1. (Elinmat51.tex) Soit $t \neq 0$ réel fixé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\,\mathrm{sh}\,t\,u_{n+1} + (1-(\mathrm{ch}\,t)^2)u_n$$
On suppose $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, exprimer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

2. (Elinmat23.tex) Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace vectoriel de E. Soit R l'application de restriction à A d'un endomorphisme de E.
On affecte des lettres à des théorèmes de cours
   a. Théorème du prolongement linéaire appliqué à A.
   b. Théorème du prolongement linéaire appliqué à E.
   c. Théorème d'existence d'une base appliqué à A.
   d. Théorème d'existence d'une base appliqué à E.
   e. Théorème de la base incomplète appliqué à A.
   f. Théorème de la base incomplète appliqué à E.

   Par quelle séquence ordonnée de ces théorèmes peut-on démontrer que R est surjective ?

3. (Elinmat31.tex) Dans $\mathbb{R}^3$, exprimer $x = (2,1,7)$ comme combinaison linéaire de $y = (1,1,2)$ et de $z = (1,2,-1)$.

4. (Eexo282.tex) Dans un espace vectoriel E de dimension 3, on se donne deux bases $\mathcal{A} = (a_1,a_2,a_3)$ et $\mathcal{E} = (e_1,e_2,e_3)$ vérifiant les relations suivantes :
$$\begin{cases} a_1 &= e_1 - e_2 + 2e_3 \\ a_2 &= e_1 - 2e_2 + 2e_3 \\ a_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} e_1 &= -4a_1 + 3a_2 + 2a_3 \\ e_2 &= a_1 - a_2 \\ e_3 &= 3a_1 - 2a_2 - a_3 \end{cases}$$
Écrire la matrice dans $\mathcal{A}$ de la projection sur $\mathrm{Vect}(a_2,a_3)$ parallèlement à e_1

5. (Elinmat22.tex) Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace vectoriel de E. Soit R l'application de restriction à A d'un endomorphisme de E. On admet que R est linéaire et surjective. Quelle est la dimension de son noyau ?

6. (Elinmat7.tex) Préciser selon λ, le rang de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} -2\,\lambda-2 & -8 & 4 \\ -2\,\lambda-4 & -3\,\lambda-10 & 3\,\lambda+5 \\ 4\,\lambda+2 & 3\,\lambda-4 & 2 \end{pmatrix}$$

7. (Elinmat29.tex) Soit (a,b) une base d'un espace vectoriel E et e, f, g, h, u dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant
$$\begin{aligned} e(a) &= a, & e(b) &= 0_E \\ f(a) &= b, & f(b) &= 0_E \\ g(a) &= a, & g(b) &= a \\ h(a) &= a, & h(b) &= b \\ u(a) &= a+b, & u(b) &= -a+2b \end{aligned}$$
On admet que (e,f,g,h) est une base de $\mathcal{L}(E)$. Calculer les coordonnées de u dans cette base.

8. (Elinmat32.tex) Dans $\mathbb{R}^3$, exprimer $x = (4,2,0)$ comme combinaison linéaire de $y = (1,2,3)$ et de $z = (1,0,-1)$.

9. (Eexo297.tex) Calculer le déterminant de la matrice suivante
$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. (Eexo281.tex) Dans un espace vectoriel E de dimension 3, on se donne deux bases $\mathcal{A} = (a_1,a_2,a_3)$ et $\mathcal{E} = (e_1,e_2,e_3)$ vérifiant les relations suivantes :
$$\begin{cases} a_1 &= e_1 - e_2 + 2e_3 \\ a_2 &= e_1 - 2e_2 + 2e_3 \\ a_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} e_1 &= -4a_1 + 3a_2 + 2a_3 \\ e_2 &= a_1 - a_2 \\ e_3 &= 3a_1 - 2a_2 - a_3 \end{cases}$$
Écrire la matrice dans $\mathcal{A}$ de la projection sur $\mathrm{Vect}(a_1,a_3)$ parallèlement à e_3

11. (Elinmat36.tex) Soit θ réel fixé non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\cos\theta\,u_{n+1} - \frac{u_n}{1+\tan^2\theta}$$
On suppose $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, exprimer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

12. (Elinmat4.tex) Soit (e_1,e_2,e_3) une base d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E. On définit trois vecteurs
$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 &= 2e_1 + e_3 \\ u_3 &= 2e_2 + e_3 \end{aligned}$$
Former la matrice de passage $P_{\mathcal{AB}}$ pour
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (e_2,e_3,e_1) \\ \mathcal{B} &= (u_3,u_1,u_2) \end{aligned}$$

