1η Γραπτή Σειρά.

Παπαρρηγόπουλος Θοδωρής
el18040
paparrigopoulosthodoris@gmail.com.

Άσκηση 1.1)

$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + 3\delta[n-3] - \delta[n-5] + 2\delta[n-6]$
$\quad - 4\delta[n-7]$

$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$.

α) Έστω $X[k]$ και $H[k]$ οι 8-σημείων DFT των σημάτων $x[n]$ και $h[n]$. $(N=8)$

Είναι $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \omega^{kn}$ με $\omega = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

$\Rightarrow X[k] = 1 + 2\omega^{k} - \omega^{2k} + 3\omega^{3k} - \omega^{5k} + 2\omega^{6k} - 4\omega^{7k}$.

και αντίστοιχα $H[k] = 1 - 2\omega^{k} + \omega^{2k}$

Επιπλέον, $Y[k] = X[k]\,H[k]$, όπου $Y[k]$ ο DFT 8-σημείων το $y[n]$.
Επίσης, να σημειωθεί ότι για $\omega^{\lambda k}$ με $\lambda \geq N$ το μετατρέπουμε σε $\lambda \bmod N$ λόγω κυκλικότητας στον χρόνο του DFT. Έτσι, έχουμε,

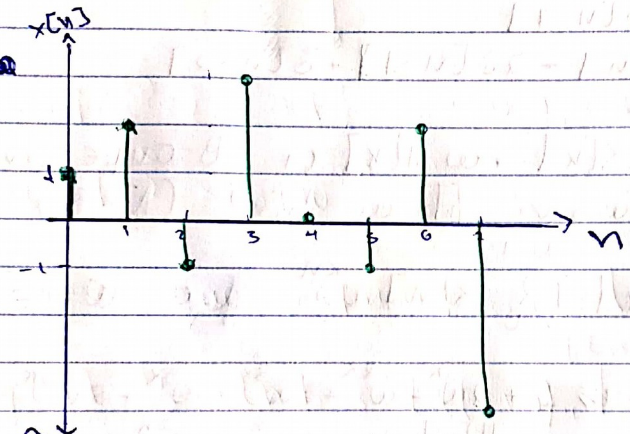
$$\begin{aligned} Y[k] = {} & (1 - \cancel{2\omega^{k}} + \cancel{\omega^{2k}}) + (\cancel{2\omega^{k}} - \cancel{4\omega^{2k}} + \cancel{2\omega^{3k}}) \\ & + (-\cancel{\omega^{2k}} + \cancel{2\omega^{3k}} - \cancel{\omega^{4k}}) + (\cancel{3\omega^{3k}} - \cancel{6\omega^{4k}} + 3\omega^{5k}) \\ & + (-\omega^{5k} + 2\omega^{6k} - \omega^{7k}) + (2\omega^{6k} - 4\omega^{7k} + 2\omega^{8k}) \\ & + (-4\omega^{7k} + 8\omega^{8k} - 4\omega^{9k}) \\ = {} & 1 - 4\omega^{2k} + 7\omega^{3k} - 7\omega^{4k} + 2\omega^{5k} + 4\omega^{6k} - 9\omega^{7k} + 10\omega^{8k} - 4\omega^{9k} \end{aligned}$$

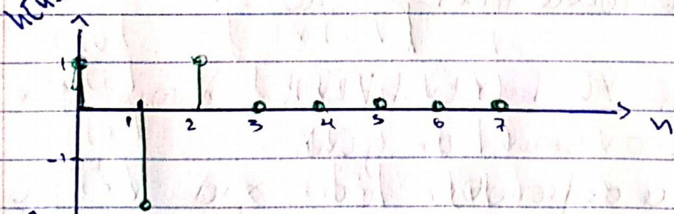
$$\Rightarrow y[n] = \delta[n] - 4\delta[n-2] + 7\delta[n-3] - 7\delta[n-4] + 2\delta[n-5] + 4\delta[n-6] - 9\delta[n-7] + 10\delta[n-8] - 4\delta[n-9]$$

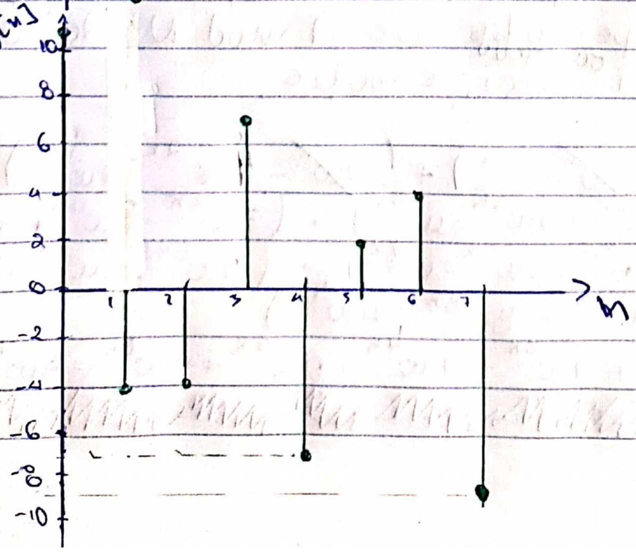
και λόγω κυκλικότητας επειδή έχουμε $N=8$ σημεία προκύπτει

$$y[n] = 11\delta[n] - 4\delta[n-1] - 4\delta[n-2] + 7\delta[n-3] - 7\delta[n-4] + 2\delta[n-5] + 4\delta[n-6] - 9\delta[n-7]$$

β)







γ) Έστω N αρκετά μεγάλο ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη όπως ήταν στο (α).
Τότε, γεμίζω το x και το h με μηδενικά στο τέλος (zero padding).
Έτσι, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτουμε στο:

$$Y[k] = 1 - 4W^{2k} + 7W^{3k} - 7W^{4k} + 2W^{5k} + 4W^{6k} - 9W^{7k} + 10W^{8k} - 4W^{9k}.$$

~~Αν τα~~
Για αυτό το μεγάλο N θα είναι

$$y[n] = \delta[n] - 4\delta[n-2] + 7\delta[n-3] - 7\delta[n-4] + 2\delta[n-5] + 4\delta[n-6] - 9\delta[n-7] + 10\delta[n-8] - 4\delta[n-9].$$

Η συνέλιξη $x[n]*h[n]$ θα έχει ακριβώς τους παραπάνω όρους, όμως θα έχει μέγεθος 10 σημείων.

