# 3η Γραπτή Σειρά

Παπαρρηγόπουλος Θοδωρής
el18040
paparrigopoulosthodoris@gmail.com

## Άσκηση 3.1

$r_x[0] = 1.2$
$r_x[1] = 0.75$
$r_x[2] = 0.6$
$r_x[3] = 0.5$

α) Αρχικοποίηση $E_{min}^{(0)} = r_x[0] = 1.2$

**Τάξη $i=1$**

$$\kappa_1 = -\frac{r_x[1]}{E_{min}^{(0)}} = -0.625$$

$a_1^{(1)} = -\kappa_1 = 0.625$
$E_{min}^{(1)} = (1-\kappa_1^2)E_{min}^{(0)} = 0.7312$

**Τάξη $i=2$**

$$\kappa_2 = -\frac{r_x[2] - a_1^{(1)} r_x[1]}{E_{min}^{(1)}} = -0.1795$$

$a_2^{(2)} = -\kappa_2 = 0.1795$
$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + \kappa_2 a_1^{(1)} = 0.5128$
$E_{min}^{(2)} = (1-\kappa_2^2) E_{min}^{(1)} = 0.7076$

Τάξη $i=3$

$$k_3 = -\frac{r_x[3] - a_1^{(2)} r_x[2] - a_2^{(2)} r_x[1]}{E_{min}^{(2)}} = -0.0815$$

$a_3^{(3)} = -k_3 = 0.0815.$

$a_1^{(3)} = a_1^{(2)} + k_3 a_2^{(2)} = 0.4982$

$a_2^{(3)} = a_2^{(2)} + k_3 a_1^{(2)} = 0.1377$

Συνεπώς, $LPC = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}\} = \{0.4982, 0.1377, 0.0815\}$

και $PARCOR = \{k_1, k_2, k_3\} = \{-0.625, -0.1795, -0.0815\}.$

β) $a_1 = a_1^{(4)} = -0.3775$ Τρέχουμε τον αλγόριθμο ανάποδα.

$a_2 = a_2^{(4)} = -0.23$

$a_3 = a_3^{(4)} = 0.4825$

$a_4 = a_4^{(4)} = 0.6.$

Τάξη $i=4$

$a_4^{(4)} = -k_4 \Rightarrow k_4 = -0.6.$

$$\begin{cases} a_1^{(4)} = a_1^{(3)} + k_4 a_3^{(3)} \\ a_2^{(4)} = a_2^{(3)} + k_4 a_2^{(3)} \\ a_3^{(4)} = a_3^{(3)} + k_4 a_1^{(3)} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας την 1η σχέση στη 3η

$\Rightarrow a_3^{(3)} = a_3^{(4)} - k_4 (a_1^{(4)} - k_4 a_3^{(3)}).$

$$\Rightarrow a_3^{(3)} = \frac{a_3^{(4)} - k_4 a_1^{(4)}}{1 - k_4^2} = 0.24.$$

Αντίστοιχα από την (1) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow a_1^{(3)} = a_1^{(4)} - x_4(a_3 - x_4 a_1^{(3)})$

$\Rightarrow a_1^{(3)} = \frac{a_1 - x_4 a_3}{1 - x_4^2} = -0.1375.$

Και στην 2η έχουμε $a_2^{(3)} = \frac{a_2}{x_4 + 1} = -0.575.$

Τάξη $i=3$

$a_3^{(3)} = -x_3 \Rightarrow x_3 = -0.4.$

$$\begin{cases} a_1^{(3)} = a_1^{(2)} + x_3 a_2^{(2)} \\ a_2^{(3)} = a_2^{(2)} + x_3 a_1^{(2)} \end{cases}$$

Ομοίως με πριν προκύπτει,

$a_1^{(2)} = \frac{a_1^{(3)} - x_3 a_2^{(3)}}{1 - x_3^2} = -0.4375$ και

$a_2^{(2)} = a_2^{(3)} - x_3 a_1^{(2)} = -0.75.$

Τάξη $i=2$

$a_2^{(2)} = -x_2 \Rightarrow x_2 = 0.75.$

$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + x_2 a_1^{(1)} \Rightarrow a_2^{(2)} = (x_2 + 1) a_1^{(1)}$

$\Rightarrow a_1^{(1)} = \frac{a_2^{(2)}}{x_2 + 1} = -0.25.$

Τάξη $i=1$

$x_1 = -a_1^{(1)} = 0.25$

PARCOR = $\{0.25, 0.75, -0.4, -0.6\}$.

