9. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Grundlagen der theoretischen Informatik SoSe 2020

Wolfgang Mulzer

Abgabe bis zum 29. Juni 2020, 10 Uhr, im Whiteboard

Bitte erläutern und begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 Grammatiken I *2+2+3+3 Punkte*

Geben Sie kontextfreie Grammatiken für die folgenden Sprachen an. Begründen Sie jeweils die Korrektheit Ihrer Grammatik.

(a) Die Menge aller Palindrome über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

(b) Die Sprache $\{0^n10^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

(c) Die Sprache $L = \{a^nb^m \mid n \neq m\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

(d) Die Menge aller Wörter, die doppelt so viele 1'en wie 0'en enthalten, über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

Aufgabe 2 Grammatiken II *10 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Grammatik G mit den Regeln $S \to aS \mid SS \mid aSbS \mid \varepsilon$ genau die Wörter über $\Sigma = \{a, b\}$ erzeugt, in denen jeder Präfix mindestens so viele a's wie b's enthält.

Aufgabe 3 Typ-3 und reguläre Sprachen *4+5+1 Punkte*

(a) Sei $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ ein deterministischer endlicher Automat, so dass $\varepsilon \notin L(M)$ ist. Geben Sie eine Grammatik G vom Typ 3 an, so dass $L(G) = L(M)$ ist. Begründen Sie die Korrektheit!

Hinweis: Wählen Sie $V = Q$ und $S = q_0$. Wie müssen die Produktionen aussehen?

(b) Sei $G = (\Sigma, V, S, P)$ eine Grammatik vom Typ 3, so dass $\varepsilon \notin L(G)$ ist. Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten M an, so dass $L(G) = L(M)$ ist. Begründen Sie die Korrektheit!

Hinweis: Wählen Sie $Q = V \cup \{X\}$, wobei X ein neuer Zustand ist, der nicht in V vorkommt, und setzen Sie $F = \{X\}$. Wie muss man die Übergänge und den Startzustand wählen?

(c) Folgern Sie, dass die Typ-3-Sprachen genau die regulären Sprachen sind.

Aufgabe 1 Grammatiken I Von David Sy und Thore Brehmer *2+2+3+3 Punkte*

Geben Sie kontextfreie Grammatiken für die folgenden Sprachen an. Begründen Sie jeweils die Korrektheit Ihrer Grammatik.

(a) Die Menge aller Palindrome über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

(b) Die Sprache $\{0^n10^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

(c) Die Sprache $L = \{a^nb^m \mid n \neq m\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

(d) Die Menge aller Wörter, die doppelt so viele 1'en wie 0'en enthalten, über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

a)

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$\Sigma = \{0,1\}$

$V = \{S\}$

$P: \quad S \rightarrow \varepsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0S0 \mid 1S1$

Beg. - Die Wörter $\varepsilon, 0, 1$ werden Akzeptiert.

- Für längere Wörter wird das Symbol aus Σ gleichzeitig auf die linke und rechte Seite geschrieben, so werden Palindrome garantiert.

- Der letzte Schritt einer Ableitung wäre entweder 0 oder 1, damit würden Palindrome von ungerader länge erzeugt. Oder ε, mit welcher Palindrome von gerader länge erzeugt werden.

$\Rightarrow$ G ist die Grammatig für die Sprache aller Palindrome über Σ

b)

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$\Sigma = \{0,1\}$

$V = \{S\}$

$P: \quad S \rightarrow 1 \mid 0S0$

Beg. G akzeptiert entweder das Wort 1 oder schreibt $n \in \mathbb{N}$ oft gleichzeitig links und rechts eine 0 und am Ende eine 1 in die Mitte. Also genau die gewünschte Sprache.

$\Rightarrow$ G ist die Grammatik für die gewünschte Sprache.

c)

$G = (\Sigma, U, S, P)$

$\Sigma = \{a, b\}$

$U = \{S, A, B\}$

P: $S \to A \mid B \mid aSb$

$A \to a \mid aA$

$B \to b \mid Bb$

Beg. - Wenn eine Ableitung nur auf Produktion die S (ohne A und B) zugreift werden Wörter der folgenden Form dargestellt: $\{a^n b^m \mid n = m\}$
Jedoch wollen wir Wörter für die $n \neq m$ gelten.

