4. Aufgabenblatt zur Vorlesung

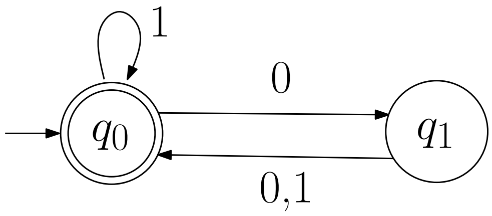
Grundlagen der theoretischen Informatik — SoSe 2020

Wolfgang Mulzer

Abgabe bis zum 25. Mai 2020, 10 Uhr, im Whiteboard

Aufgabe 1 Algorithmus von Kleene *10 Punkte*

(a) Konstruieren Sie mit dem Algorithmus von Kleene einen regulären Ausdruck zu folgendem endlichen Automaten.



Dabei dürfen Sie Zwischenausdrücke für $R(i, j, k)$ vereinfachen. Beschreiben Sie die akzeptierte Sprache in einem Satz.

(b) Der Algorithmus von Kleene zur Umwandlung eines endlichen Automaten in einen regulären Ausdruck kann auch auf NEAs angewendet werden. Überlegen Sie, an welchen Stellen man den Algorithmus modifizieren muss, so dass er für NEAs statt für DEAs funktioniert.

Aufgabe 2 Pumping Lemma *10 Punkte*

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $\{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ und

(c) $\{a^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.

Aufgabe 3 Myhill-Nerode Relation *10 Punkte*

Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation für die folgenden Sprachen. Geben Sie den Minimalautomaten an, falls es sich um eine reguläre Sprache handelt. Begründen Sie Ihre Antworten.

$$\begin{aligned} L_1 &= \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{die Anzahl der 0en und 1en in jedem Präfix von } w \\ &\qquad \text{unterscheidet sich um höchstens } 1\}, \\ L_2 &= \{0^n 1^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 DEAs vs NEAs *freiwillig, 10 Zusatzpunkte*

Betrachten Sie die folgende Sprache über $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ das viertletzte Zeichen von } w \text{ ist eine 1 } \}.$$

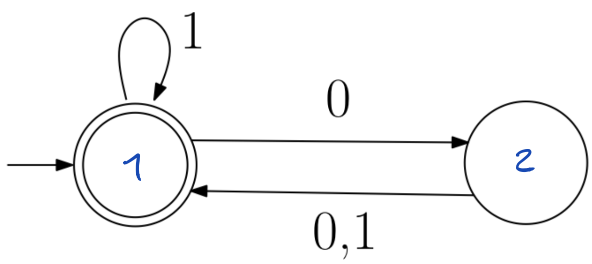
(a) Geben Sie einen DEA und einen NEA für L an.

(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation für L.

(c) Was sagen (a) und (b) über den Vergleich zwischen DEAs und NEAs aus?

Aufgabe 1 Algorithmus von Kleene Von David Syr und Thore Brehmer *10 Punkte*

(a) Konstruieren Sie mit dem Algorithmus von Kleene einen regulären Ausdruck zu folgendem endlichen Automaten.



Dabei dürfen Sie Zwischenausdrücke für $R(i, j, k)$ vereinfachen. Beschreiben Sie die akzeptierte Sprache in einem Satz.

(b) Der Algorithmus von Kleene zur Umwandlung eines endlichen Automaten in einen regulären Ausdruck kann auch auf NEAs angewendet werden. Überlegen Sie, an welchen Stellen man den Algorithmus modifizieren muss, so dass er für NEAs statt für DEAs funktioniert.