# Άσκηση 3.2

$$d[n] = 0.6 d[n-1] + w[n]$$

α) Από την ανάλυση του βιβλίου ~~....~~ στο 3.6.2 είναι

$$r_d[k] = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2} a^{|k|} = \frac{0.6^{|k|}}{0.64}$$

β) $W(z) = w[0] + w[1] z^{-1}$

$\Rightarrow w[n] = w[0]\delta[n] + w[1]\delta[n-1]$

Οι βέλτιστοι συντελεστές λύνονται από την wiener - Hopf

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \end{bmatrix}$$

$r_{dx}[k] = r_x[k]$

Επειδή τα ~~...~~ $d[n]$ και $v[n]$ είναι ασυσχέτιστα ~~...~~ ισχύει:

$$r_x[n] = r_d[n] + r_v[n] = \frac{0.6^{|n|}}{0.64} + \delta[n]$$

Έτσι $r_x[0] = 2.5625$ και $r_x[1] = 0.9375$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2.5625 & 0.9375 \\ 0.9375 & 2.5625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5625 \\ 0.9375 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Γενικά αν

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+by=d \\ bx+ay=e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abx+b^2y=db \\ abx+a^2y=ae \end{cases}$$

$$\Rightarrow (b^2-a^2)y = bd-ae$$

$$\Rightarrow y = \frac{bd-ae}{b^2-a^2} \text{ και}$$

$$x = \frac{d-by}{a}$$

$$\Rightarrow w[1] = \frac{r_x[1]r_{dx}[0]-r_x[0]r_{dx}[1]}{(r_x[1])^2-(r_x[0])^2} = 0.1669$$

$$\text{και } w[0] = \frac{r_{dx}[0]-r_x[1]w[1]}{r_x[0]} = \underline{0.548}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι

$$J_{\min_2} = r_d[0] - \sum_{k=0}^{1} w[k]\, r_d[k] = 0.5497.$$

γ) $W(z) = w[0] + w[1]z^{-1} + w[2]z^{-2}$.

$$\rightarrow w[n] = w[0]\delta[n] + w[1]\delta[n-1] + w[2]\delta[n-2]$$

Οι βέλτιστοι συντελεστές προκύπτουν λύνοντας το σύστημα Wiener-Hopf εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] \\ r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \\ r_{dx}[2] \end{bmatrix}$$

Also, $r_x[n] = r_d[n] + r_v[n] = \dfrac{(0.6)^{|n|}}{0.64} + \delta[n]$.

$r_{dx}[n] = r_d[n] = \dfrac{(0.6)^{|n|}}{0.64}$.

$$A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2.5625 & 0.9375 & 0.5625 \\ 0.9375 & 2.5625 & 0.9375 \\ 0.5625 & 0.9375 & 2.5625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5625 \\ 0.9375 \\ 0.5625 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 12.5.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6.8125.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = 1.875$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = 0.5625.$$

$\Rightarrow$ $w[0] = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 0.545$

$w[1] = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 0.15$

$w[2] = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 0.045.$

$$J_{FIR_3} = r_d[0] - \sum_{n=0}^{2} w[n]\, r_d[n] = 0.545$$

δ) Για την χρωστική απόκριση $h_{nc}[n]$ και συνάρτηση μεταφοράς $H_{nc}(z)$ του ~~αιτ~~ μη αιτιατού wiener φίλτρου ισχύουν

$$h[n] * r_x[n] = r_{dx}[n] \quad , \quad H_{nc}(z) = \frac{P_{dx}(z)}{P_x(z)}$$

Επομένως, αφού τα $d[n]$ και $v[n]$ είναι ασυσχέτιστα και άρα

$$P_{dx}(z) = P_d(z) \; , \; P_x(z) = P_d(z) + P_v(z) \; ,$$

και επειδή το φάσμα ισχύος του $d[n]$ είναι

$$r_d[n] = \frac{0.6^{|k|}}{0.64} \xleftrightarrow{z} P_d(z) \overset{\cancel{a=}0.6}{=} \frac{\cancel{1-a^2}\;1}{(1-az^{-1})(1-az)\cancel{(1-a^2)}} \cdot \frac{1}{0.64} \quad |a|<z<1/a$$

(Η σχέση αποδείχθει στην σειρά 2).

η συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει.

$$H_{nc}(z) = \frac{P_{dx}(z)}{P_x(z)} = \frac{P_d(z)}{P_d(z)+P_v(z)}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}}{\dfrac{1}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} + 1}$$

$$= \frac{1}{1 + (1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} = \frac{1}{1 + 1 - 0.6z - 0.6z^{-1} + 0.6^2}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2.36 - 0.6z - 0.6z^{-1}}}$$

ε) $h[n]$,

$$H_{nc}(z) = \frac{-z}{0.6z^2 - 2.36z + 0.6} = \frac{-z}{0.6(z-3.66)(z-0.27)}$$

$$= -\frac{z}{0.6(3.66-0.27)}\left(\frac{1}{z-3.66} - \frac{1}{z-0.27}\right)$$

$$= -\frac{1}{2.034}\left(\frac{1}{1-3.66z^{-1}} - \frac{1}{1-0.27z^{-1}}\right)$$

$$\Rightarrow h_{nc}[n] = \frac{(3.66)^n}{2.034} u[-n-1] + \frac{(0.27)^n u[n]}{2.034}$$

$$\xi_{nc} = \cancel{\tfrac{1}{2\pi}}\, r_d[0] - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_d(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})\, d\omega$$

$$= r_d[0] - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})\, d\omega$$

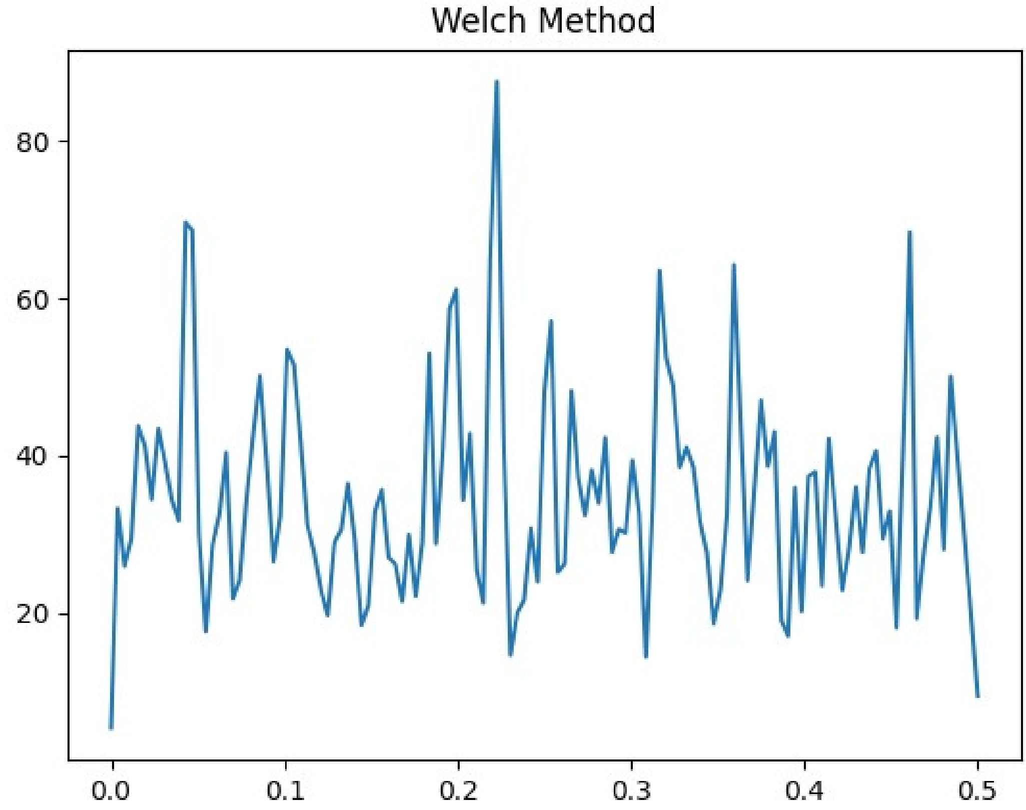
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_v(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})\, d\omega$$

