11. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Grundlagen der theoretischen Informatik — SoSe 2020

Wolfgang Mulzer

Abgabe bis zum 13. Juli 2020, 10 Uhr, im Whiteboard
Dies ist das letzte Aufgabenblatt.

Bitte erläutern und begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 Chomsky Normalform *5+5 Punkte*

(a) Sei G eine kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform, und sei $w \in L(G)$ mit $n := |w| \geq 1$. Zeigen Sie, dass jede Ableitung von w genau $2n - 1$ Schritte besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie den zugehörigen Syntaxbaum.

(b) Sei G eine kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform mit b Variablen. Zeigen Sie: Wenn ein Wort $w \in L(G)$ existiert, so dass eine Ableitung von w mindestens 2^b Schritte benötigt, so ist $L(G)$ unendlich.

Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis des Pumping-Lemmas.

Aufgabe 2 Pumping-Lemma *3+3+4 Punkte*

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind.

(a) $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L = \{w\overline{w} \mid w \in \Sigma^*\}$, wobei $\overline{w}$ aus w hervor geht, indem man jede 0 durch eine 1 und jede 1 durch eine 0 ersetzt.

(b) $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L = \{0^n 1^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{a^m b^n c^{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 3 Verständnisfragen *2+2+2+2+2 Punkte*

Welche der folgenden Aussagen treffen zu? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils in einem Satz.

(a) Jede Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ kann durch eine Grammatik erzeugt werden.

(b) Jede kontextfreie Sprache hat unendlich viele Wörter.

(c) Die Vereinigung zweier kontextfreier Sprachen ist wieder kontextfrei.

(d) Wenn eine Sprache kontextsensitiv ist, dann ist sie auch regulär.

(e) Die folgende Sprache kann durch eine Grammatik erzeugt werden:

$$\{\langle M \rangle \mid \text{Die Turingmaschine } M \text{ hält nach höchstens 16534 Schritten}\}.$$

Frage zum Vorlesungs Pumping-L

$0^{n+k} 1^{2^n + l}$

$2^{(n+k)} \neq 2^n + l$

Warum $i = 2^n + 1$ und nicht $i = 2$

Aufgabe 1 Chomsky Normalform David Jay und Thore Brehmer *5+5 Punkte*

(a) Sei G eine kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform, und sei $w \in L(G)$ mit $n := |w| \geq 1$. Zeigen Sie, dass jede Ableitung von w genau $2n - 1$ Schritte besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie den zugehörigen Syntaxbaum.

(b) Sei G eine kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform mit b Variablen. Zeigen Sie: Wenn ein Wort $w \in L(G)$ existiert, so dass eine Ableitung von w mindestens 2^b Schritte benötigt, so ist $L(G)$ unendlich.

Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis des Pumping-Lemmas.

a) $n := |w| \geq 1$. z.z. jede Ableitung von w hat genau $2n-1$ Schritte

CNF darf nur Produktionen in folgender Form haben:

$S \to \varepsilon$
$A \to BC$ wobei $A, B, C \in V$ oder
$A \to \sigma$ wobei $A \in V$, $\sigma \in \Sigma$

I.A. $|w| = n = 1$

$S \to \sigma$ ✓

I.V. jede Ableitung von w hat genau $2n-1$ Schritte bzw. $2|w|-1$ Schritte

I.S. z.z. für $n+1$

$S \to AB$ (erster Schritt)

$\Rightarrow$ $w = w_1 w_2$, $w_1 \neq \varepsilon \wedge w_2 \neq \varepsilon$, da AB nicht S sind $\Rightarrow$ $|w_1| < n \wedge |w_2| < n \wedge |w_1| + |w_2| = n$

$\overset{\text{I.V.}}{=} \underbrace{1}_{S \to AB} + \underbrace{2|w_1| - 1}_{A \to^* w_1} + \underbrace{2|w_2| - 1}_{B \to^* w_2} = 2|w| - 1$

Aufgabe 2 Pumping-Lemma *3+3+4 Punkte*

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind.

(a) $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L = \{w\overline{w} \mid w \in \Sigma^*\}$, wobei $\overline{w}$ aus w hervor geht, indem man jede 0 durch eine 1 und jede 1 durch eine 0 ersetzt.

(b) $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L = \{0^n 1^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{a^m b^n c^{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

a) $\Sigma = \{0,1\}$, $L = \{w\bar{w} \mid w \in \Sigma^*\}$

- sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben
- Wähle $w = \underbrace{0^n 1^n}_{a}\ \underbrace{1^n 0^n}_{b}$. Es gilt $w \in L$ und $|w| \geq n$. (w^n bedeutet, das
- Sei eine Zerlegung $w = \alpha\beta\gamma\delta\eta$ mit $|\beta\gamma\delta| \leq n$ und $\beta\delta \neq \varepsilon$ gegeben

• Fall 1. $\beta\gamma\delta$ liegen in $0^n 1^n$ (a)

- Wähle $i = 0$. Es gilt $\alpha\beta^i\gamma\delta^i\eta = \alpha\gamma\eta \notin L$, da nun gilt $a < b$ und damit $b \neq \bar{a}$

• Fall 2. $\beta\gamma\delta$ liegen in $1^n 0^n$ (b)

- Wähle $i = 0$. Es gilt $\alpha\beta^i\gamma\delta^i\eta = \alpha\gamma\eta \notin L$, da nun gilt $a > b$ und damit $b \neq \bar{a}$

