Dienstag, 17. April 2018 22:24

ALGEBRAISCHE GRUPPEN

Literatur:
- T.A. Springer, Linear Algebraic Groups
- J.F. Humphreys, — " —
- W.C. Waterhouse, Introduction to Affine Group Schemes

[Borel, Linear Algebraic Groups (setzt Geometric voraus)]

0. EINLEITUNG

Algebraische Gruppen = Gruppenobjekte in der Kategorie algebraischer Varietäten.

Varietäten: Nullstellenmengen von Polynomen in $\mathbb{A}^n_k = k^n$ (oder $\mathbb{P}^n_k$)

Morphismen: komponentenweise durch Polynome gegeben.

Vergleiche: topologische Gruppen = Abb. sind stetig (Grp.obj in Top)

Lie-Gruppen = Abb. sind glatt (Grp.obj. in Mfd)

Beispiel:

$$G = GL_n(k), \quad k = \bar{k} \text{ alg. abgeschlossen}$$

Trick von Rabinowitch: $GL_n(k) = \{ (a_{ij}, d) \in k^{n^2+1} \mid \det(a_{ij}) \cdot d = 1 \}$

$\Rightarrow$ $A = (a_{ij})$ hat $\det A \neq 0$, d.h. $A \in GL_n(k)$

$d = \det A^{-1}$, $A^{-1} = d \cdot \underbrace{A^{adj}}_{\text{hängt polynomell von } (a_{ij}) \text{ ab.}}$

$\Rightarrow$ $A \longmapsto A^{-1}$ ist durch Polynome gegeben

$(A, B) \mapsto A \cdot B$ ist auch durch Polynome gegeben.

Beschränkt man sich auf affine Varietäten, erhält man affine algebraische Gruppen,
für die gilt: $G \hookrightarrow GL_n(k)$ Zariski-abg. Unterraum
für geeignetes n (Einbettungssatz), daher auch der Name Lineare algebraische Gruppe.

Ziel: Struktur reduktiver / halbeinfacher affiner alg. Gruppen über alg. abg. Körper k
(mit char $k = 0$ oder char $k = p > 0$) untersuchen.

Strategie:

$$\begin{array}{cll} & G & \text{reduktiv} \\ & \text{UI} & \\ U \rtimes T = & B & \text{'Borel-Untergruppe''} \\ & \text{UI} & \\ T \cong \mathbb{G}_m^n & U & \text{unipotent} \end{array}$$