Άρα για $N \geq 10$ το σήμα μας $y[n]$ θα ταυτίζεται με το $x[n]*h[n]$.

Συνεπώς, το ελάχιστο N που ικανοποιεί αυτή τη σχέση είναι $N_{min} = 10$.

δ) $P[k] = j^k X[k]$ με $0 \leq k \leq 7$.

Προσπαθώντας να γραφτεί το j^k σε μορφή W^{km}. ψάχνουμε m τέτοιο ώστε:

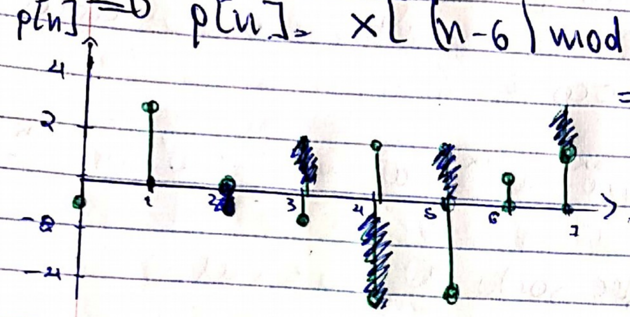
$$W^m = j \Rightarrow e^{-j\frac{2\pi m}{N}} = j \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi m}{N}\right) = j$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right) = 0 \text{ και } \sin\left(\frac{2\pi m}{N}\right) = -1.$$

$\Rightarrow \boxed{m=6}$

Έτσι $P[k] = j^k X[k] = W^{6k} X[k]$.

$\Rightarrow p[n] = x[(n-6) \bmod 8]$.



$\Rightarrow p[n] = -\delta[n] + 3\delta[n-1] - \delta[n-3] + 2\delta[n-4] - 4\delta[n-5] + \delta[n-6] + 2\delta[n-7]$.

δ2) $Q[k] = Re\{X[2k]\}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{2kn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] W^{2kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N} x[n] W_4^{2kn}$$

Συνεπώς, εαν θεωρήσουμε $r[n] \longleftrightarrow X[2k]$

$q[n] \longleftrightarrow Re\{X[2k]\}$.

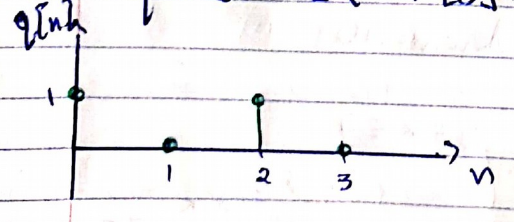
$$q[n] = \frac{1}{2} r[n] + r^*[((-n))_4]$$

$$\Rightarrow q[0] = \frac{1}{2}[2r[0]] = 1.$$

$$q[1] = 1/2\,(r[1] + r[3]) = 0$$

$$q[2] = 1/2\,(r[2] + r[2]) = 1$$

$$q[3] = 1/2\,(r[3] + r[1]) = 0.$$



Άσκηση 1.2)

$$x[n] = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{(\pi n)^2} = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} \cdot \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}.$$

$\Rightarrow$ Είναι:

Αν $t[n] = \dfrac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$ τότε $T(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\omega| \le \pi \end{cases}$ περίοδο 2π.

Άρα, $X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{2\pi} T(e^{j\omega}) * T(e^{j\omega})$.

Από θεωρία η συνέλιξη 2 τετραγωνικών παλμών προκαλεί τριγωνικό παλμό

~~Άρα~~,

Αναλυτικά, έχουμε το εξής:

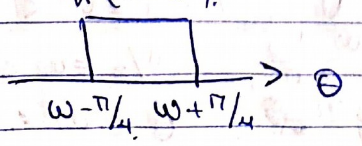
Αν $C(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} H(\omega) * H(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} H(\theta) \cdot H(\omega-\theta)\, d\theta$

με $H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi/4 \\ 0, & \pi/4 < |\omega| \le \pi. \end{cases}$

Επειδή $H(\theta) = 0$ για $|\theta| > \pi/4$.

$$\Rightarrow C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} H(\theta) H(\omega-\theta)\, d\theta.$$

$H(\omega-\theta)$.



• $1^{η}$ Περίπτωση:

για $\omega+\pi/4 < -\pi/4 \Rightarrow \omega < -\pi/2$ και $\omega \geq -\pi$.

Τότε $C(\omega)=0$, $-\pi \leq \omega < -\pi/2$.

• $2^{η}$ Περίπτωση:

Για $\omega+\pi/4 \geq -\pi/4$ και $\omega-\pi/4 \leq -\pi/4$.

$\Rightarrow -\pi/2 \leq \omega < 0$. τότε

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\omega+\pi/4} d\theta = \frac{\omega+\pi/4-(-\pi/4)}{2\pi} = \frac{\omega+\pi/2}{2\pi}.$$

• $3^{η}$ Περίπτωση:

Για $\omega-\pi/4 \geq -\pi/4$ και $\omega+\pi/4 \geq \frac{\pi}{4}$.

$\Rightarrow 0 \leq \omega < \frac{\pi}{2}$. τότε

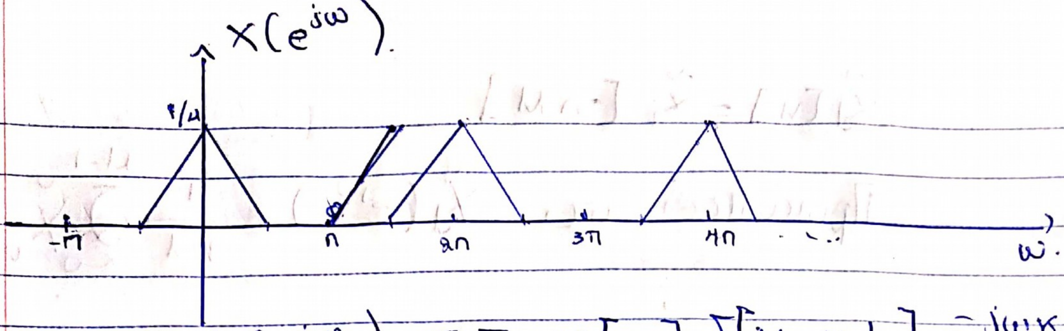
$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega-\pi/4}^{\pi/4} d\theta = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}-(\omega-\pi/4)\right) = \frac{\frac{\pi}{2}-\omega}{2\pi}.$$

• $4^{η}$ Περίπτωση:

$\omega-\pi/4 \geq \pi/4 \Leftrightarrow \omega \geq \pi/2$

τότε $C(\omega)=0$.

