

ALGEBRAISCHE GRUPPEN

- Literatur:
- T.A. Springer, Linear Algebraic Groups
 - J.F. Humphreys, — " —
 - W.C. Waterhouse, Introduction to Affine Group Schemes
 - [Borel, Linear Algebraic Groups (setzt Geometric vorans)]

O. EINLEITUNG

Algebraische Gruppen = Gruppenobjekte in der Kategorie algebraischer Varietäten.

Varietäten: Nullstellenmengen von Polynomen in $A_k^n = k^n$ (oder P_k^n)

Morphismen: komponentenweise durch Polynome gegeben.

Vergleiche:

- topologische Gruppen = Abb. sind stetig (Grp.obj in Top)
- Lie - Gruppen = Abb. sind glatt (Grp.obj. in Mfd)

Beispiel:

$$G = GL_n(k), \quad k = \overline{k} \text{ alg. abgeschlossen}$$

Trick von Rabinowitch: $GL_n(k) = \left\{ (a_{ij}, d) \in k^{n^2+1} \mid \det(a_{ij}) \cdot d = 1 \right\}$

$$\Rightarrow A = (a_{ij}) \text{ hat } \det A \neq 0, \text{ d.h. } A \in GL_n(k)$$

$$d = \det A^{-1}, \quad A^{-1} = d \cdot \underbrace{A^{\text{adj}}}_{\text{hängt polynomell von } (a_{ij}) \text{ ab.}}$$

$$\Rightarrow A \mapsto A^{-1} \text{ ist durch Polynome gegeben}$$

$$(A, B) \mapsto A \cdot B \text{ ist auch durch Polynome gegeben.}$$

Beschränkt man sich auf affine Varietäten, erhält man affine algebraische Gruppen, für die gilt: $G \hookrightarrow GL_n(k)$ Zariski-abg. Untermannigf.

für geeignetes n (Einbettungssatz), daher auch der Name lineare algebraische Gruppe.

Ziel: Struktur reduzierter / halbeinfacher affiner alg. Gruppen über alg. abg. Körper k (mit $\text{char } k = 0$ oder $\text{char } k = p > 0$) untersuchen.

Strategie: G reduktiv $GL_n(k)$
 $U \cap T$

$U \rtimes T = \exists$ "Borel - Untergruppe" $(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix})$
 U

$T \cong G_m^n$ U unipotent $T = (\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix})$ $(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) = U$

(kommutative)

Torus Gruppe

$$G_m = GL_1(k)$$

$T \subseteq G$ operiert auf $\mathfrak{g} = \text{Lie } G = T_e G$ (Tangentialraum)

(z.B. $GL_n(k)$ operiert via Konjugation auf $M_n(k) = \mathfrak{g}$)

Nicht-triviale Eigenräume liefern "Charaktere" $T \rightarrow k^\times$ (die die Eigenwerte "parametrisieren"), die ein sogenanntes Wurzelsystem bilden, welche man mittels sog. Dynkin-Diagrammen klassifizieren kann.

(z.B. $(\begin{smallmatrix} x_i & 0 \\ 0 & x_j \end{smallmatrix}) \mapsto \frac{x_i}{x_j}$ sind Wurzeln für $1 \leq i \neq j \leq n$ $GL_n(k)$)

Hierarchie algebraischer Gruppen



01. ALGEBRAISCHE GEOMETRIE UND FUNKTOREN

I. AFFINE VARIETÄTEN

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper; $A_k^n := A_k^n := k^n$ heißt **affiner n-Raum**.

Def. 1. $X \subseteq A_k^n$ heißt **affine Varietät**, falls ein Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n] = k[\underline{X}]$ existiert, so dass $X = V(I) = \{P \in A_k^n \mid \forall f \in I: f(P) = 0\}$

Nach dem Hilbert'schen Basissatz existieren endlich viele $f_1, \dots, f_n \in I$ mit $I = (f_1, \dots, f_n)$.

Lemma 2. Für Ideale $I_1, I_2, (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

- (i) $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow V(I_2) \subseteq V(I_1)$
- (ii) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2)$
- (iii) $V(\sum_\lambda I_\lambda) = \bigcup_\lambda V(I_\lambda)$

Die Mengen $\{V(I) \mid I \trianglelefteq k[\underline{X}]\}$ bilden genau die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf A_k^n , der sogenannten **Zariski-Topologie**. ($V(\emptyset) = A_k^n, V(1) = \emptyset$)

Affine Varietäten tragen die Unterraumtopologie.

