Uppgift 1

Thomas Andersson

September 2018

1 Problembeskrivning

Lös följande rotekvation:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-3} = 3 \tag{1}$$

2 Lösning

Vi vill hitta alla x som uppfyller ekvationen:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-3} = 3$$

Vi börjar med att flytta över den ena av termerna innehållandes ett rotuttryck och kvadrerar sedan båda sidorna:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-3} = 3 \iff \sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{2x-3} \implies$$
$$x+2 = (3-\sqrt{2x-3})^2 \tag{2}$$

Här kan det uppstå problem, då en kvadrering även ger upphov till en falsk rot i:

$$\sqrt{x+2} = -(3-\sqrt{2x-3})$$

Detta utgör inget stort problem, men det innebär att rötter måste testas i originalekvationen (1). Vi går vidare och utvecklar högerledet med hjälp av kvadreringsregeln:

$$(3-\sqrt{2x-3})^2 = 9 - 6\sqrt{2x-3} + 2x - 3$$

Och får då ekvationen:

$$x+2 = 9 - 6\sqrt{2x-3} + 2x - 3$$

Härifrån kan vi flytta över termer och förenkla till ett kortare uttryck:

$$x+2 = 9 - 6\sqrt{2x-3} + 2x - 3 \iff 6\sqrt{2x-3} = 9 + 2x - 3 - x - 2 = x + 4$$

Nästa steg blir att återigen kvadrera så att vi blir av med den resterande termen innehållandes ett rotuttryck:

$$6\sqrt{2x-3} = x+4 \implies 36(2x-3) = (x+4)^2 \tag{3}$$

Precis som vid tidigare kvadrering kan det uppstå nya rötter, och vi måste testa värden på x som löser denna ekvation. Vi fortsätter genom att utveckla problemet med hjälp av kvadreringsregeln:

$$36(2x-3) = 72x - 108 = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16 \iff$$

$$0 = x^2 + 8x + 16 + 108 - 72x = x^2 - 64x + 124$$

Härifrån kan vi använda oss av kvadratkomplettering:

$$0 = x^2 - 64x + 124 = x^2 - 64x + (32)^2 - (32)^2 + 124 = (x-32)^2 - (32)^2 + 124$$

Flytta över termer så att kvadraten blir ensam på ena sidan likhetstecknet:

$$(x-32)^2 - (32)^2 + 124 = 0 \iff (x-32)^2 = 32^2 - 124 = 1024 - 124 = 900$$

Nu kan vi ta reda på kvadratrötterna för detta uttryck:

$$(x-32)^2 = 900 \iff x - 32 = \pm\sqrt{900} \iff x = 32 \pm 30$$

Vi får en rot i x = 2 samt i x = 62. På grund av ekvationerna (2) och (3) måste vi testa båda dessa värden av x i ursprungsekvationen (1), för att säkerställa att vi inte tar med några falska rötter i vårt svar.

3 Test av rötter

Vi börjar med att testa roten x = 2:

$$VL = \sqrt{2+2} + \sqrt{2*2-3} = 2 + 1 = 3 = HL$$

Roten x = 2 ger en korrekt lösning, och därmed är det en sann rot. Därefter testar vi roten x = 62:

$$VL = \sqrt{62+2} + \sqrt{62*2-3} = 8 + 11 = 19 \neq 3 = HL$$

Vi får ett högerled som är skilt från vänsterledet, vilket innebär att x = 62 är en falsk rot.

4 Slutsats

Ekvationen har bara en lösning, och den inträffar när x är strikt lika med 2. En ekvation av den här typen kan endast ha en lösning i maximalt en punkt, eftersom att ekvationen är strikt stigande i det område den är definierad. Den falska lösningen vi fann beror på att det är det värde på x som löser ekvationen:

$$\sqrt{x+2} = -(3 - \sqrt{2x-3})$$

som uppstod som en möjlig lösning vid tidigare kvadrering.