• Fall 3. $\beta\gamma\delta$ liegen in $0^n 1^n$ und $1^n 0^n$

- Also muss $\beta\gamma\delta$ in der Mitte liegen, also in $1^n 1^n$
- Wähle $i = 0$. Es gilt $\alpha\beta^i\gamma\delta^i\eta = \alpha\gamma\eta \notin L$, da nun entweder gilt a hat weniger 0'en als b 1'sen und oder b hat weniger 1'sen als a 0'en. also $b \neq \bar{a}$

da für alle Fälle gilt $w \notin L \Rightarrow L$ ist nicht kontextfrei

b) $\Sigma = \{0,1\}$, $L = \{0^n 1^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

- sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben
- Wähle $w = 0^n 1^{n^2}$. Es gilt $w \in L$ und $|w| \geq n$
- Sei eine Zerlegung $w = \alpha\beta\gamma\delta\eta$ mit $|\beta\gamma\delta| \leq n$ und $\beta\delta \neq \varepsilon$ gegeben

• Fall 1. $\beta\delta$ enthält nur 0'en

- Wähle $i = 0$. Es gilt $\alpha\beta\gamma\delta\eta = \alpha\gamma\eta \notin L$, da sich die Anzahl der 0'en aber nicht der 1'sen geändert hat.

• Fall 2. $\beta\delta$ enthält nur 1'sen

- Wähle $i = 0$. Es gilt $\alpha\beta\gamma\delta\eta = \alpha\gamma\eta \notin L$, da sich die Anzahl der 1'en aber nicht der 0'sen geändert hat.

• Fall 3. β oder δ enthält 0'en und 1'sen

- Wähle $i = 2$. Es gilt $\alpha\beta\gamma\delta\eta = \alpha\beta\beta\gamma\delta\delta\eta \notin L$, da sich die 0en und 1en mehrfach abwechseln

• Fall 4. β enthält nur 0en und δ nur 1en

- Sei $\beta = 0^k$ und $\delta = 1^l$ mit $1 \leq k + l \leq n$
- Für $i \geq 0$ ist $\alpha\beta^i\gamma\delta^i\eta = 0^{n+(i-1)l}\, 1^{n^2+(i-1)k}$
- Wähle $i = 2$

$\Rightarrow \alpha\beta^i\gamma\delta^i\eta = 0^{n+l}\; 1^{n^2+k} \notin L$, da $\overbrace{n^2+k}^{\text{Anzahl der 1en}} \neq \overbrace{(n+l)^2}^{(\text{Anzahl der 0en})^2}$, (z.z. für alle $1 \leq k+l \leq n$)

- Fall 4.1 sei $l = 0$

  $\Rightarrow k > 0 \Rightarrow n^2 + k \neq n^2 \Rightarrow$ Es gibt mehr 1sen als 0en^2

- Fall 4.2 sei $l > 0$

  $\Rightarrow n^2 + k = n^2 + 2nl + l^2 \quad | -n^2$

  $k = 2nl + l^2$, da $k \leq n \Rightarrow$ es gibt mehr 0en^2 als 1sen

da für alle Fälle gilt $w \notin L \Rightarrow L$ ist nicht kontextfrei

c) $\Sigma = \{a, b, c\}$, $L = \{a^m b^n c^{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

- sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben
- Wähle $w = a^n b^n c^{n^2}$. Es gilt $w \in L$ und $|w| \geq n$
- Sei eine Zerlegung $w = \alpha\beta\gamma\delta\eta$ mit $|\beta\gamma\delta| \leq n$ und $\beta\delta \neq \varepsilon$ gegeben

• Fall 1 $\beta\delta$ enthält nur a's oder a's und b's

- Wähle $i = 0$. Es gilt $\alpha\beta\gamma\delta\eta = \alpha\gamma\eta \notin L$, da die Anzahl von a's verändert wird, aber nicht die Anzahl von c's.

• Fall 2 $\beta\delta$ enthält nur b's

- Wähle $i = 0$. Es gilt $\alpha\beta\gamma\delta\eta = \alpha\gamma\eta \notin L$, da die Anzahl von b's verändert wird, aber nicht die Anzahl von c's.

• Fall 3 $\beta\delta$ enthält c's und b's oder nur c's

- Wähle $i = 0$. Es gilt $\alpha\beta\gamma\delta\eta = \alpha\gamma\eta \notin L$, da die Anzahl von c's verändert wird, aber nicht die Anzahl von a's.

da für alle Fälle gilt $w \notin L \Rightarrow L$ ist nicht kontextfrei

Aufgabe 3 Verständnisfragen *2+2+2+2+2 Punkte*

Welche der folgenden Aussagen treffen zu? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils in einem Satz.

(a) Jede Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ kann durch eine Grammatik erzeugt werden.

(b) Jede kontextfreie Sprache hat unendlich viele Wörter.

(c) Die Vereinigung zweier kontextfreier Sprachen ist wieder kontextfrei.

(d) Wenn eine Sprache kontextsensitiv ist, dann ist sie auch regulär.

(e) Die folgende Sprache kann durch eine Grammatik erzeugt werden:

$$\{\langle M\rangle \mid \text{Die Turingmaschine } M \text{ hält nach höchstens 16534 Schritten}\}.$$

a) Keine Ahnung... ich denke nicht.

b) Nein. Bsp. $\Sigma = \{\}$, $V = \{S\}$, $P: S \to \varepsilon$ ist eine Kontextfreiesprache die endlich lang ist. $|\{\varepsilon\}| = 1$

c) Ja, die Abschlusseigenschaft $L_1 \cup L_2$ gilt. (Skript)

Bsp. $L_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$, $L_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$ $L_1 \cup L_2 = L_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$

d) Nein, Jede Typ-1-Sprache (Kontextsensitiv) ist entscheidbar. (aus dem Skript)

Und entscheidbare Sprachen sind nicht immer regulär

e) Ja, da man für die Sprache eine entscheidbare Turing Maschiene erstellen kann (da höchstens 16534 Schritte).

Und Typ-0 Sprachen unter anderem entscheidbare Sprachen darstellen kann