Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Prof. Dr. Christof Schütte, Lasse Hinrichsen

1. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/CoMaI.php

Abgabe: Do., 26. November 2020, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Bestimmen Sie nachvollziehbar (d. h. mit Zwischenschritten) die Darstellung der gegebenen natürlichen Zahlen in der jeweils angegebenen Basis:

a) $5453_6 = (\dots)_2$, b) $72_{10} = (\dots)_3$, c) $654_7 = (\dots)_9$, d) $17\mathrm{HAI}_{26} = (\dots)_{36}$.

Um Missverständnisse zu vermeiden: Sie sollen beispielsweise für Aufgabe a) die Zahl 5453_6, die im Hexalsystem angegeben ist, zur Basis 2 angeben, also als Binärzahl.

2. Aufgabe (6 TP)
In der Schule lernt man, dass eine natürliche Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn die Summe ihrer Ziffern im Dezimalsystem ("Quersumme") durch 3 teilbar ist.

a) Beweisen Sie die obige Aussage. Genauer, zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n = \sum_{i=0}^{k} r_i \cdot 10^i, \quad r_i \in \{0, \dots, 9\}$$

gilt, dass $3|n \iff 3|\left(\sum_{i=0}^{k} r_i\right)$.

Hinweis: Es gilt $10^i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} 9 \cdot 10^j$.

b) Angenommen Menschen hätten 4 Finger an jeder Hand und würden daher ein Zahlensystem zur Basis 8 nutzen. Leiten Sie eine entsprechende Teilbarkeitsregel basierend auf der Quersumme in diesem Ziffernsystem her.

3. Aufgabe (2 TP)
Gegeben seien N Bits $z_{N-1}|z_{N-2}\ldots z_0$ (mit $z_i \in \{0,1\}$), die eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ im **Zweierkomplement** darstellen.
Geben Sie eine Regel an, mit deren Hilfe sich durch Blick auf die Koeffizienten sagen lässt, ob z gerade ist (d. h. $\exists k \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot k$) oder nicht. Erläutern Sie, warum Ihre Regel funktioniert.

4. Bonusaufgabe (Quiz) (1 Bonus TP/PP)
Formulieren Sie eine Frage zur Vorlesung. Falls Sie die Antwort wissen, geben Sie die richtige Antwort und 3 falsche Antwortmöglichkeiten an.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (4 TP)
Bestimmen Sie nachvollziehbar (d. h. mit Zwischenschritten) die Darstellung der gegebenen natürlichen Zahlen in der jeweils angegebenen Basis:

a) $5453_6 = (\dots)_2$, b) $72_{10} = (\dots)_3$, c) $654_7 = (\dots)_9$, d) $17HAI_{26} = (\dots)_{36}$.

Um Missverständnisse zu vermeiden: Sie sollen beispielsweise für Aufgabe a) die Zahl 5453_6, die im Hexalsystem angegeben ist, zur Basis 2 angeben, also als Binärzahl.

a) $5453_6 = 5 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 1257_{10}$

$1257 / 2 = 628$ Rest 1
$628 / 2 = 314$ Rest 0
$314 / 2 = 157$ Rest 0
$157 / 2 = 78$ Rest 1
$78 / 2 = 39$ Rest 0
$39 / 2 = 19$ Rest 1
$19 / 2 = 9$ Rest 1
$9 / 2 = 4$ Rest 1
$4 / 2 = 2$ Rest 0
$2 / 2 = 1$ Rest 0
$1 / 2 = 0$ Rest 1

Binary

$= 10011101001_2$

01100010110^{10}

b) 72_{10}

$72 / 3 = 24$ Rest 0
$24 / 3 = 8$ Rest 0
$8 / 3 = 2$ Rest 2
$2 / 3 = 0$ Rest 2

$= 2200_3$

c) $654_7 = 6 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 333$

$333 / 9 = 37$ Rest 0

$37 / 9 = 4$ Rest 1

$4 / 9 = 0$ Rest 4

$= 410_9$

d) $17HAI_{26} = 1 \cdot 26^4 + 7 \cdot 26^3 + 17 \cdot 26^2 + 10 \cdot 26^1 + 18 \cdot 26^0 = 591778_{10}$

$591778 / 36 = 16438$ Rest 10 $= A_{36}$

$16438 / 36 = 456$ Rest 22 $= M_{36}$

$456 / 36 = 12$ Rest 24 $= O_{36}$

$12 / 36 = 0$ Rest 12 $= C_{36}$

$= COMA_{36}$

2. Aufgabe (6 TP)
In der Schule lernt man, dass eine natürliche Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn die Summe ihrer Ziffern im Dezimalsystem ("Quersumme") durch 3 teilbar ist.

a) Beweisen Sie die obige Aussage. Genauer, zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit

103
$r_2 r_1 r_0$

$$n = \sum_{i=0}^{k} r_i \cdot 10^i, \quad r_i \in \{0, \ldots, 9\}$$

Satz:

gilt, dass $3|n \iff 3|\left(\sum_{i=0}^{k} r_i\right)$.

Tipp: x mod 9

Hinweis: Es gilt $10^i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} 9 \cdot 10^j$.

$$n = \sum_{i=0}^{k} r_i \cdot 10^i$$

$$3|n \iff 3|\left(\sum_{i=0}^{k} r_i\right)$$

3. Aufgabe (2 TP)
Gegeben seien N Bits $z_{N-1}|z_{N-2}\dots z_0$ (mit $z_i \in \{0,1\}$), die eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ im **Zweierkomplement** darstellen.
Geben Sie eine Regel an, mit deren Hilfe sich durch Blick auf die Koeffizienten sagen lässt, ob z gerade ist (d. h. $\exists k \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot k$) oder nicht. Erläutern Sie, warum Ihre Regel funktioniert.

Es muss lediglich auf den ersten und letzten Koefizient geguckt werden (z_{n-1} und z_0)

Fall 1 $z_{n-1} = 0$ $\Rightarrow$ z ist prositive Zahl

Fall 1.1 $z_0 = 0$ $\Rightarrow$ z ist gerade
Fall 1.2 $z_0 \neq 0$ $\Rightarrow$ z ist ungerade

Das liegt daran, dass die Stelle z_0 umgerechnet in Dez entweder $2^0 \cdot 0$ oder $2^0 \cdot 1$ ist. Alle anderen Koefizienten sind $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k \cdot z_k$. Diese Summe ist immer prositiv da mit 2^k $(k>1)$ multipliziert wird. $\Rightarrow$ nur z_0 bestimmt ob gerade oder ungerade.

Fall 2 $z_{n-1} = 1$ $\Rightarrow$ z ist negative Zahl

Fall 2.1 $z_0 = 0$ $\Rightarrow$ z ist ungerade
Fall 2.2 $z_0 \neq 0$ $\Rightarrow$ z ist gerade

Erklärung wie bei Fall 1. nur mit den Unterschied, dass bei negativen Zweierkomplement Zahlen alle Bits "gekippt" werden.