Insbesondere: $r^*_{\phi(g)}(I) \subseteq I \underset{\text{Kor. 9 (ii)}}{\Longrightarrow} \underbrace{\left(r^*_{\phi(g)}\right)_{s/u}}_{\substack{\| \text{ Lemma 11} \\ \left(\left(r_{\phi(g)}\right)_{s/u}\right)^*}} (I) \subseteq I$

$\underset{(4)}{\Longrightarrow} \quad \phi(g)_{s/u} \in \phi(G)$ ✓

(i) g_s (g_u) sei das eindeutige Element, so dass $\phi(g_{s/u}) = \phi(g)_{s/u}$ gilt.

Für $G = GL(V)$ (und $\phi = id$) folgt (i) aus Lemma 11.

Aus (3), auch für g_s/g_u statt g, folgt:

$\rho_G(g_{s/u})$ ist induziert von $\rho_{GL}(\phi(g_{s/u})) = \rho_{GL}(\phi(g)_{s/u})$

$\rho_G(g)_{s/u}$ — " — $\rho_{GL}(\phi(g))_{s/u}$

wegen der Eindeutigkeit in Korollar 9.

Die Eindeutigkeit folgt, da ρ_G injektiv ist, da $\rho_G : G \to GL(A(G)) \hookrightarrow GL(W)$ injektiv ist nach Beweis von Theorem 3.

(iii) folgt nach Konstruktion, da wegen der Eindeutigkeit in (i) unabhängig von ϕ ist. ▨

Korollar 12. Sei $G \xrightarrow{\psi} H$ ein Morphismus algebraischer Gruppen. Dann gilt: 11.05.18

$\forall g \in G: \quad \psi(g_s) = \psi(g)_s$ und $\psi(g_u) = \psi(g)_u$.

Insbesondere gilt Theorem 10 (iii) für beliebige Darstellungen $G \xrightarrow{\phi} GL_n$!

Beweis.

Fall 1: ψ surjektiv. $\Rightarrow$ $\psi^*: A(H) \hookrightarrow A(G)$ injektiv und $\psi^*(A(H)) \subseteq A(G)$ ist r_g^*-invariant. (vgl. (3) oben)

Wende dann Korollar 9 (ii) an.

Fall 2: ψ injektiv.

Wähle Einbettung $H \hookrightarrow GL_n$ und wende Theorem 10 (iii) an auf $\underset{[1]}{\phi \circ \psi}$ und $\underset{[2]}{\phi}$.

$$\phi(\psi(g_{s/u})) \underset{[1]}{=} \left((\phi \circ \psi)(g)\right)_{s/u} \underset{[2]}{=} \phi(\psi(g)_{s/u})$$

$$\underset{\phi \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} \quad \psi(g_{s/u}) = \psi(g)_{s/u}.$$

Fall 3: ψ allgemein. $\underbrace{G \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} \operatorname{im}\psi \overset{i}{\hookrightarrow} H}_{\psi}$ faktorisiert in Surjektion + Inklusion, nun verwende Fall 1 + 2. ▨

2. Kommutatoren

Proposition 1. $H, K \underset{\text{abg.}}{\leq} G$ seien abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppen.

Dann:
$$[H, K] := \langle \underbrace{[h, k]}_{= hkh^{-1}k^{-1}} \mid h \in H,\ k \in K \rangle \leq G \quad \text{ist ein zusammenhängender,}$$

abgeschlossener Normalteiler. Es reicht sogar die Annahme "H oder K zshgd."; ← vgl. Beweis.

Borel zeigt sogar (ohne zshgd.), dass $[H, K]$ stets abgeschlossen ist.

Lemma 2. Sei $(X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ein System irreduzibler Varietäten sowie $(X_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} G)_{\alpha \in \Lambda}$ ein System von Morphismen nach G, s.d. $\forall \alpha \in \Lambda$: $e \in Y_\alpha := \phi_\alpha(X_\alpha)$. Dann gilt:

$$H := \langle Y_\alpha, \alpha \in \Lambda \rangle \leq G \quad \text{ist zshgd. und abgeschlossen.}$$

Zudem existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ s.d. $H = Y_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \cdots Y_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$.

Beweis von Lemma 2. oE.: $\phi_\alpha^{-1} := \underset{\text{↑ Inversion in } G}{\iota} \circ \phi_\alpha : X_\alpha \to G$ gehört auch zu dem System $\forall \alpha \in \Lambda$.

Für $n \geq 1$, $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Lambda^n$ setze $Y_a := Y_{\alpha_1} \cdots Y_{\alpha_n} \leq G$.

$\Rightarrow Y_a, \overline{Y_a}$ sind irreduzibel (vgl. Bemerkung II Prop. 2.3)

Wähle n, a s.d. $\overline{Y_a}$ maximal ist.

