2η Σειρά Ασκήσεων

DSP 21
Παπαρρηγόπουλος Θοδωρής
el18040
paparrigopoulosthodoris@gmail.com

Άσκηση 2.1

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-0.64z^{-2})}$$

α) Οι πόλοι είναι στις θέσεις: $p_1 = 0.8, p_2 = -0.8, p_3 = 0$
Τα μηδενικά στις θέσεις: $z_1 = 0.5,\ z_2 = 2j,\ z_3 = -2j$

Είναι $H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}$

Αφού $|p_i|<1$, το σύστημα είναι αιτιατό.
Το RoC είναι $0.8<|z|<\infty$, και ο μοναδιαίος κύκλος περιλαμβάνεται, έτσι το σύστημα είναι ευσταθές.
Συνεπώς, το $H(z)$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$H(z) = H_1(z)\, H_{ap}(z)$$

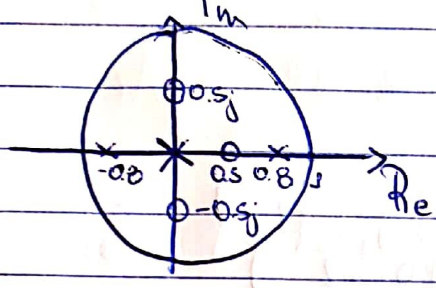
Το H_1 αντιστοιχεί στο minimum-phase και πρέπει οι πόλοι και τα μηδενικά να βρίσκονται εντός μοναδιαίου.
Το H_{ap} αντιστοιχεί στο all-pass και πρέπει $|H_{ap}(e^{j\omega})| = A > 0$. Για λόγους ευκολίας πέρνουμε $A=1$.
Προκύπτει πως:

$$H_{ap}(z) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1}-d_k}{1-d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(z^{-1}-e_k^*)(z^{-1}-e_k)}{(1-e_k z^{-1})(1-e_k^* z^{-1})}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})} \cdot 4 \cdot (z^{-1}-0.5j)(z^{-1}+0.5j)$$

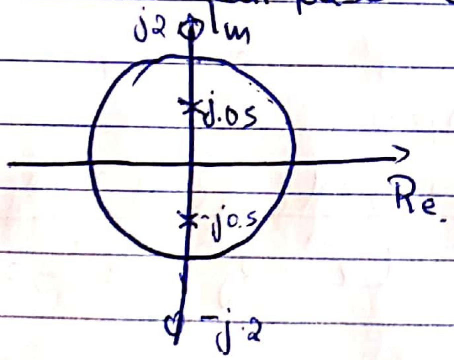
$$\Rightarrow H(z) = \underbrace{\left[4\frac{(1-0.5z^{-1})(1-0.5jz^{-1})(1+0.5jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}\right]}_{H_1(z)} \underbrace{\left[\frac{(z^{-1}-0.5j)(z^{-1}+0.5j)}{(1-0.5jz^{-1})(1+0.5jz^{-1})}\right]}_{H_{ap}(z)}$$

β) Για το min-phase σύστημα.



Πιθανές RoC: $0<|z|<0.8$ ή $0.8<|z|<\infty$.

Για το all-pass σύστημα



Πιθανές RoC: ~~0~~ $0<|z|<0.5$ ή $0.5<|z|<\infty$

Θα πρέπει $RoC_{min} \cap RoC_{ap} = RoC_H = \{z : 0.8<|z|<\infty\}$

$\Rightarrow \infty \in RoC_{min}$ και $\infty \in RoC_{ap}$.

Έτσι, προκύπτει: $RoC_{min} : 0.8<|z|<\infty$
$RoC_{ap} : 0.5<|z|<\infty$

Scanned with CamScanner

δ) $H(z) = \left[\dfrac{1-0.5z^{-1}}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}\right]\left[4\cdot(z^{-1}+j0.5)(z^{-1}-j0.5)\right]$

Ένα FIR ~~σύστ~~ σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης έχει πόλους και μηδενικά στις θέσεις $z=0,-1,1,\infty$ ή σε αντίστροφα συζυγή ζεύγη.

Ο 2ος παράγοντας της $H(z)$ έχει μηδενικά στις θέσεις:

$z_1' = -j0.5$,

$z_2' = +j0.5 \Rightarrow$

- $(z^{-1}-j2) = (-j2)(1+j0.5z^{-1})$
- $(z^{-1}+j2) = j2(1-j0.5z^{-1})$

Έτσι,

$$H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}\,\frac{4}{(j2)(-j2)}\,\frac{(z^{-1}+j0.5)(z^{-1}-j0.5)(z^{-1}-2j)(z^{-1}+2j)}{(z^{-1}-2j)(z^{-1}+2j)}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1-0.5z^{-1}}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})(z^{-1}-2j)(z^{-1}+2j)}\right]}_{H_0(z)}\underbrace{\left[(z^{-1}+j0.5)(z^{-1}-j0.5)(z^{-1}-2j)(z^{-1}+2j)\right]}_{H_{lin}(z)}$$

Άσκηση 2.2

α) Για να βρούμε αναλυτικά το complex cepstrum $\hat{h}[n]$ του σήματος με Z-μετασχηματισμό $H(z)$ πρέπει να γράψουμε το $H(z)$ στην μορφή:

$$H(z) = A z^r \frac{\prod_{k=1}^{M_i}(1-a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{N_i}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_o}(1-d_k z)}$$

Είναι $H(z) = \dfrac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}$

$$= 4\,\frac{(1-0.5z^{-1})(z^{-1}-0.5j)(z^{-1}+0.5j)}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}$$

$$= 4z^{-2}\,\frac{(1-0.5z^{-1})(1-0.5jz)(1+0.5jz)}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}$$

