Satz. (LEVI-CIVITA)

Sei $(M, <\cdot,\cdot>)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang ∇ auf M (der Riemannsche Zusammenhang oder Levi-Civita-Zusammenhang), sodass gilt:

(i) ∇ und $<\cdot,\cdot>$ sind kompatibel (ii) ∇ ist symmetrisch.

Beweis. • Eindeutigkeit.

$X, Y, Z \in \Gamma(M)$.

$$X<Y,Z> \underset{\text{komp.}}{=} <\nabla_X Y, Z> + <Y, \nabla_X Z>$$

$$+ \quad Y<Z,X> = <\nabla_Y Z, X> + <Z, \nabla_Y X>$$

$$- \quad Z<X,Y> = <\nabla_Z X, Y> + <X, \nabla_Z Y>$$

$$X<Y,Z> + Y<Z,X> - Z<X,Y> = <Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X> + <X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y> + <Z, \nabla_X Y + \nabla_Y X>$$

$$\underset{\text{symmetrisch}}{=} <Y, [X,Z]> + <X,[Y,Z]> + <Z,[X,Y]> + 2\cdot <Z, \nabla_Y X>$$

$$\Rightarrow <Z, \nabla_Y X> \underset{(1)}{=} \frac{1}{2}\Big[X<Y,Z> + Y<Z,X> - Z<X,Y> - <Y,[X,Z]> - <X,[Y,Z]> - <Z,[X,Y]> \Big]$$

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit

Existenz: Definiere ∇ durch (1). Dann rechnet man nach, dass ∇ ein Zusammenhang ist, der symmetrisch und kompatibel mit der Riemannschen Metrik ist.

02.05.17

GEODÄTISCHE KURVEN

$(M, <\cdot,\cdot>)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang.

Geodätische sind Kurven auf M mit Beschleunigung 0.

Def. Sei $\gamma: I \to M$ eine glatte Kurve. γ ist eine Geodätische wenn $\frac{D}{dt}(\gamma') = 0$.

Bsp. $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidschen Metrik. Levi-Civita Zsmhg. hat $\Gamma_{ij}^k = 0$. $\Rightarrow \frac{D}{dt} = \frac{d}{dt}$.

$0 = \frac{D}{dt}(\gamma') = \gamma'' \Rightarrow \gamma' = \text{konstant} \Rightarrow \gamma = at+b$ Geraden.

Sei γ eine Geodätische. $\frac{d}{dt}<\gamma',\gamma'> = 2\cdot <\underbrace{\frac{D}{dt}\gamma'}_{=0}, \gamma'> = 0$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = c = \text{konstant}$, $c \neq 0$ (Annahme), $0, t \in I$.

$$l_0^t(\gamma) = \int_0^t \underbrace{\|\gamma'(\tau)\|}_{\equiv c} d\tau = c\int_0^t 1\, d\tau = ct.$$

Die Bogenlänge ist proportional zum Parameter t. Ist $c=1$, dann sagen wir „γ ist parametrisiert durch die Bogenlänge".

In lokalen Koordinaten x: $\gamma(t) = (x^1(t), -, x^n(t))$; Sei $V(t)$ ein VF entlang γ.

$$V(t) = v^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}; \quad \text{Schon gesehen: } \frac{DV}{dt} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^{\ k}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Für $V(t) = \gamma'(t)$:

$$v^k(t) = \frac{dx^k}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{D\gamma'}{dt} = \left(\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\Gamma_{ij}^{\ k}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \overset{!}{=} 0, \text{ da } \gamma \text{ Geodätische}$$

$$\Rightarrow \forall k = 1, -, n: \quad \frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\Gamma_{ij}^{\ k} = 0.$$

System von gewöhnlichen DGL 2. Ordnung. $\Leftrightarrow$ $$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\Gamma_{ij}^{\ k}$$

Auf dem Tangentialbündel TM kann dieses System umgeschrieben werden in ein System 1. Ordnung. Seien die Koordinaten x definiert auf $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} M$.

$v \in T_pM$ lässt sich schreiben als $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$.

Dann sind $(x^1, -, x^n, v^1, -, v^n)$ lokale Koordinaten auf TM, definiert in TU.

