7. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Grundlagen der theoretischen Informatik — SoSe 2020

Wolfgang Mulzer

Abgabe bis zum 15. Juni 2020, 10 Uhr, im Whiteboard

Bitte erläutern und begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 Entscheidbarkeit I — *3+3+4 Punkte*

Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen, ob sie entscheidbar ist. Bestimmen Sie auch für jede der folgenden Sprachen, ob sie rekursiv aufzählbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch Angabe einer entsprechenden Turingmaschine oder einer geeigneten Reduktion.

(a) $L_1 = \{ (0^k, \langle M \rangle, w) \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ nach höchstens } k \text{ Schritten.} \}$

(b) $L_2 = \{ (0^k, \langle M \rangle, w) \mid M \text{ hat } w \text{ nach } k \text{ Schritten noch nicht akzeptiert.} \}$

(c) $L_3 = \{ (0^k, \langle M \rangle, w) \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ nach mindestens } k \text{ Schritten.} \}$

Aufgabe 2 Halteproblem — *5+5 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie einen Beweis für die Unentscheidbarkeit des Halteproblems gesehen, der durch eine Reduktion von der Universalsprache funktioniert. In dieser Aufgabe soll ein alternativer Beweis betrachtet werden.

Nehmen Sie an, es existiert eine Turing Maschine M, die das Halteproblem entscheidet. Betrachten Sie die Turing-Maschine X, die folgendermaßen arbeitet:

Eingabe: Die Kodierung $\langle Y \rangle$ einer Turingmaschine.

Programm für X: Führe M mit der Eingabe $(\langle Y \rangle, \langle Y \rangle)$ aus. Wenn M die Eingabe akzeptiert, beginne eine Endlosschleife. Wenn M die Eingabe verwirft, gehe in den Zustand q_{ja}.

(a) Beschreiben Sie, was passiert, wenn wir die Turing-Maschine X mit der Eingabe $\langle X \rangle$ ausführen.

(b) Folgern Sie, dass das Halteproblem nicht entscheidbar ist. Beschreiben Sie dabei genau die einzelnen Schritte des logischen Arguments und an welcher Stelle der indirekte Beweis zum Einsatz kommt.

Aufgabe 3 Reduktionen — *5+5 Punkte*

(a) Beweisen Sie, dass die Relation $\leq$ transitiv ist (d.h., wenn für Sprachen L_1, L_2 und L_3 gilt: $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3$, dann ist auch $L_1 \leq L_3$).

(b) Beweisen Sie: Ist L_1 entscheidbar und L_2 eine beliebige Sprache mit $L_2 \neq \emptyset$, $L_2 \neq \Sigma^*$, dann gilt $L_1 \leq L_2$.

Aufgabe 4 Entscheidbarkeit II *freiwillig, 10 Zusatzpunkte*

Betrachten Sie die folgenden Sprache L:

$$\{1^n \mid \text{die Dezimaldarstellung von } \pi = 3.1415\ldots \text{ enthält } n \text{ aufeinanderfolgende Sechsen}\}.$$

Zeigen Sie, dass L entscheidbar ist. Was lernen Sie daraus über die Definition von Berechenbarkeit?

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, dass wenn das Wort 1^n in L ist, auch alle Wörter 1^m für $m \leq n$ in L liegen müssen.

Aufgabe 1 Entscheidbarkeit I Von David [illegible] und Thore Brehmer *3+3+4 Punkte*

Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen, ob sie entscheidbar ist. Bestimmen Sie auch für jede der folgenden Sprachen, ob sie rekursiv aufzählbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch Angabe einer entsprechenden Turingmaschine oder einer geeigneten Reduktion.

(a) $L_1 = \{ (0^k, \langle M \rangle, w) \mid M$ akzeptiert w nach höchstens k Schritten. $\}$

(b) $L_2 = \{ (0^k, \langle M \rangle, w) \mid M$ hat w nach k Schritten noch nicht akzeptiert. $\}$

(c) $L_3 = \{ (0^k, \langle M \rangle, w) \mid M$ akzeptiert w nach mindestens k Schritten. $\}$

a)

Sei M_1 die TM für L_1.

Eingabe: $(0^k, \langle M \rangle, w)$

Funktion von M_1: Für $1, 2, \dots k$

- Simuliere M auf die Eingabe w für k Schritte
  - Falls M dabei q_{ja} erreicht, akzeptiere auch für M_1 mit q_{ja}
  - sonst, gehe zum nächsten Schleifen durchgang
- Wenn M für keinen Durchgang $1, 2, \dots k$ akzeptiert hat, hat M_1 auch nicht akzeptiert. In diesem Fall soll M_1 in q_{nein} Enden.

$\Rightarrow$ M_1 terminiert, da sie $k$mal höchstens k Durchgänge für M simuliert

$\Rightarrow$ M_1 ist entscheidbar

$\Rightarrow$ M_1 ist rekursiv abzählbar

✓

L1. Eine Turingmaschine kann nicht entscheidbar sein, das ist eine Eigenschaft von Sprachen.

b)

Sei M_2 die TM für L_2.