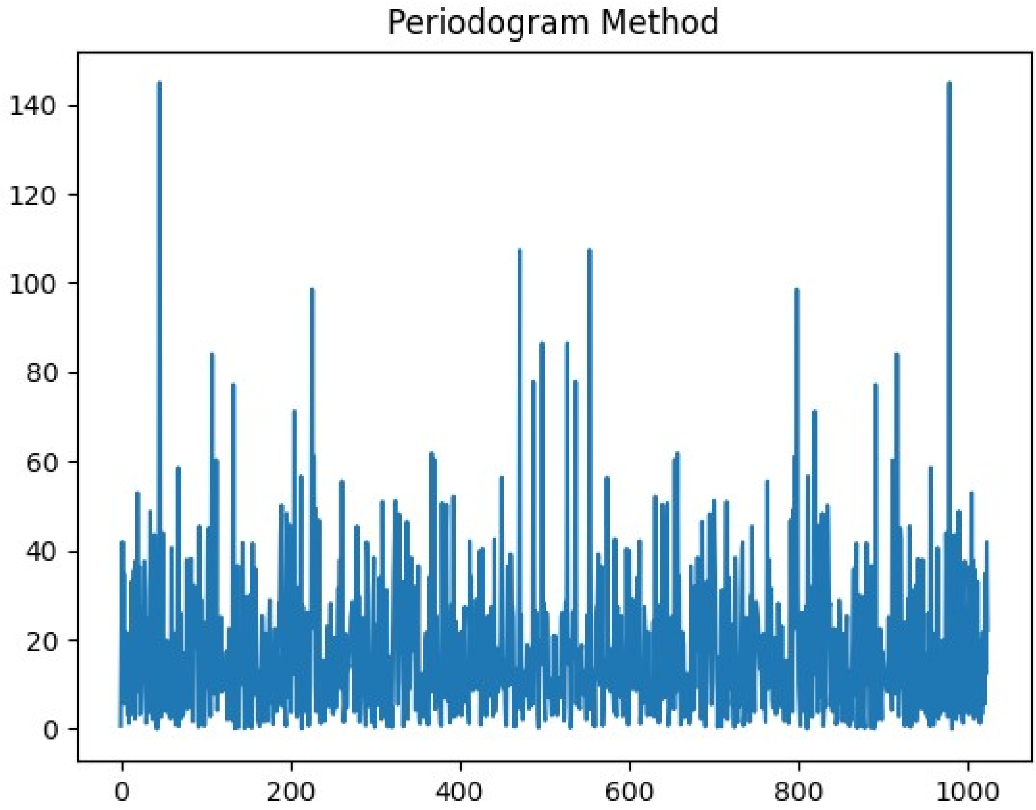
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_v(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})\, d\omega$$

$$= \sigma_w^2\, h_{nc}[0] = \underline{0.5}$$

Παρατηρούμε πως $\xi_{nc} < \xi_{fir,3} < \xi_{fir,2}$.

3.3)




var_per = 288.99486880110186
var_welch = 176.21710419633456

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import welch
import statistics

figure_counter = 0
omega1 = 0.4 * np.pi
omega2 = 0.5 * np.pi
omega3 = 0.8 * np.pi

N = 1024
n = np.arange(N)

phi1 = np.random.uniform(0.0, 2*np.pi, size=N)
phi2 = np.random.uniform(0.0, 2*np.pi, size=N)

x = (
      3 * np.cos(omega1 * n + phi1)
    +     np.sin(omega2 * n + phi2)
    + 5 * np.sin(omega3 * n + phi2)
    + np.random.randint(1)
)

f, welch = welch(x , window='hamming')

per = 1/N  * np.abs(np.fft.fft(x)) ** 2
```

```
var_per = statistics.variance(per)
var_welch = statistics.variance(welch)

file = open('variances.txt', 'w+')
file.write(
    'var_per = ' + str(var_per)
    + '\n' + 'var_welch = ' + str(var_welch)
)
file.close()