Lemma 3. Die offenen Mengen der Form $D(f) := V((f))^\complement = \{P \in A_k^n \mid f(P) \neq 0\}$ mit $f \in k[\underline{X}]$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf A_k^n .

Für eine affine Varietät $X \subseteq A_k^n$ setze $I(X) := \{f \in k[\underline{X}] \mid \forall P \in X: f(P) = 0\} \trianglelefteq k[\underline{X}]$.
Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ setze $\text{rad } I := \sqrt{I} := \{f \in k[\underline{X}] \mid \exists n \in \mathbb{N}: f^n \in I\}$, das **Radikal** von I .

Gilt $I = \sqrt{I}$, so heißt I **Radikalideal**.

Theorem 4. (Hilbert'scher Nullstellensatz)

$I(\cdot), V(\cdot)$ induzieren Bijektionen

$$\{\text{Radikalideale in } k[\underline{X}]\} \xleftrightarrow[V(\cdot)]{I(\cdot)} \{\text{affine Varietäten im } A_k^n\}$$

Korollar 5. Maximale Ideale von $k[\underline{X}]$ entsprechen abgeschlossenen Punkten.

$$m_a := I(\{a\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n); \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in A_k^n$$

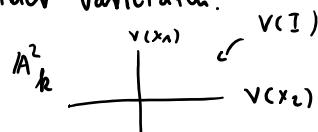
Lemma 6. Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

$I \in \text{Spec } k[\underline{X}] \iff Z = V(I)$ ist irreduzibel als topologischer Raum.

Irreduzible Räume sind zusammenhängend.
 $Y \subseteq X$ irreduzibel $\iff \overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

Korollar 9. Jede affine Varietät ist eine endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten.

Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \trianglelefteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$



$$\text{Bsp. 10. } \mathcal{I} = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2], \quad V(\mathcal{I}) = V(x_1) \cup V(x_2)$$

$$A^2_k$$

Koordinatenachsen, zerlege in irred.
Komponenten.

Def. 11. Für eine affine Varietät X heißt $A(X) := A_X := \frac{k[X]}{I(X)}$ der **Koordinatenring** von X .
 ("Morphismen $X \rightarrow \mathbb{A}^n$ ")

$A(X)$ ist eine reduzierte (so = 0) endl. erz. k -Algebra.

$A(X)$ ist Integritätsring $\Leftrightarrow X$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow I(X) \in \text{Spec } k[X]$.

Def. 12. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Ein **Morphismus** $X \xrightarrow{\phi} Y$ von Varietäten besteht aus einem m -Tupel $\phi = (f_1, \dots, f_m) \in A(X)^m$ mit $\phi(P) := (f_1(P), \dots, f_m(P)) \in Y \quad \forall P \in X$.

Lemma 13. Morphismen von Varietäten sind stetig bzgl. der Zariski-Topologie.

Beweis.

$$\phi^{-1}(D(f)) = D(\underbrace{f \circ \phi}_{\in A(Y)}) \subseteq A(X)$$

Def. 14 $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$. Dann ist das kartesische Produkt $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ wieder eine affine Varietät, das **Produkt** von X, Y .

Achtung:
 Beweis. (14) $X \times Y$ trägt nicht die Produkttopologie

$$X = V(f_1, \dots, f_n), \quad Y = V(g_1, \dots, g_m) \Rightarrow X \times Y = V(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$$

Theorem 15. Der Funktor $X \mapsto A(X)$ induziert eine Kategorienäquivalenz von

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{affine Varietäten } / k \}^{\text{op}} & \xleftrightarrow{\sim} & \{ \text{reduzierte endl. erz. } k\text{-Algebren} \} \\ (X \xrightarrow{\phi} Y) & \longmapsto & A(Y) \xrightarrow{\phi^*} A(X) \\ & & f + I(Y) \mapsto f \circ \phi + I(X) \end{array}$$

Der quasireverse Funktor ordnet R die Menge $\text{Spec}_m(R)$ zu, $k[X] \rightarrow R$ induziert $\text{Spec}_m(R) \rightarrow \text{Spec } k[X] = \mathbb{A}_k^n$

