Uppgift 3

Thomas Andersson

6 Oktober 2018

1 Problembeskrivning

Bestäm vilka x som uppyller följande olikhet:

$$|x+3|+2|x-2|-2|x-1| \leq 4 \tag{1}$$

2 Upplägg

Ett första steg i att lösa en olikhet av denna typ, innehållandes absolutbelopp av flera skilda polynom av första grad, kan vara att ta reda på för vilka insatta x-värden varje enskilt polynom är lika med 0. Just denna punkt är intressant eftersom att absolutbelopp endast antar icke-negativa värden, och absolutbeloppet av ett polynom av första grad kan allmänt beskrivas som en funktion g(x) som:

$$g(x) = c|x+a| = \begin{cases} \text{c(x + a) om -a } < \text{ x} & \text{a,c} \in \mathbb{R} \\ \text{ 0 om x = -a} & \text{a} \in \mathbb{R} \\ \text{- c(x + a) om x } < \text{ -a} & \text{a,c} \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

Vilket kan förkortas som:

$$g(x) = c|x+a| = \begin{cases} \text{c(x + a) om -a } \leq \text{ x} & \text{a,c} \in \mathbb{R} \\ \text{- c(x + a) om x } < \text{ -a} & \text{a,c} \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

Med hjälp av den allmänna beskrivningen i ekvation (3), kan olikhet (1) beskrivas med hjälp av flera olikheter, alla definierade inom olika intervall.

När alla olikheter som beskriver olikhet (1) och de områden de är definierade i har bestämts, kan värden på x som löser respektive olikhet bestämmas, för att sedan jämföras med det område just den olikheten är definierad i. Till sist adderas alla dessa olikheters lösningar och tillsammans bildar de lösningen till olikhet (1).

3 Lösning

Det första steget blir att bryta upp olikhet (1) i tre skilda polynom som undersöks separat:

$$|x+3| + 2|x-2| - 2|x-1| \leq 4$$

de tre utbrytna polynomen:

$$|x+3|,\ 2|x-2|,\ -2|x-1|$$

Här kan den allmänna beskrivningen från (3) tillämpas på varje enskilt polynom:

$$|x+3| = \begin{cases} \text{(x + 3) om } \text{-3} \leq x \\ \text{- (x + 3) om } \text{x} < \text{-3} \end{cases} \tag{4}$$

$$2|x-2| = \begin{cases} \text{2(x - 2) om } 2 \leq x \\ \text{- 2(x - 2) om } \text{x} < 2 \end{cases} \tag{5}$$

$$-2|x-1| = \begin{cases} \text{-2(x - 1) om } 1 \leq x \\ \text{2(x - 1) om } \text{x} < 1 \end{cases} \tag{6}$$

Med hjälp av (4), (5) och (6) kan vänsterledet i olikhet (1) skrivas som en funktion f(x):

$$f(x) = \begin{cases} \text{(x+3) + 2(x-2) - 2(x-1) om } 2 \leq x \\ \text{(x+3) - 2(x-2) - 2(x-1) om } 1 \leq x < 2 \\ \text{(x+3) - 2(x-2) + 2(x-1) om } \text{-3} \leq x < 1 \\ \text{-(x+3) - 2(x-2) + 2(x-1) om x} < \text{-3} \end{cases} \tag{7}$$

Undersökning av den första funktionen från (7):

$$(x+3)+2(x-2)-2(x-1)=(1+2-2)x+3-4+2=x+1\leq 4 \iff x\leq 3$$

Enligt (7) är denna ekvation giltig då $x \geq 2$, vilket ger lösningen:

$$2\leq x\leq 3 \tag{8}$$

Undersökning av den andra funktionen från (7):

$$(x+3)-2(x-2)-2(x-1)=(1-2-2)x+3+4+2=-3x+9\leq 4 \iff 3x\geq 5 \iff x\geq \frac{5}{3}$$

