

$$\begin{aligned}
& \Sigma = \{0, 1, \dots, 9\} \\
& h(s_1, s_2, s_3) = (|s_1|^c \cdot s_1 + |s_2|^c \cdot s_2 + |s_3|^c \cdot s_3) \bmod p \\
& = (10^3 \cdot s_1 + 10^2 \cdot s_2 + 10 \cdot s_3) \bmod p \\
& h(s_1, s_2, s_3) = ((|s_1|^c \cdot s_1 + |s_2|^c \cdot s_2 + |s_3|^c \cdot s_3) \bmod p) \bmod p \\
& \Rightarrow h(s_1, s_2, s_3) = (|s_1|^c \cdot s_1 + |s_2|^c \cdot s_2 + |s_3|^c \cdot s_3) \bmod p \\
& h_1 = (3^3 \cdot a + 3^2 \cdot a + 3^1 \cdot b) \bmod p \\
& = 1 \bmod 7 = 1 \\
& h_1 = 0 \bmod 7 = 0 \\
& h_1 = 0 \bmod 7 = 0
\end{aligned}$$

Algorithmen und Programmierung 3, WS 2019/2020 — 7. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 6. Dezember 2019, 12:00 Uhr. Aufgabe 54b geändert am 2.12.

52. Teilwortsuche mit Fingerabdrücken, 7 Punkte

Die Rabin-Karp-Methode mit dem Modul P soll zur Suche einer Teilfolge der Länge 12 über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$ verwendet werden. Finden Sie zwei verschiedene, aber möglichst ähnliche Wörter $u, v \in \Sigma^{12}$, die den gleichen Fingerabdruck haben. Sie dürfen sich für einen der Moduln (a) $P = 3163$, (b) $P = 1111$, (c) $P = 9876$ entscheiden.

53. Graphenalgorithmen in der künstlichen Intelligenz, Programmieraufgabe, 7 Punkte

Die folgende Aufgabe findet sich in einer Sammlung von Rechenaufgaben mit dem Titel *Propositiones ad acuendos juvenes* (Aufgaben zur Schärfung des Geistes der Jugend), die wahrscheinlich um das Jahr 800 am Hof Karls des Großen entstanden ist und Alkuin von York zugeschrieben wird:

Die Aufgabe vom Wolf, der Ziege und dem Kohlkopf. Ein Mensch musste einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über einen Fluss übersetzen; er konnte aber nur ein Boot auftreiben, das gerade zwei von ihnen tragen konnte. Wie konnte er alles unversehrt hinüberbringen?¹

- Modellieren Sie diese Aufgabe durch einen Graphen. Die *Knoten* sollen den möglichen Zuständen des Systems Mensch–Ziege–Wolf–Kohlkopf–Boot–Fluss entsprechen, und die *Kanten* den erlaubten Übergängen: Zum Beispiel würde der Wolf die Ziege oder die Ziege den Kohlkopf fressen, wenn sie ohne Aufsicht gelassen würden; der Mensch, der das Boot rudert, kann nur einen Gegenstand oder ein Tier zusätzlich mitnehmen. Eine *Lösung* soll einem *Weg* in diesem Graphen entsprechen. Entscheiden Sie, ob Sie einen gerichteten oder einen ungerichteten Graphen verwenden, und erläutern Sie Ihre Entscheidung.
- (0 Punkte) Zeichnen Sie den Graphen.
- Schreiben Sie ein Programm in PYTHON oder JAVA, das den Graphen erstellt. Wie viele Knoten und wie viele Kanten hat der Graph?

54. Struktur von AVL-Bäumen, 6 Punkte

Es sei n_h , $h = 0, 1, 2, \dots$ die kleinstmögliche Anzahl innerer Knoten eines AVL-Baums der Höhe h . Dann gilt $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, und $n_h = n_{h-1} + n_{h-2} + 1$ für $h \geq 2$.

Die Fibonacci-Zahlen F_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ sind durch die Anfangsbedingungen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, und durch die Rekursion $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ für $k \geq 2$ bestimmt.

- Zeigen Sie: $n_h = F_{h+2} - 1$ für $h = 0, 1, 2, \dots$
- Zeichnen Sie alle Bäume mit AVL-Struktur mit Höhe **2**.
- Stellen Sie eine Rekursionsgleichung auf, die die Anzahl A_h der Bäume der Höhe $h \geq 2$ mit AVL-Struktur mittels A_{h-1} und A_{h-2} berechnet. Wieviele Bäume der Höhe 5 mit AVL-Struktur gibt es?