- Dafür sind die Produktionen A und B.
A sorgt dafür das es mehr a's als b's gibt. Also $n > m$
B sorgt dafür das es mehr b's als a's gibt. Also $n < m$
$\Rightarrow$ Zusammen folgt also daraus $n \neq m$

$\Rightarrow$ G ist die Grammatik für die gewünschte Sprache.

d)

$G = (\Sigma, U, S, P)$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$U = \{S\}$

P: $S \to 011 \mid S011 \mid 0S11 \mid 01S1 \mid 011S \mid$
$101 \mid S101 \mid 1S01 \mid 10S1 \mid 101S \mid$
$110 \mid S110 \mid 1S10 \mid 11S0 \mid 110S$

Beg. Die Wörter 011, 101 und 011 sind die drei kürzesten Wörter aus der Sprache die doppelt soviele 1'sen wie 0'en besitzt.

Die Produktion S kann diese 3 Wörter darstellen.

Außerdem kann S alle möglichen Kombinationen mit diesen 3 Wörtern und einem S, darstellen. Dadurch können alle möglichen Wörter mit doppelt soviel 1'sen wie 0'en dargestellt werden

$\Rightarrow$ G ist die Grammatik für die gewünschte Sprache.

Aufgabe 2 Grammatiken II *10 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Grammatik G mit den Regeln $S \to aS \mid SS \mid aSbS \mid \varepsilon$ genau die Wörter über $\Sigma = \{a, b\}$ erzeugt, in denen jeder Präfix mindestens so viele a's wie b's enthält.

„$\subseteq$": jede Ableitung aus G erzeugt ein Wort mit min. soviele a's wie b's über $\Sigma = \{a, b\}$

J.A. $n = 1$, wobei n für die benötigten Schritte steht, eine gültige Ableitung zu erzeugen

$S \to \varepsilon$ ✓

J.V. gilt für alle n $(|a| \geq |b|)$

J.S. z.z. für $n+1$

Fall 1.

$S \to aS_1 \overset{J.V.}{\Rightarrow}$ für S_1 gilt bereits $|a| \geq |b|$ und da mit aS_1 es ein „a" mehr geben wird, gilt offensichtlich imme noch $|a| \geq |b|$

Fall 2.

$S \to S_1 S_2 \overset{J.V.}{\Rightarrow}$ für S_1 gilt $|a| \geq |b|$ und für S_2 gilt $|a| \geq |b|$ also gilt für S_1 und S_2 $|a| \geq |b| \wedge |a| \geq |b| \Rightarrow |a| \geq |b|$

Fall 3.

$S \to aS_1 bS_1 \overset{J.V.}{\Rightarrow}$ wie Fall 2 außer das ein a und ein b hinzugefügt werden, dies ändert aber nichts daran das $|a| \geq |b|$ weiterhin gilt.

„$\supseteq$": Jedes gültige Wort α (min soviele a's wie b's über $\Sigma = \{a, b\}$) lässt sich aus G ableiten

I.A. $n=0$, wobei n für die Länge des Wortes α steht

$\alpha = \varepsilon$, $S \to \varepsilon$ ✓

I.V. $S \to^* \alpha$ gilt für alle n $(|\alpha| \leq n)$

I.S. z.z. für $n+1$

Fall 1:

α beginnt mit einem a durch $S \to aS$

$\Rightarrow \alpha = a\beta$, wobei $|\alpha| > |\beta|$ und damit auch $|\beta| \leq n$, also können wir die I.V. anwenden
$\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} S \to^* \beta \Rightarrow S \to^* \alpha$

Also: $S \to aS \to^* a\beta$

Fall 2:

α beginnt mit einem a und es folgt irgendwann ein b durch $S \to aSbS$

$\Rightarrow \alpha = a\beta b\gamma$, wobei $|\alpha| > |\beta| \wedge |\alpha| > |\gamma|$ und damit $|\beta| \leq n \wedge |\gamma| \leq n$, also können wir die I.V. anwenden
$\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} S \to^* \beta \wedge S \to^* \gamma \Rightarrow S \to^* \alpha$

Also: $S \to aSbS \to^* a\beta bS \to^* a\beta b\gamma$

Fall 3:

α beginnt nicht Bedingt mit a, durch $S \to SS$ (z.B. falls $\alpha = \varepsilon$)

$\Rightarrow \alpha = \beta\gamma$, wobei $|\alpha| > |\beta| \wedge |\alpha| > |\gamma|$ und damit $|\beta| \leq n \wedge |\gamma| \leq n$, also können wir die I.V. anwenden
$\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} S \to^* \beta \wedge S \to^* \gamma \Rightarrow S \to^* \alpha$

Also: $S \to SS \to^* \beta S \to^* \beta\gamma$

Aufgabe 3 Typ-3 und reguläre Sprachen *4+5+1 Punkte*

(a) Sei $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ ein deterministischer endlicher Automat, so dass $\varepsilon \notin L(M)$ ist. Geben Sie eine Grammatik G vom Typ 3 an, so dass $L(G) = L(M)$ ist. Begründen Sie die Korrektheit!