13. (Elinmat38.tex) Soit θ réel fixé non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\cos\theta\, u_{n+1} + (4+4\cos 2\theta)u_n$$
On suppose $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, exprimer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

14. (Elinmat37.tex) Soit θ réel fixé non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\cos\theta\, u_{n+1} - \frac{u_n}{1+\tan^2\theta}$$
On suppose $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, exprimer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

15. (Elinmat6.tex) Préciser selon λ, le rang de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} -\lambda+1 & -3\,\lambda-5 & \lambda-1 \\ -3\,\lambda+3 & -2\,\lambda-6 & \lambda-1 \\ -3\,\lambda+3 & 3\,\lambda+1 & -\lambda+1 \end{pmatrix}$$

16. (Elinmat49.tex) Soit $t \neq 0$ réel fixé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\operatorname{ch} t\, u_{n+1} - u_n$$
On suppose $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, exprimer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

17. (Elinmat9.tex) Préciser selon λ, le rang de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} -2\,\lambda-4 & -\lambda & -5\,\lambda \\ 5\,\lambda & 3\,\lambda & 0 \\ \lambda-4 & 2\,\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

18. (Elinmat12.tex) Préciser le rang de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} -12 & -6 & 12 \\ 12 & 6 & -12 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

19. (Elinmat45.tex) Dans un plan, on se donne un repère $(O,(i,j))$. Les fonctions coordonnées dans ce repère sont notées x et y. On se donne 3 points A, U, V par leurs coordonnées :
$$x(A) = 2, y(A) = 1;$$
$$x(U) = 4, y(U) = 2; \qquad x(V) = 1, y(V) = 3$$
On note $u = \overrightarrow{AU}$ et $v = \overrightarrow{AV}$. On admet que $(A,(u,v))$ est un repère dont les fonctions coordonnées sont notées X et Y. Exprimer X et Y en fonction de x et y.

20. (Eexo62.tex) L'ensemble des suites de nombres réels qui convergent vers 1 est-il un sous espace vectoriel de l'espace des suites ?

21. (Elinmat10.tex) Préciser selon λ, le rang de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda^2+\lambda & -2\,\lambda^2-2\,\lambda \\ -2\,\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

22. (Elinmat8.tex) Préciser selon λ, le rang de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} -8\,\lambda+1 & -1 & 6\,\lambda-2 \\ 2\,\lambda-1 & 1 & -\lambda+2 \\ 2\,\lambda+2 & -2 & -\lambda-4 \end{pmatrix}$$

23. (Eexo277.tex) Dans un espace vectoriel E de dimension 3, on se donne deux bases $\mathcal{A} = (a_1,a_2,a_3)$ et $\mathcal{E} = (e_1,e_2,e_3)$ vérifiant les relations suivantes :
$$\begin{cases} a_1 &= e_1 - e_2 + 2e_3 \\ a_2 &= e_1 - 2e_2 + 2e_3 \\ a_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} e_1 &= -4a_1 + 3a_2 + 2a_3 \\ e_2 &= a_1 - a_2 \\ e_3 &= 3a_1 - 2a_2 - a_3 \end{cases}$$
Écrire la matrice dans $\mathcal{A}$ de la projection sur $\operatorname{Vect}(a_1,a_2)$ parallèlement à e_3

24. (Elinmat35.tex) Soit θ réel fixé non congru à 0 modulo $\frac{\pi}{2}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\cos\theta\, u_{n+1} - u_n$$
On suppose $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, exprimer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

25. (Eexo279.tex) Dans un espace vectoriel E de dimension 3, on se donne deux bases $\mathcal{A} = (a_1,a_2,a_3)$ et $\mathcal{E} = (e_1,e_2,e_3)$ vérifiant les relations suivantes :
$$\begin{cases} a_1 &= e_1 - e_2 + 2e_3 \\ a_2 &= e_1 - 2e_2 + 2e_3 \\ a_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} e_1 & = & -4a_1+3a_2+2a_3 \\ e_2 & = & a_1-a_2 \\ e_3 & = & 3a_1-2a_2-a_3 \end{array}\right.$$

Écrire la matrice dans $\mathcal{A}$ de la projection sur $\mathrm{Vect}(a_1, a_3)$ parallèlement à e_1

26. (Elinmat16.tex) Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, soit f linéaire de E dans F, soit $u_1, \cdots, u_p$ une famille de p vecteurs de E et $v_1, \cdots, v_p$ une famille de p vecteurs de F tels que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, p\} : f(u_i) = v_i$$