Έτσι, προκύπτει πως:

$$\hat{h}[n] = \begin{cases} \log|A| & n=0 \\ \sum_{k=1}^{N_i}\frac{c_k^n}{n} - \sum_{k=1}^{M_i}\frac{a_k^n}{n}, & n>0 \\ \sum_{k=1}^{M_o}\frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{N_o}\frac{d_k^{-n}}{n}, & n<0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{h}[n] = \begin{cases} 0.602, & n=0 \\ \frac{0.8^n+(-0.8)^n-(0.5)^n}{n}, & n>0 \\ \frac{(0.5j)^{-n}+(-0.5j)^{-n}}{n}, & n<0. \end{cases}$$

Για το απλό cepstrum $c_n[n] = \frac{\hat{h}[n]+\hat{h}[-n]}{2}$

$$\Rightarrow c[n] = \begin{cases} 0.602, & n=0 \\ \frac{0.8^n+(-0.8)^n-0.5^n}{n} - \frac{(0.5j)^n+(-0.5j)^n}{n}, & n>0 \\ \frac{(0.5j)^{-n}+(-0.5j)^{-n}}{n} - \frac{(0.8)^{-n}+(-0.8)^{-n}-0.5^{-n}}{n}, & n<0 \end{cases}$$

β) $H(z) = \dfrac{G}{1-\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} = \dfrac{G}{A(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$

Υποθέτουμε πως το LPC φίλτρο είναι αιτιατό.
Έτσι, $h[n]=0 \quad \forall n<0$.
Υποθέτουμε επίσης πως είναι ευσταθές. Έτσι, η $H(z)$ είναι minimum-phase.

Είναι $\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{h}[n] z^{-n} = \log H(z) = \log G - \log A(z)$

$\Rightarrow \dfrac{d\hat{H}(z)}{dz} = -\dfrac{\frac{dA(z)}{dz}}{A(z)} \Rightarrow \left(-z\dfrac{d\hat{H}(z)}{dz}\right) A(z) = z\dfrac{dA(z)}{dz}$

$\Rightarrow \left(n\hat{h}[n]\right) * a[n] = -n a[n]$ με

$$a[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ -a_n, & n=1,2,\dots,p \\ 0, & n<0,\ n>p. \end{cases}$$

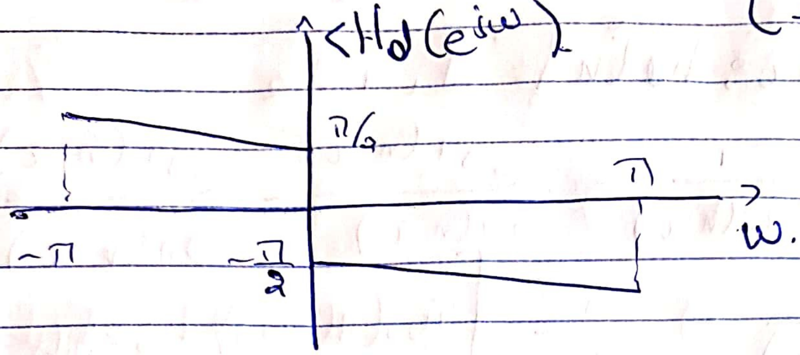
$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k\hat{h}[k]\, a(n-k) = -n a[n], \quad n \geq 0$

$\Rightarrow n\hat{h}[n] - \sum_{k=1}^{n-1} k\,\hat{h}[n]\, a(n-k) = -n a[n], \quad n \geq 1$

$\Rightarrow \hat{h}[n] = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{h}[n]\, a_{n-k}, \quad n \geq 0$

Ασκηση 2.3

α) Από εκφώνηση είναι $H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j(-\frac{\pi}{2} - \omega\tau)}, & 0<\omega<\pi \\ e^{j(\frac{\pi}{2}-\omega\tau)}, & -\pi<\omega<0 \end{cases}$



β) $h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega.$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{j(\frac{\pi}{2}-\omega\tau)}\, e^{j\omega n}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-j(\frac{\pi}{2}+\omega\tau)}\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$= I_1 + I_2$$

• $I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{j\frac{\pi}{2}}\, e^{j\omega(n-\tau)}\, d\omega = \frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{j\omega(n-\tau)}\, d\omega$

→ Για $n=\tau$: $I_1 = \frac{j}{2\pi}\left[\omega\right]_{-\pi}^{0} = \frac{j}{2\pi}(0+\pi) = \frac{j}{2}$

→ Για $n\neq\tau$: $I_1 = \frac{\cancel{j}}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega(n-\tau)}}{\cancel{j}(n-\tau)}\right]_{-\pi}^{0}$

$$= \frac{1}{2\pi(n-\tau)}\left[1 - e^{-j\pi(n-\tau)}\right].$$

• $I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}\, e^{j\omega(n-\tau)}\, d\omega = -\frac{j}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)}\, d\omega$

→ Για $n=\tau$: $I_2 = \frac{-j}{2}$

→ Για $n\neq\tau$: $I_2 = \frac{-\cancel{j}}{2\pi}\frac{1}{\cancel{j}(n-\tau)}\left[e^{j\pi(n-\tau)} - 1\right].$

Άρα,

⇝ Για $n=\tau$: $h_d[n] = \frac{j}{2} - \frac{j}{2} = 0$

⇝ Για $n \neq \tau$: $h_d[n] = I_1 + I_2$

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi(n-\tau)} - \frac{e^{-j\pi(n-\tau)}}{2\pi(n-\tau)} - \frac{e^{j\pi(n-\tau)}}{2\pi(n-\tau)} + \frac{1}{2\pi(n-\tau)}$$

