

1. (Exo129.tex) Limite de la suite

$$\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

2. (Exo228.tex) Soit  $f$  une fonction définie dans un intervalle  $I$ , écrire avec des quantificateurs la définition de  $f \xrightarrow{a} l$  pour  $a = -\infty$  et  $l = +\infty$ .

3. (Ecalcloc19.tex) Limite en  $+\infty$  de

$$\cos \frac{\pi x + 3}{\pi + 3x}$$

4. (Ecalcloc64.tex) Calculer la limite en 0 de

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x + x^2}$$

5. (Ecalcloc65.tex) Calculer la limite en  $+\infty$  de

$$\left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

6. (Ecalcloc111.tex) On admet que  $f$ , définie par,

$$f(x) = \frac{1}{3}(e^x - 1 + 2x)$$

est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et que la bijection réciproque  $g$  admet un développement limité en 0 à l'ordre 2. Calculer ce développement limité.

7. (Ecalcloc103.tex) Soit  $a > 0$  et  $b < 1$ , on définit  $f$  par

$$f(x) = \left(\operatorname{ch} \frac{a}{x} + b \operatorname{sh} \frac{a}{x}\right)^x$$

Calculer un développement limité de  $f$  en 0 strictement à gauche à l'ordre 1.

8. (Exo125.tex) Les fonctions suivantes sont-elles équivalentes en  $+\infty$

$$x \rightarrow e^{\sqrt{x}}, x \rightarrow e^{\sqrt{x+1}}$$

9. (Ecalcloc53.tex) Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles et strictement décroissante sur  $]a, b[$ . Donner une condition impliquant que  $f$  admet une limite finie en  $b$ .

10. (Ecalcloc54.tex) Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles et strictement croissante sur  $]a, b[$ . Donner une condition impliquant que  $f$  admet une limite finie en  $b$ .

11. (Ecalcloc44.tex) Soit  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ . Préciser  $f^{(5)}(0)$ .

12. (Ecalcloc110.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 1 en 1 de

$$x \mapsto \ln(1 + x + x^3)$$

13. (Exo6.tex) Équivalent en 0 de

$$\frac{1 - \cos x}{\sinh x} + x^{3+\sqrt{x^2+1}}$$

14. (Exo13.tex) Développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\frac{1}{2-x}$ .

15. (Ecalcloc38.tex) En  $+\infty$ , la fonction  $x \rightarrow \ln(1+x) - \ln(\operatorname{ch} x)$  admet-elle une direction asymptotique ? une asymptote ?

16. (Exo44.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 3 de  $\tan x$ .

17. (Exo101.tex) Limite de

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

18. (Ecalcloc105.tex) Soit  $a > 0$ , sous quelle condition sur le réel  $b$  la fonction

$$x \mapsto \left(\operatorname{ch} \frac{a}{x} + b \operatorname{sh} \frac{a}{x}\right)^x$$

est-elle définie localement strictement à gauche de 0 ?

19. (Exo209.tex) Limite de la suite dont le  $n$ ème terme est

$$(2 - \cos \frac{1}{n})^n$$

20. (Ecalcloc10.tex) Limite en  $+\infty$  de

$$\left(\operatorname{ch} \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

21. (Ecalcloc114.tex) On admet que la fonction définie par

$$f(x) = xe^{x^2}$$

est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et que sa bijection réciproque  $g$  admet un développement limité en 0 à l'ordre 4. Calculer ce développement limité.

22. (Exo231.tex) Soit  $f$  une fonction définie dans un intervalle  $I$ , écrire avec des quantificateurs la définition de  $f \xrightarrow{a} l$  pour  $a = +\infty$  and  $l = +\infty$ .

23. (Exo117.tex) Les suites  $(e^n)$  et  $(e^{n+1})$  sont-elles équivalentes ?

24. (Exo211.tex) Suite équivalente de la suite dont le  $n$ ème terme est

$$(2 + \sin \frac{1}{n})^n$$

25. (Exo85.tex) Développement limité en 1 à l'ordre 2 de  $\frac{\ln x}{x^2}$

26. (Ecalcloc4.tex) On admet la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

Trouver une suite équivalente à la suite des coefficients du binôme  $\binom{2n}{n}$

27. (Ecalcloc12.tex) Limite en  $+\infty$  de

$$\left(\operatorname{ch} \frac{1}{x}\right)^x$$

28. (Ecalcloc73.tex) Limite de la suite

$$\frac{2(2n+1)n^{n+1}}{(n+1)^n}$$

29. (Exo196.tex) Limite en 1 de

$$\frac{2^x - 2}{x - 1}$$

30. (Ecalcloc45.tex) Former un développement limité de  $\sqrt{x}$  en 2 à l'ordre 2.