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}\ \forall b \in \Lambda^m: \quad \overline{Y_a} \underset{\uparrow\, e \in \overline{Y_b}}{\subseteq} \overline{Y_a} \cdot \overline{Y_b} \underset{\uparrow \text{ vgl. Bem. nach Lemma II 2.5}}{\subseteq} \overline{Y_a Y_b} = \overline{Y_{(a,b)}} \underset{\max.}{\subseteq} \overline{Y_a}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Y_a} = \overline{Y_{(a,b)}} \supseteq \overline{Y_b} \qquad \underset{b=a}{\Longrightarrow} \overline{Y_a} \cdot \overline{Y_a} \subseteq \overline{Y_{(a,a)}} = \overline{Y_a} \text{ und } \overline{Y_a}^{-1} \subseteq \overline{Y_a}$$

$$\overline{Y_a}^{-1} = \overline{Y_{a^{-1}}} \text{ mit } Y_{a^{-1}} := Y_{\alpha_1}^{-1} \cdots Y_{\alpha_n}^{-1}$$

Nach Chevalley (Thm. II.2.4) angewandt auf $Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \hookrightarrow G \times \dots \times G \xrightarrow{\text{mult.}} G$

existiert $\emptyset \neq U \subseteq Y_a$ s.d. $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{Y_a}$ (und damit auch dicht, da $\overline{Y_a}$ irreduzibel)

$$\underset{\text{Lemma II 2.6}}{\Longrightarrow} \quad \overline{Y_a} = \underbrace{U \cdot U}_{\subseteq Y_a Y_a} \Rightarrow \overline{Y_a} = Y_a Y_a = Y_{(a,a)} = H.$$

$\blacksquare$

Beweis von Proposition 1. Betrachte das System von Morphismen $\left\{ \begin{array}{c} H \xrightarrow{\phi_k} G \\ h \mapsto [h,k] \end{array} \right\}_{k \in K}$.

Man kann die Rollen von H und K austauschen, deswegen reicht H oder K irreduzibel $\underset{\text{Lemma 2}}{\Longrightarrow}$ $[H,K]$ abgeschlossen und zshgd.

$[H,K]$ ist ohnehin Normalteiler nach allgemeiner Gruppentheorie.

$\blacksquare$

Korollar 3. Ist $(H_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ein System zshgd., abg. Untergruppen, so ist $\langle H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda \rangle \leq G$ ebenfalls abgeschlossen und zshgd.

Korollar 4. Ist G zushgd., so ist ihre abgeleitete Untergruppe $DG := [G,G] \leq G$ abgeschlossen und zushgd.

Def. 5. (1) Definiere induktiv die abgeleitete Reihe von G: $G \supseteq DG \supseteq D^2G \supseteq \ldots \supseteq D^nG \supseteq \ldots$

via $D^0G := G$, $D^nG := D(D^{n-1}G) = [D^{n-1}G, D^{n-1}G]$

$$\Rightarrow \quad D^{n+1}G \trianglelefteq D^nG.$$

G heißt auflösbar, falls $D^nG = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$

(2) Definiere die absteigende Zentralreihe von G $\quad G \supseteq \ell^1G \supseteq \ell^2G \supseteq \ldots \supseteq \ell^nG \supseteq \ldots$

induktiv via $\quad \ell^0(G) := G, \quad \ell^nG := [G, \ell^{n-1}G]$

$$\ell^{n+1}G \trianglelefteq \ell^nG \quad \text{(sogar zentral)}$$

G heißt nilpotent, falls $\ell^nG = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 6. (Erinnerung aus der Gruppentheorie)

(i) nilpotent $\Rightarrow$ auflösbar

(ii) G auflösbar / nilpotent $\Rightarrow$ Untergruppen / Faktorgruppen von G auflösbar / nilpotent.

(iii) $N \trianglelefteq G$, N, G/N auflösbar $\Rightarrow$ G auflösbar.

Bsp. 7. B_n ist auflösbar ($DB_n = U_n$), U_n ist nilpotent.

3. Unipotente Gruppen

Def. 1. $G_s := \{ g \in G \mid g = g_s \}$; $G_u := \{ g \in G \mid g = g_u \}$

Bemerkung 2.

(i) $G_s \cap G_u = 1$ (wg. der Eindeutigkeit in der Zerlegung $g = g_s g_u$)

(ii) $G_u \subseteq G$ ist abgeschlossene Teilmenge. G_s ist nicht notwendigerweise abgeschlossen in G.

(iii) Sei $* \in \{s, u\}$, $g, h \in G_*$ mit $[g,h] = 1$. $\Rightarrow gh, g^{-1} \in G_*$

Beweis.

