Da es in Varietäten nur endlich viele irreduzible Komponenten gibt folgt (ii).
Darüberhinaus sind alle irreduziblen Komponenten disjunkt.
Da Zusammenhangskomponenten Vereinigungen irred. Komponenten sind, müssen irred. und zsmh. Komponenten übereinstimmen. $\Rightarrow$ (iii).

(iv) Sei $H \subseteq G$ abg. von endlichem Index. $\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ abg. von endlichem Index.
$\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ ist offen abgeschlossen $\xrightarrow[G^\circ \text{ zsmhgd.}]{}$ $H^\circ = G^\circ$ $\Rightarrow$ (iv).

gilt in top. Grp.

∎

G° heißt die Zusammenhangskomponente der 1.

27.04.18

Theorem 4. (Chevalley)
Sei $X \xrightarrow{\phi} Y$ ein Morphismus von (quasi-projektiven oder affinen) Varietäten. Dann existiert $\emptyset \neq U \subseteq \phi(X)$ mit $U \subseteq \overline{\phi(X)}$ offen.

Beweis. T. A. Springer, Theorem 1.9.5.

∎

Lemma 5. (i) Ist $H \subseteq G$ eine (abstrakte) Untergruppe, so ist $\overline{H} \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und damit selbst eine algebraische Gruppe.
(ii) Ist $G \xrightarrow{\phi} H$ ein Morphismus algebraischer Gruppen, so sind $\ker\phi$, $\operatorname{im}\phi$ abgeschlossene Untergruppen.

Beweis.
(i) Die Multiplikation mit $g \in G$ (von links oder rechts) induziert einen Isomorphismus (von Varietäten) $G \to G$. $\Rightarrow$ $g\overline{H}$ abgeschlossen und $g\overline{H} \supseteq gH$ $\Rightarrow$ $g\overline{H} \supseteq \overline{gH}$.
und $g\overline{H} = \overline{gH}$ (überlegen!)
Analog: $\overline{H}g = \overline{Hg}$. $\forall g \in G$.

1.) Beh.: $H\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Sei $h \in H$. $\Rightarrow$ $\overline{H}h = \underbrace{\overline{Hh}}_{=H} \subseteq \overline{H}$ ✓

2.) Beh.: $\overline{H}\,\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Sei $h \in \overline{H}$. $\xRightarrow{1.)}$ $Hh \subseteq \overline{H}$. $\Rightarrow$ $\overline{H}h = \overline{Hh} \subseteq \overline{H}$ ✓

3.) $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$, da die Inversion $\iota: G \to G$ ein Isomorphismus von Varietäten ist.

2.), 3.) $\Rightarrow$ $\overline{H}$ ist Untergruppe, abgeschlossen klar.

(ii) $\ker\phi$ ist offensichtlich abgeschlossene Untergruppe (denn $\ker\phi = \phi^{-1}(\{e\})$ und $\{e\} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} H$ abgeschlossen; Punkte sind immer abgeschlossen in algebraischen Gruppen!)

Sogar in allgemeinen (affinen) Varietäten gemäß Hilberts Nullstellensatz

Nach Chevalley existiert $\emptyset \neq U \subseteq \phi(G)$ mit $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{\phi(G)}$
$\Rightarrow \phi(G) = \bigcup_{h \in \phi(G)} hU \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{\phi(G)}$. Die Behauptung folgt mit "$G = \phi(G)$", "$UV = U = V = \phi(G)$" aus dem Folgenden Lemma.

∎

Lemma 6. $U, V \subseteq G$ dicht und offen $\Rightarrow UV = G$.

Beweis. $U \subseteq G$ dicht, offen.

$$\underset{\substack{G = \coprod_{\text{endl.}} \underbrace{gG^\circ}_{\text{offen, abg.}} \\ \text{Prop. 3}}}{\Longrightarrow} \quad U \cap G^\circ \subseteq G^\circ \text{ dicht und } \emptyset \neq U \cap G^\circ \quad (\text{da } G^\circ \underset{\text{offen}}{\subseteq} G \text{ mit } G^\circ \neq \emptyset)$$

Also o.E. $G = G^\circ$ irreduzibel.

