Uppgift 1

Thomas Andersson

16 September 2018

1 Problembeskrivning

Lös följande rotekvation:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-3} = 3$$

2 Lösning

Finn alla x som löser ekvationen:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-3} = 3 \tag{1}$$

Omskrivning av ekvationen:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-3} = 3 \iff \sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{2x-3}$$

Kvadrering av båda sidor:

$$\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{2x-3} \implies$$

$$x + 2 = (3 - \sqrt{2x-3})^2 \tag{2}$$

Kvadreringen av uttrycket ger upphov till en falsk rot:

$$\sqrt{x+2} = -(3 - \sqrt{2x-3})$$

Då kvadrering skapar en falsk rot måste x värden som löser den kvadrerade ekvationen testas i originalekvationen (1).

Kvadreringsregeln av högerledet i ekvation (2):

$$(3 - \sqrt{2x-3})^2 = 9 - 6\sqrt{2x-3} + 2x - 3$$

Då fås ekvationen:

$$x + 2 = 9 - 6\sqrt{2x-3} + 2x - 3$$

Förenkling av uttrycket:

$$x+2=9-6\sqrt{2x-3}+2x-3 \iff 6\sqrt{2x-3}=9+2x-3-x-2=x+4$$

Nästa steg blir att kvadrera båda sidor:

$$6\sqrt{2x-3}=x+4 \implies 36(2x-3)=(x+4)^2 \tag{3}$$

Precis som vid tidigare kvadrering kan det uppstå nya rötter, och lösningar till x måste testas.

Utveckling av problemet med hjälp av kvadreringsregeln:

$$36(2x-3)=72x-108=(x+4)^2=x^2+8x+16 \iff$$

$$0=x^2+8x+16+108-72x=x^2-64x+124$$

Kvadratkomplettering ger:

$$0=x^2-64x+124=x^2-64x+(32)^2-(32)^2+124=(x-32)^2-(32)^2+124$$

Förenkling av uttrycket:

$$(x-32)^2-(32)^2+124=0 \iff (x-32)^2=32^2-124=1024-124=900$$

Kvadratrötterna för denna ekvation:

$$(x-32)^2=900 \iff x-32=\pm\sqrt{900} \iff x=32\pm 30$$

Detta ger en lösning i x = 2 samt i x = 62. På grund av ekvationerna (2) och (3) måste dessa värden av x testas i ursprungsekvationen (1), och falska lösningar avlägsnas.

3 Test av rötter

Test av lösning x = 2:

$$VL=\sqrt{2+2}+\sqrt{2*2-3}=2+1=3=HL$$

Högerledet löser vänsterledet och därmed är x = 2 en sann rot.

Därefter testas x = 62:

$$VL=\sqrt{62+2}+\sqrt{62*2-3}=8+11=19\neq 3=HL$$

Högerledet är skilt från vänsterledet, vilket innebär att x = 62 är en falsk rot.

4 Slutsats

Ekvationen har bara en lösning, och den inträffar när x är strikt lika med 2. Den falska lösningen är det värde av x som löser ekvationen:

$$\sqrt{x+2} = -(3 - \sqrt{2x-3})$$

som uppstod i (2).

5 Diskussion

En ekvation av den här typen kan ha en lösning i maximalt en punkt, eftersom att ekvationen är strikt stigande i det område den är definierad.