L'implication suivante est-elle vraie ?

$$(u_1, \cdots, u_p) \text{ génératrice } \Rightarrow (v_1, \cdots, v_p) \text{ génératrice}$$

27. (Elinmat11.tex) Préciser selon λ, le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,\lambda \\ -2\,\lambda^2+6\,\lambda & -2\,\lambda^2+6\,\lambda & 8\,\lambda-2\,\lambda^2 \end{pmatrix}$$

28. (Elinmat34.tex) Soit θ réel fixé non congru à 0 modulo $\frac{\pi}{2}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\cos\theta\, u_{n+1} - u_n$$

On suppose $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, exprimer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

29. (Eexo284.tex) Dans un espace vectoriel E de dimension 3, on se donne deux bases $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ vérifiant les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 & = & e_1-e_2+2e_3 \\ a_2 & = & e_1-2e_2+2e_3 \\ a_3 & = & e_1+e_2+e_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} e_1 & = & -4a_1+3a_2+2a_3 \\ e_2 & = & a_1-a_2 \\ e_3 & = & 3a_1-2a_2-a_3 \end{array}\right.$$

Écrire la matrice dans $\mathcal{A}$ de la projection sur $\mathrm{Vect}(a_2, a_3)$ parallèlement à e_3

30. (Elinmat14.tex) Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, soit f linéaire de E dans F, soit $u_1, \cdots, u_p$ une famille de p vecteurs de E et $v_1, \cdots, v_p$ une famille de p vecteurs de F tels que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, p\} : f(u_i) = v_i$$

L'implication suivante est-elle vraie ?

$$(v_1, \cdots, v_p) \text{ libre } \Rightarrow (u_1, \cdots, u_p) \text{ libre}$$

31. (Eexo276.tex) Calculer la matrice inverse de

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

32. (Elinmat27.tex) Soit $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ une base d'un espace vectoriel E. On admet que

$$\mathcal{B}' = (a, b+c, c+d, d+a)$$

est aussi une base de E.
Soit x un vecteur de coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans $\mathcal{B}'$. Quelle est la première coordonnée de x dans $\mathcal{B}$?

33. (Elinmat21.tex) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et A un sous-espace vectoriel de E. Soit R l'application de restriction à A d'un endomorphisme de E. Préciser les espaces de départ et d'arrivée de R, écrire avec des quantificateurs la surjectivité de R.

34. (Elinmat50.tex) Soit $t \neq 0$ réel fixé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\,\mathrm{ch}\, t\, u_{n+1} - u_n$$

On suppose $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, exprimer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

35. (Eexo294.tex) Soit f un endomorphisme d'$\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension trois dont la matrice dans une base (a, b, c) est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donner une base de l'image et du noyau

36. (Elinmat25.tex) On considère une famille (a, b, c) de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$a = (1, -1, 1),\ b = (1, 2, 3),\ c = (5, 4, 11)$$

Cette famille est-elle libre ou liée ? Si elle est liée, donner une relation entre ses vecteurs.

37. (Eexo299.tex) Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

38. (Elinmat3.tex) Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E. On définit trois vecteurs

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 &= 2e_1 + e_3 \\ u_3 &= 2e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Former la matrice de passage $P_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ pour

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (u_1, u_2, e_3) \\ \mathcal{B} &= (e_1, e_2, e_3) \end{aligned}$$

39. (Elinmat5.tex) Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E. On définit trois vecteurs

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 &= 2e_1 + e_3 \\ u_3 &= 2e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Former la matrice de passage $P_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ pour

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (u_1, e_1, e_3) \\ \mathcal{B} &= (u_2, e_2, u_3) \end{aligned}$$

40. (Elinmat13.tex) Préciser le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -10 & -6 \\ -3 & -12 & -18 \\ -1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

41. (Eexo296.tex) Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

42. (Elinmat39.tex) Soit θ réel fixé non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\cos\theta\, u_{n+1} + (4 + 4\cos 2\theta)u_n$$

On suppose $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, exprimer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

43. (Elinmat28.tex) La famille $(1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer la troisième coordonnée dans cette base de

$$X^3 + 7X^2 - 13X + 17$$

44. (Elinmat41.tex) Dans un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2, on se donne un repère $\mathcal{R} = (O, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}))$. Les fonctions coordonnées dans ce repère sont notées x et y. On considère deux autres fonctions X et Y définies par

$$X = x + y - 1 \qquad Y = x$$

Déterminer un repère $(A, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$ tel que les fonctions coordonnées dans ce repère soient X et Y. On précisera les coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R}$ et les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

45. (Elinmat30.tex) Calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

46. (Elinmat46.tex) Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} a &= (1, -2, 1) \\ b &= (2 - 4, 5) \\ c &= (1, -2, -1) \end{aligned}$$

La famille (a, b, c) est-elle libre ou liée ? Si elle est liée, préciser une relation linéaire.

