1) Περίληψη Βασικών Γνώσεων από ΨΕΣ

- Θεώρημα Shannon: $\frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_m$
- Z Transform: $|d_k| < 1 \Rightarrow stability$
- Διαφορά μεταξύ IIR και FIR systems: Να μην έχει ανάδραση
  (Το IIR έχει ανάδραση $\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$)
- IIR : $y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=1}^{M} b_k x[n-k]$ $\quad h[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k a_k^n u[n]$
- FIR: $y[n] = \sum_{k=1}^{M} b_k x[n-k]$ $\quad h[n] = b_n, 0 \leq n \leq M$
- Απόκριση συχνότητας του ολικού συστήματος συνεχούς χρόνο:
  $\Omega = \frac{\omega}{T_s}$ (Ω -> continuous, ω -> discrete)
  $H_c(j\Omega) = H_d(j\Omega T_s) \, για \, |\Omega| \leq \frac{\pi}{T_s}, \; με \, T_s \; sampling\, rate$
  $H_d(e^{j\omega}) = H_c(e^{\frac{j\omega}{T_s}}) \, για \, |\omega| \leq \pi \; (περιοδικό)$
  $h_d[n] = T_s h_c(n T_s)$

2) Fourier Ανάλυση Σημάτων Διακριτού Χρόνου: DTFT

- Fourier Transform $X_c(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_c(t)e^{-j\Omega t}dt$
- DTFT: $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n]=A\cos(\omega_0 n+\phi)=\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}+\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

$$y[n]=\frac{A}{2}[H(e^{j\omega_0})e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}+H(e^{-j\omega_0})e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}]$$

h[n] = πραγματικό σήμα

$$y[n]=A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n+\phi+\theta)$$

Αποκριση Μονιμης Καταστασης & Μεταβατικη

$x[n]=e^{j\omega n}u[n]$ → h[n] → $y[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}, & n\geq 0\end{cases}$

$$y[n]=\left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}-\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$

$$=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}-\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$

Μονιμη: $\boxed{y_{ss}[n]=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}}$

Μεταβατικη: $\boxed{y_t[n]=-\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n}}$

$$|y_t[n]|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|h[k]|$$

- l_1 νόρμα: $\|x\|_1=\sum_n |x[n]|$
- l_2 νόρμα: $\|x\|_2=\sqrt{\sum_n |x[n]|^2}$

TABLE 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})=\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})=j\mathcal{J}m\{X(e^{j\omega})\}$
The following properties apply only when $x[n]$ is real:	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega})=X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega})=-X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$\|X(e^{j\omega})\|=\|X(e^{-j\omega})\|$ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\sphericalangle X(e^{j\omega})=-\sphericalangle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

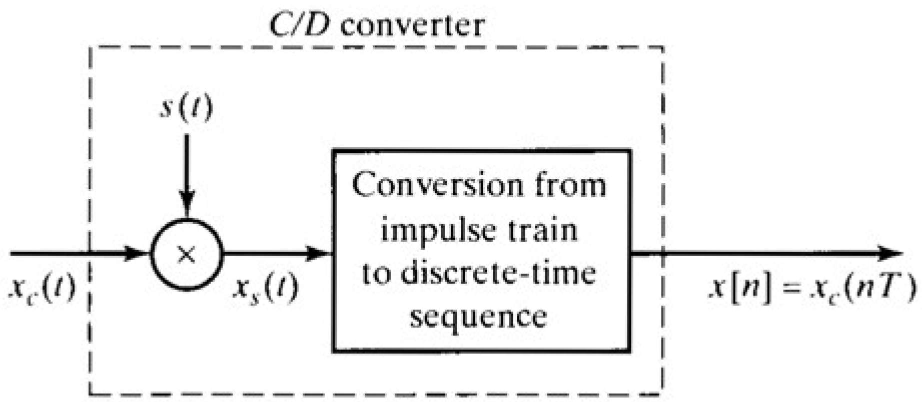
Sequence $x[n]$ $y[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Parseval's theorem:

8. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

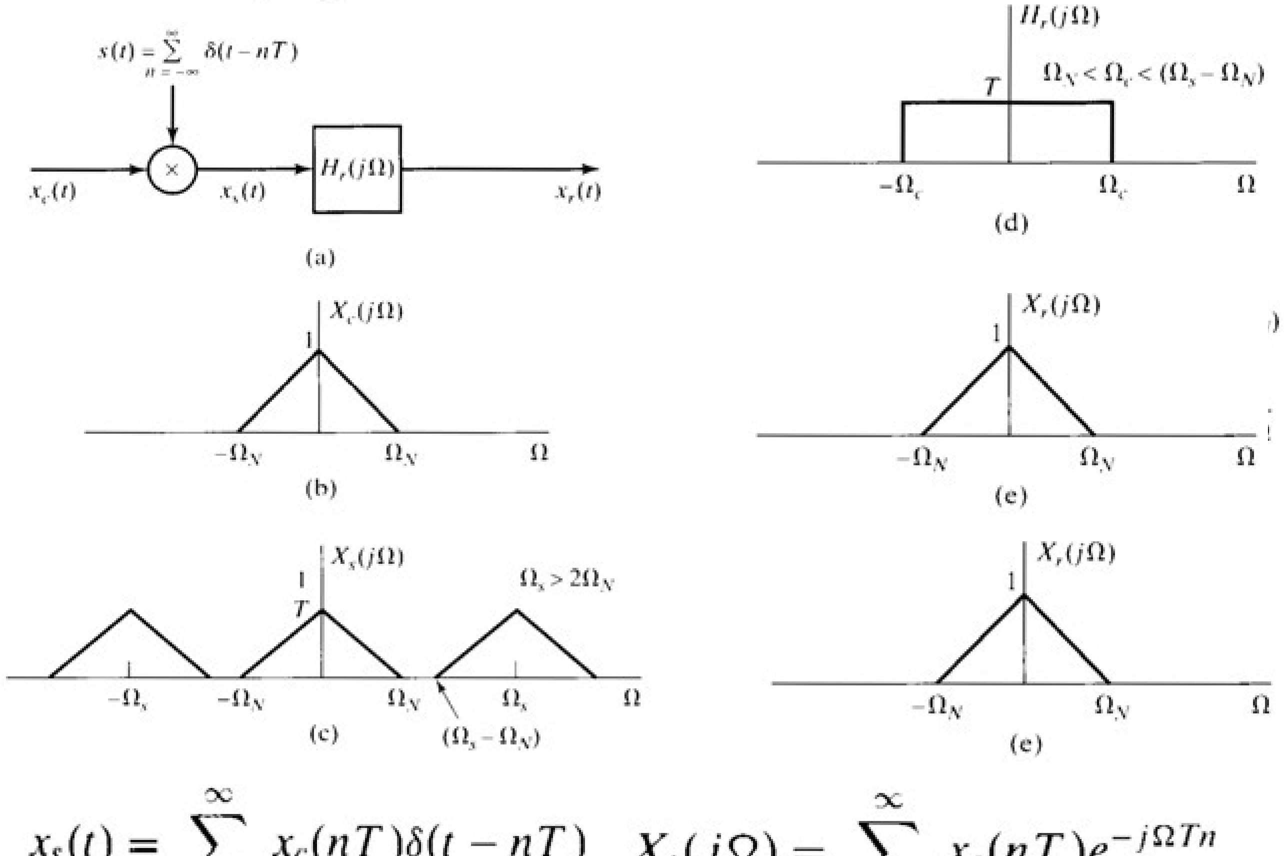
9. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

3) Δειγματοληψία και Ψηφιακή Επεξεργασία Αναλογικών Σημάτων



$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \qquad X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$



$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT) \qquad X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega Tn}$$

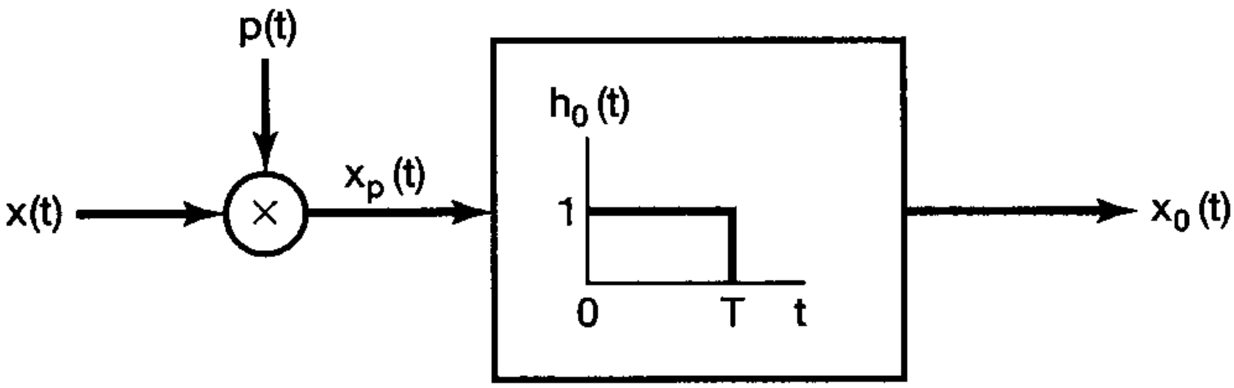
$$x[n] = x_c(nT) \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

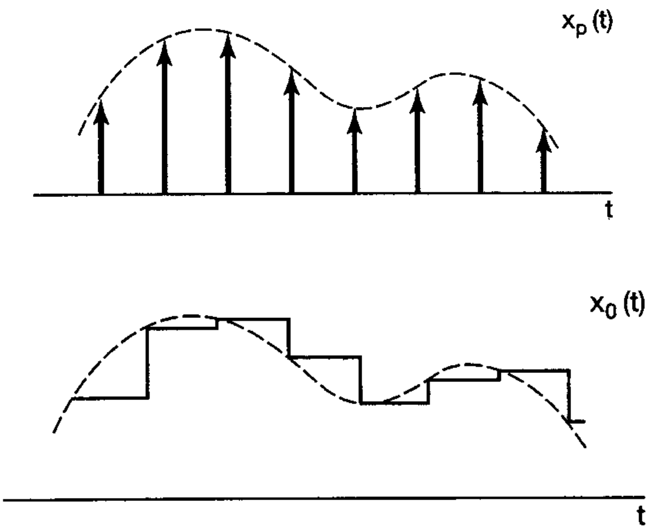
$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T})$$

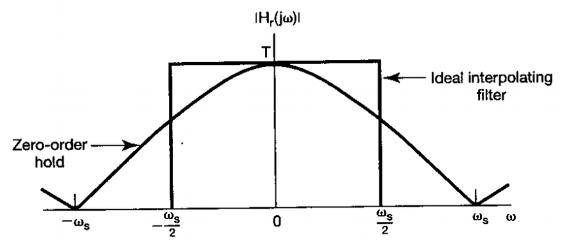
$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

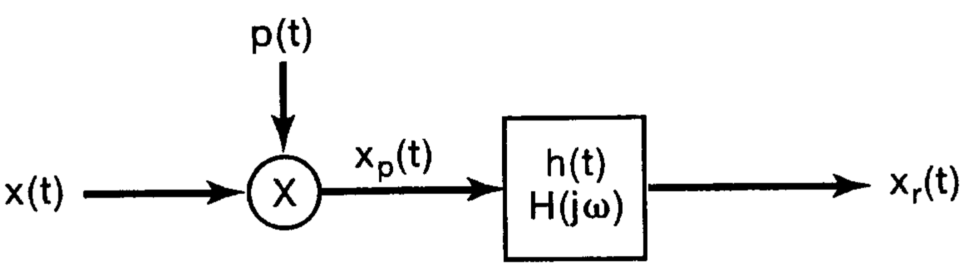
Zero-Order Hold Δειγματοληψία (και Ανακατασκευή)