$R(i,j,k+1) = R(i,j,k) \cup R(i,k+1,k)R(k+1,k+1,k)^* R(k+1,j,k)$

$k = 0$

$R(1,1,0) = 1 \cup \varepsilon$

$R(1,2,0) = 0$

$R(2,1,0) = 0 \cup 1$

$R(2,2,0) = \varepsilon$

$R(1,1,1) = (1 \cup \varepsilon) \cup (1 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon)^*(1 \cup \varepsilon) = 1^*$

$R(1,2,1) = 0 \cup (1 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon)^* \; 0 = 1^* 0$

$R(2,1,1) = (0 \cup 1) \cup (0 \cup 1)(1 \cup \varepsilon)^*(1 \cup \varepsilon) = (0 \cup 1) \circ 1^*$

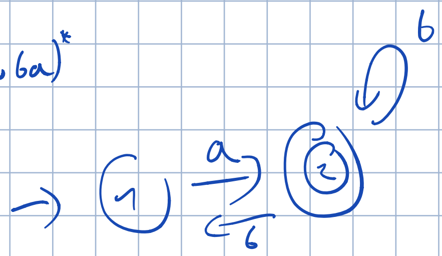
$R(2,2,1) = \varepsilon \cup (0 \cup 1)(1 \cup \varepsilon)^*(0) = \varepsilon \cup (0 \cup 1) \circ 1^* 0$

$R(1,1,2) = 1^* \cup (1^* 0 \circ (\varepsilon \cup (0 \cup 1) \circ 1^* 0)^* \circ (0 \cup 1) \circ 1^*)$

b) Die Rekursion funktioniert bereits mit NEA's

Bsp. 1

$a(b \cup ba)^*$



$11,0 = \varepsilon$

$12,0 = a$

$21,0 = b$

$22,0 = b \cup \varepsilon$

$111 = \varepsilon$

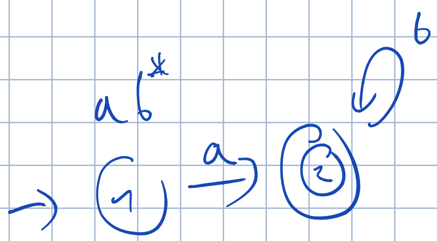
$121 = a \cup \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot a = a$

$211 = b \cup b \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon = b$

$221 = b \cup \varepsilon \cup b \cdot \varepsilon^* a = b \cup \varepsilon \cup ba$

$$122 = a \cup a(b \cup \varepsilon \cup ba)^* \cdot (b \cup \varepsilon \cup ba)$$
$$= a \cup a(b \cup \varepsilon \cup ba)^+$$
$$= a \cup a(b \cup ba)^*$$

Bsp. 2 $\quad ab^*$



$(1,1,0) = \varepsilon$

$(1,2,0) = a$

$(2,1,0) = \emptyset$

$(2,2,0) = b \cup \varepsilon$

$(1,1,1) = \varepsilon \cup \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon = \varepsilon$

$(1,2,1) = a \cup \varepsilon\, \varepsilon^*\, a = a$

$(2,1,1) = \emptyset \cup \emptyset\, \varepsilon^*\, \varepsilon^* = \emptyset$

$(2,2,1) = b \cup \varepsilon \cup \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot a = b \cup \varepsilon \cup \emptyset$

$$(1,2,2) = a \cup a(b \cup \varepsilon \cup \emptyset)^* (b \cup \varepsilon \cup \emptyset)$$
$$= a$$

Aufgabe 2 Pumping Lemma *10 Punkte*

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $\{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ und

(c) $\{a^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.

aa aa

$m=2$
$k=m+1$

a) $\{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $L = \{b, aba, aabaa, \dots\}$

1. sei $m \in \mathbb{N}$
2. wähle $w = a^m b a^m$, $w \in L$ und $|w| \geq m$
3. sei eine Zerlegung $w = xyz$ mit $|xy| \leq m$ und $y \neq \varepsilon$ gegeben
   $\Rightarrow y = a^k$ mit $1 \leq k \leq m$, $x = a^j$ $\wedge$ $y \cdot x = a^m$
4. wähle y^2 $\Rightarrow xy^2z = xyyz = a^j a^k a^k b a^m = a^m a^k b a^m \notin L$ $\square$

b) $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ $L = \{\varepsilon, a^2, a^4, a^{16}, a^{32} \dots\}$
$n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$

