6. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Grundlagen der theoretischen Informatik — SoSe 2020

Wolfgang Mulzer

Abgabe bis zum 08. Juni 2020, 10 Uhr, im Whiteboard

Bitte erläutern und begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 Simulation — *3+7 Punkte*

(a) Beschreiben Sie, wie man einen DEA durch eine Turing-Maschine simulieren kann. Beachten Sie dabei insbesondere die unterschiedlichen Akzeptierungsmodi.

(b) Beschreiben Sie, wie man eine Turing-Maschine mit beidseitig unbeschränktem Eingabe-/Arbeitsband durch eine Turing-Maschine mit einseitig unbeschränktem Band simulieren kann.

Aufgabe 2 Mehrband-Turingmaschinen — *2+8 Punkte*

Eine *Mehrband-Turingmaschine* ist eine Turingmaschine, die über k Arbeitsbänder verfügt, die jeweils einen unabhängigen Schreib-/Lesekopf haben. Hierbei ist $k \geq 2$ eine Konstante.

(a) Geben Sie eine geeignete Definition für eine Mehrband-Turingmaschine. Wie muss die Überführungsfunktion aussehen?

(b) Begründen Sie, dass Ihre Mehrband-Turingmaschine von der Turingmaschine aus der Vorlesung simuliert werden kann.

Hinweis: Arbeiten Sie mit einem erweiterten Bandalphabet. Führen Sie $2k$ Spuren auf dem Band ein, wobei die ersten k Spuren den Bandinhalt und die zweiten k Spuren die Kopfpositionen der Mehrband-TM kodieren. Simulieren Sie einen Schritt der Mehrband-TM durch konstant viele Scans der Einband-TM über das ganze Band.

Aufgabe 3 Entscheidbarkeit — *2+2+3+3 Punkte*

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{1\}$ ist entscheidbar.

(b) Wenn L_1 und L_2 entscheidbar sind, dann ist auch $L_1 L_2$ entscheidbar.

(c) Wenn L unentscheidbar ist, dann ist auch L^* unentscheidbar.

(d) Wenn L entscheidbar ist, dann ist auch L^* entscheidbar.

Aufgabe 4 Kodierte DEAs *freiwillig, 5+5 Zusatzpunkte*

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Sprachen entscheidbar sind. Dabei sei $\langle M \rangle$ eine geeignete Kodierung eines endlichen Automaten M. (Machen Sie sich klar, wie diese Kodierung aussehen könnte!)

(a) $L_\infty = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist ein DEA und } L(M) \text{ ist unendlich.}\}$; und

(b) $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ ist ein DEA und akzeptiert } \Sigma^*.\}$.

Aufgabe 1 Simulation David Sy und Thore Brehmer 3+7 Punkte

(a) Beschreiben Sie, wie man einen DEA durch eine Turing-Maschine simulieren kann. Beachten Sie dabei insbesondere die unterschiedlichen Akzeptierungsmodi.

(b) Beschreiben Sie, wie man eine Turing-Maschine mit beidseitig unbeschränktem Eingabe-/Arbeitsband durch eine Turing-Maschine mit einseitig unbeschränktem Band simulieren kann.

$\delta: Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$

$DFA = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ $\quad TM = (\Sigma, \Gamma, \diamond, Q, q_0, q_{ja}, q_{nein}, \delta)$

a)

$\Sigma = \Sigma$, $Q = Q$ – Das Eingabealphabet Σ und die Zustandmenge Q kann von der DEA für die TM ohne veränderrungen übernommen werden.

$\Gamma = \Sigma \cup \diamond$ – Das Bandsymbol enthält außerdem Σ noch das $\diamond$

$q_0 = q_0$ – Der Startzustand der DEA wird zum Stardzustand der TM

sei $q, p \in Q \wedge a \in \Sigma, \Gamma$ – Die Überfuhrüngsfunktionen von der TM können von der DEA übernommen werden, mit leichten Änderrungen.