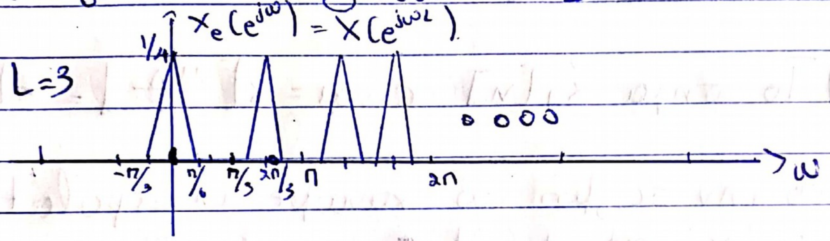
$$\text{Συνεπώς, } C(\omega)=\begin{cases} 0, & -\pi \leq \omega < -\pi/2 \\ \frac{\omega+\pi/2}{2\pi}, & -\pi/2 \leq \omega < 0 \\ \frac{\pi/2-\omega}{2\pi}, & 0 \leq \omega < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq \omega \leq \pi. \end{cases}$$



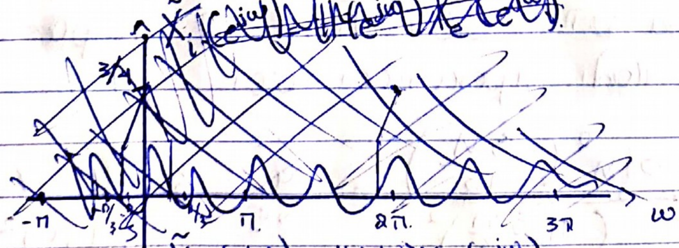
Είναι $X_e(e^{j\omega}) = \sum_n \sum_k x[k]\,\delta[n-kL]\,e^{-j\omega k}$

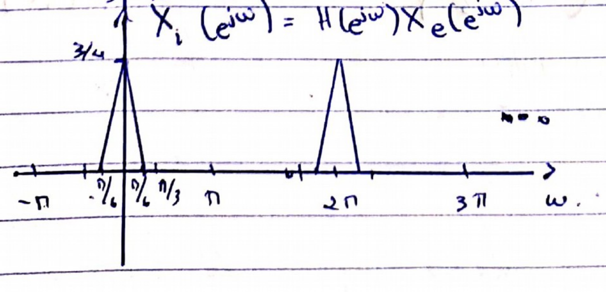
$= \sum_k x[k]\, e^{-j\omega L k} = X(e^{j\omega L})$.

$L=3$: Το $\pi/2$ γίνεται $\rightarrow \frac{\pi/2}{3} = \frac{\pi}{6}$ και το $\pi \rightarrow \frac{\pi}{3}$.



Στο επόμενο στάδιο περνάμε σε βαθυπερατό φίλτρο και το πολ/ζουμε με gain = L=3.
Επίσης, κόβουμε με συχνότητες $\min(\frac{\pi}{L}, \pi/M) = \min(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5})$
$= \pi/5$

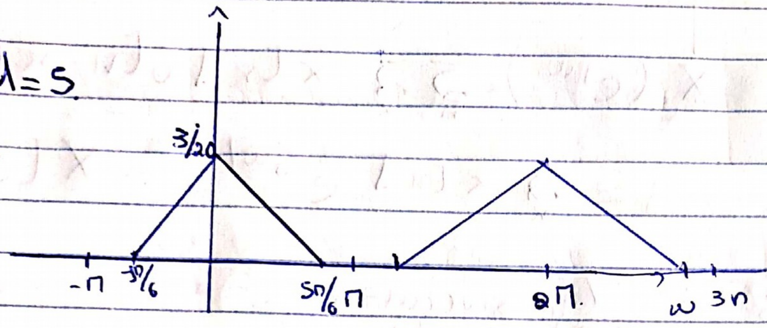




$\tilde{x}_d[n] = \tilde{x}_i[nM]$

Προκύπτει ότι $\tilde{X}_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\tilde{X}_i\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M}-\frac{2\pi k}{M}\right)}\right)$

$M=5.$



β) Το σήμα $\tilde{x}_d[n]$ είναι $= x\left[\frac{Mn}{L}\right] = x\left[\frac{5n}{3}\right]$

από την στιγμή που κάναμε interpolation με $L=3$ και decimation $M=5$.

Θα μπορούσαμε να βρούμε το $\tilde{x}_d[n]$ να κάνουμε IDTFT. Είναι τριγωνικός οπότε θα προκαλείται από συνέλιξη 2 τετραγωνικών. Συνεπώς, πάλι προκύπτει ότι

$$\tilde{x}_d[n] = \frac{\sin^2\left(\frac{5n}{12}\right)}{\left(\pi\frac{5n}{3}\right)^2} = \frac{9}{25}\,\frac{\sin^2(5n/12)}{(\pi n)^2}$$

Ασκηση 1.3)

Το ιδανικό συνεχούς-χρόνου $2^{ης}$ παραγώγου σύστημα είναι το $y_c(t) = \frac{d^2 x_c(t)}{dt^2}$ το οποίο έχει αντίστοιχη

$$H_c(j\Omega) = (j\Omega)^2 = -\Omega^2$$

Δεδομένου ότι το input είναι δυνοπεριορισμένο θα είναι ικανοποιητικό το $H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} -\Omega^2, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$

Έτσι, το αντίστοιχο διακριτό σύστημα θα έχει

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-\omega^2}{T}, \quad |\omega| < \pi$$

$$= -\frac{\omega^2}{T}$$

Άρα, $h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\omega^2}{T} e^{j\omega n} d\omega = -\frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2 e^{j\omega n} d\omega$

$$= -\frac{1}{2\pi T} \left[\frac{\omega^2 e^{j\omega n}}{jn} - \frac{2\omega e^{j\omega n}}{(jn)^2} + \frac{2 e^{j\omega n}}{(jn)^3} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi T} \left\{ \left[\frac{\pi^2 e^{jn\pi}}{jn} - \frac{\pi^2 e^{-j\pi n}}{jn} \right] - \left[\frac{2\pi e^{jn\pi}}{(jn)^2} + \frac{2\pi e^{-jn\pi}}{(jn)^2} \right] + \left[\frac{2 e^{jn\pi}}{(jn)^3} - \frac{2 e^{-jn\pi}}{(jn)^3} \right] \right\}$$

$$= -\frac{1}{2\pi T} \left\{ \frac{2\pi^2 \cancel{j} \sin(n\pi)}{\cancel{j}n} - \frac{4\pi \cos(n\pi)}{(jn)^2} + \frac{4j \sin(n\pi)}{(jn)^3} \right\}$$

$$= -\frac{\pi}{nT} \sin(n\pi) - \frac{2\cos(n\pi)}{n^2 T} + \frac{2\sin(n\pi)}{\pi T n^3}$$

