

Algebraische Zahlentheorie II.

Übungsbücher: Vorlesungshomepage.

O1. PROENGLICHE GRUPPEN

Wkg. · X Menge, Topologie auf X: $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit

$$(0) \emptyset, X \in \tau \quad (1) U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau \quad (2) (U_i)_{i \in I} \subseteq \tau^I \Rightarrow \bigcup_i U_i \in \tau$$

· $B \subseteq \tau$ heißt Basis: $\Leftrightarrow \forall U \in \tau \exists (B_i)_{i \in I} \in B^I: U = \bigcup_i B_i$

· W $\subseteq X$ heißt Umgebung (von $x \in X$): $\exists V \in \tau: x \in V \subseteq W$.

Für $x \in X$ sei $U(x)$ die Menge aller Umgebungen von x.

z.B.: (X, d) metrischer Raum $\Rightarrow \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ ist Basis für X.

· $(X, \tau_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y)$ heißt stetig: $f^{-1}(\tau_Y) \subseteq \tau_X$.

· Produkttopologie: Seien $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ topologische Räume.

Basis der Produkttopologie auf $\prod_i X_i$: $\{\prod_i U_i \mid U_i \in \tau_i, U_i = X_i \text{ f.f.a. } i \in I\}$

Satz von Tychonoff: Sind alle X_i kompakt, so auch $\prod_i X_i$

· Sei $X \xrightarrow{\pi} Y$ surjektiv, (X, τ) top. Raum.

$\{V \subseteq Y \mid \pi^{-1}(V) \in \tau\}$ heißt Quotiententopologie.

Def. 1.1.(a) Eine topologische Gruppe (G, e, \circ, τ) besteht aus einer Gruppe (G, e, \circ) und einem top. Raum (G, τ) so dass

$G \times G \xrightarrow{\mu} G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$, $G \xrightarrow{i} G$, $g \mapsto g^{-1}$ stetig sind, wobei $G \times G$ die Produkttopologie trägt.

(b) Ein Morphismus topologischer Gruppen ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

⇒ Man erhält die Kategorie topologischer Gruppen Top Grp.

Bsp. (ü) K normierter Körper $\Rightarrow (K, +), (K^\times, \cdot)$ sind topologische Gruppen.

Facts 1.2. Seien G, G' top. Grp., $G \xrightarrow{\phi} G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

- (i) $l_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh$, $r_g : G \rightarrow G, h \mapsto hg$ sind Automorphismen (insb. Homöomorphismen)
- (ii) ϕ ist stetig $\Leftrightarrow \forall W' \in \mathcal{U}(e') : \exists W \in \mathcal{U}(e) : \phi(W) \subseteq W'$
- (iii) Eine offene Untergruppe $H \subseteq G$ ist abgeschlossen.
- (iv) Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ mit $[G : H] < \infty$ ist offen.
- (v) Ist G kompakt, $H \subseteq G$ offen, so gilt $[G : H] < \infty$.
- (vi) Ist $H \subseteq G$ Untergruppe, so ist $(H, \tau_{G|H})$ eine topologische Untergruppe (Unterraumtop.)
- (vii) Ist $U \subseteq G$, so ist $U^{-1} \subseteq G$ und $\text{cl}(U) = \bar{U} \subseteq UU^{-1}$
- (viii) G ist regulär, d.h. $\forall g \in G : \exists U, V \in \mathcal{U}(g)$ offen s.d. $V \subseteq \bar{V} \subseteq U$
- (ix) G ist hausdorffsch $\Leftrightarrow \{e\} \subseteq G$ abg.
- (x) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler, so ist G/N topologische Gruppe mit Quotiententopologie.
Dabei ist G/N hausdorffsch, falls $N \trianglelefteq G$.
- (xi) Sind $(G_i)_{i \in I}$ top. Grp., so ist $\prod_i G_i$ top. Grp.

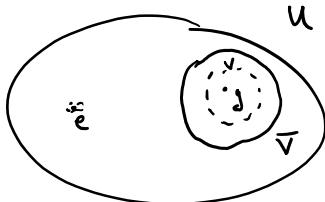
Beweis.

- (i) $l_g : G \rightarrow \{g\} \times G \xrightarrow{\text{inkl.}} G \times G \xrightarrow{N} G$ ist stetig, $l_g \circ l_g^{-1} = \text{id}_G$
 r_g analog.
- (ii) " \Rightarrow ": klar;
" \Leftarrow ": Sei $g \in G$, $g' := \phi(g)$, $W \in \mathcal{U}(e)$. Wähle $V \in \mathcal{U}(e)$ mit $\phi(V) \subseteq \underbrace{(g')^{-1}W}_{= l_{g'}^{-1}(W)}$
 $\Rightarrow \phi(l_g(v)) \subseteq W$, also ist ϕ stetig.
- (iii) $G = H \cup \bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} gH$
 $\underbrace{\text{offen, da } gH = l_g(H)}$
- (iv) wie (iii): $G = H \cup \bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} \underbrace{gH}_{\text{abg}}$
 $\underbrace{\text{abg., da endliche Vereinigung wg. } [G : H] < \infty}$
- (v) $G = \bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} \underbrace{gH}_{\text{offen}}$ (G kompakt $\Rightarrow [G : H] < \infty$)
- (vi), (vii): Übung.

(viii) $\Leftrightarrow g = e$ wegen (i). Sei U offene Umgebung von e .

Bew. (ii) \exists offene Umgb. V von e mit $V \cdot V \subseteq U$, $V = V^{-1}$. Nun verwende (vii).

(ix) g.z.z.: können e und $g \neq e$ trennen (wg. (i))



$$G \setminus \bar{V} \cap V = \emptyset$$

(x), (xi) übung.



Why. I sei teilgeordnete, filtrierte Menge, d.h. $\forall i, j \in I : \exists k \in I : i, j \leq k$.

Ein **inverses System (von Gruppen)** besteht aus einer Familie von Gruppen $(G_i)_{i \in I}$ zusammen mit Gruppenhomomorphismen $\phi_{ji} : G_j \rightarrow G_i \quad \forall i, j \in I$ mit $i \leq j$. so dass: (i) $\phi_{ii} = \text{id}_{G_i}$ (ii) $\phi_{ki} = \phi_{ji} \circ \phi_{kj} \quad \forall i \leq j \leq k$

Dann heißt $\varprojlim_{i \in I} G_i$ **Limes** des inversen Systems ... hat übliche universelle Eigenschaft.

• $\varprojlim_{i \in I} G_i$ existiert und ist gegeben durch $G := \{(g_i)_{i \in I} \in \prod_i G_i \mid \phi_{ji}(g_j) = g_i \quad \forall i \leq j\}$

Lemma 1.3. Sind alle G_i topologische Gruppen, so auch $\varprojlim_{i \in I} G_i$ mit der Unterräumtop. von $\prod_i G_i$.

Sind alle G_i hausdorffsch (kompakt + hausdorffsch),

so ist auch $\varprojlim_{i \in I} G_i$ hausdorffsch (kpt. + hd.).

Beweis. ① $\prod_i G_i$ ist selbst $\varprojlim_{i \in I} G_i$ für geeignet gewähltes inverses System I .

Alle G_i hausdorffsch $\rightarrow \prod_i G_i$ hausdorffsch (Produkte von Hausdorfräumen sind hausdorffsch)
Kompakt folgt mit dem Satz von Tychonoff.

② Allgemeiner Fall: Hausdorffsch überträgt sich auf Unterräume $\Rightarrow \varprojlim_{i \in I} G_i$ hd.

$$\varprojlim_{i \in I} G_i = \bigcap_{i \leq j} \underbrace{\{(g_k)_k \in \prod_k G_k \mid \phi_{ji}(g_j) = g_i\}}_{= \prod_{k \neq i,j} G_k \text{ abg.}} \subseteq \prod_k G_k$$

$= \prod_{k \neq i,j} G_k \subseteq \prod_k G_k \quad (\prod_{k \neq i,j} G_k \subseteq G_i \times G_j \text{ da } G_i \text{ hd.})$

$\Rightarrow \varprojlim_{i \in I} G_i$ kpt. da abg. Teilraum eines kpt. Raumes.



Def. 1.4. Eine **proendliche Gruppe** ist ein inverser Limes $\lim_{\leftarrow} G_i$ endlicher, diskreter topologischer Grp. $(G_i)_{i \in I}$ mit der Topologie aus 1.3.
(insb.: alle G_i hausdorffsch und kompakt)

Def. 1.5. Ein topologischer Raum heißt **total unzusammenhängend**:
Jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abgeschlossenen Mengen
 \Leftrightarrow Die Zusammenhangskomponente von x ist $\{x\}$

Proposition 1.6. (ii) Eine kpt., hd. top. Grp. ist total unzusammenhängend \Leftrightarrow es besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abgeschlossenen Normalteilkern von Gr.

3

05

Freitag, 20. April 2018 09:17

Korrektur: X top. Raum.

X heißt **zusammenhängend** : $\Leftrightarrow \emptyset, X$ sind die einzigen offen + abg. Teilmengen. $x \sim_{\text{zh}} y : \Leftrightarrow \exists Y \subseteq X$ zschd.: $x, y \in Y$ ist ÄquivalenzrelationÄquivalenzklassen unter \sim_{zh} heißen **zusammenhangskomponenten**.

Lemma. (Ribes-Zaleski, Lemma 1.1.11)

X kpt., hd. und $x \in X$. Dann ist die Zusammenhangskomp. die x enthält die Menge

$$[x]_{\text{zh}} = \bigcap \{U \subseteq X \mid x \in U, U \text{ offen abg.}\}$$

Def. 1.5. Ein topologischer Raum X heißt **total-zusammenhängend** \Leftrightarrow alle Zshgskomp. von X sind 1-elementig.

Korollar. (aus Lemma) Sei X kompakt, hd. Dann gilt:

X total unzshg \Leftrightarrow jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abg. Mengen.

Satz 1.7. Sei G eine topologische Gruppe. Dann sind äquivalent:

i) G ist profondlich ii) G ist kompakt, hausdorffsch und total unzusammenhängend.

Beweis.

(i) \Rightarrow (ii): kompakt, hausdorffsch: letztes Mal.z.B.z.: $e \in \prod G_i$ besitzt Umgebungsbasis aus offen abgeschlossenen Teilmengen.Eine solche ist gegeben durch $\left\{ \prod_{i \in I_0} \{e_{i,0}\} \times \overline{\prod_{i \in I \setminus I_0} G_i} \mid I_0 \subseteq I \text{ endlich} \right\} =: U_e$ letztes Mal: G kpt., hd., $H \leq G$ offene Untergrp. $\Rightarrow H$ abg. NormalteilerAllgemeiner Fall: Schneide U_e mit $\varprojlim G_i$.(ii) \Rightarrow (i): Konsequenz aus dem folgenden Lemma.

Lemma 1.8. Sei G kompakt, hausdorffsch, total unzshg. und U eine Umgebungsbasis der Eins beschreibend aus offen-abg. Normalteilen.

Dann ist

$$G \xrightarrow{\varphi} \varprojlim_{N \in U} G/N, g \mapsto (gN)_{N \in U}$$

ein Isomorphismus topologischer Gruppen. (G/N endl. diskret)

Beweis.

 φ stetig: "obvious".Behalte $G \xrightarrow{\varphi} \varprojlim_{N \in U} G/N$ \leftarrow hat Umgebungsbasis U_e (s. 1.7).Für $I_0 \subseteq U_e$ endl. \rightsquigarrow Umgebung $\varprojlim_{N \in I_0} N/N \times \varprojlim_{N \in U_e \setminus I_0} G/N$ Urbild ist $\bigcap_{N \in I_0} N$ ist offen abg. Normalteiler in G \Rightarrow stetig bei e \Rightarrow stetig. φ injektiv: $\varphi(g) = (gN)_{N \in U} \Rightarrow g \in N \quad \forall N \in U$.
Umgebungsbasis, G hausdorffsch.

$$\Rightarrow \bigcap_{N \in U} N = \{e\}, \text{ d.h. } g = e.$$

- φ surjektiv. sei $(g_N \cdot N)_{N \in \mathbb{N}} \in \varprojlim G/N$ ($N' \subseteq N \Rightarrow g_{N'} \cdot N = g_N \cdot N$)

gesucht:

$$g \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} (g_N \cdot N)_{\text{abg.}} = G \text{ kompakt}$$

Ann.:

rechte Seite leer $\Rightarrow \exists I_0 \subseteq \mathbb{N}$ endlich: $\bigcap_{N \in I_0} g \cdot N = \emptyset$. \mathcal{U} Umgebungsbasis

$$\Rightarrow \exists N' \subseteq \bigcap_{N \in I_0} N$$

φ Homöomorphismus: φ bijektiv, stetig, G kompakt, $\varprojlim G/N$ hausdorffsch.

Bew. 1.9. (i) 1.8 ist anwendbar, wenn G proendlich

(ii) analog zu 1.8 lassen sich auch beweisen: G proendlich, \mathcal{U} wie 1.8

$$(a) \forall H \leq G \text{ abg. gilt: } H \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{N \in \mathbb{N}} H/N \cdot H$$

$$(b) \forall H \cong G \text{ abg. gilt } G/H \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{N \in \mathbb{N}} G/N \cdot H$$

Lemma 1.10. Sei G proendlich, $H \leq G$ Untergruppe. Dann sind äquivalent:

(i) H ist abgeschlossen

(ii) $H = \bigcap \{U \mid U \subseteq G \text{ offene Untergruppe mit } H \leq U\}$

Bewis.

" \Leftarrow ": $U \subseteq G$ offen $\xrightarrow{G \text{ kpt.}}$ U abg. Untergruppe $\Rightarrow \bigcap \{U \dots\}$ ist abgeschlossen.

" \Rightarrow ": Sei $V \in \mathcal{U}$ (\mathcal{U} wie oben) $\Rightarrow \underbrace{H \cdot V}_{= \bigcup_{h \in H} h \cdot V}$ ist offene Untergruppe von G .

$$\text{In Ü: } H \leq G \text{ kompakt} \\ \text{Teilmenge} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{V \in \mathcal{U}} H \cdot V = H.$$

Def. 1.11. Eine **pro-p Gruppe** ist ein inverser Limes von endlichen p-Gruppen. (insb. proendlich)

Def. 1.12. Sei G eine diskrete (i.a. unendliche) Gruppe.

Die **pro-p Komplettierung** von G ist **endliche proendliche**

$$\hat{\mathbb{Z}}^p := \varprojlim \left\{ G/N \mid N \trianglelefteq G \text{ und } G/N \text{ ist endliche p-Grp.} \right\}$$

$$\text{Bsp. } \hat{\mathbb{Z}}^p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$$

(man kann auch Ringe pro-p oder pro-chdl. komplettieren)

Def. 1.13. Der **Prüferring** ist die proendliche Komplettierung von \mathbb{Z} , $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n \mathbb{Z}$
 $(\{\mathbb{Z}/n \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\})$ bzgl. Inklusion, d.h. Teilbarkeit geordnet)

Lemma.

$$\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}_p$$

pro endl.

)

Beweis.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Z}} &= \varprojlim_n \mathbb{Z}_{p^n} \stackrel{\text{crs}}{\cong} \varprojlim_n \left(\prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}_{p^{v_p(n)}} \right); \quad \prod_p \mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \prod_p \mathbb{Z}_p / u_n \\ \mathcal{U} &= \left\{ \prod_p \mathbb{Z}_{p^{v_p(n)}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\qquad\qquad\qquad \stackrel{:=}{=} U_n \end{aligned}$$

□

Def. 1.14 Eine Teilmenge $S \subseteq G$ heißt **topologisches Erzeugendensystem (ES)** : \Leftrightarrow
 G ist der topologische Abschluss der von S erzeugten Untergrp.

Bsp. $\{1\}$ ist topologisches ES von \mathbb{Z}_p und $\hat{\mathbb{Z}}$

Def. 1.15 Eine topologische Gruppe G heißt **topologisch endlich erzeugt** : $\Leftrightarrow \exists S \subseteq G$ endlich s.d.
 S ist top. ES von G

Bsp. Die proendl. bzw. pro-p Komplettierung der freien nicht-abelschen Gruppen mit endlich
vielen Erzeugern

Satz 1.16. (**Burnside Basissatz**)

Sei G eine pro-p-Gruppe. Sei $\phi(G)$ der topologische Abschluss der von $[G, G]$ und
 $G^p = \{g^p \mid g \in G\}$ erzeugten Untergruppe. ($\phi(G)$ heißt **Frattini-Untergruppe** von G)

Dann:

G ist topologisch endl. erz. $\Leftrightarrow G/\phi(G)$ ist endlicher \mathbb{F}_p -VR.

Bilden $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ eine Basis von $G/\phi(G)$, dann ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ ein minimales ES.

Beweis. (ü).

□

Bem. 1) $G/\overline{[G, G]}$ ist abelsche, hausdorff. topol. Grp.

$\rightarrow G/\overline{[G, G]G^p}$ ist abelsche p -Torsionsgruppe (d.h. \mathbb{F}_p -VR)
(-,-,- heißt **p-elementar abelsch**)

2) Sei G eine abelsche pro-p-Gruppe.(a) Dann ist G ein \mathbb{Z}_p -Modul!, d.h. haben stetige \mathbb{Z}_p -Operation $\mathbb{Z}_p \times G \rightarrow G$

$$\underbrace{\alpha \cdot g}_{\in \mathbb{Z}_p} := (\alpha \bmod \underbrace{\#G_i}_{p\text{-Potenz}} \cdot j_i)_{i \in I} \in \varprojlim_I G_i = G.$$

$\underbrace{(j_i)_i}_{\text{endl. abelsche } p\text{-Grp.}} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\alpha \bmod \text{ord}(j_i) \cdot j_i}$

$$\left(\text{wohldef? } \pi_{j_i}: G_j \rightarrow G_i \quad \pi_{j_i}(\alpha \bmod \text{ord}(j_i) \cdot j_i) = (\alpha \bmod \text{ord}(j_i) \cdot j_i) \right)$$

$j_i \mapsto j_i$

$$\text{z.B. } (1 + p\mathbb{Z}_p, \cdot) = \varprojlim_n \left(\frac{1 + p^n \mathbb{Z}_p}{1 + p^{n+1} \mathbb{Z}_p} \right)$$

□

$$\begin{aligned} \beta \in 1 + p\mathbb{Z}_p, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_p \\ \sim \quad \beta^\alpha \in 1 + p\mathbb{Z}_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \beta \in (1 + p\mathbb{Z}_p)^\times \mid \beta \equiv 1 \pmod{p} \right\} = \langle 1 + p \rangle \cong \mathbb{Z}/p^{n-1} \end{aligned}$$

(b) G topol. endlich erzeugt $\Leftrightarrow G$ ist endl. erz. als \mathbb{Z}_p -Modul

In diesem Fall kann man den Struktursatz für endl. erz. Moduln über HJ-Ringen anwenden
 $\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_p^r \times \prod_{i=1}^k \mathbb{Z}/p^{n_i}$...

O2. GALOISTHEORIE UND UNENDLICHE GALOISERWEITERUNGEN

Wdg. $L|K$ algebraische Erweiterung von Körpern

$L|K$ normal $\Leftrightarrow \forall \alpha \in L : m_{\text{irr}, K}(\alpha) \in K[X]$ zerfällt über L in Linearfaktoren

$L|K$ separabel $\Leftrightarrow \forall \alpha \in L : m_{\text{irr}, K}(\alpha)$ besitzt nur einfache Nullstellen in K^{alg} .

