \overline{x}; \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Người ta chứng minh được rằng bài toán trên có duy nhất nghiệm nếu f thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo đối y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$$

với L là một hằng số dương.

Bài toán giá trị ban đầu

Bài toán 4.1

Tìm hàm số $y = y(x)$ *thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(x, y), \quad x_0 \leq x \leq \overline{x}; \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Người ta chứng minh được rằng bài toán trên có duy nhất nghiệm nếu f thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo đối y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

với L là một hằng số dương.

Bài toán giá trị ban đầu

Mục tiêu

Tìm nghiệm bằng số của bài toán (4.1) tại điểm $x_1 = x_0 + h \in [x_0, \overline{x}]$ với bước $h > 0$.

Một số phương pháp một bước thông dụng

- Phương pháp Euler
- Phương pháp Euler cải tiến
- Phương pháp Runge - Kutta (RK)

Bài toán giá trị ban đầu

Mục tiêu

Tìm nghiệm bằng số của bài toán (4.1) tại điểm $x_1 = x_0 + h \in [x_0, \overline{x}]$ với bước $h > 0$.

Một số phương pháp một bước thông dụng

- Phương pháp Euler
- Phương pháp Euler cải tiến
- Phương pháp Runge - Kutta (RK)

Bài toán giá trị ban đầu

Mục tiêu

Tìm nghiệm bằng số của bài toán (4.1) tại điểm $x_1 = x_0 + h \in [x_0, \overline{x}]$ với bước $h > 0$.

Một số phương pháp một bước thông dụng

- Phương pháp Euler
- Phương pháp Euler cải tiến
- Phương pháp Runge - Kutta (RK)

Bài toán giá trị ban đầu

Mục tiêu

Tìm nghiệm bằng số của bài toán (4.1) tại điểm $x_1 = x_0 + h \in [x_0, \overline{x}]$ với bước $h > 0$.

Một số phương pháp một bước thông dụng

- Phương pháp Euler
- Phương pháp Euler cải tiến
- Phương pháp Runge - Kutta (RK)

Phương pháp Euler (RK-1)

Công thức Euler

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y). \tag{4.1}$$

Công thức lặp

Nếu đoạn $[x_0, \overline{x}]$ được chia thành N đoạn có độ dài $h = \dfrac{\overline{x} - x_0}{N}$ bởi các điểm chia $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ thì theo công thức Euler ta tính được giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm $x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \ldots$ theo các công thức:

- $y_0 = y(x_0)$;
- $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$;
- $\ldots$;
- $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$;
- $\ldots$

Phương pháp Euler (RK-1)

Công thức Euler

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y). \qquad (4.1)$$

Công thức lặp

Nếu đoạn $[x_0, \overline{x}]$ được chia thành N đoạn có độ dài $h = \dfrac{\overline{x} - x_0}{N}$ bởi các điểm chia $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ thì theo công thức Euler ta tính được giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm $x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \ldots$ theo các công thức:

- $y_0 = y(x_0)$;
- $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$;
- $\ldots$;
- $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$;
- $\ldots$

Phương pháp Euler (RK-1)

Công thức Euler

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y). \tag{4.1}$$

Công thức lặp

Nếu đoạn $[x_0, \overline{x}]$ được chia thành N đoạn có độ dài $h = \dfrac{\overline{x} - x_0}{N}$ bởi các điểm chia $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ thì theo công thức Euler ta tính được giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm $x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \ldots$ theo các công thức:

- $y_0 = y(x_0)$;
- $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$;
- $\ldots$;
- $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$;
- $\ldots$

Phương pháp Euler (RK-1)

Công thức Euler

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y). \tag{4.1}$$

Công thức lặp

Nếu đoạn $[x_0, \overline{x}]$ được chia thành N đoạn có độ dài $h = \dfrac{\overline{x} - x_0}{N}$ bởi các điểm chia $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ thì theo công thức Euler ta tính được giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm $x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \ldots$ theo các công thức:

- $y_0 = y\,(x_0)$;
- $y_1 = y_0 + hf\,(x_0, y_0)$;
- $\ldots$;
- $y_i = y_{i-1} + hf\,(x_{i-1}, y_{i-1})$;
- $\ldots$

Phương pháp Euler (RK-1)

Công thức Euler

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y). \tag{4.1}$$

Công thức lặp

Nếu đoạn $[x_0, \overline{x}]$ được chia thành N đoạn có độ dài $h = \dfrac{\overline{x} - x_0}{N}$ bởi các điểm chia $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ thì theo công thức Euler ta tính được giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm $x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \ldots$ theo các công thức:

- $y_0 = y(x_0)$;
- $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$;
- $\ldots$;
- $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$;
- $\ldots$

Phương pháp Euler (RK-1)