Για $n \neq 0$: $h[n] = -\frac{2\cos(n\pi)}{n^2 T}$

Για $n = 0$: $h[0] = \lim_{n \to 0} h[n] = -\frac{\pi^2}{3T}$ (πίσω για αναλυτικά)

Αρχικα,

- $\lim_{n\to 0}\left(-\frac{\pi}{nT}\sin(n\pi)\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}} \lim_{n\to 0} -\frac{\pi^2\cos(n\pi)}{T}$

$= -\pi^2/T$

- $\frac{2}{T}\lim_{n\to 0}\left[\frac{\sin(n\pi)}{\pi n^3} - \frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right]$

$= \frac{2}{T}\lim_{n\to 0} \frac{\sin(n\pi) - \pi n\cos(n\pi)}{\pi n^3}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{2}{\pi T}\lim_{n\to 0}\frac{\pi\cancel{\cos(n\pi)} - \pi\cancel{\cos(n\pi)} + \pi^2 n\sin(n\pi)}{3n^2}$

$= \frac{2\pi}{3T}\lim_{n\to 0}\frac{\cancel{n}\sin(n\pi)}{n^{\cancel{2}}} = \frac{2\pi}{3T}\lim_{n\to 0}\pi\cos(n\pi)$

$= \frac{2\pi^2}{3T}$

Συνεπώς,

$h[0] = \lim_{n\to 0} h[n] = \frac{2\pi^2}{3T} - \frac{\pi^2}{T} = -\frac{\pi^2}{3T}$

Έτσι, $h[n] = \begin{cases} -\frac{2\cos(n\pi)}{n^2 T}, & n \neq 0 \\ -\frac{\pi^2}{3T}, & n = 0. \end{cases}$

Ασκηση 1.4)

Αρχικά, από τη σχέση $X^{c_2}[2N-k] = -X^{c_2}[k]$ μπορούμε να θέσουμε $k = N$ και προκύπτει πως $X^{c_2}[N] = -X^{c_2}[N] \Rightarrow \boxed{X^{c_2}[N] = 0}$

Έχουμε πως $X_2[k] = e^{j\frac{\pi k}{2N}} X^{c_2}[k]$.
Από IDFT είναι:

$$x[n] = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} e^{j\frac{\pi k}{2N}} X^{c_2}[k] e^{j\frac{2\pi k n}{2N}}$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} X^{c_2}[k] e^{j\frac{\pi k}{2N}(1+2n)}$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} X^{c_2}[k] e^{j\frac{\pi k}{2N}(1+2n)} + \frac{1}{2N} \sum_{k=N}^{2N-1} X^{c_2}[k] e^{j\frac{\pi k}{2N}(2n+1)}$$

Στο 2ο άθροισμα μπορούμε να θέσουμε $k' = 2N-k$. Τότε $X^{c_2}[k] = X^{c_2}[2N-k'] = -X^{c_2}[k]$ από ιδιότητα.

Άρα, $x[n] = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} X^{c_2}[k] e^{j\frac{\pi k(2n+1)}{2N}} + \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{N} -X^{c_2}[k] e^{j\frac{\pi(2N-k)(2n+1)}{2N}}$

$$= \frac{X^{c_2}[0]}{2N} + \sum_{k=1}^{N-1} X^{c_2}[k] e^{j\frac{\pi k(2n+1)}{2N}} + \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{N-1} X^{c_2}[k] e^{-j\frac{\pi k(2n+1)}{2N}}$$

Αυτό ισχύει αφού $e^{j\frac{2\pi N(2n+1)}{2N}} = e^{j(2n\pi+\pi)} = \cos(\pi) = -1$
και $X^{c_2}[N] = 0$.

Θα είναι $e^{\pm j\frac{\pi k(2n+1)}{2N}} = \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right) \pm j\sin\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right)$

Άρα το $j\sin(\phi)$ φεύγει με το $-j\sin\phi$ και μένει. Θέτουμε $\beta[k] = \begin{cases} 1/2, & k=0 \\ 1, & \text{else} \end{cases}$. Προκύπτει:

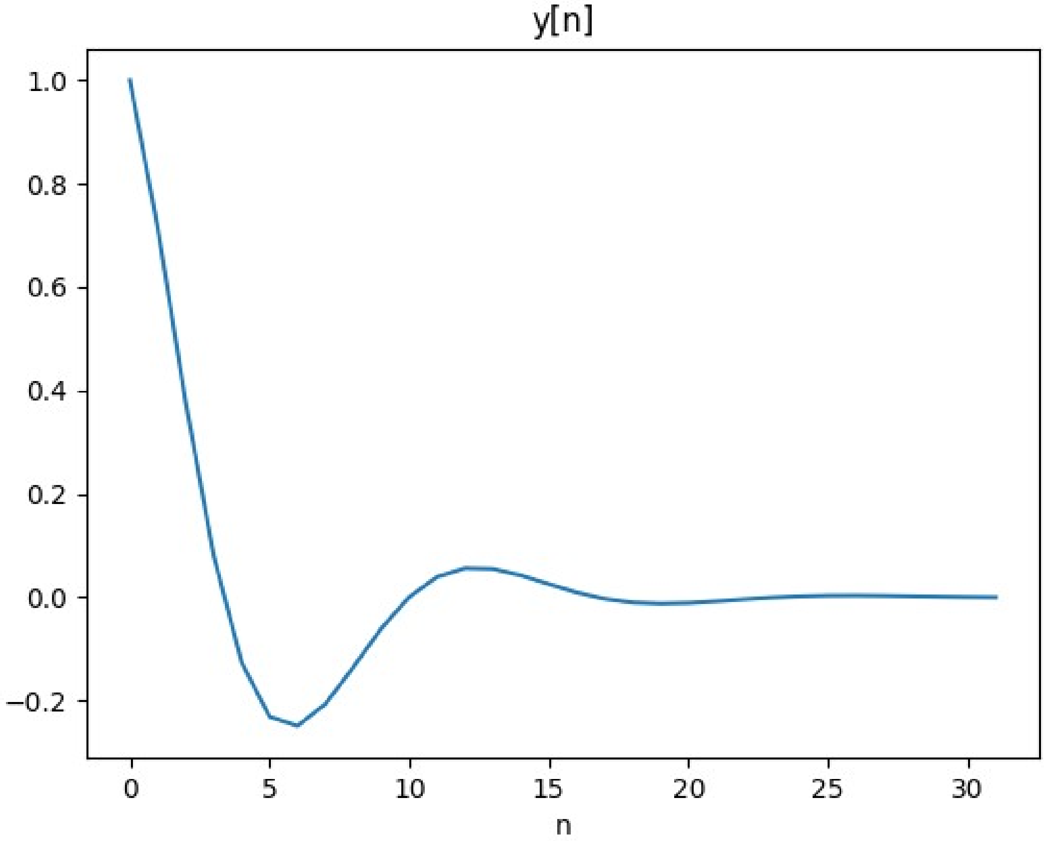
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta[k] X^{c_2}[k] \cos\left(\frac{2n+1}{2N} k\pi\right)$$