$L|K$ galoissch: $\Leftrightarrow L|K$ normal + separabel

Definiere dann: $\text{Gal}(L|K) := G_{L|K} := \{ \sigma \in \text{Aut}(L) \mid \sigma|_K = \text{id}_K \}$

Fakt: Ist $L|F|K$ ein Zwischenkp., so ist $L|F$ galoissch.

Hauptsatz der endlichen Galoistheorie: $L|K$ endlich \Rightarrow Die Abbildungen

$$\{ H \in \text{Gal}(L|K) \mid H \text{G} \} \xrightleftharpoons[\text{Gal}(L|F)]{H \mapsto L^H} \{ L|F|K \text{ Zwischenkp.} \}$$

definiert eine Bijektion.

$$\{ H \trianglelefteq G \mid NT \} \xrightleftharpoons[1:1]{ } \{ F \text{ Zwp.} \mid F|K \text{ galoissch} \}$$

Was geht schief, wenn $L|K$ unendlich?
 Man hat zu viele Untergruppen!

Proposition 2.1. Sei $L|K$ galoissch. Sei $\Sigma := \{E \mid L \text{ Unterkörper} \mid E|K \text{ endlich galoissch}\}$, geordnet mit \subseteq , $\rightsquigarrow (\Sigma, \subseteq) \rightarrow \text{Grp}, E \mapsto \text{Gal}(E|K)$ ist ein inverses System.

Dann ist $\text{Gal}(L|K) \xrightarrow{\varphi} \varprojlim_{E \in \Sigma} \text{Gal}(E|K), \sigma \mapsto (\sigma|_E)_{E \in \Sigma}$
ein Gruppenisomorphismus.

Beweis.

- Homomorphismus nach Konstruktion.
- Injektiv: $\varphi(\sigma) = \text{id} \Leftrightarrow \sigma|_E = \text{id}_E \forall E \in \Sigma \Rightarrow \sigma = \text{id}_L$

- Surjektiv: Sei $(\sigma_E)_{E \in \Sigma} \in \varprojlim_{E \in \Sigma} \text{Gal}(E|K) \subseteq \prod_{E \in \Sigma} \text{Gal}(E|K)$

$$\text{d.h.: } E' | E \in \Sigma \Rightarrow \sigma_{E'}|_E = \sigma_E$$

Wegen $L = \bigcup_{E \in \Sigma} E$, definiere $\sigma: L \rightarrow L, x \mapsto \sigma_E(x)$ falls $x \in E \in \Sigma$

(wohldefiniert, da $(\sigma_E)_E$ kompatibel)

$$\Rightarrow \sigma \in \text{Gal}(L|K) \text{ mit } \varphi(\sigma) = (\sigma_E)_E$$

(Automorphismus da $\sigma|_E$ Automorphismen)



Def. 2.2. Die Krulltopologie auf $\text{Gal}(L|K)$ ist die Topologie für welche φ ein Isomorphismus topologischer Gruppen wird. (mit der proendl. Topologie auf $\varprojlim_{\Sigma} \text{Gal}(E|K)$)

Konkret: Umgebungsbasis der Eins in $\text{Gal}(L|K)$ ist $\{\underbrace{\text{Gal}(L|E)}_{= \ker(\text{Gal}(L|K) \rightarrow \text{Gal}(E|K))} \mid E \in \Sigma\} \leftarrow$ Umgebungsbasis offen-abg.
Normalteiler von $\text{Gal}(L|K)$

Lemma 2.3. Sei $L|K$ galoissch. Dann sind die offenen Untergruppen von $\text{Gal}(L|K)$ gerade die Untergruppen $\text{Gal}(L|F)$ mit $F|K$ endlich.

Beweis. Sei $H \leq \text{Gal}(L|K)$ offene Untergruppe. Wähle $E \in \Sigma$ mit $\text{Gal}(L|E) \subseteq H$.

$$\Rightarrow \overline{H} = \text{Bild von } H \text{ in } \text{Gal}(E|K) = \{\sigma|_E \mid \sigma \in H\} \quad (= \frac{\text{Gal}(L|K)}{\text{Gal}(L|E)})$$

\vdash sei $F = E^{\overline{H}}$... Prüfe: $H = \text{Gal}(L|F)$.

endlich $\begin{bmatrix} E \\ F \\ K \end{bmatrix}^H$ Umgekehrt: $F|K$ endl. Erweiterung in $L \rightsquigarrow$ Sei E der Galoisabschluss von $F|K$
 $\Rightarrow [E:K] < \infty \Rightarrow \underbrace{\text{Gal}(L|E)}_{\text{offen}} \subseteq \text{Gal}(L|F)$.

$$\Rightarrow \text{Gal}(L|F) = \bigcup_{\substack{j \in \text{Gal}(L|F) \\ \text{offen}}} j \text{Gal}(L|E) \subseteq \text{Gal}(L|K)$$



10 Korollar 2.4. Sei $L \mid K$ wie in 2.3. Dann gilt:
 $\{H \subseteq \text{Gal}(L \mid K) \mid H \text{ abg.}\} = \{\text{Gal}(L \mid F) \mid L \mid F \mid K\}$

Beweis.
 \hookrightarrow : Schreibe $F = \bigcup_{i \in I} F_i$, I Menge, $F_i \mid K$ endl. Erw.

Dann:
 $\text{Gal}(L \mid F) = \bigcap_{i \in I} \underbrace{\text{Gal}(L \mid F_i)}_{\text{offen abgeschlossen}}$
 $\sigma|_F = \text{id}_F \quad \sigma|_{F_i} = \text{id}_{F_i}$

" \subseteq ": Jede abg. Untergruppe einer proenzellischen Gruppe ist der Durchschnitt offener Untergruppen
(1.10)

$$H = \bigcap_{i \in I} u_i \quad u_i: \text{offene Untergruppe in } G, \quad u_i = \text{Gal}(L \mid F_i) \text{ nach 2.3}$$

$$\xrightarrow{F = K \cap F_i \mid i \in I} = \bigcap_{i \in I} \text{Gal}(L \mid F_i) = \text{Gal}(L \mid F)$$

Satz 2.5. Sei $L \mid K$ galoissch. Dann sind die Abbildungen

$$\{H \subseteq \text{Gal}(L \mid K) \mid H \text{ abg.}\} \xrightleftharpoons[\text{Gal}(L \mid F)]{H \mapsto L^+} \{F \subseteq L \mid F \mid K \text{ Körpererweiterung}\}$$

zueinander inverse Bijektionen (ordnungsmässig). Die Restriktionen der Abbildungen definieren Bijektion:

$$\{H \subseteq \text{Gal}(L \mid K) \mid H \text{ abg. Normalteiler}\} \xrightleftharpoons[\text{Gal}(L \mid F)]{} \{E \subseteq L \mid E \mid K \text{ Galoiserweiterung}\}$$

zubr. gilt (topologisch):

$$\frac{\text{Gal}(L \mid K)}{N} \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(L^N \mid K)$$

Beweis. Reduktion auf den endlichen Fall. - Sharifi 8.3.6.



Bezeichnung: K ein beliebiger Körper.

K^{alg} bezeichnet einen algebraischen Abschluss

$\underline{K^{sep}} \subseteq K^{alg}$ bezeichnet einen separablen Abschluss ($K^{sep} = \{x \in K^{alg} \mid K(x) \text{ separabel}\}$)
ist galoissch über K

$\rightsquigarrow G_K := \text{Gal}(K^{sep} \mid K)$ die absolute Galoisgruppe von K

$(\text{Aut}_K(K^{alg})) \longrightarrow G_K$ ist ein Isomorphismus
 $\delta \mapsto \delta|_{K^{sep}}$

$$11 \quad \text{Bsp. } \cdot \quad G_{\mathbb{F}_q} = \hat{\mathbb{Z}} \quad (\mathbb{F}_q \text{ perfekt} \Rightarrow \mathbb{F}_q^{\text{ab}} = \mathbb{F}_q^{\text{sep}})$$

$$\mathbb{F}_{q^n} = \{ \alpha \in \mathbb{F}_q^{\text{ab}} \mid \alpha^{q^n} = \alpha \} \quad | \quad \mathbb{F}_q \text{ galoissch mit } \text{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$(d_p: \alpha \mapsto \alpha^q) \quad \leftrightarrow 1$$

$$\text{und } \mathbb{F}_q^{\text{ab}} = \bigcup_n \mathbb{F}_{q^n} \quad \Rightarrow \quad G_{\mathbb{F}_q} = \varprojlim_{(n,1)} \text{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q) \cong \hat{\mathbb{Z}}$$

$$\circ \quad \zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$$

$$\Rightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) = \varprojlim \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p) = \varprojlim (\mathbb{Z}_{p^n})^\times$$

$$= \mathbb{Z}_p^\times$$

$(\zeta_n \in K^{\text{alg}}$ primitive n -te EW sofern $\text{char } K \nmid n$ und falls n/n' ($\text{char } K \nmid n'$)
wählen $\zeta_n = (\zeta_{n'})$)

Bezeichnung: $G_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\text{kannische Projektion}} \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\text{obige isom.}} \mathbb{Z}_p^\times$
heißt p -adischer Kreistilingscharakter.

Analog: $\tilde{\mathbb{Q}} = \bigcup_n \mathbb{Q}(\zeta_n)$ (alle n) wissen $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong \prod_p \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q})$

$$\text{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cong \varprojlim \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong \prod_p \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}) = \prod_p \mathbb{Z}_p^\times = (\hat{\mathbb{Z}})^\times$$

Satz (Kronecker-Weber)

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{\text{ab}} \text{ wobei } K^{\text{ab}} = \bigcup \{ E \mid K \text{ galoissch} \mid \text{Gal}(E/K) \text{ abelsch} \}$$

$$\tilde{\mathcal{U}}: \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K) \cong G_K^{\text{ab}} = \frac{G_K}{[\overline{G_K}, \overline{G_K}]}$$

Bemerkung: $G_{\mathbb{Q}_p}$ für $p > 2$ ist beschrieben durch Koch-Jansen-Wingberg. (~ 1985)
 $(\widehat{G}_K^p, K \text{ lokal: } \sim 1967)$

O3. WEITERE EIGENSCHAFTEN LOKALER KÖRPER

Sei K ein nicht-archimedischer lokaler Körper. Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ Bewertungsring, $\nu = \nu_K : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ normalisierte Bewertung.

$k := k_K$ (endl.!) Restklassenkörper, $\pi \in \mathcal{O}$ Primelement (Uniformisator von K)

$p = \text{char } k$, $q = \#k$, $f = [k : \mathbb{F}_p]$, $e := \begin{cases} e(K/\mathbb{Q}_p), & K \nmid \mathbb{Q}_p \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

A. Die multiplikative Gruppe von K

Def. 3.1. Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei $U_i := U_i(K)$ definiert als $U_0 := \mathcal{O}^\times$, $U_i = 1 + \pi^i \mathcal{O}$ für $i \geq 1$.

Sei $P^{(p)}(K) = \{\gamma \in K^\times \mid \exists n \in \mathbb{N} : \gamma^n = 1 \text{ und } p \nmid n\} \subseteq \mathcal{O}^\times$ endliche Untergruppe

Lemma 3.2. $P^{(p)}(K) \rightarrow k^\times, \gamma \mapsto \gamma \bmod \pi$ ist Gruppeniso. (ii)

Proposition 3.3. Die kanonische Abbildung $\pi^\mathbb{Z} \times P^{(p)}(K) \times U_1 \rightarrow K^\times$ ist ein topologischer Isomorphismus
(ANT I, topologisch: ii)

Lemma 3.4. Viein $\frac{U_i}{U_{i+1}} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, +)$, $1 + a\pi^i \mapsto a \bmod \pi$ ist Gruppenisomorphismus.

Beweis. $(1 + a\pi^i)(1 + b\pi^i) = 1 + (a + b(1 + \pi^{i-1}a))\pi^i \quad (i \geq 1)$
 $\in (1 + (ab)\pi^i)U_{i+1}$

$\Rightarrow U_i \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, +)$, $1 + a\pi^i \mapsto a \bmod \pi$ ist Gruppenhomomorphismus
mit Kern U_{i+1} . □

Korollar 3.5. Viein $\frac{U_i}{U_j} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{j \geq i} \frac{U_i}{U_j}$ ($\neg U_i$ ist pro-p Gruppe)

Beweis.

injektiv: ✓

surjektiv: Sei $\bar{x}_j \in \frac{U_i}{U_j}$ kompatible Familie. Wähle $x_j \in U_i$ mit Reduktion \bar{x}_j .

$\Rightarrow (x_j)_j$ bilden CF in $\mathcal{O}^\times \leq \mathcal{O}$ $\xrightarrow{\mathcal{O} \text{ kpt.}} x := \lim_{U_i \text{ kpt.}} x_j$ existiert in U_i .
(\mathcal{O} kpt.!)

$\Rightarrow x \mapsto (\bar{x}_j)_j$. □

13

Lemma 3.6. Sei K p -adisch, $i \geq 1$. Dann:

- (0) $(1 + \pi^i a)^p \equiv 1 + p\pi^i a + \pi^{pi} a^p \pmod{\pi^{e+2i}}$ $\quad e = e(K/\mathbb{Q}_p)$
 $= v_K(p)$
- (1) $(1 + \pi^i a)^p \equiv 1 + a^p \pi^{ip} \pmod{\pi^{ip+1}}$, falls $i < \frac{e}{p-1}$ $\quad (p \nmid \pi^e)$
- (2) $(1 + \pi^i a)^p \equiv 1 + p\pi^i a \pmod{\pi^{ite+1}}$, falls $i > \frac{e}{p-1}$
- (3) $(1 + \pi^i a)^p \equiv 1 \pmod{\pi^{ite}}$, falls $i = \frac{e}{p-1}$

Beweis. (0): Binomischer Lehrsatz und $p \mid \binom{p}{j}$ für $j=1-p-1$

$$\text{und } v(\pi^{2i} p) = 2i + e$$

$$(1) - (3): \quad v(p\pi^i) > v(\pi^{pi}) \Leftrightarrow e+i > pi \Leftrightarrow \frac{e}{p-1} > i, \text{ etc.}$$

■

Korollar 3.7. Sei K p -adisch. $O^\times \xrightarrow{\varphi} O^\times$, $a \mapsto a^p$. Dann gilt:

$$(1) \forall i > \frac{e}{p-1}: \forall k \geq 1: \varphi \text{ induziert Isomorphismus } \frac{U_i}{U_{i+k}} \xrightarrow{\sim} \frac{U_{ie}}{U_{ie+k}}$$

$$(2) \forall i > \frac{e}{p-1}: \varphi \text{ induziert Isomorphismus } U_i \xrightarrow{\sim} U_{ie}$$

Beweis.

$$(1) \underline{k=1}: \frac{U_i}{U_{i+1}} \xrightarrow{\sim} \frac{U_{ie}}{U_{ie+1}}, \quad (1 + a\pi^i) \frac{U_{i+1}}{U_{i+2}} \xrightarrow[\substack{\downarrow \\ a \pmod{\pi}}]{3.6} (1 + pa\pi^i) \frac{U_{ie+1}}{U_{ie+2}}$$

$\begin{matrix} 12 \\ (k,+)\end{matrix}$	$\begin{matrix} 12 \\ (k,+)\end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ \text{Einheit}\end{matrix}$
--	--	--

(aus 3.6. Isomorphismus!)

Induktion:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & \frac{U_{ie}}{U_{i+k+1}} & \xrightarrow{\quad} & \frac{U_i}{U_{i+k+1}} & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ & \downarrow \text{IV} \approx & & \downarrow \approx & & \downarrow \text{IV} \approx & \\ 1 & \xrightarrow{\quad} & \frac{U_{ie+1}}{U_{ie+k+1}} & \xrightarrow{\quad} & \frac{U_{ie}}{U_{ie+k+1}} & \xrightarrow{\quad} & 1 \end{array}$$

\approx : Schlangenlemma.

$$(2) \text{ verwendet } U_i \xrightarrow{\sim} \lim_{\leftarrow j \geq i} \frac{U_i}{U_j}, \quad \text{rechts Isomorphismus wegen (a).}$$

$$\downarrow \approx \quad \lim_{\leftarrow j \geq i} \frac{U_{ie}}{U_{je}} \approx \varphi \pmod{-}$$

■

(2) alternativ:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{(1 + \pi^i U_i)}_{= U_i} & \xrightarrow[\text{exp}]{} & (\pi^i U, +) \\ \downarrow \gamma & \approx & \downarrow p - \text{ist Isomorphismus} \\ (U_{\text{inte}}, +) & \xrightarrow[\text{exp}]{} & (\pi^{i+\epsilon} U, +) \end{array}$$

□

Satz 3.8. K sei p -adischer Körper. Dann:

27.04.18

(1) $U_1(K) \cong \mu_{p^\infty}(K) \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ als topologische Gruppen.

(2) $K^\times \cong \pi^\mathbb{Z} \times \mu^{(p)}(K) \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ als topologische Gruppen.

Beweis:

$\cdot \mu_{p^\infty}(K) = \{\zeta \in K^\times \mid \exists n > 0: \zeta^{p^n} = 1\}$

$\cdot \#\mu_{p^\infty}(K) < \infty: [K:\mathbb{Q}_p] < \infty \text{ und } [\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) : \mathbb{Q}_p] = \phi(p^n)$
 $p^{n-1}(p-1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Bemerkung: • $U_1(K)$ ist abelsche pro- p -Gruppe, d.h. \mathbb{Z}_p -Modul

• $U_1(K)_{\text{tors}} \cong \mu_{p^\infty}(K) \quad \text{und} \quad U_1(K) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Q}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$

Beweis. (2) folgt aus (1) und 3.3.

(1) $U_1(K)$ ist abelsche pro- p -Gruppe.

$U_1(K)_{\text{tors}} = \{x \in U_1(K) \mid \exists n \in \mathbb{N}: x^{p^n} = 1\} = \mu_{p^\infty}(K) (< \infty)$

Beh. $U_1(K)$ topol. endl. erz. $\begin{cases} \Rightarrow U_1(K) \text{ endl. erz. } \mathbb{Z}_p\text{-Modul} \\ \Rightarrow U_1(K) \cong U_1(K)_{\text{tors}} \times \mathbb{Z}_p^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$ Dazu: (Burnside Basisatz) z.B. $U_1(K)/U_1(K)^p$ endlich

dazu: $U_1(K)^p \cong U_{i_0}(K)^p \stackrel{?}{=} U_{i_0+\epsilon}(K) \quad \text{für } i_0 = \left\lceil \frac{e}{p-1} \right\rceil$

 $\Rightarrow U_1(K)/U_1(K)^p$ ist Quotient von $U_1(K)/U_{i_0+\epsilon}(K)$ ← endliche p -Gruppe
 \Rightarrow Behauptung gezeigt. $(U_i/U_{i+1} \cong (k, +) \text{ endl.})$ Behauptung: $r = [K:\mathbb{Q}_p] \quad U_1/U_i \text{ endl. } \forall i \geq 1$

$\Rightarrow \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} U_1 = \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} U_{i_0}$

wegen $\log, \exp: U_{i_0} \xrightarrow{\sim} \pi^{i_0} \mathcal{O}_K$ als \mathbb{Z}_p -Modul (als pro- p -Gruppe)

$$\text{rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K = \text{rang}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \dim_{\mathbb{Q}_p} K = [K : \mathbb{Q}_p]$$

Alternativ: U_{i_0} ist p -torsionsfrei, denn $x \mapsto x^p$ ist Isomorphismus $U_{i_0} \rightarrow U_{i_0+e}$

$\Rightarrow U_{i_0}$ ist freier \mathbb{Z}_p -Modul (von endl. Rang)

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Nakayama}} \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} U_{i_0} &= \text{rang}_{\mathbb{F}_p} \frac{U_{i_0}}{U_{i_0}^p} = \text{rang}_{\mathbb{F}_p} \frac{U_{i_0}}{U_{i_0+e}} = \log_p (\# \frac{U_{i_0}}{U_{i_0+e}}) \\ &= \log_p (\underbrace{(\# k)}_{= p^e}) = ef = [K : \mathbb{Q}_p] \end{aligned}$$

□

Satz 3.9. (ohne Beweis, s.ü.)