$g \in G$ beliebig $\Rightarrow gV^{-1}, U \subseteq G$ offen + dicht $\underset{G \text{ irreduzibel}}{\Longrightarrow} gV^{-1} \cap U \neq \emptyset$, dh. $g \in UV$.
$\Rightarrow UV = G$. ∎

Bemerkung. Algebraische Gruppen sind i.A. keine topologische Gruppen!
$G \times G \xrightarrow{\mu} G$ ist zwar stetig, aber bezüglich der Zariski-Topologie auf $G \times G$
($\neq$ Produkttopologie)

3. Einbettungen in GL_n

Sei G eine endliche Gruppe und $k[G]$ die zugehörige Gruppenalgebra. Die reguläre Darstellung (d.h. G operiert durch Multiplikation auf $k[G]$) induziert eine Abbildung

$$G \hookrightarrow GL(k[G]), \quad \text{die injektiv ist.}$$

Da das Bild endlich ist, ist es Zariski-abgeschlossen. Insbesondere ist jede endliche Gruppe eine algebraische Gruppe nach Lemma 2.5 und Def. 2.1.

<u>Idee</u>: Für affine algebraische Gruppe $G \neq 1$ ersetze $k[G]$ durch den Koordinatenring $A(G)$.

<u>Problem</u>: Im Allgemeinen ist $\dim_k A(G) = \infty$.

<u>Lösung</u>: Finde <u>endlich-dimensionalen</u> G-invarianten Teilraum V von $A(G)$, der hinreichend groß ist, dass $G \hookrightarrow GL(V)$ injektiv ist.

Für $g \in G$, betrachte den Automorphismus $r_g : G \to G$, $x \mapsto x \cdot g$, $\rho(g) = (r_g)^* : A(G) \to A(G)$ ist k-Algebren-Automorphismus.

Wir erhalten $\rho : G \to GL(A(G))$, $g \mapsto \rho(g)$ (Gruppenhomomorphismus bzw. Darstellung) indem wir $A(G)$ als k-VR auffassen.

Lemma 1. Sei $V \subseteq \mathcal{A}(G)$ ein k-Untervektorraum.

(i) V ist G-invariant (d.h. $\rho(g)V = (r_g)^*(V) \subseteq V.\ \forall g \in G.$)

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta(V) = V \otimes_k \mathcal{A}(G) \qquad (\Delta : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G) \otimes_k \mathcal{A}(G) \text{ Komultiplikation})$$

(ii) Gelte zusätzlich $\dim_k V < \infty$.

Dann existiert ein endlich-dimensionaler G-invarianter k-UVR $W \subseteq \mathcal{A}(G)$ mit $V \subseteq W$.

Insbesondere gilt:

$$\mathcal{A}(G) = \bigcup_{\substack{W \subseteq \mathcal{A}(G) \text{ UVR}, \\ \dim_k W < \infty \\ W\ G\text{-invariant}}} W$$

Beweis.

(i) "$\Leftarrow$": Zu $f \in V$ wähle $f_i \in V$, $g_i \in \mathcal{A}(G)$ so dass

$$\mu^*(f) = \Delta(f) = \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes g_i$$

Ferner

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\Delta(f) = f \circ \mu"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\equiv"] & G \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

$(\mu^*(f) = f \circ \mu)$

$$\Rightarrow \big((r_g^*)(f)\big)(h) = f(hg)$$
$$= f \circ \mu(h,g) = \Delta(f)(h,g)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} f_i(h) \cdot g_i(g) \quad \forall h \in G$$

d.h. $$\rho(g)(f)(\cdot) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{g_i(g)}_{\in k} \cdot \underbrace{f_i(\cdot)}_{\in V} \in V.$$

"$\Rightarrow$": Sei $(f_i, i \in I)$ eine Basis von V und $(g_j, j \in J)$ s.d. $(f_i, g_j, i \in I, j \in J)$ eine k-Basis von $\mathcal{A}(G)$ ist. Für $f \in V$ beliebig existieren $u_i, v_j \in \mathcal{A}(G)$ mit
$$\Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i + \sum_{j \in J} g_j \otimes v_j$$

$$\underset{\text{s. oben}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\rho(g)(f)(\cdot)}_{\substack{\text{d.h. } \rho(g)(f) \text{ als} \\ \text{Funktion } G \to \mathbb{A}^1}} = \sum_{i \in I} f_i(\cdot) \cdot u_i(g) + \sum_{j \in J} g_j(\cdot) \cdot v_j(g) \underset{\substack{\text{Nach Voraussetzung, da} \\ V\ G\text{-invariant}}}{\in} V$$

$\Rightarrow v_j(g) = 0 \ \forall g \in G \ \Rightarrow v_j \equiv 0 \ \Rightarrow \Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i \in V \otimes_k \mathcal{A}(G).$

(ii) o.E. $\dim_k V = 1$, d.h. $V = \langle f \rangle_k \Rightarrow \exists f_i, g_i \in \mathcal{A}(G)$: $\Delta(f) = \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes g_i$

Setze $W' := \langle f_1, \ldots, f_r \rangle_k \underset{(i)}{\Longrightarrow} \rho(g)(f) \in W'$

Setze nun $W := \langle \rho(g)(f) \mid g \in G \rangle \subseteq W' \Rightarrow W$ ist endlich-dimensional.

