

Abgabe bis zum 15. Juni 2020, 10 Uhr, im Whiteboard

Bitte erläutern und begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 Entscheidbarkeit I

3+3+4 Punkte

Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen, ob sie entscheidbar ist. Bestimmen Sie auch für jede der folgenden Sprachen, ob sie rekursiv aufzählbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch Angabe einer entsprechenden Turingmaschine oder einer geeigneten Reduktion.

- (a) $L_1 = \{ (0^k, \langle M \rangle, w) \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ nach höchstens } k \text{ Schritten.} \}$
- (b) $L_2 = \{ (0^k, \langle M \rangle, w) \mid M \text{ hat } w \text{ nach } k \text{ Schritten noch nicht akzeptiert.} \}$
- (c) $L_3 = \{ (0^k, \langle M \rangle, w) \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ nach mindestens } k \text{ Schritten.} \}$

Aufgabe 2 Halteproblem

5+5 Punkte

In der Vorlesung haben Sie einen Beweis für die Unentscheidbarkeit des Halteproblems gesehen, der durch eine Reduktion von der Universalsprache funktioniert. In dieser Aufgabe soll ein alternativer Beweis betrachtet werden.

Nehmen Sie an, es existiert eine Turing Maschine M , die das Halteproblem entscheidet. Betrachten Sie die Turing-Maschine X , die folgendermaßen arbeitet:

Eingabe: Die Kodierung $\langle Y \rangle$ einer Turingmaschine.

Programm für X : Führe M mit der Eingabe $(\langle Y \rangle, \langle Y \rangle)$ aus. Wenn M die Eingabe akzeptiert, beginne eine Endlosschleife. Wenn M die Eingabe verwirft, gehe in den Zustand q_{ja} .

- (a) Beschreiben Sie, was passiert, wenn wir die Turing-Maschine X mit der Eingabe $\langle X \rangle$ ausführen.
- (b) Folgern Sie, dass das Halteproblem nicht entscheidbar ist. Beschreiben Sie dabei genau die einzelnen Schritte des logischen Arguments und an welcher Stelle der indirekte Beweis zum Einsatz kommt.

Aufgabe 3 Reduktionen

5+5 Punkte

- (a) Beweisen Sie, dass die Relation \leq transitiv ist (d.h., wenn für Sprachen L_1 , L_2 und L_3 gilt: $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3$, dann ist auch $L_1 \leq L_3$).
- (b) Beweisen Sie: Ist L_1 entscheidbar und L_2 eine beliebige Sprache mit $L_2 \neq \emptyset$, $L_2 \neq \Sigma^*$, dann gilt $L_1 \leq L_2$.

Aufgabe 4 Entscheidbarkeit II

freiwillig, 10 Zusatzpunkte

Betrachten Sie die folgende Sprache L :

$\{1^n \mid \text{die Dezimaldarstellung von } \pi = 3.1415\dots \text{ enthält } n \text{ aufeinanderfolgende Sechsen}\}$.

Zeigen Sie, dass L entscheidbar ist. Was lernen Sie daraus über die Definition von Berechenbarkeit?

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, dass wenn das Wort 1^n in L ist, auch alle Wörter 1^m für $m \leq n$ in L liegen müssen.