3. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Grundlagen der theoretischen Informatik SoSe 2020

Wolfgang Mulzer

Abgabe bis zum 18. Mai 2020, 10 Uhr, im Whiteboard

Aufgabe 1 Potenzmengenkonstruktion *10 Punkte*

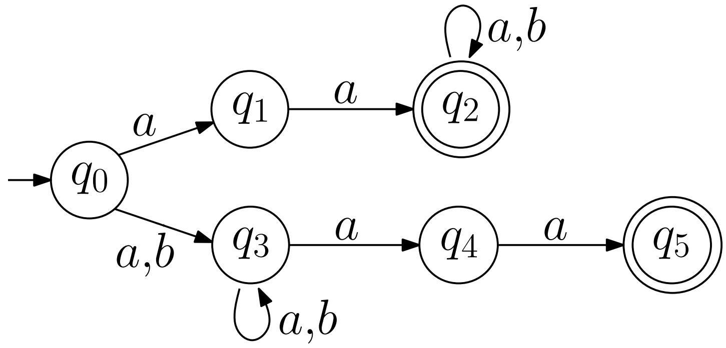
Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten M mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{a, b, c\}$, $q_0 = a$, $F = \{a\}$ und $\delta(a, 0) = \{a, b\}$, $\delta(b, 1) = \{b, c\}$, $\delta(c, 0) = \{a, c\}$, $\delta(a, 1) = \delta(b, 0) = \delta(c, 1) = \emptyset$.

(a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm für M.

(b) Benutzen Sie die Potenzmengenkonstruktion, um einen zu M äquivalenten deterministischen endlichen Automaten zu finden. Beseitigen Sie alle überflüssigen Zustände.

Aufgabe 2 Endliche Automaten *10 Punkte*

(a) Welche Sprache erkennt der folgende Automat? Begründen Sie Ihre Antwort.



(b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Konstruieren Sie einen endlichen Automaten für die Sprache, die durch den regulären Ausdruck

$$(a \cup ba)(a \cup ba)^*(b \cup ab)^* \cup (bb)^*aa^*(bb)^*$$

erzeugt wird.

Aufgabe 3 Schnitt von regulären Sprachen *10 Punkte*

Aus der Vorlesung wissen Sie: Wenn L_1 und L_2 durch deterministische endliche Automaten erkannt werden, so auch $L_1 \cup L_2$ regulär. Hier wollen wir diese Tatsache mit Hilfe einer alternativen Konstruktion beweisen.

Seien $M^1 = (\Sigma, Q^1, q_0^1, F^1, \delta^1)$ und $M^2 = (\Sigma, Q^2, q_0^2, F^2, \delta^2)$ deterministische endliche Automaten mit $L(M^1) = L_1$ und $L(M^2) = L_2$. Geben Sie einen DEA mit

Zustandsmenge $Q^1 \times Q^2$ an, der die Sprache $L_1 \cup L_2$ erkennt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Automaten.

Hinweis: Der neue Automat simuliert die Automaten M^1 und M^2 gleichzeitig.

Aufgabe 4 Halbe Sprache *freiwillig, 10 Zusatzpunkte*

Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$. Wir definieren $L_{\frac{1}{2}-}$ als die Sprache, die aus den ersten Hälften der Wörter aus L besteht, d.h.,

$$L_{\frac{1}{2}-} := \{x \mid \exists y, \text{so dass } |x| = |y| \text{ und } xy \in L\}.$$

Zeigen Sie: Wenn L regulär ist, so ist auch $L_{\frac{1}{2}-}$ regulär.