Für $K \cong \mathbb{F}_q((\pi))$ gilt $U_1(K) \cong \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$

Abb $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}} \rightarrow U_1$: Sei b_1, \dots, b_f Basis von k über \mathbb{F}_p .

Behauptung: $\prod_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ p \nmid n}} \prod_{j=1}^f \mathbb{Z}_p \rightarrow U_1(K), (a_{n,j})_{n,j} \mapsto \prod_{n,j} (1 + b_j \pi^n)^{a_{n,j}}$

□

B. Zähm verzweigte Erweiterungen (ζ_n primitive n -te EW)

Proposition 3.10. $L|K$ lokale Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid n$.

(a) $K(\zeta_n)$ ist unverzweigt über K

(b) Für $m := \# k_L^\times$ gilt $K(\zeta_m) \subseteq L$ und $K(\zeta_m)$ ist größte unverzweigte Erweiterung von K in L . ($\Rightarrow L|K(\zeta_m)$ ist total verzweigt)

(c) Zu $e \in \mathbb{N}$ $\exists!$ unverzweigte Erweiterung K_e von K mit $[K_e : K] = e$, nämlich $K = K(\zeta_{q^{e-1}})$, $K_e|K$ ist galoissch und

$$\text{Gal}(K_e|K) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(k(\zeta_{q^{e-1}})/k) \cong \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$$

Beweis. (vgl. ANT I)

(a) Man betrachtet $X^m - 1$ ($p \nmid m$ und wendet Hensels Lemma an. $\Rightarrow [K(\zeta_n) : K] = [k(\zeta_n) : k]$)
 $\Rightarrow f(K(\zeta_n)|K) = [K(\zeta_n) : K]$

(Hensel: $\text{d}_{\text{H}} \text{mipo}_K \zeta_m = \text{d}_{\text{H}} \text{mipo}_k \zeta_m$). Hensel zeigt auch $K(\zeta_m) \subseteq L$ und $k_L = k_K(\zeta_m)$
 $(\Rightarrow L|K(\zeta_m) \text{ voll verzweigt}) \Rightarrow (a), (b), (c)$.

Hatten in ANT I gezeigt. \exists kanonische Surjektion $\rho_{L|K}: \text{Gal}(L|K) \rightarrow \text{Gal}(k_L|k)$ falls $L|K$ galoissch.

□

Für $L|K$ algebraisch ($L \subseteq K^{\text{alg}}$, $K \subseteq L$) sei

$$\mathcal{F}_{L|K} := \{F \subseteq L \mid F|K \text{ endl. Körpererweiterung}\}$$

Def. 3.11.

- (1) $L|K$ heißt unverzweigt: \Leftrightarrow alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind unverzweigt über K .
- (2) $L|K$ heißt total verzweigt: \Leftrightarrow alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind total verzweigt über K .
- (3) $K^{\text{ur}} := \bigcup \{F \in \mathcal{F}_{K^{\text{sep}}|K} \mid F|K \text{ unverzweigt}\}$ ($= \varprojlim \dots$)

(die max. unverzweigte Erweiterung von K (in K^{alg}))

- (4) Für $F \subseteq F'$ in $\mathcal{F}_{L|K}$ haben kanonische Inklusionen $k_F \hookrightarrow k_{F'}$

Sei $k_L = \bigcup \{k_F \mid F \in \mathcal{F}_{L|K}\}$ ($= \varprojlim \dots$)

(Bem.: $k_L \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L$; Bewertung auf K setzt sich endl. auf L fort)

Bem. (a) $K^{\text{ur}} = \bigcup_m K(\zeta_{q^{m-1}})$ ($= \varinjlim \dots$)

(b) $K^{\text{ur}} \cap L$ für tel. L ist die maximale unverzweigte Erweiterung von K in L .

Def. 3.12. $L|K$ galoissch.

(i) Erhalten kanonischen Homomorphismus $\rho_{L|K}: \text{Gal}(L|K) \rightarrow \text{Gal}(k_L|k)$

(als $\varprojlim \rho_{E|K}: \varprojlim_{\substack{E \in \mathcal{F}_{L|K} \\ E|K \text{ galoissch}}} (\text{Gal}(E|K) \rightarrow \text{Gal}(k_E|k))$)

(ii) $I_{L|K} := \ker(\rho_{L|K})$, $I_K := I_{K^{\text{sep}}|K}$

(iii) Haben $\sigma: k_L \rightarrow k_L$, $x \mapsto x^q$ in $\text{Gal}(k_L|k)$ (topol. Erz.) $q = \# k$
Neue $F_r \in \text{Gal}(L|K)$ ein Frobeniusautomorphismus: $\Leftrightarrow \rho_{L|K}(F_r) = \sigma$

Bem. (1) Haben "wieder" kurze exakte Sequenzen $1 \rightarrow I_{K|L} \rightarrow \text{Gal}(L|K) \xrightarrow{\rho_{L|K}} \text{Gal}(k_L|k) \rightarrow 1$
als inverser Limes analoger Sequenzen für $E \in \mathcal{F}_{L|K}$ mit $E|K$ galoissch.

(2) F_r ist eindimensional $\Leftrightarrow \rho_{L|K}$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow L|K$ ist unverzweigt (d.h. $I_{L|K} = \{1\}$)

Für $L = K^{\text{ur}}$: $\text{Gal}(K^{\text{ur}}|K) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(k^{\text{alg}}|k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$.

17

- Def. 3.13. (a) Gilt $[L:K] < \infty$, so heißt $L|K$ zähm verzweigt $\Leftrightarrow p \nmid e(L|K)$
- (b) $L|K$ heißt zähm verzweigt \Leftrightarrow alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind zähm verzweigt über K
- (c) $L|K$ heißt wild verzweigt $\Leftrightarrow L|K$ ist nicht zähm verzweigt.
($p \mid e(F|K)$ für ein $F \in \mathcal{F}_{L|K}$)

- Bsp. (a) $e \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ mit $p \nmid e \Rightarrow L = K(\sqrt[p]{\pi})$ zähm verzweigt (und total unverzweigt)
- (b) $p = \text{char } k$, $L|K$ inseparabel $\rightarrow L|K$ wild verzweigt
- (c) $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p$ zähm, total verzweigt. ($e = \phi(p) = p-1$)
 $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p$ wild verzweigt für $n \geq 2$ ($e = \phi(p^n)$)

Proposition 3.14. Sei $L|K$ zähm verzweigt, $[L:K] < \infty$, $E = L \cap K^{\text{ur}}$, $e = e(L|K)$. Dann:

- (a) $L = E(\sqrt[p]{\pi_E})$ für π_E geeignetes Primideal von E .
- (b) $E' := E(\zeta_{e \cdot \# k_E^\times})$, $L' := LE' \Rightarrow L' = E'(\sqrt[p]{\frac{\pi}{\pi_K}})$
und $E'|K$ unverzweigt, $L'|L$ unverzweigt $\rightarrow (L'|K)$ galoissch

Beweis.

$$(a) \text{ Sei } \pi_L \text{ Primideal von } \mathcal{O}_L \Rightarrow \pi \mathcal{O}_L = \pi_L^e \mathcal{O}_L, \text{ d.h. } \alpha \in \mathcal{O}_L^\times : \pi = \pi_L^e \alpha$$

wissen $\mathcal{O}_L^\times = \mu^{(p)}(L) \times U_1(L)$ { $U_1(L)$ ist (endl. ord.) \mathbb{Z}_p -Modul, $e \in \mathbb{Z}_p^\times$
 $\Rightarrow \alpha = \zeta \cdot u \quad \} \Rightarrow \exists u' \in U_1(L) : (u')^e = u$.

$$\Rightarrow \zeta^{-\pi} = (\pi_L \cdot u')^e$$

beachte: $\mu^{(p)}(L) = \mu^{(p)}(E)$ da $k_L = k_E$ } $\Rightarrow \pi_E := \zeta^{-\pi} \text{ Primideal von } \mathcal{O}_E \text{ und}$
 $L = E(\sqrt[p]{\pi_E})$

(denn: $L = E(\pi_L)$, da $[L:E] = e(L|E) = e(L|K) = e$)

- (b) wähle $\zeta \in \mu^{(p)}(E)$ mit $\zeta^e = \zeta$ ($\zeta^{\# k_E^\times} = 1$)
Dann: $\pi = (\pi_L \cdot u' \zeta)^e \Rightarrow L' = E'(\sqrt[p]{\pi})$.

■

Bsp. (ii) $\mathbb{Q}_p(\zeta_p) = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p]{\pi})$ für geeigneten Uniformisator in \mathbb{Q}_p .
Bch.: $\pi = -p$ tut's!

Def. G pro-endlich abelsch. $\Rightarrow G$ ist $\hat{\mathbb{Z}}$ -Modul.

Modulstruktur: $\hat{\mathbb{Z}} \times G \longrightarrow G, (\alpha, g) \mapsto \underbrace{\alpha \cdot g}_{\mathbb{Z}}$

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \cdot g := g^n$$

Für $\hat{\alpha} \in \hat{\mathbb{Z}}$ beliebig: schreibe $\hat{\alpha} = (\alpha_n)_n \in \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ($\alpha_n \in \mathbb{Z}$)

prüfe: (g^{α_n}) "konvergieren" ((g^{α_n}) hat endl. Häufungspunkt!)

Proposition 3.15:

- (a) Sind L, L' zahm verzweigt über K , so auch LL' ($\Rightarrow 3$ größte zahm verzwe. Erw. K^{tr} von L)
- (b) Die maximal zahm verzweigte Erweiterung von K in K^{alg} ist in K^{sep}

$$K^{tr} = \bigcup_{p \nmid n} K^{ur}(\sqrt[n]{\pi})$$

(c) K^{tr}/K^{ur} ist galoissch und $\text{Gal}(K^{tr}/K^{ur}) \cong \overline{\prod_{\substack{\ell \mid p \\ \ell \text{ prim}}} \mathbb{Z}_\ell} =: \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$

(d) K^{tr}/K ist galoissch mit $\text{Gal}(K^{tr}/K) \cong \hat{\mathbb{Z}}^{(p)} \rtimes \hat{\mathbb{Z}}$ so dass für geeignete topologische Erzeuger $t \in \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ und $s \in \hat{\mathbb{Z}}$ gilt:

$$sts^{-1} = t^q \quad (q = \# h)$$

Beweis.

- (a) Für $L, L' | K$ endl: $e(LL'/K) \mid e(L|K) e(L'|K)$ (aus ANT 1) oder 3.14
- (b) Folgt aus 3.14 (b)
- (c) $\text{Gal}(K^{ur}(\sqrt[n]{\pi}) | K^{ur}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (nach Kummertheorie)

$(p+n)$ Galoiskonjugatiken von $\sqrt[n]{\pi}$ seien $(\zeta_{q^{n-1}}^i \sqrt[n]{\pi})_{i=1}^n$ (Algebra I)

$$\varprojlim (\quad) = \varprojlim_{\substack{\ell \mid p \\ \ell \text{ prim}}} (\quad) \cong \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$$

(d) (ii) Sei $K(n) := K(\zeta_{q^{n-1}}, \sqrt[n]{\pi})$; Beh.: $K(n)|K$ galoissch mit $\text{Gal}(K(n)|K) \cong \frac{\mathbb{Z}/q^{n-1}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$
 und: $sts^{-1} = t^q$

$\begin{matrix} \text{zähm total} & & \\ \text{verzweigt} & & \\ & & \text{unverzweigt} \\ & & \text{Gal}(K(n)|K) \end{matrix}$

04. HÖHERE VERZWEIGUNGSGRUPPEN.

Sei K ein lokaler Körper. Seien $\mathcal{O}, \pi, k = k_K, v = v_K, q$ wie in 03.

Sei $L|K$ endlich galoissch mit $G = \text{Gal}(L|K)$. Seien $\mathcal{O}_L, \pi_L, k_L, v_L$ wie für K .

(v_L normalisiert, keine Fortsetzung von v_K)

Wtg. ANT1: $\exists x \in \mathcal{O}_L$ mit $\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L$ ($L|K$ total verzweigt $\Rightarrow \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$)

Lemma 4.1. Für $\sigma \in G$ und $i \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ sind äquivalent:

- a) σ operiert trivial auf $\mathcal{O}_L/\pi_L^{i+1}\mathcal{O}_L$
- b) $v_L(\sigma(a) - a) \geq i+1 \quad \forall a \in \mathcal{O}_L$
- c) $v_L(\sigma(x) - x) \geq 1$ für x wie oben.

Beweis.

a) \Leftrightarrow b) \Rightarrow c): klar.

$$\text{c)} \Rightarrow \text{b}): \sigma\left(\sum_{\substack{i \\ a_i \in \mathcal{O}_K}} a_i x^i\right) - \sum_i a_i x^i = (\sigma x - x) \sum_i a_i \underbrace{\frac{(\sigma x)^i - x^i}{\sigma x - x}}_{\in \mathcal{O}_L} \geq i+1$$

$$v_L(\dots) = v_L(\sigma x - x) + \underbrace{\dots}_{\geq 0} \geq i+1$$

□

Def. 4.2.

$$(i) i_{L|K}(\sigma) := v_L(\sigma x - x) \quad \forall \sigma \in G$$

(ii) Für $i \geq -1$ sei $G_i := \{\sigma \in G \mid i_{L|K}(\sigma) \geq i+1\}$ die i -te höhere Verzweigungsgruppe.

Bemerkung 4.3.

$$(0) G_i = \bigcap_{\bar{x} \in \mathcal{O}_L/\pi_L^{i+1}\mathcal{O}_L} \text{Stab}_G(\bar{x}) \Rightarrow G_i \text{ Untergruppe.}$$

$$(1) G_1 = G, \quad G_i = \{\text{id}\} \text{ für } i > 1 \quad (\sigma \neq \text{id} \Rightarrow \sigma x - x \neq 0 \dots)$$

$$G_0 = \{ \sigma \in G \mid \sigma x \equiv x \pmod{\pi} \} = I_{L|K} = \ker(G \rightarrow \text{Gal}(k_L|k_K))$$

$$(2) H \leq G \text{ Untergruppe zum Zwischenkörper } E = L^H \text{ (beachte } \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_E[x])$$

$$\text{Dann: } H_i = H \cap G_i \quad (i_{L|E}(\sigma) = i_{L|K}(\sigma) \text{ für } \sigma \in H)$$

$$\text{z.B. } H = G_0 \Rightarrow L^H = L \cap K^{\text{ur}} \text{ und } G_i = (G_0)_i = H_i \quad \forall i \geq 0$$

(3) $i_{L/K}$ ist unabhängig von der Wahl von x (wegen 4.1)

(4) $i_{L/K} : G \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$

Lemma 4.4. Es gilt $G_i \leq G \quad \forall i \geq -1$

Beweis.

$$G_i = \ker(G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{O}_L/\pi^{i+1}\mathcal{O}_L)) .$$

□

Korollar 4.5. Seien $\sigma \in G$, $\tau \in G_0$. Dann gelten:

$$(i) \quad i_{L/K}(\sigma \tau \sigma^{-1}) = i_{L/K}(\tau)$$

$$(ii) \quad i_{L/K}(\sigma \tau) \geq \min(i_{L/K}(\sigma), i_{L/K}(\tau)) \text{ mit Gleichheit falls } i_{L/K}(\sigma) \neq i_{L/K}(\tau).$$

Beweis. (i) wegen 4.4.

$$\begin{aligned} (ii) \quad \underbrace{i_{L/K}(\sigma \tau x - x)}_{i_{L/K}(\sigma \tau)} &\geq \min(\underbrace{i_{L/K}(\sigma(\tau x) - \tau x)}_{= i_{L/K}(\sigma)}, \underbrace{i_{L/K}(\tau x - x)}_{= i_{L/K}(\tau)}) \\ &\text{auch } \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\tau x] \\ &\text{nun 4.3 (3)} \end{aligned}$$

Gleichheitsaussage wegen "analoger" Eigenschaft von v_L .

□

Lemma 4.6. Für $\sigma \in G_0$ und $i \geq 0$ gelten:

$$\sigma \in G_i \iff \begin{cases} (i) & v_L(\sigma \pi_L - \pi_L) \geq i+1 \\ (ii) & \frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \in \mathcal{U}_i(L) \end{cases}$$

Beweis. (i) o.E.: $L|K$ voll verzweigt (ersetze K durch K^{ur} in L)

dann: klar wegen Wiederholung ANT 1 + 4.3. (3).

$$\begin{aligned} (ii) \quad v_L(\pi_L) = 1 \Rightarrow & \left(v_L(\sigma \pi_L - \pi_L) \geq i+1 \iff v_L\left(\frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} - 1\right) \geq i \right. \\ & \left. \iff \frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \in \mathcal{U}_i(L) \right). \end{aligned}$$

□

1. Anwendung: $v_L(\mathcal{D}_{L/K})$?

$$\mathcal{D}_{L/K}^{-1} = \{\alpha \in L \mid \text{Tr}_{L/K}(\alpha \beta) \in \mathcal{O}_K \quad \forall \beta \in \mathcal{O}_L\}$$

und ($\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$) ist $p_x \in \mathcal{O}_K[X]$ das Mipo von x , so gilt $\mathcal{D}_{L/K} = p_x^{-1}(x) \mathcal{O}_L$.