47. (Elinmat26.tex) Soit $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ une base d'un espace vectoriel E. On admet que

$$\mathcal{B}' = (a, b + c, c + d, d + a)$$

est aussi une base de E.
Soit x un vecteur de coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans $\mathcal{B}$. Quelle est la première coordonnée de x dans $\mathcal{B}'$?

48. (Elinmat19.tex) Soit a et b deux nombres complexes fixés. L'application

$$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to az + b\overline{z} \end{cases}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire. Former sa matrice dans la base $(1, i)$.

49. (Eexo298.tex) Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

50. (Eexo274.tex) Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

51. (Eexo278.tex) Dans un espace vectoriel E de dimension 3, on se donne deux bases $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_1 &= e_1 - e_2 + 2e_3 \\ a_2 &= e_1 - 2e_2 + 2e_3 \\ a_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 &= -4a_1 + 3a_2 + 2a_3 \\ e_2 &= a_1 - a_2 \\ e_3 &= 3a_1 - 2a_2 - a_3 \end{cases}$$

Écrire la matrice dans $\mathcal{A}$ de la projection sur $\mathrm{Vect}(a_1, a_2)$ parallèlement à e_1

52. (Elinmat1.tex) Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E. On définit trois vecteurs

$$u_1 = e_1 + e_2 + e_3$$
$$u_2 = 2e_1 + e_3$$
$$u_3 = 2e_2 + e_3$$

Former la matrice de passage $P_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ pour

$$\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$$
$$\mathcal{B} = (u_1, u_2, e_3)$$

53. (Elinmat48.tex) Dans un espace vectoriel de dimension 4,on dispose de deux bases :

$$\mathcal{B} = (a, b, c, d), \qquad \mathcal{B}' = (a, b - c, c - d, d - a)$$

Soit x un vecteur de coordonnées $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ dans $\mathcal{B}'$. Quelles sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$?

54. (Elinmat52.tex) Soit $t \neq 0$ réel fixé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\,\mathrm{sh}\,t\,u_{n+1} + (1 - (\mathrm{ch}\,t)^2)u_n$$

On suppose $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, exprimer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

55. (Eexo61.tex) Le complémentaire d'un sous espace vectoriel est il un sous espace vectoriel ?

56. (Elinmat20.tex) Soit a et b deux nombres complexes fixés. L'application

$$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to (1+i)z - 2i\overline{z} \end{cases}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire. Former sa matrice dans la base $(1, i)$.

57. (Elinmat18.tex) Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, soit f linéaire de E dans F. Le sous-espace $\mathrm{Vect}(f)$ est-il un sous-espace de E, de F, de $\mathcal{L}(E, F)$, de $\mathcal{L}(F, E)$, de E^* ?

58. (Elinmat47.tex) Dans un espace vectoriel de dimension 4, on dispose de deux bases :

$$\mathcal{B} = (a, b, c, d), \qquad \mathcal{B}' = (a, b - c, c - d, d - a)$$

Soit x un vecteur de coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans $\mathcal{B}$. Quelles sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$?

59. (Eexo275.tex) Calculer la matrice inverse de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

60. (Elinmat44.tex) Dans un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2, on se donne un repère $\mathcal{R} = (O, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}))$. Les fonctions coordonnées dans ce repère sont notées x et y. On considère un autre repère $(A, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$, les coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R}$ sont $(0, 1)$, les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ s'expriment dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} \qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$$

Exprimer les fonctions coordonnées X et Y dans le nouveau repère avec x et y

61. (Elinmat17.tex) Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, soit f linéaire de E dans F, soit $u_1, \cdots, u_p$ une famille de p vecteurs de E et $v_1, \cdots, v_p$ une famille de p vecteurs de F tels que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, p\} : f(u_i) = v_i$$

L'implication suivante est-elle vraie ?

$$(v_1, \cdots, v_p) \text{ génératrice } \Rightarrow (u_1, \cdots, u_p) \text{ génératrice}$$