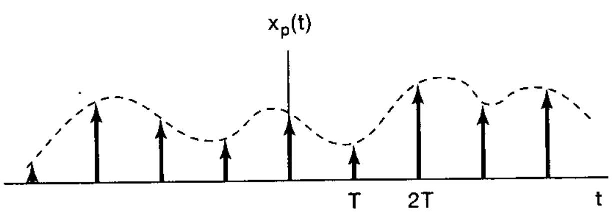


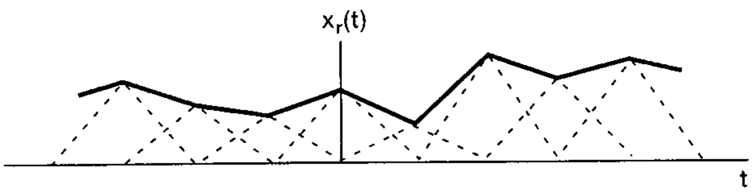


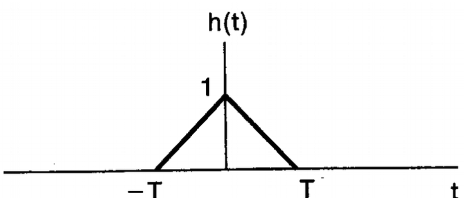


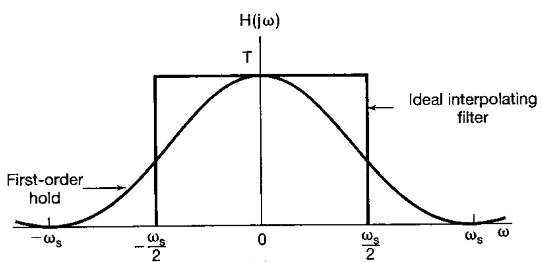
Γραμμική παρεμβολή (1st Order Hold)





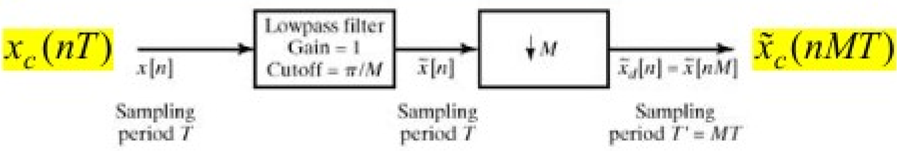






4) Υπο-/Υπερ-δειγματοληψία και Πολυρυθμική Επεξεργασία Σημάτων

Decimation - I



$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT)$ could cause aliasing

$$x[n] \Leftrightarrow X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega + \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

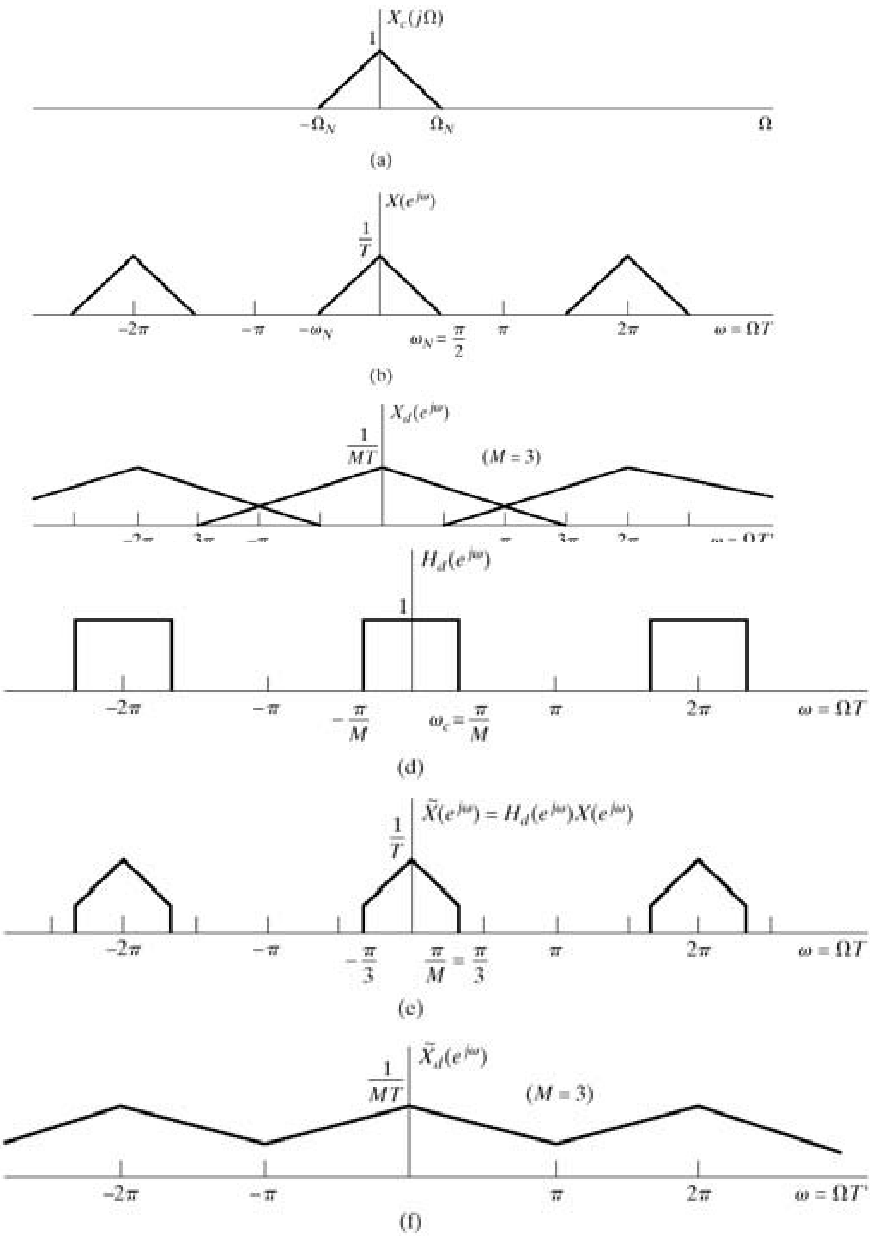
$$\tilde{x}[n] \Leftrightarrow \tilde{X}(e^{j\Omega T}) = H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T})$$

$$\tilde{x}_d[n] \Leftrightarrow \tilde{X}_d(e^{j\Omega MT}) = \frac{1}{MT}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_c\left(j\left(\Omega + \frac{2\pi k}{MT}\right)\right) = \frac{1}{M}\sum_{r=0}^{M-1} \tilde{X}(e^{j(\Omega T + 2\pi r)/M})$$

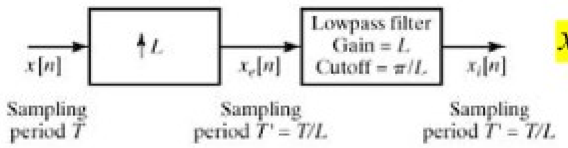
Κάνουμε βαθυπερατό φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας με κάτω συχνότητα π/Μ προκειμένου να μην έχουμε aliasing καθώς όταν κάνουμε το decimate (1 στα Μ δείγματα) θα έχουμε ένα expantion κατά ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα Μ.

T’ = T * M

Το πλάτος γίνεται * 1 / M



Interpolation - I

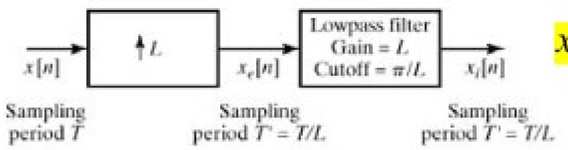
$x_c(nT)$  $x_c(nT/L)$

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin[\pi(n-kL)/L]}{[\pi(n-kL)/L]} \quad \text{or,}$$

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin[\pi(nT/L-kT)/T]}{[\pi(nT/L-kT)/T]} = x_c(nT/L)$$

Interpolation - II

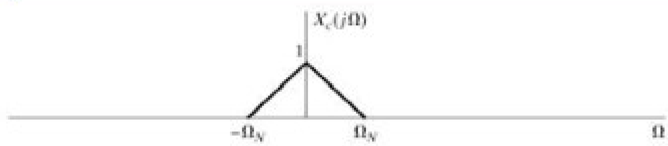
$x_c(nT)$  $x_c(nT/L)$

$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega L n} = X(e^{j\omega L})$$

$$X_e(e^{j\Omega T/L}) = X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega + \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

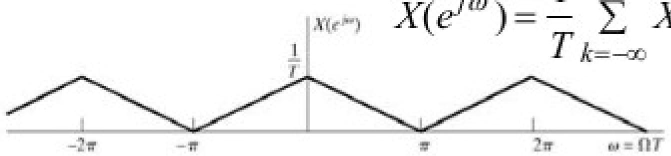
$$\begin{aligned} X_i(e^{j\Omega T/L}) &= H_i(e^{j\Omega T/L}) X_e(e^{j\Omega T/L}) \\ &= \frac{1}{(T/L)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega + \frac{2\pi k}{T/L}\right)\right) \end{aligned}$$

Interpolation - III

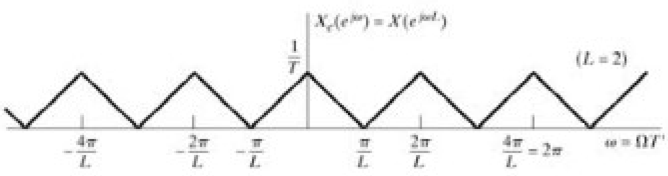


(a)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$



(b)

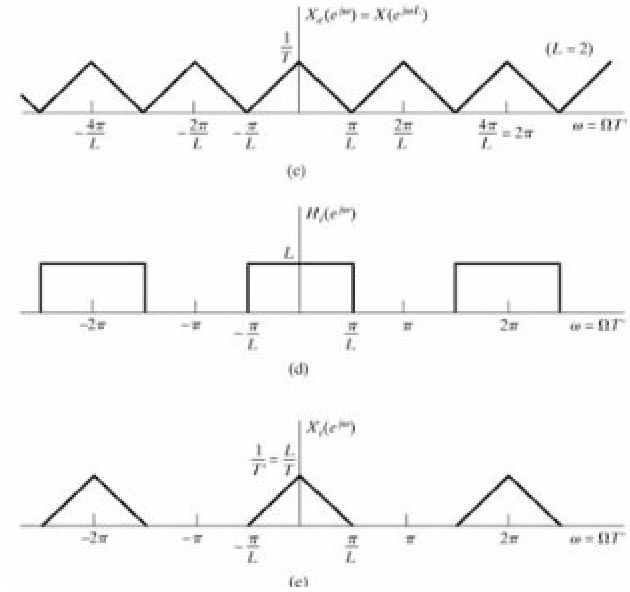


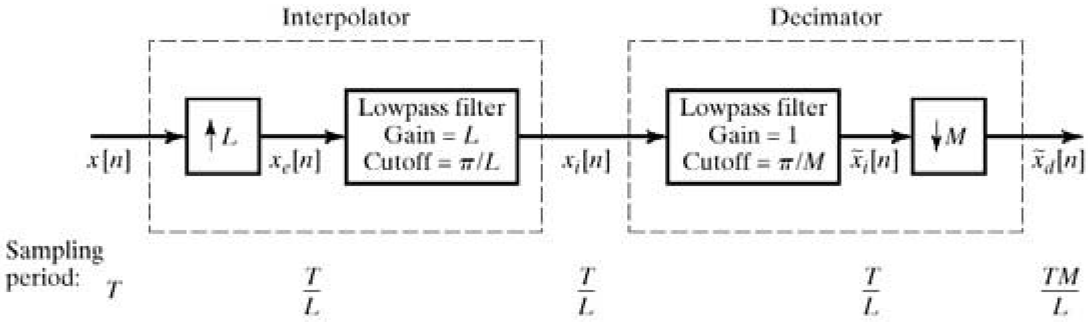
Ανά L δείγματα βάζουμε L-1 μηδενικά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να κάνει T' = T/L το οποίο στο πεδίο της συχνότητας έχει ως αποτέλεσμα το III σχήμα.