Alternativ können wir den Funktor $\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(-, k)$ benutzen, da $\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(R, k) \cong \text{Spec } R$
 $f \mapsto \ker f$
 $(k \subseteq R/m \text{ ist endlich, d.h. } R/m = k, \text{ da } k = \bar{k})$

II. FUNKTOREN

Yoneda-Lemma. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Dann ist der kontravariante Funktor

$$h: \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \underline{\text{Sets}}) = \underline{\text{Sets}}^{\mathcal{C}},$$

$$\begin{array}{ccc} A & \mapsto & h_A: \mathcal{C} \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{C}) \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi^* \\ B & \mapsto & h_B: \mathcal{C} \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, \mathcal{C}) \end{array}$$

volltreu, d.h.

$$\begin{aligned} h_A(B) &= \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\cong} \text{Mor}_{\text{Func}}(h_B, h_A) \\ \phi &\mapsto (\phi^*: h_B(C) \rightarrow h_A(C))_{C \in \mathcal{C}} \quad (\text{nat. Trafos}) \end{aligned}$$

$$\eta_B(id_B) \leftarrow (\eta_C: h_B(C) \rightarrow h_A(C))_{C \in \mathcal{C}}$$

Mit anderen Worten: $A \in \mathcal{C}$ ist genauso gut wie der Funktor h_A .

Funktoren der Form h_A heißen **darstellbar**.

Bsp. 1. \mathcal{C} : Kategorie endl. vrt. reduzierter k -Algebren.

$$\begin{aligned} (i) \quad A^n(): \mathcal{C} &\rightarrow \underline{\text{Sets}} & \text{wird dargestellt von } k[x_1, \dots, x_n] \\ R &\mapsto R^n & \text{da } R^n = \text{Hom}_{k\text{-Alg}}([k[x]], R) \end{aligned}$$

(ii) $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$ seien darstellbar. Dann ist der Produktfunktör

$$F \times G: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}, R \mapsto F(R) \times G(R) \text{ darstellbar.}$$

$$\begin{aligned} F = h_A, G = h_B, A, B \in \mathcal{C} &\Rightarrow F(R) \times G(R) = \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, R) \times \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, R) \\ \text{d.h. } F \times G &= h_{A \otimes_k B} = \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A \otimes_k B, R) \end{aligned}$$

II. ALGEBRAISCHE GRUPPEN: GRUNDLAGEN

1. AFFINE ALGEBRAISCHE GRUPPEN. $k = \bar{k}$

Def. + Satz 1.

(i) Eine affine (lineare) algebraische Gruppe $/k$ ist eine affine Varietät G über k zusammen mit Morphismen

$$\mu: G \times G \longrightarrow G \quad (\text{Multiplikation})$$

$$\iota: G \longrightarrow G \quad (\text{Inversion})$$

$$\varepsilon: \mathbb{A}_k^0 \longrightarrow G \quad (\text{neutrales Element})$$

so dass die Gruppenaxiome gelten:

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times \text{id}} & G \times G \\ \downarrow \text{id} \times \mu & \parallel & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array} \quad (\text{Assoziativität})$$

$$\begin{array}{ccccc} G \times \mathbb{A}^0 & \xrightarrow{\text{id} \times \varepsilon} & G \times G & \xleftarrow{\varepsilon \times \text{id}} & \mathbb{A}^0 \times G \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \mu & \swarrow \text{id} & \\ & \text{pr}_1 & G & \text{pr}_2 & \end{array} \quad (\text{neutrales Element})$$

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{(\text{id}, \varepsilon)} & G \times G & \xleftarrow{(\iota, \text{id})} & G \\ \downarrow \text{konst.} & \parallel & \downarrow \mu & \parallel & \downarrow \text{konst.} \\ A^0 & \xrightarrow{\varepsilon} & G & \xleftarrow{\varepsilon} & A^0 \end{array} \quad (\text{Inverses})$$

Morphismen in der Kategorie (affiner) alg. Gruppen: Morphismen von Varietäten, die obige Strukturen respektieren.