$\delta(p, a) = q \Rightarrow \delta(p, a) \to (q, a, R)$

Die DEA hat vom Σ gelesen, die TM wird vom Γ lesen.
Die TM darf niemals das gelesene Wort überschreiben.
Die TM bewegt sich immer nach rechts.

sei $p \in Q \wedge q \in F \wedge a \in \Sigma, \Gamma$ – Für alle Akzeptierende Zustände aus dem DEA muss die δ für die TM angepasst werden. Die δ überführt beim lesen vom $\diamond$ in q_{ja}. (Damit wird getestet, ob man am Ende eines Wortes in einem Endzustand ist.)

$\delta(p, a) = q \Rightarrow \delta(p, \diamond) \to \delta(p_{ja}, \diamond, R)$

– Für die restlichen nicht beachteten δ in der TM folgt eine Überfuhrung in q_{nein}. (Die nicht beachteten δ sollten nurnoch die Überfuhrungen für die nicht Akzeptierende Zustände und den Buchstaben $\diamond$ sein)

✓

Für 2 Bänder könnte δ wie folgt aussehen:
$p, q \in Q \wedge r_1, r_2, u_1, u_2 \in \Gamma \wedge l_1, l_2 \in \{L, R, N\}$

$\delta(p, r_1, r_2) \to (q, r_1, r_2, l_1, l_2\}$

b)

Annahme: die TM ist nach links beschränkt und nach rechts unendlich lang mit $\sqcup$. (Die Begründung wäre mit einer rechts beschränkten und links unendlichen langen TM äquivalent, lässt sich aber leichter erklären wenn wir dies am Anfang bereits festlegen.)

Bsp: TM: ..$\sqcup\sqcup$aa$\sqcup\sqcup$..

$\qquad\qquad\qquad\uparrow$

TM_B: aa$\sqcup\sqcup$..

$\qquad\qquad\uparrow$

To do: Wir müssen den linke "fehlende" unendlich lange Teil des Bandes in der TM_B dargestellt bekommen.

- Eine Möglichkeit dafür wäre, das "fehlende" Band "unter" dem rechten unendlichen Band mit $\sqcup$ zu schreiben

Dazu müsste man 1. beim Start der TM_B solange nach rechts fahren bis das erste $\sqcup$ gelesen wird. Dieses wird dann mit $\sqcup\sqcup$ überschrieben. Dabei dient das zweite $\sqcup$ in $\sqcup\sqcup$ für den eigentlichen "fehlenden" unendlich langen Teil von links. Dadurch weiß nun die TM_B wann das simulierte linke und rechte unendlich lange Band anfängt.

Bsp: TM: ..$\sqcup\sqcup$aa$\sqcup\sqcup$..

$\qquad\qquad\qquad\uparrow$

TM_B: aa$\sqcup\sqcup$..

$\qquad\qquad\uparrow\ \ \sqcup$

Danach müssen nurnoch neue Zustände Q und Überführungsfunktionen δ erstellt werden. Damit die TM_B auch auf dem "unteren" rechten Band schreiben kann.

Zum Beispiel muss beachtet werden, dass wenn der Kopf der TM_B auf den Anfang des Wortes guckt und auf das linke "fehlende" Band schreiben möchte, dass die TM_B sich dann nach rechts bewegen bis sie das erste "doppelte" Symbol liest (z.B. "$\sqcup\sqcup$")

Dann befindet sich der Kopf nämlich erst auf dem simulierten linken Band.

Außerdem muss die TM_B testen können wo das Wort anfängt. Dies lässt sich leicht durch eine Makierung des ersten Symboles bewerkstelligen

Bsp: TM: ..$\sqcup\sqcup$aa$\sqcup\sqcup$..

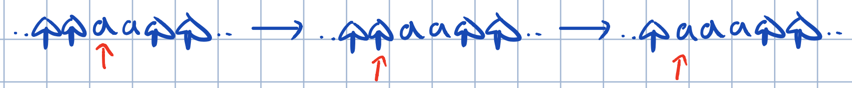
$\qquad\qquad\qquad\uparrow$

TM_B: aa$\sqcup\sqcup$..