Công thức Euler

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y). \tag{4.1}$$

Công thức lặp

Nếu đoạn $[x_0, \overline{x}]$ được chia thành N đoạn có độ dài $h = \dfrac{\overline{x} - x_0}{N}$ bởi các điểm chia $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ thì theo công thức Euler ta tính được giá trị gần đúng của nghiệm tại các điểm $x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \ldots$ theo các công thức:

- $y_0 = y(x_0)$;
- $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$;
- $\ldots$;
- $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$;
- $\ldots$

Phương pháp Euler cải tiến

Công thức Euler cải tiến

$$\begin{aligned} \overline{y} &= y(x) + hf(x,y) \\ y(x+h) &= \frac{h}{2}\left[f(x,y) + f(x+h,\overline{y})\right]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Công thức lặp

Với $i = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} z &= y_{i-1} + hf\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right); \\ y_i &= y_{i-1} + h\left[f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) + f\left(x_{i-1} + h, z\right)\right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Phương pháp Euler cải tiến

Công thức Euler cải tiến

$$\begin{aligned} \overline{y} &= y(x) + hf(x,y) \\ y(x+h) &= \frac{h}{2}\left[f(x,y) + f(x+h,\overline{y})\right]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Công thức lặp

Với $i = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} z &= y_{i-1} + hf\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right); \\ y_i &= y_{i-1} + h\left[f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) + f\left(x_{i-1} + h, z\right)\right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Phương pháp Runge-Kutta

Họ các phương pháp Runge-Kutta (RK) hiển s-nấc được xác định bởi công thức

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \qquad (4.4)$$

trong đó

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

Phương pháp Runge-Kutta

Họ các phương pháp Runge-Kutta (RK) hiển s-nấc được xác định bởi công thức

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \tag{4.4}$$

trong đó

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1\right) \end{aligned}$$

Phương pháp Runge-Kutta

Họ các phương pháp Runge-Kutta (RK) hiển s-nấc được xác định bởi công thức

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \tag{4.4}$$

trong đó

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + c_3 h, y_n + h\left(a_{31} k_1 + a_{32} k_2\right)\right) \end{aligned}$$

Phương pháp Runge-Kutta

Họ các phương pháp Runge-Kutta (RK) hiển s-nấc được xác định bởi công thức

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \tag{4.4}$$

trong đó

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + c_3 h, y_n + h\left(a_{31} k_1 + a_{32} k_2\right)\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Phương pháp Runge-Kutta

Họ các phương pháp Runge-Kutta (RK) hiển s-nấc được xác định bởi công thức

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \tag{4.4}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f\left(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1\right) \\
k_3 &= f\left(x_n + c_3 h, y_n + h\left(a_{31} k_1 + a_{32} k_2\right)\right) \\
&\vdots \\
k_s &= f\left(x_n + c_s h, y_n + h\sum_{i=1}^{s-1} a_{si} k_i\right)
\end{aligned}$$

Phương pháp Runge-Kutta

Bảng Butcher

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & \cdots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

Phương pháp Runge-Kutta

Bảng Butcher

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & \cdots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

hoặc ở dạng gọn hơn: $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$

với $A = (a_{ij})$ và $a_{ij} = 0$ với $j \geq i$.

Phương pháp Runge-Kutta

Các ví dụ

Ví dụ 1

Xét trường hợp $s = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hb_1 f(x_n, y_n). \end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng công thức khai triển Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + h\dot{y}|_{x_n} + \cdots = y_n + hf(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h^2) \Longrightarrow b_1 = 1.$$

Do đó, phương pháp Runge - Kutta một nấc (RK 1) tương đương với phương pháp Euler hiển.

Phương pháp Runge-Kutta

Các ví dụ

Ví dụ 2

Với $s = 2$, phương trình (4.4) tương đương với hệ

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Áp dụng khai triển Taylor trong lân cận x_n ta có

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{dy}{dx}|_{x_n} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}|_{x_n} + \mathcal{O}(h^3).$$

Mặt khác, ta biết rằng $\dot{y} = f(x, y)$, do đó

$$\frac{d^2y}{dx^2} := \frac{df(x,y)}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Phương pháp Runge-Kutta

Các ví dụ

Ví dụ 2 (tiếp)

Do đó, công thức khai triển Taylor có thể được viết lại như sau

$$y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)|_{(x_n,y_n)} + \mathcal{O}\left(h^3\right). \quad (4.6)$$

Mặt khác, số hạng k_2 trong công thức RK trên có thể khai triển tới $\mathcal{O}\left(h^3\right)$ bởi

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_n + c_2 h, y_n + ha_{21}k_1\right) \\ &= hf(x_n, y_n) + hc_2\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_n,y_n)} + +ha_{21}f\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_n,y_n)} + \mathcal{O}\left(h^3\right). \end{aligned}$$

