1. (Esystlin5.tex) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $\lambda \in \mathbf{K}$, i et j deux entiers entre 1 et p. Soit $P \in GL_p(\mathbf{K})$ telle que PA est obtenue à partir de A en ajoutant λ fois la ligne j à la ligne i sans changer les autres (codage $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).
Comment est obtenue AP^{-1} à partir de A ? (indiquer seulement le codage)

2. (Esystlin1.tex) Résoudre le système suivant aux inconnues x et y lorsqu'il admet une seule solution

$$\begin{cases} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{cases}$$

3. (Esystlin8.tex) Calculer le rang de la matrice à p lignes et q colonnes dont tous les termes valent 1.

4. (Esystlin14.tex) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère quatre vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 définis par :

$$\begin{aligned} u_1 &= (-3, 1, -1, 0) \\ u_2 &= (-1, 1, 1, 2) \\ u_3 &= (4, 3, 1, -1) \\ u_4 &= (-2, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Quel est le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) ?

5. (Esystlin15.tex) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère quatre vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 définis par :

$$\begin{aligned} u_1 &= (-3, 1, -1, 0) \\ u_2 &= (-1, 1, 2, 1) \\ u_3 &= (4, -3, -1, 1) \\ u_4 &= (-2, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

et le système $(\mathcal{S})$ de quatre équations aux inconnues (x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = a \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = b \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = c \\ x_2 + x_3 + x_4 = d \end{cases}$$

Traduire par une propriété de $\mathcal{S}$ la propriété

$$(a, b, c, d) \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

6. (Esystlin2.tex) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $\lambda \in \mathbf{K}$, i et j deux entiers entre 1 et p. Soit $P \in GL_p(\mathbf{K})$ telle que PA est obtenue à partir de A en ajoutant λ fois la ligne j à la ligne i sans changer les autres (codage $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).
Comment est obtenue $P^{-1}A$ à partir de A ? (indiquer seulement le codage)

7. (Esystlin18.tex) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère quatre vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 définis par :

$$\begin{aligned} u_1 &= (-3, 1, -1, 0) \\ u_2 &= (-1, 1, 2, 1) \\ u_3 &= (4, -3, -1, 1) \\ u_4 &= (-2, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Donner une condition sur a, b, c, d assurant que

$$(a, b, c, d) \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

8. (Esystlin4.tex) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $\lambda \in \mathbf{K}$, i et j deux entiers entre 1 et p. Soit $P \in GL_p(\mathbf{K})$ telle que PA est obtenue à partir de A en ajoutant λ fois la ligne j à la ligne i sans changer les autres (codage $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).
Comment est obtenue AP à partir de A ? (indiquer seulement le codage)

9. (Esystlin9.tex) Former des relations entre les paramètres assurant que le système suivant de quatre équations aux inconnues (x_1, x_2, x_3, x_4) admet des solutions

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 = a \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = b \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = c \\ x_2 - x_3 + x_4 = d \end{cases}$$

10. (Esystlin20.tex) Soit a, b, c, d des fonctions définies dans $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et qui admettent les développements limités suivant en 0

$$\begin{aligned} a(x) &= 1 + x - x^2 + o(x^2) \\ b(x) &= 1 + 2x - x^2 + o(x^2) \\ c(x) &= \phantom{1 +{}} x + 2x^2 + o(x^2) \\ d(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Déterminer les réels α, β, γ tels que $d - \alpha a - \beta b - \gamma c$ soit négligeable en 0 devant x^2.

11. (Esystlin16.tex) On considère le système $(\mathcal{S})$ de quatre équations aux inconnues (x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = a \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = b \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = c \\ x_2 + x_3 + x_4 = d \end{cases}$$

Former une relation entre les paramètres assurant que $\mathcal{S}$ a des solutions.

12. (Esystlin10.tex) Former des relations entre les paramètres assurant que le système suivant de trois équations aux inconnues (x_1, x_2, x_3) admet des solutions

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 - 4x_3 = a \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = b \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

13. (Esystlin13.tex) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère quatre vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 définis par :

$$\begin{aligned} u_1 &= (-3, 1, -1, 0) \\ u_2 &= (-1, 1, 1, 2) \\ u_3 &= (4, 3, 1, -1) \\ u_4 &= (-2, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ou liée ?

14. (Esystlin19.tex) Résoudre le système linéaire de 3 équations

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

15. (Esystlin17.tex) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère quatre vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 définis par :

$$\begin{aligned} u_1 &= (-3, 1, -1, 0) \\ u_2 &= (-1, 1, 2, 1) \\ u_3 &= (4, -3, -1, 1) \\ u_4 &= (-2, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ou liée ?

16. (Esystlin21.tex) Dans $E = \mathbb{R}^3$, $a = (1, 1, 0)$, $b = (1, 0, 1)$, $c = (1, 3, -2)$. Former une relation linéaire entre ces trois vecteurs.

17. (Esystlin6.tex) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $\lambda \in \mathbf{K}$, i et j deux entiers entre 1 et p. Soit $P \in GL_p(\mathbf{K})$ telle que PA est obtenue à partir de A en ajoutant λ fois la ligne j à la ligne i sans changer les autres (codage $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).
Comment est obtenue A^tP à partir de A ? (indiquer seulement le codage)

18. (Esystlin7.tex) Calculer le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ où

$$\forall (i, j) \in \{1, \cdots, p\} \times \{1, \cdots, q\} : a_{ij} = (-1)^{i+j}$$

19. (Esystlin11.tex) Former des relations entre les paramètres assurant que le système suivant de trois équations aux inconnues (x_1, x_2, x_3) admet des solutions

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = b \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

20. (Esystlin23.tex) Former des relations entre les paramètres assurant que le système suivant de trois équations aux inconnues (x_1, x_2, x_3) admet des solutions

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = a \\ -x_1 + x_2 + x_3 = b \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = c \end{cases}$$

21. (Esystlin22.tex) Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère deux vecteurs x et y et $F = \mathrm{Vect}(x, y)$

$$x = (1, -1, 1, -1) \qquad y = (1, 2, 3, 4)$$

Déterminer un système d'équations cartésiennes de F.

22. (Esystlin3.tex) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $\lambda \in \mathbf{K}$, i et j deux entiers entre 1 et p. Soit $P \in GL_p(\mathbf{K})$ telle que PA est obtenue à partir de A en ajoutant λ fois la ligne j à la ligne i sans changer les autres (codage $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).
Comment est obtenue ${}^tPA$ à partir de A ? (indiquer seulement le codage)

23. (Esystlin12.tex) Former des relations entre les paramètres assurant que le système suivant de trois équations aux inconnues (x_1, x_2, x_3) admet des solutions

$$\begin{cases} -5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + 2x_2 = c \end{cases}$$