(ii) Die Kategorie affiner algebraischer Gruppen ist (anti-)äquivalent zu folgenden Kategorien:

a) Objekte: kommutative Hopf- \mathbb{k} -Algebren, d.h. reduzierte, kommutative, endl. erz. \mathbb{k} -Algebren + zusammen mit Morphismen

- $\Delta: A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{k}} A$ (Komultiplication)
- $\iota: A \rightarrow A$ (Koinversion)
- $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{k}$ (\mathbb{k} -Einheit) so dass:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\mathbb{k}} A \otimes_{\mathbb{k}} A & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ \uparrow \text{id} \otimes \Delta & \text{III} & \uparrow \Delta \\ A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \end{array}$$

(Komultiplication)

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes \mathbb{k} & \xleftarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & A \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & \mathbb{k} \otimes A \\ & \nwarrow \text{III} & \uparrow \varepsilon & \nearrow \text{III} & \\ & A & & & \mathbb{k} \end{array}$$

(Koeinheit)

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{(\iota, \text{id})} & A \otimes A & \xrightarrow{(\text{id}, \varepsilon)} & A \\ \uparrow \text{Strukturmorph.} & \text{II} & \uparrow \Delta & \text{II} & \uparrow \text{Strukturmorph.} \\ \mathbb{k} & \xleftarrow{\varepsilon} & A & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{k} \end{array}$$

(Koinversion)

Morphismen: \mathbb{k} -Algebren, kompatibel mit Zusatzstrukturen.

b) Objekte: Darstellbare Funktoren

$$\mathcal{C} := \text{Kategorie red. endl. erz. } \mathbb{k}\text{-Algebren} \longrightarrow \mathbf{Grp}$$

Morphismen: Natürliche Transformationen.

Beweis.

(i) \Leftrightarrow (a): Thm. I.1.15 $\Rightarrow G \mapsto A(G)$ definiert (anti-)Äquivalenz,
beachte $A(V \times W) = A(V) \otimes_{\mathbb{k}} A(W)$, so dass die Diagramme
aus (a) denen aus (i) entsprechen.

(a) \Leftrightarrow (b): $A \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{k}}(A, -)$ induziert Äquivalenz nach Yoneda-Zeitma;
Die Diagramme in (a) implizieren, dass die \mathbb{k}_A Werte in Gruppen annehmen!

Die Beschreibung (ii)(b) führt zu dem allgemeineren Begriff des (affinen) Gruppenschemas als Funktor

$$\mathbb{k}\text{-Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp} \quad \text{so dass der induzierte Funktor durch eine}$$

Vergissfkt. (endl. erz.) \mathbb{k} -Algebra darstellbar ist.

\downarrow $\xrightarrow{\text{set}}$ (jetzt kann \mathbb{k} ein beliebiger Körper / Ring / Schema sein)

Beispiele 2.

1) $\mathbb{G}_a := \mathbb{A}^1$ ("additive Gruppe")

$$(i) \quad \mu(x,y) := x+y, \quad \iota(x) = -x, \quad \varepsilon(*) = 0.$$

$$(a) \quad A = k[X], \quad \Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \iota(X) = -X, \quad \varepsilon(X) = 0$$

$$(b) \quad \mathbb{G}_a(R) = (R, +) = \text{Hom}_{k[R]}(k[X], R)$$

2) $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = V(XY-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ ("multiplikative Gruppe")

$$(i) \quad \mu(x,y) = xy, \quad \iota(x) = x^{-1}, \quad \varepsilon(*) = 1$$

$$(a) \quad A = k[x, x^{-1}], \quad \Delta(X) = X \otimes X, \quad \iota(X) = X^{-1}, \quad \varepsilon(X) = 1$$

$$(b) \quad \mathbb{G}_m(R) = (R^\times, \cdot) = \text{Hom}_{k[\mathbb{G}_m]}(k[x, x^{-1}], R)$$

3) $\mathbb{P}_n (\subseteq \mathbb{G}_m) = V(x^n - 1) \subseteq \mathbb{A}^1$ (i.A. nicht irreduzibel / zsmlyd.)