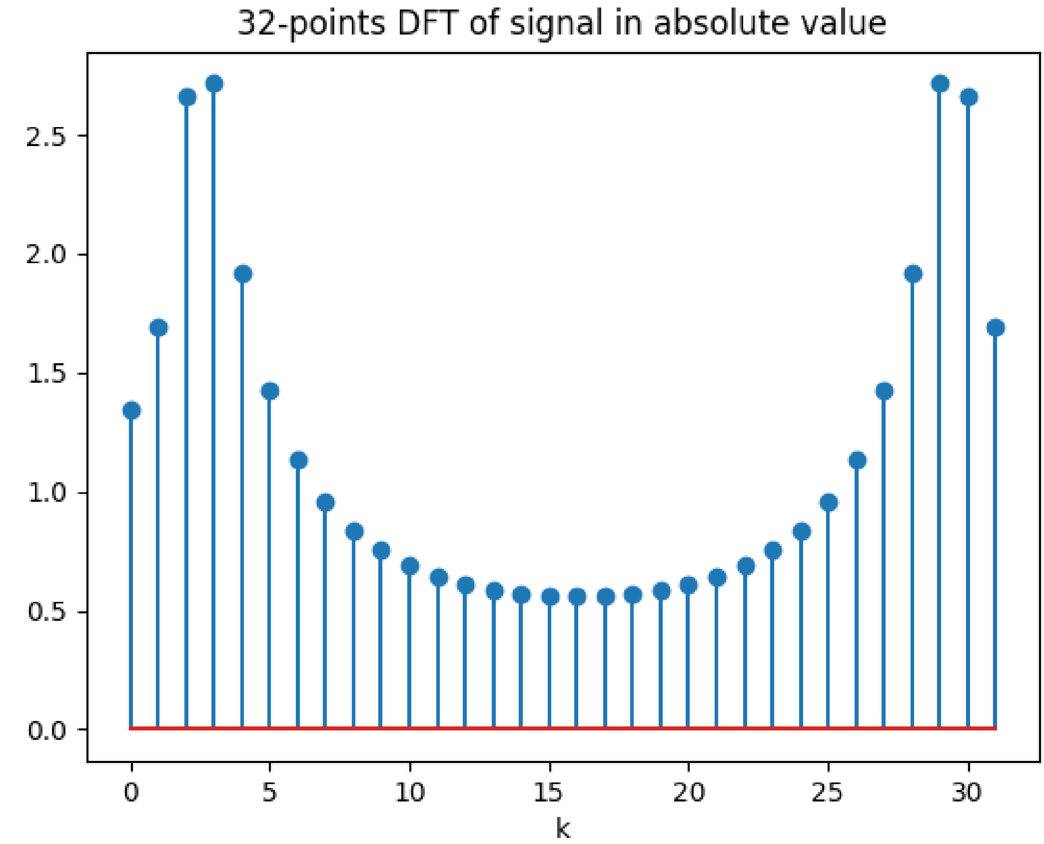
1.4.β) Γράφτηκε σε python3.6

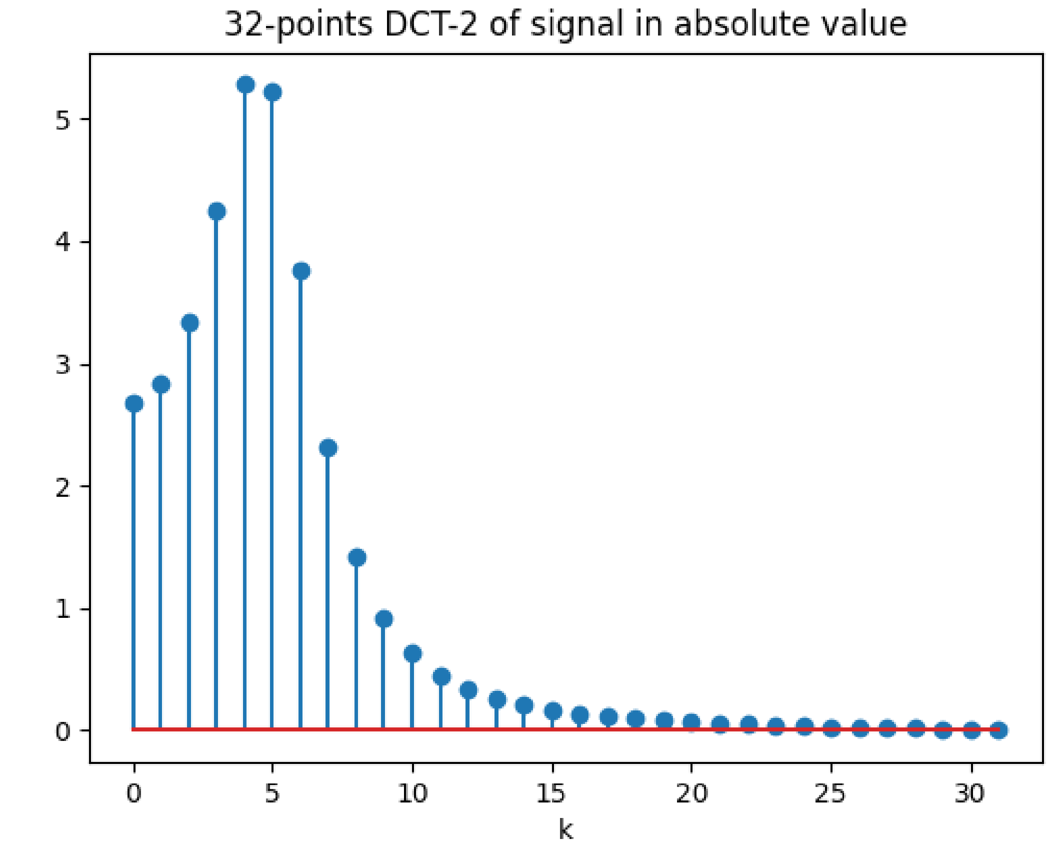
```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.fftpack as fftpack
import cmath
from sklearn.metrics import mean_squared_error


# b1

n = np.arange(32)
figure_counter = 0
signal = [(0.8 ** i) * (math.cos(0.15 * math.pi * i)) for i in n]

figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.plot(n, signal)
plt.title("y[n]")
plt.xlabel("n")
plt.savefig("signal.png")
# b2

dft_signal = np.fft.fft(signal)

figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.stem(n, np.abs(dft_signal), use_line_collection = True)
plt.xlabel("k")
plt.title("32-points DFT of signal in absolute value")
plt.savefig("dft_signal.png")
# b3

dct_signal = fftpack.dct(signal, 2)

figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.stem(n, np.abs(dct_signal), use_line_collection = True)
plt.xlabel("k")
plt.title("32-points DCT-2 of signal in absolute value")
plt.savefig("dct_signal.png")

# b4

M_list = np.arange(31)
b = np.ones(32)
b[0] = 0.5
yM, ycM= [], []
mean_square_error_yM = []
mean_squared_error_ycM = []
```