21

$$\text{Satz 4.7. } \underline{\nu_L(\mathcal{D}_{L/K})} = \sum_{\sigma \in G \setminus \text{id}_L} i_{L/K}(\sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} (\# G_i - 1)$$

$$= \nu_L(\mu_n^{(x)})$$

(Bem.: weiter unten: L/K zahm verzweigt $\leftrightarrow G_1 = \{1\}$

$$\Downarrow \nu_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \# G_0 - 1 = e(L/K) - 1$$

Beweis.

$$\mu_x(X) = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma x) \Rightarrow \mu_x'(X) = \prod_{\sigma \in G \setminus \{1\}} (X - \sigma x)$$

$$\Rightarrow \nu_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \sum_{\sigma \in G \setminus \{1\}} \nu_L(x - \sigma x) = \sum_{\sigma \in G \setminus \{1\}} \underbrace{i_{L/K}(\sigma)}_{\in \mathbb{Z}_{\geq 0}}.$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\sum_{\substack{\sigma \in G \setminus \{1\} \\ i_{L/K}(\sigma) = i}} 1 \right) = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\# G_{i-1} - \underbrace{\# G_i}_{=: j_i} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (\# G_i - 1)$$

Abel-
summation

$$0 \cdot (j_{-1} - j_0) + 1(j_0 - j_1) + 2(j_1 - j_2) + 3(j_2 - j_3) + \dots + n(j_{n-1} - \underbrace{j_n}_{=1}) + 0$$

$$= j_0 + j_1 + j_2 + \dots + j_{n-1} - n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (j_k - 1)$$

■

Korollar 4.8. (ii) Sei E/K endl. separable Erweiterung mit Galoisgruppe L und

$$H = \text{Gal}(L/E). \text{ Dann: } \nu_{E/K}(\mathcal{D}_{E/K}) = \frac{1}{e(L/E)} \sum_{\sigma \in G \setminus H} i_{L/K}(\sigma)$$

Die Gruppen $\frac{G_i}{G_{i+n}}$:

Lemma 4.9. $\forall i \geq 0$ ist die Abbildung $\theta_i : \frac{G_i}{G_{i+n}} \rightarrow \frac{U_i(L)}{U_{i+n}(L)}$, $\sigma G_{i+n} \mapsto \frac{\sigma(\bar{\pi}_L)}{\pi_L^{i+n}} U_{i+n}(L)$ wohldefiniert, unabhängig von $\bar{\pi}_L$ und ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

$$\text{(Erinnerung: } \frac{U_0(L)}{U_1(L)} \cong (k_L^\times, \cdot), \quad \frac{U_i(L)}{U_{i+1}(L)} \cong (k_L, +) \cong \mathbb{F}_p^{[k_L : \mathbb{F}_p]} \\ \cong \mathbb{Z}_{(q_L - 1)})$$

Beweis: unabhängig von $\bar{\pi}_L$. Gelte $\bar{\pi}^i = u \bar{\pi}_L$ für ein $u \in \mathcal{O}_L^\times$.

$$\begin{aligned} 4.1 \Rightarrow \forall u \in U_i & \quad du \equiv u \pmod{\bar{\pi}_L^{i+1}}, \text{ d.h. } \frac{du}{u} \equiv 1 \pmod{\bar{\pi}_L^{i+1}} \\ \Rightarrow \frac{d\bar{\pi}^i}{\bar{\pi}^i} &= \frac{du}{u} \quad \frac{d\bar{\pi}_L}{\bar{\pi}_L} \equiv \frac{d\bar{\pi}_L}{\bar{\pi}_L} \pmod{U_{i+1}(L)} \end{aligned}$$

$\tilde{\theta}_i: G_i \rightarrow \frac{U_i(L)}{U_{i+1}(L)}, \quad c \mapsto \frac{c(\bar{\pi}_L)}{\bar{\pi}_L} \pmod{U_{i+1}(L)}$ ist wohldef. Gruppenhomomorphismus

$$\frac{c(\bar{\pi}_L)}{\bar{\pi}_L} \in U_i(L) \Rightarrow \text{wohldefiniert.} \quad \text{unabh. von } \bar{\pi}_L$$

$$\text{Homomorphismus: } \tilde{\theta}_i(c\tau) = \frac{c\tau(\bar{\pi}_L)}{\bar{\pi}_L} = \frac{c(\tau\bar{\pi}_L)}{\tau\bar{\pi}_L} \cdot \frac{\tau(\bar{\pi}_L)}{\bar{\pi}_L} \stackrel{!}{=} \frac{c(\bar{\pi}_L)}{\bar{\pi}_L} \cdot \frac{\tau(\bar{\pi}_L)}{\bar{\pi}_L}$$

$$U_L(\tau\bar{\pi}_L) = 1$$

inj., wohldefiniert:

$$\ker \tilde{\theta}_i = G_{i+1} \text{ nach Lemma 4.6.} \quad \blacksquare$$

Korollar 4.10. (i) $\frac{G_0}{G_1}$ ist endl. zykl. Grp. von Ordnung teilerfremd zu p.

(ii) G_1 ist eine p-Gruppe

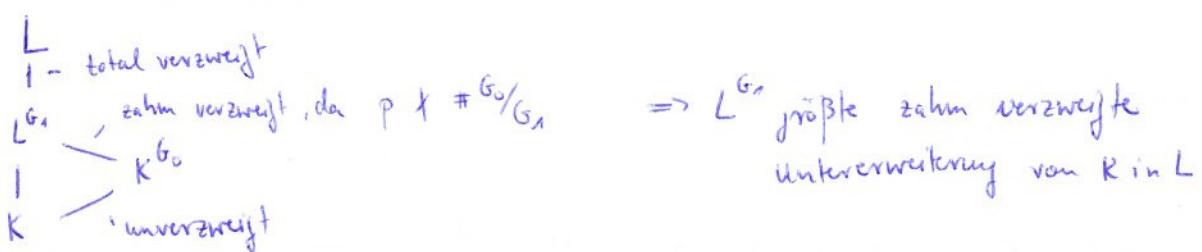
(iii) L^{G_1} ist der max. zahm verzweigte Unterkörper von L über K

(iv) G ist auflösbar. (sogen "überauflösbar")

Beweis. (i), (ii): klar nach 4.9.

(iv): benötigt zusätzlich: $\text{Gal}(k_L/k)$ auflösbar ist.

(iii)



$$\text{Ü: } G_0 \cong G_n \rtimes \frac{G_0}{G_n} \quad (\text{Schur-Zassenhaus, ... licher elementar})$$

Def. 4.11. $G_n \trianglelefteq G$ heißt wilde Verzweigungsgruppe von G .

Bsp 4.12. (ü) Sei $L_i = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^i})$ $i \geq 0$

$$\text{Gal}(L_n/\mathbb{Q}_p)_i = \begin{cases} G, & -1 \leq i \leq 0 \\ \text{Gal}(L_n/L_k), & p^{k-1} \leq i \leq p^k - 1 \quad k \in \{1, \dots, n-1\} \\ \{1\}, & i \geq p^{n-1} \end{cases}$$

Bemerkung 4.13 (siche Serre) $\sigma \in G_i, \tau \in G_j, i, j \geq 1$
 $\Rightarrow \sigma \tau \sigma^{-1} \tau^{-1} \in G_{i+j+1}$

Der Satz von Herbrand.

Für $u \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ setze $G_u := G_{\lceil u \rceil}$

$(G \in G_u \iff i_{\text{LIK}}(G) \geq u+1)$

Def. 4.14. (Herbrand Funktion)

$$\phi = \phi_{\text{LIK}}: [-1, \infty) \rightarrow [-1, \infty), \quad t \mapsto \int_{s=0}^t \frac{1}{[G_0 : G_s]} ds$$

beachte: $s \mapsto [G_0 : G_s]^{-1}$ ist monoton wachsend in s und $\frac{1}{[G_0 : G_s]} \geq \frac{1}{\# G_0}$

Prop. 4.15. (ü)

- (i) ϕ ist stetig, stückweise linear (auf $(i, i+1)$) streng monoton wachsend und konkav.
- (ii) $\phi(0) = 0$, Steigung 1 auf $-1 \leq t \leq 0$
- (iii) Für $u \in \mathbb{R}_{\geq 1} \setminus \mathbb{Z}$: $\phi'(u) = \frac{1}{[G_0 : G_u]} \geq \frac{1}{\# G_0}$
- (iv) $\phi: [-1, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$ ist bijektiv.

Sei $\psi = \psi_{\text{LIK}} = \phi^{-1}: [-1, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$

Korollar 4.16. (ü) (i) ψ ist stetig, stückweise linear, streng monoton wachsend, konkav

(ii), (iv) wie für ϕ

(iii) Sei $v = \phi(u), u \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \psi'(v) = [G_0 : G_u] (\in \mathbb{N})$ | (v) $u \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \Rightarrow u = \psi(v) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Beweis.

(v) OE $v \geq 1$. ($v=0, v=-1$ klar wegen \hat{u}) $\exists i: i \leq v \leq i+1$

$$\Rightarrow \underbrace{\#G_v \cdot v}_{v = \phi(u)} = \underbrace{\#G_1 + \#G_2 + \dots + \#G_i}_{[0,1]} + \underbrace{\#G_{i+1}}_{[i,1,i+1]}$$

teile durch
 $\#G_{i+1}$

$$\Rightarrow u - i \in \mathbb{Z} \Rightarrow u = i.$$

□

Def. 4.17. $G^v := G_{\psi(v)}$ (Verzweigungsgruppen in ehrer Nummerierung!)Satz 4.18. (Herbrand) Für $N \trianglelefteq G$ Normalteiler gilt:

$$\left(\frac{G}{N}\right)^v = G^v N / N. \quad \forall v \in \mathbb{R}_{\geq -1}$$

08.05.18

Bem. zu 4.17.

- i) $G^v = \{1\}$ für $v > 0$
- ii) $G^v = G_v$ ($\psi(0)=0$); $G^{-1}=G$
- iii) $\hat{u}: \psi(v) = \int_{w=0}^v [EG^w; G^w] dw$

Übung: Die Abbildung $\phi = \phi_{\mathbb{Q}_p(\mathbb{F}_{p^n})/\mathbb{Q}_p}$ (mit Inverser ψ) erfüllt:

$$\phi'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ \frac{1}{p^k - p^{k-1}}, & p^{k-1} - 1 < t < p^k - 1 \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ \frac{1}{p^n - p^{n-1}}, & p^{n-1} - 1 < t \end{cases}$$

$$\psi'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ p^k - p^{k-1}, & k-1 < t < k \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ p^n - p^{n-1}, & n-1 < t \end{cases}$$

(Sprünge der Steigung von ψ an $\{0, \dots, n-1\}$)

Proposition 4.19. Gelle $N \leq G$ und sei $E = L^N$. Dann ist

$$\Psi_{EK} = \Psi_{EIK} \circ \Psi_{LIE} \quad \text{und} \quad \Psi_{LK} = \Psi_{EIK} \circ \Psi_{LIE}$$

Lemma 4.20. Für $N \leq G$ und $E = L^N$ gilt:

$$\forall \delta \in \text{Gal}(E/K) : i_{EIK}(\delta) = \frac{1}{e(LIE)} \sum_{\substack{g \in G \\ g|_E = \delta}} i_{LIE}(g)$$

$$G \begin{pmatrix} L \\ | \\ N \\ E \\ | \\ G/N \\ K \end{pmatrix}$$

Beweis. (Teile)

- Falls $\delta = \text{id}$: $\infty = \infty$.

- Falls $\delta \neq \text{id}$: Wähle $x \in \mathcal{O}_L$, $y \in \mathcal{O}_E$ mit $\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_K[y] = \mathcal{O}_E$. Wähle $\tau \in G$ mit $\tau|_E = \delta \Rightarrow \{g \in G \mid g|_E = \delta\} = \tau \cdot N = N \cdot \tau$.

Beachte:

$$e(LIE) \cdot i_{EIK}(\delta) = v_L(\tau y - y)$$

$$i_{LIE}(g) = v_L(gx - x)$$

Behauptung: $a = \tau y - y$ und $b = \prod_{g \in N} (\tau g x - x)$ sind assoziiert in \mathcal{O}_L .

$a \mid b$: Sei $f \in E[X]$ das Minimalpolynom von x über E .

$$f(X) = \prod_{g \in N} (X - g x) = X^{\#N} + \sum_{i=0}^{\#N-1} b_i X^i \quad \text{mit } b_i \in \mathcal{O}_E \text{ da } x \text{ ganz über } \mathcal{O}_E.$$

$$\tau f - f = \sum_{i=0}^{\#N-1} \underbrace{(\tau b_i - b_i)}_{\tau b_i = \delta b_i} X^i$$

$$v_E(\tau f - f) \geq i_{EIK}(\delta) \quad (\tau b_i = \delta b_i)$$

a teilt
 \Rightarrow
 Koeffizienten von f

$$a \mid (\tau f - f)(x) = (\tau f)(x) = \prod_{g \in N} (x - \tau g x) = \pm b$$

$b \mid a$: Schreibe $y = g(x)$ für ein $g \in \mathcal{O}_K[X]$.

$\Rightarrow g(x) - y \in \mathcal{O}_E[X]$ und das Polynom hat x als Nullstelle.

$\Rightarrow g(x) - y = \underbrace{f(x) \cdot h(x)}_{\text{normiert}}$ für ein $h \in \mathcal{O}_E[X]$.

Wende τ_g an; anschließend x einsetzen. (beachte $\tau_g = g$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow a &= y - \tau_g y = (\tau_f)(x) - (\tau_h)(x) \\ &= \pm b \cdot (\tau_h)(x) \end{aligned}$$

also gilt $b \mid a$.

■

Korollar 4.21. (s. Sure, Local Fields) Sei $N = G_j$ für ein $j \geq 0$. Dann:

$$(a) \quad (\mathbb{G}/N)_i = \frac{G_i}{N} \quad \text{für } i < j \quad (b) \quad (\mathbb{G}/N)_i = \{1\} \quad \text{für } i \geq j$$

Beweis. Übung.

■

Lemma 4.22. Für $t \geq -1$ gilt:

$$\phi_{L/K}(t) + 1 = \frac{1}{\# G_0} \sum_{g \in G} \min(i_{L/K}(g), t+1)$$

Beweis. Beide Seiten sind 1 an $t=0$, $(i_{L/K}(g)=0 \text{ für } g \in G \setminus G_0, \geq 1 \text{ für } g \in G_0)$
stückweise linear für $t \in [i, i+1]$ und stetig. Sei $t \in \mathbb{R}_{\geq -1} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\phi_{L/K}^i(t) = \frac{1}{[G_0 : G_{i+1}]} = \frac{\# G_{i+1}}{\# G_0}$$

$$\begin{aligned} (\text{Rechte Seite})' (t) &= \frac{1}{\# G_0} \sum_{g \in G} \frac{d}{dt} \underbrace{\min\{i_{L/K}(g), t+1\}}_{\text{Flkt. konstant nahe } t \Leftrightarrow i_{L/K}(g) < t+1} \\ &\Leftrightarrow i_{L/K}(g) \leq t+1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\# G_0} \left(\sum_{g \in G \setminus G_{i+1}} 0 + \sum_{g \in G_{i+1}} 1 \right)$$

■

Lemma 4.23. Für $N \trianglelefteq G$, $E=L^N$, $\delta \in \text{Gal}(E/K)$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ gilt:

$$i_{E/K}(\delta) - 1 = \max \{ \phi_{L/E}(i_{L/K}(g) - 1) \mid g \in G, g|_E = \delta \}$$

Beweis. Wähle $\delta \in \{g' \in G \mid g'|_E = \delta\}$ für welches $i_{LIK}(\delta)$ maximal ist. Sei

$$m = i_{LIK}(\delta) - 1. \quad \underline{\text{Behauptung: }} \forall \tau \in N: i_{LIK}(\delta\tau) = \min\{i_{LIK}(\tau), m+1\}$$

Fall $\tau \in N_m$: d.h. $i_{LIK}(\tau) - 1 \geq m \Rightarrow i_{LIK}(\delta\tau) \geq \min\{i_{LIK}(\delta), i_{LIK}(\tau)\}$
 $= m+1$ und = nach Wahl von δ .
 $= i_{LIK}(\delta)$

Fall $\tau \in N \setminus N_m$: $i_{LIK}(\tau) \leq m \xrightarrow{4.5(ii)} i_{LIK}(\delta\tau) = \begin{cases} i_{LIK}(\tau) \\ \text{wie oben} \end{cases} \Rightarrow \square \text{ Behauptung.}$

$$4.20 \Rightarrow i_{EIK}(\delta) = \frac{1}{e(E/K)} \sum_{\tau \in N} \min\{i_{LIK}(\tau), m+1\}$$

$$\Leftrightarrow \{g' \in G \mid g'|_E = \delta\} = G \cdot N$$

$$= \frac{1}{\#N_\delta} \sum_{\tau \in N} \min\{i_{LIE}(\tau), m+1\} \stackrel{4.22 \text{ f\"ur } N}{=} \phi_{LIE}(m) + 1$$

$$(O_K[x] = O_L \Rightarrow O_E[x] = O_L)$$

$$= \max \{ \phi_{LIE}(i_{LIK}(\delta) - 1) \mid \delta \in G, \delta|_E = \delta \} + 1$$

ϕ konvex
 $\Rightarrow \max(\phi) = \phi(\max)$

Korollar 4.24: (Herbrand's Theorem)

$$\text{Sei } u = \phi_{LIE}(u). \text{ Dann: } G_u \frac{N}{N} = \underbrace{(G/N)}_{\in \text{Gal}(E/K)}_u$$

Beweis. (Notation wie in 4.23)

$$\delta \in G_u \frac{N}{N} \Leftrightarrow \max \{ i_{LIK}(\delta) - 1 \mid \delta \in G, \delta|_E = \delta \} \geq u$$

$$\stackrel{4.23,}{\Leftrightarrow} i_{EIK}(\delta) - 1 \geq \phi_{LIE}(u) = u$$

ϕ_{LIE} mon. wach.

$$\Leftrightarrow \delta \in (G/N)_u$$

Beweis von 4.19. (Transitivität)

(nur für ϕ , da $\psi = \phi^{-1}$) Sei $v \in \mathbb{R}_{\geq -1} \setminus \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\phi_{E/K} \circ \phi_{L/E})(u) &= \phi'_{E/K}(v) \cdot \phi'_{L/E}(u) & N := \phi_{L/E}(u) \\ &= \frac{\#(\text{Gal}(E/K)_N)}{e(E/K)} \cdot \frac{\#(\text{Gal}(L/E)_u)}{e(L/E)} \stackrel{4.24}{=} \frac{\# \frac{G_u N}{N} \cdot \# \text{Gal}(L/E)_u}{e(L/K)} \\ &\quad \left(\frac{G_u N}{N} \approx \frac{G_u}{N \cap G_u} = \frac{G_u}{N_u} \right) \Rightarrow = \frac{\# \frac{G_u}{\# N_u} \cdot \# N_u}{e(L/K)} \\ &\quad = \phi'_{L/K}(u) \end{aligned}$$

□

Beweis von 4.18. Sei $v \in \mathbb{R}_{\geq -1}$, $x = \psi_{E/K}(v)$, $w = \psi_{L/E}(x) = \psi_{L/K}(v)$

$$(G/N)^v \underset{\text{Def.}}{=} \left(\frac{G}{N}\right)_{\psi_{E/K}(v)} = \left(\frac{G}{N}\right)_x \stackrel{4.24}{=} \frac{G_w N}{N} = \frac{G_{\psi_{L/K}(v)}}{N}$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \frac{G^v N}{N}.$$

□

Satz. (Hasse-Arf, o. Beweis, s. Serre)

Ist $\frac{G}{\text{Gal}(L/K)}$ abelsch, $v \in \mathbb{Q}$ ein Sprung der oberen verzweigungs. Filtrierung, so gilt: $v \in \mathbb{Z}$:

05. ABGELEITETE FUNKTOREN (von Modulkategorien)

Sei R ein (nicht-notw. kommutativer) Ring mit 1 .

$\underline{R\text{-Mod}} := R\text{-Mod}$: Kategorie der (Links-) R -Moduln.