4) GL_n

$$(i) \quad GL_n(k) \subseteq M_n(k) = \mathbb{A}^{n^2}$$

$$(a) \quad A = k[X_{ij}, \underbrace{\det(x_{ij})^{-1}}_{=: d}], \quad \Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}, \quad \Delta(d) = d \otimes d$$

$$\iota(d) = \det(x_{ij}), \quad \iota(X_{ij}) = d \cdot \text{Adj}(X_{ij})$$

$$\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \varepsilon(d) = 1.$$

$$(b) \quad R \mapsto GL_n(R)$$

$$5) \quad SL_n = V(\det - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$$

$$6) \quad V \text{ endl.-dim. } k\text{-VR}$$

$$(b) \quad R \mapsto (V \otimes_k R, +)$$

$$7) \quad GL(V) \quad (V \text{ wie in 6}) \quad (b): \quad R \mapsto GL(V \otimes_k R)$$

$$8) \quad \text{Morphismen: } \lambda \in k^\times, n \in \mathbb{Z}: \quad \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a, x \mapsto \lambda x$$

$$\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m, x \mapsto x^n$$

$$GL_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m$$

2. UNTERGRUPPEN

Def. 1. Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ ist eine abgeschlossene Untervektorräume, die zugleich eine Untergruppe ist. H besitzt (via Einschränkung der Multiplikation-/Inversen-/„Neutraler Element“-Abbildung) eine eindeutige Struktur als algebraische Gruppe, so dass die Inklusion $H \hookrightarrow G$ ein Morphismus alg. Grp. ist.

Bsp. 2. Abgeschlossene UG von GL_n

- SL_n ($\det = 1$)
- D_n Diagonalmatrizen ($X_{ij} = 0 \vee i=j$)
- B_n obere Dreiecksmatrizen ($X_{ij} = 0, i > j$)
- U_n : unitäre Matrizen
- O_n / Sp_{2n} : Matrizen A mit $A^T J A$ für $J = \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & -E_n \end{pmatrix}$ Sp_{2n}
- $SO_n = O_n \cap SL_n$

Proposition 3. Sei G eine algebraische Gruppe.

- Es gibt genau eine irreduzible Komponente $G^\circ \subseteq G$, die das neutrale Elt. e enthält.
- G° ist eine normale abg. Untergruppe von endlichem Index.
- G° ist die einzige Zusammenhangskomponente, die e enthält.
- Jede abg. Untergruppe von G von endlichem Index umfasst G° .
(Eine alg. Grp. ist genau dann zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist.)

Beweis.

- Seien X, Y irred. Komponenten (insb. abg.), die e enthalten.

$$\xrightarrow{\text{AlgGeo}} X \times Y \text{ irreduzible Variedadät} \quad (\text{Springer Thm. 1.5.4})$$

$$\Leftrightarrow A, B \text{ integre } k\text{-Alg.} \Rightarrow A \otimes_k B \text{ integre}$$

$$\xrightarrow[p \text{ stetig}]{} X \cdot Y = p(X \times Y) \text{ irreduzibel.}$$

$$\xrightarrow{\text{UI}} \overline{X \cdot Y} \text{ irreduzibel} \quad \Rightarrow (i) \quad X = \overline{XY} = Y \quad \text{und} \quad X \text{ ist abg. unter Multiplikation.}$$

$$X, Y \text{ irreduzible Komponenten}$$

Da ι Homöomorphismus, ist $\iota e \iota^{-1} = X^{-1}$ ebenfalls eine irreduzible Komponente, d.h. $X = X^{-1}$
 $\Rightarrow X$ abg. Untergruppe.

Analog folgt: $g X g^{-1} = X \quad \forall g \in G$, d.h. $X = G^\circ$ ist normal

Die Nebenklassen $g X$ sind die Komponenten von G ($g \in Y$ dgl. Komp.: $e \in g^{-1} Y \Rightarrow Y = g X$)

Da es in Varietäten nur endlich viele irreduzible Komponenten gibt folgt (ii).

Darüberhinaus sind alle irreduziblen Komponenten disjunkt.

Da Zusammenhangskomponenten Vereinigungen irreduz. Komponenten sind, müssen irreduz. und zsmh. Komponenten übereinstimmen. \Rightarrow (iii).

(iv) Sei $H \subseteq G$ abg. von endlichem Index. $\Rightarrow H^\circ \subseteq G^\circ$ abg. von endlichem Index.

$\Rightarrow H^\circ \subseteq G^\circ$ ist offen abgeschlossen $\xrightarrow{G^\circ \text{ zsmh.}} H^\circ = G^\circ \Rightarrow$ (iv).
gilt \rightarrow
in top. Grp. □

G° heißt die Zusammenhangskomponente der 1.