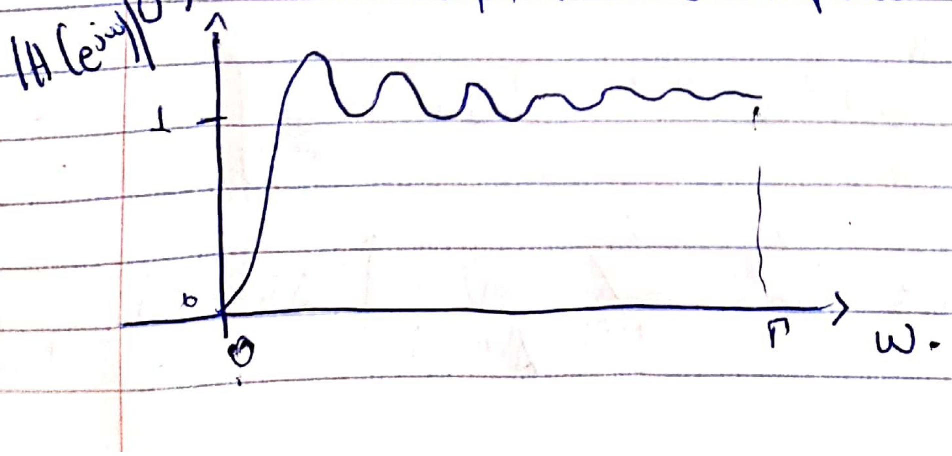
$$= \frac{1}{\pi(n-\tau)} - \frac{1}{2\pi(n-\tau)}\Big[\cos(\pi(n-\tau)) - \cancel{j\sin(\pi(n-\tau))} + \cos(\pi(n-\tau)) + \cancel{j\sin(\pi(n-\tau))}\Big]$$

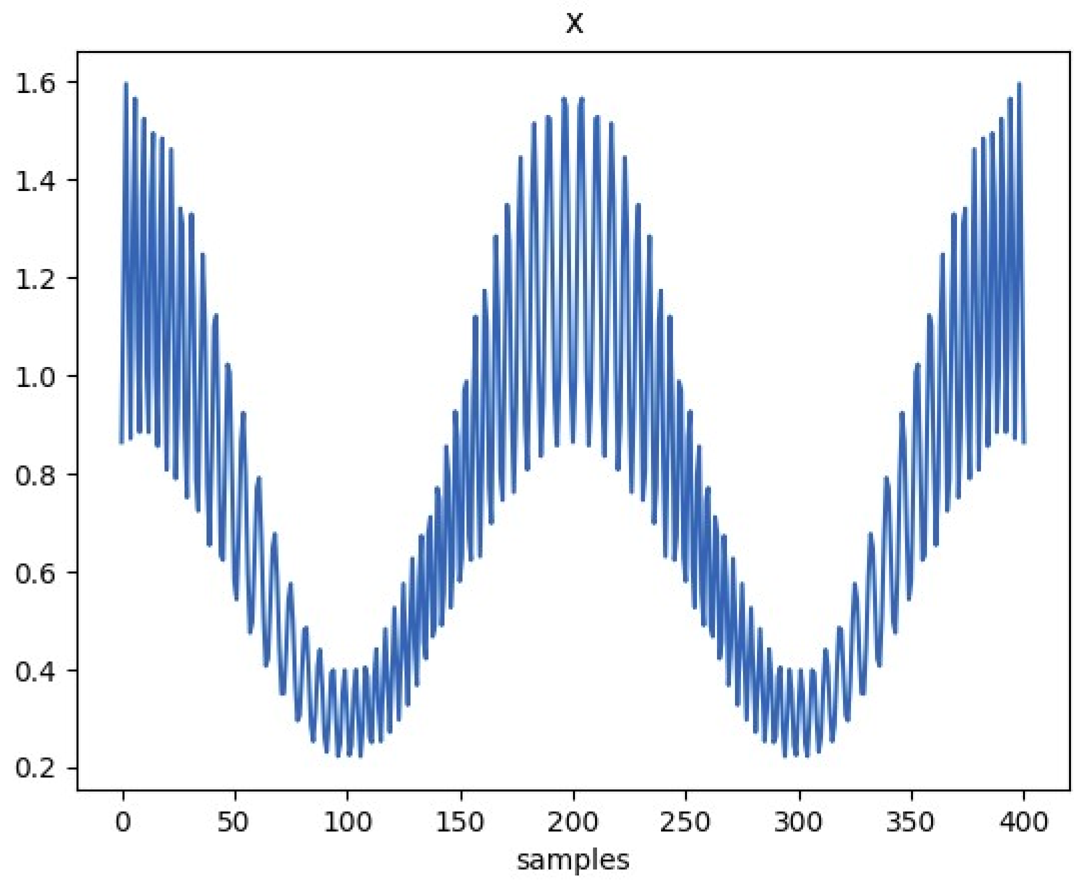
$$= \frac{1}{\pi(n-\tau)} - \frac{\cos(\pi(n-\tau))}{\pi(n-\tau)} = \frac{1-\cos(\pi(n-\tau))}{\pi(n-\tau)}$$