¹PROPOSITIO DE LUPO ET CAPRA ET FASCICULO CAULI. Homo quidam debebat ultra fluvium transferre lupum et capram et fasciculum cauli, et non potuit aliam navem invenire, nisi quae duos tantum ex ipsis ferre valebat. Praeceptum itaque ei fuerat, ut omnia haec ultra omnino illaesa transferret. Dicat, qui potest, quomodo eos illaesos ultra transferre potuit. SOLUTIO. Simili namque tenore ducerem prius capram et dimitterem foris lupum et caulum. Tum deinde venire lupumque ultra transferrem, lupoque foras misso rursus capram navi receptam ultra reducerem, capraque foras missa caulum transveherem ultra, atque iterum remigassem, capramque assumptam ultra duxissem. Sicque faciente facta erit remigatio salubris absque voragine lacerationis.

52. Teilwortsuche mit Fingerabdrücken, 7 Punkte

Die Rabin-Karp-Methode mit dem Modul P soll zur Suche einer Teilfolge der Länge 12 über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$ verwendet werden. Finden Sie zwei verschiedene, aber möglichst ähnliche Wörter $u, v \in \Sigma^{12}$, die den gleichen Fingerabdruck haben. Sie dürfen sich für einen der Moduln (a) $P = 3163$, (b) $P = 1111$, (c) $P = 9876$ entscheiden.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| u | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| v | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$|\Sigma| = 10$$

$$h(v) = (10^{11} \cdot 0 + 10^{10} \cdot 0 + \dots + 10^4 \cdot 0 + 10^3 \cdot 1 + 10^2 \cdot 1 + 10^1 \cdot 1 + 10^0 \cdot 1) \bmod 1111$$

$$= 1111 \bmod 1111 = 0$$

$$h(u) = 0 \bmod 1111 = 0$$

möglichst ähnlich da, Hamming-Abstand der 2-Bit Wörter nur 4 beträgt.

\downarrow \downarrow
 $\{mzwk: "wk", wk: "mwk", mwk: "w|k"$

53. Graphenalgorithmen in der künstlichen Intelligenz, Programmieraufgabe, 7 Punkte

Die folgende Aufgabe findet sich in einer Sammlung von Rechenaufgaben mit dem Titel *Propositiones ad acuendos juvenes* (Aufgaben zur Schärfung des Geistes der Jugend), die wahrscheinlich um das Jahr 800 am Hof Karls des Großen entstanden ist und Alkuin von York zugeschrieben wird:

MZWK



ungerichteter Graph, da die Anfangssituation äquivalent mit der Endposition ist.

(außer der Ufseite) \Rightarrow Alle kann man die Schritte Rückwärts durchgehen.

$MZWK = \{WK\}$
 $WK = \{MZWK, MWK\}$
 $MWK = \{WK, W, K\}$
 $W = \{MWK, MZW\}$
 $K = \{MWK, MZK\}$
 $MZW = \{K, Z\}$
 $MZK = \{W, Z\}$
 $Z = \{MZW, MZK, MZ\}$
 $MZ = \{Z, []\}$
 $[] = \{MZ\}$

10 Knoten 20 Kanten

- M = Human, K = Kohl, W = Wolf, Z = Goat
- Der Graph zeigt nur eine Ufseite, da sich die andere Seite auch so ablesen lässt. (jeweils was nicht im Knoten steht, ist auf der anderen Seite)
- Schiff und Fluss müssen auch nicht beachtet werden, da sie keine Abhängigkeiten mit den anderen Teilen

54. Struktur von AVL-Bäumen, 6 Punkte

Es sei n_h , $h = 0, 1, 2, \dots$ die kleinstmögliche Anzahl innerer Knoten eines AVL-Baums der Höhe h . Dann gilt $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, und $n_h = n_{h-1} + n_{h-2} + 1$ für $h \geq 2$.

Die Fibonacci-Zahlen F_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ sind durch die Anfangsbedingungen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, und durch die Rekursion $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ für $k \geq 2$ bestimmt.