Thay vào phương trình cuối của hệ (4.5) ta thu được

$$y_{n+1} - y_n = h(b_1 + b_2) f(x_n, y_n) + h^2 b_2 c_2 \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_n,y_n)} + h^2 b_2 a_{21} f\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_n,y_n)} + \mathcal{O}\left(h^3\right).$$

Thay vào (4.6) ta thu được hệ

Phương pháp Runge-Kutta

Các ví dụ

Ví dụ 2 (tiếp)

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= 1, \\ b_2 c_2 &= \frac{1}{2}, \\ b_2 a_{21} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cho $c_2 = 1$. Khi đó $b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{21} = 1$. Bảng Butcher tương ứng $\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$. Do đó, công thức Runge-Kutta 2-nấc trong trường hợp này có dạng công thức Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f\left(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\right)\right),$$

Phương pháp RK4

Công thức RK4

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x, y); \\
k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right); \\
k_3 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right); \\
k_4 &= hf\left(x + h, y + k_3\right); \\
y &= y(x) + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Bảng Butcher tương ứng

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}
$$

Phương pháp RK4

Công thức lặp

Với $i = 1, 2 \ldots$:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right); \\ k_2 &= hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_1}{2}\right); \\ k_3 &= hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_2}{2}\right); \\ k_4 &= hf\left(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3\right); \\ y_i &= y_{i-1} + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bài toán

Bài toán 4.2

Tìm $y = y(x)$ *và* $z = z(x)$ *là nghiệm của bài toán Cauchy*

$$\begin{array}{rcl} \dot{y} & = & f(x,y,z) \quad y(x_0) = \alpha \\ \dot{z} & = & g(x,y,z) \quad z(x_0) = \beta \\ x & \in & [x_0, \overline{x}] \end{array} \tag{4.9}$$

hoặc

Bài toán 4.3

Tìm $y = y(x)$ *là nghiệm của bài toán Cauchy cấp hai:*

$$\begin{array}{rcl} \ddot{y} & = & f(x,y,z) \quad x \in [x_0, \overline{x}] \\ y(x_0) & = & \alpha; \quad \dot{y}(x_0) = \beta. \end{array} \tag{4.10}$$

Bài toán

Bài toán 4.2

Tìm $y = y(x)$ *và* $z = z(x)$ *là nghiệm của bài toán Cauchy*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(x, y, z) \quad y(x_0) = \alpha \\ \dot{z} &= g(x, y, z) \quad z(x_0) = \beta \\ x &\in [x_0, \overline{x}] \end{aligned} \tag{4.9}$$

hoặc

Bài toán 4.3

Tìm $y = y(x)$ *là nghiệm của bài toán Cauchy cấp hai:*

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= f(x, y, z) \quad x \in [x_0, \overline{x}] \\ y(x_0) &= \alpha; \quad \dot{y}(x_0) = \beta. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Bài toán

Ta thấy bài toán (4.3) có thể được đưa về bài toán (4.2) bằng cách đặt

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z(x) \qquad y(x_0) = \alpha \\ \dot{z} &= f(x, y, z) \quad z(x_0) = \beta. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Vậy ta chỉ xét phương pháp tìm nghiệm của hệ hai phương trình vi phân cấp 1 (4.9).

Phương pháp Runge - Kutta giải hệ (4.9)

Chia đoạn $[x_0, \overline{x}]$ thành n đoạn con bởi các điểm chia $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Độ dài mỗi đoạn $h = x_{i+1} - x_i$. Giả sử giá trị của nghiệm tại x_{i-1} là y_{i-1} và z_{i-1} đã biết, ta tìm $y_i \approx y(x_i)$ và $z_i \approx z(x_i)$ theo các công thức của phương pháp RK4:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}\right); \quad l_1 = hg\left(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}\right) \\
k_2 &= hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_1}{2}, z_{i-1} + \frac{l_1}{2}\right); \\
l_2 &= hg\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_1}{2}, z_{i-1} + \frac{l_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_2}{2}, z_{i-1} + \frac{l_2}{2}\right); \\
l_3 &= hg\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_2}{2}, z_{i-1} + \frac{l_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf\left(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3, z_{i-1} + l_3\right); l_4 = hg\left(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3, z_{i-1} + l_3\right) \\
y_i &= y_{i-1} + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right); \quad z_i = z_{i-1} + \frac{1}{6}\left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Bài tập thực hành

Tìm nghiệm của bài toán Cauchy cấp hai:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + x\dot{y} + y &= 0 \quad 0 \le x \le 0.5 \\ y(0) &= 0 \quad \dot{y}(0) = 1. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Bài toán đã cho tương đương với hệ hai phương trình vi phân cấp 1

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z, y(0) = 0 \\ \dot{z} &= -xz - y, z(0) = 1. \end{aligned} \tag{4.14}$$