

Abgabe bis zum 22. Juni 2020, 10 Uhr, im Whiteboard

Bitte erläutern und begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 Reduktionen

4+3+3 Punkte

- (a) Sei $H_0 := \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe } \varepsilon\}$. Zeigen Sie: $H \leq H_0$.
- (b) Seien X und R Sprachen, so dass R regulär ist und $X \leq R$ gilt. Muss X dann ebenfalls regulär sein? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (c) Sei D die Diagonalsprache und U die Universalsprache. Zeigen Sie, dass es keine Reduktion von D auf U geben kann.
Hinweis: Zeigen Sie, dass D sonst entscheidbar wäre.

Aufgabe 2 Rekursiv aufzählbare Sprachen

5+5 Punkte

- (a) Beweisen Sie: Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar bzw. rekursiv, wenn es eine Turingmaschine M gibt, die alle Wörter von L in *lexikographischer Reihenfolge* durch Blankzeichen getrennt auf ein Ausgabeband ausgibt, auf das nur geschrieben werden kann.
Hinweis: Sie müssen alle Wörter $w \in \Sigma^*$ aufzählen und jeweils überprüfen, ob w in L enthalten ist.
- (b) Beweisen Sie: Eine Sprache L ist genau dann semientscheidbar bzw. rekursiv aufzählbar, wenn es eine Turingmaschine M gibt, die alle Wörter von L in *beliebiger Reihenfolge* durch Blankzeichen getrennt auf ein Ausgabeband ausgibt, auf das nur geschrieben werden kann.
Hinweis: Gehen Sie vor wie bei (a). Wie können Sie dies bewerkstelligen, ohne dass ein Problem entsteht, wenn die Turingmaschine für L nicht anhält?

Aufgabe 3 Unäres PKP

10 Punkte

Zeigen Sie: Das PKP über dem unären Alphabet $\Sigma = \{0\}$ ist entscheidbar.

Aufgabe 1 Reduktionen von Thore Brehmer und David Syg 4+3+3 Punkte

- Sei $H_0 := \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe } \varepsilon\}$. Zeigen Sie: $H \leq H_0$.
- Seien X und R Sprachen, so dass R regulär ist und $X \leq R$ gilt. Muss X dann ebenfalls regulär sein? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Sei D die Diagonalsprache und U die Universalsprache. Zeigen Sie, dass es keine Reduktion von D auf U geben kann.

Hinweis: Zeigen Sie, dass D sonst entscheidbar wäre.

a) $H := \{\langle M \rangle, w \mid \text{Die TM } M \text{ hält bei Eingabe } w \in \Sigma^*\}$

$\Leftrightarrow H \leq H_0$.

- Eingabe: $(\langle M \rangle, w)$

- Funktion: Konstruiere M' wie folgt:

- Falls Eingabewort = ε , schreibe w auf das Band
- Führe M auf w aus
- Wenn M hält, halte auch

- Ausgabe: $(\langle M' \rangle)$

- Es gilt f ist berechenbar. $(\langle M \rangle, w) \in H \Leftrightarrow (\langle M' \rangle) \in H_0$.

$\Rightarrow H \leq H_0$.

b) Nein. Bsp. sei $X := \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. X ist nicht regulär (aus Vorlesung)
sei $R := \{1\}$ offensichtlich ist R regulär

zeige $X \leq R$



- Eingabe: $w \in \Sigma^*$

- Funktion: $f \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in X \text{ (in Form von } 0^n1^n) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$f(w) = w'$$

- Ausgabe: $w' \in \{0, 1\}$

- Es gilt f ist berechenbar. $w \in X \Leftrightarrow w' \in R$

$\Rightarrow X \leq R$

wobei X nicht regulär obwohl R regulär!

c) $D := \{ \langle M \rangle \mid \text{Die TM } M \text{ akzeptiert die Eingabe } \langle M \rangle \text{ nicht} \}$
 $U := \{ \langle \langle M \rangle, w \rangle \mid \text{Die TM } M \text{ akzeptiert die Eingabe } w \in \Sigma^* \}$

z.z. $D \neq U$

- (a) Beweisen Sie: Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar bzw. rekursiv, wenn es eine Turingmaschine M gibt, die alle Wörter von L in *lexikographischer Reihenfolge* durch Blankzeichen getrennt auf ein Ausgabeband ausgibt, auf das nur geschrieben werden kann.

