

Uppgift 2

Thomas Andersson

23 September 2018

1 Problembeskrivning

Finn samtliga positiva lösningar till följande Diofantiska ekvation:

$$19x + 71y = 4000 \quad (1)$$

2 Partikulärlösning

Lösning till SGD(71,19), med hjälp av Euklides algoritm:

$$71 = 3 * 19 + 14$$

$$19 = 1 * 14 + 5$$

$$14 = 2 * 5 + 4$$

$$5 = 1 * 4 + 1$$

Ett villkor för att denna diofantisk ekvation ska ha en lösning är att SGD(71,19) delar HL i (1). I detta fall är SGD(71,19)=1, så lösning finns. (Bézouts identitet)

Lösning av basfall:

$$19x + 71y = 1 \quad (2)$$

HL i (2) kan skrivas om genom att baklänges gå igenom Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 4 = 5 - (14 - 2 * 5) = (3 * 5) - 14 \\ &= 3 * (19 - 14) - 14 = (3 * 19) - (4 * 14) \\ &= (3 * 19) - 4 * (71 - 3 * 19) = 15 * 19 - 4 * 71 \end{aligned} \quad (3)$$

Detta ger en partikulärlösning för värden av x och y som löser ekvation (2), och beskrivs av de värden som hittades i ekvation (3):

$$19x + 71y = 1 = 15 * 19 - 4 * 71 \iff x = 15 \text{ och } y = -4 \quad (4)$$

Vilket blir partikulärlösningen till ekvation (2).

För att lösa $19x+71y=4000$ används partikulärlösningen från ekvation (4) och multiplikation av högerled och vänsterled:

$$1 = 15 * 19 - 4 * 71 \iff 4000 = 4000(15 * 19 - 4 * 71) = 60000 * 19 - 16000 * 71$$

Detta ger partikulörlösning till ekvation (1):

$$x_0 = 60000 \text{ och } y_0 = -16000 \tag{5}$$

3 Allmän lösning

Den allmänna lösningen till ekvation (1) skrivs:

$$4000 = 19x + 71y = 19(x_0 + x_1) + 71(y_0 + y_1)$$

Där x_0 och y_0 är partikulärlösningen från ekvation (5). För att likhet ska gälla måste då x_1 och y_1 , definierade med hjälp av en gemensam variabel n ha förhållandet:

$$x_1 = 71 * n, \quad y_1 = -19 * n$$

En diofantisk ekvation har bara heltalslösningar och den allmänna lösningen till ekvation (1) beskrivs som:

$$19(x_0+x_1)+71(y_0+y_1) = 19(60000+71n)-71(16000+19n) = 4000, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

där:

$$x = 60000 + 71n \text{ och } y = -16000 - 19n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

4 Positiv lösning

Då det endast är de positiva lösningarna som söks:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \iff 60000 + 71n \geq 0, \quad -16000 - 19n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

x positivt:

$$60000 + 71n \geq 0 \iff n \geq -845, \quad n \in \mathbb{Z}$$

y positivt:

$$-16000 - 19n \geq 0 \iff 16000 + 19n \leq 0 \iff n \leq -843, \quad n \in \mathbb{Z}$$

x och y positivt:

$$-845 \leq n \leq -843, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vilket ger tre korrekta lösningar, med värden på n :

$$n_1 = -845, \quad n_2 = -844, \quad n_3 = -843$$

Dessa värden på n , insatt i ekvation (6) ger alla positiva diofantiska lösningar:

$$x = 147 \text{ och } y = 17$$

$$x = 76 \text{ och } y = 36$$

$$x = 5 \text{ och } y = 55$$

5 Svar

De positiva lösningarna till denna diofantiska ekvation fås då $x=147$ och $y=17$, eller $x=76$ och $y=36$, eller $x=5$ och $y=55$.