$f \in W$, da $f = \rho(1_G)(f) \Rightarrow V \subseteq W$; $\rho(g)(\rho(h)(f)) = \rho(gh)(f) \in W \Rightarrow W$ ist G-invariant. ∎

Bemerkung 2. Ersetzt man $G \times G \xrightarrow{\mu} G$ durch eine Gruppenaktion (Morphismus von Varietäten) $G \times X \xrightarrow{\theta} X$ von G auf einer Varietät X, so erhält man $G \longrightarrow GL(A(X))$ für die man analoge Aussagen wie in Lemma 1 für $V \subseteq A(X)$ zeigen kann $(\Delta \longleftrightarrow \theta^*)$

Theorem 3. Jede affine algebraische Gruppe G lässt sich abgeschlossen in GL_n, für $n \in \mathbb{N}$ geeignet, einbetten.

Beweis. Sei $A(G) = k[g_1, \dots, g_r]$ als k-Algebra und $V = \langle g_1, \dots, g_r \rangle_k$ als k-VR.

$\underset{\text{Lemma 1 (ii)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n$ k-Lin. unabhängige k-Algebren-Erzeuger von $A(G)$, s.d. $W = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_k$ G-invariant ist. (und $V \subseteq W$).

$\underset{\text{Lemma 1 (i)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, a_{ij} \in A(G)$ mit $\Delta(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \otimes a_{ij}$, $1 \leq i \leq n$ $\qquad (1)$

$\underset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow}$ $\rho(g)(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \cdot a_{ij}(g)$, $1 \leq i \leq n$, $g \in G$; d.h. $(a_{ij}(g))$ ist Darstellungsmatrix von $\rho(g)$ bzgl. $f_1, \dots, f_n$.

Wir erhalten einen Morphismus

$$\begin{array}{ccl} G & \xrightarrow{\ \phi\ } & \mathbb{A}^{n^2}, \quad g \longmapsto (a_{ij}(g)) \\ & \searrow^{\psi} & \ \ \cup \\ & & GL_n \end{array}$$

ψ Gruppenhomomorphismus nach Konstruktion

(landet in GL_n, da $\rho(g)$ Automorphismen sind)

$\Longrightarrow$ $\psi^* : A(GL_n) \longrightarrow A(G)$ schickt $X_{ij} \longmapsto a_{ij}$

$\underset{\text{s. (1)}}{\Longrightarrow}$ $f_i(g) = \rho(g)(f_i)(1_G) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G)\, a_{ij}(g) \quad \forall g \in G$

d.h. $f_i = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G) \cdot a_{ij}$ $\underset{f_i \text{ erzeugen } A(G)}{\Longrightarrow}$ ψ^* ist surjektiv

$\Longrightarrow$ $G \longrightarrow GL_n$ ist abgeschlossene Einbettung (denn $I := \ker \psi^*$, $X' = V(I) \subseteq GL_n$ $\Longrightarrow A(X') \cong A(G) \underset{\text{Kat.-äquiv.}}{\Longrightarrow} X' \cong G$

$\blacksquare$

Korollar 4. G affine, algebraische Gruppe, $H \leq G$ abgeschlossene Untergruppe. Dann existiert ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum W mit UVR W_H sowie eine abgeschlossene Einbettung $G \longrightarrow GL(W)$ mit $H = \mathrm{Stab}_G(W_H)$.

Beweis. $I_H := \{ f \in A(G) \mid f|_H = 0 \}$ ist ein Ideal.

Im obigen Beweis von Theorem 3 o.E. $f_1, \ldots, f_r$ $(r \geq n)$ erzeugen das Ideal I_H.

$W_H := W \cap I_H$. Dann gilt:

$$g \in H \Leftrightarrow hg \in H \ \forall h \in H \Leftrightarrow r_g^*(I_H) \subseteq I_H$$

$$\Leftrightarrow r_g^*(W_H) \subseteq W_H$$

da $W_H = W \cap I_H$ und W ohnehin G-invariant ist.

$\square$