$\qquad\qquad\uparrow\ \ \sqcup$

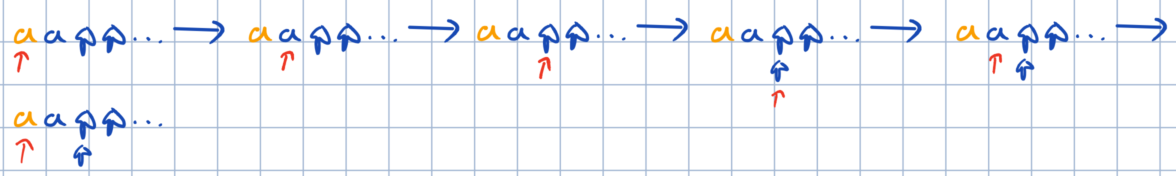
Bsp. einer Benutzung des "linken Bandes" auf einer TM im vergleich zu einer TM_B

TM:



TM_B:

1. Init



2. Nun kann auf den Simulierten Band geschrieben werden

Okay, dann braucht ihr aber neue Symbole im Bandalphabet für alle Zeichen (z.B. Blank-a, Blank-b usw.) -1P

9/10

Aufgabe 2 Mehrband-Turingmaschinen *2+8 Punkte*

Eine *Mehrband-Turingmaschine* ist eine Turingmaschine, die über k Arbeitsbänder verfügt, die jeweils einen unabhängigen Schreib-/Lesekopf haben. Hierbei ist $k \geq 2$ eine Konstante.

(a) Geben Sie eine geeignete Definition für eine Mehrband-Turingmaschine. Wie muss die Überführungsfunktion aussehen?

(b) Begründen Sie, dass Ihre Mehrband-Turingmaschine von der Turingmaschine aus der Vorlesung simuliert werden kann.

Hinweis: Arbeiten Sie mit einem erweiterten Bandalphabet. Führen Sie $2k$ Spuren auf dem Band ein, wobei die ersten k Spuren den Bandinhalt und die zweiten k Spuren die Kopfpositionen der Mehrband-TM kodieren. Simulieren Sie einen Schritt der Mehrband-TM durch konstant viele Scans der Einband-TM über das ganze Band.

a) $TM = (\Sigma, \Gamma^k, \sqcup, Q, q_0, q_{ja}, q_{nein}, \delta^k)$ wobei Γ^k und δ^k für k viele Bänder

1. Eine Mehrband-Turinmaschiene kann endlich viele Bänder besitzen.
2. Dabei besitzt jedes Band einen individuell bewegbaren Kopf.
3. Nur das erste Band hat das Eingabewort in sich stehen. Der Rest ist "leer" / mit $\sqcup$ gefüllt.
4. Die Zustandsmenge verändert sich nicht, jedoch wird für jedes Band, in der Zustandsüberführung, eine Lese-, Schreib- und Bewegsbedienung hinzugefügt. Die Zustandsüberführung wird nur ausgeführt, wenn alle Lesebedienungen erfüllt sind. Dann wird für jedes Band gleichzeitig geschrieben und bewegt.

Ein δ könnte wie folgt aussehen $p, q \in Q \wedge a, b \in \Gamma \wedge l \in \{L, R, N\}$ $\quad \delta(p, a^k) = (q, b^k, l^k)$
Die "hoch k" stehen dabei für k beliebige Elemente

b) To do:

1. Wir müssen die k-Bänder simuliert bekommen
2. Wir müssen die k-Köpfe simuliert bekommen

Begründung:

1. Für die k-Bänder können wir einfach das Bandalphabet erweitern.
   Undzwar indem wir alle möglichen Symbole aus Γ der länge k hinzufügen
   Bsp. für $k=2$: aus $\Gamma = \{a, \sqcup\}$ wird $\Gamma = \{a, \sqcup, \sqcup\sqcup, aa, a\sqcup, \sqcup a\}$
   1. Band 2. Band