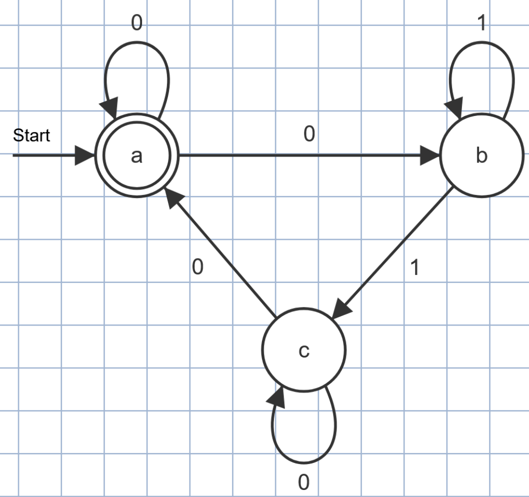
Aufgabe 1 Potenzmengenkonstruktion Von Thore Brehmer und David Ly *10 Punkte*

Betrachten Sie den nichtdeterministischen endlichen Automaten M mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{a, b, c\}$, $q_0 = a$, $F = \{a\}$ und $\delta(a, 0) = \{a, b\}$, $\delta(b, 1) = \{b, c\}$, $\delta(c, 0) = \{a, c\}$, $\delta(a, 1) = \delta(b, 0) = \delta(c, 1) = \emptyset$.

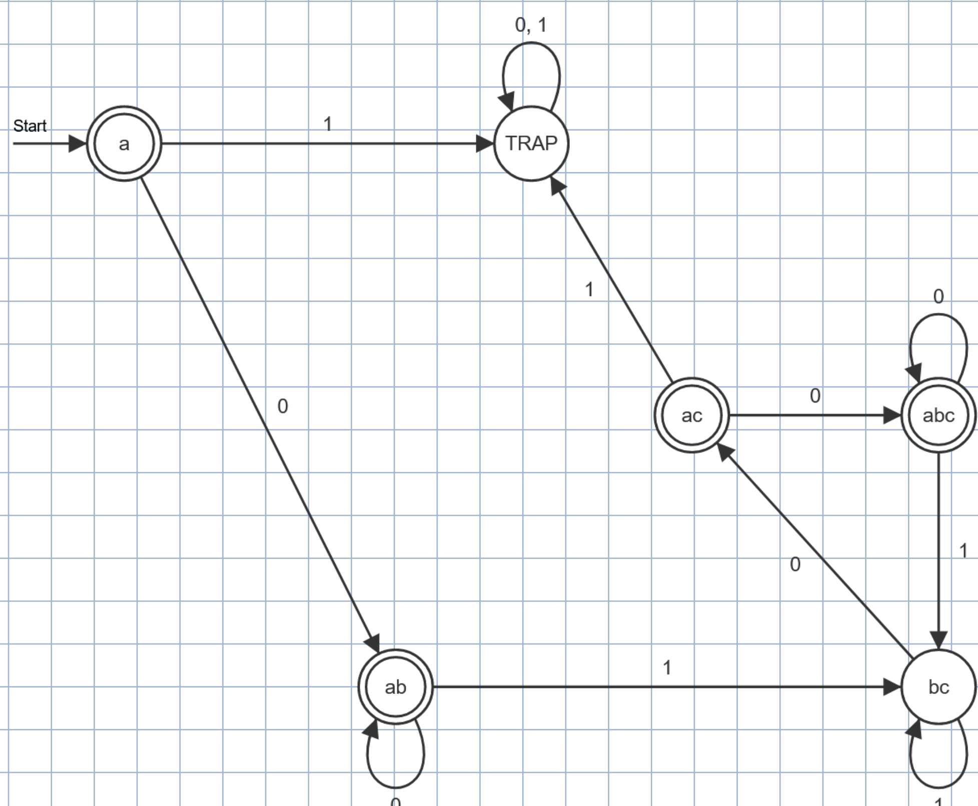
(a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm für M.