Def. 5.1. $\text{Ch}^*(R)$: Kategorie der (kohomologischen) Komplexe über $\underline{R\text{-Mod}}$.

Objekte: $C^\bullet = (C^k, d^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ so dass $\forall k \in \mathbb{Z}: d^k: C^k \rightarrow C^{k+1}$ ein Morphismus in $\underline{R\text{-Mod}}$ ist und $\forall k \in \mathbb{Z}: d^{k+1} \circ d^k = 0$.

Morphismen: $f^\bullet = (f^k)_{k \in \mathbb{Z}}: C^\bullet = (C^k, d^k)_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \bar{C}^\bullet = (\bar{C}^k, \bar{d}^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sind $\forall k \in \mathbb{Z}$: Morphismen $f^k: C^k \rightarrow \bar{C}^k$ so dass $\bar{d}^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d^i$.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Notation: Komplexe} & \cdots & \rightarrow & C^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \rightarrow \cdots \\ & & & \downarrow f^{i-1} & \text{II} & \downarrow f^i & \text{III} \quad \downarrow f^{i+1} \\ \cdots & \rightarrow & \bar{C}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{d}^{i-1}} & \bar{C}^i & \xrightarrow{\bar{d}^i} & \bar{C}^{i+1} \rightarrow \cdots \end{array}$$

Proposition 5.2. $\text{Ch}^*(R)$ ist eine abelsche Kategorie.

Struktur gef. durch:

Addition auf $\text{Hom}_{\text{Ch}^*(R)}(-, -): (f^\bullet + g^\bullet)^i := f^i + g^i$

Null: Nullkomplex $\rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$

Kern: zu $f^\bullet: C^\bullet \rightarrow \bar{C}^\bullet$ definiere Komplex $\ker f^\bullet := (\ker f^i, d^i|_{\ker f^i})_{i \in \mathbb{Z}}$ als Kern zu f^i mit Inklusion nach C^i .

Cokern: dual.

Bemerkung: wg. Prop. 5.2. können von Exaktheit von Diagrammen $\bar{C}^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow \bar{C}^\bullet$ von Komplexen reden, und von kurzen exakten Sequenzen $0 \rightarrow \bar{C}^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow \bar{C}^\bullet \rightarrow 0$ in $\text{Ch}^*(R)$.

Def. 5.3. Sei $C^\bullet = (C^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \text{Ch}^*(R)$. Definiere

$Z^i := Z^i(C^\bullet) := \ker d^i$ (i -Kozykeln) ($Z^i \subseteq Z^j$ wg. $d^i \circ d^{i-1} = 0$)

$B^i := B^i(C^\bullet) := \text{im } d^{i-1}$ (i -Koränder)

$H^i := H^i(C^\bullet) := \frac{Z^i(C^\bullet)}{B^i(C^\bullet)}$ (i -te Kohomologie)

C° heißt exakt oder azyklisch : $\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{Z}: H^i(C^\circ) = 0$.

Für $F: C^\circ \rightarrow \tilde{C}^\circ$ ein Morphismus in $Ch^*(R)$ gelten:

$$f^i(Z^i(C^\circ)) \subseteq Z^i(\tilde{C}^\circ), \quad f^i(B^i(C^\circ)) \subseteq B^i(\tilde{C}^\circ)$$

\leadsto induzierte Abbildungen $H^i(f^\circ): H^i(C^\circ) \rightarrow H^i(\tilde{C}^\circ)$

Proposition 5.4. $\forall i \in \mathbb{Z}: H^i(-): Ch^*(R) \rightarrow {}_R\text{Mod}$ ist ein Funktor.

Bemerkung: Homologische Komplexe: $Ch_*(R)$

$$\text{Objekte: } \dots C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

Z_i, B_i, H_i analog wie oben (z.B. $Z_i = \ker d_i$)

$$\underline{\underline{Homologie}}: Ch^*(R) \xrightarrow{\sim} Ch_*(R): (C^i, d^i) \mapsto (C_i, d_i) \text{ mit } c_i := C^{-i}, d_i := d^{-i}$$

Kohomologie verwendet üblicherweise $Ch^{\geq 0}(R) \subseteq Ch^*(R)$, die Unterkategorie der Komplexe mit $(C^i)^i = 0 \quad \forall i < 0$.
 $(C_i)_i = 0 \quad \forall i > 0$

Lange exakte Sequenzen. Sei $\varepsilon: 0 \rightarrow \tilde{C}^\circ \rightarrow C^\circ \rightarrow \tilde{C}^\circ \rightarrow 0$ $\stackrel{\text{exakt}}{\sim}$ in $Ch^*(R)$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightsquigarrow & 0 \rightarrow C^i & \rightarrow C^i & \rightarrow \tilde{C}^i & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \tilde{d}^i & \cong & \downarrow d^i & \cong & \downarrow \tilde{d}^i \\ & 0 \rightarrow \tilde{C}^{i+1} & \rightarrow C^{i+1} & \rightarrow \tilde{C}^{i+1} & \rightarrow 0 \end{array}$$

schlangenumma

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 \rightarrow \tilde{Z}^i & \rightarrow Z^i & \rightarrow \tilde{Z}^i & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \tilde{C}^{i+1} & \rightarrow C^{i+1} & \rightarrow \tilde{C}^{i+1} & \rightarrow 0 \\ & \tilde{B}^{i+1} & \rightarrow B^{i+1} & \rightarrow \tilde{B}^{i+1} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightsquigarrow & \tilde{C}^i & \rightarrow & C^i & \rightarrow & \tilde{Z}^i & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \tilde{d}^i & \cong & \downarrow d^i & \cong & \downarrow \tilde{d}^i & \\ & 0 \rightarrow \tilde{Z}^{i+1} & \rightarrow Z^{i+1} & \rightarrow \tilde{Z}^{i+1} & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} H^i(\tilde{C}^\circ) \rightarrow H^i(C^\circ) \rightarrow H^i(\tilde{C}^\circ) \\ \delta^i \swarrow \\ H^{i+1}(\tilde{C}^\circ) \rightarrow H^{i+1}(C^\circ) \rightarrow H^{i+1}(\tilde{C}^\circ) \end{array}$$

Satz 5.5. (a) Erhalten Randabbildungen $\delta^i = \delta_\varepsilon^i$ zu ε und lange exakte Kohomologiesequenz
hierbei sind $H^i(\tilde{C}^\circ) \rightarrow H^i(C^\circ)$ bzw. $H^i(C^\circ) \rightarrow H^i(\tilde{C}^\circ)$ die Abb. die durch die Funktoren aus 5.4. gegeben sind.

31

(b) Morphismen von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E} & 0 & \rightarrow & \tilde{C} & \rightarrow & C & \rightarrow \tilde{C}' \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow h^0 & & \downarrow h^1 & \downarrow h^2 \\ \mathcal{E}' & 0 & \rightarrow & \tilde{D} & \rightarrow & D & \rightarrow \tilde{D}' \rightarrow 0 \end{array}$$

(in $\text{Ch}^*(R)$) induzieren Morphismen zwischen den sich ergebenden langen ex. Sequenzen.

$$\left(\text{genauer: } H^i(\tilde{C}') \xrightarrow{\delta_{\mathcal{E}}^i} H^{i+1}(\tilde{C}') \right)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \cong \qquad \downarrow$$

$$H^i(\tilde{D}') \xrightarrow{\delta_{\mathcal{E}'}^i} H^{i+1}(\tilde{D}')$$

Homotopie:Def. 5.6. (a) $f^*: C^* \rightarrow D^*$ in $\text{Ch}^*(e)$ heißt 0-homotop \Leftrightarrow \exists (0-Homotopic) $(s^i: C^i \rightarrow D^{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$ mit s^i Morphismus in $R\text{-Mod}$.so dass $\forall i \in \mathbb{Z}: f^i - 0 = s^{i+1} \circ d_C^i + d_D^{i-1} \circ s^i$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} & \rightarrow & \dots \\ & \swarrow s^i & \downarrow f^i & \searrow s^{i+1} & & & \\ \dots & \rightarrow & D^{i-1} & \longrightarrow & D^i & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

(b) $f^*, g^*: C^* \rightarrow D^*$ in $\text{Ch}^*(R)$ heißen homotop: $\Leftrightarrow f-g$ ist 0-homotop
($f \sim g$)Satz 5.7. (a) \sim ist eine Äquivalenzrelation auf $\text{Hom}_{\text{Ch}^*(R)}(-, -)$ (b) $f^* \sim g^* \Rightarrow H^i(f^*) = H^i(g^*) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$ (c) $\text{id}_C \sim 0 \rightarrow C^*$ ist asyklisch.Bemerkung: "Man" definiert $K^*(R)$ als $\text{Ch}^*(R)/\sim$ (Objekte dieselben, auf den Morphismen bildet man Äquivalenzklassen) $K^*(R)$ ist selten eine abelsche Kategorie (aber immer eine triangulierte Kategorie)(abelsche Kategorie \Leftrightarrow alle Objekte in $R\text{-Mod}$ sind injektiv)

Auflösungen: Why. I injektiv $\Leftrightarrow \text{Hom}_R(-, I)$ exakter Funktor

P projektiv $\Leftrightarrow \text{Hom}_R(P, -)$ exakter Funktor

Sei R eine A -Algebra (A kommutativ!)

$F \in {}_{R \text{Mod}}$ ist A -flach $\Leftrightarrow F \otimes_A -$ ist exakter Funktor

Proposition. (a) ${}_{R \text{Mod}}$ besitzt genügend injektive und genügend projektive

(b) Ist R A -flach, so besitzt ${}_{R \text{Mod}}$ genügend viele A -flache
(alle proj. R -Module sind A -flach)

Bemerkung: Grothendieck-Kategorien besitzen genügend viele injektive.

Def. 5.8. (a) Ein Komplex $I^\bullet \in \text{Ch}^{\leq 0}(R)$ zusammen mit einer Abbildung

$\varepsilon: M \rightarrow I^\bullet$ ($M \in {}_{R \text{Mod}}$) heißt injektive Auflösung von $M: \hookrightarrow$
alle I^i sind injektiv und $0 \rightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \rightarrow \dots$ ist exakt.

(b) Sei $M \in {}_{R \text{Mod}}$. Ein Komplex $P^\bullet \in \text{Ch}^{\leq 0}(R)$ zusammen mit einer Abbildung
 $\varepsilon: P^\bullet \rightarrow M$ heißt projektive Auflösung: \Leftrightarrow alle P^i sind projektiv und
 $\dots \rightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \rightarrow M \rightarrow 0$ ist exakt.

Notation: $p^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M, M \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$

Satz 5.9. (a) Jedes Objekt in ${}_{R \text{Mod}}$ besitzt eine injektive Auflösung.

(b) zu $M \rightarrow M'$ ein Morphismus in ${}_{R \text{Mod}}$ \exists inj. Auflösungen $M \rightarrow I^\bullet, M' \rightarrow I'^\bullet$
und eine Abbildung von Komplexen $\psi: I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$ so dass

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & I^\bullet \\ \downarrow \psi & \nearrow & \downarrow \psi^\bullet \\ M' & \xrightarrow{\quad} & I'^\bullet \end{array}$$

(c) Die Abbildung $\psi: I^\bullet \rightarrow I'^\bullet$ (zu jg. $\psi: M \rightarrow M'$, zu jg. I^\bullet, I'^\bullet) ist eindeutig
bis auf Homotopie.

(d) Es gelten analoge (duale) Aussagen für projektive Auflösungen

Derivierte Funktoren.

Sei $F: \underline{R\text{-Mod}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$ ein additiver Funktor, d.h. die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\underline{R}}(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_{\underline{\text{Ab}}}(FM, FN) \\ \varphi &\mapsto F\varphi \end{aligned}$$

sind \mathbb{Z} -lineare $\forall M, N \in \underline{R\text{-Mod}}$)

• F induziert additiver Funktor $\text{Ch}^*(R) \rightarrow \text{Ch}^*(\mathbb{Z})$

$$(C^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (FC^i, Fd^i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

Def. 5.10. (a) Sei $P^\circ \xrightarrow{\epsilon_M} M$ eine projektive Auflösung und für $\varphi: M \rightarrow M'$ in $\underline{R\text{-Mod}}$ sei $\psi: P^\circ \rightarrow P'^\circ$ Abbildung projektiven Auflösungen wie in 5.9.

Dann definiere $(L_i F)(M) := H^{-i}(FP^\circ)$ $\forall i \geq 0$

$$(L_i F)(\varphi) : (L_i F)(M) \rightarrow (L_i F)(N) = H^{-i}(FP^\circ \xrightarrow{F\psi^\circ} FP'^\circ)$$

(b) Sei $M \xrightarrow{\epsilon} I^\circ$ eine injektive Auflösung, und zu $M \xrightarrow{\epsilon} M'$ sei $I^\circ \xrightarrow{\varphi} I'^\circ$ Abb. von Auflösungen. Definiere

$$(R^i F)(M) := H^i(FI^\circ) \text{ und } (R^i F)(\varphi) := H^i(FI^\circ \xrightarrow{F\varphi^\circ} FI'^\circ)$$

Proposition 5.11. $\forall i \geq 0$ erhält man Funktoren $R^i F, L_i F: \underline{R\text{-Mod}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$

Idee: (a) wähle $\forall M \in \underline{R\text{-Mod}}$ projektive Auflösung $P_M^\circ \xrightarrow{\epsilon_M} M$
und $\forall \varphi$ Morphismen von Modulen

Wissen: \downarrow und $\left(\begin{array}{l} \text{sind homotop} \\ \downarrow \end{array} \right)$

$$\begin{array}{ccc} P_M^\circ & \rightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{M'}^\circ & \rightarrow & M' \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{M''}^\circ & \rightarrow & M'' \end{array}$$

\Rightarrow induz. Abb. $(L_i F)(M) \rightarrow (L_i F)(M')$
s.g. sind dieselben.

Horseshoe Lemma. Ist $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ exakte Sequenz in $\underline{R\text{-Mod}}$, so existiert eine kurze exakte Sequenz von proj. Auflösungen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P'^\circ & \rightarrow & P^\circ & \rightarrow & P''^\circ \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon' & \equiv & \downarrow \varepsilon & \equiv & \downarrow \varepsilon'' \\ 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' \rightarrow 0 \end{array}$$

und von injektiven Auflösungen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' \rightarrow 0 \\ & & \varepsilon'_\downarrow & \equiv & \varepsilon_\downarrow & \equiv & \varepsilon''_\downarrow \\ 0 & \rightarrow & I'^\circ & \rightarrow & I^\circ & \rightarrow & I''^\circ \rightarrow 0 \end{array}$$

Bemerkung. Beweis ist ein Induktionsargument. In jedem Schritt (z.B. projektiv)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & P^0' & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & P^{0''} \\ & \downarrow \text{surj.} & \downarrow \alpha \oplus \bar{\alpha} & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta'' \text{ surj.} \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \\ & & \text{--- --- --- --- --- --- ---} & & & & \text{Hufeisen} \end{array}$$

Bemerkung. Vi: $0 \rightarrow P^{-i'} \rightarrow P^{-i} \rightarrow P^{-i''} \rightarrow 0$ spaltet

$\Rightarrow F(\quad \cdots \quad)$ spaltet, ist also exakt!

$\Rightarrow 0 \rightarrow FP^{-i'} \rightarrow FP^{-i} \rightarrow FP^{-i''} \rightarrow 0$ exakt!!

Satz 5.12. Erhalten lange exakte Kohomologiesequenzen

z.B. $0 \rightarrow R^0 FM' \rightarrow R^0 FM \rightarrow R^0 FM'' \rightarrow R^1 FM' \rightarrow R^1 FM \rightarrow \dots$

(lange exakte Kohomologiesequenz zu $0 \rightarrow FI^{0''} \rightarrow FI^0 \rightarrow FI^{0''} \rightarrow 0$)

F heißt rechtsexakt $\Leftrightarrow \forall$ rechts ex. Sequenzen $M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ ist
 $FM' \rightarrow FM \rightarrow FM'' \rightarrow 0$ rechtsexakt.
 (kovariant)

(analog linksexakt)

Lemma 5.13. (a) F rechtsexakt $\rightarrow L_0 F(M) = M$ (kanonisch)

und $(L_i F)(P) = 0 \quad \forall i > 0$ falls P projektiv

(b) die duale Aussage für F linksexakt: $R^0 F(M)$ und für Injektive.

Beweis. (a) Proj. Auflösung $\dots \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$ (rechtsexakt)

$\xrightarrow{\text{Frchtsexakt}}$ $\dots \rightarrow FP^{-1} \rightarrow FP^0 \rightarrow FM \rightarrow 0$

$\Rightarrow H^0(FP) = \frac{FP^0}{FD^{-1}(FP^{-1})} \stackrel{\substack{\text{kanonisch} \\ \text{via } \varepsilon}}{=} FM.$

(i) Ist P projektiv, so ist $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow P \xrightarrow{id} P$ projektive Auflösung.



Bemerkung. S. F kontravariant, $F: \underline{R\text{-Mod}}^{\text{op}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$

1) $I \in \underline{R\text{-Mod}}$ injektiv $\Leftrightarrow I \in \underline{R\text{-Mod}}^{\text{op}}$ projektiv

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Hom}_{\underline{R\text{-Mod}}}(\cdot, I) \text{ exakt} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{Hom}_{\underline{R\text{-Mod}}^{\text{op}}}(I, \cdot) \text{ exakt} \end{array}$$

2) F linksexakt: $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M''$ in $\underline{R\text{-Mod}}^{\text{op}}$ exakt

$\Rightarrow 0 \rightarrow FM' \rightarrow FM \rightarrow FM''$ in $\underline{\text{Ab}}$ exakt, d.h.:

$M'' \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0$ in $\underline{R\text{-Mod}}$ exakt $\Rightarrow 0 \rightarrow FM' \rightarrow FM \rightarrow FM''$ in $\underline{\text{Ab}}$ exakt

d.h. Für F linksexakt, kontravariant, definiere $(R^iF)(M) := H^i(FP^\circ)$

mit $M \rightarrow P^\circ$ inj. Auflösung in $\underline{R\text{-Mod}}^{\text{op}}$

$\hookrightarrow P^\circ \rightarrow M$ proj. Auflösung in $\underline{R\text{-Mod}}$.

Ext.

$\forall N \in \underline{R\text{-Mod}}: \text{Hom}_R(\cdot, N): \underline{R\text{-Mod}}^{\text{op}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$ ist linksexakt.

$\forall M \in \underline{R\text{-Mod}}: \text{Hom}_R(M, \cdot): \underline{R\text{-Mod}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$ ist linksexakt.

Def. 5.14.

$\cdot \text{Ext}_R^i(\cdot, N) := R^i(\text{Hom}_R(\cdot, N))$ (Auflösung mit projektiven)

$\cdot \overline{\text{Ext}}_R^i(M, \cdot) := R^i(\text{Hom}_R(M, \cdot))$ (Auflösung mit injektiven)

Satz 5.15. (aus 5.12, 5.13)

Ist $0 \rightarrow Q' \rightarrow Q \rightarrow Q'' \rightarrow 0$ in $\underline{R\text{-Mod}}$ exakt, so

\exists lange exakte Sequenz $0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, Q') \rightarrow \text{Hom}_R(M, Q) \rightarrow \text{Hom}_R(M, Q'') \rightarrow \overline{\text{Ext}}_R^1(M, Q') \rightarrow \dots$

\exists lange exakte Sequenz $0 \rightarrow \text{Hom}_R(Q'', N) \rightarrow \text{Hom}_R(Q, N) \rightarrow \text{Hom}_R(Q', N) \rightarrow \text{Ext}_R^1(Q'', N) \rightarrow \dots$

Weiter gelten: $\overline{\text{Ext}}_R^i(M, Q) = 0$ falls Q injektiv und $i \geq 1$.