(kommutative) Torus Gruppe

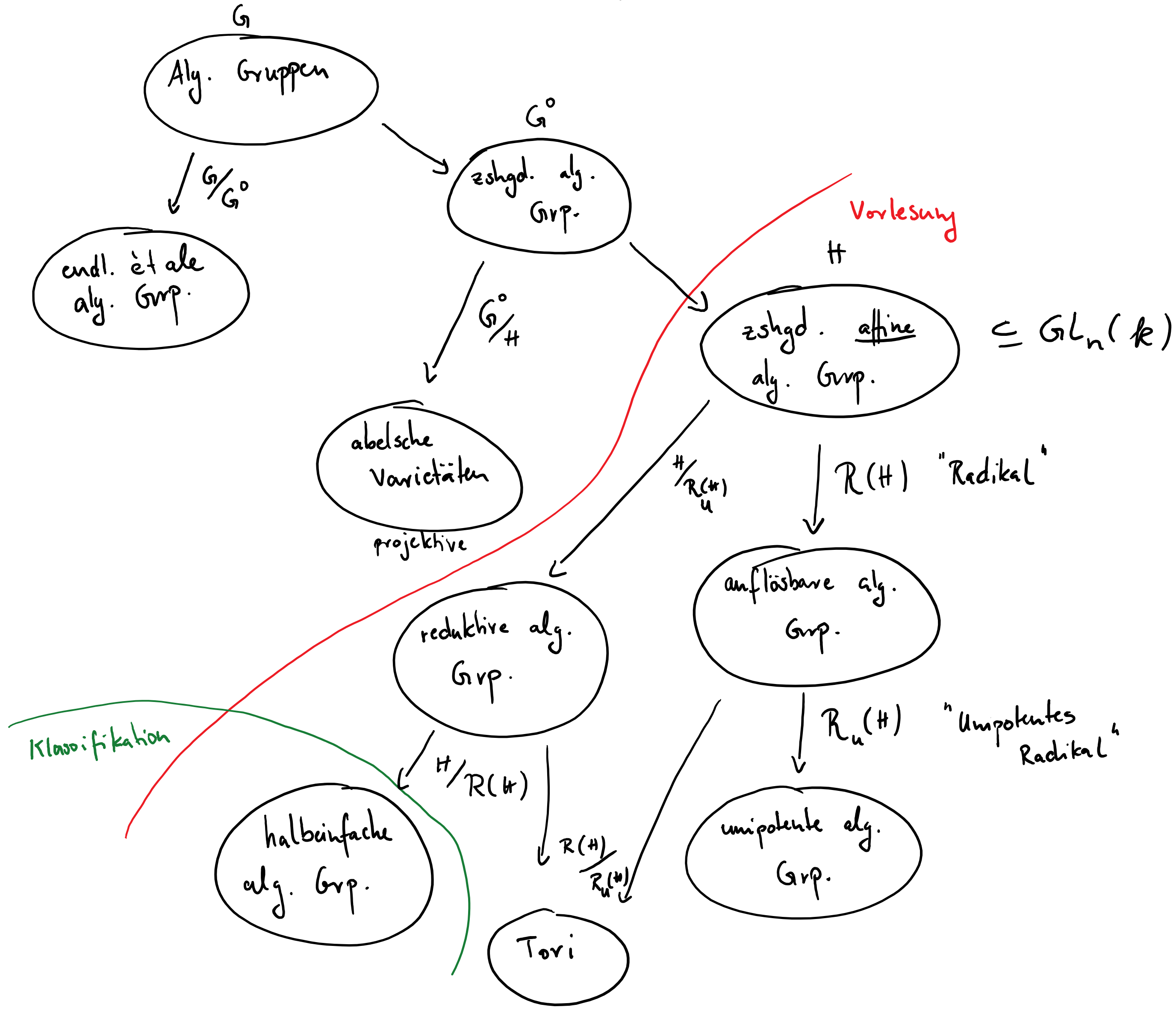
$\mathbb{G}_m = GL_1(k)$

$$GL_n(k) \supseteq \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \supseteq T = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = U$$

$T \subseteq G$ operiert auf $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G = T_e G$ (Tangentialraum)
(z.B. $GL_n(k)$ operiert via Konjugation auf $M_n(k) = \mathfrak{g}$)
Nicht-triviale Eigenräume liefern "<u>Charaktere</u>" $T \to k^\times$ (die die Eigenwerte "parametrisieren"),
die ein sogenanntes <u>Wurzelsystem</u> bilden, welche man mittels sog. <u>Dynkin-Diagrammen</u> klassifizieren kann.

(z.B. $\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \mapsto \frac{x_i}{x_j}$ sind <u>Wurzeln</u> für $1 \le i \ne j \le n$ $GL_n(k)$)

Hierarchie algebraischer Gruppen



04

Freitag, 20. April 2018 14:25

01. Algebraische Geometrie und Funktoren

I. Affine Varietäten

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper; $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_k := k^n$ heißt affiner n-Raum.

Def. 1. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt affine Varietät, falls ein Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, -, X_n] = k[\underline{X}]$ existiert, so dass $X = V(I) = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid \forall f \in I: f(P) = 0\}$

Nach dem Hilbert'schen Basissatz existieren endlich viele $f_1, -, f_n \in I$ mit $I = (f_1, -, f_n)$.

Lemma 2. Für Ideale $I_1, I_2, (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

(i) $I_1 \subseteq I_2 \implies V(I_2) \subseteq V(I_1)$

(ii) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2)$

(iii) $V(\sum_\lambda I_\lambda) = \bigcup_\lambda V(I_\lambda)$

Die Mengen $\{V(I) \mid I \trianglelefteq k[\underline{X}]\}$ bilden genau die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$, der sogenannten Zariski-Topologie. $(V(0) = \mathbb{A}^n,\ V(1) = \emptyset)$

Affine Varietäten tragen die Unterraumtopologie.

Lemma 3. Die offenen Mengen der Form $D(f) := V((f))^c = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid f(P) \neq 0\}$ mit $f \in k[X]$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$.

Für eine affine Varietät $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ setze $I(X) := \{f \in k[\underline{X}] \mid \forall P \in X: f(P) = 0\} \trianglelefteq k[\underline{X}]$.
Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ setze $\operatorname{rad} I := \sqrt{I} := \{f \in k[\underline{X}] \mid \exists n \in \mathbb{N}: f^n \in I\}$, das Radikal von I.

Gilt $I = \sqrt{I}$, so heißt I Radikalideal.

Theorem 4. (Hilbert'scher Nullstellensatz)
$I(\cdot)$, $V(\cdot)$ induzieren Bijektionen

$$\{\text{Radikalideale in } k[\underline{X}]\} \underset{V(\cdot)}{\overset{I(\cdot)}{\longleftrightarrow}} \{\text{affine Varietäten im } \mathbb{A}^n\}$$

Korollar 5. Maximale Ideale von $k[\underline{X}]$ entsprechen abgeschlossenen Punkten.

$$\mathfrak{m}_a := I(\{a\}) = (X_1 - a_1, -, X_n - a_n); \quad a = (a_1, -, a_n) \in \mathbb{A}^n$$

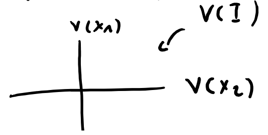
Lemma 6. Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

$$I \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}] \iff Z = V(I) \text{ ist irreduzibel als topologischer Raum.}$$

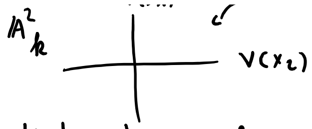
Irreduzible Räume sind zusammenhängend.
$Y \subseteq X$ irreduzibel $\iff$ $\overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

Korollar 9. Jede affine Varietät ist eine endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten.

Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$ $\quad \mathbb{A}^2_k$



Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$



Koordinatenachsen, zerlege in irred. Komponenten.

Def. 11. Für eine affine Varietät X heißt $A(X) := A_X := {}^{k[\underline{X}]}/_{I(X)}$ der Koordinatenring von X.
("Morphismen $X \longrightarrow \mathbb{A}^1$")

$A(X)$ ist eine reduzierte ($\sqrt{0} = 0$) endl. erz. k-Algebra.

$A(X)$ ist Integritätsring $\Leftrightarrow$ X ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I(X) \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}]$.

Def. 12. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Ein Morphismus $X \xrightarrow{\phi} Y$ von Varietäten besteht aus einem m-Tupel $\phi = (f_1, -, f_m) \in A(X)^m$

mit $\phi(P) := (f_1(P), -, f_m(P)) \in Y \quad \forall P \in X$.

Lemma 13. Morphismen von Varietäten sind stetig bzgl. der Zariski-Topologie.

Beweis.

$$\phi^{-1}(\underset{\substack{\cap \\ A(Y)}}{D(f)}) = D(\underbrace{f \circ \phi}_{\in A(X)})$$

$\blacksquare$

Def. 14 $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$. Dann ist das kartesische Produkt $X \times Y \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ wieder eine affine Varietät, das Produkt von X, Y.

Achtung: $X \times Y$ trägt nicht die Produkttopologie

Beweis. (14)

$X = V(f_1, -, f_n)$, $Y = V(g_1, -, g_m)$ $\Rightarrow$ $X \times Y = V(f_1, -, f_n, g_1, -, g_m)$

$\blacksquare$

Theorem 15. Der Funktor $X \longmapsto A(X)$ induziert eine Kategorienäquivalenz von

$$\{\text{affine Varietäten} / k\}^{op} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{reduzierte endlich erz. } k\text{-Algebren}\}$$

$$(X \xrightarrow{\phi} Y) \longmapsto A(Y) \xrightarrow{\phi^*} A(X)$$

$$f + I(Y) \mapsto f \circ \phi + I(X)$$

Der quasiinverse Funktor ordnet R die Menge $\operatorname{Specm}(R)$ zu, $k[\underline{X}] \twoheadrightarrow R$ induziert $\operatorname{Specm}(R) \longrightarrow \operatorname{Specm} k[\underline{X}] = \mathbb{A}^n_k$

Alternativ können wir den Funktor $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(-, k)$ benutzen, da $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(R, k) \cong \operatorname{Specm} R$
$f \longmapsto \ker f$

($k \subseteq R/m$ ist endlich, d.h. $R/m = k$, da $k = \bar{k}$)

II. Funktoren

Yoneda-Lemma. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist der kontravariante Funktor

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \underline{\mathrm{Sets}}) = \underline{\mathrm{Sets}}^{\mathcal{C}},$$

$$\begin{array}{ccl} A & \longmapsto & h_A : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi^* \\ B & & h_B : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \end{array}$$

volltreu, d.h.

$$h_A(B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Func}}(h_B, h_A)$$

$$\phi \longmapsto \left(\phi^* : h_B(C) \longrightarrow h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}} \quad \text{(nat. Trafos)}$$

$$\eta_B(\mathrm{id}_B) \longleftarrow \left(\eta_C : h_B(C) \longrightarrow h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}}$$

Mit anderen Worten: $A \in \mathcal{C}$ ist genauso gut wie der Funktor h_A.

Funktoren der Form h_A heißen darstellbar.

Bsp. 1. $\mathcal{C}$: Kategorie endl. erz. reduzierter k-Algebren.

(i) $\mathbb{A}^n(\,) : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto R^n$ wird dargestellt von $k[X_1, \dots, X_n]$

da $R^n = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(k[\underline{X}], R]$

(ii) $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$ seien darstellbar. Dann ist der Produktfunktor

$F \times G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto F(R) \times G(R)$ darstellbar.

$$F = h_A,\ G = h_B,\ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow F(R) \times G(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(A, R) \times \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(B, R)$$

$$\text{d.h.}\quad F \times G = h_{A \otimes_k B} \qquad = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(A \otimes_k B, R)$$