Hinweis: Wählen Sie $V = Q$ und $S = q_0$. Wie müssen die Produktionen aussehen?

(b) Sei $G = (\Sigma, V, S, P)$ eine Grammatik vom Typ 3, so dass $\varepsilon \notin L(G)$ ist. Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten M an, so dass $L(G) = L(M)$ ist. Begründen Sie die Korrektheit!

Hinweis: Wählen Sie $Q = V \cup \{X\}$, wobei X ein neuer Zustand ist, der nicht in V vorkommt, und setzen Sie $F = \{X\}$. Wie muss man die Übergänge und den Startzustand wählen?

(c) Folgern Sie, dass die Typ-3-Sprachen genau die regulären Sprachen sind.

a)

$G = (\Sigma, V, S, P)$, $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$

$V = Q$ δ haben folgende Form $\delta(p, \alpha) = q$ wobei $p \in Q \wedge \alpha \in \Sigma \wedge q \in Q$

$S = q_0$

$P = \{ p \to \alpha q \mid p \in Q \wedge q \in \delta(p, \alpha) \} \cup \{ p \to \varepsilon \mid p \in F \}$

Beg.: die Grammatik G beachtet alle δ aus M. Z.B. wenn der DEA ein Symbol durch eine Übergangsfunktion δ lesen würde, würde auch die Grammatik die passende Produktion P benutzen und das Symbol schreiben.

- Der DEA kann nur in einem Endzustand F enden
  Auch dies wird von der Grammatik G beachtet. Nur in einen Endzustand gibt es die Möglichkeit $p \to \varepsilon$, sonst gibt es nur die Fälle $p \to \alpha q$, wodurch die Ableitung mit einer anderen Variable q weiter gehen würde.

- G ist von Typ 3 da alle Produktionen die Formen $V \to \Sigma V$ oder $V \to \varepsilon$ haben
  $(V \to \varepsilon)$

$\Rightarrow$ G ist die Grammatik für den DEA M

6)

$M = \{\Sigma, Q, q_0, F, \delta\}$, $G = \{\Sigma, V, S, P\}$

$Q = V \cup \{X\}$

$F = \{X\}$

$q_0 = S$

da G Typ 3 ist P in folgender Form $V \to \varepsilon$, $V \to V$, $V \to \Sigma V$

sei $A \in V$ und $\alpha \in \Sigma$:
$\delta(A, \alpha) = \{B \in V \mid (A \to \alpha B) \in P\}$

$\delta(A, \alpha) = \{X\} \iff A \to \alpha$
$\delta(A, \varepsilon) = \{X\} \iff A \to \varepsilon$

Beg.: Der NEA enthält alle Variabeln V als die Zustandsmenge Q, sowie den neuen Zustand $\{X\}$ welcher auch der Endzustand von N ist.
S wird zum Startzustand q_0 von M

Nun fehlen nur noch die Übergangsfunktionen δ. Diese werden wir aus den Produktionen von G erstellen. Die Produktionen P können folgende 3 Formen annehmen, da G von Typ 3 ist: $V \to \varepsilon$, $V \to V$, $V \to \Sigma V$.

Für $V \to \Sigma V$ haben wir eine δ erstellt welche in einen weiteren V Zustand übergeht. (wichtig ist das δ durch $V \to \Sigma V$ nicht in F landen kann)

Für $V \to \varepsilon$ und $V \to \Sigma$ übergeht die erstellte δ in $\{X\}$ über. Somit landet δ in F.

Wir haben also alle Produktionen P mit δ beachtet, den Startzustand S für q_0 verwendet und benutzen alle Variabeln V in Q.

$\Rightarrow$ M ist der NEA für die Grammatik G

c) Wir haben folgende Implikationen gezeigt. (Gilt für Typ 3. Grammatiken)

1. M ist der NEA für die Grammatik G ⇒ Für einen NEA gibt es eine Grammatik

2. G ist die Grammatik für den DEA M ⇒ Für eine Grammatik gibt es einen DEA

Also zusammen: Für einen NEA gibt es eine Grammatik ⟺ Für eine Grammatik gibt es einen DEA

da gilt für einen NEA gibt es einen DEA und umgekehrt.

⇒ es gibt eine Grammatik von Typ3 ⟺ es gibt einen endlichen Automaten

⇒ Typ 3 Grammatiken und endliche Automaten sind gleich stark bzw. liegen in der gleichen Menge

⇒ Typ 3 Grammatiken sind reguläre Sprachen