$\text{Ext}_R^i(Q, N) = 0$ falls Q projektiv und $i \geq 1$.

Bem. $\text{Ext}_R^1(Q, N) = 0 \quad \forall N \in \underline{R\text{-Mod}} \Rightarrow Q$ projektiv (analog $\overline{\text{Ext}}_R^1 \dots$)

Interpretation von $\text{Ext}_R^1(M, N)$ und $\overline{\text{Ext}}_R^1(M, N)$:

Definiere $\text{Ext}_R^1(M, N) := \{ \text{kurze ex. Seq. } \varepsilon: 0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \text{ in } R\text{-Mod} \} / \sim$

wobei $\varepsilon \sim \varepsilon' \iff \exists \text{ komm. Diagramm}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & E & & & \\ & & \downarrow \varphi & \nearrow & & & \\ 0 & \rightarrow & N & \xrightarrow{\quad} & M & \rightarrow & 0 \quad \text{in } R\text{-Mod} \\ & & \downarrow & \searrow & & & \\ & & E' & & & & \end{array}$$

5-Lemma $\Rightarrow \varphi$ Isomorphismus

$\tilde{\sim}$: \sim ist Äquivalenzrelation.

Addition auf $\text{Ext}_R^1(M, N)$: (Bauer, Summer)

Definiere $\varepsilon +_B \varepsilon'$ wie folgt:

$$0 \rightarrow N \oplus N \rightarrow E \oplus E' \rightarrow M \oplus M \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccc} & \downarrow + & \downarrow \pi & \downarrow = & \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & P.O. \rightarrow M \oplus M \rightarrow 0 \\ \uparrow \varphi & \uparrow \pi & \uparrow \pi & \uparrow \Delta = \text{diag.} & \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & P.B. \rightarrow M \rightarrow 0 \end{array}$$

P.O.: Pushout

P.B.: Pullback.

Satz 5.16. (Jacobson BA II, 6.9)

\exists nat. Isomorphismus: $(\text{Ext}_R^1(M, N), +_B) \cong (\text{Ext}_R^1(M, N), +) \cong (\overline{\text{Ext}}_R^1(M, N), +)$

Ausblick: Doppelkomplexe.

Def. Ein Doppelkomplex (in $R\text{-Mod}$) ist ein Tupel

$$C^{\bullet\bullet} = (c^{i,j}, d_h^{i,j}, d_v^{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \quad (\text{s. Weibel H.A.})$$

so dass

$$\forall (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: \quad d_h^{i,j}: c^{i,j} \rightarrow c^{i+1,j}, \quad d_v^{i,j}: c^{i,j} \rightarrow c^{i,j+1} \text{ in } R\text{-Mod}$$

$$\text{erfüllen: } d_h^{i+1,j} \circ d_h^{i,j} = 0 \quad \text{und} \quad d_v^{i,j+1} \circ d_v^{i,j} = 0 \quad \text{und} \quad d_v^{i+1,j} \circ d_h^{i,j} + d_h^{i,j+1} \circ d_v^{i,j} = 0.$$

Darstellung als "Gitter":

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C^{i,j+1} & \xrightarrow{d_h^{i,j+1}} & C^{i+1,j+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow d_V^{i,j} & & \uparrow d_V^{i+1,j} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C^{i,j} & \xrightarrow{d_h^{i,j}} & C^{i+1,j} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

(1) \Rightarrow alle Zeilen sind Komplexe

(2) \Rightarrow alle Spalten sind Komplexe

(3) $\Rightarrow (d_h^{i,j} \cdot (-1)^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ und $(d_V^{i,j} \circ (-1)^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sind Abbildungen von Komplexen in benachbarten Spalten (i und $i+1$) bzw. Zeilen (j und $j+1$)

Def. Der Totalkomplex eines Doppelkomplexes $C^{i,j}$ ist $\text{Tot } C^{\bullet\bullet} := \overline{TC^{\bullet}}$ definiert durch

$$TC^i := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C^{i-j,j} \quad \text{und} \quad d_{TC^i}^i : TC^i \rightarrow TC^{i+1} \quad \text{dabei ist}$$

$d_{TC^i}^i$ ist die Summe (über alle j) der Abbildungen

$$C^{i-j,j} \xrightarrow[d_h^{i-j,j} \oplus d_V^{i-j,j}]{} C^{i-j+1,j} \oplus C^{i-j,j+1} \hookrightarrow TC^{i+1}$$

Wir betrachten hier nur Doppelkomplexe für welche (F) gilt.

(F) $\forall n \in \mathbb{Z}: \#\{(i,j) \mid C^{ij} \neq 0 \text{ und } i+j=n\} < \infty \quad (\Rightarrow \text{Irrelevant ob } \oplus \text{ oder } \prod)$

Def. Ein Morphismus $D^{\bullet} \xrightarrow{f^{\bullet}} D'^{\bullet}$ in $Ch^*(R)$ heißt Quasi-Isomorphismus: \Leftrightarrow

Viz: $H^i(f^{\bullet}) : H^i(D^{\bullet}) \rightarrow H^i(D'^{\bullet})$ ist Isomorphismus.

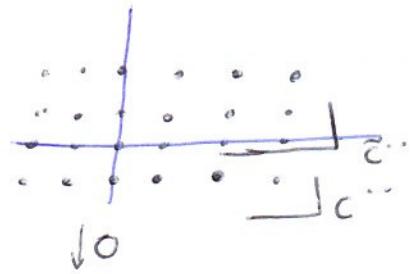
Ü: (a) $\text{Tot} : \underline{\text{abelsche Kategorien}} \text{Ch}^*(R) \rightarrow \text{Ch}^*(R)$ ist ein additiver Funktor abelscher Kategorien.

(b) Gilt (F), so ist Tot exakt und es gilt weiter: Sind alle Zeilen oder alle Spalten in $C^{\bullet\bullet}$ exakt, so ist $\text{Tot } C^{\bullet\bullet}$ exakt.

(c) Gilt in (b) zusätzlich: alle Spalten von $C^{\bullet\bullet}$ exakt und $C^{ij} = 0 \forall j \leq -2$ und ist $\tilde{C}^{\bullet\bullet}$ der Doppelkomplex mit $\tilde{C}^{i,j} := C^{i,j} \forall j \geq 0$ und $\tilde{C}^{i,j} = 0 \forall j < 0$,

Dann ex. ein "natürlicher" Quasi-Isomorphismus

$$\text{Tot } \tilde{C} \leftarrow (\tilde{C}^{j,-1})_{j \in \mathbb{Z}} \text{ in } \text{Ch}(R)$$



Beispiel: $M, N \in {}_R\text{Mod}$.

$$P^\circ \rightarrow M \quad \text{proj. Auflösung} \quad (\dots \rightarrow P^{-2} \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$$

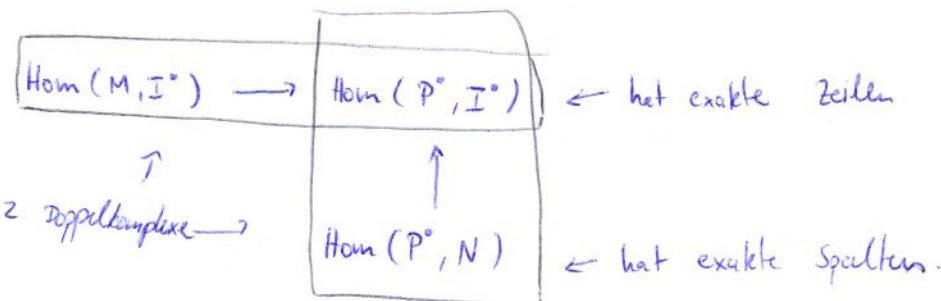
$$N \rightarrow I^\circ \quad \text{inj. Auflösung} \quad (0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots)$$

$C^{\circ, \circ} := \text{Hom}(P^\circ, I^\circ)$ ist ein Doppelkomplex!

$$C^{i,j} = \text{Hom}_R(P^{-i}, I^j) \longrightarrow C^{i+1,j} = \text{Hom}_R(P^{-i-1}, I^j)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \varphi \\ \downarrow d_I^{-j} \circ \varphi \end{array} \quad \varphi \mapsto \varphi \circ d_P^{-i-1} \circ (-1)^j$$

$$C^{i,j+1} = \text{Hom}_R(P^{-i}, I^{j+1})$$



$$\hat{u}(c) \Rightarrow \text{Hom}(M, I^\circ) \rightarrow \text{Tot}(\cdot \text{Hom}(P^\circ, I^\circ))$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}^i(M, N) & \xrightarrow{\quad \downarrow \quad} & \text{Hom}(P^\circ, N) \\ & & \uparrow \end{array} \quad \text{sind Quasi-Isomorphismen}$$

$$\sim \overline{\text{Ext}}^i(M, N)$$

$$\rightarrow \overline{\text{Ext}}^i(M, N) \cong \overline{\text{Ext}}^i(M, N).$$

Erweiterung: $0 \rightarrow Q' \rightarrow Q \rightarrow Q'' \rightarrow 0$ exakt in ${}_R\text{Mod}$ und

$0 \rightarrow I'^* \rightarrow I^* \rightarrow I^{**} \rightarrow 0$ exakte seq. von injektiven Auflösungen (horseshoe lemma)
erhalten Morphismen von kurzen exakten Sequenzen von Komplexen!

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, I^{(0)}) \rightarrow \text{Hom}(M, I^{(1)}) \rightarrow \text{Hom}(M, I^{(2)}) \rightarrow 0$$

$\downarrow f\text{-iso}$
 $\uparrow g\text{-iso}$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(P^*, Q') \rightarrow \text{Hom}(P^*, Q) \rightarrow \text{Hom}(P^*, Q'') \rightarrow 0$$

→ Isomorphismus layer ex. Kohomologiesequenzen.

Satz 5.17. $\forall i \geq 0: \forall M, N \in {}_R\text{Mod}: \exists$ in (M, N) funktorielle Iso's

$\text{Ext}^i(M, N) \xrightarrow{\sim} \overline{\text{Ext}}^i(M, N)$ und die bilden ex. Kohomologiesequenzen

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^i(M, N') \rightarrow \text{Ext}^i(M, N) \rightarrow \text{Ext}^i(M, N'') \rightarrow \text{Ext}^{i+1}(M, N') \rightarrow \dots$$

$\downarrow z \quad \cong \quad \downarrow z \quad \cong \quad \downarrow z \quad \cong \quad \downarrow z$

$$\dots \rightarrow \overline{\text{Ext}}^i(M, N') \rightarrow \overline{\text{Ext}}^i(M, N) \rightarrow \overline{\text{Ext}}^i(M, N'') \rightarrow \overline{\text{Ext}}^{i+1}(M, N') \rightarrow \dots$$

Tor. A kommutativer Ring, $A \rightarrow R$ eine A-Algebra und R sei A-flach.

Wissen:
Die Funktoren ${}_R\text{Mod} \rightarrow {}_R\text{Mod}$: $M \otimes_A -$, $- \otimes_A N$ sind rechtsexakt.

Def. 5.18. $\text{Tor}_i^A(M, -) := L_i(M \otimes_A -)$

$\overline{\text{Tor}}_i^A(-, N) := L_i(- \otimes_A N)$

Satz 5.19. (i) Erhalten lange ex. Sequenz in beiden Argumenten

(ii) $Q \in {}_R\text{Mod}$ ist A-flach $\Leftrightarrow \forall i \geq 1: \text{Tor}_i^A(Q, N) = 0 \quad \forall N \in {}_R\text{Mod}$
 $\Leftrightarrow \forall N \in {}_R\text{Mod}: \text{Tor}_1^A(Q, N) = 0$

(iii) $\text{Tor}_i^A \cong \overline{\text{Tor}}_i^A$ (nat. isomorph)

06. GRUPPEN KOHOMOLOGIE

G Gruppe, $\mathbb{Z}[G]$ Gruppenring zu G , d.h.

$$\mathbb{Z}[G] := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}[g] \quad (\text{freier } \mathbb{Z}\text{-Modul mit Basis } G)$$

als additive Gruppe.

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) := \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} a_h b_{h^{-1}g} \right) g$$

$\mathbb{Z}[G]$ ist eine \mathbb{Z} -Algebra, 0 klar, $1 = 1 \cdot e$.

Def. 6.1. Ein G -Modul ist ein (links) $\mathbb{Z}[G]$ -Modul.

Schreibe $\text{Hom}_G(\cdot, \cdot)$ für $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\cdot, \cdot)$, $\underline{G\text{-Mod}}$ für $\underline{\mathbb{Z}[G]\text{-Mod}}$ (manchmal auch $\underline{\text{Mod}}_G$, $\underline{\text{Mod}}_{\mathbb{Z}[G]}$)

Allgemein: M trägt \mathbb{Z} -lineare Links-Operationen von G :

$$\cdot : G \times M \rightarrow M, \text{ diese erfüllt } g(m_1 + m_2) = gm_1 + gm_2$$

Def. 6.2. Ein G -Modul M heißt trivial : $\Leftrightarrow \forall g \in G: \forall m \in M: g \cdot m = m$.

Bsp: Schreibe \mathbb{Z} (auch) für den trivialen G -Modul.

Lemma 6.3. Sei $\varepsilon := \varepsilon_G : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$, $\sum_j a_j g \mapsto \sum_j a_j$ die Augmentationssubstitution.

Dann ist $I_G := \ker \varepsilon_G$ das Augmentationsideal. Es ist ein freier \mathbb{Z} -Modul mit Basis

$$B = \{g^{-1} \mid g \in G \setminus \{e\}\}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} B \subset \text{ker } \varepsilon &: \checkmark \quad \underline{B \text{ ES von } I_G}: \quad x = \sum_j a_j g \in I_G \Leftrightarrow \sum_j a_j = 0 \Leftrightarrow x = x - 0 \cdot 1 \\ &= \sum_j a_j (g^{-1}) \end{aligned}$$

Def. 6.4. Sei M ein G -Modul.

(i) $M^G := \{m \in M \mid \forall g \in G: gm = m\}$ der Untermodul der G -Invarianten von M .

(ii) $M_G := \frac{M}{I_G M}$ der Faktormodul der G -Kovarianten von M .

Bemerkung: (i) $(*) \text{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \cong M^G$ ($\varphi \mapsto \varphi(1)$)

(ii) $(***) M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \cong \frac{M}{I_G M} = M_G$.

Funktorien $\underline{G\text{-Mod}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$

41

Nachtrag zu ④: $A \rightarrow R$, $\text{Tor}_i^A(M, N)$ (\otimes_A) behandelt

2. Möglichkeit für Tor_i zu ④: vorwende \otimes_R

$$R^{\text{op}} \underline{\text{Mod}} \times R \underline{\text{Mod}} \rightarrow \underline{\text{Ab}} \quad (\text{bifunktoren}) \quad \text{Bew: } R^{\text{op}} \underline{\text{Mod}} \cong \underline{\text{Mod}}_R.$$

$$\text{Erhalten: } \text{Tor}_i^R(M, N) = L_i(- \otimes_R N)(M) \stackrel{\text{Thm.}}{=} (L_i(M \otimes_R -))(N). \quad ? \text{ Rechtsmoduln}$$

Es gelten analoge Aussagen zu 5.19.

Proposition. $\underline{\mathbb{Z}[G]} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{Z}[G]^{\text{op}}} \underline{\text{Mod}} = \underline{\mathbb{Z}[G]^{\text{op}} \text{Mod}}$ ist ein Isomorphismus von Kategorien unter folgendem Funktor.

$$(M, \cdot : G \times M \rightarrow M) \mapsto (M^{\vee}, \circ^{\vee} : M \times G \rightarrow M, (m, g) \mapsto g^{-1}m)$$

Bsp. Sei $N_G := \sum_{j \in G} j$, falls G endlich, $N_G = 0$ sonst. Dann:

$$(a) \quad \underline{\mathbb{Z}[G]}^G = \mathbb{Z} \cdot N_G \quad (b) \quad \underline{\mathbb{Z}[G]}_G \cong \mathbb{Z} \quad \text{via Argumentationsabstraktionsabb.}$$

Gruppen (Ko-)Homologie.

Sei M ein G -Modul.

$$\text{Def. 6.5. } H^i(G, M) := \text{Ext}_{\underline{\mathbb{Z}[G]}}^i(\mathbb{Z}, M) \stackrel{(*)}{=} (R^i(-)^G)(M)$$

$$H_i(G, M) := \text{Tor}_i^{\underline{\mathbb{Z}[G]}}(\mathbb{Z}, M) \stackrel{(**)}{=} (L_i(-)_G)(M)$$

Können Kohomologischen Formalismus von Ext und Tor auf $H^i(G, \cdot)$ und $H_i(G, \cdot)$ anwenden...

Explizite Beschreibung: (nur für Kohomologie)

Für $i \geq 0$ sei $\underline{\mathbb{Z}[G^{i+1}]}$ ein G -Modul durch $g \cdot (g_0, \dots, g_i) := (g_0, \dots, gg_i)$

Lemma 6.6. $\underline{\mathbb{Z}[G^{i+1}]}$ ist ein freier $\mathbb{Z}[G]$ -Modul mit Basis $\{(g_0, \dots, g_i) \mid (g_0, \dots, g_i) \in G^i\}$

Lemma 6.7. Der Komplex Std_G in $\text{Ch}^*(\underline{\text{Mod}})$

$$\underline{\mathbb{Z}[G^{i+1}]} \xrightarrow{d^i} \underline{\mathbb{Z}[G^i]} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{\mathbb{Z}[G^2]} \rightarrow \underline{\mathbb{Z}[G]} \rightarrow 0 \quad \text{mit}$$

$-1 \quad 0$

$$d^{i+1} \circ d^i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (\text{ii in Vorzeichen})$$

zusammen mit $\epsilon: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$ ist eine projektive Auflösung von \mathbb{Z} (abstrakter G -Modul!).

Beweis.

$$d^{i+1} \circ d^i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (\text{ii in Vorzeichen})$$

Auflösung: Zeige dazu $\text{Std}_G: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ ist nullhomotop.

Zeige dazu dass die Abb'ien $s^{-i}: \mathbb{Z}[G^{i+1}] \rightarrow \mathbb{Z}[G^i]$, $(g_0, \dots, g_i) \mapsto (1, g_1, \dots, g_i)$ ($i \in \mathbb{Z}$) eine Nullhomotopie ist.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}[G^{i+1}] & \xrightarrow{\quad d^{-i} \quad} & \mathbb{Z}[G^i] & \xrightarrow{\quad} & \dots \\ & \searrow s^{-i} & \downarrow \text{id} & \swarrow s^{-i+1} & & & \\ \mathbb{Z}[G^i] & \xrightarrow{\quad d^{-i+1} \quad} & \mathbb{Z}[G^{i+1}] & \xrightarrow{\quad} & \dots & & \end{array}$$

$$\text{id}_{\mathbb{Z}[G^{i+1}]} = d^{-i+1} \circ s^{-i} + s^{-i+1} \circ d^{-i}$$

Bar-Auflösung: Es gilt: $\text{Bar}_G = \text{Std}_G$.

