Korollar 4. G affine, algebraische Gruppe, $H \leq G$ abgeschlossene Untergruppe. Dann existiert ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum W mit UVR W_H sowie eine abgeschlossene Einbettung $G \hookrightarrow GL(W)$ mit $H = \mathrm{Stab}_G(W_H)$.

Beweis. $I_H := \{ f \in A(G) \mid f|_H = 0 \}$ ist ein Ideal.

Im obigen Beweis von Theorem 3 o.E. $f_1, \dots, f_r$ $(r \geq n)$ erzeugen das Ideal I_H.

$W_H := W \cap I_H$. Dann gilt:

$$g \in H \iff hg \in H \ \forall h \in H \iff r_g^*(I_H) \subseteq I_H$$

$$\iff r_g^*(W_H) \subseteq W_H$$

da $W_H = W \cap I_H$ und W ohnehin G-invariant ist. ▨

02.05.18

Lemma 5. (Chevalley) Man kann erreichen, dass $\dim_k W_H = 1$ ist.

Beweis.

Starte mit Einbettung $G \to GL(W)$ aus Korollar 4. $d := \dim_k W_H$.

$L := \Lambda^d W_H \subseteq \Lambda^d W$; $\dim_k L = \binom{d}{d} = 1$. $\rho : G \to GL(\Lambda^d W)$

$G \curvearrowright \Lambda^d W$ via $g(w_1 \wedge \dots \wedge w_d) = g(w_1) \wedge \dots \wedge g(w_d)$.

Behauptung: $H = \mathrm{Stab}_G^\rho(L)$

"$\subseteq$": klar, da H W_H invariant lässt bzgl. der ursprünglichen Wirkung $G \curvearrowright W$.

"$\supseteq$": Nun gelte $g(L) = L$ bzgl. ρ.

$$e_1, \dots, e_m, \underbrace{e_{m+1}, \dots, e_d}_{\text{Basis } W_H \cap gW_H}, e_{d+1}, \dots, e_{d+m}, \dots, e_n$$ sei Basis von W.

$\underbrace{e_1, \dots, e_d}_{\text{Basis } W_H}$, $\underbrace{e_{m+1}, \dots, e_{d+m}}_{\text{Basis } gW_H}$ (Basis ergänzen ...)

z.z.: $m = \operatorname{codim}_{W_H} W_H \cap g W_H \overset{!}{=} 0$ (d.h. $gW_H = W_H$ bzw. $g \in \operatorname{Stab}_G(W_H) = H$)

IA: $m \neq 0 \underset{\text{L.A.}}{\Rightarrow} \underbrace{e_1 \wedge \dots \wedge e_d}_{\in L}, \underbrace{e_{m+1} \wedge \dots \wedge e_{m+d}}_{g(e_1 \wedge \dots \wedge e_d) \in L \text{ nach Vorauss. bis auf Skalar}}$ sind l.u. in $\Lambda^d W$.

$G \to GL(\Lambda^d W)$ Einbettung: Übung. $\quad$ ↯ da $\dim_k L = 1$.

Proposition 6. Sei $H \trianglelefteq_{abg} G$ ein abg. Normalteiler. Dann existiert ein endl. dim. VR W und ein Morphismus $\rho : G \to GL(W)$ algebraischer Gruppen mit $\ker \rho = H$.

Beweis. Starte mit Darstellung $\phi : G \to GL(V)$, bei der $H = \operatorname{Stab}_G^{+}(\langle v \rangle)$ für ein $v \in V$ wie aus Lemma 5.

$\Rightarrow$ v ist gemeinsamer Eigenvektor $\forall h \in H$. $V_H := \langle w \mid w \text{ ist EV } \forall h \in H \rangle \subseteq V$

$h(v) = \chi(h) v$ für $\chi(h) \in k^\times$ (h invertierbar) $\quad$ ($\chi : H \to \mathbb{G}_m$ ist Charakter)

Da $H \trianglelefteq G$, gilt für alle $g \in G$:

$$h g v = g \underbrace{(g^{-1} h g)}_{\in H} v = \chi(g^{-1} h g)\, g v \quad \forall h \in H$$

$\Rightarrow$ $gv \in V_H$, d.h. V_H ist G-Invariant.

OE: $V = V_H$ (sonst ersetzen) d.h.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i, \quad V_i \text{ gemeinsame Eigenräume für } H.$$

$$W := \prod_{i=1}^{r} \operatorname{End}(V_i) \subseteq \operatorname{End}(V)$$ Unterraum derjenigen Endomorphismen, die jedes V_i invariant/stabil lassen.

