ALGEBRAISCHE GRUPPEN – Tutorium.

Aufgabe 3.

- $k[\mathbb{G}_a] = k[X]$ ist I.B.
- $k[\mathbb{G}_m] = \underbrace{k[X, X^{-1}]}_{= k[X]_X}$ ist I.B.
- $k[GL_n] = k[X_{ij}, \det^{-1}]$ ist I.B.
- $f: GL_n \to SL_n,\ A \mapsto \begin{pmatrix} (\det A)^{-1} & & \\ \vdots & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} A$ ist surjektiv

  GL_n irreduzibel, f stetig $\to$ $SL_n = f(GL_n)$ irreduzibel
- SO_n, Sp_{2n}: zeige folgendes Lemma: Seien $(Y_i)_{i \in I}$ irred. Varietäten, G affine alg. Gruppe, $f_i : X_i \to G$, $Y_i := f_i(X_i)$ mit $e \in Y_i$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H} := \bigcap_{\substack{K \leq G \\ \text{abg. UG} \\ \text{alle } Y_i \leq K}} K \quad \text{ist abg., irred. Untergruppe.}$$

Beweis.

OE: Vergrößere I so dass die Abb. $X_i \xrightarrow{f_i} G \xrightarrow{\iota} G$ auch vorkommen.

Für jede endliche Folge $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in I$ setze

$$Y_a := Y_{a_1} \cdot \ldots \cdot Y_{a_n}$$

$\Rightarrow$ Y_a irreduzibel, da stetiges Bild von $X_{a_1} \times \ldots \times X_{a_n} \to G$,

also auch $\overline{Y_a}$ irreduzibel.

Da $k[G]$ endlich-dimensional. $\exists$ Folge a, so dass $\overline{Y_a}$ maximal ist.

Beh. $\overline{Y_a}$ ist Untergruppe. (Dann $\overline{Y_a} = \mathcal{H}$)

Dazu: $\forall$ Folgen b, c gilt: $\overline{Y_b} \cdot \overline{Y_c} = \overline{Y_{(b,c)}}$

Damit: $\forall$ Folgen b: $\overline{Y_a} \subseteq \overline{Y_a} \cdot \overline{Y_b} \subseteq \overline{Y_{(a,b)}} \underset{\overline{Y_a}\text{ max.}}{=} \overline{Y_a}$.

Wähle $b = a$: $\overline{Y_a}$ abg. unter Multiplikation

Wähle b s.d. $Y_b = Y_a^{-1}$ $\Rightarrow$ $\overline{Y_a}$ ist abgeschlossen unter Inversen. $\blacksquare$

Fakt: $SL_n(k)$ wird erzeugt von $\begin{pmatrix} 1 & \ddots & a \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $\leftarrow i \neq j,\ a \in k$

Betrachte $f_{ij} : \mathbb{G}_a \to SL_n,\ a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & \ddots & a \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}\right) \leftarrow i, j$

Satz $\Rightarrow$ SL_n irreduzibel.

Aufgabe 2. φ stetig $\Rightarrow$ $\varphi(G^\circ)$ irreduzibel $\rightarrow \varphi(G^\circ) \subseteq \varphi(G)^\circ$

$\varphi(G^\circ)$ hat endl. Index in $\varphi(G)$ $\Rightarrow \varphi(G)^\circ \subseteq \varphi(G^\circ)$.

Aufgabe 1.

(a) G endliche Gruppe versehen mit der diskreten Topologie. $n = \#G$

$$G = \{\underbrace{g_1}_{=e}, \dots, g_n\}\ ; \quad V = \{ e_i := (0,\dots,0,\underset{i\text{-te Stelle}}{1},0,\dots,0) \mid i = 1..n \} \subseteq k^n.$$

$$= V\Big(\prod_{j=1}^{n} (X_1, \dots, X_{j-1}, X_j - 1, X_{j+1}, \dots, X_n) \Big)$$

$G \to V$, $g_i \mapsto e_i$ ist Bijektiv

$\rightsquigarrow$ $\mu : V \times V \to V$ etc. ist Morphismus von Varietäten.