1. sei $m \in \mathbb{N}$
2. wähle $w = a^{2^m}$, $w \in L$ und $|w| \geq m$
3. sei eine Zerlegung $w = xyz$ mit $|xy| \leq m$ und $y \neq \varepsilon$ gegeben
   $\Rightarrow y = a^k$ mit $1 \leq k \leq m$,
4. wähle $y^2 \Rightarrow xy^2z = xyyz = a^{m-k} a^k a^k a^{(2^m)-m} = a^m a^k a^{(2^m)-m} = a^k a^{(2^m)} = a^{(2^m)+k} \notin L$

z.z. $2^n < 2^n + k < 2^{n+1}$ wobei $1 \leq k \leq n$

$2^n < 2^n + k$ gilt da $1 \leq k$

$2^n + k < 2^{n+1}$

I.A. $n = 1$ $2^1 + 1 < 2^2$ ✓
I.S. z.z. $2^{n+1} + k < 2^{n+2}$
$2^n \cdot 2 + k < 2^{n+1} \cdot 2$
$2 \cdot 2^n + k \overset{\text{I.V.}}{<} (2^n + k) \cdot 2$ ✓ $\square$

c) $\{a^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$ $\quad L = \{a, b, aab, abb, \dots\}$

1. sei $v \in \mathbb{N}$

2. wähle $w = a^v b^{v+v!}$, $w \in L$ und $|w| \geq v$

3. sei eine Zerlegung $w = xyz$ mit $|xy| \leq v$ und $y \neq \varepsilon$ gegeben

   $\Rightarrow y = a^k$ mit $1 \leq k \leq v$ und $k \in \mathbb{N}$

4. wähle $y^{1+\frac{v!}{k}}$ $\Rightarrow xy^{1+\frac{v!}{k}}z = a^{v-k}(a^k)^{1+\frac{v!}{k}} b^{v+v!} = a^{v-k} a^{k+v!} b^{v+v!} = a^{(v-k)+(k+v!)} b^{v+v!}$

   $\Rightarrow a^{v+v!} b^{v+v!} \notin L$

$\square$

$\frac{v!}{k}$ ist $\in \mathbb{N}$, da $v, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq v$

Aufgabe 3 Myhill-Nerode Relation *10 Punkte*

Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation für die folgenden Sprachen. Geben Sie den Minimalautomaten an, falls es sich um eine reguläre Sprache handelt. Begründen Sie Ihre Antworten.

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{die Anzahl der 0en und 1en in jedem Präfix von } w \text{ unterscheidet sich um höchstens 1}\},$$

$$L_2 = \{0^n 1^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

1) $L_1 = \{0, 1, 01, 10, 010, 101, 011 \ldots\}$

$[\varepsilon]_L = \{\varepsilon\} \cap L(((10)^*(01)^*)^*)$

zu ε oder der Menge die aus einer gleichen Anzahl an 1 und 0 besteht, kann man jedes Wort aus L_1 anhängen und man wird wieder in L_1 landen

$[0]_L = L(0(10)^* \cup (10)^*0 \cup (01)^*0)$

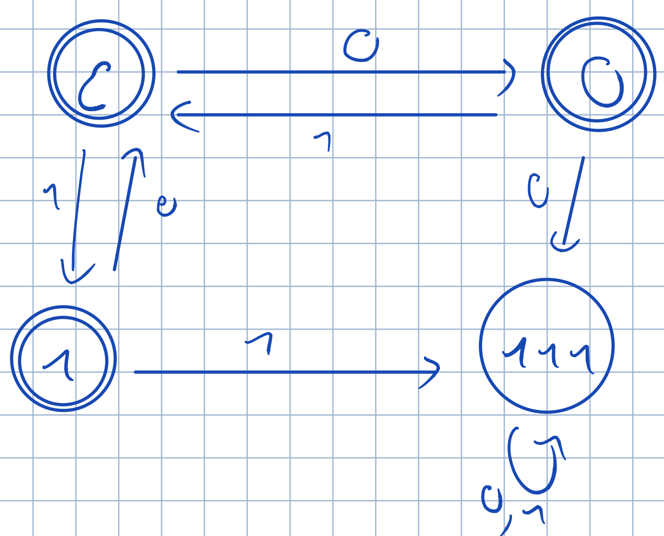
Alle Wörter die eine 0 mehr als 1sen haben in jedem Präfix