Ακολουθεί ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα π/L.

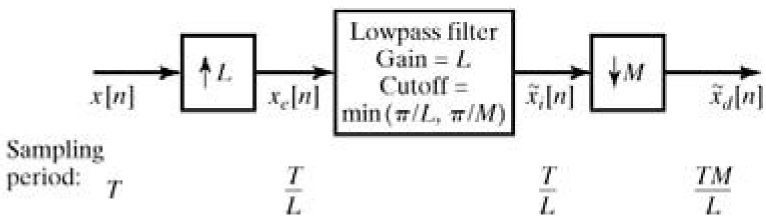
Το πλάτος γίνεται * L

Interpolation - IV

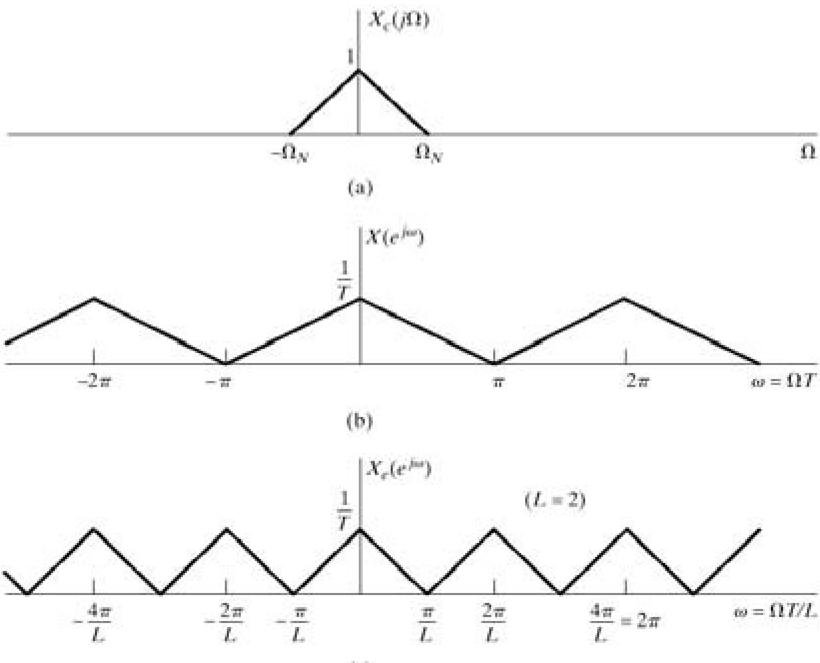


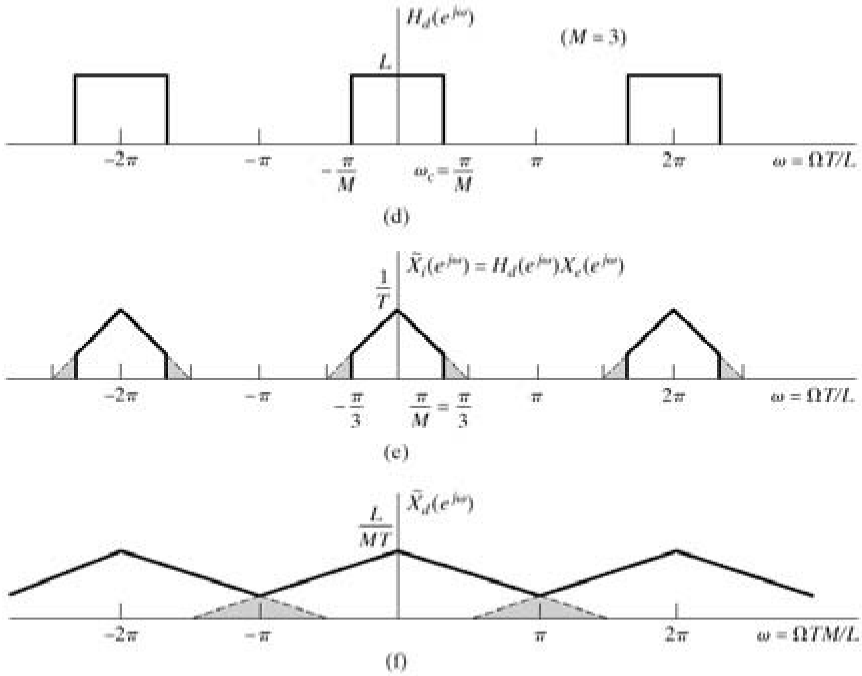


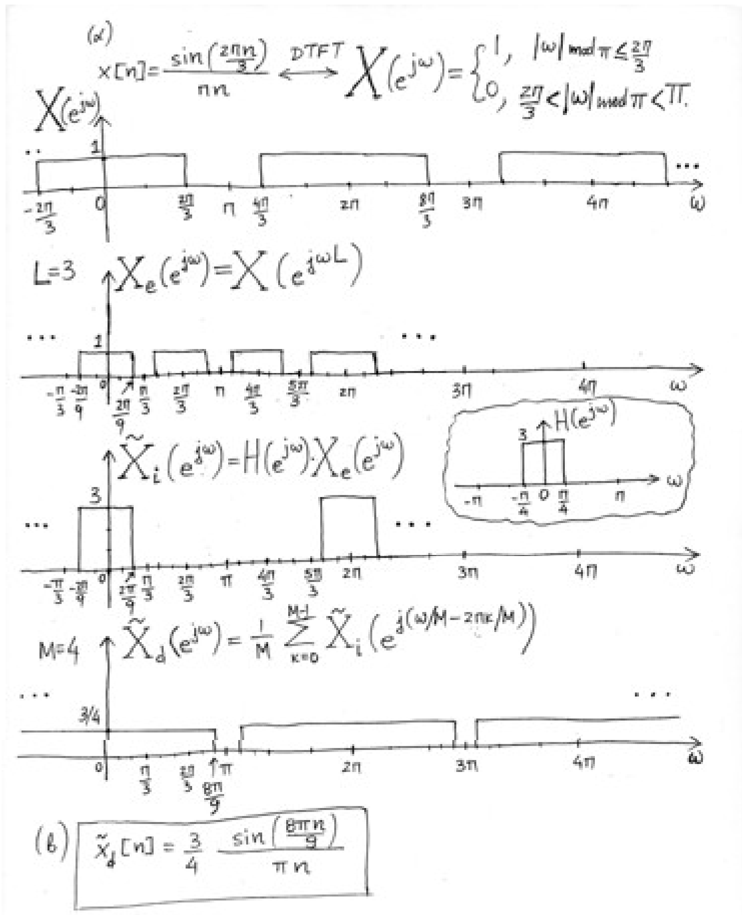
(a)



(b)



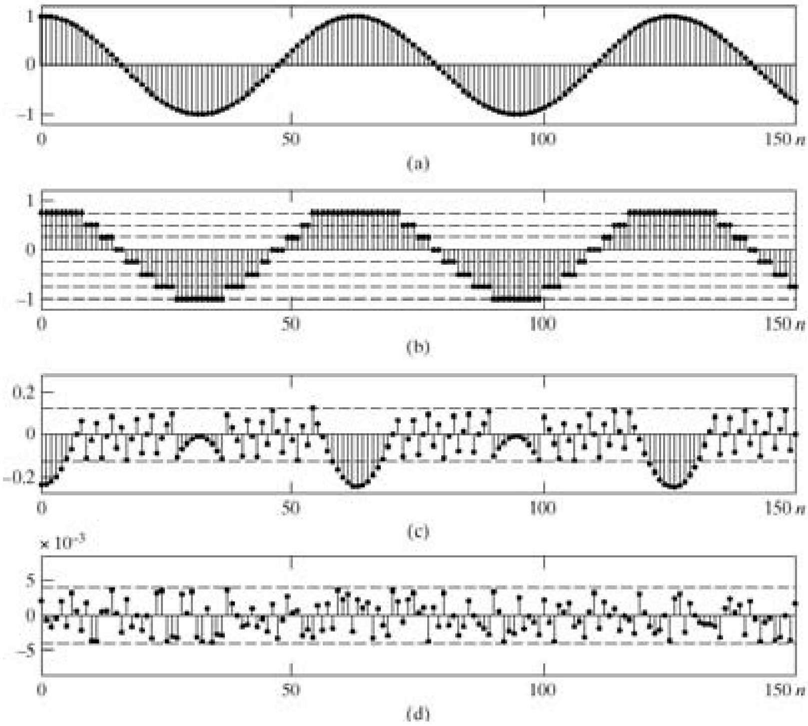




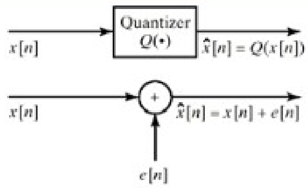
Limitations για το ADC / DAC conversions

Practical considerations in implementations:
-> The input signal cannot be perfectly bandlimited
-> A-to-D and D-to-A converters have finite- precision output and input respectively
-> Only finite-precision arithmetic is available for computations
Για αυτό χρειάζεται να κάνουμε zero order hold ή quantization.

Όσο περισσότερα bit έχουμε ο κβαντιστής προσεγγίζει την κατανομή και επίσης όσα περισσότερα bit χρησιμοποιήσεις τόσο πιο ασυσχέτιστο γίνεται το σήμα.



Linear Noise Model



- Error is uncorrelated with the input.
- Error is uniformly distributed over the interval

$$-(\Delta/2) < e[n] \le (\Delta/2).$$

- Error is stationary white noise, i.e.

$$P_e(\omega) = \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}, \quad |\omega| \le \pi$$

Quantizer Signal-to-Noise Ratio

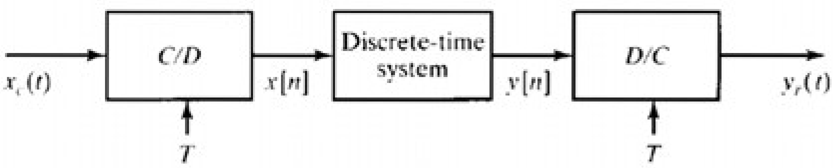
- Assume $2^{(B+1)}$ levels and amplitude range $2X_m$

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta = \frac{2X_m}{2^{(B+1)}}}_{\text{step size}} \quad \Rightarrow \underbrace{\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}X_m^2}{12}}_{\text{noise power}}$$

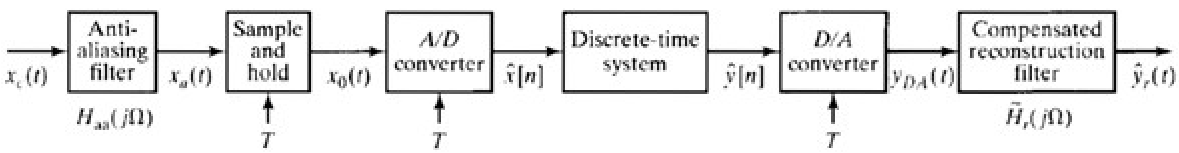
- Therefore the quantizer SNR is:

$$\text{SNR} = 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{12\cdot 2^{2B}\sigma_x^2}{X_m^2}\right)$$

$$= 6.02\text{B} + 10.8 - 20\log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right)$$



$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \ge \pi/T. \end{cases}$$



$$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t).$$

$$Y_a(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{aa}(j\Omega)X_c(j\Omega)$$

5) Discrete Fourier Transform (DFT)

Analysis equation: $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$.