Hinweis: Sie müssen alle Wörter $w \in \Sigma^*$ aufzählen und jeweils überprüfen, ob w in L enthalten ist.

- (b) Beweisen Sie: Eine Sprache L ist genau dann semientscheidbar bzw. rekursiv aufzählbar, wenn es eine Turingmaschine M gibt, die alle Wörter von L in *beliebiger Reihenfolge* durch Blankzeichen getrennt auf ein Ausgabeband ausgibt, auf das nur geschrieben werden kann.

Hinweis: Gehen Sie vor wie bei (a). Wie können Sie dies bewerkstelligen, ohne dass ein Problem entsteht, wenn die Turingmaschine für L nicht anhält?

a) L ist entscheidbar \Leftrightarrow es gibt TM M für L

1. L ist entscheidbar \Rightarrow es gibt TM M für L

Konstruiere M wie folgt aus M_1 und M_2 :

- M_1 erstellt alle $w \in \Sigma^*$ nacheinander in lexikographischer Reihenfolge und nutzt
- M_2 zum Überprüfen, ob $w \in L$. Falls $w \in L$ schreibe w auf das Ausgabeband, sonst verwaffe w . Danach erstellt M_1 das nächste Wort
(M_2 nur möglich da L entscheidbar)

$\Rightarrow M$ zählt alle Wörter von L in lexikographischer Reihenfolge auf.

2. L ist entscheidbar \Leftarrow es gibt TM M für L

Konstruiere die TM $M' : \Sigma^* \rightarrow \{w \mid w \text{ ist in } L\}$ (die L entscheidet) wie folgt:

- Simuliere M und vergleiche jedes neue Wort w , welches M erstellt, mit der Eingabe w'
 - Falls $w = w'$ gib qja aus
 - Falls w größer ist als w' (mehr Buchstaben besitzt) gib qnein aus.
 - Falls alle Wörter aus M überprüft wurden gib qnein aus
- $\Rightarrow M'$ terminiert immer $\Rightarrow L$ ist entscheidbar

b) L ist semientscheidbar \Leftrightarrow es gibt TM M für L

1. L ist semientscheidbar \Rightarrow es gibt TM M für L

Idee: da L semientscheidbar ist, können wir die Wörter von L nicht einfach nacheinander abarbeiten wie in a, da die Überprüfung von einem Wort unendlich lang dauern könnte. Daher werden wir die Wörter im "Zickzack" mit begrenzten Rechenschritten überprüfen.

Konstruiere M wie folgt aus M_1 und M_2 :

- M_1 erstellt für alle $w \in \Sigma^*$ nacheinander "Zickzack" Tupel wie folgt:

- (w_i, j) wobei j für Rechenschritte steht und w_i für ein Wort aus Σ^* für (w_i, j) muss gelten $(w_i, j) < (w_i', j')$ wobei das gilt wenn $i+j < i'+j'$ gilt (Zickzack)
Ksp. die ersten Tupel seien wie folgt aus: $(w_1, 1), (w_1, 2), (w_2, 1), (w_2, 3), (w_3, 2), (w_3, 1)$

- Nun kann M_2 das erstellte Wort von M_1 überprüfen. Falls w_i nach genau j Schritten von M_2 angenommen wird, schreibe w_i auf das Ausgabeband. Sonst verwirfe das Wort.