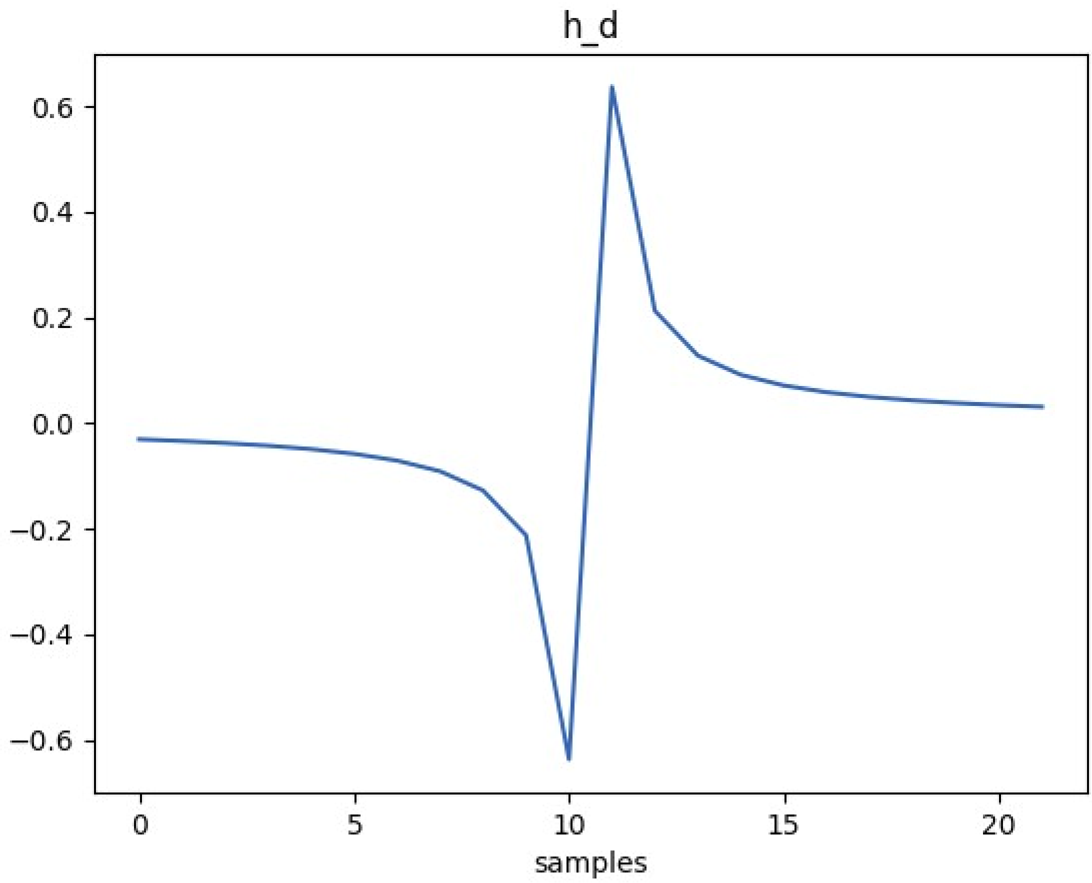
$$\Rightarrow h_d[n] = \begin{cases} 0 &, n=\tau \\ \dfrac{1-\cos(\pi(n-\tau))}{\pi(n-\tau)} &, n\neq\tau \end{cases}$$

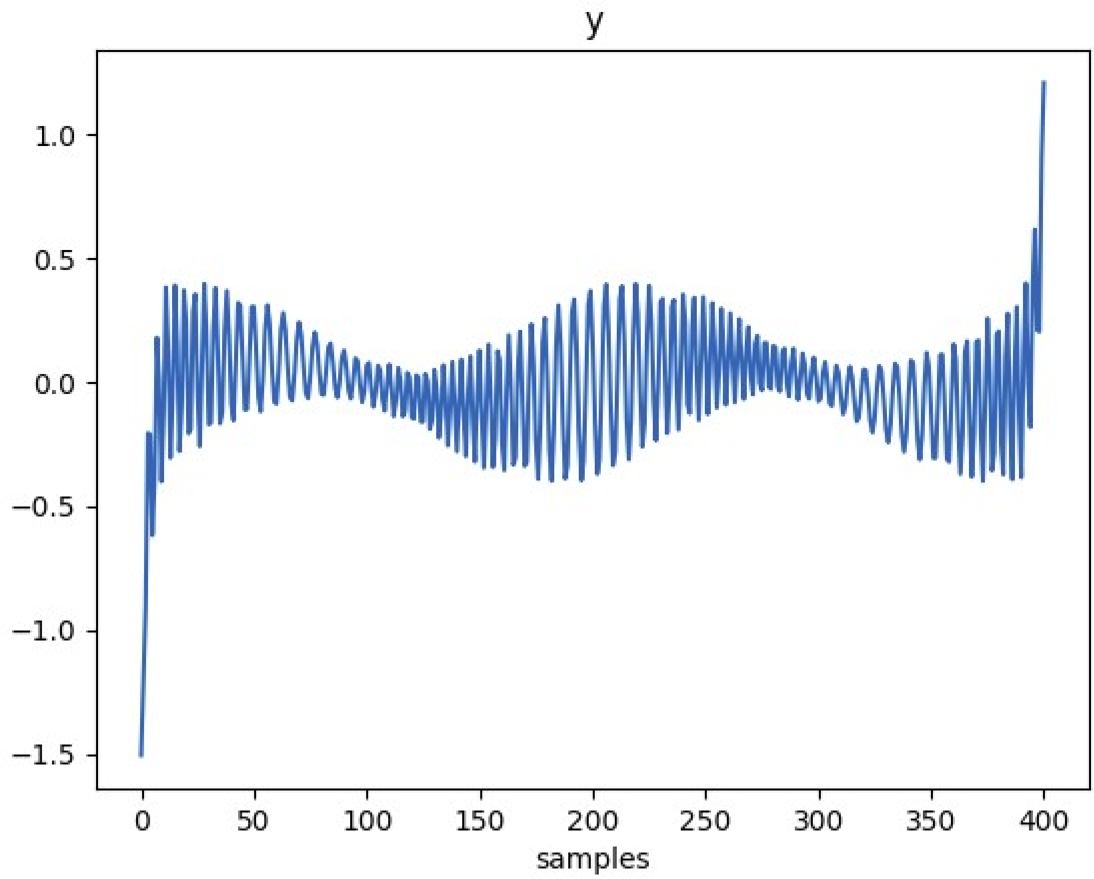
Για να έχει το παραθυρωμένο FIR σύστημα γραμμικής φάσης, πρέπει να είναι αντισυμμετρικό γύρω στο $M/2$. Μιας και ο μετασχηματισμός Hilbert είναι συμμετρικός γύρω από το $n=\tau$, επιλέγουμε $\tau = M/2$.