(b) Benutzen Sie die Potenzmengenkonstruktion, um einen zu M äquivalenten deterministischen endlichen Automaten zu finden. Beseitigen Sie alle überflüssigen Zustände.

a)

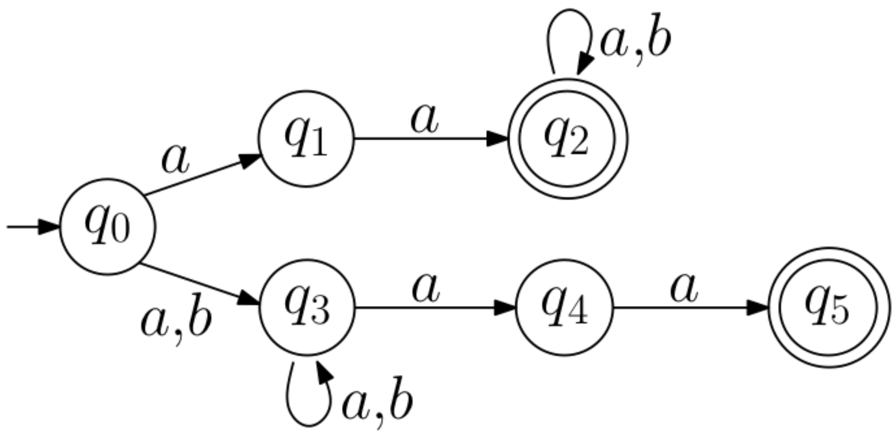


b)



Aufgabe 2 Endliche Automaten *10 Punkte*

(a) Welche Sprache erkennt der folgende Automat? Begründen Sie Ihre Antwort.



$aa(a \cap b)^* \cap (a \cap b)(a \cap b)^* aa$

$= aa(a \cap b)^* \cap (a \cap b)^+ aa$

alle wörter aus dem Alphabet $\{a, b\}$ die mit aa anfangen oder aufhören

Beg.: - von q_0 gibt es zwei wege. $\cap$

1. Zum Weg von q_0 zu q_1 zu q_2 gibt es nur die möglichkeit a und a zu benutzen: aa

1.1 in q_2 kann aber muss nicht a oder b benutzen um wieder zu q_2 zu gelangen $(a \cap b)^*$

2. von q_0 zu q_3 kann man mit a oder b gelangen. $(a \cap b)$

2.1. man kann aber muss nicht beliebig oft von q_3 zu q_3 mit a oder b gelangen. $(a \cap b)^*$

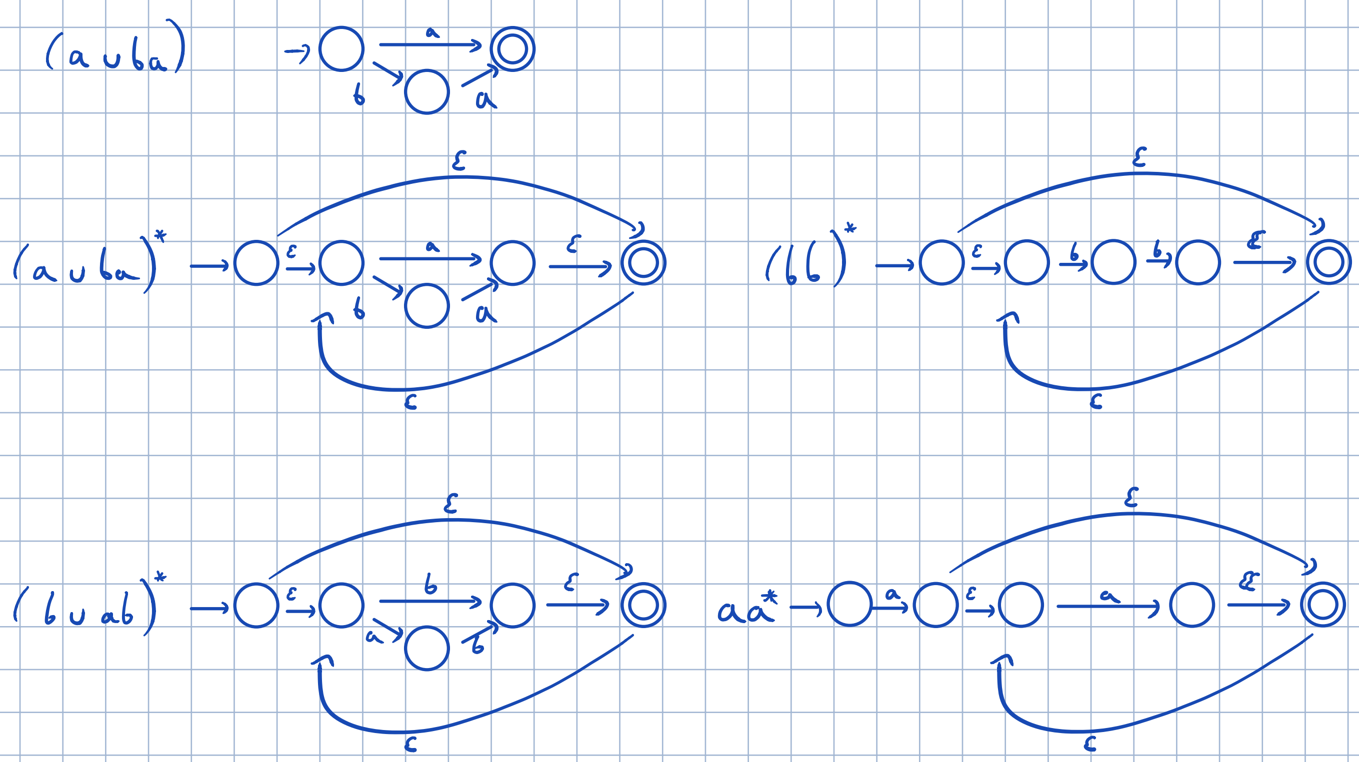
2.2 von q_3 zu q_4 zu q_5 kommt man nur mit a und a. aa