Eingabe: $(0^k, \langle M \rangle, w)$

Funktion von M_2: Für $1, 2, \dots k$

- Simuliere M auf die Eingabe w für k Schritte
  - Falls M dabei q_{ja} erreicht, verwerfe für M_2 (q_{nein})
  - Falls M dabei q_{nein} erreicht, gehe zum nächsten Schleifen durchgang
- Wenn M für keinen Durchgang $1, 2, \dots k$ akzeptiert hat, hat M_2 noch nicht verworfen. In diesem Fall soll M_2 in q_{ja} Enden.

$\Rightarrow$ M_2 terminiert, da sie k mal höchstens k Durchgänge für M simuliert

$\Rightarrow$ M_2 ist entscheidbar

$\Rightarrow$ M_2 ist rekursiv abzählbar

L2

c)

Sei M_3 die TM für L_3.

Eingabe: $(0^k, \langle M \rangle, w)$

1. Funktion von M_3: Für $1, 2, \dots k$

- Simuliere M auf die Eingabe w für k Schritte
  - Falls M dabei q_{ja} erreicht, verwerfe für M_3 (q_{nein})
  - Falls M dabei q_{nein} erreicht, gehe zum nächsten Schleifendurchgang
- Wenn M für keinen Durchgang $1, 2, \dots k$ akzeptiert hat, hat M_2 noch nicht verworfen. In diesem Fall gehe zur 2. Funktion

2. Funktion von M_3: Für $k, k+1, \dots \infty$

- Simuliere M auf die Eingabe w für k Schritte
  - Falls M dabei q_{ja} erreicht, akzeptiere für M_3 (q_{ja})
  - Falls M dabei q_{nein} erreicht, gehe zum nächsten Schleifendurchgang
- Es besteht die möglichkeit, dass M_3 nie anhält.
  Bsp. für $w \notin M$ würde M_3 in der 2. Funktion landen und immer weiter mit einem größeren k testen.
  Da $w \notin M$ wird M_3 jedoch nie ein k finden

$\Rightarrow$ M_3 terminiert nicht, da es zu unendlich Durchläufe kommen kann

$\Rightarrow$ M_3 ist semientscheidbar

$\Rightarrow$ M_3 ist rekursiv abzählbar

Warum ist M3 nicht entscheidbar? Reduktion angeben! -2P

8/10

Aufgabe 2 Halteproblem *5+5 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie einen Beweis für die Unentscheidbarkeit des Halteproblems gesehen, der durch eine Reduktion von der Universalsprache funktioniert. In dieser Aufgabe soll ein alternativer Beweis betrachtet werden.

Nehmen Sie an, es existiert eine Turing Maschine M, die das Halteproblem entscheidet. Betrachten Sie die Turing-Maschine X, die folgendermaßen arbeitet:

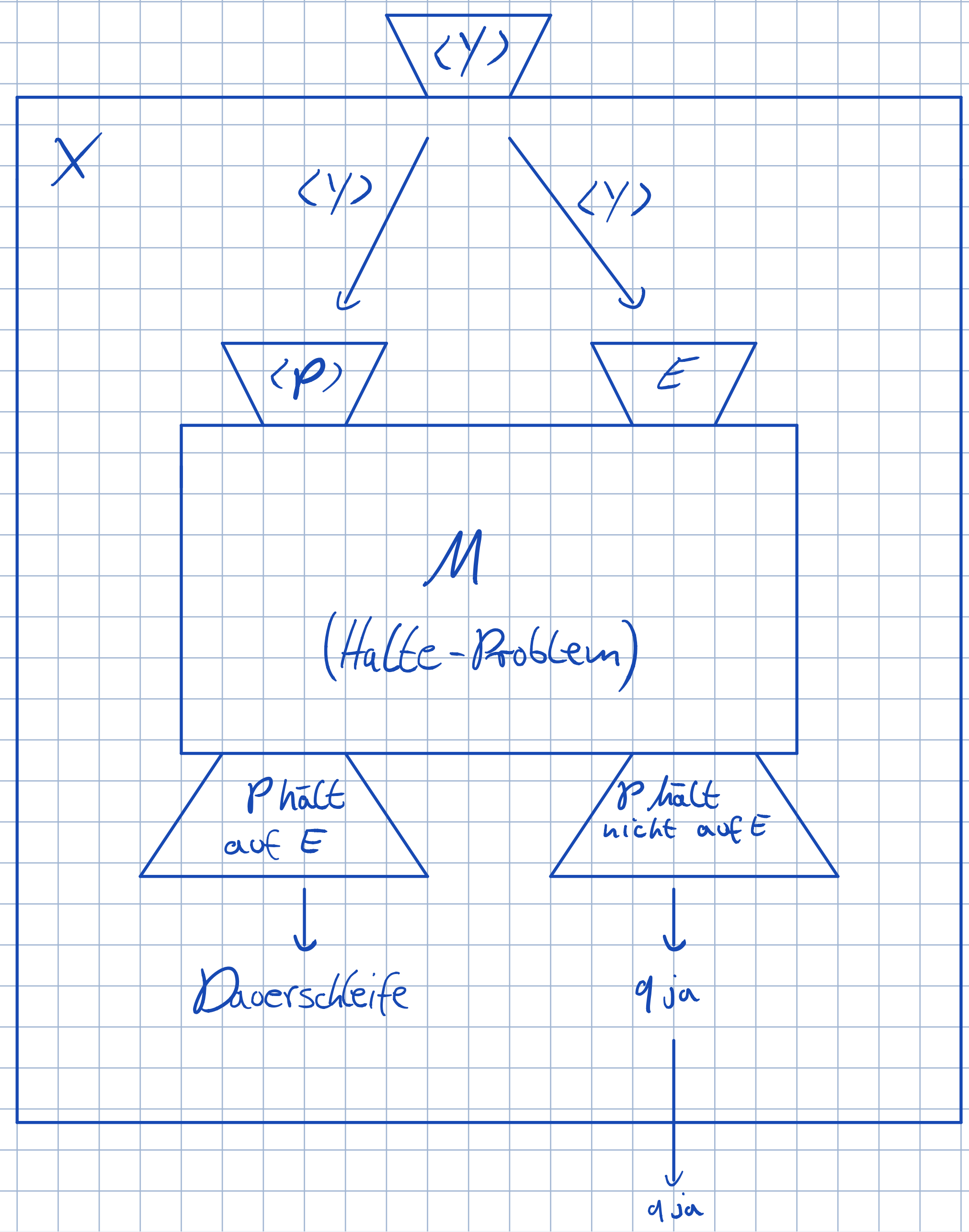
Eingabe: Die Kodierung $\langle Y \rangle$ einer Turingmaschine.