27.04.18

Theorem 4. (Chevalley)

Sei $X \xrightarrow{\phi} Y$ ein Morphismus von (quasi-)projektiven oder affinen Varietäten. Dann existiert $\emptyset \neq U \subseteq \overline{\phi(X)}$ mit $U \subseteq \overline{\phi(X)}$ offen.

Beweis. T.A. Springer, Theorem 1.9.5. □

Lemma 5. (i) Ist $H \subseteq G$ eine (abstrakte) Untergruppe, so ist $\bar{H} \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und damit selbst eine abgebraische Gruppe.

(ii) Ist $G \xrightarrow{\phi} H$ ein Morphismus abgebraischer Gruppen, so sind $\ker \phi$, $\text{im } \phi$ abgeschlossene Untergruppen.

Beweis.

(i) Die Multiplikation mit $g \in G$ (von links oder rechts) induziert einen Isomorphismus (von Varietäten) $G \rightarrow G$. $\Rightarrow g\bar{H}$ abgeschlossen und $g\bar{H} \supseteq \bar{gH} \Rightarrow g\bar{H} \supseteq \overline{gH}$.
und $g\bar{H} = \overline{gH}$ (überlegen!).

Analog: $\bar{H}g = \overline{Hg}$. $\forall g \in G$.

1.) Beh.: $H\bar{H} \subseteq \bar{H}$. Sei $h \in H$. $\Rightarrow \bar{H}h = \overline{\bar{H}h} \subseteq \bar{H}$ ✓

2.) Beh.: $\bar{H}\bar{H} \subseteq \bar{H}$. Sei $h \in \bar{H}$. $\Rightarrow Hh \subseteq \bar{H} \Rightarrow \bar{H}h = \overline{Hh} \subseteq \bar{H}$ ✓

3.) $\bar{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \bar{H}$, da die Inversion $\iota: G \rightarrow G$ ein Isomorphismus von Varietäten ist.

2.), 3.) $\rightarrow \bar{H}$ ist Untergruppe, abgeschlossen klar.

(ii) $\ker \phi$ ist offensichtlich abgeschlossene Untergruppe (denn $\ker \phi = \phi^{-1}(\{e\})$ und $\{e\} \subseteq H$ abgeschlossen. Punkte sind immer abgeschlossen in abgebraischen Gruppen!)

↑
Sojar in allgemeinen (affinen) Varietäten gemäß Hilberts Nullstellensatz

Nach Chevalley existiert $\emptyset \neq U \subseteq \overline{\phi(G)}$ mit $U \subseteq \overline{\phi(G)}$ offen

$\Rightarrow \phi(G) = \bigcup_{h \in \phi(G)} hU \subseteq \overline{\phi(G)}$. Die Behauptung folgt mit " $G = \phi(G)$ ", " $UV = U = V = \phi(G)$ " aus dem Folgenden Lemma. □

Lemma 6. $U, V \subseteq G$ dicht und offen $\Rightarrow UV = G$.

Beweis.

$U \subseteq G$ dicht, offen.

$$\begin{array}{c} \Rightarrow \\ G = \prod_{\text{endl.}} gG^{\circ} \\ \text{Prop. 3'} \quad \text{offen, abg.} \end{array} \quad U \cap G^{\circ} \subseteq G^{\circ} \text{ dicht und } \emptyset \neq U \cap G^{\circ} \text{ (da } G^{\circ} \subseteq G \text{ mit } G^{\circ} \neq \emptyset)$$

Also d.h. $G = G^{\circ}$ irreduzibel.

$$g \in G \text{ beliebig } \Rightarrow gU^{-1}, U \subseteq G \text{ offen + dicht } \Rightarrow G \text{ irreduzibel } gU^{-1} \cap U \neq \emptyset, \text{ d.h. } g \in UV. \\ \Rightarrow UV = G. \quad \blacksquare$$

Bemerkung. Algebraische Gruppen sind i.A. keine topologischen Gruppen!

$G \times G \xrightarrow{\mu} G$ ist zwar stetig, aber bezüglich der Zariski-Topologie auf $G \times G$
(+ Produkttopologie)

3. EINBETTUNGEN IN GL_n

Sei G eine endliche Gruppe und $k[G]$ die zugehörige Gruppenalgebra. Die reguläre Darstellung
(d.h. G operiert durch Multiplikation auf $k[G]$) induziert eine Abbildung

$$G \hookrightarrow GL(k[G]), \text{ die injektiv ist.}$$

Da das Bild endlich ist, ist es Zariski-abgeschlossen. Insbesondere ist jede endliche Gruppe
eine algebraische Gruppe nach Lemma 2.5 und Def. 2.1.