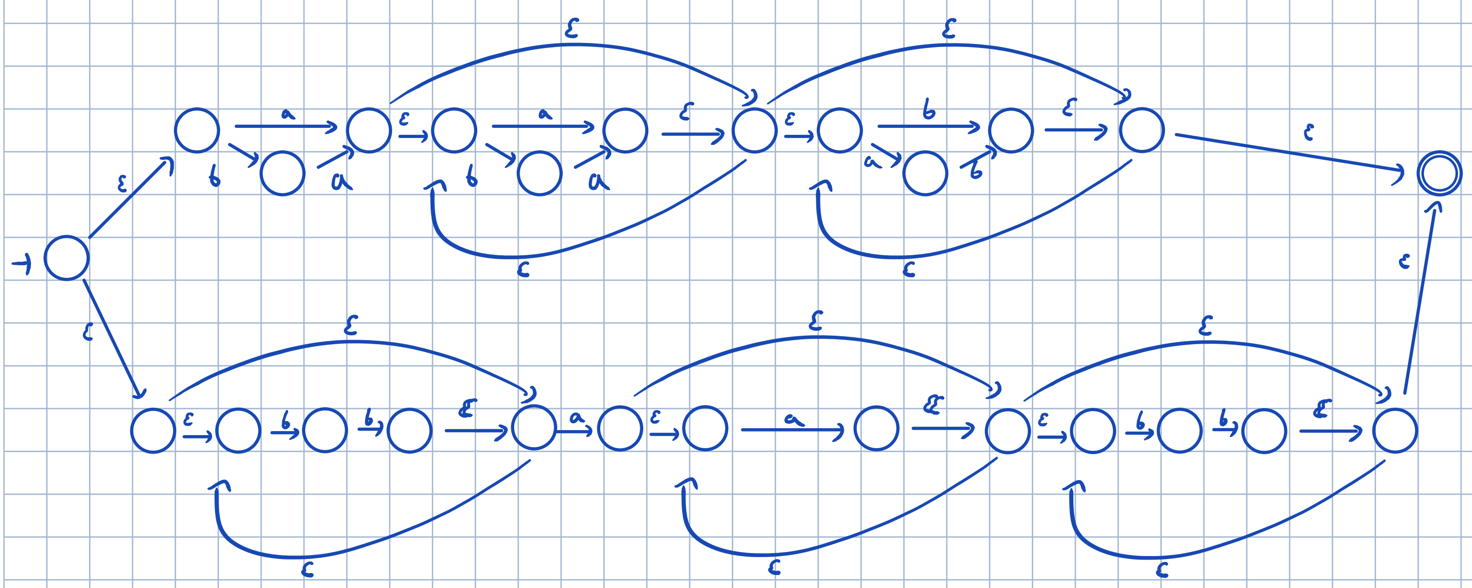
(b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Konstruieren Sie einen endlichen Automaten für die Sprache, die durch den regulären Ausdruck