31. (Exo106.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 3 de

$$\frac{1}{1+x^4}$$

32. (Ecalcloc75.tex) Développement limité en 0 avec un reste négligeable devant  $x^6$  de la fonction

$$\operatorname{th} x$$

33. (Ecalcloc9.tex) Équivalent en  $-\infty$  de la fonction  $\ln(1+\operatorname{ch} x)$ .

34. (Exo184.tex) Valeur en 0 de la dérivée à l'ordre 4 de

$$\ln(\cos(\ln(\operatorname{ch} x)))$$

35. (Exo88.tex) Développement en 0 à l'ordre 4 de  $\arccos$

36. (Ecalcloc97.tex) Calculer la limite en  $+\infty$  de

$$x \mapsto (x^2 + 3x)^{\frac{1}{2}} - (x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{3}}$$

37. (Ecalcloc43.tex) Soit  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ . Préciser  $f^{(2)}(0)$ .

38. (Exo24.tex) Développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\sqrt{1+x}$ .

39. (Ecalcloc11.tex) Limite en  $+\infty$  de

$$\left(\cos \frac{1}{x}\right)^x$$

40. (Ecalcloc118.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\arctan(1+u)$ .

41. (Ecalcloc127.tex) Soit  $p$  et  $q$  des réels strictement plus grands que 1 et tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Former un équivalent en 1 à la fonction

$$\frac{1}{p^x} + \frac{1}{q^x} - 1$$

42. (Ecalcloc94.tex) Soit  $p$  et  $q$  deux réels distincts. Former un équivalent en  $+\infty$  de

$$x \mapsto x^p(1+x)^q - x^q(1+x)^p$$

43. (Ecalcloc30.tex) Développement limité en 1 à l'ordre 3 de

$$1 + x + x^2 + x^3$$

44. (Ecalcloc58.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$\sqrt{1 + \sin x}$$

45. (Ecalcloc63.tex) Calculer la limite en
- $\frac{\pi}{2}$
- de

$$(1 - \sin x) \tan x$$

46. (Eexo230.tex) Soit
- $f$
- une fonction définie dans un intervalle
- $I$
- , écrire avec des quantificateurs la définition de
- $f \xrightarrow{a} l$
- pour
- $a = +\infty$
- and
- $l = -\infty$
- .

47. (Eexo83.tex) Quelle est la limite de la suite

$$\left(1 + \frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}_{n \in \mathbb{N}^*}$$

48. (Eexo198.tex) Limite en 1 de

$$\frac{2^x + 3^x - 5}{x - 1}$$

49. (Eexo70.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 2 en 1 de
- $\frac{1}{x}$
- .

50. (Ecalcloc48.tex) Donner une équation de la droite asymptote en
- $+\infty$
- de
- $x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
- .

51. (Eexo133.tex) Limite en
- $+\infty$
- de

$$\left(\sin \frac{1}{x}\right)(\ln(1 + e^x))$$

52. (Ecalcloc52.tex) Soit
- $f$
- une fonction à valeurs réelles et strictement décroissante sur
- $]a, b[$
- . Donner une condition impliquant que
- $f$
- admet une limite finie en
- $a$
- .

53. (Eexo45.tex) Calculer un développement en 1 avec un reste
- $o(\sqrt{1-x})$
- de :

$$\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$$

54. (Eexo218.tex) Calculer la valeur en 0 de la dérivée quatrième de

$$e^{(1-\cos x)^2}$$

55. (Eexo199.tex) Équivalent en 1 de
- $2^x + 3^x - 5$

56. (Ecalcloc29.tex) Le théorème de passage à la limite dans une inégalité permet de montrer la convergence d'une suite ou d'une fonction. Vrai ou Faux ?

57. (Ecalcloc5.tex) On suppose que

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow S$$

Trouver la limite de

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

58. (Ecalcloc115.tex) Soit
- $x > 0$
- et
- $\rho \neq 0$
- des nombres réels. Pour tout
- $n \in \mathbb{N}^*$
- , on pose

$$u_n = n^\rho \left| \frac{x(x-1) \cdots (x-n+1)}{n!} \right|$$

Exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $x$  et  $\rho$  tels que

$$\ln u_n - \ln u_{n-1} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

59. (Eexo210.tex) Suite équivalent de la suite dont le
- $n$
- ème terme est

$$\left(1 + \cos \frac{1}{n}\right)^n$$

60. (Eexo223.tex) Soit
- $f$
- une fonction définie dans un intervalle
- $I$
- , écrire avec des quantificateurs la définition de
- $f \xrightarrow{a} l$
- pour
- $a \in \mathbb{R}$
- et
- $l \in \mathbb{R}$
- .

