

Abgabe bis zum 08. Juni 2020, 10 Uhr, im Whiteboard

Bitte erläutern und begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 Simulation

3+7 Punkte

- (a) Beschreiben Sie, wie man einen DEA durch eine Turing-Maschine simulieren kann. Beachten Sie dabei insbesondere die unterschiedlichen Akzeptierungsmodi.
- (b) Beschreiben Sie, wie man eine Turing-Maschine mit beidseitig unbeschränktem Eingabe-/Arbeitsband durch eine Turing-Maschine mit einseitig unbeschränktem Band simulieren kann.

Aufgabe 2 Mehrband-Turingmaschinen

2+8 Punkte

Eine *Mehrband-Turingmaschine* ist eine Turingmaschine, die über k Arbeitsbänder verfügt, die jeweils einen unabhängigen Schreib-/Lesekopf haben. Hierbei ist $k \geq 2$ eine Konstante.

- (a) Geben Sie eine geeignete Definition für eine Mehrband-Turingmaschine. Wie muss die Überführungsfunktion aussehen?
- (b) Begründen Sie, dass Ihre Mehrband-Turingmaschine von der Turingmaschine aus der Vorlesung simuliert werden kann.

Hinweis: Arbeiten Sie mit einem erweiterten Bandalphabet. Führen Sie $2k$ Spuren auf dem Band ein, wobei die ersten k Spuren den Bandinhalt und die zweiten k Spuren die Kopfpositionen der Mehrband-TM kodieren. Simulieren Sie einen Schritt der Mehrband-TM durch konstant viele Scans der Einband-TM über das ganze Band.

Aufgabe 3 Entscheidbarkeit

2+2+3+3 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

- (a) Jede Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{1\}$ ist entscheidbar.
- (b) Wenn L_1 und L_2 entscheidbar sind, dann ist auch $L_1 L_2$ entscheidbar.
- (c) Wenn L unentscheidbar ist, dann ist auch L^* unentscheidbar.
- (d) Wenn L entscheidbar ist, dann ist auch L^* entscheidbar.

Aufgabe 4 Kodierte DEAs*freiwillig, 5+5 Zusatzpunkte*

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Sprachen entscheidbar sind. Dabei sei $\langle M \rangle$ eine geeignete Kodierung eines endlichen Automaten M . (Machen Sie sich klar, wie diese Kodierung aussehen könnte!)

- (a) $L_\infty = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist ein DEA und } L(M) \text{ ist unendlich.}\}$; und
- (b) $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist ein DEA und akzeptiert } \Sigma^*\}$.

Aufgabe 1 Simulation

David Sg und Thore Behmer

3+7 Punkte

- Beschreiben Sie, wie man einen DEA durch eine Turing-Maschine simulieren kann. Beachten Sie dabei insbesondere die unterschiedlichen Akzeptierungsmodi.
- Beschreiben Sie, wie man eine Turing-Maschine mit beidseitig unbeschränktem Eingabe-/Arbeitsband durch eine Turing-Maschine mit einseitig unbeschränktem Band simulieren kann.

$$\delta: Q \times T \rightarrow Q \times T \times \{L, N, R\}$$

$$DFA = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$$

$$TM = (\Sigma, T, \Delta, Q, q_0, q_{fin}, \delta)$$

a)

$$\Sigma = \Sigma$$

$$Q = Q$$

- Das Eingabealphabet Σ und die Zustandmenge Q kann von der DET für die TM ohne Veränderungen übernommen werden.

$$T = \Sigma \cup \Delta$$

- Das Bandsymbol enthält außerdem Σ noch das Δ

$$q_0 = q_0$$

- Der Startzustand der DET wird zum Startzustand der TM

$$\text{sei } q, p \in Q \wedge a \in \Sigma, T$$

- Die Überführungsfunktionen von der TM können von der DET übernommen werden, mit leichten Änderungen.

$\delta(p, a) = q \Rightarrow \delta(p, a) \rightarrow (q, a, R)$ Die DET hat vom Σ gelesen, die TM wird vom T lesen.

Die TM darf niemals das gelesene Wort überschreiben.

Die TM bewegt sich immer nach rechts.

$$\text{sei } p \in Q \wedge q \in F \wedge a \in \Sigma, T$$

$$\delta(p, a) = q \Rightarrow \delta(p, a) \rightarrow \delta(p, a, R)$$

- Für alle akzeptierende Zustände aus dem DET muss die δ für die TM angepasst werden. Die δ überfährt beim Lesen vom Δ in q_{fin} . (Damit wird getestet, ob man am Ende eines Wortes in einem Endzustand ist.)