$\Leftrightarrow (a \cup ba)^+ (b \cup ab)^* \cup (bb)^* a^+ (bb)^*$

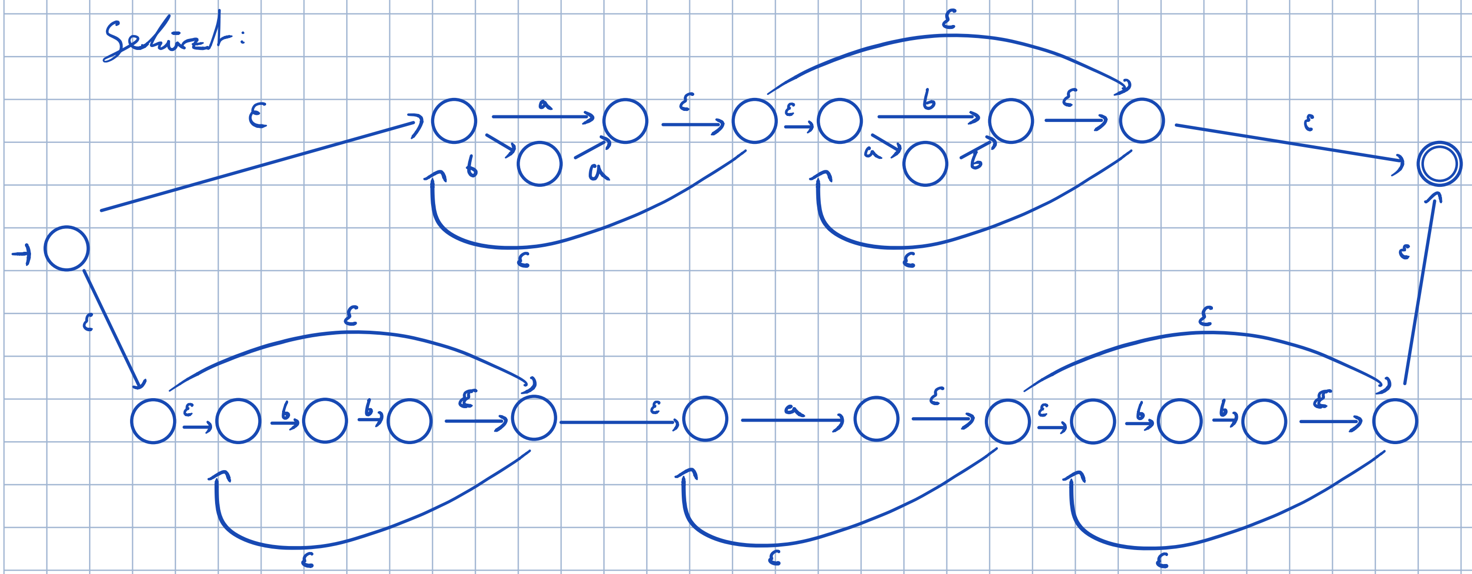
$$(a \cup ba)(a \cup ba)^*(b \cup ab)^* \cup (bb)^* aa^* (bb)^*$$

erzeugt wird.