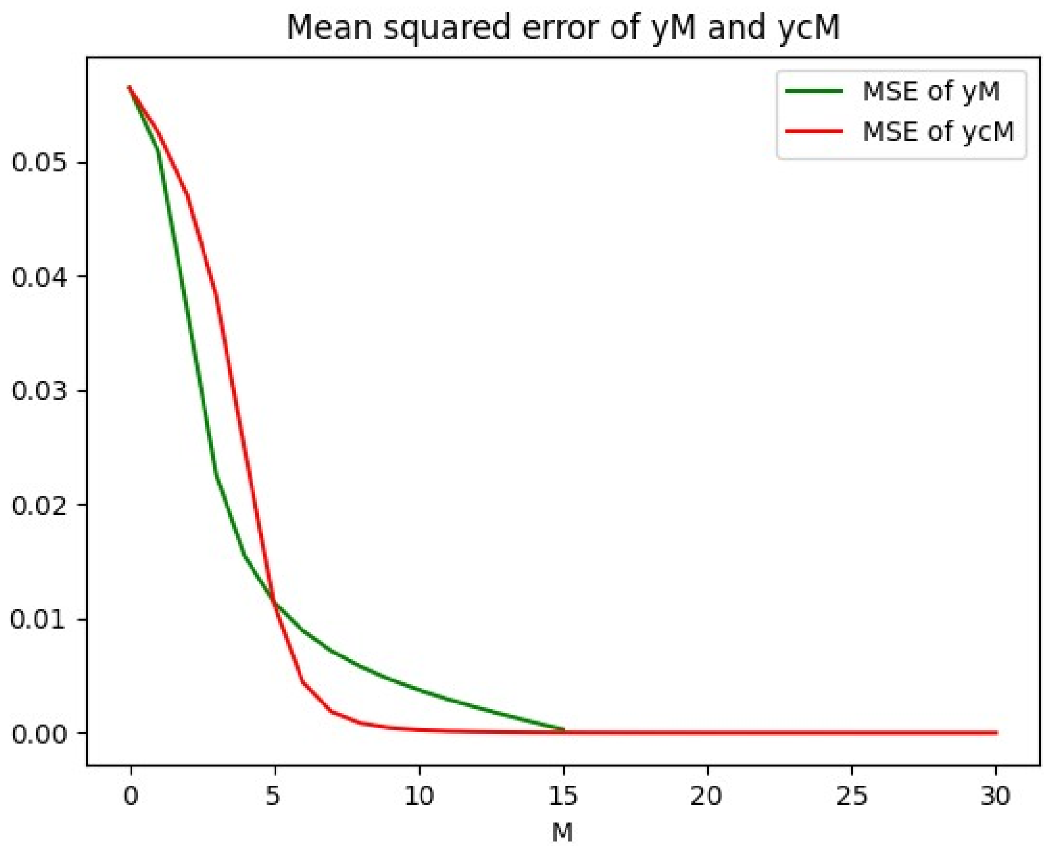
```
for M in M_list:
    yM, ycM= [], []
    for i in n:
        sum_at_n = 0
        for k in range(M+1):
            sum_at_n += dft_signal[k] * cmath.exp(2j * math.pi * k * i / 32)
        for k in range(32-M,32,1):
            sum_at_n += dft_signal[k] * cmath.exp(2j * math.pi * k * i / 32)
        yM.append(sum_at_n/32)

    for i in n:
        sum_at_n = 0
        for k in range(M+1):
            sum_at_n += b[k] * dct_signal[k] * math.cos(math.pi * k * (2*i + 1)/64)
        ycM.append(sum_at_n/32)

    if M <= 15:
        mean_square_error_yM.append(mean_squared_error(np.real(np.array(yM)),signal))

    mean_squared_error_ycM.append(mean_squared_error(np.real(np.array(ycM)), signal))


figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title("Mean squared error of yM and ycM")
plt.plot(M_list[0:16], mean_square_error_yM,"g", label="MSE of yM")
plt.plot(M_list, mean_squared_error_ycM, "r", label="MSE of ycM")
plt.xlabel("M")
plt.legend()
plt.savefig("mse.png")

plt.show()
```

Προκύπτουν τα εξής διαγράμματα:






32-points DCT-2 of signal in absolute value
k


Mean squared error of yM and ycM
MSE of yM
MSE of ycM
M

Παρατηρούμε ότι για μικρά M (0 <= M < 5) ο yM προσεγγίζει καλύτερα τον DFT με μικρότερο λάθος. Έπειτα, στο M = 5 παρατηρούμε πως τα 2 σήματα είναι εξίσου κοντά στον DFT. Τέλος, βλέπουμε πως για M = 8 ο ycM βρίσκεται με πολύ μικρό μέσο λάθος στον DFT. Και για αυτό τον θεωρούμε πιο ακριβή αναπαράσταση του DFT.