61. (Ecalcloc89.tex) Calculer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction
- $y$
- vérifiant

$$\begin{aligned} y''(x) + y'(x) + y(x) &= x \cos x \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1 \end{aligned}$$

62. (Ecalcloc85.tex) On se place au voisinage d'un  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont définies et ne s'annulent pas dans ce voisinage. Indiquez si les implications ou les relations suivantes sont vraies ou fausses.
- $$u - v \rightarrow 0 \Rightarrow u \sim v$$
- $$u \in O(v) \Rightarrow o(u) \in o(v)$$
- $$\frac{u}{v} \rightarrow l \in \mathbb{R}^* \Rightarrow u \sim v$$
- $$o(u)O(v) \in O(uv)$$
63. (Ecalcloc119.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de
- $$\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$
64. (Eexo229.tex) Soit  $f$  une fonction définie dans un intervalle  $I$ , écrire avec des quantificateurs la définition de  $f \xrightarrow{a} l$  pour  $a = +\infty$  and  $l \in \mathbb{R}$ .
65. (Eexo213.tex) Suite équivalente à la suite dont le nieme terme est :
- $$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1$$
66. (Eexo226.tex) Soit  $f$  une fonction définie dans un intervalle  $I$ , écrire avec des quantificateurs la définition de  $f \xrightarrow{a} l$  pour  $a = -\infty$  and  $l \in \mathbb{R}$
67. (Ecalcloc84.tex) Donner un équivalent en 0 de  $\sin x - x$ . Écrire le résultat précédent sous la forme d'un développement. Former un développement de  $\ln(\sin x)$  en  $0^{++}$ .
68. (Ecalcloc126.tex) Former un développement asymptotique en  $+\infty$  avec un reste en  $o(e^{-t})$  de
- $$\ln(1 + \operatorname{ch} t)$$
69. (Eexo214.tex) Limite de
- $$\left(\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$
70. (Ecalcloc36.tex) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de
- $$\frac{\ln(\cos x)}{x}$$
71. (Eexo16.tex) Quelle est la limite de la suite
- $$\left(1 + \frac{1}{n \ln n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}^*}$$
72. (Ecalcloc26.tex) Classer pour la négligeabilité en  $0^+$  :
- $$x^{\ln x}, (|\ln x|)^x, x, |\ln x|$$
73. (Eexo113.tex) Équivalent en 0 de
- $$1 - \cos(1 - \cos x)$$
74. (Eexo29.tex) Équivalent en  $+\infty$  de  $\sqrt{\tanh x} - 1$ .
75. (Ecalcloc51.tex) Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles et strictement croissante sur  $]a, b[$ . Donner une condition impliquant que  $f$  admet une limite finie en  $a$ .
76. (Ecalcloc116.tex) Soit  $x > 0$  et  $\rho \neq 0$  des nombres réels. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose
- $$u_n = n^\rho \left| \frac{x(x-1) \cdots (x-n+1)}{n!} \right|$$
- Exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $x$  et  $\rho$  tels que
- $$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
77. (Eexo131.tex) Limite en  $+\infty$  de
- $$\arctan \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$
78. (Ecalcloc16.tex) Équivalent en  $+\infty$  de
- $$\ln(\operatorname{th} x)$$
79. (Eexo20.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 3
- $$\ln \frac{\cosh x}{2 + \tan^2 x}$$
80. (Ecalcloc82.tex) Soit  $a > 0$  réel, calculer la limite en  $a$  de
- $$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\ln x - \ln a}$$

81. (Exo93.tex) Équivalent en 0 de

$$\arcsin x - x$$

90. (Exo42.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 2

$$\frac{1}{\cos x}$$

82. (Ecalcloc109.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 2 en 1 de

$$x \mapsto 1 + x + x^3$$

91. (Exo23.tex) Équivalent simple en
- $+\infty$
- de
- $(\ln x)^3 - 1 - x$
- .

92. (Ecalcloc92.tex) Soit
- $a$
- et
- $b$
- réels strictement positifs. On considère les suites

$$(n^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } \left(a^{(b^n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

83. (Ecalcloc112.tex) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de

$$x \mapsto e^{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4}$$

Qui est négligeable devant qui ?

84. (Ecalcloc88.tex) Calculer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction
- $y$
- vérifiant

$$y'(x) + y(x) \sin x = \cos x, \quad y(0) = 1$$

93. (Exo89.tex) Équivalent en 0 de
- $1 - \cosh(1 - \cos x)$

94. (Exo132.tex) Équivalent simple en
- $+\infty$
- de

$$-\frac{\pi}{4} + \arctan \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

85. (Exo118.tex) Les suites
- $(e^n)$
- et
- $(e^{n+\frac{1}{n}})$
- sont-elles équivalentes ?