$[1]_L = L((10)^*1 \cup (01)^*1 \cup 1(01)^*)$

Alle Wörter die eine 1 mehr als 0en haben in jedem Präfix

$[111]_L = L(00((10)^*(01)^*)^* \cup 11((10)^*(01)^*)^* \cup ((10)^*(01)^*)^*(000 \cup 111)((10)^*(01)^*)^*)$

Alle Wörter die nicht in der Sprache liegen.



Reguläre Sprache, da endliche Ä.klassen

$L_2 = \{\varepsilon, 011, 001111, 000111111, \dots\}$

$[\varepsilon]_L = \{\varepsilon\}$ Nur das leere Wort kann in Verbindung mit allen Wörtern von L_1, wieder in L_1 landen

$[1]_L = (\Sigma^* \setminus L(0^+1^*)) \cup \{0^n 1^{2m+1+n} \mid m \geq 1 \land n \geq 0\}$

Alle Wörter die schon zuviele 1sen haben / nicht mehr in die Sprache kommen

$\forall k \geq 1: [0^k]_L = \{0^k\}$

Alle Wörter die mit k Nullen anfangen, können mit einem Wort, welches $2k$ 1sen hat, in L_2 gelangen

$[011]_L = \{0^n 1^{2n}\}$ alle Wörter die bereits in der Sprache sind. An ihnen kann nichts mehr angehängt werden, sonst gehören sie nicht mehr zur Sprache

$\forall n \geq 1, m \geq 0: [0^n 1^m]_L = \{0^n 1^m \mid n \geq 1 \land 2n > m \geq 1\}$ alle Wörter an denen noch 1sen angehängt werden können, damit sie zur Sprache gehören. Ä.klassen für die Wörter, die gleich viele 1sen benötigen. Bsp. 01, 00111 benötigen beide eine 1. Sie sind in der Ä.klasse $[0^n 1^m]$

unendlich viele Relationsklassen $\Rightarrow$ nicht regulär $\square$

Aufgabe 4 DEAs vs NEAs *freiwillig, 10 Zusatzpunkte*

Betrachten Sie die folgende Sprache über $\Sigma = \{0, 1\}$:

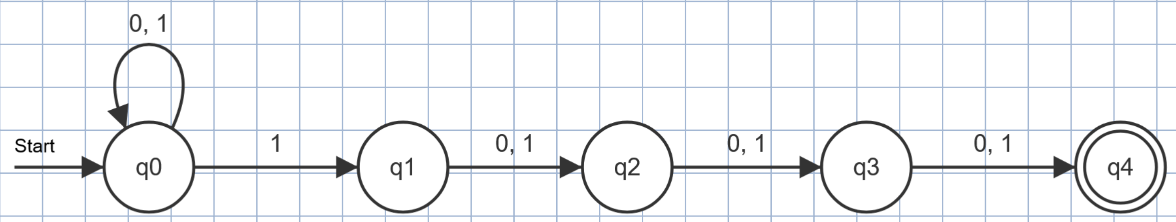
$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ das viertletzte Zeichen von } w \text{ ist eine } 1 \ \}.$$

(a) Geben Sie einen DEA und einen NEA für L an.