Programm für X: Führe M mit der Eingabe $(\langle Y \rangle, \langle Y \rangle)$ aus. Wenn M die Eingabe akzeptiert, beginne eine Endlosschleife. Wenn M die Eingabe verwirft, gehe in den Zustand q_{ja}.

(a) Beschreiben Sie, was passiert, wenn wir die Turing-Maschine X mit der Eingabe $\langle X \rangle$ ausführen.

(b) Folgern Sie, dass das Halteproblem nicht entscheidbar ist. Beschreiben Sie dabei genau die einzelnen Schritte des logischen Arguments und an welcher Stelle der indirekte Beweis zum Einsatz kommt.

Die TM X sieht wie folgt aus:



a/6)

⇒ Für die Eingabe ⟨x⟩ in X kann es zum folgenden 2 Fällen und Widersprüchen:

Fall 1. M entscheidet das X mit der Eingabe ⟨x⟩ hält.
Darauf folgt eine Dauerschleife.
Aber warte!
Wie kann M für (⟨x⟩,⟨x⟩) entscheiden, das sie hält,
obwohl sich X,⟨x⟩ in einer Dauerschleife befindet.

Fall 2. M entscheidet das X mit der Eingabe ⟨x⟩ nicht hält.
Darauf folgt eine Ausgabe qja
Aber warte!
Wie kann M für (⟨x⟩,⟨x⟩) entscheiden, das sie nicht hält,
obwohl sich X,⟨x⟩ terminiert hat (gehalten hat)

Für beide Fälle folgt also ein Widerspruch.
(Der Beweis ist also an den Stellen und)

⇒ Die TM M bzw. das Halte-Problem ist nicht entscheidbar

Aufgabe 3 Reduktionen *5+5 Punkte*

(a) Beweisen Sie, dass die Relation $\leq$ transitiv ist (d.h., wenn für Sprachen L_1, L_2 und L_3 gilt: $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3$, dann ist auch $L_1 \leq L_3$).

(b) Beweisen Sie: Ist L_1 entscheidbar und L_2 eine beliebige Sprache mit $L_2 \neq \emptyset$, $L_2 \neq \Sigma^*$, dann gilt $L_1 \leq L_2$.

a) z.z. $L_1 \leq L_2 \wedge L_2 \leq L_3 \Rightarrow L_1 \leq L_3$

z.z. Es gibt ein berechenbare f für $L_1 \leq L_3$

geg. f_{12}, für welches gilt berechenbarkeit gilt. Also $w \in L_1 \Leftrightarrow f_{12}(w) \in L_2$

f_{23}, für welches gilt berechenbarkeit gilt. Also $w \in L_2 \Leftrightarrow f_{23}(w) \in L_3$

- Nun definiere $f_{13}(w) := f_{23}(f_{12}(w))$

f_{13} ist berechenbar, da gilt f_{23} und f_{12} sind berechenbar.

Also $w \in L_1 \Leftrightarrow w' = f_{12}(w) \in L_2 \Leftrightarrow f_{23}(w') \in L_3$

" ——— " $\Leftrightarrow f_{23}(f_{12}(w)) \in L_3$

" ——— " $\Leftrightarrow f_{13}(w) \in L_3$

b)

fehlt -5P

5/10