Ασκηση 1.5)

α.) Έστω $f[n]$ ένα διακριτό σήμα και $g(n)$ το διακριτού κομμάτι συνεχούς παραθύρου. Τότε ο STFT της f είναι:

$$Sf(u,\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, g(n-u)\, e^{-j\frac{2\pi \xi n}{N}}$$

Για το παράθυρο ισχύει πως $\cancel{g(n-u)} = g(-z) = g(z)$
Άρα πολ/ζοντας και διαιρόντας το $e^{-j\frac{2\pi\xi}{N}(u-n)}$ έχουμε

$$Sf(u,\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, g(u-n)\, e^{-j\frac{2\pi\xi(u-n)}{N}} \cdot e^{j\frac{2\pi\xi u}{N}}$$

$$= e^{j\frac{2\pi\xi u}{N}} f[u] * \left(g(u)\, e^{-j\frac{2\pi\xi u}{N}}\right)$$

Έστω τώρα $F(k)$ και $G(k)$ οι αντίστοιχοι DFT των f και g. Τότε, δεδομένου ότι ισχύει:

$$DFT\left(g(n-u)\right) = G(k)\, e^{-j\frac{2\pi n k}{N}}$$

$$\Rightarrow DFT\left(Sf(u,\xi)\right) = F(k+\xi)\, G\left((k-\xi)+\xi\right)$$
$$= F(k+\xi)\, G(k).$$

Έτσι, από formula Parseval και Plancherel ισχύει πως,

$$\sum_{\xi=0}^{N-1}\sum_{u=0}^{N-1} Sf(u,\xi)\, g(n-u)\, e^{j\frac{2\pi\xi n}{N}}$$

$$= \sum_{\xi=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} F(k+\xi)\, G(k) \cdot G(k)\, e^{-j\frac{2\pi n}{N}(-\xi-k)}$$

$$= \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{N-1} f(x+\xi) |G(x)|^2 e^{j\frac{2\pi n(x+\xi)}{N}}$$

Όμως από Fubini μπορούμε να αντιστρέψουμε τα άκρα. Έτσι έχουμε

$$= \sum_{x=0}^{N-1} \left(\sum_{\xi=0}^{N-1} f(x+\xi) e^{j\frac{2\pi n(x+\xi)}{N}} \right) |G(x)|^2$$

Όμως, γνωρίζουμε πως $\sum_{\xi=0}^{N-1} f(x+\xi) e^{j\frac{2\pi n(x+\xi)}{N}} = f[n]$

και πως $\sum_{x=0}^{N-1} |G(x)|^2 = N$.

Συνεπώς,

$$N f[n] = \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{u=0}^{N-1} Sf(u,\xi) g(n-u) e^{j\frac{2\pi \xi n}{N}}.$$

$$\Rightarrow f[n] = \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{u=0}^{N-1} Sf(u,\xi) g(n-u) e^{j\frac{2\pi \xi n}{N}}.$$

α.2) Αρχικά, θα αποδείξω πως $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} |X[x]|^2$

Είναι $X[x] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{2\pi x n}{N}}$.

$$\Rightarrow |X[x]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sum_{n'=0}^{N-1} x^*[n'] e^{j\frac{2\pi(n-n')x}{N}}.$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{N-1} |X[x]|^2 = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sum_{n'=0}^{N-1} x^*[n'] e^{j2\pi\frac{(n-n')x}{N}}.$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sum_{n'=0}^{N-1} x^*[n'] \sum_{x=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{(n-n')x}{N}}.$$

Όμως $\sum_x e^{j\frac{2\pi(n-n')x}{N}} = \frac{e^{j2\pi(n-n')} - 1}{e^{j\frac{2\pi(n-n')}{N}} - 1} = \begin{cases} 0, & n \neq n' \\ N, & n = n' \end{cases}$

Έτσι, προκύπτει $\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$

Προχωρόντας, είναι

$$\sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{u=0}^{N-1} |S_f(u,\xi)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{u=0}^{N-1} |F(x+u) G(x)|^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \left(\sum_{u=0}^{N-1} |F(x+u)|^2 \right) |G(x)|^2$$

$= N \|f\|^2$ δεδομένου πως

$\sum_{u=0}^{N-1} |F(x+u)|^2 = \sum_{u=0}^{N-1} |F(u)|^2 = N \|f\|^2$ αφού το F είναι περιοδικό

και $\sum_{x=0}^{N-1} |G(x)|^2 = N$.

$$\Rightarrow \|f\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{u=0}^{N-1} |S_f(u,\xi)|^2$$

β.1) $\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$

Είναι $\langle f(t), g(t) \rangle = \int f(t) \overline{g(t)} dt$

Οπότε, $h[n] = \langle \phi_{2^{-1}}(t), \phi(t-n) \rangle$

$f_s(t) = s f(st)$

$$= \int \cancel{\phi} \frac{1}{2} \phi\left(\frac{t}{2}\right) \phi^*(t-n)\, dt$$

$$= \int \frac{1}{2} \phi\left(\frac{t}{2}\right) \phi(t-n)\, dt$$

Είναι $0 \le t \le 1 \xrightarrow{\phi(t) \neq 0}$ ~~...~~ 2.

$\phi\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ για $0 \le t \le 2$.

$= \frac{1}{2}\int_0^2 \phi\left(\frac{t}{2}\right)\phi(t-n)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \phi(t-n)\,dt.$

• Για $n \geq 2$ τότε θα είναι $t_{max} - n = 0$.
Άρα, $h[n] = 0$.

• Όμοια για $n \leq -1$ θα είναι $t_{min} - n = 1$.
Έτσι, $h[n] = 0$

• Τέλος για:

το $n = 0$: θα είναι $h[n] = \frac{1}{2}\int_0^1 dt = \frac{1}{2}\cdot 1 = 1/2$

το $n = 1$: θα είναι $h[n] = \frac{1}{2}\int_1^2 dt = 1/2$

Συνεπώς, $h[n] = \frac{\delta[n] + \delta[n-1]}{2}$

β.2) $\hat{\psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $G(\omega) = e^{-j\omega}\overline{H(\omega-\pi)}$

με $\hat{\psi}(\omega) = \int \phi(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$.