# Figures
figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('x[n]')
plt.plot(n,x)

figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('Welch Method')
plt.plot(f, welch)
plt.savefig('welch.png')

figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('Periodogram Method')
plt.plot(n, per)
plt.savefig('periodogram.png')

plt.show()
```

Ασκηση 3.4)

α) $J = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \| x_n - a_n e \|^2$

Για να έχουμε ελάχιστο θέλουμε
$\frac{\partial J}{\partial a_n} = 0$ και $\frac{\partial^2 J}{\partial a_n^2} > 0$.

$$\frac{\partial J}{\partial a_n} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n - a_n e)(-e) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n - a_n e) e = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{N} (a_n - x_n e) = 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} x_n e.$$

$$\Rightarrow N a_n = \sum_{n=1}^{N} x_n e$$

$$\Rightarrow a_n = \langle x_n, e \rangle = e^T x_n = x_n^T e.$$

β) $J_s = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \| x_n - a_n e \|$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n - a_n e)^T (x_n - a_n e)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n^T x_n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n e^T x_n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n^T a_n e + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n e^T a_n e.$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (e^T x_n)(e^T x_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n^T e^T x_n e + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 - \cancel{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|a_n\|^2} - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^T x_n \cancel{x_n}^T e + \cancel{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|a_n\|^2}$$

Scanned with CamScanner

$$= -e^T\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n x_n^T\right)e + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2.$$

γ) Η προσέγγιση αντιστοιχεί σε PCA τάξης $p=1$

δ) Ορίζοντας πίνακα $X$ όπου θα έχει ως γραμμές τα $x_n$ τότε $R_x = \frac{1}{N} X^T X$

Κάνουμε τώρα SVD με $p=1$ προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε το λάθος προσέγγισης. Έτσι,

$$X = U\Sigma V^H \Rightarrow R_x = \frac{1}{N} V \Sigma^T \underbrace{U^T U}_{I} \Sigma V^T$$

$$\Rightarrow R_x = \frac{1}{N} V \Sigma^T \Sigma V^T$$

όπου $\Sigma$ ο διαγώνιος πίνακας

$$\Rightarrow R_x = \frac{1}{N} V \Sigma^2 V^T = V \frac{\Sigma^2}{N} V^T$$

Για να ελαχιστοποιηθεί το $J$ αρκεί να αυξηθεί ο όρος $e^T R_x e$ όπου $R_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n x_n^T$

Έτσι, πρέπει να επιλέξουμε $e = v_1$ όπου $v_1$ είναι το ιδιοδιάνυσμα της μεγαλύτερης ιδιοτιμής.

Οπότε $v_1 = e$ και $a_n = x_n^T v_1$

ε) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & -6 & 3 \\ -6 & 12 & -5 \\ 3 & -5 & 5 \end{bmatrix} \equiv R_x \cdot N = R_x \cdot 4.$$

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή $\lambda = 5.805$ είναι το

$$e = \begin{bmatrix} 2.818 & -1.952 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.818 \\ -1.952 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.866 \\ 10.674 \\ -1.952 \\ 13.224 \end{bmatrix}.$$

3.5)
περισπωμένη
καπελάκι
Οι σχέσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:
1) x(n) – x_περισπωμένη(n) = d(n)
2) d_(n) + x_περισπωμένη(n) = x_καπελάκι(n)
3) x_περισπωμένη(n) = x_καπελάκι(n - 1)
4) d_καπελάκι(n) = 1 if d(n) >= 0 else 0

Για να λύσω την άσκηση έφτιαξα 1 scriptaki σε python που του περνάω τον πίνακα x (μαζί με τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται και υπολογίζει το αποτέλεσμα

```
x:  [0 1 1 1 1 2 4 5 7 9 0 0 0 0]
x_perispomeni:  [0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3]
d:  [0, 0, -1, 0, -1, 1, 2, 2, 3, 4, -6, -5, -4, -3]
d_kapelo:  [1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1]
c:  [0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]
x_kapelo:  [1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2]
```

```python
import numpy as np

def d_kapelos(d_n):
    if d_n >= 0:
        return 1
    else:
        return -1

x = np.array([0,0,1,1,1,1,2,4,5,7,9,0,0,0,0])
d = []
x_kapelo = [0]
d_kapelo = []
x_perispomeni = []
c = []

for n in range(1, len(x)):
    d_value = x[n] - x_kapelo[n-1]
    d_fun = d_kapelos(d_value)

    d.append(d_value)
    d_kapelo.append(d_fun)

    x_kapelo.append(d_fun + x_kapelo[n-1])
    x_perispomeni.append(x_kapelo[n-1])

    if d_fun == 1:
        c.append(0)
    else:
        c.append(1)
```

```
print("x: ", x[1:])
print("x_perispomeni: ", x_perispomeni)
print("d: ", d)
print("d_kapelo: ", d_kapelo)
print("c: ", c)
print("x_kapelo: ", x_kapelo[1:])
```