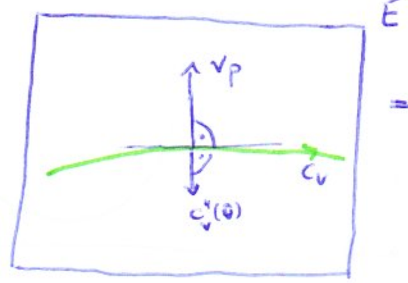
$c''_v(0) \perp T_pM$

$\exists!\, k_v \in \mathbb{R}: \quad c''_v(0) = k_v \cdot \nu_p$



$\Rightarrow k_v < 0$

Offensichtlich: $\quad k_{-v} = k_v$.

$\rightsquigarrow$ Wir erhalten eine Funktion $\quad k: \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{R}$
$\qquad\qquad v \mapsto k_v$

Satz von Euler. Es existieren eindeutige Richtungen $v_1, v_2 \in \mathbb{RP}^1$, so dass

$$k_1 := k_{v_1} = \min_v k_v \leq \max_v k_v = k_{v_2} =: k_2.$$

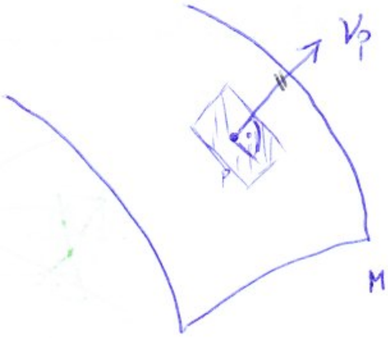
Es gilt: $\quad v_1 \perp v_2$ und $\quad k_v = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$, wobei $\theta = \sphericalangle(v, v_1)$

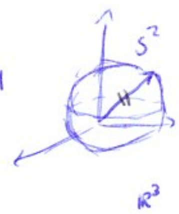
09.05.18

Krümmung von Flächen nach Gauss.

Sei $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche. $p \in M$.

Sei ν_p jener Einheitsnormalenvektor auf M am Punkt p, so dass (ν_p, v, w) positiv orientiert ist, wobei (v, w) positiv orientiert ist in T_pM.





$\rightsquigarrow$ Gauss-Abbildung: $\quad \nu: M \longrightarrow S^2$
$\qquad\qquad p \longmapsto \nu_p$

Gauss-Krümmung: $\quad K(p) = \lim\limits_{A \to p} \dfrac{\mathrm{vol}(\nu(A))}{\mathrm{vol}(A)}$

Bsp. 1) $M^2 = S^2 = S^2_1$ Einheitssphäre.

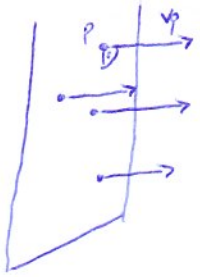
$\qquad \rightsquigarrow \nu = \mathrm{id}: S^2 \to S^2$

$\Rightarrow \forall p \in S^2: \quad K(p) = \lim\limits_{A \to p} \dfrac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(A)} = \underline{1}.$

2) $M = S^2_r$: Sphäre vom Radius r.

$\rightsquigarrow \quad \mathrm{vol}(\nu(A)) = \dfrac{1}{r^2}\,\mathrm{vol}(A) \qquad \rightarrow \quad K(p) = \dfrac{1}{r^2}.$

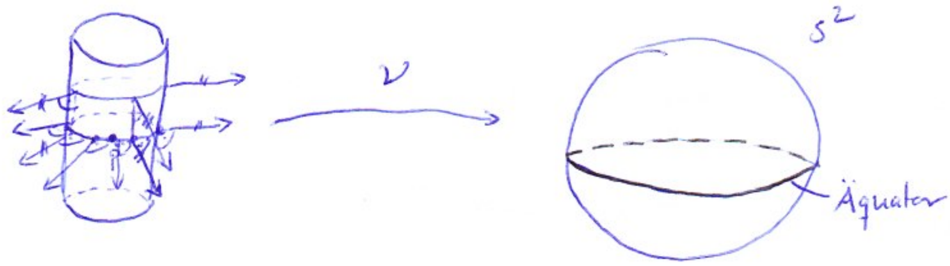
3) M = Ebene



$\Rightarrow$ ν: Ebene $\to S^2$ ist konstant.

$\Rightarrow$ $K(p) = \lim \frac{vol(\nu(A))}{vol(A)} = \lim \frac{0}{vol(A)} = 0.$

4) M = Zylinder



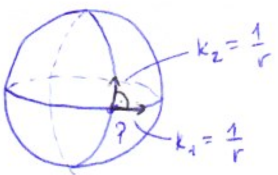
$\Rightarrow \lim \frac{\overbrace{vol(\nu(A))}^{1\text{-dim.}}}{vol(A)} = 0.$

$\Rightarrow$ Zylinder ist <u>nicht</u> gekrümmt!

Satz. (Beziehung Gauss – Euler)

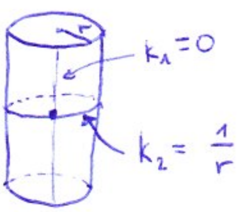
Es gilt: $K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p)$

<u>Bsp.</u> 1) $S^2_r \subseteq \mathbb{R}^3$



$\Rightarrow k_1 k_2 = \frac{1}{r^2} = K(p)$

2)

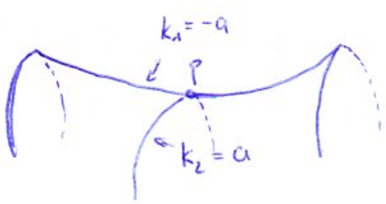


$\Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 0 = K(p)$

3) Fläche $z = \frac{ax^2}{2} - \frac{ay^2}{2}$ $(a > 0)$ $\quad \underbrace{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{ax^2}{2}\right) = a}_{=k_2} > 0$; $\underbrace{\frac{d^2}{dy^2}\left(-\frac{ay^2}{2}\right) = -a}_{=k_1} < 0$

$p = (0,0,0)$.