(i) klar in GL_n: $EW = 1$ + diagonalisierbar. ✓

(ii) $G \subseteq GL_n$ abg. Einbettung. Es gilt: $G_u = \{ g \in G \mid \underbrace{(g - \mathbb{1})^n = 0}_{\text{abg. Bedingung}} \} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$

$$G = B_2 = \begin{pmatrix} k^\times & k \\ 0 & k^\times \end{pmatrix} \Rightarrow G_s = \begin{pmatrix} k^\times & 0 \\ 0 & k^\times \end{pmatrix} \text{ \underline{nicht} abg. in } G.$$

(iii) oE: $G = GL_n$

$\underline{* = s}$: g, h $\underbrace{\text{simultan diagonalisierbar}}_{\text{weil sie kommutieren}}$ $\Rightarrow gh, g^{-1}$ auch

$\underline{* = u}$: g, h simultan (oberhalb) trig'bar $\Rightarrow gh, g^{-1}$ auch
+ $EW = 1$

Proposition 3. Sei G kommutativ. Dann sind $G_s, G_u \leq G$ abgeschlossene Untergruppen und

$$\mu : G_s \times G_u \longrightarrow G \text{ ist ein Isomorphismus algebraischer Gruppen.}$$

Beweis.
- Untergruppen nach Bemerkung 2 (iii)
- $G_u \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$ nach Bemerkung 2 (ii)

$\underline{\text{o.E.:}}$ $G \subseteq GL(V)$ abg. für V endl.-dim. k-VR, $V = \bigoplus_{\lambda : G_s \to k^\times} V_\lambda$ direkte Summe von Eigenräumen bzgl. G_s.

V_λ ist G-invariant: $g_s(v) = \lambda(g_s) \cdot v \Rightarrow g_s \cdot g \cdot v = g \cdot g_s \cdot v = \lambda(g_s) \cdot g \cdot v$ ✓

Wähle Basen für V_λ s.d. die G-Aktion oberhalb trig'bar ist

$$\begin{array}{ccccc} \Rightarrow & g & \cdot G & \subseteq & B_n \\ & \downarrow & \vdots & & \downarrow \\ & g_s & G_s & \subseteq & D_n \; (= B_n / U_n) \end{array}$$

und $G_s = G \cap D_n \Rightarrow G_s \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$.

$\Rightarrow \begin{array}{l} G \to G_s \times G_u \\ g \mapsto (g_s, g_s^{-1} g) \end{array}$ $\underline{\text{Morphismus}}$ Invers zu μ. ∎

Def. 4. G heißt unipotent, falls $G = G_u$.

Bsp. 5. U_n ; $\mathbb{G}_a \ (\cong U_2)$

Proposition 6. Sei G unipotent, $G \xrightarrow{\phi} GL_n$ ein Morphismus. Dann:

$\exists\, \gamma \in GL_n$: $\gamma \operatorname{im}\phi\, \gamma^{-1} \subseteq U_n$, d.h. "alle unipotenten Gruppen sind bis auf Konjugation in U_n enthalten".

Beweis. Induktion nach n.

$\underline{n=1}$: $(GL_1)_u = 1 = U_n$; Für $m<n$ gelte die Behauptung. Sei $\phi : G \to GL(V)$ mit $\dim_k V = n$.

$\underline{\text{Fall 1}}$: $\exists\, 0 \subsetneq W_1 \subsetneq V$ G-inv. Teilraum. Wähle Komplement W_2: $V = W_1 \oplus W_2$

$$\phi_1 : G \longrightarrow GL(V) \longrightarrow GL(W_1) = GL_{n_1}$$

$$\phi_2 : G \longrightarrow \underset{\underset{W_2}{\cong}}{GL(V/W_1)} = GL_{n_2} \qquad \phi = \begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{c|c} \phi_1 & * \\ \hline 0 & \phi_2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} W_1 \\ V/W_1 \end{array} \end{array}$$

$n_1, n_2 < n \Rightarrow \exists\, \gamma_i \in GL_{n_i}$: $\gamma_i \operatorname{im}\phi_i\, \gamma_i^{-1} \subseteq U_{n_i}$ (für geeignete Basiswahl)

$\Rightarrow$ $\gamma \operatorname{im}\phi\, \gamma^{-1} \subseteq U_n$ für $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$

$\underline{\text{Fall 2}}$: V irred. G-Darstellung

$\underset{\substack{EW = 1 \\ \dim_k V = n}}{tr(\phi(g)) = n} \Rightarrow \forall\, h \in G$:

$$tr((\phi(g) - \mathbb{1})\phi(h)) = tr(\phi(gh)) - tr(\phi(h)) = n - n = 0.$$

$\underline{\text{Burnside-Theorem}}$ (Lang, Ch. $\underline{XVII}$, §3)

$End(V) = \langle \phi(G) \rangle_k$ k-lin. Span $\Rightarrow \forall x \in End(V)$: $tr((\phi(g) - \mathbb{1})x) = 0$

$\underset{\substack{\text{d.h. Spur-Paarung} \\ \text{nicht ausgeartet}}}{\xrightarrow{k = \bar{k}}}$ $\phi(g) - \mathbb{1} = 0$, d.h. $\phi(g) = \mathbb{1}$, bzw. $\operatorname{im}\phi = \underline{1}$.

$\boxtimes$

Korollar 7. G unipotent $\Rightarrow$ G nilpotent ($\Rightarrow$ G auflösbar)

Beweis. U_n ist nilpotent.

$\boxtimes$

Korollar 8. Jede irreduzible Darstellung einer unipotenten Gruppe ist trivial.

Beweis. aus Beweis von Proposition 6.

$\boxtimes$