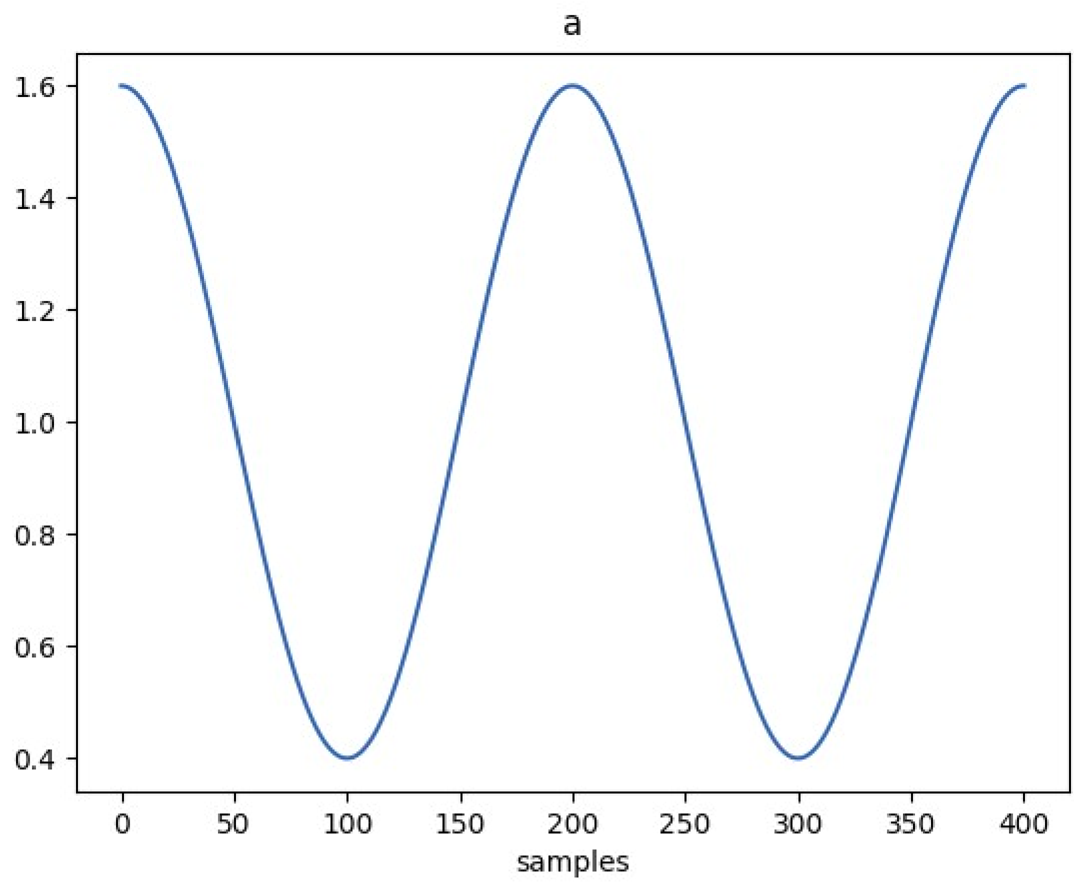
δ) Η καθυστέρηση του συστήματος είναι $M/2 = 10.5$ δείγματα