Synthesis equation: $\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$

Σύνθεση από DFS:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

TABLE 8.1 SUMMARY OF PROPERTIES OF THE DFS

	Periodic Sequence (Period N)	DFS Coefficients (Period N)
1.	$\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k]$ periodic with period N
2.	$\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$	$\tilde{X}_1[k], \tilde{X}_2[k]$ periodic with period N
3.	$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$
4.	$\tilde{X}[n]$	$N\tilde{x}[-k]$
5.	$\tilde{x}[n-m]$	$W_N^{km}\tilde{X}[k]$
6.	$W_N^{-\ell n}\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k-\ell]$
7.	$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$ (periodic convolution)	$\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$
8.	$\tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell]$ (periodic convolution)
9.	$\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
	Periodic Sequence (Period N)	**DFS Coefficients (Period N)**
10.	$\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
11.	$\mathcal{R}e\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k])$
12.	$j\mathcal{J}m\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k])$
13.	$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n])$	$\mathcal{R}e\{\tilde{X}[k]\}$
14.	$\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n])$	$j\mathcal{J}m\{\tilde{X}[k]\}$
	Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.	
15.	Symmetry properties for $\tilde{x}[n]$ real.	$\begin{cases} \tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k] \\ \mathcal{R}e\{\tilde{X}[k]\} = \mathcal{R}e\{\tilde{X}[-k]\} \\ \mathcal{J}m\{\tilde{X}[k]\} = -\mathcal{J}m\{\tilde{X}[-k]\} \\ \lvert\tilde{X}[k]\rvert = \lvert\tilde{X}[-k]\rvert \\ \sphericalangle\tilde{X}[k] = -\sphericalangle\tilde{X}[-k] \end{cases}$
16.	$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n])$	$\mathcal{R}e\{\tilde{X}[k]\}$
17.	$\tilde{x}_0[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n])$	$j\mathcal{J}m\{\tilde{X}[k]\}$

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(2\pi/N)k}$$

Κυκλικική Συνέλιξη

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$$

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m], \qquad 0 \le n \le N-1.$$

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N]x_2[((n-m))_N], \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N], \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$x_3[n] = x_1[n] \; \text{Ⓝ} \; x_2[n]$$

DFT Αλγοριθμος Συνελιξης Δυο Πεπερασμενων Σηματων

0. Σήμα x[n] μήκους L σημείων, Σήμα h[n] μήκους P σημείων.

1.Zero-pad τα δυο σήματα ώστε να έχουν μήκος N > L+P-2.

2.Υπολογισμός των δυο DFT μήκους N σημείων: X[k], H[k]

3.Πολλαπλασιασμός των DFT: Y[k]=X[k]H[k], k=0,1,...,N-1.

4.Αντίστροφος DFT (N σημείων) του γινόμενου:
IDFT{Y[k]} => y[n]=x[n]*h[n], n=0,1,...,L+P-2.

	Finite-Length Sequence (Length N)	N-point DFT (Length N)
1.	$x[n]$	$X[k]$
2.	$x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3.	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4.	$X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5.	$x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
6.	$W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7.	$\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k] X_2[k]$
8.	$x_1[n] x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1(\ell) X_2[((k-\ell))_N]$
9.	$x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10.	$x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11.	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_{ep}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12.	$j\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$X_{op}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13.	$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
14.	$x_{op}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{J}m\{X[k]\}$
Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.		
15.	Symmetry properties	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\} = \mathcal{R}e\{X[((-k))_N]\} \\ \mathcal{J}m\{X[k]\} = -\mathcal{J}m\{X[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert = \lvert X[((-k))_N]\rvert \\ \sphericalangle\{X[k]\} = -\sphericalangle\{X[((-k))_N]\} \end{cases}$
16.	$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
17.	$x_{op}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{J}m\{X[k]\}$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}.$$

Εφαρμογές σε Φασματική Ανάλυση και Ταχείς Αλγόριθμοι (DFT, FFT, DCT)

Frequency Sampling

$$V[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[n] e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

$$= V(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}$$

Ποιες συνεχούς χρόνου συχνότητες αντιστοιχούν στα N-DFT δείγματα ; $\omega = \Omega T$

$$\Omega_k = \frac{\omega_k}{T} = \frac{2\pi k}{NT} = \frac{2\pi k f_s}{N}$$

Άμα το window length είναι μικρό και προκαλούνται από την αρχή σημαντικά leaks τότε έχει ήδη προκληθεί aliasing με αποτέλεσμα όσο και να αυξήσουμε το resolution του DFT να μην αλλάξει κάτι.

DTFT and Cosine Transform of Real Signal x[n]

$$\text{DTFT:} \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_n x[n]\cos(\omega n) - j\sum_n x[n]\sin(\omega n)$$

$$\text{DTCT:} \quad X^c(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos(\omega n) = \text{DTFT}\{x_{\text{even}}[n]\}$$

$$x_{\text{even}}[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x[n] = 0 \ \ \forall n < 0 \quad \Longrightarrow \quad x[n] = \begin{cases} 2x_{\text{even}}[n], & n > 0 \\ x_{\text{even}}[0], & n = 0 \end{cases}$$

DCT-2

$$\tilde{X}^{c2}[k] = \sqrt{\frac{2}{N}}\tilde{\beta}[k]\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \qquad 0 \le k \le N-1,$$

$$x[n] = \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\beta}[k]\tilde{X}^{c2}[k]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \qquad 0 \le n \le N-1,$$

$$\tilde{\beta}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k = 0, \\ 1, & k = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Διακριτοι Ορθογωνιοι Μετασχηματισμοι

Εισοδος: Αρχικο σημα-διανυσμα: $\mathbf{x} = \left[x[0], x[1], \ldots, x[N-1]\right]^T$

Εξοδος: Μετ/σμενο σημα-διανυσμα: $\mathbf{y} = \left[y[0], y[1], \ldots, y[N-1]\right]^T$

Ο NxN Πινακας Μετασχηματισμου $\mathbf{A} = \left[a[n,k]\right]$ ειναι Unitary

($\mathbf{A}$ ειναι Ορθογωνιος για Πραγματικους πινακες):

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{I}$$

Γραμμικος Μετασχηματισμος (Πινακας x Διανυσμα εισοδου):

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^H\mathbf{x}\ , \qquad \left(\begin{array}{c} y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a^*[k,n]x[n] \\ k = 0,1,\ldots,N-1 \end{array} \right)$$

Αντιστροφος Μετασχηματισμος (Αντιστροφος Πινακας x Διανυσμα Εξοδου):

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}\ , \qquad \left(\begin{array}{c} x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a[n,k]y[k] \\ n = 0,1,\ldots,N-1 \end{array} \right)$$

Discrete Cosine Transform (DCT)

$$\mathbf{C}=\left[c[k,n]\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{N}}, & k=0,\ 0\le n\le N-1\\[2mm] \sqrt{2/N}\cos\left[\dfrac{\pi k\left(2n+1\right)}{2N}\right], & 1\le k\le N-1,\ 0\le n\le N-1\end{cases}$$

DCT διανυσματος $\mathbf{x}=\left[x[0],x[1],...,x[N-1]\right]^T$:

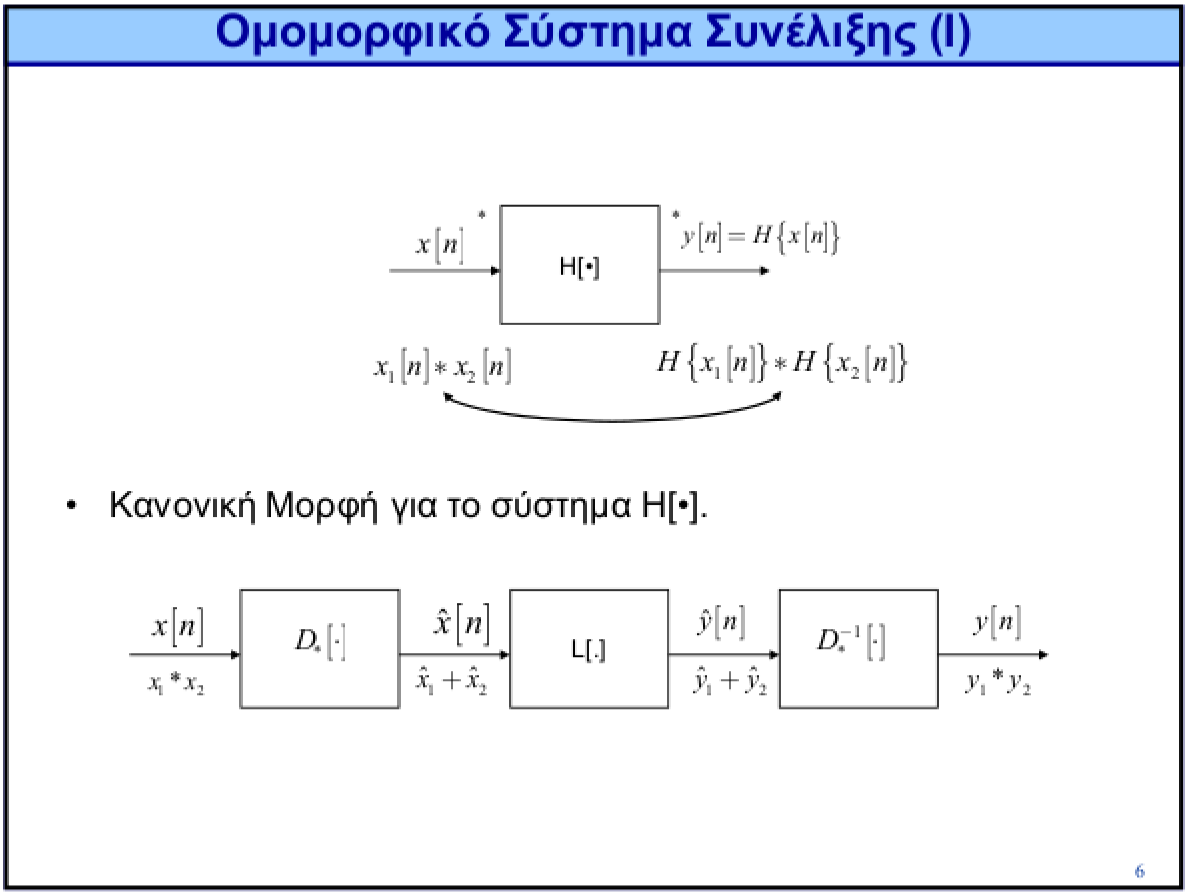
$$y[k]=\beta[k]\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left[\frac{\pi k\left(2n+1\right)}{2N}\right],\quad 0\le k\le N-1$$

$$\beta[0]=\sqrt{1/N},\qquad \beta[k]=\sqrt{2/N}\qquad 1\le k\le N-1$$

Αντιστροφος DCT:

$$x[n]=\sum_{\kappa=0}^{N-1}\beta[k]y[k]\cos\left[\frac{\pi k\left(2n+1\right)}{2N}\right],\quad 0\le n\le N-1$$