2. Für die k-Köpfe können wir erneut das Bandalphabet erweitern. Undzwar indem von dem bereite erweiterten Γ nochmal alle Symbole hinzufügt, mit der veränderrung, dass für jedes der k-langen Symbole, für alle möglichkeiten eines der Zeichen im k-langen Symbol, dieses zu makieren, hinzu zu fügen
   Bsp. aus $\Gamma = \{a, \sqcup, \sqcup\sqcup, aa, a\sqcup, \sqcup a\}$ wird $\Gamma = \{a, \sqcup, \sqcup\sqcup, aa, a\sqcup, \sqcup a, a, \sqcup, aa, aa, aa, \sqcup\sqcup, \sqcup\sqcup, \sqcup\sqcup, \sqcup a, \sqcup a, \sqcup a, a\sqcup, a\sqcup, a\sqcup\}$

   Die orangene makierung zeigt in diesem Beispiel die platzierung der Köpfe an.

3. Nun da wir T verändert haben, funktioniert die in a) definierte δ-Funktion für Mehrband-TM, auch für die Einband-TM, es müssen lediglich 2 Sachen beachtet werden.

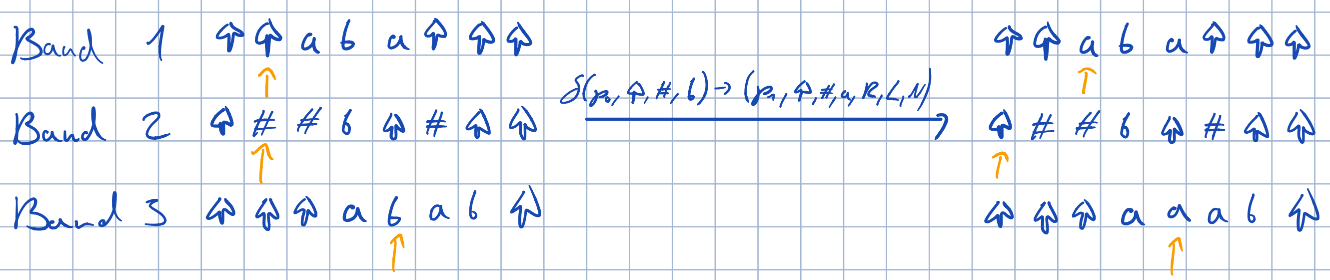
1. Woher weiß die TM welcher δ auszuführen ist?
   - Die TM kann einmal von Begin bis zum Ende des Wortes durchlaufen und sich dabei die makierten simulierten Köpfe merken (Anhand von Zuständen)
2. Wie werden die Köpfe bewegt?
   Auf den Rückweg (vom Ende bis zum Anfang) des Wortes kann δ ausgeführt werden und nach der bewegung durch δ muss das neue Symbol makiert werden.

- Das letzte was jetzt noch zu beachten ist, ist das wir beim Start der TM das wir für alle Symbole auf dem Laufband, welche $\neq$ ⇧, sind, sie wie folgt umschreiben: $a \to a⇧^k$

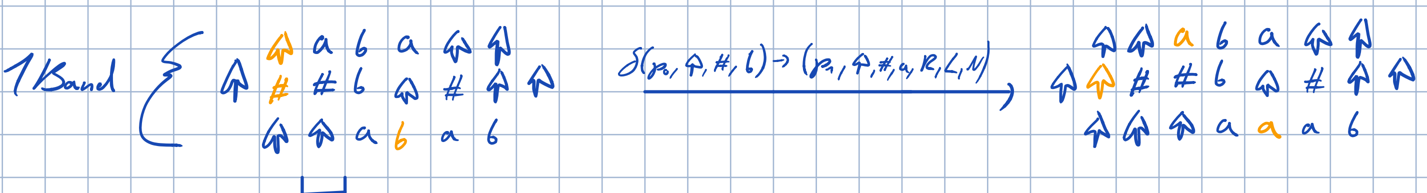
  Bsp.: ⇧ hallo ⇧ $\to$ ⇧ $\frac{h}{⇧^k}\frac{a}{⇧^k}\frac{l}{⇧^k}\frac{l}{⇧^k}\frac{o}{⇧^k}$ ⇧. wobei k die Anzahl der Bänder sind und das Zeichen dann k oft im Symbol vorkommt

  Damit wird bewirkt, dass wir δ zum Start benutzen können.