$G \curvearrowright \operatorname{End}(V)$ via: $g(\lambda) := \phi(g) \circ \lambda \circ \phi(g)^{-1}$ und W ist diesbezüglich G-invariant:

$$V_i \xrightarrow{\phi(g)^{-1}} \phi(g)^{-1} V_i \xrightarrow{\lambda} \phi(g)^{-1} V_i \xrightarrow{\phi(g)} V_i, \text{ d.h. } g(\lambda) \in W$$

da mit V_i auch $\phi(g)^{-1} V_i$ ein gemeinsamer Eigenraum für H ist

Wir erhalten $\rho : G \to GL(W)$ Morphismus alg. Grp.

Beh.: $H = \ker \rho$

"$\subseteq$": $g(h)(\lambda) = \phi(h) \circ \lambda \circ \phi(h)^{-1} = \lambda$, da $\lambda = \sum \lambda_i$, $\lambda_i \in End(W_i)$

$$\phi(h) \circ \lambda \circ \phi(h)^{-1} v_i = \chi(h)\chi(h)^{-1} \lambda_i(v_i) = \lambda_i(v_i)$$

"$\supseteq$": $g \in \ker \rho \underset{\text{Def. } \rho}{\Longrightarrow} \phi(g) \in \text{Zentrum}(W) = \prod_i \underbrace{\text{Zentrum}(End(V_i))}_{= k \cdot id_{V_i}}$

$\Rightarrow \phi(g) v \in k^\times v \to g \in Stab_G(\langle v \rangle) = H$.

$\blacksquare$

III Einschub: Quasiprojektive Varietäten und Dimension

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_k := \frac{k^{n+1} \setminus \{0\}}{k^\times} = \{[a_0 : \dots : a_n] \mid a_i \in k, \text{ nicht alle } 0\}$$

$$[a_0 : \dots : a_n] = [b_0 : \dots : b_n] \iff a_i = \lambda b_i \text{ für ein } \lambda \in k^\times.$$

Def. 1. Teilmengen von $\mathbb{P}^n$ der Form $V(f_1, \dots, f_n) = \{P \in \mathbb{P}^n_k \mid f_i(P) = 0,\ i = 1 \dots n\}$ für <u>homogene</u> Polynome $f_1, \dots, f_n \in k[X_0, \dots, X_n]$ heißen projektive Varietäten. Sie bilden die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^n$.
Lokal abgeschlossene Teilmengen (Durchschnitte einiger offenen und abgeschlossenen Mengen) heißen quasi-projektive Varietäten.

Bemerkung 2. Die Zariski-offenen Teilmengen $D_+(X_i) = \mathbb{P}^n \setminus V(X_i) = \{P = [x_0 : \dots : x_n] \mid X_i \neq 0\}$, $0 \le i \le n$

bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n$

$$\mathbb{A}^n \longrightarrow D_+(X_i),\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$$

ist ein Homöomorphismus.

Proposition 3.

(i) Die Segre-Einbettung, $N = nm + n + m$

$$S^{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N, ([a_0 : \dots : a_n], [b_0 : \dots : b_m]) \longmapsto [a_0b_0 : a_0b_1 : \dots : a_0b_m : a_1b_0 : \dots : a_nb_m]$$

ist injektiv mit abg. Bild.

(lexikografisch geordnet)

(ii) Für quasi-projektive Varietät $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ ist das Produkt $X \times Y$ definiert als $S^{n,m}(X, Y) \subseteq \mathbb{P}^N$.

$X \times Y$ ist quasi-projektiv, und, falls X, Y projektiv ebenfalls projektiv.

Beweis. Hartshorne. $\square$

Ab jetzt sind alle Varietäten irreduzibel!

Def. 4. (i) Für X affin, heißt $k(X) := \mathrm{Quot}(A(X))$ der Funktionenkörper von X.
wtf., da X irreduzibel

Für $P \in X$ heißt $\mathcal{O}_{X,P} := A(X)_{m_P}$ (Lokalisierung bei m_P)

der lokale Ring in P.

Es gilt: $A(X) = \bigcap_P \mathcal{O}_{X,P} \quad (\subseteq k(X))$

(ii) Für X projektiv betrachte den Ring $\mathcal{R}(X) := \mathcal{R}_X := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; \begin{array}{l} f,g \in k[X_0, \dots, X_n] \text{ homogen} \\ g \notin I(X),\ \deg f = \deg g \end{array} \right\}$

$$\cup\!\!\mid$$

$$\underbrace{m_X}_{\text{ist maximales Ideal}} := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{R}(X) \;\middle|\; f \in I(X) \right\}$$

$\Rightarrow k(X) := \mathcal{R}(X) / m_X$ heißt der Funktionenkörper von X, seine Elemente heißen auch rationale Funktionen auf X.

Faktum: Für jedes i gibt es einen Isomorphismus $\qquad X^{(i)} := X \cap D_+(X_i)$

$$k(X) \xrightarrow{\cong} k(X^{(i)})$$

$$\frac{f(X_0, \dots, X_n)}{g(X_0, \dots, X_n)} \longmapsto \frac{f(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n)}{g(\quad - \quad " \quad - \quad)}$$