04. Höhere Verzweigungsgruppen.

Sei K ein lokaler Körper. Seien $\mathcal{O}, \pi, k = k_K, v = v_K, q$ wie in 03.

Sei $L|K$ endlich galoisch mit $G = Gal(L|K)$. Seien $\mathcal{O}_L, \pi_L, k_L, v_L$ wie für K.

(v_L normalisiert, keine Fortsetzung von v_K)

Whg. ANT 1: $\exists x \in \mathcal{O}_L$ mit $\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L$ ($L|K$ total verzweigt $\Rightarrow \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$)

Lemma 4.1. Für $\sigma \in G$ und $i \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ sind äquivalent:

a) σ operiert trivial auf $\mathcal{O}_L / \pi_L^{i+1} \mathcal{O}_L$

b) $v_L(\sigma(a) - a) \geq i+1 \quad \forall a \in \mathcal{O}_L$

c) $v_L(\sigma(x) - x) \geq i+1$ für x wie oben.

Beweis.

a) $\Leftrightarrow$ b) $\Rightarrow$ c): klar.

c) $\Rightarrow$ b):
$$\sigma\Big(\sum_i a_i x^i\Big) - \sum_i a_i x^i = (\sigma x - x) \sum_i a_i \underbrace{\frac{(\sigma x)^i - x^i}{\sigma x - x}}_{\in \mathcal{O}_L}, \quad a_i \in \mathcal{O}_K$$

$$v_L(\dots) = v_L(\sigma x - x) + \underbrace{?}_{\geq 0} \geq i+1$$

□

Def. 4.2.

(i) $i_{L|K}(\sigma) := v_L(\sigma x - x) \quad \forall \sigma \in G$

(ii) Für $i \geq -1$ sei $G_i := \{\sigma \in G \mid i_{L|K}(\sigma) \geq i+1\}$ die i-te höhere Verzweigungsgruppe.

Bemerkung 4.3.

(0) $G_i = \bigcap_{\bar{x} \in \mathcal{O}_L/\pi^{i+1}\mathcal{O}_L} Stab_G(\bar{x}) \Rightarrow G_i$ Untergruppe.

(1) $G_{-1} = G$, $G_i = \{id\}$ für $i \gg 1$ ($\sigma \neq id \Rightarrow \sigma x - x \neq 0 \dots$)

$G_0 \underset{4.1}{=} \{\sigma \in G \mid \sigma x \equiv x \mod \pi\} = I_{L|K} = \ker(G \longrightarrow Gal(k_L | k_K))$

(2) $H \leq G$ Untergruppe zum Zwischenkörper $E = L^H$ (beachte $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_E[x]$)

Dann: $H_i = H \cap G_i$ ($i_{L|E}(\sigma) = i_{L|K}(\sigma)$ für $\sigma \in H$)

z.B. $H = G_0 \Rightarrow L^H = L \cap K^{ur}$ und $G_i = (G_0)_i = H_i \quad \forall i \geq 0$

(3) $i_{L|K}$ ist unabhängig von der Wahl von x (wegen 4.1)

(4) $i_{L|K} : G \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$

Lemma 4.4. Es gilt $G_i \trianglelefteq G \quad \forall i \geq -1$

Beweis.

$$G_i = \ker\left(G \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\mathcal{O}_L / \pi^{i+1}\mathcal{O}_L\right)\right).$$

$\blacksquare$

Korollar 4.5. Seien $\sigma, \tau \in G_0$. Dann gelten:

(i) $i_{L|K}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = i_{L|K}(\tau)$

(ii) $i_{L|K}(\sigma\tau) \geq \min(i_{L|K}(\sigma), i_{L|K}(\tau))$ mit Gleichheit falls $i_{L|K}(\sigma) \neq i_{L|K}(\tau)$.

Beweis. (i) wegen 4.4.

(ii)
$$\underbrace{v_{L|K}(\sigma\tau x - x)}_{i_{L|K}(\sigma\tau)} \geq \min\Big(\underbrace{v_{L|K}(\sigma(\tau x) - \tau x)}_{\substack{= i_{L|K}(\sigma), \text{ da} \\ \text{auch } \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\tau x] \\ \text{nun 4.3 (3)}}}, \underbrace{v_{L|K}(\tau x - x)}_{i_{L|K}(\tau)}\Big)$$

Gleichheitsaussage wegen "analoger" Eigenschaft von v_L.

$\blacksquare$

Lemma 4.6. Für $\sigma \in G_0$ und $i \geq 0$ gelten:

$$\sigma \in G_i \underset{(i)}{\iff} v_L(\sigma\pi_L - \pi_L) \geq i+1 \underset{(ii)}{\iff} \frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} \in \mathcal{U}_i(L)$$

Beweis. (i) o.E.: $L|K$ voll verzweigt (ersetze K durch $K^{ur} \cap L$)

dann: klar wegen Wiederholung ANT 1 + 4.3. (3).

(ii) $v_L(\pi_L) = 1 \implies \Big(v_L(\sigma\pi_L - \pi_L) \geq i+1 \iff v_L\left(\frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} - 1\right) \geq i$

$$\iff \frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} \in \mathcal{U}_i(L).$$

$\blacksquare$

1. Anwendung: $v_L(\mathcal{D}_{L|K})$!

$$\mathcal{D}_{L|K}^{-1} = \{\alpha \in L \mid Tr_{L|K}(\alpha\beta) \in \mathcal{O}_K \quad \forall \beta \in \mathcal{O}_L\}$$

und (Da $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$) ist $\mu_x \in \mathcal{O}_K[X]$ das Mipo von x, so gilt $\mathcal{D}_{L|K} = \mu_x'(x)\,\mathcal{O}_L$.