95. (Exo227.tex) Soit
- $f$
- une fonction définie dans un intervalle
- $I$
- , écrire avec des quantificateurs la définition de
- $f \xrightarrow{a} l$
- pour
- $a = -\infty$
- and
- $l = -\infty$
- .

86. (Exo19.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 4

$$\frac{1}{\cosh x}$$

96. (Ecalcloc47.tex) Former un développement limité de
- $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
- en 0 à l'ordre 2.

87. (Exo79.tex) À partir des fonctions suivantes, former des groupes de fonctions équivalentes entre elles en 0 :

$$\cos x, \sin x, \ln x, \sinh x, \cosh x, \tan x, \\ e^x, \ln x + \cos x, \ln x + x$$

97. (Ecalcloc22.tex) Équivalent en
- $+\infty$
- de

$$-x + \ln(3 + e^x)$$

98. (Exo102.tex) Limite à droite en 0 de

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$$

88. (Ecalcloc72.tex) On admet que la fonction

$$x \mapsto x + \ln(1 + x^2)$$

est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et que sa bijection réciproque admet en 0 un développement limité à l'ordre 3. Calculer ce développement.

99. (Ecalcloc62.tex) Calculer un développement en
- $+\infty$
- de

$$\ln(1 + e^x)$$

Il devra contenir trois termes non nuls et un reste

89. (Ecalcloc59.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

100. (Ecalcloc74.tex) Limite de la suite

$$\frac{(2n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

101. (Exo8.tex) Équivalent en
- $+\infty$
- de

$$e^{\left(\frac{(\ln x)^2}{1+\ln x}\right)}$$

102. (Ecalcloc108.tex) On suppose que, au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{1+2x+o(x)}{1+2x+o(x)}$$

Parmi les propositions suivantes relatives à des propriétés locales en 0, lesquelles sont vraies ?

- (a) :  $f \rightarrow 1$                       (b) :  $f = 1 + o(x^2)$   
 (c) :  $f = 1$                         (d) :  $f = 1 + o(x)$   
 (e) :  $f \sim 1$

103. (Ecalcloc55.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$(x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

104. (Ecalcloc34.tex) Soit
- $k$
- un entier
- $\geq 3$
- , former un développement limité en 1 à l'ordre 1 de

$$1 + x + \dots + x^k$$

105. (Ecalcloc20.tex) Équivalent en
- $+\infty$
- de

$$\cos \frac{\pi x + 3}{\pi + 3x} - \frac{1}{2}$$

106. (Ecalcloc91.tex) On se place au voisinage de 0. Former un développement limité d'une fonction
- $y$
- de classe
- $\mathcal{C}^1$
- et telle que
- $y' = o(1)$
- .

107. (Ecalcloc14.tex) Équivalent en
- $+\infty$
- de

$$\ln(\operatorname{ch} x)$$

108. (Ecalcloc101.tex) Soit
- $a > 0$
- et
- $b \in \mathbb{R}$
- , on définit
- $f$
- par

$$f(x) = \left( \operatorname{ch} \frac{a}{x} + b \operatorname{sh} \frac{a}{x} \right)^x$$

Calculer un développement asymptotique de  $f$  en  $+\infty$  avec un reste  $o(\frac{1}{x})$ .

109. (Ecalcloc121.tex) On admet l'existence de réels
- $\alpha$
- et
- $\beta$
- strictement positifs tels que

$$f : \begin{cases} ]-\alpha, \alpha[ \rightarrow ]-\beta, \beta[ \\ x \mapsto \sin(\ln(1+x)) \end{cases}$$

soit bijective. On note  $g$  sa bijection réciproque. Former des développements limités à l'ordre 3 en 0 de  $f(x)$  et de  $g(y)$ .

110. (Exo224.tex) Soit
- $f$
- une fonction définie dans un intervalle
- $I$
- , écrire avec des quantificateurs la définition de
- $f \xrightarrow{a} l$
- pour
- $a \in \mathbb{R}$
- and
- $l = -\infty$
- .

111. (Ecalcloc117.tex) Soit
- $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$
- des réels deux à deux distincts. Préciser la limite en
- $+\infty$
- puis former développement asymptotique simple de

$$x \mapsto \frac{(x-a_1) \cdots (x-a_p)}{(x-b_1) \cdots (x-b_p)} - 1$$

112. (Ecalcloc41.tex) En
- $+\infty$
- , la fonction

$$x \mapsto \frac{x}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$$

admet-elle une direction asymptotique ? une asymptote ? Si oui donner son équation.