Enligt (7) är denna ekvation giltig då $1 \leq x < 2$, vilket ger lösningen:

$$\frac{5}{3}\leq x<2 \tag{9}$$

Undersökning av den tredje funktionen från (7):

$$(x+3)-2(x-2)+2(x-1)=(1-2+2)x+3+4-2=x+5\leq 4 \iff x\leq -1$$

Enligt (7) är denna ekvation giltig då $-3 \leq x < 1$, vilket ger lösningen:

$$-3\leq x\leq -1 \tag{10}$$

Undersökning av den fjärde och sista funktionen från (7):

$$-(x+3)-2(x-2)+2(x-2)=(-1-2+2)x-3+4-2=-x-1\leq 4 \iff x\geq -5$$

Enligt (7) är denna ekvation giltig då $x < -3$, vilket ger lösningen:

$$-5\leq x<-3 \tag{11}$$

Alla lösningar till olikhet (1) beskrivs då av lösningarna till olikheterna (8), (9) (10) och (11), vilket blir intervallen:

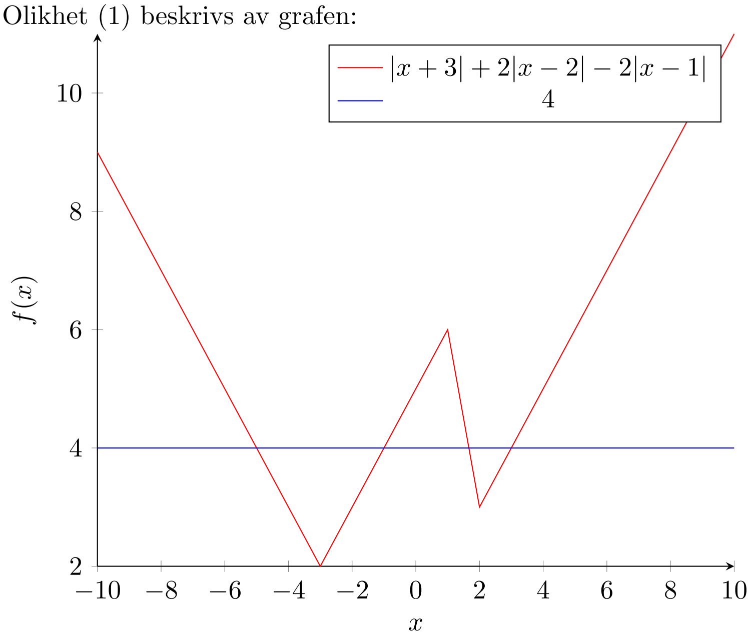
$$-5\leq x\leq -1 \ \text{ eller } \ \frac{5}{3}\leq x\leq 3 \tag{12}$$

4 Svar

Alla x-värden som löser olikhet (1) beskrivs av lösningarna i (12):

$$-5 \leq x \leq -1 \text{ eller } \frac{5}{3} \leq x \leq 3$$

Olikhet (1) beskrivs av grafen:



Där de x-värden som löser olikheten beskrivs av x-koordinater där den röda linjen ligger på eller under den blå linjen.

5 Diskussion

Antag en funktion bestående av ett antal n förstagradspolynom inom absolutbelopp på formen:

$f(x) = c_1|x-a_1| + c_2|x-a_2| + ... + c_n|x-a_n|$ där $c_i \neq 0$ för alla $1 \leq i \leq n$ för $i, n \in \mathbb{N}$

Där varje enskilt polynom uppfyller:

$$a_i \neq a_k, \text{ för } 1 \leq i, k \leq n \text{ med villkoret } i \neq k \quad n, i, k \in \mathbb{N}$$

Då kommer funktionen $f(x)$ att ha ett antal n x-värden där varje polynom byter tecken exakt en gång. Det kommer att innebära att funktionen $f(x)$ kommer att kunna lösas med hjälp av ett antal $n+1$ delfunktioner på formen $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ...f_n(x) + f_{n+1}(x)$ där alla delfunktioner är definierade i skilda intervall, och utan absolutbelopp.