6) Cepstrum



$$\boxed{\hat{X}(z) = \log\left[X(z)\right]}$$

$z = e^{j\omega}$ (unit circle) :

$$\hat{X}\left(e^{j\omega}\right) = \log\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| + j\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

Complex Cepstrum

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

Cepstrum (Bogert-Healy-Tukey)

$$c[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\omega n} d\omega = \text{even part of } \hat{x}[n] \quad \text{if } x[n] \text{ is real}$$

Παράδειγμα Cepstrum I : Σήμα με Ρητό μετασχηματισμό Z

Αν υποθέσουμε ότι:

$$X(z)=\frac{Az^r\prod_{k=1}^{M_i}\left(1-a_k z^{-1}\right)\prod_{k=1}^{M_0}\left(1-b_k z\right)}{\prod_{k=1}^{N_i}\left(1-c_k z^{-1}\right)\prod_{k=1}^{N_0}\left(1-d_k z\right)},\quad \begin{matrix}|a_k|,|b_k|\\|c_k|,|d_k|\end{matrix}<1$$

Τότε:

$$\hat{x}[n]=\begin{cases}\log A, & n=0\\ \sum_{k=1}^{N_i}\frac{c_k^n}{n}-\sum_{k=1}^{M_i}\frac{a_k^n}{n}, & n>0\\ \sum_{k=1}^{M_0}\frac{b_k^{-n}}{n}-\sum_{k=1}^{N_0}\frac{d_k^{-n}}{n}, & n<0\end{cases}$$

Λημμα: $|a|<|z| \Rightarrow$

$$\log(1-az^{-1})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n z^{-n}}{n}$$

9

1. Ακόμα και αν το $x[n]$ είναι αιτιατό και πεπερασμένης διάρκειας, γενικά το $\hat{x}[n]$ μπορεί να είναι μη-μηδενικό και άπειρης διάρκειας για θετικά και αρνητικά *n*.
2. Το $\hat{x}[n]$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία :

$$|\hat{x}[n]|<\beta\frac{\rho^{|n|}}{|n|}\qquad for\ \ |n|\to\infty,\ \ \rho=\max_k\left(|a_k|,|b_k|,|c_k|,|d_k|\right)$$

3. Αν το *X(z)* δεν έχει πόλους ή μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου [το *x[n]* είναι MINIMUM-PHASE]

$$b_k=d_k=0\qquad\Rightarrow\hat{x}[n]=0,\ \ for\ \ n<0$$

4. Αν το *X(z)* δεν έχει πόλους ή μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου [το *x[n]* είναι MAXIMUM-PHASE]

$$a_k=c_k=0\qquad\Rightarrow\hat{x}[n]=0,\ \ for\ \ n>0$$

1. Αν το x(n) είναι Min-Phase σήμα, μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $\hat{x}(n)$ μόνο από το

$$\log\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \leftrightarrow c[n]$$

$$\log\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \mathrm{Re}\left[\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)\right] \Leftrightarrow c[n] = \frac{\hat{x}[n]+\hat{x}[-n]}{2}$$ (άρτιο μέρος του $\hat{x}[n]$)

2. Όμοια, αν το x[n] είναι Max-Phase, μπορούμε να καθορίσουμε το $\hat{x}[n]$ μόνο από το

$$\log\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \leftrightarrow c[n]$$

$$\hat{X}'(z) = \frac{d}{dz}\hat{X}(z) = \frac{d}{dz}\log X(z) = \frac{1}{X(z)}\frac{dX(z)}{dz} = \frac{X'(z)}{X(z)}$$

$$zX'(z) = \left[z\hat{X}'(z)\right]X(z)$$ (*Z*-Transform)

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$+nx[n] = +\{n\hat{x}[n]\} * x[n]$$ (Signal)

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)\hat{x}[k]x[n-k], \quad n \neq 0}$$

Εξισώσεις Διαφορών για το Cepstrum (II)

$$X(z) = |A| \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N_i} (1 - c_k z^{-1})}$$

Αν x[n] MIN-Phase και αιτιατό $\Rightarrow \ \hat{x}[n] = 0, \ n < 0$ και $x[n] = 0, \ n < 0$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k] x[n-k], \quad n > 0}$$

$$= \hat{x}[n] x[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k] x[n-k]$$

$$\Rightarrow \ \hat{x}[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{x[n]}{x[0]} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k] \frac{x[n-k]}{x[0]}, & n > 0 \\ \log(|A|) = \log(x[0]), & n = 0 \end{cases}$$

7) Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας για ΨΕΣ

Singular Value Decomposition (SVD): Κάθε (πραγματικός ή μιγαδικός) $m \times n$ πίνακας A μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \tag{7}$$

όπου ο $m \times m$ πίνακας $\mathbf{U}$ είναι unitary και οι στήλες του $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$, ο $n \times n$ πίνακας $\mathbf{V}$ είναι unitary και οι στήλες του $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$, και ο $m \times n$ πίνακας $\mathbf{\Sigma}$ είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας του οποίου τα μονα μη-μηδενικά στοιχεία είναι οι r διαγώνιοι όροι του $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r > 0$, που καλούνται *ιδιόμορφες τιμές (singular values)*, με

$$r = \text{rank}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n). \tag{8}$$

Οι ιδιόμορφες τιμές είναι οι τετραγωνικές ρίζες των μη-μηδενικών ιδιοτιμών σ_i^2 και των δύο πινάκων $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ και $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$. Επομένως, η SVD του $\mathbf{A}$ σχετίζεται με την φασματική παραγοντοποίηση του Hermitian πίνακα $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^H &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{U}^H = \textstyle\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \\ \mathbf{A}^H\mathbf{A} &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \textstyle\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \end{aligned} \tag{9}$$

Εάν ο $\mathbf{A}$ είναι πραγματικός, η μόνη διαφορά στην SVD διάσπαση (συγκρινόμενη με την μιγαδική περίπτωση) είναι ότι οι $\mathbf{U}$ και $\mathbf{V}$ είναι ορθογώνιοι πίνακες. Εάν ο $\mathbf{A}$ είναι Hermitian και θετικά ημι-ορισμένος, η SVD διάσπαση του θα είναι πανομοιότυπη με την φασματική διάσπαση $\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H$. Εάν ο $\mathbf{A}$ είναι μη-ορισμένος, τότε κάθε αρνητική ιδιοτιμή στο $\mathbf{\Lambda}$ γίνεται θετική στο $\mathbf{\Sigma}$.

Οι στήλες του πίνακα $\mathbf{U}$ και $\mathbf{V}$ παρέχουν ορθοκανονικές βάσεις για όλους τους τέσσερις βασικούς υποχώρους του $\mathbf{A}$
(Υποθέτουμε πραγματικούς πίνακες):

$$\begin{array}{rcllll} \mathcal{R}(\mathbf{A}) & = & \text{column space}, & \dim = r, & \text{evectors} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_r\} \\ \mathcal{R}(\mathbf{A}^T) & = & \text{row space}, & \dim = r, & \text{evectors} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r\} \\ \mathcal{N}(\mathbf{A}) & = & \text{null space}, & \dim = n - r, & \text{evectors} = \{\mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_n\} \\ \mathcal{N}(\mathbf{A}^T) & = & \text{left null space}, & \dim = m - r, & \text{evectors} = \{\mathbf{u}_{r+1}, ..., \mathbf{u}_m\} \end{array} \tag{10}$$

Αυτές οι βάσεις παρουσιάζουν ενδιάμεσες σχέσεις αφού

$$\mathbf{AV} = \mathbf{U\Sigma} \tag{11}$$

Επομένως, $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ για $i = 1, ..., n$. Για $i > r$, θέτουμε $\sigma_i = 0$.

Εφαρμογές της SVD:

(1) Αποδοτική Τάξη: Κρατούμε μόνο τις ιδιόμορφες τιμές που βρίσκονται πάνω από ένα καθορισμένο κατώφλι το οποίο καθορίζει την αριθμητική ακρίβεια.

(2) *Συμπαγείς αναπαραστάσεις Εικόνων/Σημάτων*: Χρήση μόνο λίγων μεγάλων ιδιόμορφων τιμών για να αναπαραστήσουμε προσεγγιστικά τον $\mathbf{A}$ κάνοντας χρήση μιας εκδοχής της (7) που έχει υποστεί περικοπές.

(3) *Πολική παραγοντοποίηση*: Παραγοντοποίηση ενός πραγματικού τετραγωνικού πίνακα $\mathbf{A}$ ως $\mathbf{QS}$ όπου ο $\mathbf{Q}$ είναι ορθογώνιος και ο $\mathbf{S}$ είναι συμμετρικός και θετικά ημι-ορισμένος. (Εάν ο $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, ο $\mathbf{S}$ είναι θετικά ορισμένος.)

Έστω $\mathbf{A}$ ένας πίνακας που παραγοντοποιούμε με τη χρήση της SVD και ταξινομούμε τις ιδιόμορφες τιμές ως $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r$. Εάν προσεγγίσουμε τον πίνακα διατηρώντας τις $p < r$ μεγαλύτερες ιδιόμορφες τιμές

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^H$$

η προσέγγιση αυτή μας οδηγεί στο μικρότερο τετραγωνικό σφάλμα

$$J_{svd} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a[i,j] - \hat{a}[i,j]|^2 = (\|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}\|_{Frobenious})^2 = \sum_{k=p+1}^{r} \sigma_k^2$$

μεταξύ όλων των $m \times n$ πινάκων τάξης p. Συνεπώς, διατηρώντας τις p μεγαλύτερες ιδιόμορφες τιμές η SVD μας οδηγεί στην καλύτερη τάξης-p προσέγγιση πίνακα που ελαχιστοποιεί την Frobenius νόρμα του σφάλματος. Το ελάχιστο σφάλμα είναι

$$J_{svd} = \sum_{k=p+1}^{r} \sigma_k^2$$

8) Γραμμική Πρόβλεψη: Θεωρία και Εφαρμογές στην Επεξεργασία Φωνής

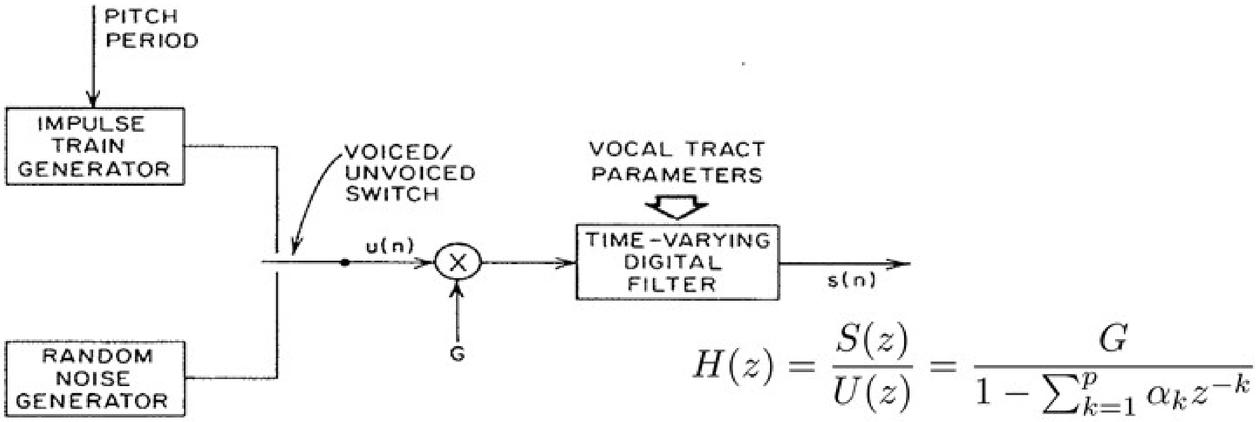


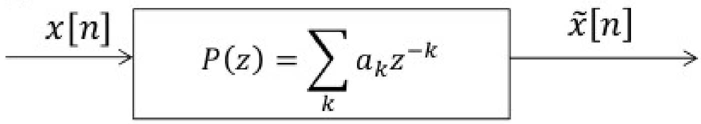
Fig. 8.1 Block diagram of simplified model for speech production.