- Zeigen Sie: $n_h = F_{h+2} - 1$ für $h = 0, 1, 2, \dots$
- Zeichnen Sie alle Bäume mit AVL-Struktur mit Höhe **2**.
- Stellen Sie eine Rekursionsgleichung auf, die die Anzahl A_h der Bäume der Höhe $h \geq 2$ mit AVL-Struktur mittels A_{h-1} und A_{h-2} berechnet. Wieviele Bäume der Höhe 5 mit AVL-Struktur gibt es?

a) z.z. $n_h = F_{h+2} - 1$ für $h \geq 0$

J.A. $h = 0$

$$n_0 = F_2 - 1$$

$$0 = F_1 - F_0 - 1$$

$$0 = 1 - 0 - 1 \quad \checkmark$$

J.U. $n_h = F_{h+2} - 1$ ist wahr

J.S. z.z. $n_{h+1} = F_{h+3} - 1$

$$n_h + n_{h-1} + 1 = F_{h+2} + F_{h+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow n_h + n_{h-1} + 1 = n_h + F_{h+1} \quad / - n_h$$

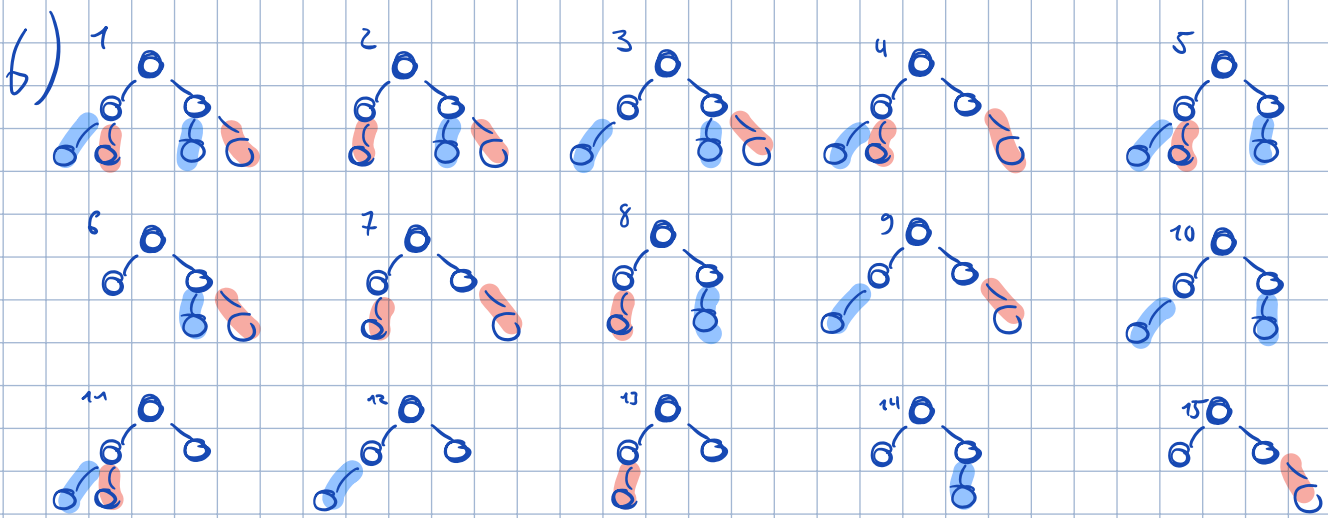
$$n_{h-1} + 1 = F_{h+1}$$

J.A. $h = 1$ $n_{h-1} + 1 = F_1$
 $1 = 1$

J.U. $n_{h-1} + 1 = F_{h+1}$ ist wahr

J.S. z.z. $n_h + 1 = F_{h+2}$ $/ - 1$

$$n_{h+1} = F_{h+2} - 1 \quad \text{gilt durch erste J.U.}$$



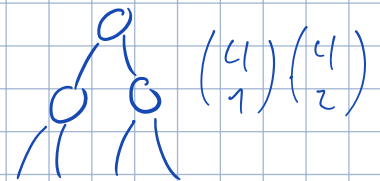
Rechts, links

c)

$$A(2) = 15$$

$$A(3) = 315$$

$$A(4) = 10876$$



$$A_n = (A_{n-1} \cdot A_{n-2}) \cdot 2 + (A_{n-1})^2$$

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = 3$$