$t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ definiert eine glatte Kurve auf TM.

$$\Rightarrow \quad (*) \begin{cases} v^k = \frac{d}{dt}x^k \\ \frac{dv^k}{dt} = -\Gamma_{ij}^{\ k} v^i v^j \end{cases} \quad \text{System von DGL 1. Ordnung}$$

Wir wenden den Satz über Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Anfangsbedingungen an auf $(*)$ auf TM.

Proposition. $\forall p \in M : \exists\, \delta, \varepsilon_1 > 0 : \exists\ \gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \longrightarrow M$ glatt,

wobei $\quad \mathcal{U} = \{ (q,v) \in V \times T_q M \mid \|v\| < \varepsilon_1 \}$ $\quad$ ($V \underset{\text{offen}}{\subseteq} M$ geeignet mit $p \in V$)

so dass

$$t \longmapsto \gamma(t, q, v) \quad \text{die eindeutige Geodätische in } M \text{ ist}$$

$$\text{mit} \quad \gamma(0,q,v) = q \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\Big|_{(0,q,v)} \gamma = v.$$

Homogenität von Geodätischen

Geodätische $\gamma(t,q,v)$ definiert für $|t| < \delta$ $\Longrightarrow$ $a > 0$. Geodätische $\gamma(at, q, v)$ definiert für $|t| < \frac{\delta}{a}$, mit $\gamma(at,q,v) = \gamma(t,q,av)$

Beweis.

Setze $\quad c(t) := \gamma(at, q, v)$

$\rightsquigarrow$
- $c(0) = \gamma(0,q,v) = q.$
- $\frac{d}{dt}\Big|_{(0,q,v)} c(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{(0,q,v)} \gamma(at,q,v) \underset{\text{Kettenregel}}{=} a \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{(0,q,v)} \gamma(t,q,v)}_{=v} = a \cdot v.$

c ist geodätische: $\quad \frac{D}{dt} c' = \nabla_{c'} c' = \nabla_{a\gamma'} (a\gamma') = a^2 \underbrace{\nabla_{\gamma'} \gamma'}_{=0,\ \text{da } \gamma \text{ Geodätische}} = 0$

$\underset{\text{Eindeutigkeit}}{\Longrightarrow} \quad c(t) = \gamma(t,q,av) \quad$ (brauchen $\|v\| < \frac{\varepsilon_1}{2}$).

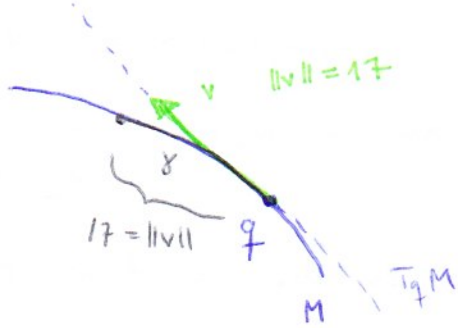
Die Exponentialabbildung

$q \in V,\ v \in T_q M,\ \|v\| < \varepsilon.$

$$\left(|t| < 2 = \frac{\delta}{\delta/2},\quad a = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta \varepsilon_1}{2} \quad \Rightarrow \gamma(t,q,v) \text{ für } |t|<2,\ \|v\|<\varepsilon \right)$$

$$\exp_q(v) := \gamma(1,q,v) \underset{v \neq 0}{=} \gamma\left(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|}\right)$$

$$\exp = \exp_q : \underset{T_q M}{\overset{\cap}{B_\varepsilon(0)}} \longrightarrow M$$



Bemerkung. G Lie-Gruppe
$\overset{\in}{e}$ neutrales Element

$$\exp : \underbrace{T_e G}_{\mathfrak{g}} \longrightarrow G$$

$\mathfrak{g}$: Lie-Algebra von G

Proposition. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\exp : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ ein Diffeomorphismus auf das Bild von $B_\varepsilon(0)$ ist.

