Uppgift 5

Thomas Andersson

29 Oktober 2018

1 Problembeskrivning

Talföljden $a_1, a_2, ...$ är definierad med rekursion enligt följande:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1},\ för\ n \geq 2.$$

Gissa en icke-rekursiv form för a_n och bevisa den sedan med induktion.

2 Upplägg

För att hitta ett icke-rekursivt antagande är ett första steg att testa talföljden för en liten mängd tal, och se om en ett förhållande, som beror på n, kan hittas mellan talen.

Därefter kan formeln testas mot ett eller flera basfall, i detta problem måste två basfall testas eftersom att tal i talföljden beror på de båda föregående. Om formeln gäller för båda dessa basfall, kan ett induktionsantagande göras där man antar att formeln stämmer för två på varandra följande tal, och med hjälp av detta visa att det då kommer att gälla för nästkommande tal i talföljden. Har man hittat basfall som uppfyller den icke-rekursiva formeln, samt visat induktionsantagandet för ett tal n, kommer det då gälla för alla heltal som är större eller lika med basfallen enligt induktionsprincipen.

3 Induktionsantagande

Innan en gissning kan göras, väljer jag att skriva upp de första fem talen i talföljden:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 5a_2 - 6a_1 = 10 - 6 = 4 \\ a_4 = 5a_3 - 6a_2 = 20 - 12 = 8 \\ a_5 = 5a_4 - 6a_3 = 40 - 24 = 16 \end{cases} \tag{1}$$

I alla dessa fall gäller att $a_n = 2a_{n-1}$, men eftersom det är en icke-rekursiv form som sökes är det inte på denna form ett antagande söks. Med hjälp av det rekursiva antagandet bör ett icke-rekursivt antagande kunna hittas på formen:

$$a_n = c * 2^n, \ c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Om (2) tillämpas på (1) fungerar den för alla testvärden, om och endast om $c = 1/2$. Insättning av $c = 1/2$ i (2) ger det icke-rekursiva antagandet:

$$a_n = \frac{1}{2} * 2^n = 2^{n-1} \tag{3}$$

4 Induktionsbevis

Eftersom att varje tal i talföljden är rekursivt beroende av de två föregående i talföljden, fås två basfall, som redan bevisats gälla i (1).

Nästa steg blir att visa att induktionsantagandet gäller för ett tal a_n, givet att det gäller för de båda talen a_{n-1} och a_{n-2}.

Antag att två tal a_{n-1} och a_{n-2} kan beskrivas av den icke rekursiva formeln i (3). Då kan a_{n-1}, a_{n-2} och a_n skrivas som:

$$\begin{cases} a_{n-2} = 2^{n-3} \\ a_{n-1} = 2^{n-2} \\ a_n = 5 * a_{n-1} - 6 * a_{n-2} \end{cases} \tag{4}$$

Beräkning av a_n i (4):

$$a_n = 5 * a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5 * 2^{n-2} - 6 * 2^{n-3} = (5-3) * 2^{n-2} = 2 * 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

Vilket var induktionsantagandet.

Enligt induktionsprincipen gäller då formeln för alla positiva heltal n.

5 Svar

Talföljden:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = 5 * a_{n-1} - 6 * a_{n-2},\ för\ n > 2 \end{cases}$$

Kan skrivas om på den icke-rekursiva formen:

$$a_n = 2^{n-1},\ för\ n \geq 1$$

Enligt induktionsprincipen.