a) $(A\cup B)^* \overset{?}{=} A^*\cup B^*$ Von Thore Brehmer und David Ley

Widerspruchsbws.

sei $A=\{a\}$, $B=\{b,c\}$

$(\{a\}\cup\{b,c\})^* = \{a\}^* \cup \{b,c\}^*$

$(\{a,b,c\}^*) = \{a,aa,aaa,\dots\}^* \cup \{b,bb,\dots\ c,cc,\dots,bc,bcbc\dots\}$

$\{abc,\dots,a,\dots,b,\dots,c,\dots\} = \text{''}\ \underline{\qquad\qquad\qquad}\ \text{''}$ $\lightning$

b) Widerspruchsbws.

sei $A=\{a,b\}$, $B=\{ab\}$

$(A\cap B)^* = A^*\cap B^*$

$(\emptyset)^* = \{\varepsilon,a,aa\dots,b,bb,\dots,ab,abab\dots\}\cap\{\varepsilon,ab,abab\dots\}$

$\varepsilon = \{\varepsilon,ab,abab,\dots\}$

$\lightning$

c)

Widerspruchsbws.

Sei $A=\{a\}$, $B=\{b\}$

$(A\circ B)^* = A^*\circ B^*$

$(ab)^* = (a)^*(b)^*$

$\{\varepsilon,ab,abab,\dots\} = \{\varepsilon,a,aa,\dots,b,bb,\dots,ab,aab,\dots,abb,\dots,abab,\dots\}$ $\lightning$

d) $(A^*)^* \overset{?}{=} A^*$

$\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A^i\right)^k = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$

$\bigcup_{k=0}^{\infty}(A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty) = A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty$

$\underbrace{(A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty)^0}\cup(A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty)^1\cup\dots\cup(A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty)^\infty = A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty$

$\{\varepsilon\}\ \cup A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty\ \underbrace{\cup\dots\cup(A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty)^\infty} = A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty$

da $\varepsilon\cup A^0\dots A^\infty$ die Potenz ∞ besitzt,
ist $\dots\cup(A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty)^\infty$ bereits enthalten

$A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty = A^0\cup A^1\cup\dots\cup A^\infty$

2)

i) $A = (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8 \cup 9)^* \circ . \circ (0 \cup 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8 \cup 9)^*$

$L = \quad A(+A)^*$

ii) sei $A = \{ A, B, C \dots X, Y, Z \}$ und $\alpha \in A$
$Z = \{ 0, 1, \dots, 9 \}$ und $z \in Z$

$\alpha \circ (\varepsilon \cup \alpha) \circ (\varepsilon \cup \alpha) \circ - \circ \alpha \circ (\varepsilon \cup \alpha) \circ z \circ (z \cup \varepsilon) \circ (z \cup \varepsilon) \circ (z \cup \varepsilon)$

$= \alpha (\varepsilon \cup \alpha)^2 - \alpha (\varepsilon \cup \alpha) z (z \cup \varepsilon)^3$

sei $L = \{ \ell \mid \ell \in (\alpha (\varepsilon \cup \alpha)^2 - \alpha (\varepsilon \cup \alpha) z (z \cup \varepsilon)^3) \wedge |\ell| \leq 8 \}$

iii) $1 \circ (0 \cup 1)^* \circ 0 \circ 0$

b)

i) ... mit gerader Anzahl an 1 bits.

ii) ... mit gerader Anzahl an 1 und 0 bits.

3)

a) $(\alpha\cup\beta)\gamma \sim \alpha\gamma\cup\beta\gamma$

$(\alpha\cup\beta)\gamma = L((\alpha\cup\beta)\gamma) = (L(\alpha)\cup L(\beta))\circ L(\gamma)$

$= \{w\in\Sigma \mid \exists u\in L(\alpha)\cup L(\beta), \exists v L(\gamma), w=u\circ v\}$

$= \{w\in\Sigma \mid \exists u\in L(\alpha), \exists v L(\gamma), w=u\circ v\} \cup \{w\in\Sigma \mid \exists u\in L(\beta), \exists v L(\gamma), w=u\circ v\}$

$= L(\alpha)\circ L(\gamma) \cup L(\beta)\circ L(\gamma) = \alpha\gamma\cup\beta\gamma$

b) $(\alpha^*)^* \sim \alpha^*$

aus Skript: $L((\alpha^*)^*) = L((\alpha)^*)^* = L(\alpha)^{**}$

$\Rightarrow$ aus 1 d) wissen wir, dass für Sprachen gilt $(A^*)^* = A^*$

c) $(\alpha\cup\beta)^* \sim (\alpha^*\beta^*)^*$

sei $w\in(\alpha\cup\beta)^*$

$\Rightarrow w = w_0\circ w_1\circ\dots w_i\dots\circ w_k$ wobei $w_i\in L(\alpha) \vee w_i\in L(\beta)$

außerdem $w = w_0\circ w_1\circ\dots w_i\dots\circ w_k$ wobei $w_i \in L(\alpha^*\circ\beta^*)$

$\Rightarrow w\in(\alpha\cup\beta)^*$

d) $\alpha\emptyset\sim\emptyset$

$\alpha\emptyset \sim \underbrace{L(\alpha\circ\emptyset) = L(\alpha)\circ L(\emptyset) = L(\emptyset)}_{\text{aus Vorlesung}} = \emptyset$

e) $\alpha\emptyset^*\sim\alpha$

$\alpha\emptyset^* \sim \underbrace{L(\alpha\circ\emptyset^*) = L(\alpha)\circ L(\emptyset)^* = L(\alpha)\circ\{\varepsilon\} = L(\alpha)}_{\text{aus Vorlesung}} = \alpha$