$$H(z) = \frac{S(z)}{U(z)} = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^{-k}}$$

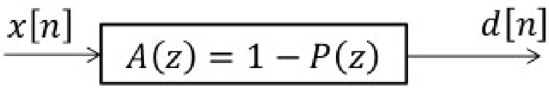
Γραμμικη Προβλεψη: Αναλυση και Συνθεση

$$\underbrace{x[n]}_{\sigma\acute{\eta}\mu\alpha} = \underbrace{\sum_k a_k x[n-k]}_{\tilde{x}[n]=\pi\rho\acute{o}\beta\lambda\varepsilon\psi\eta} + \underbrace{d[n]}_{\substack{\delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha} \\ (\lambda\acute{\alpha}\theta o\varsigma)}}$$

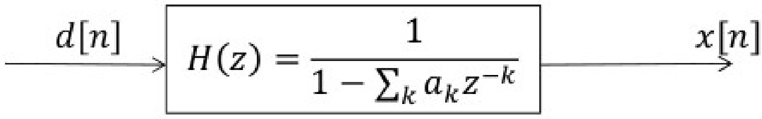
Προβλέπτης

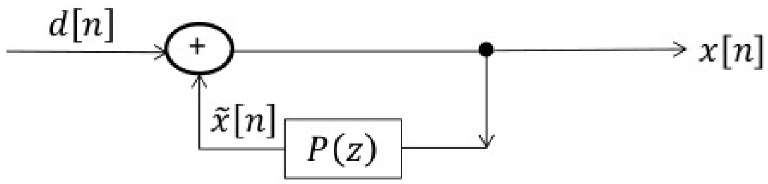


Ανάλυση



Σύνθεση





Καθορισμός Προβλήματος (Ι)

- Απλοποιημένο Μοντέλο Φωνής

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^{-k}} \Rightarrow s[n] = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k s[n-k] + Gu[n]$$

- Linear Predictor με συντελεστές $\{\alpha_k\}$

$$\hat{s}[n] = \sum_k \alpha_k s[n-k] \qquad \xrightarrow{s[n]} \boxed{P(z) = \sum_k \alpha_k z^{-k}} \xrightarrow{\hat{s}[n]}$$

- Φίλτρο λάθους πρόβλεψης

$$\xrightarrow{s[n]} \boxed{A(z) = 1 - P(z)} \longrightarrow e[n] = s[n] - \hat{s}[n]$$

Αλγοριθμος Levinson-Durbin

Autocorrelation Πίνακας Toeplitz

$$\begin{bmatrix} r[0] & r[1] & & & r[p-1] \\ r[1] & r[0] & r[1] & & r[p-2] \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & r[1] \\ r[p-1] & & & r[1] & r[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r[1] \\ r[2] \\ \vdots \\ r[p] \end{bmatrix} \quad E_{min} = r[0] - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k r[k]$$

<u>Αναδρομικός Αλγόριθμος</u>

Αρχικοποίηση λάθους πρόβλεψης $E_{min}^{(0)} = r[0]$

Βήμα 1ο Υπολογισμός του i-οστού συντελεστή ανάκλασης

$$\kappa_i = -(r[i] - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} r[i-j]) / E_{min}^{(i-1)}$$

Βήμα 2ο Υπολογισμός συντελεστών πρόβλεψης για το i-οστό μοντέλο

$$\alpha_i^{(i)} = -\kappa_i$$

$$\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i-1)} + \kappa_i \alpha_{i-j}^{(i-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, i-1$$

Βήμα 3ο Υπολογισμός λάθους πρόβλεψης για το i-οστό μοντέλο

$$E_{min}^{(i)} = (1 - \kappa_i^2) E_{min}^{(i-1)}$$

Επανάληψη βημάτων 1,2,3 για i=1,2,…,p. Τελικά:

$$\alpha_j = \alpha_j^{(p)}, \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

Αναδρομη Levinson-Durbin σε Μορφη Πινακα

- Βαθμωτες εξισωσεις:

$$
\begin{aligned}
\alpha_i^{(i)} &= -\kappa_i \\
\alpha_j^{(i)} &= \alpha_j^{(i-1)} + \kappa_i \alpha_{i-j}^{(i-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, i-1
\end{aligned}
$$

- Εξισωσεις με πινακες & διανυσματα (**J**=πινακας ανταλλαγης):

$$
\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \kappa_i \begin{bmatrix} \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, p
$$

Μέθοδος Autocorrelation

- Κανονικοποιημένο Λάθος Πρόβλεψης

$$
V^{(i)} = \frac{E_{min}^{(i)}}{r[0]} = 1 - \sum_k \alpha_k^{(i)} \frac{r[k]}{r[0]}
$$

$$
E_{min}^{(i)} = (1-\kappa_i^2) E_{min}^{(i-1)} \Rightarrow V^{(p)} = \prod_{i=1}^{p} (1-\kappa_i^2)
$$

$$
0 \leq V^{(i)} \leq 1, \ \forall i \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \kappa_i \leq 1
$$

$\Leftrightarrow$ Οι πόλοι του $A^{(p)}(z)$ είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο

- Η ευστάθεια του προβλέπτη είναι εξασφαλισμένη (σε αντίθεση με τη μέθοδο covariance)

Σύγκριση Μεθόδων **LPC**

① Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

	Covariance	Autocorrelation	Lattice
Αποθήκευση Δεδομένων	N_1	N_2	N_3
Αποθήκευση Πίνακα	$O(p^2/2)$	$O(p)$	-
Αποθήκευση Παραθύρου	-	N_2, Hamming	-
Πολ\σμός με Παράθυρο	-	N_2	-
Συσχετίσεις	$O(N_1p)$	$O(N_2p)$	-
Λύση	$O(p^3/6)$	$O(p^2)$	$5N_3p$
Ευστάθεια αντιστρόφου φίλτρου Λάθους Πρόβλεψης	Όχι εγγυημένη	Εγγυημένη αλλά λάθη στρογγυλοποίησης	Εγγυημένη

- Για τη μέθοδο Lattice δε χρειάζεται αντιστροφή πίνακα.
- Για τη μέθοδο Autocorrelation βοηθάει η προέμφαση για την ευστάθεια του φίλτρου λάθους πρόβλεψης.

9) Ψηφιακά Συστήματα: Φάση, Καθυστέρηση, Συστήματα All-Pass, Ελάχιστης & Γραμμικής Φάσης

Καθυστερηση (Group Delay)

$$\tau(\omega) = \mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\}$$

$$\mathrm{grd}[H_{\mathrm{ap}}(e^{j\omega})] \geq 0$$

$$\arg[H_{\mathrm{ap}}(e^{j\omega})] \leq 0 \qquad \text{for } 0 \leq \omega < \pi$$

All- Pass Συστηματα

$$H_{\mathrm{ap}}(z) = A\prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}$$

$|H\_ap(z)| = A = const$

Ενα αιτιατο ευσταθες ΓΧΑ συστημα ειναι Ελαχιστης (Καθυστερησης) Φασης [Minimum-Phase] εαvν ολοι οι πολοι και ολα τα μηδενικα του ειναι εντος του μοναδιαιου κυκλου

$$H(z) = H_{\min}(z) H_{\mathrm{ap}}(z)$$

Ιδιοτητα Min-phase για Ελαχιστη Καθυστερηση Ενεργειας απο ολα τα συστηματα με ιδιο πλατος (και DC gain > 0):

$$\sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^{n} |h_{\min}[m]|^2 \qquad |h[0]| \leq |h_{\min}[0]|$$

Συστηματα Γενικευμενης Γραμμικης Φασης

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega + j\beta}}$$

$$\tau(\omega) = \text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\} = \alpha$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \beta - \omega\alpha, \qquad 0 < \omega < \pi$$

Αναγκαια Συνθηκη

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin[\omega(n-\alpha)+\beta] = 0 \quad \text{for all } \omega}$$

$$\beta = 0 \quad \text{or} \quad \pi,$$

$$2\alpha = M = \text{an integer}$$

$$h[2\alpha - n] = h[n].$$

$$\beta = \pi/2 \quad \text{or} \quad 3\pi/2$$

$$2\alpha = M = \text{an integer}$$

$$h[2\alpha - n] = -h[n]$$

Αιτιατα Συστηματα Γενικευμενης Γραμμικης Φασης

$$h[n] = 0, \qquad n < 0 \quad \text{and} \quad n > M$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h[n]\sin[\omega(n-\alpha)+\beta] = 0 \qquad \text{for all } \omega.$$

Αρτια Συμμετρια

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$$

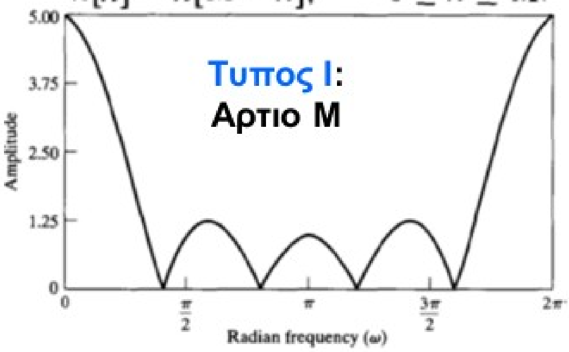
Περιττη Συμμετρια

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n], & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

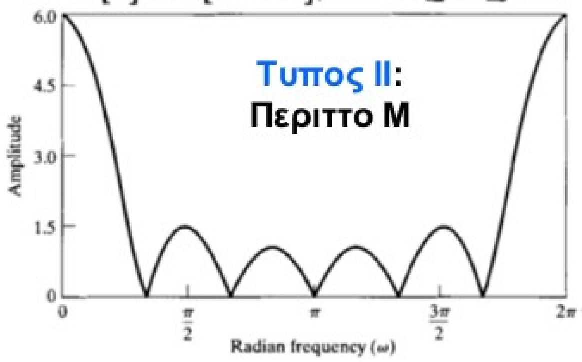
$$H(e^{j\omega}) = jA_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} = A_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2 + j\pi/2}$$