- Für die restlichen nicht beachteten δ in der TM folgt eine Überführung in q_{fin} . (Die nicht beachteten δ sollten nun noch die Überführungen für die nicht akzeptierende Zustände und den Buchstaben Δ sein)

Für 2 Bänder könnte δ wie folgt aussehen:

$$p, q \in Q \wedge r_1, r_2, u_1, u_2 \in T \wedge l_1, l_2 \in \{L, R, N\}$$

$$\delta(p, r_1, r_2) \rightarrow (q, r_1, r_2, l_1, l_2)$$

b)

Annahme: die TM ist nach links beschränkt und nach rechts unendlich lang mit \uparrow . (Die Begründung wäre mit einer rechts beschränkten und links unendlichen langen TM äquivalent, lässt sich aber leichter erklären wenn wir dies am Anfang bereits festlegen.)

Bsp: TM: $\dots \uparrow \uparrow a a \uparrow \uparrow \dots$

↑

$TM_B:$ $a a \uparrow \uparrow \dots$

↑

To do: Wir müssen den linken "fehlende" unendlich lange Teil des Bandes in der TM_B dargestellt bekommen.

- Eine Möglichkeit dafür wäre, das "fehlende" Band "unter" dem rechten unendlichen Band mit \uparrow zu schreiben

Dazu müsste man 1. beim Start der TM_B solange nach rechts fahren bis das erste \uparrow gelesen wird. Dieses wird dann mit $\uparrow \uparrow$ überschrieben. Dabei dient das zweite \uparrow in $\uparrow \uparrow$ für den eigentlichen "fehlenden" unendlich langen Teil von links. Dadurch weiß nun die TM_B wann das simulierte linke und rechte unendlich lange Band anfängt.

Bsp: TM: $\dots \uparrow \uparrow a a \uparrow \uparrow \dots$

↑

$TM_B:$ $a a \uparrow \uparrow \dots$

↑

↑

Danach müssen nur noch neue Zustände Q und Überführungsfunktionen erstellt werden. Damit die TM_B auch auf dem "unteren" rechten Band schreiben kann.

Zum Beispiel muss beachtet werden, dass wenn der Kopf der TM_B auf den Anfang des Wortes guckt und auf das linke "fehlende" Band schreiben möchte, dass die TM_B sich dann nach rechts bewegen bis sie das erste "doppelte" Symbol liest (z.B. "aa").

Dann befindet sich der Kopf nämlich erst auf dem simulierten linken Band.

Außerdem muss die TM_B testen können wo das Wort anfängt. Dies lässt sich leicht durch eine Markierung des ersten Symbols bewerkstelligen.

Bsp: TM: $\dots \uparrow \uparrow a a \uparrow \uparrow \dots$

↑

$TM_B:$ $a a \uparrow \uparrow \dots$

↑

↑

Bsp. einer Benutzung des "linken Bandes" auf einer TM im Vergleich zu einer TM_B

$TM: \dots \uparrow p \uparrow a \uparrow a \uparrow p \uparrow \dots \rightarrow \dots \uparrow p \uparrow a \uparrow a \uparrow p \uparrow \dots \rightarrow \dots \uparrow a \uparrow a \uparrow p \uparrow \dots$

$TM_B:$

1. Init $\uparrow a \uparrow p \uparrow \dots \rightarrow \uparrow a \uparrow p \uparrow \dots \rightarrow$
 $\uparrow a \uparrow p \uparrow \dots$

2. Nun kann auf dem Simulierten Band geschrieben werden

$\uparrow a \uparrow p \uparrow \dots \rightarrow \uparrow a \uparrow p \uparrow \dots \rightarrow \uparrow a \uparrow p \uparrow \dots \rightarrow \uparrow a \uparrow p \uparrow \dots$
 $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$
 a

Aufgabe 2 Mehrband-Turingmaschinen

2+8 Punkte

Eine *Mehrband-Turingmaschine* ist eine Turingmaschine, die über k Arbeitsbänder verfügt, die jeweils einen unabhängigen Schreib-/Lesekopf haben. Hierbei ist $k \geq 2$ eine Konstante.

- (a) Geben Sie eine geeignete Definition für eine Mehrband-Turingmaschine. Wie muss die Überführungsfunktion aussehen?

