Uppgift 4

Thomas Andersson

22 Oktober 2018

1 Problembeskrivning

Bestäm antalet lösningar till följande linjära ekvationssystem för alla reella tal a:

$$\begin{cases} (4-a)x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (1-a)x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + (4-a)x_3 = 1 \end{cases}$$

2 Upplägg

Ett första steg för att lösa ett ekvationssystem som detta, är att skriva om ekvationssystemet på matrisform.

$$\begin{cases} (4-a)x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (1-a)x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + (4-a)x_3 = 1 \end{cases}$$

Översatt till matrisform:

$$\begin{pmatrix} (4-a) & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & (1-a) & -2 & | & -2 \\ -1 & 2 & (4-a) & | & 1 \end{pmatrix}$$

Där raderna i matrisen beskriver de respektive ekvationerna, och kolumnerna beskriver variablerna x_1, x_2, x_3 samt högerledet i ekvationssystemet. För att lösa ett ekvationssystem som detta på matrisform, kan Gauss-Jordan elimination användas. Denna bygger på att utföra simpla radoperationer på ekvationssystemet, för att skriva ett ekvationssystem på en enklare form, där lösningarna till det nya ekvationssystemet är ekvivalenta med de föregående lösningarna. Dessa operationer kan t.ex vara att byta plats på 2 rader i matrisen, addera en multipel av en rad till en annan eller att multiplicera en rad med ett reellt tal n, där $n \neq 0$.

3 Lösning

Ekvationssystemet på matrisform:

$$\begin{pmatrix} (4-a) & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & (1-a) & -2 & | & -2 \\ -1 & 2 & (4-a) & | & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

För att förenkla ekvationssystemet väljer jag att tillämpa Gauss-Jordan-elimination på systemet.
Rad 1 och rad 3 i (1) är spegelvända varandra, jag utnyttjar detta genom att subtrahera rad 3 från rad 1. Jag adderar samtidigt två multiplar av rad 3 till rad 2 för att på så sätt få den andra raden i det nya ekvationssystemet oberoende av term x_1:

$$\begin{pmatrix} (4-a) & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & (1-a) & -2 & | & -2 \\ -1 & 2 & (4-a) & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} (5-a) & 0 & (-5+a) & | & 0 \\ 0 & (5-a) & (6-2a) & | & 0 \\ -1 & 2 & (4-a) & | & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

För att förenkla systemet skulle det vara bra att dela rad 1 i (2) med $(5-a)$. Men då division med 0 inte är definierat måste fallet $a = 5$ utredas först. Fall 1 ($a = 5$): (med teckenbyte på tredje raden)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Som ekvationssystem:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Här kan utläsas att $x_3 = 0$ är det enda värdet som kan uppfylla den andra ekvationen i systemet, samt att x_1 och x_2 blir linjärt beroende av varandra. Om vi beskriver x_2 som en fri variabel $x_2 = t$, kan x_1 beskrivas med hjälp av den fria variabeln:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Här blir värdet på x_1 entydigt bestämt när ett värde på x_2 bestäms. I detta fall finns oändligt många lösningar.

Nu har fallet $a = 5$ hanterats, nu går vi tillbaka till (2) och räknar med alla fall då $a \neq 5$.

Nu kan första raden i (2) delas med $(a - 5)$, eftersom att fallet $a = 5$ tagits i beaktning. Fortsätt med Gauss-Jordan elimination för att rensa upp i första kolumnen:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} (5-a) & 0 & (-5+a) & | & 0 \\ 0 & (5-a) & (6-2a) & | & 0 \\ -1 & 2 & (4-a) & | & 1 \end{pmatrix} \ \Big| \cdot \tfrac{1}{5-a} \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & (5-a) & (6-2a) & | & 0 \\ -1 & 2 & (4-a) & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ + \end{matrix} \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & (5-a) & (6-2a) & | & 0 \\ 0 & 2 & (3-a) & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ -2 \end{matrix} \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & (1-a) & 0 & | & -2 \\ 0 & 2 & (3-a) & | & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

För att enklast gå vidare härifrån behöver $a = 1$ undersökas, för att sedan dela rad 2 med $(a - 1)$ för värden på $a \neq 1$.

Fall 2: $a = 1$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \qquad (5)
$$

Här kan direkt utläsas att ingen lösning finns då $a = 1$, ty andra raden raden i ekvationssystemet säger att $0 = 2$, vilket självfallet aldrig stämmer.

Fortsätter med Gauss-Jordan-eliminering från (4) för $a \neq 1$ och $a \neq 5$. Nu kan även den andra kolumnen förenklas.:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & (1-a) & 0 & | & -2 \\ 0 & 2 & (3-a) & | & 1 \end{pmatrix} \ \Big| \cdot \tfrac{1}{1-a} \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-2}{1-a} \\ 0 & 2 & (3-a) & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ + \end{matrix} \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-2}{1-a} \\ 0 & 0 & (3-a) & | & \frac{5-a}{1-a} \end{pmatrix} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

För att enklast gå vidare härifrån behöver $a = 3$ undersökas, för att sedan dela rad 3 med $(a-3)$ för värden på $a \neq 3$.

Fall 3: $a = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Även här kan direkt utläsas att ingen lösning finns då $a = 3$, ty $0 = -1$ aldrig uppfylls.

Fortsätter från (6) med villkoren $a \neq 1$ och $a \neq 3$ och $a \neq 5$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-2}{1-a} \\ 0 & 0 & (3-a) & | & \frac{5-a}{1-a} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ | \cdot \frac{1}{3-a} \end{matrix} \\ \sim &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-2}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5-a}{(1-a)(3-a)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \\ 1 \end{matrix} \\ \sim &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{5-a}{(1-a)(3-a)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-2}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5-a}{(1-a)(3-a)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

Här har vi kommit till den enklaste möjliga formen att beskriva ett ekvationssystem. Nämligen att varje enskild ekvation bara beror av en okänd variabel. Detta ger en entydig lösning för reella värden på a, med villkoren $a \neq 1$ och $a \neq 3$ och $a \neq 5$. Omskrivning till ekvationssystem blir:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5-a}{a^2-4a+3} \\ x_2 = \frac{-2}{1-a} \\ x_3 = \frac{5-a}{a^2-4a+3} \end{cases} \tag{9}$$

4 Svar

Lösningar till det ursprungliga ekvationssystemet:

$$\begin{cases} (4-a)x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (1-a)x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + (4-a)x_3 = 1 \end{cases}$$

Om $a = 5$ finns oändligt många lösningar till ekvationssystemet och lösningarna beskrivs enligt (3) som:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Där x_2 beskrivs som en fri variabel.

Om $a = 1$ finns inga lösningar enligt (5).

Om $a = 3$ finns inga lösningar enligt (7)

För alla andra reella värden på a finns exakt en lösning enligt (9) och beskrivs av:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5-a}{a^2-4a+3} \\ x_2 = \frac{-2}{1-a} \\ x_3 = \frac{5-a}{a^2-4a+3} \end{cases}$$