113. (Ecalcloc27.tex) Équivalent en 1 de

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{2}$$

114. (Exo15.tex) Développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$\arcsin(\operatorname{sh} x)$$

115. (Exo104.tex) La fonction suivante converge-t-elle en 0

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$$

116. (Exo216.tex) Suite équivalente à

$$((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}})_{n \in \mathbb{N}}$$

117. (Ecalcloc7.tex) Équivalent en 0 de la fonction  $\ln(1 + \operatorname{ch} x)$ . 126. (Exo10.tex) Au voisinage de 0, classer les fonctions pour la relation d'équivalence

118. (Ecalcloc102.tex) Soit  $a > 0$  et  $b > -1$ , on définit  $f$  par

$$f(x) = \left( \operatorname{ch} \frac{a}{x} + b \operatorname{sh} \frac{a}{x} \right)^x$$

Calculer un développement limité de  $f$  en 0 strictement à droite à l'ordre 1.

$$\tan x, 1 + x, -\frac{1}{1 + \cos x} \sin^2 x, e^x, \sin x, \cos x - \sin x, \cos x - 1, e^x + \sqrt{x}, \frac{(x^2 - x) \operatorname{th} x}{1 + e^x}, x + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}}$$

119. (Ecalcloc57.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$\ln(1 + \operatorname{sh} x)$$

127. (Ecalcloc66.tex) Calculer la limite en  $+\infty$  de

$$(\ln x - 1)^{\frac{1}{1+2 \ln x}}$$

120. (Ecalcloc37.tex) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de

$$\frac{\ln(\cos x)}{x}$$

128. (Exo14.tex) Équivalent simple en 0 de  $\ln(1 + e^x)$ .

129. (Ecalcloc78.tex) Développement limité en 0 avec un reste négligeable devant  $x^2$  de la fonction

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$$

121. (Exo17.tex) La fonction  $(1 + x \ln x)^{\frac{1}{x^2}}$  admet-elle une limite à droite en 0 ?

122. (Exo49.tex) Équivalent en 0 de

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sh} x} + x^{\operatorname{ch} x - 1}$$

130. (Ecalcloc81.tex) Développement limité en 0 avec un reste négligeable devant  $x^2$  de la fonction

$$\ln(3e^x + e^{-x})$$

123. (Ecalcloc25.tex) Classer pour la négligeabilité en  $+\infty$  :

$$x^{\ln x}, (\ln x)^x, x, \ln x$$

131. (Ecalcloc123.tex) L'équation différentielle

$$(1 + x^2)y'(x) + y(x) = \arctan x$$

admet une unique solution  $f$  définie dans  $\mathbb{R}$  et telle que  $f(0) = 0$ . Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de cette solution.

124. (Exo94.tex) Classer les fonctions suivantes pour la relation d'équivalence en 0 :

$$\cos x, \tan x, \cos x - 1, \cos x + \sqrt{x}, \sin x, \arcsin x, x^4 - \frac{x^2}{2}, (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

132. (Ecalcloc13.tex) Équivalent en  $+\infty$  de

$$2^{\frac{x}{\sqrt{x+1}}}$$

133. (Exo32.tex) Développement à 2 termes en 0 de  $\frac{1}{\sinh x}$ .

125. (Exo22.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 1 de

$$\sqrt{1 + x^2}$$

134. (Exo100.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 3 de

$$\ln(1 - x)$$

135. (Ecalcloc28.tex) Équivalent en 1 de

$$\sqrt{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{2}$$

136. (Ecalcloc49.tex) Soit  $f$  une fonction définie dans  $\mathbb{R}$ . Traduire par un développement l'existence d'une droite asymptote au graphe de la fonction en  $+\infty$ .

137. (Ecalcloc86.tex) On se place au voisinage d'un  $a \in \mathbb{R}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont définies et ne s'annulent pas dans ce voisinage. Indiquez si les implications ou les relations suivantes sont vraies ou fausses.

$$u - v \rightarrow 0 \Rightarrow u - v \in O(u)$$

$$u \in O(v) \Rightarrow o(u) = o(v)$$

$$\frac{u}{v} \rightarrow l \in \mathbb{R}^* \Rightarrow o(u) = o(v)$$

$$o(u)O(v) \in O(uv)$$

138. (Exo37.tex) Donner un équivalent simple en 0 de

$$\ln(1 + \cos x)$$

139. (Ecalcloc46.tex) Former un développement limité de  $\ln x$  en  $e$  à l'ordre 2.

140. (Ecalcloc83.tex) Calculer la limite en 0 strictement à droite de

$$\left( \frac{2 - \ln x}{-\ln x} \right)^{\ln x}$$

141. (Exo225.tex) Soit  $f$  une fonction définie dans un intervalle  $I$ , écrire avec des quantificateurs la définition de  $f \xrightarrow{a} l$  pour  $a \in \mathbb{R}$  and  $l = +\infty$ .