- (b) Begründen Sie, dass Ihre Mehrband-Turingmaschine von der Turingmaschine aus der Vorlesung simuliert werden kann.

Hinweis: Arbeiten Sie mit einem erweiterten Bandalphabet. Führen Sie $2k$ Spuren auf dem Band ein, wobei die ersten k Spuren den Bandinhalt und die zweiten k Spuren die Kopfpositionen der Mehrband-TM kodieren. Simulieren Sie einen Schritt der Mehrband-TM durch konstant viele Scans der Einband-TM über das ganze Band.

a) $TM = (\Sigma, \Gamma^k, \Delta, Q, q_0, q_{fin}, \delta^k)$ wobei Γ^k und Δ^k für k viele Bänder

1. Eine Mehrband-Turingmaschine kann endlich viele Bänder besitzen.
2. Dabei besitzt jedes Band einen individuell bewegbaren Kopf.
3. Nur das erste Band hat das Eingabewort in sich stehen. Der Rest ist " leer" / mit \varnothing gefüllt.
4. Die Zustandsmenge verändert sich nicht, jedoch wird für jedes Band, in der Zustandsüberführung, eine Leser-, Schreib- und Bewegsbedienung hinzugefügt. Die Zustandsüberführung wird nur ausgeführt, wenn alle Lesebedienungen erfüllt sind. Dann wird für jedes Band gleichzeitig geschrieben und bewegt.

Ein δ könnte wie folgt aussehen $p, q \in Q \wedge a, b \in \Gamma \wedge l \in \Delta, R, NS \quad \delta(p, a^k) = (q, b^k, l^k)$
Die "hoch k " stehen dabei für k beliebige Elemente

b) To do:

1. Wir müssen die k -Bänder simuliert bekommen
2. Wir müssen die k -Köpfe simuliert bekommen

Begründung:

1. Für die k -Bänder können wir einfach das Bandalphabet erweitern.
Und zwar indem wir alle möglichen Symbole aus Γ der Länge k hinzufügen
Bsp. für $k=2$: aus $\Gamma = \Sigma a, \uparrow, \varnothing$ wird $\Gamma = \Sigma a, \uparrow, \varnothing\varnothing, aa, a\varnothing, \varnothing a, \varnothing\varnothing$

1. Band 2. Band

2. Für die k -Köpfe können wir erneut das Bandalphabet erweitern. Und zwar indem von dem bereite erweiterten Γ nochmal alle Symbole hinzufügt, mit der Veränderung, dass für jedes der k -langen Symbole, für alle Möglichkeiten eines der Zeichen im k -langen Symbol, dieses zu markieren, hinzu zu fügen
Bsp. aus $\Gamma = \Sigma a, \uparrow, \varnothing, aa, a\varnothing, \varnothing a, \varnothing\varnothing$ wird $\Gamma = \Sigma a, \uparrow, \varnothing, aa, a\varnothing, \varnothing a, a, \uparrow, aa, a\varnothing, aa, \varnothing\varnothing, \uparrow\varnothing, \varnothing\uparrow, \varnothing\varnothing\varnothing, \varnothing\varnothing\uparrow, \varnothing\varnothing\varnothing\varnothing$

Die orangene Markierung zeigt in diesem Beispiel die Platzierung der Köpfe an.

3. Nun da wir T verändert haben, funktioniert die in a) definierte S-Funktion für Mehrband-TM, auch für die Einband-TM, es müssen lediglich 2 Sachen beachtet werden.

1. Woher weiß die TM welche S auszuführen ist?

- Die TM kann einmal von Beginn bis zum Ende des Wortes durchlaufen und sich dabei die markierten simulierten Kopfe merken (anhand von Zuständen)

2. Wie werden die Kopfe bewegt?

Auf den Rückweg (vom Ende bis zum Anfang) des Wortes kann S ausgeführt werden und nach der Bewegung durch S muss das neue Symbol markiert werden.

- Das letzte was jetzt noch zu beachten ist, ist das wir beim Start der TM das wir für alle Symbole auf dem Laufband, welche $\neq \#$ sind, sie wie folgt umschreiben: $a \rightarrow a \uparrow^k$

Bsp.: $\uparrow \text{hallo} \uparrow \rightarrow \uparrow \underset{\uparrow}{\text{h}} \underset{\uparrow}{\text{a}} \underset{\uparrow}{\text{l}} \underset{\uparrow}{\text{l}} \underset{\uparrow}{\text{o}} \uparrow$. Wobei k die Anzahl der Bänder sind und das Zeichen dann koft im Symbol vor kommt

Damit wird bewirkt, dass wir S zum Start benutzen können.