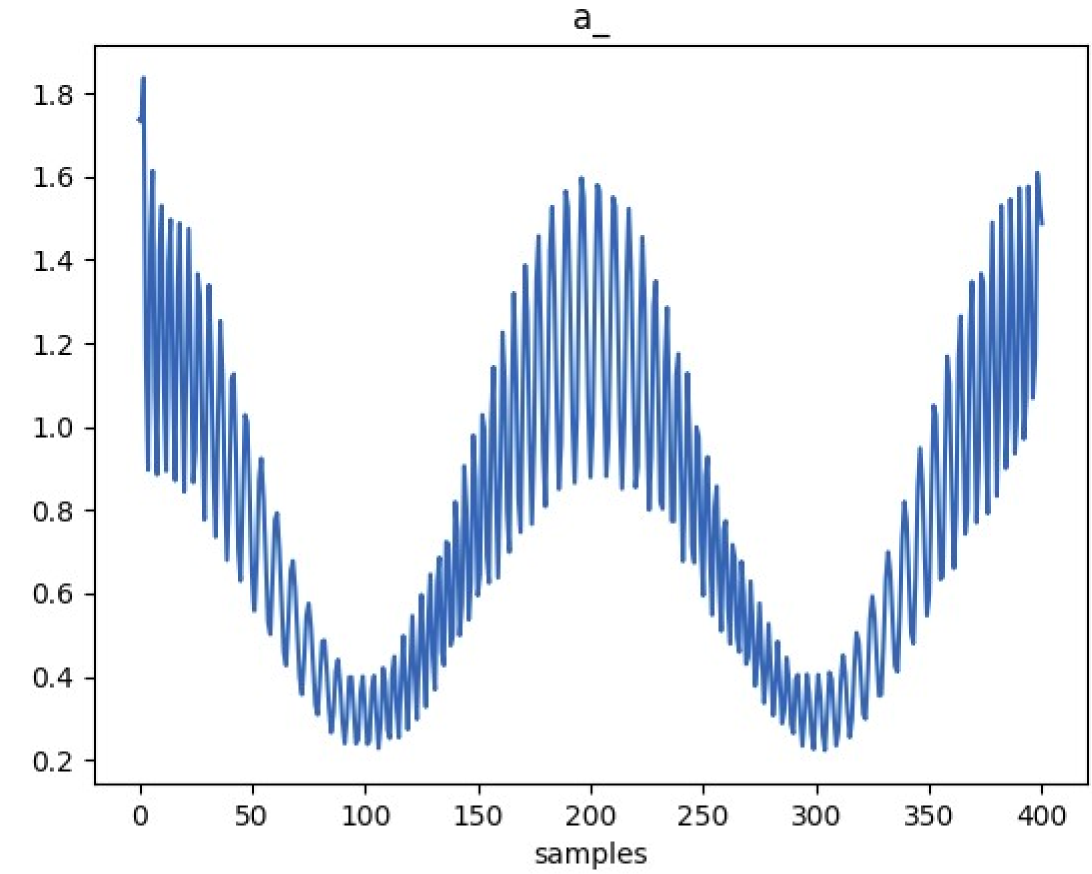


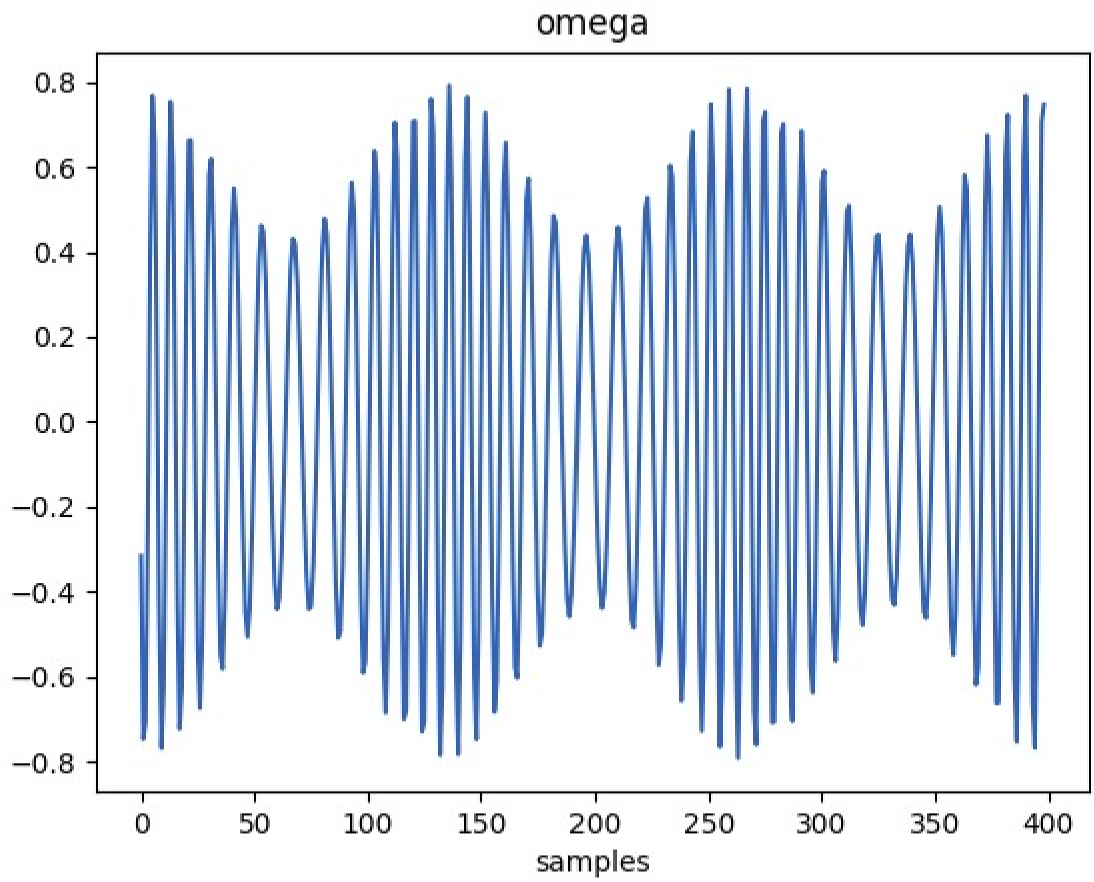

x
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
samples

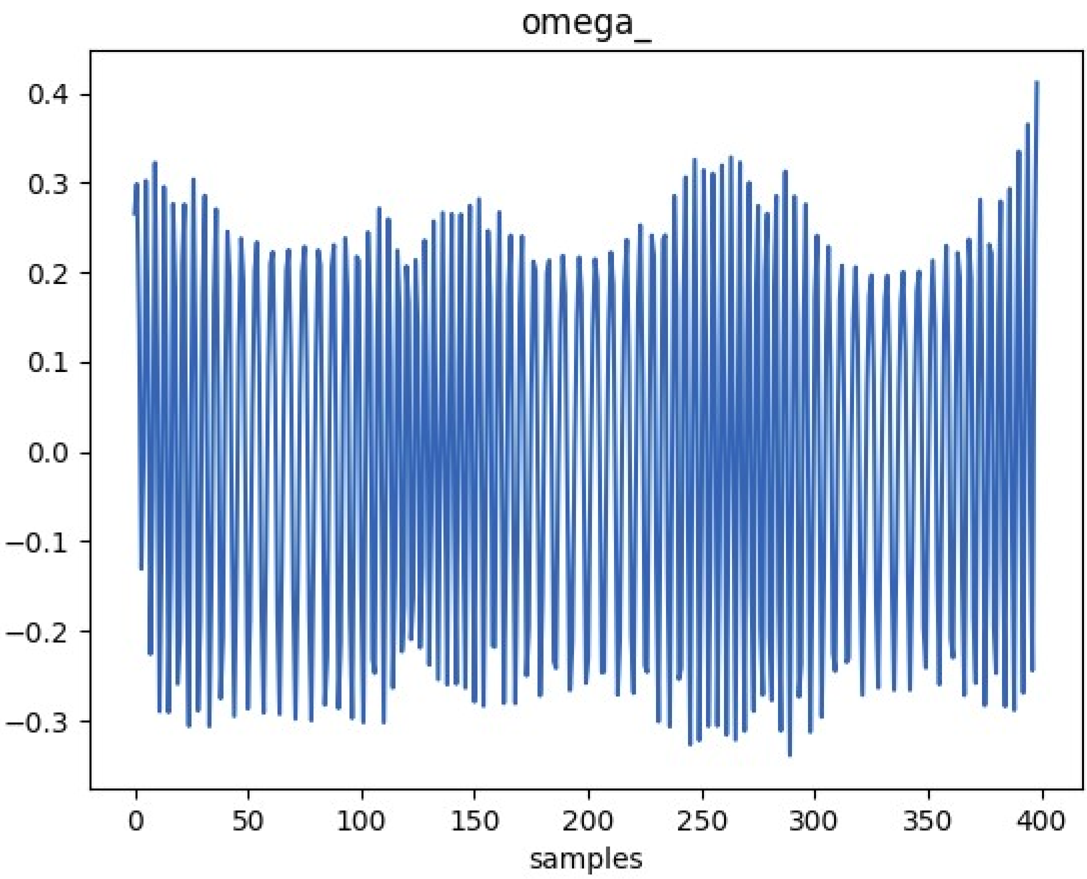

h_d
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
0
5
10
15
20
samples


y
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
samples


a
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0
50
100
150
200
250
300
350
400
samples


a_
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
samples


omega
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
0
50
100
150
200
250
300
350
400
samples