142. (Exo90.tex) Développer  $\frac{1}{x^2+x+1}$  en  $+\infty$  suivant les puissances de  $\frac{1}{x}$

143. (Exo43.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 6

$$\ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

144. (Ecalcloc122.tex) On admet l'existence de réels  $\alpha$  et  $\beta$  strictement positifs tels que

$$f : \begin{cases} ]-\alpha, \alpha[ \rightarrow ]-\beta, \beta[ \\ x \mapsto \ln(1 + \sin x) \end{cases}$$

soit bijective. On note  $g$  sa bijection réciproque. Former des développements limités à l'ordre 3 en 0 de  $f(x)$  et de  $g(y)$ .

145. (Ecalcloc1.tex) Trouver une suite équivalente à

$$\left( 1 - \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{2n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

146. (Exo68.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\frac{1}{\cos x}$ .

147. (Ecalcloc67.tex) Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  et  $a$  un réel fixé. Calculer la limite en 0 de

$$h \rightarrow \frac{1}{h^2} (f(a+h) + f(a-h) - 2f(a))$$

148. (Exo27.tex) Développement à 2 termes en 0 de  $\frac{1}{\sinh x}$ .

149. (Exo186.tex) Valeur en 0 de la dérivée seconde de  $\ln \cos x$

150. (Exo185.tex) Valeur en 0 de la dérivée seconde de  $\ln \operatorname{ch} x$

151. (Exo99.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 2 de

$$\sqrt{1-x}$$

152. (Exo115.tex) Si deux suites sont équivalentes, leur différence converge-t-elle vers 0 ?

153. (Ecalcloc2.tex) Trouver une suite équivalente à

$$\left( \frac{1}{\left( 1 - \frac{2}{n} \right)^n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

154. (Exo122.tex) Calculer des équivalents simples aux extrémités du domaine de

$$x \rightarrow \frac{x^2 - 1}{\ln x}$$



155. (Ecalcloc33.tex) Former un développement limité en 0 à l'ordre 3 de  $\ln(x^2 + x + 1)$  à 165. (Exo9.tex) Développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ .

$$\ln(x^2 + x + 1)$$

166. (Exo112.tex) Développement à deux termes en 0 de

$$\frac{1}{\sin x}$$

156. (Exo183.tex) Équivalent en 0 de

$$\ln(\cos(\ln(\operatorname{ch} x)))$$

157. (Exo7.tex) Équivalent en 0 de

$$(1 + x^2)^{1/x} - 1$$

167. (Ecalcloc90.tex) Calculer un développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction  $y$  vérifiant

$$\begin{aligned} y'(x) + y(x) \cos x &= \sin x \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

158. (Exo18.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 3 de  $\arctan$

168. (Exo81.tex) Développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\ln\left(\frac{\cos x}{\cosh x}\right)$

159. (Exo35.tex) Équivalent en 0 de

$$(\cos x)^{1/x} - 1$$

169. (Ecalcloc70.tex) Soit  $a > 0$ . Déterminer une fonction simple équivalente en  $a$  à la fonction

$$x \rightarrow a^n - x^n$$

160. (Exo217.tex) Limite en  $\frac{\pi}{6}$  de

$$\frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{1 - 2 \sin x}$$

170. (Ecalcloc107.tex) Calculer la valeur en 0 de la dérivée quatrième de  $\operatorname{ch} \circ \ln \circ \operatorname{ch}$ .

161. (Ecalcloc68.tex) Soit  $f$  une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant 0 et admettant un développement limité

$$f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$$

Cette fonction est-elle deux fois dérivable en 0 ?

171. (Ecalcloc23.tex) Équivalent en 1 de

$$\sqrt{1+x} - 1$$

162. (Ecalcloc31.tex) Former un développement en  $+\infty$  avec un reste en  $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$  de

$$\ln(1 + x + x^2)$$

172. (Exo80.tex) Développement limité à l'ordre 5 en 0 de

$$\ln\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4\right)$$

163. (Ecalcloc39.tex) En  $+\infty$ , la fonction  $x \rightarrow \ln(1+x) - \ln(x \operatorname{ch} x)$  admet-elle une direction asymptotique ? une asymptote ? Si oui donner son équation.

173. (Exo105.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 3 de

$$\frac{1}{1+x}$$

164. (Exo38.tex) Donner un équivalent simple en  $+\infty$  de

$$x + (\ln x)^3$$

174. (Exo145.tex) Soit  $f$  une fonction dérivable dans un intervalle ouvert contenant 0. L'implication suivante est-elle vraie ?

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow{0} 0 \Rightarrow f' \xrightarrow{0} 0$$

175. (Exo134.tex) Équivalent simple en
- $+\infty$
- de

$$-x + \ln(1 + e^x)$$

176. (Ecalcloc99.tex) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de

$$x \mapsto \cos(\ln(\cos x))$$

177. (Ecalcloc69.tex) Déterminer une fonction simple équivalente en 0 à la fonction

$$x \rightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{2}{x}$$

178. (Exo4.tex) Quelle est la limite de la suite
- $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
- ?