Nach dem Überprüfen des (w_i, j) Tupels, gehe zur nächsten Überprüfung über.
(Da L semientscheidbar gibt es eine TM M_2 welche L semientscheidet)

$\Rightarrow M$ zählt alle Wörter von L auf.

2. L ist semientscheidbar \Leftarrow es gibt TM M für L

Konstruiere die TM $M' : \Sigma^* \rightarrow \{w \mid w \text{ ist in } L\}$ (die L semientscheidet) wie folgt:

- Simuliere M und vergleiche jedes neue Wort w , welches M erstellt, mit der Eingabe w'

- Falls $w = w'$ gib qja aus

- Sonst gehe zum nächsten Wort. Da L unendlich lang sein kann und M keine Reihenfolge besitzt \Rightarrow kann es dazu kommen, dass M' nicht anhält.

$\Rightarrow M'$ terminiert nicht immer $\Rightarrow L$ ist semientscheidbar

Zeigen Sie: Das PKP über dem unären Alphabet $\Sigma = \{0\}$ ist entscheidbar.

Die PKP Sprache mit dem Alphabet wird aus Wörtern der folgenden Form bestehen: aus Paaren von Wörtern aus $(0^x; 0^y), \dots (0^{x_i}; 0^{y_i}) \in (0^*)^2$. Für bessere Lesbarkeit werden wir aber nur (x_i, y_i) schreiben, wobei x und y für die Anzahlen von 0 stehen.

Konstruiere eine TM M welche

Fall 1. Für alle Paare (x_i, y_i) gilt $|x_i| > |y_i|$

\Rightarrow Dann werden auch alle möglichen Wörter Kombinationen aus $x_i >$ alle möglichen Wörter Kombinationen aus y_i

\Rightarrow Es gibt keine Korrespondenz

Fall 2. Für alle Paare (x_i, y_i) gilt $|x_i| < |y_i|$

\Rightarrow Dann werden auch alle möglichen Wörter Kombinationen aus $x_i <$ alle möglichen Wörter Kombinationen aus y_i

\Rightarrow Es gibt keine Korrespondenz

Fall 3. Es gibt ein Paar (x_i, y_i) für das gilt $|x_i| = |y_i|$

$\Rightarrow x_i = y_i \Rightarrow$ Es gibt eine Korrespondenz i

Fall 4. Es gibt je mindestens ein Paar (x_i, y_i) für das gilt $|x_i| < |y_i|$ und ein anderes Paar (x_j, y_j) für das gilt $|x_j| > |y_j|$

Existiert eine Korrespondenz? Es muss gelten $|x_i| + |x_j| = |y_i| + |y_j|$ oder auch $|x_i| - |y_i| = |y_j| - |x_j|$

Für welche $u, v \in \mathbb{N}$ gilt $u(|x_i| - |y_i|) = v(|y_j| - |x_j|)$

Wahr für $u = (|y_j| - |x_j|)$ und $v = (|x_i| - |y_i|)$

\Rightarrow Es existiert eine Korrespondenz aus $|x_j| - |y_j|$ -oft das i Paar und $|y_j| - |x_j|$ -oft dem j Paar.
(Reihenfolge ist egal, da für Addition und Multiplikation das Kommutativgesetz gilt)

Bsp. Sei die Eingabe Paare $i = (0^4, 0^1)$ und $j = (0^2, 0^3)$

Aus j: $|y_j| - |x_j| = 3 - 2 = 1$ mal das Paar i

Aus i: $|x_i| - |y_i| = 4 - 1 = 3$ mal das Paar j

Korrespondenz: $1 \cdot i + 3 \cdot j = 1 \cdot (0^4, 0^1) + 3 \cdot (0^2, 0^3) = (0^4, 0^1) + (0^6, 0^9) = (0^6, 0^{10})$

Für alle möglichen Fälle gibt es immer eine Ausgabe.
(Entweder gibt es eine Korespondenz oder nicht)

=> Das PKP über dem unären Alphabet $E = \{0\}$ ist entscheidbar