Rms of a and a_ is : 1.3196727708015519%
Rms of omega and omega_ is : 88.17922192461813%

```
import numpy as np
import matplotlib.pylab as plt
import math

figure_counter = 0
M = 21
t = M / 2
n = np.arange(401) # 0, 1, 2 ,...,400
phi = np.cos(np.pi * n / 5 + 4 * np.sin(3 * np.pi * n / 200)) # i guess there is a typo with "/n"

a = 1 + 0.6 * np.cos(np.pi * n / 100)
x = a * np.cos(phi)

def calculate_hd(M,t):
h_d = []
for n in range(0, M+1):
if n == t:
h_d.append(0)
else:
h_d.append( (1 - np.cos(np.pi * (n - t))) / (np.pi * (n - t)) )
return h_d

h_d = calculate_hd(M,t)
y = np.convolve(x,h_d, "same")

a_ = np.sqrt(x ** 2 + y ** 2)

phi_ = np.arctan2(y,x)

omega = [ phi[n] - phi[n-1]  for n in range(1,len(phi) - 1)]
omega_ = [ (phi_[n + 1] - phi_[n-1])/2 for n in range(1, len(phi_) - 1)]


def RMS(signal, signal_):
def rms(signal):
signal = np.array(signal)
return math.sqrt(sum(signal ** 2)) / len(signal)

signal = np.array(signal)
signal_ = np.array(signal_)

res = []
diff = signal - signal_
for i in range(len(signal)):
res.append( diff[i] / signal[i])

return rms(res) * 100

print("Rms of a and a_ is : " + str(RMS(a,a_)) + "%")
print("Rms of omega and omega_ is : " + str(RMS(omega,omega_)) + "%")
```

```
figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('x')
plt.xlabel('samples')
plt.plot(x)
plt.savefig("x.png")
figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('h_d')
plt.xlabel('samples')
plt.plot(h_d)
plt.savefig("h_d.png")
figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('y')
plt.xlabel('samples')
plt.plot(y)
plt.savefig("y.png")
figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('a')
plt.xlabel('samples')
plt.plot(a)
plt.savefig("a.png")
figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('a_')
plt.xlabel('samples')
plt.plot(a_)
plt.savefig("a_.png")
figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('phi')
plt.xlabel('samples')
plt.plot(phi)
plt.savefig("phi.png")
figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('phi_')
plt.xlabel('samples')
plt.plot(phi_)
plt.savefig("phi_.png")
figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('omega')
plt.xlabel('samples')
plt.plot(omega)
plt.savefig("omega.png")
figure_counter += 1
plt.figure(figure_counter)
plt.title('omega_')
plt.xlabel('samples')
plt.plot(omega_)
plt.savefig("omega_.png")

plt.show()
```

Άσκηση 2.4

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}/2}{1 - z^{-1}/3} \quad \text{και} \quad r_x[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

α) $P_x(z) = Z\{r_x[k]\} \overset{\text{απόδειξη στην 5}}{=} \dfrac{1 - (1/2)^2}{(1 - \frac{1}{2}z)(1 - z^{-1}/2)}$

Είναι $P_y(z) = P_x(z) H(z) H^*(1/z^*)$

Όμως $h[n]$ πραγματικό. Έτσι

$P_y(z) = P_x(z) H(z) H(z^{-1})$.

$$= \frac{3/4}{(1 - z/2)(1 - z^{-1}/2)} \cdot \frac{1 - z^{-1}/2}{1 - z^{-1}/3} \cdot \frac{1 - z/2}{1 - z/3}$$

$$P_y(z) = \frac{3/4}{(1 - z/3)(1 - z^{-1}/3)}$$

β) $r_y(k) = DTFT^{-1}\{P_y(e^{j\omega})\}$

Το P_y το γράφουμε ως $P_y(e^{j\omega}) = \dfrac{3/4}{(1 - e^{j\omega}/3)\left(\frac{3 - e^{-j\omega}}{3}\right)}$

$$= \frac{3/4\,(e^{j\omega} \cdot 3)}{(1 - \frac{e^{j\omega}}{3})(3e^{j\omega} - 1)} = \frac{-9}{4} e^{j\omega} \frac{1}{(1 - \frac{e^{j\omega}}{3})(1 - 3e^{j\omega})}$$

$$\frac{1}{(1 - \frac{e^{j\omega}}{3})(3e^{j\omega} - 1)} = \frac{A}{1 - \frac{e^{j\omega}}{3}} + \frac{B}{3e^{j\omega} - 1} = \frac{e^{j\omega}(3A - \frac{B}{3}) + B - A}{(1 - e^{j\omega}/3)(3e^{j\omega} - 1)}$$

$\Rightarrow 3A - B/3 = 0$ και $B - A = 1$.

$\Rightarrow B = 9A$ και $8A = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1/8}$

$\boxed{B = 9/8}$

$$P_y(e^{j\omega}) = \frac{9}{4} \frac{e^{j\omega} \cdot 1/8}{1 - e^{j\omega}/3} + \frac{9}{4} \frac{e^{j\omega}\, 9/8}{3e^{j\omega} - 1}$$

$$P_y(e^{j\omega}) = \frac{9}{32} \frac{1}{e^{-j\omega} - 1/3} + \frac{27}{32} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}/3}$$

$$= \frac{9}{32} \frac{e^{j\omega}}{1 - \frac{e^{j\omega}}{3}} + \frac{27}{32} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}/3}$$

Έστω $Q(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{j\omega}/3}$.