179. (Exo127.tex) Limite de la suite

$$\left(3 \cdot 2^{\frac{1}{n}} - 2 \cdot 3^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

180. (Ecalcloc120.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 2 en 1 de

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

181. (Exo103.tex) Limite à gauche en 0 de

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$$

182. (Exo33.tex) Équivalent en 0 de

$$(\cosh x)^{\sqrt{\cos x - (\sin(x \ln x))^2}}$$

183. (Exo124.tex) Équivalent simple de la suite
- $(\operatorname{ch} \sqrt{n+1})$

184. (Ecalcloc100.tex) Calculer la valeur en 0 de la dérivée quatrième de
- $\cos \circ \ln \circ \cos$
- .

185. (Ecalcloc6.tex) Soit
- $p$
- un entier fixé, déterminer une suite équivalente à

$$\left(\binom{n}{p}\right)_{n \geq p}$$

186. (Ecalcloc8.tex) Équivalent en
- $+\infty$
- de la fonction
- $\ln(1 + \operatorname{ch} x)$
- .

187. (Ecalcloc79.tex) Développement limité en 0 avec un reste négligeable devant
- $x^3$
- de la fonction

$$\ln^2(1 + x)$$

188. (Exo25.tex) Développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$\ln(1 - \sin x)$$

189. (Ecalcloc42.tex) Donner un équivalent simple en
- $+\infty$
- de

$$\left(1 + \cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

190. (Ecalcloc24.tex) Équivalent en 1 de

$$\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$$

191. (Ecalcloc106.tex) Calculer un développement limité en 0 à l'ordre 4 de
- $\operatorname{ch}(\ln(\operatorname{ch} x))$
- .

192. (Exo128.tex) Classer les suites données en groupes de suites équivalentes entre elles

$$\left(\cos \frac{1}{n}\right), \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right), (\ln(n + \sqrt{n})), \\ \left(e^{\cos \frac{\pi n}{2n+1}}\right), \left(\frac{1}{n}\right), \left(e^{\frac{1}{n}}\right), (\ln n)$$

193. (Exo197.tex) Équivalent en 1 de
- $2^x - 2$

194. (Exo215.tex) Équivalent de

$$\left(\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} - 1\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

195. (Ecalcloc124.tex) L'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \operatorname{ch} x$$

admet une unique solution  $f$  définie dans  $\mathbb{R}$  et vérifiant

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 0$$

Calculer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de cette fonction.

196. (Ecalcloc61.tex) Calculer un développement en
- $+\infty$
- de

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Il devra contenir trois termes non nuls et un reste

203. (Ecalcloc18.tex) Limite de la suite

$$\left(\frac{\cos n - 1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

204. (Ecalcloc21.tex) Équivalent en
- $+\infty$
- de

$$-x + \ln(1 + 3e^x)$$

197. (Ecalcloc40.tex) En
- $+\infty$
- , la fonction

$$x \rightarrow \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

admet-elle une direction asymptotique ? une asymptote ?  
Si oui donner son équation.

205. (Exo123.tex) Calculer des équivalents simples aux extrémités du domaine de

$$x \rightarrow \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

198. (Ecalcloc96.tex) Soit
- $0 < p < q$
- , déterminer une fonction
- $u$
- simple telle que, en 0 (strictement à droite),

$$(1 + x^p)^q \sim u(x)$$

Déterminer un équivalent en 0 (strictement à droite) de

$$(1 + x^p)^q - u(x)$$

Déterminer un équivalent en 0 (strictement à droite) de

$$(1 + x^p)^q - (1 + x^q)^p$$

206. (Ecalcloc113.tex) Soit
- $\varphi$
- définie dans
- $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [$
- par :

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{2x} \ln(1+t) \ln(1-t) dt$$

Former un développement limité de  $\varphi$  en 0 à l'ordre 3.

207. (Exo36.tex) Équivalent en
- $+\infty$
- de

$$e^{\frac{(\ln x)^2 + \ln x}{2 + \ln x}}$$

208. (Ecalcloc95.tex) Soit
- $0 < p < q$
- , déterminer une fonction
- $u$
- simple telle que, en
- $+\infty$
- ,

$$(1 + x^p)^q \sim u(x)$$

Déterminer un équivalent en  $+\infty$  de

$$(1 + x^p)^q - u(x)$$

Déterminer un équivalent en  $+\infty$  de

$$(1 + x^p)^q - (1 + x^q)^p$$

199. (Exo130.tex) limite de la suite

$$\left(\frac{\sin n}{n}\right)$$

200. (Ecalcloc104.tex) Soit
- $a > 0$
- , sous quelle condition sur le réel
- $b$
- la fonction

$$x \mapsto \left(\operatorname{ch} \frac{a}{x} + b \operatorname{sh} \frac{a}{x}\right)^x$$

est-elle définie localement strictement à droite de 0 ?