62. (Eexo283.tex) Dans un espace vectoriel E de dimension 3, on se donne deux bases $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_1 &= e_1 - e_2 + 2e_3 \\ a_2 &= e_1 - 2e_2 + 2e_3 \\ a_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 &= -4a_1 + 3a_2 + 2a_3 \\ e_2 &= a_1 - a_2 \\ e_3 &= 3a_1 - 2a_2 - a_3 \end{cases}$$

Écrire la matrice dans $\mathcal{A}$ de la projection sur $\mathrm{Vect}(a_2, a_3)$ parallèlement à e_2

63. (Eexo144.tex) Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, $\lambda \in \mathbb{R}$ et (a, b) une base de E. On pose $b_1 = b + \lambda a$. Soit x un vecteur de coordonnées (α, β) dans (a, b). Préciser les coordonnées de x dans (b_1, a).

64. (Elinmat42.tex) Dans un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2, on se donne un repère $\mathcal{R} = (O, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}))$. Les fonctions coordonnées dans ce repère sont notées x et y. On considère un autre repère $(A, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$, les coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R}$ sont $(1, 1)$, les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ s'expriment dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} \qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$$

Exprimer les fonctions coordonnées X et Y dans le nouveau repère avec x et y

65. (Elinmat15.tex) Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, soit f linéaire de E dans F, soit $u_1, \cdots, u_p$ une famille de p vecteurs de E et $v_1, \cdots, v_p$ une famille de p vecteurs de F tels que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, p\} : f(u_i) = v_i$$

L'implication suivante est-elle vraie ?

$$(u_1, \cdots, u_p) \text{ libre } \Rightarrow (v_1, \cdots, v_p) \text{ libre}$$

66. (Elinmat40.tex) Soit $\mathcal{A} = (a_1, \cdots, a_p)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension $p \geq 3$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_p)$ une autre base de E telle que

$$b_1 = a_1 + a_2, \qquad \forall i \geq 2,\ b_i = a_i$$

Soit x un vecteur de coordonnées $(x_1, \cdots, x_p)$ dans $\mathcal{A}$. Quelles sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$?

67. (Elinmat24.tex) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E) \times E$?

68. (Elinmat33.tex) Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie respectivement p et q, soit A un sous-espace vectoriel de E de dimension a. On admet que

$$\mathcal{U} = \{f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ tq } A \subset \ker f\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et que l'application « restriction à A »

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(A, F) \\ \qquad f \mapsto f_{|A} \end{cases}$$

est surjective. Quelle est la dimension de $\mathcal{U}$?

69. (Eexo64.tex) L'ensemble des suites convergentes de nombres réels est-il un sous espace vectoriel de l'espace des suites ?

70. (Eexo295.tex) Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

71. (Elinmat53.tex) Pour quelles valeurs du paramètre a le système

$$\begin{cases} (3a-3)x + (2a+4)y + (a+5)z = 0 \\ (a-1)x + y + az = 0 \\ (a-1)x - ay - z = 0 \end{cases}$$

admet-il une solution non nulle ?

72. (Eexo280.tex) Dans un espace vectoriel E de dimension 3, on se donne deux bases $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_1 &= e_1 - e_2 + 2e_3 \\ a_2 &= e_1 - 2e_2 + 2e_3 \\ a_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 &= -4a_1 + 3a_2 + 2a_3 \\ e_2 &= a_1 - a_2 \\ e_3 &= 3a_1 - 2a_2 - a_3 \end{cases}$$

Écrire la matrice dans $\mathcal{A}$ de la projection sur $\mathrm{Vect}(a_1, a_3)$ parallèlement à e_2

73. (Elinmat2.tex) Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E. On définit trois vecteurs

$$u_1 = e_1 + e_2 + e_3$$
$$u_2 = 2e_1 + e_3$$
$$u_3 = 2e_2 + e_3$$

Former la matrice de passage $P_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ pour

$$\mathcal{A} = (u_1, e_2, e_3)$$
$$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$$

74. (Eexo63.tex) L'ensemble des suites de nombres réels qui convergent vers 0 est-il un sous espace vectoriel de l'espace des suites ?

75. (Elinmat43.tex) Dans un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2, on se donne un repère $\mathcal{R} = (O, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}))$. Les fonctions coordonnées dans ce repère sont notées x et y. On considère deux autres fonctions X et Y définies par

$$X = x + y - 2 \qquad Y = x - 1$$

Déterminer un repère $(A, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$ tel que les fonctions coordonnées dans ce repère soient X et Y. On précisera les coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R}$ et les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.