Τεσσερα Ειδη FIR Συστηματων Γραμμικης Φασης

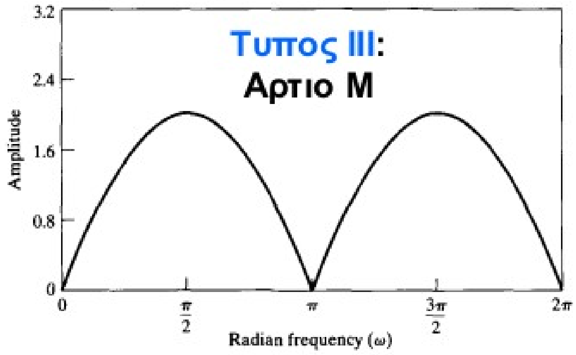
$h[n] = h[M-n], \qquad 0 \leq n \leq M.$



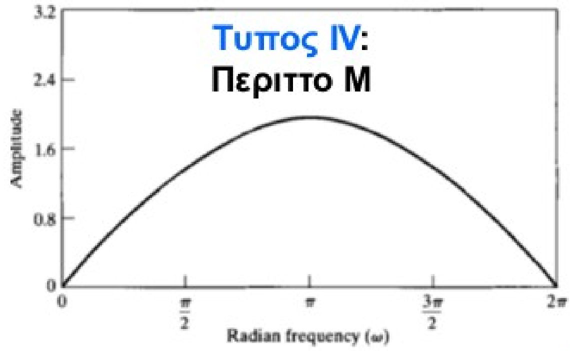
$h[n] = h[M-n], \qquad 0 \leq n \leq M.$



$h[n] = -h[M-n], \qquad 0 \leq n \leq M$



$h[n] = -h[M-n], \qquad 0 \leq n \leq M$



11) Στοχαστικές Ανελίξεις Διακριτού Χρόνου και Φάσμα Ισχύος

Στοχαστική Ανέλιξη Διακριτού-χρόνου *x[n]*

- **Μέση Τιμή** (Expected Value)

$$m_x[n] = E\{x[n]\}$$

- **Μεταβλητότητα**/Διασπορά (Variance)

$$\sigma_x^2[n] = E\{|x[n] - m_x[n]|^2\}$$

- Αυτο-**Συσχέτιση** (Auto-Correlation)

$$r_x[k,\ell] = E\{x[k]x^*[\ell]\}$$

- Αυτο-**Συμμεταβλητότητα** (Auto-Covariance)

$$c_x[k,\ell] = E\{(x[k] - m_x[k])\,(x[\ell] - m_x[\ell])^*\}$$

4

Δυο Στοχαστικές Ανελίξεις *x[n], y[n]*

- **Ετερο-συσχετιση** (Cross-Correlation):

$$r_{xy}[k,\ell] = E\{x[k]y^*[\ell]\}$$

- **Ετερο-Συμμεταβλητότητα** (Cross-Covariance):

$$c_{xy}[k,\ell] = E\{(x[k] - m_x[k])\,(y[\ell] - m_y[\ell])^*\}$$

- Σχέση Covariance – Correlation:

$$c_{xy}[k,\ell] = r_{xy}[k,\ell] - m_x[k]m_y^*[\ell]$$

- **Ασυσχετιστες** τ.μ.: $c_{xy}[k,l] = 0$

- **Ορθογωνιες** τ.μ.: $r_{xy}[k,l] = 0$

5

Παραδείγματα Συσχέτισης

$$x(n) = A\sin(n\omega_0 + \phi) \implies \quad r_x(k,l) = \frac{1}{2}A^2\cos\big[(k-l)\omega_0\big]$$

$$x(n) = Ae^{j(n\omega_0+\phi)} \implies r_x(k,l) = E\{x(k)x^*(l)\} = E\{Ae^{j(k\omega_0+\phi)}A^*e^{-j(l\omega_0+\phi)}\}$$
$$= |A|^2E\{e^{j(k-l)\omega_0}\} = |A|^2e^{j(k-l)\omega_0}$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \implies$$

$$r_{xy}(k,l) = E\{x(k)y^*(l)\} = E\left\{x(k)\sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*(m)x^*(l-m)\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*(m)r_x(k,l-m)$$

Property. If two zero-mean random processes $x(n)$ and $y(n)$ are uncorrelated, then the autocorrelation of the sum

$$z(n) = x(n) + y(n)$$

is equal to the sum of the autocorrelations of $x(n)$ and $y(n)$,

$$r_z(k,l) = r_x(k,l) + r_y(k,l)$$

WSS Στοχαστικες Ανελιξεις

- **Ορισμος:** Μια στοχαστική ανέλιξη *x[n]* είναι **WSS** (Wide-Sense Stationary) εάν ικανοποιεί τις εξής 3 συνθήκες:
  - Η μέση της τιμή είναι σταθερή: $m_x[n] = m_x$
  - Η αυτοσυσχέτιση της $r_x[k,\ell]$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $k-\ell$

    $$r_x[k] = E\{x[n]x^*[n-k]\}$$
  - Η διασπορά της ανέλιξης είναι πεπερασμένη: $c_x[0] < \infty$
- **Ιδιότητες Αυτοσυσχετισης** WSS στοχαστικών ανελίξεων:
  - Hermitian Συμμετρια: $r_x[-k] = r_x^*[k]$
  - Μεγιστο: $r_x[0] \geq |r_x[k]|\,,\quad \forall k$
  - Μεση Ισχυς: $r_x[0] = E\{|x[n]|^2\}$
  - Θετικα Ημι-Ορισμενη: $\sum_i \sum_j a_i a_j^* r_x[i-j] \geq 0 \quad \forall\{a_i\}$

Autocorrelation Πίνακας WSS Ανέλιξης

- Εάν $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \ldots, x[p]]^T$ τότε
  - Ο Autocorrelation Πίνακας υπολογίζεται ως εξής :

$$\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \begin{bmatrix} r_x[0] & r_x^*[1] & \ldots & r_x^*[p] \\ r_x[1] & r_x[0] & \ldots & r_x^*[p-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x[p] & r_x[p-1] & \ldots & r_x[0] \end{bmatrix}$$

  - Ο Autocovariance Πίνακας ορίζεται ως εξής :

$$\mathbf{C}_x = \mathbf{R}_x - \mathbf{m}_x\mathbf{m}_x^H$$

όπου $\mathbf{m}_x = [m_x, m_x, \ldots, m_x]^T$

Ιδιότητες Πίνακα Αυτοσυσχέτισης

- **Ιδιότητα 1 :** Ο πίνακας $\mathbf{R}_x$ είναι **Hermitian**

$$\mathbf{R}_x^H = \mathbf{R}_x$$

- **Ιδιότητα 2** : Ο πίνακας $\mathbf{R}_x$ είναι **Toeplitz**

$$\mathbf{R}_x = Toep\{r_x[0], r_x[1], \ldots, r_x[p]\}$$

- **Ιδιότητα 3** : Ο πίνακας $\mathbf{R}_x$ είναι **positive semi-definite**: $\mathbf{R}_x \geq 0$

$$\mathbf{a}^H\mathbf{R}_x\mathbf{a} \geq 0 \quad \text{για κάθε διάνυσμα } \mathbf{a}$$

- **Ιδιότητα 4** : Οι ιδιοτιμές του Autocorrelation πίνακα έχουν πραγματικές μη-αρνητικές τιμές.

WSS Ανέλιξη Λευκού Θορύβου v(n)

- Ιδιότητες Λευκού Θορύβου
  - Μηδενική Μέση τιμή

$$E\{v[n]\} = 0$$

  - Αυτοσυσχέτιση (auto-correlation)

$$E\{v[n]v^*[k]\} = \sigma_v^2 \cdot \delta[n-k]$$

- Λευκός Gaussian Θόρυβος (WGN)
  - Κάθε δείγμα της στοχαστικής ανέλιξης είναι ασυσχέτιστο με οποιοδήποτε άλλο δείγμα και υπακούει μια Γκαουσιανή κατανομή με μηδενική μέση τιμή.

Φάσμα Ισχύος: Θεώρημα Einstein-Wiener-Khintchine

- Το φάσμα ισχύος μιας WSS στοχαστικής ανέλιξης ισούται με τον DTFT της αυτοσυσχέτισης της :

$$P_x\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x[k]e^{-jk\omega}$$

$$P_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x[k]z^{-k}$$

Παραδείγματα Αυτοσυσχέτισης & Φάσματος Ισχύος

- **Λευκος Θορυβος** (zero-mean white noise process)

$$r_v(k) = \sigma_v^2 \delta(k) \qquad P_v(e^{j\omega}) = \sigma_v^2$$

- **Αρμονικη** (random-phase sinusoid):

$$r_x(k) = \frac{1}{2} A^2 \cos(k\omega_0)$$

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\pi A^2 \big[u_0(\omega - \omega_0) + u_0(\omega + \omega_0)\big]$$

- **AR(1)** $\quad r_x(k) = \alpha^{|k|} \qquad |\alpha| < 1$

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos\omega + \alpha^2}$$

Ιδιότητες Φάσματος Ισχύος

- **Ιδιότητα 1** : Συμμετρία. Το φάσμα ισχύος μιας WSS στοχαστικής ανέλιξης *x[n]* παίρνει πραγματικές τιμές, δηλαδή $P_x(e^{j\omega}) = P_x^*(e^{j\omega})$ και ο μετασχηματισμός Z ικανοποιεί την συνθήκη συμμετρίας $$P_x(z) = P_x^*(1/z^*)$$
- **Ιδιότητα 2 :** Αν η *x[n]* είναι πραγματική τότε το φάσμα είναι άρτιο, δηλαδή $P_x(e^{j\omega}) = P_x(e^{-j\omega})$
- **Ιδιότητα 3** : Το φάσμα ισχύος είναι μη-αρνητικό $$P_x(e^{j\omega}) \geq 0$$
- **Ιδιότητα 4** : Η ισχύς σε μια WSS στοχαστική ανέλιξη μηδενικής μέσης τιμής είναι ίση με $$E\left\{|x[n]|^2\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega})\, d\omega$$

Παραγοντοποίηση Φάσματος Ισχύος (Ι)

- Αν το φάσμα ισχύος μιας $P_x(e^{j\omega})$ WSS στοχαστικής ανέλιξης είναι συνεχής συνάρτηση του ω και η $\ln[P_x(z)]$ είναι αναλυτική σε μια κυκλική ζώνη που περιέχει τον μοναδιαίο κύκλο, τότε το φάσμα μπορεί να γραφεί ως γινόμενο της μορφής

$$\boxed{P_x(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*)}$$

όπου

$$\sigma_0^2 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln P_x(e^{j\omega})\right\}$$

$$Q(z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} c[k] z^{-k}\right\}$$ Causal and Minimum-phase

$$c[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln P_x(e^{j\omega}) e^{jk\omega} d\omega$$ Cepstrum του $r_x[k]$

ΓΧΑ Φιλτραρισμα Διακριτων Τυχαιων Σηματων-1

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

Μέσος εξόδου:

$$E\{y(n)\} = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = m_x H(e^{j0})$$

Αυτοσυσχέτιση εξόδου:

$$r_x(k) \to \boxed{h(k)} \xrightarrow{r_{yx}(k)} \boxed{h^*(-k)} \to r_y(k)$$

$$r_{yx}(k) = r_x(k) * h(k)$$

$$r_y(k) = r_{yx}(k) * h^*(-k)$$

ΓΧΑ Φιλτραρισμα Διακριτων Τυχαιων Σηματων-2

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

$$r_x(k) \to \boxed{h(k)} \xrightarrow{r_{yx}(k)} \boxed{h^*(-k)} \to r_y(k)$$

$$\boxed{r_y(k) = r_x(k) * r_h(k)}$$

$$h = \text{FIR} \rightarrow \quad \sigma_y^2 = E\left\{|y(n)|^2\right\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R}_x \mathbf{h}$$

$$\boxed{P_y(e^{j\omega}) = P_x(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2}$$

$$\boxed{P_y(z) = P_x(z) H(z) H^*(1/z^*)}$$

Παραγοντοποίηση Φάσματος Ισχύος (ΙΙ)

- Κάθε στοχαστική ανέλιξη που μπορεί να διασπασθεί στην προηγούμενη μορφή ονομάζεται **κανονική (regular)**
- **Ιδιότητες**
  - Κάθε κανονική ανέλιξη μπορεί να προκύψει ως η έξοδος ενός αιτιατού ευσταθούς φίλτρου $Q(z)$ διεγερμένο από λευκό θόρυβο $v[n]$ με διασπορά σ_0^2
  - Το αντίστροφο φίλτρο $1/Q(z)$ είναι whitening, δηλαδή με είσοδο τη $x[n]$ προκύπτει ως έξοδος λευκός θόρυβος με διασπορά σ_0^2
  - Επειδή οι διαδικασίες $v[n]$ και $x[n]$ σχετίζονται μέσω ενός αντιστρέψιμου μετασχηματισμού, η μία ανέλιξη μπορεί να προκύψει από την άλλη.