$\Rightarrow Q(e^{-j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}/3} \longrightarrow q[-n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$\Rightarrow q[n] = 3^n u[-n]$

Αν τώρα $F(e^{j\omega}) = \frac{9}{32} \frac{e^{j\omega}}{1 - \frac{e^{j\omega}}{3}} = \frac{9}{32} e^{j\omega} Q(e^{j\omega})$

$\Rightarrow f[n] = \frac{9}{32} q[n+1] \Rightarrow f[n] = \frac{9}{32} q[n+1]$

$\Rightarrow f[n] = 9/32 \; 3^{n+1} u[-(n+1)]$

$= \frac{3}{32} 3^n u[-1-n]$

Άρα, $r_y[n] = DTFT^{-1}\{P_y(e^{j\omega})\}$

$r_y[n] = \frac{9}{32} 3^n u[-n-1] + \frac{27}{32}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

δ) Επειδή έχουμε πραγματικά σήματα,

$r_{xy} = r_{yx} = h[k] * r_x[k]$

Είναι $H(z) = \frac{1 - z^{-1}/2 - z^{-1}/3 + z^{-1}/3}{1 - z^{-1}/3} = 1 - \frac{1}{6} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}/3}$

ROC: $\frac{1}{3} < |z| < \infty$)

$\Rightarrow h[n] = \delta[n] - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$

$= \delta[n] - \frac{1}{2} 3^{-n} u[n-1]$

$$\Rightarrow r_{xy}[n] = \left(\delta[n] - \tfrac{1}{2} 3^{-n} u[n-1]\right) * \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|} - \tfrac{1}{2}\left(3^{-n} u[n-1]\right) * \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|} - \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} u[k-1] \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n-k|}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|} - \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k-n|}$$

Αν $n \leq 1$ τότε:

$$r_{xy}[n] = (1/2)^{|n|} - \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} 2^{n}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|} - \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-(k+1)} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} 2^{n}$$

$$= (1/2)^{|n|} - 3^{-1} 2^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{6}\right)^{k} = (1/2)^{|n|} - 3^{-1} 2^{n-1} \frac{1}{1-1/6}$$

$$= (1/2)^{|n|} - \frac{1}{5} 2^{n}$$

Αν $n > 1$ τότε:

$$r_{xy}[n] = (1/2)^{|n|} - \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 3^{-k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-k} - \tfrac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} 3^{-k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-n}$$

$$= (1/2)^{|n|} - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} - 2^{n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{6^{k}}$$

$$= (1/2)^{|n|} - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} - 2^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+(n+1)}$$

$$= (1/2)^{|n|} - \frac{1}{2^{n}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{1-2/3} - 2^{n-1} \cdot \frac{1}{6^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-1/6}$$

$$= (1/2)^{|n|} - \frac{1}{2^{n}} \left(1 - (2/3)^{n}\right) - \frac{6}{5} 2^{n-1} \frac{1}{6^{n}} \frac{1}{6}$$

δ) $$P_{xy}(z) = H(z) P_x(z) = \frac{\cancel{1 - z^{-1}/2}}{1 - z^{-1}/3} \cdot \frac{3/4}{(1 - z/2)\cancel{(1 - z^{-1}/2)}}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(1 - z^{-1}/3)(1 - z/2)}$$

Ασκηση 2.5

$$r_x[x] = 17\left(\frac{1}{3}\right)^{|k|} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{|k+1|} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{|k-1|}$$

α) Αρχικά έστω $q[n] = a^{|k|}$, τότε

$$Q(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{0} a^{-k} z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a^{k} z^{-k}.$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a^{k} z^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^{k+1} = \frac{1}{1-az} + \frac{az^{-1}}{1-az^{-1}}$$

$$= \frac{1-az^{-1}+az^{-1}-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})} = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$$ με Roc: $|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$

Έτσι, έχουμε

$$P_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x[k] z^{-k}$$

$$= 17\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{|k|} z^{-k} + 4\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{|k+1|} + 4\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{|k-1|}$$

$$= \frac{(17+4z+4z^{-1})}{(1-z/3)(1-z^{-1}/3)}\left(1-(1/3)^2\right)$$

$$= \frac{8}{9}\,\frac{(1+4z)(1+4z^{-1})}{(1-z/3)(1-z^{-1}/3)}$$

β) $$P_x(e^{j\omega}) = P_x(z=e^{j\omega}) = \frac{8}{9}\,\frac{(17+4e^{j\omega}+4e^{-j\omega})}{1-\frac{e^{j\omega}}{3}-\frac{e^{-j\omega}}{3}+\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{8}{9}\,\frac{17+4\cos(\omega)+4j\sin(\omega)+4\cos(\omega)-4j\sin(\omega)}{\frac{10}{9}-\frac{\cos(\omega)}{3}-j\frac{\sin(\omega)}{3}-\frac{\cos(\omega)}{3}+j\frac{\sin(\omega)}{3}}$$

$$= \frac{8}{\cancel{9}3}\,\frac{17+8\cos(\omega)}{\cancel{\tfrac{1}{3}}\left(\frac{10}{3}-2\cos(\omega)\right)} = \frac{8}{3}\,\frac{17+8\cos(\omega)}{\frac{10}{3}-2\cos(\omega)}$$

δ) Με φασματική παραγοντοποίηση πρέπει το $P_x(z)$ να γραφτεί ως:

$$P_x(z) = \sigma_0^2 \frac{B(z)\, B(z^{-1})}{A(z)\, A(z^{-1})}.$$

$$= \begin{cases} \sigma_0^2 = 8/9 \\ A(z) = 1 - z^{-1}/2 \\ B(z) = 1 + 4z \end{cases}$$

Έτσι γράφουμε το $P_x(z)$ στη μορφή

$$P_x(z) = H(z)\, H(z^{-1}) \quad \text{με} \quad H(z) = \sigma_0 \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{1+4z}{1-z^{-1}/2}$$

$$H(z) = \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{4z\,(1+0.25z^{-1})}{1-z^{-1}/2}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3} z \frac{1+z^{-1}/4}{1-z^{-1}/2} = z \cdot G(z).$$

Το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς είναι αιτιατό και ευσταθές.
Αν η είσοδος είναι λευκός θόρυβος $u[n]$ μοναδιαίας μεταβλητότητας, η έξοδος θα είναι στοχαστική ανέλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση $r_x[n]$

Αξίζει να σημειωθεί πως το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$ εισάγει μια χρονική καθυστέρηση, ωστόσο δεν αλλάζει το φάσμα ισχύος της εξόδου.