Bsp. a)

Band 1 $\uparrow \uparrow a b a \uparrow \uparrow \uparrow$

$$\delta(p_0, \uparrow, \#, l) \rightarrow (p_1, \uparrow, \#, a, R, L, M)$$

$\uparrow \uparrow a b a \uparrow \uparrow \uparrow$

Band 2 $\uparrow \# \# \# b \uparrow \# \uparrow \uparrow$

$\uparrow \# \# \# b \uparrow \# \uparrow \uparrow$

Band 3 $\uparrow \uparrow \uparrow a b a b \uparrow$

$\uparrow \uparrow \uparrow a a a b \uparrow$

würde für 6) wie folgt aussehen

1 Band $\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \uparrow a b a \uparrow \uparrow \\ \uparrow \# \# b \uparrow \# \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow a b a b \end{array} \right. \quad \delta(p_0, \uparrow, \#, l) \rightarrow (p_1, \uparrow, \#, a, R, L, M) \quad \begin{array}{l} \uparrow \uparrow a b a \uparrow \uparrow \\ \uparrow \# \# b \uparrow \# \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow a a a b \end{array}$

Wobei jeweils nur ein Symbol l ist und die orange markierten Zeichen die Kopf Position angeben.

Aufgabe 3 Entscheidbarkeit

2+2+3+3 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

- (a) Jede Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{1\}$ ist entscheidbar.
- (b) Wenn L_1 und L_2 entscheidbar sind, dann ist auch $L_1 L_2$ entscheidbar.
- (c) Wenn L unentscheidbar ist, dann ist auch L^* unentscheidbar.
- (d) Wenn L entscheidbar ist, dann ist auch L^* entscheidbar.

a) Sei L jede Sprache über $\Sigma = \{1\}$

$L \subseteq$ Diagonalsprache

$\Rightarrow L$ ist nicht entscheidbar

b) Wenn L_1 entscheidbar \Rightarrow Es gibt eine TM $M_1(w_i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w_i \in L_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Wenn L_2 entscheidbar \Rightarrow Es gibt eine TM $M_2(w_i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w_i \in L_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Sei M_3 die TM für L_3 und $w_3 \in L_3$

$\Rightarrow w_3 = w_1 \circ w_2$

- Zerlege das Wort w_3 in zwei Wörter w_1 und w_2 und teste für alle Möglichkeiten:
- M_3 hat 2 Kästen. Auf dem 1. liegt w_1 und auf dem 2. liegt w_2 .
- M_3 simuliert für w_1 M_1 und für w_2 M_2 .
- M_3 akzeptiert, falls M_1 und M_2 akzeptieren, sie verwirft, falls M_1 oder M_2 verwerfen.
 $\Rightarrow M_3$ ist entscheidbar, falls M_1 und M_2 entscheidbar sind

c) L ist unentscheidbar

$L \leq L^*$

$\Rightarrow L^*$ unentscheidbar (Lemma Reduktionen aus Vorlesung 13) \square

d) Wenn L entscheidbar \Rightarrow Es gibt eine TM $M(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in L \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Sei M' die TM für L^* und $w' \in L^*$

$\Rightarrow w' = w_0 \dots w_n$, wobei $w_i \in L$

- M' besitzt zwei Bänder.
- Teste für ($i=0$; $i \leq \text{Länge des Wortes}; \text{int.},:$) oder bis M' akzeptiert folgendes:
- w' wird in i Wörter zerlegt. Falls M nicht akzeptiert probiere alle anderen Möglichkeiten aus.:
- Vom 1. Band wird nach einander w' durch gegangen und das w_i zum 2. Band kopiert, falls das 2. Band leer ist.
- Im zweiten Band wird (M, w_i) simuliert. Wenn M das Wort akzeptiert wird das Band geleert und das nächste Wort w_i aus w' kann aufs Band kopiert werden.
- M' akzeptiert falls alle Wörter w_i aus w' von M akzeptiert wurden bzw. M' akzeptiert $\Leftrightarrow M$ akzeptiert
- M' verwirft sonst bzw. M' verwirft $\Leftrightarrow M$ verwirft

$\Rightarrow M'$ ist entscheidbar falls M entscheidbar ist