Beweis.
$$d\exp_0(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t \cdot v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{\gamma(1, q, t \cdot v)}_{= \gamma(t, q, v)} = v.$$

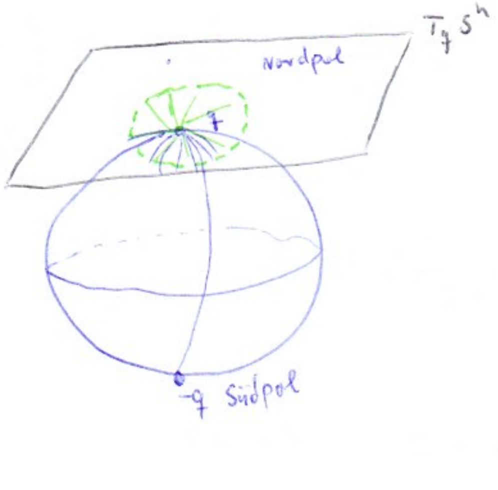
$$d\exp_0 = id_{T_q M}.$$

Satz über umkehrbare Funktionen $\Rightarrow$ exp ist lokaler Diffeomorphismus in der Nähe von $0 \in T_q M$.

VIII

Bsp. 1) $M = \mathbb{R}^n$: $\exp_{q=0} : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cong}{T_0 \mathbb{R}^n}} \xrightarrow{id} \mathbb{R}^n$

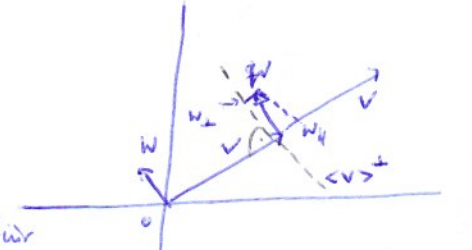
2) Einheitssphäre $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$; $\exp_q : \underset{}{B_\pi(0)} \overset{\cong}{\Longrightarrow} S^n - \{-q\}$, $B_\pi(0) \subset T_q S^n$



$$\exp(\partial \overline{B_\pi(0)}) = \{-q\}$$

Gauss-Lemma. $v, w \in T_q M$.

$$\langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$



Beweis. Wir schreiben $w = w_\parallel + w_\perp$, $w_\parallel \in \langle v \rangle$,
$w_\perp \in \langle v \rangle^\perp$

Linearität $\Rightarrow$ Es genügt die Aussage für $w_\parallel$ und für $w_\perp$ zu beweisen.

$T_v(T_q M) \cong T_q M$ $\quad T_q M$

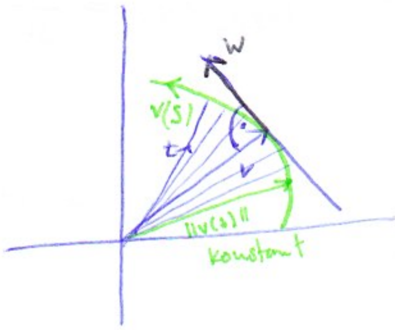
1) Für $w_\parallel = \lambda v$.

$$\langle d\exp_v(v), d\exp_v(\lambda v) \rangle = \lambda \cdot \| d\exp_v(v) \|^2 = \lambda \cdot \|v\|^2 = \langle v, w \rangle$$

$$\| d\exp_v(v) \| = \Big\| \frac{d}{dt} \underbrace{\gamma(1, q, v + tv)}_{= \gamma(1+t, q, v)} \Big\| = \| v \|.$$

2) Für $w_\perp$. Wir schreiben $w = w_\perp$, $\langle v, w \rangle = 0$. z.z.: $\langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = 0$.

Sei $v(s)$ eine Kurve in $T_q M$ mit $v(\underset{s}{0}) = v$,
$v'(0) = w$, $\|v(s)\|$ konstant.



Setze $f(t,s) := \exp(t\, v(s))$. "parametrisierte Fläche"

$$\langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle (\overset{t}{1}, \overset{s}{0})$$

Behauptung: $\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle$ ist unabhängig von t:

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle = \langle \underbrace{\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t}}_{= 0 \ (\gamma \text{ Geodätische})}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \rangle$$

$$\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \underset{\substack{\text{Symmetrie} \\ \text{des Levi-Civita} \\ \nabla}}{=} \langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \Big\| \frac{df}{dt} \Big\|^2 = 0,$$

da $\|v(s)\|$ konstant.

$$\Rightarrow \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle (1, s) = \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle (0, s) \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial s}(0, s) = 0 : \; f(0, s) = \exp(0) = q.$$

$$= 0.$$

$$\Rightarrow \langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = 0 = \langle v, w \rangle.$$

$\blacksquare$