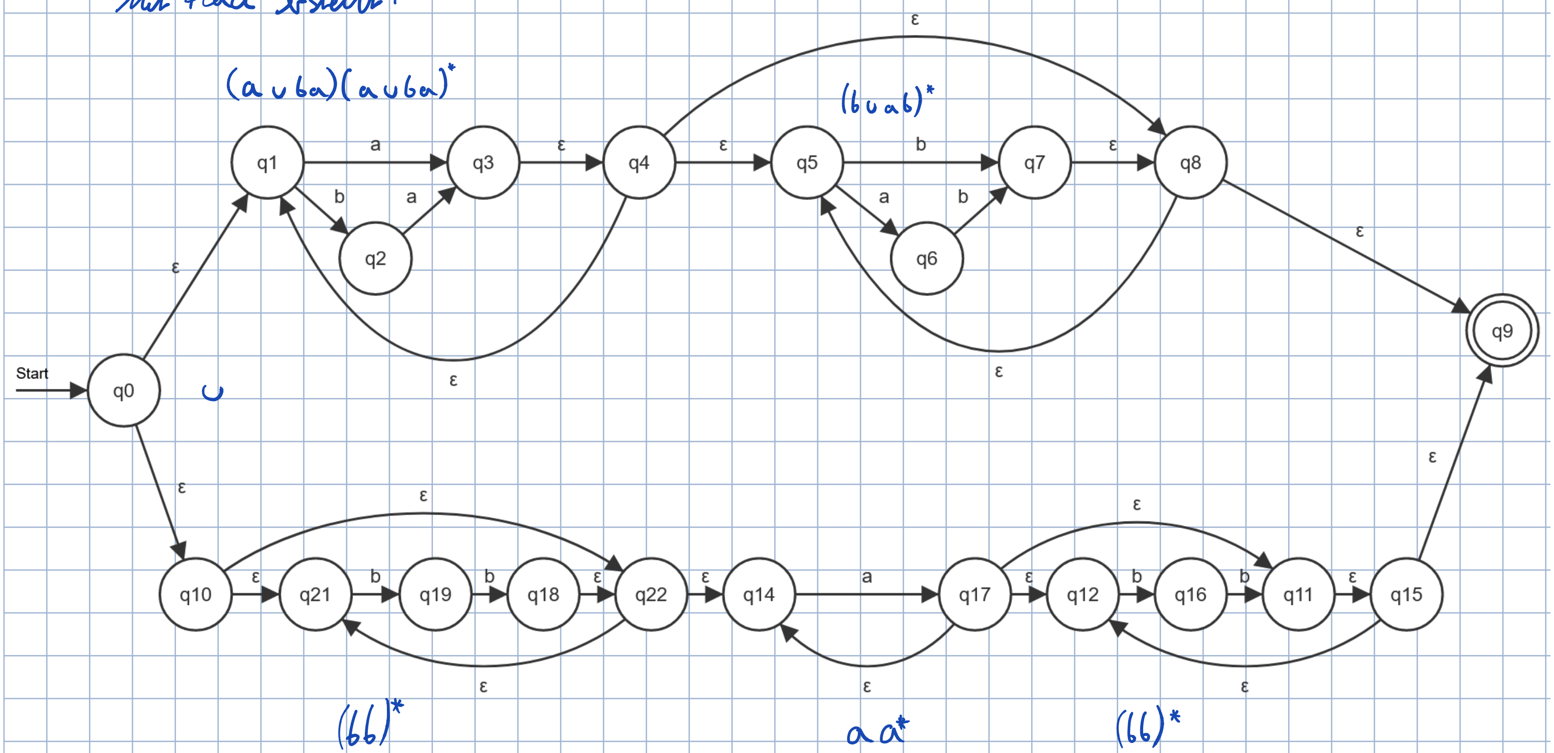




Gekürzt:



Mit Flaci erstellt:



Aufgabe 3 Schnitt von regulären Sprachen *10 Punkte*

Aus der Vorlesung wissen Sie: Wenn L_1 und L_2 durch deterministische endliche Automaten erkannt werden, so auch $L_1 \cup L_2$ regulär. Hier wollen wir diese Tatsache mit Hilfe einer alternativen Konstruktion beweisen.

