Von Thore Brehmer und David Sey

Aufgabe 1 Reguläre Sprachen *10 Punkte*

Eine Sprache heißt *regulär*, falls sie sich durch einen regulären Ausdruck darstellen lässt.

(a) Zeigen Sie: Jede endliche Sprache ist regulär.

sei L eine beliebige Sprache und Σ das Alphabet

sei $w_1 \ldots w_i \in L$ die Wörter von der Sprache

für die Wörter $w_1, \ldots, w_k$ gilt: $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma \Rightarrow a_1 \circ \ldots \circ a_k = w_k$ da die Wörter aus dem Alphabet bestehen

$\Rightarrow$ die Wörter können als regulärer Ausdruck dargestellt werden.

Für L gilt: $w_1 \circ \ldots \circ w_k = L$, da es die Wörter der Sprache sind

$\Rightarrow$ Jede endliche Sprache ist regulär. $\square$

(b) Sei Σ ein Alphabet und $w = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ ein Wort über Σ. Die *Umkehrung* von w, w^R, ist definiert als $w^R = \sigma_n\sigma_{n-1}\ldots\sigma_1$. So ist zum Beispiel $\text{haus}^R = \text{suah}$, $\text{blatt}^R = \text{ttalb}$, $\text{a}^R = \text{a}$ und $\varepsilon^R = \varepsilon$. Die Umkehrung einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$.

Zeigen Sie: Ist L eine reguläre Sprache, so ist auch L^R regulär. Geben Sie dazu einen detaillierten Beweis, der strukturelle Induktion über den regulären Ausdruck für L verwendet.

Geg.

$a^R = a$

$\varepsilon^R = \varepsilon$

Weitere Umformungen

$\emptyset^R = \emptyset$

$(\alpha \cup \beta)^R = (\alpha^R \cup \beta^R)$

$(\alpha \circ \beta)^R = (\beta^R \circ \alpha^R)$

$(\alpha^*)^R = (\alpha^R)^*$

IA. $L(\varepsilon^R) = L(\varepsilon) = L(\varepsilon)^R$

$L(a^R) = L(a) = L(a)^R$

$L(\emptyset^R) = L(\emptyset) = L(\emptyset)^R$

reguläre Ausdruck — Umkehrung — Reguläre Sprache ✓

J.V. $L(\alpha^R) = L(\alpha) = L(\alpha)^R$

J.S.

Fall 1. $L((\alpha \circ \beta)^R) = L(\beta^R \circ \alpha^R) = L(\beta^R) \circ L(\alpha^R) \overset{\text{J.V.}}{=} L(\beta)^R \circ L(\alpha)^R$

r.A $\circ$ r.A = r.A. ✓

Fall 2. $L((\alpha \cup \beta)^R) = L(\alpha^R \cup \beta^R) = L(\alpha^R) \cup L(\beta^R) \overset{\text{J.V.}}{=} L(\alpha)^R \cup L(\beta)^R$

r.A $\cup$ r.A = r.A ✓

Fall 3. $L((\alpha^*)^R) = L((\alpha^R)^*) = L(\alpha^R)^* \overset{\text{J.V.}}{=} (L(\alpha)^R)^*$

(r.A)* = r.A. ✓

Aufgabe 2 Deterministische endliche Automaten *10 Punkte*

Geben Sie deterministische endliche Automaten für die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Erklären Sie Ihren Automaten jeweils in einem Satz.

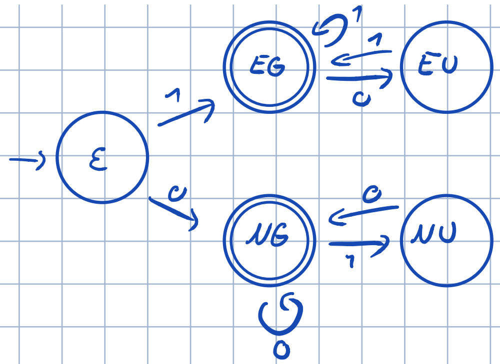
(a) Die Menge aller Wörter, deren erster und letzter Buchstabe gleich sind.

(b) Die Menge aller Wörter, deren vorletzer Buchstabe eine 1 ist.

(c) Die Menge aller Wörter, die 0110 als Teilwort enthalten.

(d) Die Menge aller durch drei teilbaren Zahlen (in Binärdarstellung). Das leere Wort ε ist nicht durch drei teilbar.