201. (Ecalcloc56.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 2 en 1 de

$$x^2 \arctan(x - 1)$$

209. (Exo114.tex) Équivalent en 0 de

$$\cos(\ln(\arccos x)) - \cos\left(\ln \frac{\pi}{2}\right)$$

202. (Ecalcloc60.tex) Calculer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$$

210. (Ecalcloc3.tex) Trouver une suite équivalente à

$$\left((1 - \frac{2}{n})^{-n} - (1 + \frac{1}{n})^{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

211. (Ecalcloc80.tex) Développement limité en 0 avec un reste négligeable devant  $x^2$  de la fonction
221. (Exo116.tex) Les suites  $(\ln n)$  et  $(\ln(n+1))$  sont-elles équivalentes ?

$$\frac{\sin x}{x + x^2 + x^3}$$

222. (Ecalcloc77.tex) Développement limité en 0 avec un reste négligeable devant  $x^4$  de la fonction

$$\ln(\operatorname{ch} x)$$

212. (Exo72.tex) Développement en 0 de  $\frac{1}{x+x^2+x^3}$ .

223. (Ecalcloc71.tex) On admet que la fonction

$$x \rightarrow x^3 + \ln(1+x)$$

213. (Ecalcloc125.tex) Former un équivalent en  $+\infty$  de

$$\frac{e^{2x}}{e^x + 1} \text{ et de } \left( \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \right)^{(e^x)}$$

est bijective de  $] -1, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  et que sa bijection réciproque admet en 0 un développement limité à l'ordre 3. Calculer ce développement.

214. (Exo110.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 4 de

$$\arcsin x$$

224. (Ecalcloc32.tex) On admet que en  $+\infty$  et en  $-\infty$ ,

$$\ln(1 - x + x^2) = 2 \ln |x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Former un équivalent en  $+\infty$  de

215. (Ecalcloc15.tex) Équivalent en  $+\infty$  de

$$\ln(\operatorname{sh} x)$$

$$\ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} - \frac{2}{x}$$

225. (Exo84.tex) Équivalent en 0 de  $\ln(1 + \cos x)$ .

216. (Exo86.tex) Calculer la valeur en 0 de la dérivée troisième de

$$e^{(1-\cos x)^2}$$

226. (Ecalcloc76.tex) Développement limité en 0 avec un reste négligeable devant  $x^4$  de la fonction

$$\ln(\cos x)$$

217. (Exo273.tex) Former un développement asymptotique en  $+\infty$  de

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

avec un reste en  $o(\frac{1}{\sqrt{x}})$

227. (Ecalcloc87.tex) On se place au voisinage d'un  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont définies et ne s'annulent pas dans ce voisinage. Indiquez si les implications ou les relations suivantes sont vraies ou fausses.

$$u - v \rightarrow 0 \Rightarrow e^u \sim e^v$$

$$u \sim v \Rightarrow e^u \sim e^v$$

$$u \sim v \Rightarrow o(u) = o(v)$$

$$\left. \begin{array}{l} u \sim v \\ u \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \ln(u) \sim \ln v$$

218. (Exo5.tex) Équivalent en 0 de

$$(\cos x) \sqrt{\cos x + (\sin(x \ln x))^2}$$

219. (Ecalcloc98.tex) Déterminer une fonction  $f$  très simple telle que, en 0,

$$o(\ln^2(\cos x)) = o(f)$$

228. (Exo39.tex) Quelle est la limite en  $0^-$  de  $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$  ?

229. (Exo41.tex) Développement limité en 0 à l'ordre 3 de

$$\arctan x$$

220. (Exo87.tex) En  $+\infty$ ,  $x + \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x}$  et  $x + \frac{x}{\ln x} - \frac{x}{\ln^2 x}$  sont elles équivalentes ?

230. (Ecalcloc35.tex) Soit  $k$  un entier  $\geq 4$ , former un développement limité en 0 à l'ordre 3 de

$$x^k + \cdots + x + 1$$

231. (Exo69.tex) Quelle est la limite en 0 de la fonction

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

232. (Exo40.tex) Équivalent en 0 de

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

233. (Exo291.tex) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres strictement positifs telle que  $(\ln u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ? Si oui est-ce à cause de la continuité de la fonction logarithme ou de la fonction exponentielle ?

234. (Exo21.tex) Développements limités en 0 à l'ordre 3

$$\tanh x$$