Bsp. für Inversion: $\sigma \in S_n$ s.d. $g_i^{-1} = g_{\sigma(i)}$ $\forall i$, dann ist Inversion gg. durch $(X_1, \dots, X_n) \mapsto (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$

ähnlich für Multiplikation.

Als Hopf-Algebra: G wird beschrieben durch $k^n = \prod_{g\in G} k$

Komultiplikation: $\mathrm{Hom}_k(\prod_{g \in G} k, k) = \{\pi_1, \dots, \pi_n\} \cong G$
(π_i: Projektionen)

Wollen:

$$\begin{array}{ccc} G \times G \cong \mathrm{Hom}(k^n \otimes k^n, k) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\prod_{g\in G} k, k) \cong G \\ \| & & \uparrow \\ \mathrm{Hom}(\prod_{(x,y)\in G^2} k, k) & & \text{Komultiplikation} \end{array}$$

$$(0, \dots, 0, \underset{g}{1}, 0, \dots, 0) \xmapsto{\text{Komultiplikation}} \begin{pmatrix} 1 & \text{falls } xy = g \\ 0, & \text{sonst} \end{pmatrix}_{(x,y)\in G^2}$$

Als Funktor:

G entspricht $k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}_{\text{red., e.e.}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Grp}}$

$$A \longmapsto \mathrm{Hom}_k(\prod_g k, A)$$

Es gilt: V nicht zshgd. $\Leftrightarrow$ $k[V] = A_V \cong R_1 \times R_2$, $R_1 \neq 0 \neq R_2$

$\Leftrightarrow \exists\, 0 \neq e_1, e_2 \in R = k[V]$: $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 + e_2 = 1$, $e_1 e_2 = 0$.

Ist jetzt R eine e.e. red. k-$\underline{\mathrm{Alg}}$ <u>ohne</u> solche Idempotente

und $f \in \mathrm{Hom}_k(k^n, R)$ dann $\forall i$: $f(e_i) \in \{0,1\}$ und es gibt ein i

so dass $f(e_i) = 1$ (sonst $f \equiv 0$ ↯ $1 \mapsto 1$)

$\forall j \neq i$: $f(e_j) = 0$, da sonst $f(e_i), f(e_j)$ nichttriv. Idemp. wären.

ALGEBRAISCHE GRUPPEN – Tutorium.

$\Rightarrow$ Wenn R allgemeine e.e. red. k-Alg, $R \cong R_1 \times \dots \times R_d$ alle R_i nichttriv.

dann $\mathrm{Hom}_k\left(\prod_g k, R\right) = \prod_{j=1}^{d} \mathrm{Hom}_k\left(\prod_g k, R_j\right)$

$\rightsquigarrow$ G entspricht Funktor $R \longmapsto G^{\#\text{Zshgskomp. von } R}$ geh. Varietät.

(b) A: endl.-dim k-Algebra. Wähle Isomorphismus $A \cong k^n$ als k-VR.

Jedes $a \in A$ definiert Endomorphismus $x \mapsto ax$.

$a \in A^\times \Longleftrightarrow \det(x \mapsto ax) \in k^\times$

Also $A^\times = \{ a \in A \mid \det(x \mapsto ax) \neq 0 \} \cong GL_n k$

(det ist durch Polynom f gegeben)

Koordinatenring: $\underbrace{k[X_1, \dots, X_{n+1}] / (1 - f X_{n+1})}_{=: X}$

Als Hopf-Algebra: Viel rechnen!

Als Funktor: $R \longmapsto \mathrm{Hom}_k(X, R) = \mathrm{Hom}_R\left(R[X_1, \dots, X_{n+1}] / (1 - f X_{n+1}), R\right)$

$\cong (A \otimes_k R)^\times$

BRUNNEN