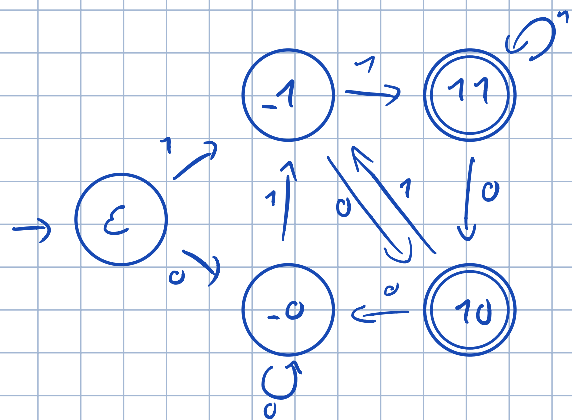
a)



Die Abkürzungen EG, EU, NG, NU stehen für:
Eins gleich, Eins ungleich, Null gleich und Null ungleich

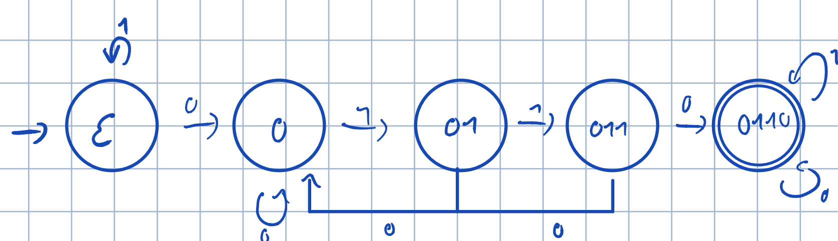
Bei EG werden Wörter folgender Form erwartet 1.....1
Bei NU " ______ " 0...0

b)



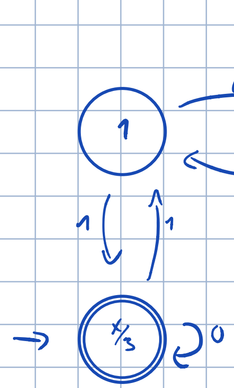
Der Automat achtet nur auf die letzten beiden Buchstaben des Wortes

c)



Sollte selbst erklärend sein

d)



Der Zustand $\frac{x}{3}$ sollte selbsterklärend sein. Die Zustände 1 und 2 sind Buchstaben die nicht Teiler von 3 sind

Aufgabe 3 NEAs mit mehreren Startzuständen *10 Punkte*

In der Vorlesung haben wir definiert, dass nichtdeterministische endliche Automaten genau einen Startzustand besitzen. In dieser Aufgabe wollen wir die Variante betrachten, dass es *mehrere* Startzustände geben kann.

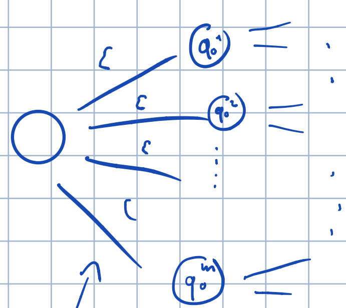
(a) Geben Sie eine sinnvolle Definition für nichtdeterministische endliche Automaten mit mehreren Startzuständen. Erklären Sie insbesondere, wie die Sprache definiert ist, die von einem solchen Automaten erkannt wird.

(b) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Zeigen Sie: Es existiert ein NEA mit genau einem Startzustand, der L akzeptiert, genau dann, wenn es einen NEA mit mehreren Startzuständen gibt, der L akzeptiert.

a) Als erstes werden die Startzustände wie folgt definiert $p_0 \subseteq Q$

Danach erstellt man ein neuen Zustand p_0 und verbindet ihn mit allen q_0 mit einen ε-Übergang. Dann mach p_0 zum "richtige" Startzustand.

$$M = (\Sigma, Q \cup p_0, p_0, \delta \cup \underbrace{\{p_0, q_0\}}_{\text{Für alle } q_0}, F\}$$



Mehrere "Startzustände"

(b) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Zeigen Sie: Es existiert ein NEA mit genau einem Startzustand, der L akzeptiert, genau dann, wenn es einen NEA mit mehreren Startzuständen gibt, der L akzeptiert.

$\underbrace{NEA^1}_{\text{ein } q_0} \Leftrightarrow \underbrace{NEA^n}_{\text{mehre } q_0}$

$NEA^1 \Rightarrow NEA^n$

sei $M(L) = L$ und $M = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$

$\Rightarrow$ $N(L) = L$, wobei $N = (\Sigma, Q, q^0 \subseteq Q, \delta, F)$

$NEA^n \Rightarrow NEA^1$

sei $N(L) = L$ und $N = (\Sigma, Q, q^0 \subseteq Q, \delta, F)$

$\Rightarrow$ $M(L) = L$, wobei $M = (\Sigma, Q, p_0, \gamma, F)$ und $\gamma = (\delta / q_0(M)) \cap (p_0, q_0(N))$