Idee: Für affine algebraische Gruppe $G \neq 1$ ersetze $k[G]$ durch den Koordinatenring $A(G)$.

Problem: Im Allgemeinen ist $\dim_k A(G) = \infty$.

Lösung: Finde endlich-dimensionalen G -invarianten Teilraum V von $A(G)$, der hinreichend
groß ist, dass $G \hookrightarrow GL(V)$ injektiv ist.

Für $g \in G$, betrachte den Automorphismus $r_g: G \rightarrow G, x \mapsto x \cdot g$, $p(g) = (r_g)^*: A(G) \rightarrow A(G)$
ist k -Algebra-Automorphismus.

Wir erhalten $\rho: G \rightarrow GL(A(G)), g \mapsto \rho(g)$ (Gruppenhomomorphismus bzw.
indem wir $A(G)$ als k -VR auffassen. Darstellung)

Lemma 1. Sei $V \subseteq A(G)$ ein \mathbb{k} -Untervektorraum.

(i) V ist G -invariant (d.h. $g(y)V = (\tau_g)^*(V) \subseteq V, \forall g \in G$)

$$\Leftrightarrow \Delta(V) = V \otimes_{\mathbb{k}} A(G) \quad (\Delta: A(G) \rightarrow A(G) \otimes_{\mathbb{k}} A(G) \text{ Konkavfunktion})$$

(ii) Gelte zusätzlich $\dim_{\mathbb{k}} V < \infty$.

Dann existiert ein endlich-dimensionaler G -invarianter \mathbb{k} -UVR $W \subseteq A(G)$ mit $V \subseteq W$. Insbesondere gilt:

$$A(G) = \bigcup_{\substack{W \subseteq A(G) \text{ UVR}, \\ \dim_{\mathbb{k}} W < \infty \\ W \text{ } G\text{-invariant}}} W$$

Beweis.

(i) " \Leftarrow ": Zu $f \in V$ wähle $f_i \in V, g_i \in A(G)$ so dass

$$\mu^*(f) = \Delta(f) = \sum_{i=1}^r f_i \otimes g_i$$

Ferner

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \Delta(f) = f \circ \mu & \searrow & \downarrow f \\ (\mu^*(f) = f \circ \mu) & & \mathbb{A}^1 \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} ((\tau_g)^*(f))(h) &= f(hg) \\ &= f \circ \mu(h, g) = \Delta(f)(h, g) \\ &= \sum_{i=1}^r f_i(h) \cdot g_i(g) \quad \forall h \in G \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \underbrace{\rho(g)(f)(\cdot)}_{\in \mathbb{k}} = \sum_{i=1}^r \underbrace{g_i(g)}_{\in \mathbb{k}} \cdot \underbrace{f_i(\cdot)}_{\in V} \in V.$$

" \Rightarrow ": Sei $(f_i, i \in I)$ eine Basis von V und $(g_j, j \in J)$ s.d. $(f_i, g_j, i \in I, j \in J)$ eine \mathbb{k} -Basis von $A(G)$ ist. Für $f \in V$ beliebig existieren $u_i, v_j \in A(G)$

$$\text{mit } \Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i + \sum_{j \in J} g_j \otimes v_j$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{\text{s. oben}} \underbrace{\rho(g)(f)(\cdot)}_{\text{d.h. } \rho(g)(f) \text{ als Funktion } G \rightarrow \mathbb{A}^1} = \sum_{i \in I} f_i(\cdot) \cdot u_i(g) + \sum_{j \in J} g_j(\cdot) \cdot v_j(g) \underset{\mu}{\in} V \quad \begin{aligned} &\text{Nach Voraussetzung, da} \\ &V \text{ } G\text{-invariant} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_j(g) = 0 \quad \forall g \in G \quad \Rightarrow v_j = 0 \quad \Rightarrow \Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i \in V \otimes_{\mathbb{k}} A(G).$$

(ii) o.E. $\dim_{\mathbb{k}} V = 1$, d.h. $V = \langle f \rangle_{\mathbb{k}}$ $\Rightarrow \exists f_1, f_r \in A(G): \Delta(f) = \sum_{i=1}^r f_i \otimes g_i$
Setze $W' := \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathbb{k}}$ $\Rightarrow \rho(g)(f) \in W'$

Setze nun $W := \langle \rho(g)(f) \mid g \in G \rangle \subseteq W' \Rightarrow W$ ist endlich-dimensional.