• $H(\omega) = \sum_n h[n]\, e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\omega) - \frac{1}{2}j\sin(\omega)$

Όμως $\sin(\omega-\pi) = -\sin(\omega)$ και $\cos(\omega-\pi) = -\cos(\omega)$

Άρα, $H(\omega-\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\omega) + \frac{1}{2}j\sin(\omega)$

$\Rightarrow \overline{H(\omega-\pi)} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\cos(\omega) + \frac{1}{2}j\sin(\omega)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{j\omega}$

Άρα, $G(\omega) = e^{-j\omega}\,\overline{H(\omega-\pi)} = \frac{1}{2}e^{-j\omega} - 1/2$.

και αντίστοιχα, $G(\omega/2) = -1/2 + 1/2\, e^{-j\omega/2}$.

Είναι $\hat{\phi}(\omega) = \int_0^1 \phi(t) e^{-j\omega t} dt$

$$= -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_0^1 = \frac{j}{\omega}\left(e^{-j\omega} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(\omega/2) = \frac{2j}{\omega}\left(e^{-j\omega/2} - 1\right)$$

Άρα, $\hat{\psi}(\omega) = G(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$

$$\hat{\psi}(\omega) = \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{-j\omega/2}\right)\frac{2j}{\omega}\left(e^{-j\omega/2} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - 2e^{-j\omega/2} + 1\right)$$

Αρχικά, για τον αντίστροφο Fourier γνωρίζουμε πως για κάποιο σήμα $x(t)$ με $X(\omega)$ Fourier τότε, $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(\omega)$ και επίσης ισχύει πως $u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$.

Άρα, στο $\hat{\psi}(\omega)$ μπορούμε να προσθαφαιρέσουμε $\pi\delta(\omega)$. Επειδή για $\omega \neq 0$ θα μηδενίζεται, μπορούμε να πολ/σουμε και με τις μετατοπίσεις που έχουν μέτρο 1.

Έτσι, προκύπτει πως $u(t-t_0) = \frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t_0} + \pi\delta e^{-j\omega t_0}$.

$$\Rightarrow \hat{\psi}(\omega) = -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - 2e^{-j\omega/2} + 1\right) - \pi\delta(\omega) + 2\pi\delta(\omega) - \pi\delta(\omega)$$

$$= -\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega} + \frac{2}{j\omega}e^{-j\omega/2} - \frac{1}{j\omega} - \pi\delta(\omega)e^{-j\omega} + 2\pi\delta(\omega)e^{-j\omega/2} - \pi\delta(\omega)$$

$$= -\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)e^{-j\omega} + 2e^{-j\omega/2}\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) - \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$$

$$\overset{F^{-1}}{\Longrightarrow} \psi(t) = -u(t-1) + 2u(t-\tfrac{1}{2}) - u(t)$$

$$\Rightarrow \psi(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1/2 \\ +1, & 1/2 \le t < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

B.3) $g[n] = \langle \psi_{2^{-1}}(t), \phi(t-n) \rangle$

$= \int \frac{1}{2} \psi\left(\frac{t}{2}\right) \overline{\phi(t-n)}\, dt$

$= \int \frac{1}{2} \psi\left(\frac{t}{2}\right) \phi(t-n)\, dt$

Για το t ισχύει πως $0 \le t \le 2$.

$\Rightarrow g[n] = \frac{1}{2} \int_0^2 \psi\left(\frac{t}{2}\right) \phi(t-n)\, dt = \cancel{\ldots}$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 (-1)\, \phi(t-n)\, dt + \frac{1}{2} \int_1^2 (+1)\, \phi(t-n)\, dt$

• Για $n \geq 2$: τότε το $\phi(t-n) = 0$ και για τις 2 περιπτώσεις. Έτσι $g[n] = 0$

• Για $n \le -1$: όμοια $\phi(t-n) = 0 \Rightarrow g[n] = 0$

• Για $n = 0$: $g[n] = \frac{1}{2} \int_0^1 (-1)\, dt + 0 = -1/2$

• Για $n = 1$: $g[n] = 0 + \frac{1}{2} \int_1^2 1\, dt = 1/2$

Έτσι, προκύπτει πως

$$g[n] = \frac{-\delta[n] + \delta[n-1]}{2}$$

β.4) Αν έχουμε μια ακολουθία με resolution 2^{ν}
Τότε για να πάρουμε το approximation και τα details αρκεί να εκτελέσουμε την παρακάτω διαδικασία (για μισό resolution).
Έστω x[ ] ο πίνακας

$$Ap_i = \frac{x[2i] + x[2i+1]}{2} \quad \text{και} \quad Det_i = \frac{x[2i] - x[2i+1]}{2}$$

Τότε $A = [Ap_i] \ \forall i$ και
$D = [Det_i] \ \forall i$

Συνεπώς είναι.

Resolution	Approximation	Details
16	6/2=3 8/2=4 [8,2,5,-3,-1,9,7,5,9,3,2,-2,6,4,0,6]	
8	[5,1,4,6,6,0,-1,3]	[3,4,-5,1,3,2,-5,-3]
4	[3, 5, 3,1]	[2, -1, 3, -2]
2	[4, 2]	[-1, 1]
1	[3]	[1]

Άρα, το Forward Transformation είναι:

~~[illegible]~~
[3, 1, -1, 1, 2, -1, 3, -2, 3, 4, -5, 1, 3, 2, -5, -3]

B.5) Θα πραγματοποιήσουμε την ακριβώς αντίστροφη διαδικασία.

Αν ο στον forward Transform Αν ήταν a, b τα στοιχεία του πίνακα x τότε.

$$ap = \frac{a+b}{2} \quad \text{και} \quad d = \frac{a-b}{2}$$

$$\Rightarrow ap + d = a \quad \text{και} \quad ap - d = b.$$

Συνεπώς αρκεί να προσθέσουμε και ν' αφαιρέσουμε τους αριθμούς από τα approximations και details arrays.

Resolution	Approximation	Details
1	[3]	[1]
2	[4, 2]	[-1, 1]
4	[3, 5, 3, 1]	[2, -1, 3, -2]
8	[5, 1, 4, 6, 6, 0, -1, 3]	[3, 4, -5, 1, 3, 2, -5, -3]
16	[8, 2, 5, -3, -1, 9, 7, 5, 9, 3, 2, -2, -6, 4, 0, 6]	

Έτσι, ανακατασκευάσαμε το αρχικό μας σήμα