$\Rightarrow k_1 k_2 = -a^2 < 0$ <u>negative Krümmung</u>!



KRÜMMUNG NACH RIEMANN

<u>Idee:</u> M^n Mfkt., $p \in M$. Sei $\sigma \subseteq T_pM$ ein 2-dim. Untervektorraum.

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \xrightarrow{\cong} U = \text{geodätischer Ball um } p.$$

$F^2 := \exp_p(B_\varepsilon(0) \cap \sigma)$; F erhält die induzierte Metrik von M.

Fläche $\subseteq U$

$$K(p,\sigma) := \text{Krümmung von } F \text{ im Punkt } p \text{ nach Euler und Gauss.}$$

<u>Formell:</u> Sei ∇ der Levi-Civita Zsmhang. auf der Riemannschen Mfgkt. $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Wir definieren:

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M)$$
$$(X, Y, Z) \longmapsto R(X,Y)Z$$

$$R(X,Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

In lokalen Koordinaten $\{x^i\}$. $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ $\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$

$$\Rightarrow R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k = R_{ijk}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x^\ell}$$
$$= R_{ijk}^{\ell}\, \partial_\ell$$

Eigenschaften: $f, g : M \to \mathbb{R}$

- $R(fX_1 + gX_2, Y)Z = fR(X_1,Y)Z + gR(X_2,Y)Z$
- $R(X, fY_1 + gY_2)Z = fR(X,Y_1)Z + gR(X,Y_2)Z$
- $R(X,Y)(fZ) = \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_X\nabla_Y(fZ) + \nabla_{[X,Y]}(fZ)$

$$= \nabla_Y(f \cdot \nabla_X Z + X(f)Z) - \nabla_X(f\nabla_Y Z + Y(f)Z) + f\nabla_{[X,Y]}Z + [X,Y](f)\nabla Z$$
$$= f\nabla_Y\nabla_X Z + \cancel{Y(f)\nabla_X Z} + \cancel{X(f)\nabla_Y Z} - \cancel{YX}(f)Z$$
$$- f\nabla_X\nabla_Y Z - \cancel{X(f)\nabla_Y Z} - \cancel{Y(f)\nabla_X Z} - X\cancel{Y(f)}Z$$
$$+ f\nabla_{[X,Y]}Z + X\cancel{Y}(f)Z - YX(f)Z$$

$$= fR(X,Y)Z$$

$\Rightarrow R(X,Y)(fZ_1 + gZ_2) = fR(X,Y)Z_1 + gR(X,Y)Z_2$ auch linear in Z!

$\Rightarrow$ R ist ein sogenannter "Tensor", der sog. Riemannsche Krümmungstensor.

(dies erklärt den Term $\nabla_{[X,Y]} Z$)

Es folgt auch, dass $(R(X,Y)Z)_p$ nur von X_p, Y_p, Z_p abhängt.

Weitere Eigenschaften:

1) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$

2) Symmetrie von ∇ + Jacobi-Identität für $[\cdot,\cdot]$ $\to$ $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$

(Bianchi - Identität)

3) $< R(X,Y)Z, W > + < R(X,Y)W, Z > = 0$; $W \in \Gamma(M)$

folgt aus nachfolgender Rechnung:

$$< R(X,Y)Z, Z > = < \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, Z >$$

$$= < \nabla_Y \nabla_X Z, Z > - < \nabla_X \nabla_Y Z, Z > + < \nabla_{[X,Y]} Z, Z >$$

Interlude:

$$Y < \nabla_X Z, Z > = < \nabla_Y \nabla_X Z, Z > + < \nabla_X Z, \nabla_Y Z >$$

$$X < \nabla_Y Z, Z > = < \nabla_X \nabla_Y Z, Z > + < \nabla_Y Z, \nabla_X Z >$$

$$[X,Y] < Z, Z > = 2 < \nabla_{[X,Y]} Z, Z >$$

$$= Y < \nabla_X Z, Z > - < \nabla_X Z, \nabla_Y Z > - X < \nabla_Y Z, Z > + < \nabla_Y Z, \nabla_X Z > + \tfrac{1}{2} [X,Y] < Z, Z >$$

$$= 0$$

nochmal so ein Interlude.

4) $< R(X,Y)Z, W > = < R(Z,W)X, Y >$

Beweis: 4 × Bianchi Identität für zyklische Permutation, aufsummieren, Symmetrie ...

In lokale Koordinaten: $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$; $X, Y, Z \in \Gamma(M)$: $X = x^i \partial_i$, $Y = y^j \partial_j$, $Z = z^k \partial_k$

$$R(X,Y)Z = x^i y^j z^k \underbrace{R(\partial_i, \partial_j)\partial_k}_{= R_{ijk}^{\ \ \ \ell} \partial_\ell} = x^i y^j z^k R_{ijk}^{\ \ \ \ell} \partial_\ell$$

• $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k = \nabla_{\partial_j} (\Gamma_{ik}^{\ \ \ell} \partial_\ell) - \nabla_{\partial_i} (\Gamma_{jk}^{\ \ \ell} \partial_\ell)$