Lemma 6.7.b. (ii) (a) Die Elemente $[g_1 \mid \dots \mid g_i] := (1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 g_2 \dots g_{i-1} g_i)$ für $(g_1, \dots, g_i) \in G^i$ bilden eine $\mathbb{Z}[G]$ -Basis von $\mathbb{Z}[G^i]$.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} d^{-i} [g_1 \mid \dots \mid g_i] &= g_1 [g_2 \mid \dots \mid g_i] + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j [g_1 \mid \dots \mid \hat{g_j} \mid g_j g_{j+1} \mid g_{j+2} \mid \dots \mid g_i] \\ &\quad + (-1)^i [g_1 \mid \dots \mid g_{i-1}]. \end{aligned}$$

Für $M \in \underline{G\text{-Mod}}$ gilt: $H^i(G, M) = H^i(\underbrace{\text{Hom}_G(\text{Bar}_G, M)}_{\text{in } \text{Ch}^*(\mathbb{Z})}, ?)$

Beh.:

$$\text{Hom}_G(\text{Bar}_G^{-i}, M) \xleftarrow[\sim]{\phi} \text{Abb}(G^i, M) =: C^i(G, M) \quad \text{ist } \mathbb{Z}\text{-linearer Isomorphismus.}$$

$$f = \phi(f) \quad \longleftrightarrow \quad f \quad \text{Dabei: } G^0 := \{e\}.$$

mit $f([g_1 \mid \dots \mid g_i]) := g_1 \cdot f(g_1, \dots, g_i)$.

43

Erhalten: induzierte Differentiale $\bar{d}^i : C^i(G, M) \rightarrow C^{i+1}(G, M)$

$$f \longmapsto (\phi^{-1} \circ \bar{d}^i \circ \phi)(f)$$

explizit: $(\bar{d}^i f)(g_0, \dots, g_i) = g_0 f(g_1, \dots, g_i) + \sum_{j=1}^i (-1)^j f(g_0, \dots, \hat{g}_j, g_j g_{j+1} \dots g_{i-1}, g_i)$

(ii). $+ (-1)^{i+1} f(g_0, \dots, g_{i-1})$.

Def. $Z^i(G, M) := \ker \bar{d}^i$, $B^i(G, M) := \text{im } \bar{d}^{i-1}$

$$\bar{H}^i(G, M) := \frac{Z^i(G, M)}{B^i(G, M)}$$

Für $M \rightarrow M'$ G -Modul-Homomorphismus erhalten $C^i(G, M) \rightarrow C^i(G, M') \rightsquigarrow \bar{H}^i(G, M) \rightarrow \bar{H}^i(G, M')$

Proposition 6.8. . Erhalten Kettenkomplexe $(C^i(G, M), \bar{d}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$

- Haben natürliche Isomorphismen (nach Wahl von Basis_G)

$$H^i(G, M) \xrightarrow{\sim} \bar{H}^i(G, M) \quad + \text{ Funktionalität für } M \rightarrow M'$$

Proposition 6.9. + Kompatibilität für lange exakte Sequenzen

Beweis. obige Übereinstimmungen + 5.17. □

Übung 6.10.

- $\bar{H}^0(G, M) = Z^0(G, M) = M^G$ (Randabb.: $m \mapsto g m - m$)

- $Z^1(G, M) = \{f: G \rightarrow M \mid f(gh) = g f(h) + f(g) \quad \forall g, h \in G\}$

- Ist M trivial als G -Modul, so gilt $B^1(G, M) = 0$. und folglich

$$\bar{H}^1(G, M) = \text{Hom}_{G\text{-Ab}}(G, M) = \text{Hom}_{\text{Ab}}(G^G, M)$$

Gruppenextensionen.

$$1 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1 : \text{Erweiterung von } G \text{ um } A$$

abelscher
Normalteiler

$\Rightarrow A$ ist G -Modul via Konjugation.

$$\left\{ \text{Erweiterung von } G \text{ um } A \right\} \cong H^2(G, A).$$

Wirkliche Erw.: sind die semidirekten Produkte.

"triviale Erw." ? \leftarrow \leftarrow 0

Induzierte Module & Shapiro's Lemma.

Def. 6.11. $H \leq G$ Untergruppe, B ein H -Modul.

$$\text{Ind}_H^G(B) := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} B ; \quad \text{Colnd}_H^G(B) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], B) \in {}_G\text{Mod}$$

$$\text{mit } g(x \otimes b) := g x \otimes b \text{ sowie } (gf)(x) := f(xg)$$

heißen induzierte bzw. koinduzierte Darstellungen zu B von H auf G .

Lemma 6.12. Sei $(-)|_H := \text{Res}_G^H : {}_G\text{Mod} \rightarrow {}_H\text{Mod}$ der Restriktionsfunktor. Dann gilt:

$$(a) \quad \text{Ind}_H^G \rightarrow \text{Res}_G^H \quad (b) \quad \text{Res}_G^H \rightarrow \text{Colnd}_H^G$$

Beweis.

Adjunktion von \otimes und Hom :

$$\text{Hom}_R(RL_S \otimes_S sM, _R N) \cong \text{Hom}_S(sM, \text{Hom}_R(RL_S, _R N))$$

$$\text{sonst } R \otimes_R M \cong M \cong \text{Hom}_R(R, M) \text{ für:}$$

$$(a) \quad RL_S = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[H], \quad \mathbb{Z}[H]M = B, \quad \mathbb{Z}[G]N = A.$$

(b) andere Wahl...

Bemerkung 6.13. $H \leq G$ Untergruppe $\Rightarrow \text{Std}_G$ ist proj. Auflösung von \mathbb{Z} als H -Modul. D.h.:

$$\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{g \in H \backslash G} g\mathbb{Z}[H] \text{ ist freier } \mathbb{Z}[H]\text{-Modul.}$$

Satz 6.14. (Shapiro's Lemma) $H \leq G$ Untergruppe

$$\forall i \geq 0 \exists \text{ Isom'ien } H_i(G, \text{Ind}_H^G(B)) \cong H_i(H, B) \text{ und } H^i(G, \text{Colnd}_H^G(B)) \cong H^i(H, B)$$

(funktoriell im Argument B).

Beweis.

$$\begin{aligned} H_i(G, \text{Ind}_H^G(B)) &\cong H^{-i}(\text{Std}_G \otimes_G \text{Ind}_H^G B) \cong H^{-i}(\text{Std}_G \otimes_G (\mathbb{Z}[G] \otimes_H B)) \\ &\cong H^{-i}(\underbrace{\text{Std}_G|_H \otimes_H B}_{6.13.}) = H_i(H, B). \end{aligned}$$

proj. Auflösung
von \mathbb{Z} als H -Modul

$$H^i \text{ analog; verwendet 6.12 und 6.13!} \quad (\dots = H^i(\text{Hom}_H(\text{Std}_G, \text{Colnd}_H^G B)) \stackrel{6.12}{=} H^i(\text{Hom}_H(\text{Std}_G|_H, B)) = \dots)$$

45

Lemma 6.15. Ist $H \leq G$ nach endlichem Index, so ist

$$\chi: \text{Colnd}_H^G B \rightarrow \text{Ind}_H^G B, \varphi \mapsto \sum_{g \in H^G} g^{-1} \otimes \varphi(g)$$

ein wohldefinierter G -Modulisomorphismus.

Beweis.

• prüfe: χ ist wohldefiniert.

$$\bullet \text{ G-Modulhomomorphismus: } \check{\varphi} \left(\frac{\varphi(gg')}{g} \right) \rightarrow g = \tilde{g}(g'^{-1})$$

• Für Iso: Inverse Abbildung:

$$\beta = \sum_{j \in H} j^{-1} \otimes b_j \mapsto f_\beta : \begin{cases} \mathbb{Z}[G] \rightarrow B \\ g \mapsto b_g \end{cases} \text{ und } H\text{-äquivariant.}$$

■ als Repräsentantenkonsystem

Def. 6.16. Ein G -Modul M heißt induziert: $\Leftrightarrow \exists X \in \text{Ab}$ (als $\mathbb{Z}[e_G]$ -Modul):

$$M \cong \text{Colnd}_{\mathbb{Z}[e]}^G X = \left\{ \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X \right\}$$

25.05.18

Nachtrag:

$$\left(\underbrace{\mathbb{Z}[G]}_{=: M}, \cdot : M \times G \rightarrow M \right) \cong \left(\underbrace{\mathbb{Z}[G]}_{=: M}, \cdot : M \times G \rightarrow M \right) \text{ als rechts-Moduln}$$

$$(m, g) \mapsto g^{-1}m \quad (m, g) \mapsto m \cdot g$$

$$\sum_j a_j gg \mapsto \sum_j a_j g^{-1}$$

$$f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[e]}(\mathbb{Z}[G], N) \quad (gf)(x) = f(xg) \quad (f \text{ erfüllt } f(hx) = hf(x))$$

alternativ $(gf)(x) = f(g^{-1}x) \quad (f \text{ erfüllt } f(xh^{-1}) = hf(x))$

Bemerkung: $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X \cong \text{Ind}^G X$ als G -Modul

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} X \cong \text{Colnd}^G X$$

Def. 6.17. Ein G -Modul A heißt G -(Ko-)zyklisch: $\Leftrightarrow H_i^i(G, A) = 0 \forall i > 0$

Bemerkung: $H_i^i(\{e\}, M) = H_i(\{e\}, M) = \begin{cases} M, & i=0 \\ 0, & i>0 \end{cases}$, denn:

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Z}, M) = 0 \quad \forall i > 0, \quad \text{projektiv}$$

$$\text{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) = 0 \quad \forall i > 0, \quad \text{projektiv}$$

Korollar 6.18. (zu Shapiro + Bew.)

(Ko-)induzierte Module sind (Ko-)azyklisch.

Beweis. (z.B. Ko-)

$$H^i(G, \text{Colind}^G M) \stackrel{\text{Shap.}}{\equiv} H^i(\text{Te3}, M) \rightarrow$$

■

Bemerkung. Mit (Ko)azyklischen Auflösungen kann man (Ko-)Homologie berechnen!

Skizze:

$$\begin{array}{ccc} \text{azykl.} & \longrightarrow A \longrightarrow M & \\ \text{Aufl.} & \uparrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{quasiiso.} \\ P^\circ \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{c} A \xrightarrow{\text{Aufl.}} M \\ \uparrow \\ \text{Tot P} \end{array} \\ \uparrow & & \end{array}$$

Doppelkomplex, Spaltenweise Auflösung von A.

$$(F = \mathbb{Z} \otimes_G -)$$

$F \mathbf{P} \rightarrow F \mathbf{A}$ - Spaltenweise exakt, da die A^{-i} azyklisch!

$$\Rightarrow \begin{array}{cc} F \mathbf{A} & F \mathbf{A} \text{ berechnet} \\ \uparrow \text{quasi-iso} & \uparrow \text{Homologie} \\ \text{Tot } F \mathbf{P} = F(\text{Tot P}) & \leftarrow \text{Berechnet Homologie} \end{array}$$

Tate Kohomologie Sei G eine endliche Gruppe.

Sei $P^\circ \rightarrow \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung, mit P^{-i} endl.-erz. über $\mathbb{Z}[G]$ (\Rightarrow über \mathbb{Z} , da G endlich)

Lemma 6.19. Sei M ein endl.-erz., projektiver $\mathbb{Z}[G]$ -Modul, $N \in {}_G \text{Mod}$. Dann:

- (a) $M^* := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ mit $(g\varphi)(m) := \varphi(g^{-1}m)$ ist endl.-erz., projektiver $\mathbb{Z}[G]$ -Modul.
- (b) $\psi: M \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M^*, N)$, $m \otimes n \mapsto (f_m)_n: \varphi \mapsto \varphi(m) \cdot n$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}[G]$ -Modulen.
- (c) Man hat Isomorphismen $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \xrightarrow{(*)} (M \otimes_{\mathbb{Z}} N)^G \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(M^*, N)$ (von ab. Gruppen!)

wobei (*) $m \otimes n \mapsto \sum_{g \in G} g^{-1}m \otimes gn$ und M in $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ ist ein rechts- G -Modul durch $m \cdot g := g^{-1}m$

Bem. G -op. in (b) ist gegeben durch $(gf)(\varphi) = g f(g^{-1}\varphi)$

Beweis. (a) M^* ist ein G -Modul.

$$(a) \text{ Falls } M = \mathbb{Z}[G]: \quad \mathbb{Z}[G]^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) = \text{Colind}^G \mathbb{Z} \cong \text{Ind}^G \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[G]$$

verwende
Nachtrag

47

$$\underline{M \text{ beliebig:}} \quad M \oplus M' \cong \mathbb{Z}[G]^r \quad (r \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad M^* \oplus (M')^* \cong \mathbb{Z}[G].$$

$\Rightarrow M^*$ projektiv.

$$(b) \text{ G-Operation: } g(m \oplus n) = gm \oplus gn, \quad (gf)(y) = g \cdot f(g^{-1}y)$$

$$\underline{\text{G-equivariant}}: \quad \psi(g(m \otimes n))(\varphi) = \psi(gm \otimes gn)(\varphi) = \psi(gm) \cdot gn \parallel -(\hbar \varphi)(gm) = \varphi(\hbar^{-1}m)$$

$$\begin{aligned} (g \cdot \Psi(m \otimes n))(\varphi) &= g(\Psi(m \otimes n))(\underbrace{j^{-1}\varphi}_{\in \mathbb{Z}}) = g(\underbrace{j^{-1}\varphi}_{\in \mathbb{Z}})(m) \cdot n \\ &= \varphi(gm) \cdot (jn) \end{aligned}$$

Isomorphismus: genügt als \mathbb{Z} -Modul. Beobachtung: M endl.-erz. projektiv $\Leftrightarrow \mathbb{Z}[G]$
 $\Rightarrow M$ proj. erz. $\Leftrightarrow \mathbb{Z} \Leftrightarrow M = \mathbb{Z}$... klar.
 G endl.

(c) Zeige nur Isom. unter, rechts folgt aus (b) und $(-)^6$.

$$M = \mathbb{Z}[G]: \quad (\ddot{u})$$

$$\text{Verwende } \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \xrightarrow{\sim} N \rightarrow (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} N)^G$$

$$n \mapsto \sum_{g \in G} j^* \otimes g n$$

Korollar 6.20. (a) Dualisieren von $P \xrightarrow{\epsilon} Z$ liefert einen exakten Komplex $Z \xrightarrow{\epsilon^*} P^{**}$. (alle $(P^i)^*$ sind proj., exakt, nach 6.19.)

$$(b) \quad H_i(G, M) = H^{-i}(\text{Hom}_G(P^+, M)) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: (a) $P \rightarrow \mathbb{Z}$ ist ein exakter Komplex freier \mathbb{Z} -Moduln

$$(b) \quad \text{Hom}_G(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P^{-i}, \mathbb{Z}), M) \stackrel{\text{Lemma (c)}}{\cong} P^{-i} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \quad (\text{Abbildungen wie erwartet } ii)$$

Tate:

Definire $Q \in \text{Chi}(\mathbb{Z}[G])$ abr

$$P \xrightarrow{\epsilon} P^*$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \sim \rightarrow p^{-2} \rightarrow p^{-1} \rightarrow p^0 \rightarrow (p^0)^* \rightarrow (p^1)^* \rightarrow (p^{-2})^* \rightarrow \dots & & & & & & \text{exakter Komplex proj. endl. erz.} \\ & \swarrow & \searrow & & & & \\ & \varepsilon & \varepsilon^* & & & & \\ & \downarrow & \downarrow & & & & \\ 0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \xrightarrow{\varepsilon^*} & & & & \\ & & & & & & \leftarrow \text{wählen.} \end{array}$$

Definition 6.21. $\hat{H}^i(G, M) := H^i(\text{Hom}_G(O, M))$ ist die i -te Tate Kohomologie

Proposition 6.22.

$$(a) \quad \hat{H}^i(G, M) = H^i(G, M), \quad i \geq 1$$

$$(b) \quad \hat{H}^{-i-1}(G, M) = H_i(G, M), \quad i \geq 1$$

(c) $N_G M := \ker(N_G : M \rightarrow M, m \mapsto \sum_{j \in G} jm)$. Dann ex. 4-Term exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \hat{H}^{-1}(G, M) \rightarrow H_0(G, M) \rightarrow H^0(G, M) \rightarrow \hat{H}^0(G, M) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \frac{N_G M}{I_G M} \rightarrow M_G = \frac{M}{I_G M} \xrightarrow{N_G \cdot -} M^G \rightarrow \frac{M^G}{N_G M} \rightarrow 0$$

Beweis.

(a) ✓ nach Def.

(b) ✓, Korollar 6.20

(c) Sei $C = \text{Hom}_G(O, M)$ ($\in \text{Ch}^*(\mathbb{Z})$)

$$\begin{array}{ccccccc}
C^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & C^{-1} & \xrightarrow{\delta^{-1}} & C^0 & \xrightarrow{d^0} & C^1 \\
& & \parallel & & \searrow & & \\
& & \text{colim } d^{-2} & & & & \text{ker } d^0 = M^G \\
& & \cong M_G & & & & \cong z^0(C) \\
& & \text{Ker!} & & & & \\
& & \text{Im } d^{-2} = I_G M & & & & \\
& & \downarrow & & \uparrow & & \\
& & M & & M & & \\
& & \downarrow & & \uparrow & & \\
& & M_G & \dashrightarrow & M^G & & \\
& & \text{colim } \delta^{-1} & & \text{colim } d^0 & & \text{colim } \delta^1 \\
& & \cong \frac{C}{\beta^{-1}} & \dashrightarrow & \cong \frac{C^0}{\beta^0} & \rightarrow & \cong H^0(C) \rightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\overline{\delta}^{-1} : M \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M)^G \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]^+, M) \xrightarrow{\oplus} \text{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], M) \\
m \mapsto 1 \otimes m \mapsto \sum_j j^{-1} \otimes jm \xrightarrow{\sim} (y \mapsto \sum_j \psi(y^{-1})jm) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \\
\oplus : \text{Hom}_G(\mathbb{Z}^+ \otimes M) \quad \left(h \mapsto \sum_j \psi(j^{-1})jm \right) M \\
= N_G M
\end{array}$$

$$\varepsilon^* \circ \varepsilon : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G]^*, \quad j \mapsto (\varphi_j : h \mapsto 1)$$

$$\Rightarrow \overline{\delta}^{-1} = (N_G \cdot -)$$

4.9

Korollar 6.23.

(a) Die Tate-Kohomologie assoziiert zu jeder kurzen exakten Sequenz eine lange ex. Kohomologiesequenz + Morphismen zw. Abb.'en kurzer ex. seq.

(b) $M = \text{Colnd}_H^G N \rightarrow \hat{H}^i(G, M) \cong \hat{H}^i(H, N)$ (shapiro) Funktoriell in M

(c) $G = \mathbb{Z}/3 \Rightarrow \hat{H}^i(G, M) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

(d) M induzierter G -Modul (oder Colnd) $\Rightarrow \hat{H}^i(G, M) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis.