Bsp. a)



würde für b) wie folgt aussehen



wobei jeweils nur ein Symbol ist und die orange makierten Zeichen die Kopf Position angeben.

Aufgabe 3 Entscheidbarkeit *2+2+3+3 Punkte*

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{1\}$ ist entscheidbar.

(b) Wenn L_1 und L_2 entscheidbar sind, dann ist auch L_1L_2 entscheidbar.

(c) Wenn L unentscheidbar ist, dann ist auch L^* unentscheidbar.

(d) Wenn L entscheidbar ist, dann ist auch L^* entscheidbar.

a) Sei L Jede Sprache über $\Sigma = \{1\}$

$L \subseteq$ Diagonalsprache

L ist Teilmenge von der Diagonalsprache? Das bedeutet aber nicht zwangsläufig, dass L unentscheidbar ist. Beispielsweise ist jede endliche Teilmenge der Diagonalsprache regulär und damit entscheidbar. -1.5P

$\Rightarrow$ L ist nicht entscheidbar

b) Wenn L_1 entscheidbar $\Rightarrow$ Es gibt eine TM $M_1(w_1) = \begin{cases} 1, \text{ falls } w_1 \in L_1 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$

Wenn L_2 entscheidbar $\Rightarrow$ Es gibt eine TM $M_2(w_2) = \begin{cases} 1, \text{ falls } w_2 \in L_2 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$

Sei M_3 die TM für L_3 und $w_3 \in L_3$

$\Rightarrow$ $w_3 = w_1 \circ w_2$

- Zerlege das Wort w_3 in zwei Wörter w_1 und w_2 und teste für alle Möglichkeiten:
- M_3 hat 2 Bänder. Auf dem 1. liegt w_1 und auf dem 2. liegt w_2
- M_3 simuliert für w_1 M_1 und für w_2 M_2.
- M_3 akzeptiert, falls M_1 und M_2 akzeptieren, sie verwirft, falls M_1 oder M_2 verwerfen. ✓

$\Rightarrow$ M_3 ist entscheidbar, falls M_1 und M_2 entscheidbar sind

L3 L1 L2

c) L ist unentscheidbar

$L \leq L^*$ Aha. Und wie soll diese Reduktion aussehen?

$\Rightarrow$ L^* unentscheidbar (Lemma Reduktionen aus Vorlesung 13) $\square$

Die Aussage ist falsch. -3P

d) Wenn L entscheidbar $\Rightarrow$ Es gibt eine TM $M(w) = \begin{cases} 1, \text{ falls } w \in L \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$

Sei M' die TM für L^* und $w' \in L^*$

$\Rightarrow w' = w_1 \circ \ldots \circ w_n$, wobei $w_i \in L$

- M' besitzt zwei Bänder.
- Teste für(i=0; i ≤ länge des Wortes; i++;) oder bis M' akzeptiert folgendes:
- w' wird in i Wörter zerlegt. Falls M nicht akzeptiert probiere alle anderen Möglichkeiten aus.:
- Vom 1. Band wird nach einander w' durch gegangen und das w_i zum 2. Band kopiert, falls das 2 Band leer ist.
- Im zweiten Band wird (M, w_i) simuliert. Wenn M das Wort akzeptiert wird das Band geleert und das nächste Wort w_i aus w' kann aufs Band kopiert werden.
- M' akzeptiert falls alle Wörter w_i aus w' von M akzeptiert wurden bzw. M' akzeptiert $\Leftrightarrow$ M akzeptiert
- M' verwirft sonst bzw. M' verwirft $\Leftrightarrow$ M verwirft

$\Rightarrow$ M' ist entscheidbar falls M entscheidbar ist

L' L

5.5/10