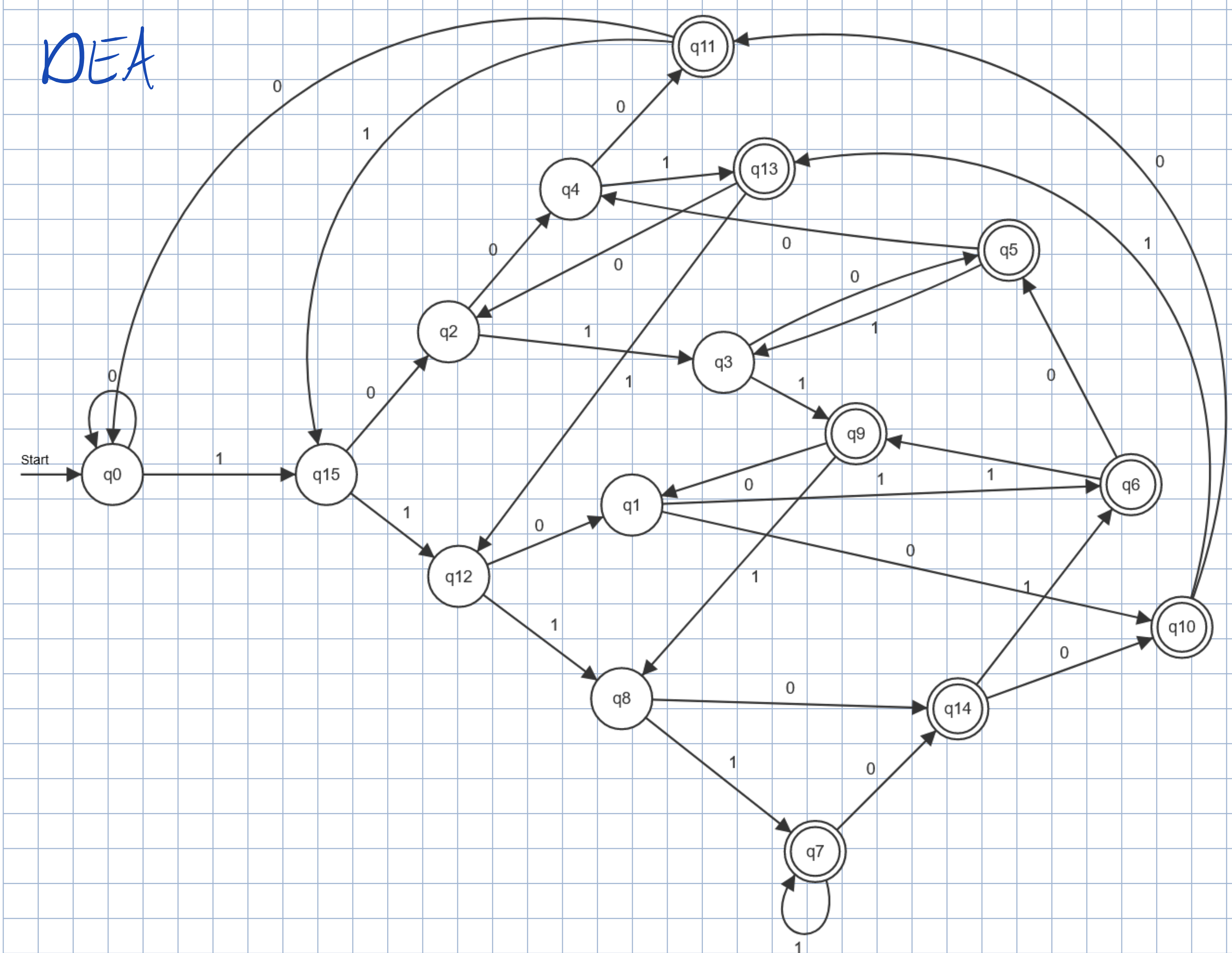
(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation für L.

(c) Was sagen (a) und (b) über den Vergleich zwischen DEAs und NEAs aus?

NEA



DEA



b)

$[1000]_L = L((0 \cup 1)^* 1000)$ Alle Wörter die mit 1000 enden

$[1100]_L = L((0 \cup 1)^* 1100)$ " ——— 1100 ——— "

$[1010]_L = L((0 \cup 1)^* 1010)$

$[1001]_L = L((0 \cup 1)^* 1001)$

$[1110]_L = L((0 \cup 1)^* 1110)$

$[1101]_L = L((0 \cup 1)^* 1101)$

$[1011]_L = L((0 \cup 1)^* 1011)$

$[1111]_L = L((0 \cup 1)^* 1111)$