(a) $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0 \rightsquigarrow 0 \rightarrow \text{Hom}_G(\mathbb{Q}, M') \rightarrow \text{Hom}_G(\mathbb{Q}, M) \rightarrow \text{Hom}_G(\mathbb{Q}, M'') \rightarrow 0$
exakt, da $\mathbb{Q}^i \mathbb{Z}[G]$ -projektiv
etc.

$$(b) \text{Hom}_G(\mathbb{Q}, \text{Colnd}_H^G N) \xrightarrow{\text{Adj.}} \text{Hom}_H(\text{Res}_G^H \mathbb{Q}, N)$$

(rein formal an) \rightarrow ein proj. Kplx. für Tate-Kohomologie von H
def.

und $\text{Res}_G^H \mathbb{Z}[G]$ ist ein freier endl. erz. $\mathbb{Z}[H]$ -Modul

$$(c) \text{Nur } i=0,1 \text{ interessant:} \quad \begin{array}{ccc} M_0 & \xrightarrow{\text{Res}_G^H} & M^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{H}^{-1} = H^0 = 0 \\ \text{H}^1 = H^0 = 0 \end{array} \right\}$$

(d) folgt aus (b) + (c).

□

Dimensionsverschiebung $H \leq G$ Untergruppe.

Lemma 6.24. Sei $A \in {}_G\text{Mod}$, $B \in {}_H\text{Mod}$. Dann existieren funktorielle Isomorphismen

$$(a) \text{Colnd}_H^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong \text{Colnd}_H^G (B \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Res}_G^H A)$$

$$(b) A \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Ind}_H^G B \cong \text{Ind}_H^G (\text{Res}_G^H A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

Beweis.

(a) $\text{Colnd}_H^G (B \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Res}_G^H A) = \text{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Res}_G^H A)^Y$ 29.05.18
 $\text{für } f \circ Y \rightarrow (gf)(g) = f(g'g)$ $\phi: x \rightarrow y$
 $h \cdot (b \otimes a) = hb \otimes ha$

$$\text{Colnd}_H^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A = \text{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B) \otimes_{\mathbb{Z}} A = \text{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B \otimes_A \text{Res}_G^H A) = X$$
 $h \cdot (b \otimes a) = hb \otimes a$

$$h \circ_2 (b \otimes a) = b \otimes ha$$

$$\text{Für } f \in X \rightarrow (g \cdot f)(g') = g \circ_2 f(g'g)$$

4.9

Korollar 6.23.

(a) Die Tate-Kohomologie assoziiert zu jeder kurzen exakten Sequenz eine lange ex.
Kohomologiesequenz + Morphismen zw. Abb.'en kurzer ex. seq.

(b) $M = \text{Colnd}_{\mathbb{H}}^G N \rightarrow \hat{H}^i(G, M) \cong \hat{H}^i(\mathbb{H}, N)$ (shapiro) Funktoriell in M

(c) $G = \{e\}$ $\Rightarrow \hat{H}^i(G, M) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

(d) M induzierter G -Modul (oder Colnd) $\Rightarrow \hat{H}^i(G, M) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis.

(a) $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0 \rightsquigarrow 0 \rightarrow \text{Hom}_G(\mathbb{Q}, M') \rightarrow \text{Hom}_G(\mathbb{Q}, M) \rightarrow \text{Hom}_G(\mathbb{Q}, M'') \rightarrow 0$
exakt, da
 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}[G]}$ -projektiv
etc.

$$(b) \text{Hom}_G(\mathbb{Q}, \text{Colnd}_{\mathbb{H}}^G N) \xrightarrow{\text{Adj.}} \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\text{Res}_{\mathbb{H}}^G \mathbb{Q}, N)$$

(rein formal an) \rightarrow ein proj. Kplx. für Tate Kohomologie von \mathbb{H}
def.

und $\text{Res}_{\mathbb{H}}^G \mathbb{Z}[G]$ ist ein freier endl. erz. $\mathbb{Z}[\mathbb{H}]$ -Modul

$$(c) \text{Nur } i=0,1 \text{ interessant} \quad \begin{array}{ccc} M_0 & \xrightarrow{\text{N}_G} & M^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{I}_G} & M \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} H^{-1}=H^0=0 \\ H^1=H^2=0 \end{array} \right\}$$

(d) folgt aus (b) & (c).

□

Dimensionsverschiebung. $H \leq G$ Untergruppe.

Lemma 6.24. Sei $A \in {}_G\text{Mod}$, $B \in {}_{\mathbb{H}}\text{Mod}$. Dann existieren funktorielle Isomorphismen

$$(a) \text{Colnd}_{\mathbb{H}}^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong \text{Colnd}_{\mathbb{H}}^G (B \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Res}_G^H A)$$

$$(b) A \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Ind}_{\mathbb{H}}^G B \cong \text{Ind}_{\mathbb{H}}^G (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

Beweis.

(a) $\text{Colnd}_{\mathbb{H}}^G (B \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Res}_G^H A) = \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\mathbb{Z}[G], B \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Res}_G^H A)^Y$ 29.05.18
 $\text{für } f \in Y \rightarrow (gf)(g) = f(g'g)$ $\phi: x \rightarrow y$
 $h \cdot (b \otimes a) = hb \otimes ha$

$$\text{Colnd}_{\mathbb{H}}^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A = \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\mathbb{Z}[G], B) \otimes_{\mathbb{Z}} A = \text{Hom}_{\mathbb{H}}(\mathbb{Z}[G], B \otimes_A \text{Res}_G^H A) = X$$
 $h \cdot (b \otimes a) = hb \otimes a$

$$h \cdot (b \otimes a) = b \otimes ha$$

$$\text{Für } f \in X \rightarrow (g \cdot f)(g') = g \circ f(g'g)$$

wobei ϕ def. durch $\phi(f) := (g \mapsto g \cdot_2 f(g))$ (auf \mathbb{Z} -Basis von G !)

$\phi(f) \in Y$:

$$\begin{aligned} \phi(f)(hg) &= (hg) \cdot_2 f(hg) = h \cdot_2 g \cdot_2 h \cdot_1 f(g) \stackrel{\substack{\text{def.} \\ \cdot_1 \cdot_2}}{=} h \cdot_2 h \cdot_1 g \cdot_2 f(g) \\ &= h \cdot (g \cdot_2 f(g)) = h \cdot \phi(f)(g). \end{aligned}$$

G -äquivalent: $(g \phi(f))(g') = \phi(f)(g'g) \stackrel{\text{def.}}{=} g' \cdot_2 g \cdot_2 f(g'g)$

$$\phi(g \cdot f)(g') = g' \cdot_2 (g \cdot f)(g') \stackrel{\text{def.}}{=} g' \cdot_2 g \cdot_2 f(g'g)$$

Isomorphismus: $\phi^{-1}(f) := (g \mapsto g \cdot_2 f(g))$ für $f \in Y$
 (b) analog...

Korollar 6.25. Bezeichnung wie in 6.24 mit $H = \{e\}$, $A^0 := \text{Res}_{G/H}^{G/H} A$.

$$(a) \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A) \cong \text{Colnd}_{\{e\}}^G A^0$$

$$(b) \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong_{G\text{-Mod}} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A^0$$

Aus Übung: $A \xrightarrow{\text{?}} \text{Colnd}_{\{e\}}^G A^0, a \mapsto (f_a : g \mapsto ga)$

$$\text{Ind}_{\{e\}}^G A \xrightarrow{\pi} A, g \otimes a \mapsto ga$$

Definiere Kernen bzw. Kerne \rightsquigarrow erhalten kurze ex. Sequenzen

$$0 \rightarrow A \rightarrow \text{Colnd}_{\{e\}}^G A^0 \rightarrow A^* \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow A_* \rightarrow \text{Ind}_{\{e\}}^G A \rightarrow A \rightarrow 0$$

Bemerkung: $A_* \cong I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$, $A^* \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G, A)$ ($\text{zu } 0 \rightarrow I_G \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ spaltet (in $\mathbb{Z}\text{-Mod}$))

Proposition 6.26. Es existieren funktorielle Isomorphismen (in A):

$$(a) H^{i+1}(G, A) \cong H^i(G, A^*) \text{ für } i \geq 1$$

$$(b) H_{i+1}(G, A) \cong H_i(G, A_*) \text{ für } i \geq 1$$

$$(c) G \text{ endlich} \Rightarrow \forall i \in \mathbb{Z}: \hat{H}^{i+1}(G, A^*) \cong \hat{H}^i(G, A) \cong \hat{H}^{i+1}(G, A_*)$$

51

Bemerkung: In (a) und (b) erhalten wir noch 4-Term exakte Sequenzen, z.B.

$$0 \rightarrow H^0(G, A) \rightarrow H^0(G, \text{Colnd}_{\mathbb{Z}G}^G A) \rightarrow H^0(G, A^*) \rightarrow H^1(G, A) \rightarrow 0.$$

(analog für (b))

Beweis. folgt aus Shapiro's Lemma und $H^i(1, -) = 0, H_i(1, -) = 0 \quad \forall i \geq 1$

dann hieraus folgt:

$$H^i(G, \text{Colnd}_1^G A) = H^i(1, A^0) = 0, \text{ analog } H_i(G, \text{Ind}_1^G A) = 0 \quad \forall i > 0$$

$$\hat{H}^i(G, \text{Colnd}_{\mathbb{Z}}^G A) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

+ lange exakte Kohomologiesequenzen zu (+). □

Korollar 6.27. Sei G endlich, A ein G -Modul.

(a) Multiplikation mit $\#G$ annulliert $\hat{H}^i(G, A) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

(b) A endl. erz. \mathbb{Z} -Modul $\Rightarrow \hat{H}^i(G, A)$ endlich $\forall i \in \mathbb{Z}$

(c) Ist $A \xrightarrow{\#G \cdot -} A$ ein Isomorphismus, so gilt $\hat{H}^i(G, A) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

Beweis.

(a) Nach 6.26.: o.E. $i=0$.

$$\hat{H}^0(G, A) = \frac{A^G}{N_G A}, \text{ da für } a \in A^G \text{ gilt } \#G \cdot a = N_G a \Rightarrow \#G \bar{a} = 0 \text{ in } \hat{H}^0(G, A)$$

(b) A endl. erz., G endlich $\Rightarrow A_*, A^* = \text{endl. erz. } / \mathbb{Z} \Rightarrow$ o.E.: $i=0$.

Dann ist die Aussage klar nach (a), da A^G endl. erz. $/ \mathbb{Z}$ und $\#G$ -Torsion.

(c) Ist $A \xrightarrow{\#G \cdot -} A$ Isomorphismus $\Rightarrow \hat{H}^i(G, A) \xrightarrow{\#G \cdot -} \hat{H}^i(G, A)$ Isomorphismus

$$\stackrel{(a)}{\Rightarrow} \hat{H}^i(G, A) = 0.$$
□

Funktionalität in Paaren (G, A) : (zunächst für Kohomologie)

$p: G' \rightarrow G$ Grp. homomorphismus, $\lambda: A \rightarrow A'$ \mathbb{Z} -Modulkomm., s.d. $(A \in {}_G \underline{\text{Mod}}, A' \in {}_{G'} \underline{\text{Mod}})$

$$\lambda(p(g)) \cdot a = g' \cdot \lambda(a) \quad \forall a \in A \vee g' \in G'$$

Bemerkung: ⑤ Man kann eine Kategorie (kohomologischer) Gruppe-Modul Paare definieren.

Objekte: (G, A) , Morphismen: $(p, \lambda): (G, A) \rightarrow (G', A')$ wie oben.

⑥ Jeder Morphismus dieser Kategorie ist Verkettung

$$(G, A) \xrightarrow{(p, \text{id}_A)} (G', A) \xrightarrow{(\text{id}_{G'}, \lambda)} (G', A')$$

\uparrow

$A' \text{-Modul}$
durch $g' \cdot a = p(g')a$, schreibe jgf. $p^* A$

Bsp: (i) $H \trianglelefteq G$ u.G, ρ Inklusion, $\lambda = \text{id}_A : \begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ = \text{Res}_H^G A \end{array} \rightarrow A$ ($A \in {}_G\text{-Mod}$)

(ii) $H \trianglelefteq G$, $p : G \rightarrow {}^H/G$ Projektion, $\lambda = \text{Inkl.} : \begin{array}{c} A^H \hookrightarrow A \\ \text{\scriptsize } {}^H/G\text{-Modul} \end{array}$

Definiere zu Morphismus (ρ, λ) in der obigen Kategorie eine Abbildung $H^i(G, A) \rightarrow H^i(G', A')$ Viz. wie folgt.

$$G' \xrightarrow{p} G \text{ induziert } \mathbb{Z}[({G'})^i] \rightarrow \mathbb{Z}[G^i] \quad \text{v. liegt auch } G'\text{-operation.}$$

induziert $\text{Std}_{G'} \rightarrow \text{Std}_G$ in $\text{ch}(\mathbb{Z}[G'])$

Damit: (1) $\text{Hom}_G(\text{Std}_G, A) \rightarrow \text{Hom}_{G'}(\text{Std}_{G'}, p^*A) \rightarrow \text{Hom}_{G'}(\text{Std}_{G'}, p^*A) \rightarrow \text{Hom}_{G'}(\text{Std}_{G'}, A')$
in $\text{ch}(\mathbb{Z})$

Proposition 6.28. (1) induziert Abbildungen $H^i(G, A) \rightarrow H^i(G', A')$

$$\left(\begin{array}{c} \text{mit gewissen Funktorialitäten in } A \rightarrow A' \\ \downarrow \quad \downarrow \text{etc.} \\ B \rightarrow B' \end{array} \right)$$

(Die induzierte Abbildung ist eine natürliche Transformation von δ -Funktionen,
siehe Brown, Cohomology of Groups)

Insbesondere sind die $H^i(G, A) \rightarrow H^i(G', A')$ durch $H^0(G, A) = A^G \rightarrow (A')^{G'} = H^0(G', A')$
 $\forall A \rightarrow A'$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Die Abbildungen in 6.28 sind induziert von Abbildungen

$$(ii) \quad C(G^i, A) \rightarrow C(({G'})^i, A'), f \mapsto f'$$

$$\text{wobei } f'(g'_1, \dots, g'_i) := \lambda(f(p(g'_1), \dots, p(g'_i))) \quad \forall (g'_1, \dots, g'_i) \in ({G'})^i.$$

Bemerkung. Zu $(G, A) \rightarrow (G', A')$ erhalten wir $H^i(G, A) \rightarrow H^i(G', A')$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ (G'', A'') & & H^i(G'', A'') \end{array}$$

Def. 6.29. $H \leq G$ Untergruppe (obiges Beispiel (a))

erhalten $\text{Res}: H^i(G, A) \rightarrow H^i(H, A)$ ($\rho = H \hookrightarrow G$, $\lambda = \text{id}_A$)

(Ü auf Keketten: $C^i(G, A) \rightarrow C^i(H, A)$, $f \mapsto f|_{H^i}$) "Restriktion"

Def. 6.30. $N \trianglelefteq G$ Normalteiler (obiges Bsp. (b))

erhalten

$\text{Inf}: H^i(G/N, A^N) \rightarrow H^i(G, A)$ ($\rho = G \rightarrow G/N$, $\lambda = \lambda^N \rightarrow \lambda$)

"Inflation"

Bemerkung: Res induziert Abbren auf loren exakten Kohomologiesequenzen.

↓

$$\underline{\text{Ü}}: \text{Res} = (H^i(G, A) \xrightarrow[\text{ausübung}]{} H^i(G, \text{Colim}_H^G A) \xrightarrow{\cong} H^i(H, A))$$

Def. 6.31. $H \leq G$ Untergruppe, $g \in G$, $A \in {}_G\text{Mod}$.

$$\rho_{g, H}: j^H g^{-1} \xrightarrow{\sim} H, \tilde{h} \mapsto g^{-1} \tilde{h} g, \quad \lambda_g: A \rightarrow A, a \mapsto ga$$

$$(\lambda_g(\rho_{g, H}(\tilde{h})a) = \lambda_g(g^{-1} \tilde{h} g a) = \tilde{h} g a = \tilde{h} \lambda_g(a))$$

induziert Abbren

$$g^*: H^i(H, A) \rightarrow H^i(j^H g^{-1}, A)$$

Proposition 6.32.

$$(a) \forall j_1, j_2 \in G: (j_1 \circ j_2)^* = j_2^* \circ j_1^*$$

(b) $\underline{N \trianglelefteq G} \rightarrow G \rightarrow \text{Aut}(H^i(N, A))$, $g \mapsto g^*$ ist Gruppenabbren mit N im Kern.

Insondere gilt $g^* = \text{id}$ falls $G = N$

Außerdem erhalten wir einen Kohom. Funktor ${}_G\text{Mod} \rightarrow {}_{G/N}\text{Mod}$, $A \mapsto H^i(N, A)$

(c) Für $K \leq H \leq G$ Untergruppen, komm. Diagramm

$$H^i(H, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^i(K, A) \quad \text{so dann in (b) gilt:}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow j^* & \parallel & \downarrow j^* \\ H^i(j^H g^{-1}, A) & \xrightarrow{\text{Res}} & H^i(gKg^{-1}, A) \end{array}$$

Res: $H^i(G, A) \rightarrow H^i(N, A)$ hat Bild

$$H^i(N, A)^G = H^i(N, A)^{G/N}.$$

Satz. 6.33. (Inflations-Restriktions-Sequenz) (ü) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler, $A \in {}_G\text{Mod}$,

so ist

$$(a) 0 \rightarrow H^1(G/N, A^N) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(N, A)^{G/N} \quad \text{exakt.}$$

(b) gilt zusätzlich: $H^i(N, A) = 0$ für $i=1, \dots, k-1$, so ist

$$0 \rightarrow H^k(G/N, A^N) \xrightarrow{\text{Inf}} H^k(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^k(N, A)^{G/N} \quad \text{exakt.}$$

Def. 6.34. (Korestriktion)

Gelte $[G:H] < \infty$, $A \in {}_G\text{Mod}$ (Res kann über π definiert werden!)

$$\text{Cor: } H^i(H, A) \xrightarrow{\text{ Shapiro}} H^i(G, \underbrace{\text{Colind}_H^G A}_\text{!}) \simeq H^i(G, \text{Ind}_H^G A) \xrightarrow{\pi} H^i(G, \pi)$$

heißt "Korestriktion"

$\text{Ind}_H^G A$, da $[G:H] < \infty$

$H^i(G, \pi)$

$$\text{Explicit: } i=0: H^0(H, A) \xrightarrow{\text{ Shapiro}} H^0(G, \underbrace{\text{Colind}_H^G A}_\text{!}) \xrightarrow{\sum_{g \in H} g^{-1} \cdot g \cdot a} H^0(G, A)$$

$$A^H \longrightarrow (\text{Colind}_H^G A)^G$$

$$a \mapsto (g \mapsto a) \text{ konstant}$$

$$\text{Num: } \text{Colind}_H^G A \rightarrow \text{Ind}_H^G A \xrightarrow{\pi} A$$

$$f \mapsto \sum_{j \in H^G} j^{-1} \otimes f(j) \mapsto \sum_{g \in H^G} j^{-1} f(g) = \sum_{g \in H^G} g f(g^{-1})$$