Παραγοντοποίηση Ρητού Φάσματος Ισχύος

Αν η $P_x(z)$ είναι ρητή συνάρτηση τότε :

$$P_x(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*(1/z^*) = \sigma_0^2 \left[\frac{B(z)}{A(z)}\right]\left[\frac{B^*(1/z^*)}{A^*(1/z^*)}\right]$$

όπου τα πολυώνυμα

$$B(z) = 1 + b[1]z^{-1} + \ldots + b[q]z^{-q}$$

$$A(z) = 1 + a[1]z^{-1} + \ldots + a[p]z^{-p}$$

έχουν όλες τις ρίζες τους εντός του μοναδιαίου κύκλου

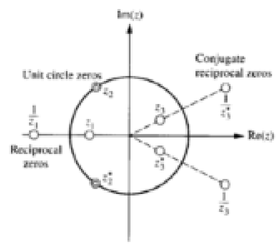


Figure 3.10 *The symmetry constraints that are placed on the zeros of the power spectrum of a real-valued random process when the power spectrum is a rational function of z.*

ARMA Μοντελοποίηση (1)

- Υποθέτουμε ότι φιλτράρουμε λευκό θόρυβο $v[n]$ με ένα αιτιατό Γ.Χ.Α. φίλτρο που έχει συνάρτηση μεταφοράς με p πόλους και q μηδενικά

$$H(z) = \frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a[k]z^{-k}}$$

- Η έξοδος $x[n] = h[n] * v[n]$ θα είναι μια WSS στοχαστική ανέλιξη με φάσμα ισχύος

$$P_x\left(e^{j\omega}\right) = P_v\left(e^{j\omega}\right) \cdot \frac{\left|B_q\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}{\left|A_p\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}$$

όπου $P_v\left(e^{j\omega}\right) = \sigma_v^2$ το φάσμα ισχύος του θορύβου.

- Μια στοχαστική ανέλιξη που το φάσμα της είναι της παραπάνω μορφής ονομάζεται **ARMA(p,q) ανέλιξη**.

12) Στατιστικά Μοντέλα ARMA για σήματα διακριτού χρόνου

13) Μοντελοποίηση με Ελάχιστα Τετράγωνα, Βέλτιστα Γραμμικά Φίλτρα Wiener και Εφαρμογές

minimize ξ = E{ |e[n]|^2 } => Βέλτιστα (wiener) φίλτρο.

FIR Wiener Φίλτρο (1): Σύνοψη

Υποθέσεις: $x[n]=d[n]+v[n]$, $x[n]$ and $d[n]$ are jointly WSS, known auto-correlations and cross-correlation

Συνάρτηση Μεταφοράς

$$W(z) = \sum_{n=0}^{p-1} w[n] z^{-n}$$

Wiener-Hopf Κανονικές Εξισώσεις:

$$\boxed{\sum_{\ell=0}^{p-1} w[\ell] r_x[k-\ell] = r_{dx}[k], \quad k = 0, 1 \ldots, p-1}$$

Correlations

$$r_x[k] = E\{x[n]x^*[n-k]\}$$
$$r_{dx}[k] = E\{d[n]x^*[n-k]\}$$

$$\boxed{\mathbf{R}_x \mathbf{w} = \mathbf{r}_{dx}}$$

Minimum Error

$$\xi_{min} = r_d[0] - \sum_{=0}^{p-1} w[\ell] r_{dx}^*[\ell]$$

13

$$\boxed{\xi_{\min} = r_d(0) - \mathbf{r}_{dx}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{dx}}$$

$$\begin{aligned} r_{dx}(k) &= E\{d(n)x^*(n-k)\} \\ &= E\{d(n)d^*(n-k)\} + E\{d(n)v^*(n-k)\} \\ &= r_d(k) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \cdots & r_x^*(p-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x^*(p-2) \\ r_x(2) & r_x(1) & \cdots & r_x^*(p-3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \\ \vdots \\ w(p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \\ r_{dx}(2) \\ \vdots \\ r_{dx}(p-1) \end{bmatrix}$$

IIR Non-Causal Wiener Φίλτρο

$$P_x(e^{j\omega}) = P_d(e^{j\omega}) + P_v(e^{j\omega})$$

$$r_x(k) = r_d(k) + r_v(k)$$

$$P_{dx}(e^{j\omega}) = P_d(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{P_d(e^{j\omega})}{P_d(e^{j\omega}) + P_v(e^{j\omega})}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_d(e^{j\omega})\left[1 - H(e^{j\omega})\right] d\omega$$

IIR Causal Wiener Φίλτρο

$$\hat{d}(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$\boxed{\sum_{l=0}^{\infty} h(l) r_x(k-l) = r_{dx}(k) \quad ; \quad 0 \le k < \infty}$$

Wiener-Hopf

$$H(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} h[\ell] z^{-\ell} = \underbrace{\frac{1}{\sigma_0 Q(z)}}_{\text{Whitening}} \underbrace{\left[\frac{P_{dx}(z)}{\sigma_0 Q^*(1/z^*)}\right]_+}_{Z\{\text{Causal Part}\}}$$

$$\xi_{\min} = r_d(0) - \sum_{l=0}^{\infty} h(l) r_{dx}^*(l)$$

Causal Wiener φιλτρο:

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)} \left[\frac{P_{dx}(z)}{Q^*(1/z^*)} \right]_+}$$

Non-causal Wiener φιλτρο:

$$\boxed{H_{\mathrm{nc}}(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)} \left[\frac{P_{dx}(z)}{Q^*(1/z^*)} \right]}$$

14) Μέθοδοι Εκτίμησης Φάσματος Ισχύος Τυχαίων Σημάτων

Περιοδογραμμα, Μεση τιμη και Μεταβλητοτητα

$$\hat{P}_{\mathrm{PER}}(\omega) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\exp(-j\omega n)\right|^2$$

Φάσμα ισχύος

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k)e^{-jk\omega}$$

Periodogram (εκτιμηση φασματος)

$$\hat{P}_{per}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{r}_x(k)e^{-jk\omega}$$

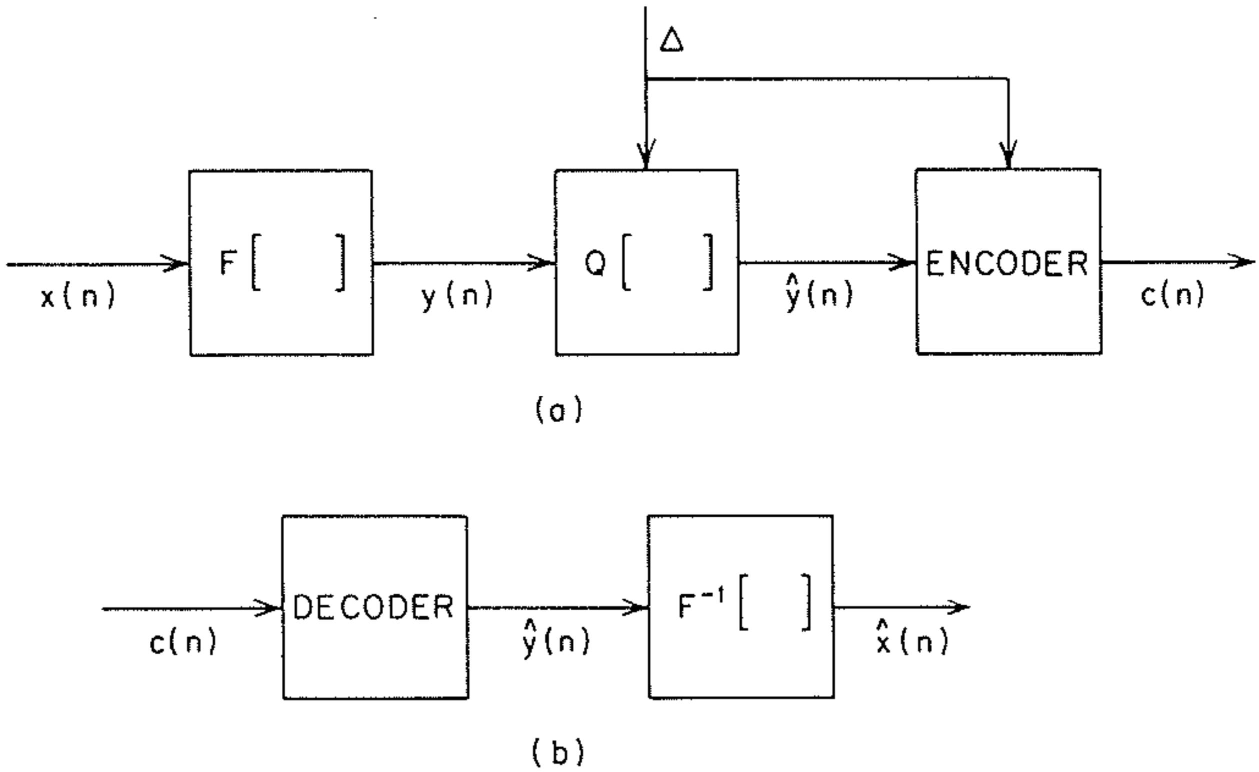
15) Ορθογώνιοι Μετασχηματισμοί (DFT, DCT, Haar, SVD, KLT-PCA), Χώροι Hilbert, και Εφαρμογές

16) Ψηφιακή Κωδικοποίηση Σημάτων και Συμπίεση Δεδομένων (PCM, Log-PCM, (A)DPCM, Multipulse LPC, CELP, Vocoders, Vector Quantization)

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{E[x^2(n)]}{E[e^2(n)]} = \frac{\sum_n x^2(n)}{\sum_n e^2(n)}$$

$$\Delta = \frac{2X_{\max}}{2^B} \qquad \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{X_{\max}^2}{(3)2^{2B}}$$

$$SNR\,(\mathrm{dB}) = 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) = 6B + 4.77 - 20\log_{10}\left(\frac{X_{\max}}{\sigma_x}\right)$$



17) Θεωρία Κυματιδίων (Wavelets), CWT/DWT, και Εφαρμογές σε Χρονοσυχνοτική Ανάλυση και Πολυκλιμακωτή/Πολυρυθμική Επεξεργασία Σημάτων