$f \in W$, da $f = \rho(1_g)(f) \Rightarrow V \subseteq W$; $\rho(g)(\rho(h)(f)) = \rho(gh)(f) \in W \Rightarrow W$ ist G -invariant. □

Bemerkung 2. Ersetzt man $G \times G \xrightarrow{\mu} G$ durch eine Gruppenaktion (Morphismus von Varietäten) $G \times X \xrightarrow{\theta} X$ von G auf einer Varietät X , so erhält man $G \rightarrow GL(A(X))$ für die man analoge Aussagen wie in Lemma 1 für $V \subseteq A(X)$ zeigen kann ($\Delta \leftrightarrow \theta^*$)

Theorem 3. Jede affine algebraische Gruppe G lässt sich abgeschlossen in GL_n , für $n \in \mathbb{N}$ geeignet, einbetten.

Beweis. Sei $A(G) = k[g_1, \dots, g_r]$ als k -Algebra, und $V = \langle g_1, \dots, g_r \rangle_k$ als k -VR.

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f_1, \dots, f_n$ k -Lin. unabhängige k -Algebra-Erzeuger von $A(G)$, s.d. (ii) $W = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_k$ G -invariant ist. (und $V \subseteq W$).

\Rightarrow Lemma 1 (i) $\exists a_{ij} \in A(G)$ mit $\Delta(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \otimes a_{ij}, 1 \leq i \leq n$ (1)

\Rightarrow wie oben $p(g)(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \cdot a_{ij}(g), 1 \leq i \leq n, g \in G$; d.h. $(a_{ij}(g))$ ist Darstellungsmatrix von $p(g)$ bzgl. f_1, \dots, f_n .

Wir erhalten einen Morphismus

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi} & A^{k^2}, \quad g \mapsto (a_{ij}(g)) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \text{id} \\ & \text{Gruppenhomomorphismus nach Konstruktion} & GL_n \\ & \nearrow \psi & \end{array} \quad (\text{landet in } GL_n, \text{ da } p(g) \text{ Automorphismen sind})$$

$$\Rightarrow \psi^*: A(GL_n) \rightarrow A(G) \text{ schickt } X_{ij} \mapsto a_{ij}$$

$$\stackrel{s.(1)}{\Rightarrow} f_i(g) = p(g)(f_i)(1_G) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G) a_{ij}(g) \quad \forall g \in G$$

$$\text{d.h. } f_i = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G) \cdot a_{ij} \quad \stackrel{\substack{\text{f_i erzeugt} \\ A(G)}}{\Rightarrow} \quad \psi^* \text{ ist surjektiv}$$

$$\Rightarrow G \rightarrow GL_n \text{ ist abgeschlossene Einbettung} \quad (\text{denn } I := \ker \psi^*, X^1 = V(I) \subseteq GL_n \\ \Rightarrow A(X^1) \cong A(G) \stackrel{\substack{\text{kat.-} \\ \text{äquiv.}}}{\Rightarrow} X^1 \cong G$$

■

Korollar 4. G affine, algebraische Gruppe, $H \leq G$ abgeschlossene Untergruppe. Dann existiert ein endlich-dimensionaler k -Vektorraum W mit UVR W_H sowie eine abgeschlossene Einbettung $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ mit $H = \mathrm{Stab}_G(W_H)$.

Beweis.

$I_H := \{f \in A(G) \mid f|_H = 0\}$ ist ein Ideal.

Im obigen Beweis von Theorem 3 o.E. $f_{1, \dots, r}$ ($r \geq n$) erzeugendes Ideal I_H .

$W_H := W \cap I_H$. Dann gilt:

$$g \in H \iff hg \in H \quad \forall h \in H \iff \tau_g^*(I_H) \subseteq I_H$$

$$\iff \tau_g^*(W_H) \subseteq W_H$$

da $W_H = W \cap I_H$ und W eindeutig G -invariant ist. ■