Seien $M^1 = (\Sigma, Q^1, q_0^1, F^1, \delta^1)$ und $M^2 = (\Sigma, Q^2, q_0^2, F^2, \delta^2)$ deterministische endliche Automaten mit $L(M^1) = L_1$ und $L(M^2) = L_2$. Geben Sie einen DEA mit Zustandsmenge $Q^1 \times Q^2$ an, der die Sprache $L_1 \cup L_2$ erkennt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Automaten.

Hinweis: Der neue Automat simuliert die Automaten M^1 und M^2 gleichzeitig.

Für $M^1 = (\Sigma, Q^1, q_0^1, F^1, \delta^1)$ und $M^2 = (\Sigma, Q^2, q_0^2, F^2, \delta^2)$

$L_1 \cup L_2 = L_3(M^3)$

$M^3 = (\Sigma, Q^3, q_0^3, F, \delta^3)$

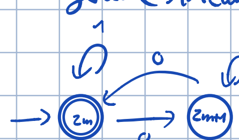
$Q^3 = Q^1 \times Q^2$ $\quad F = \{(a,b) \mid a \in F^1 \vee b \in F^2\}$

$q_0^3 = (q_0^1, q_0^2)$

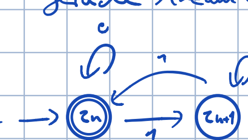
$\delta^3((p,q),a) = (((\delta^1(p,a), \delta^2(q,a)), a)$, wobei $p \in Q^1$, $q \in Q^2$, $a \in \Sigma$

Bsp.

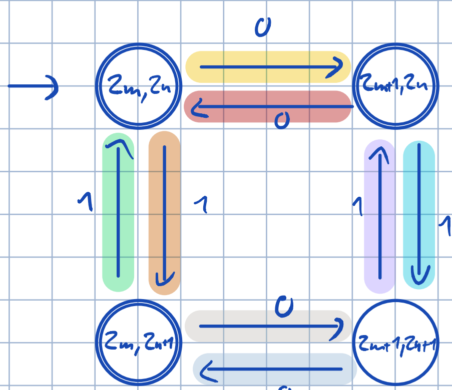
Gerade Anzahl an 0en

$L_1 =$ 

Gerade Anzahl an 1sen

$L_2 =$ 

$L_1 \cup L_2$



$\delta((z_m, z_n), 0) = ((\delta^1(z_m, 0), \delta^2(z_n, 0)), 0)$

$= ((z_{m+1}, z_n), 0)$

$\delta((z_m, z_n), 1) = ((\delta^1(z_m, 1), \delta^2(z_n, 1)), 1)$

$= ((z_m, z_{n+1}), 1)$

$$f((z_{m+1}, z_n), 1) = ((f^1(z_{m+1}, 1), f^2(z_n, 1)), 1)$$
$$= ((z_{m+1}, z_{n+1}), 1)$$

$$f((z_{m+1}, z_n), 0) = ((f^1(z_{m+1}, 0), f^2(z_n, 0)), 0)$$
$$= ((z_m, z_n), 0)$$

$$f((z_m, z_{n+1}), 1) = ((f^1(z_m, 1), f^2(z_{n+1}, 1)), 1)$$
$$= ((z_m, z_n), 1)$$

$$f((z_m, z_{n+1}), 0) = ((f^1(z_m, 0), f^2(z_{n+1}, 0)), 0)$$
$$= ((z_{m+1}, z_{n+1}), 0)$$

$$f((z_{m+1}, z_{n+1}), 1) = ((f^1(z_{m+1}, 1), f^2(z_{n+1}, 1)), 1)$$
$$= ((z_{m+1}, z_n), 1)$$

$$f((z_{m+1}, z_{n+1}), 0) = ((f^1(z_{m+1}, 0), f^2(z_{n+1}, 1)), 0)$$
$$= ((z_m, z_{n+1}), 0)$$