Satz 4.7. $$v_L(\underbrace{\mathcal{D}_{L|K}}_{=v_L(\mu_x'(x))}) = \sum_{\sigma \in G \setminus \{id\}} i_{L|K}(\sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} (\# G_i - 1)$$

(Bem.: weiter unten: $L|K$ zahm verzweigt $\Longleftrightarrow G_1 = \{1\}$

$$\Downarrow \quad v_L(\mathcal{D}_{L|K}) = \# G_0 - 1 = e(L|K) - 1 \quad)$$

Beweis.

$$\mu_x(X) = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma x) \Longrightarrow \mu_x'(x) = \prod_{\sigma \in G \setminus \{1\}} (x - \sigma x)$$

$$\Longrightarrow v_L(\mathcal{D}_{L|K}) = \sum_{\sigma \in G \setminus \{1\}} v_L(x - \sigma x) = \sum_{\sigma \in G \setminus \{1\}} \underbrace{i_{L|K}(\sigma)}_{\in \mathbb{Z}_{\geq 0}}.$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \Big(\sum_{\substack{\sigma \in G \setminus \{1\} \\ i_{L|K}(\sigma) = i}} 1 \Big) = \sum_{i=1}^{\infty} i \, (\# G_{i-1} - \underbrace{\# G_i}_{=: g_i})$$

$$\underset{\text{Abel-summation}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (\# G_i - 1)$$

$$0 \cdot (g_{-1} - g_0) + 1(g_0 - g_1) + 2(g_1 - g_2) + 3(g_2 - g_3) + \ldots + n(g_{n-1} - \underbrace{g_n}_{=1}) + 0$$

$$= g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1} - n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (g_0 - 1)$$

$\square$

Korollar 4.8. (Ü) Sei $E|K$ endl. separable Erweiterung mit Galoishülle L und $H = \mathrm{Gal}(L/E)$. Dann: $$v_{E|K}(\mathcal{D}_{E|K}) = \frac{1}{e(L|E)} \sum_{\sigma \in G \setminus H} i_{L|K}(\sigma)$$

Die Gruppen G_i / G_{i+1}:

Lemma 4.9. $\forall i \geq 0$ ist die Abbildung $\theta_i : G_i / G_{i+1} \longrightarrow U_i(L) / U_{i+1}(L)$, $\sigma G_{i+1} \longmapsto \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} U_{i+1}(L)$ wohldefiniert, unabhängig von π_L und ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

(Erinnerung: $\mathcal{U}_0(L)/\mathcal{U}_1(L) \cong (k_L^\times, \cdot) \cong \mathbb{Z}/(q_L-1)$, $\quad \mathcal{U}_i(L)/\mathcal{U}_{i+1}(L) \cong (k_L, +) \cong \mathbb{F}_p^{[k_L : \mathbb{F}_p]}$

Beweis. • unabhängig von π_L: Gelte $\pi' = u\pi_L$ für ein $u \in \mathcal{O}_L^\times$.

$$4.1 \underset{\sigma \in G_i}{\Longrightarrow} \quad \sigma u \equiv u \mod \pi_L^{i+1}, \text{ d.h. } \frac{\sigma u}{u} \equiv 1 \mod \pi_L^{i+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma \pi'}{\pi'} = \frac{\sigma u}{u} \frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \equiv \frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \mod \mathcal{U}_{i+1}(L)$$

• $\tilde{\theta}_i : G_i \longrightarrow \mathcal{U}_i(L)/\mathcal{U}_{i+1}(L)$, $\sigma \longmapsto \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} \mod \mathcal{U}_{i+1}(L)$ ist wohldef. Gruppenhomomorphismus

$\frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \underset{4.6}{\in} \mathcal{U}_i(L) \Rightarrow$ wohldefiniert.

Homomorphismus: $$\tilde{\theta}_i(\sigma\tau) = \frac{\sigma\tau(\pi_L)}{\pi_L} = \frac{\sigma(\tau\pi_L)}{\tau\pi_L} \cdot \frac{\tau(\pi_L)}{\pi_L} \overset{\text{unabh. von } \pi_L}{\underset{v_L(\tau\pi_L) = 1}{\equiv}} \frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} \cdot \frac{\tau\pi_L}{\pi_L}$$

inj., wohldefiniert:

$\ker \tilde{\theta}_i = G_{i+1}$ nach Lemma 4.6. ▨

Korollar 4.10. (i) G_0/G_1 ist endl. zykl. Grp. von Ordnung teilerfremd zu p.

(ii) G_1 ist eine p-Gruppe

(iii) L^{G_1} ist der max. zahm verzweigte Unterkörper von L über K

(iv) G ist auflösbar. (sogar "überauflösbar")

Beweis. (i), (ii): klar nach 4.9.

(iv): benötigt zusätzlich: $\mathrm{Gal}(k_L/k)$ auflösbar ist.

(iii)
$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dash, "\text{total verzweigt}"] & \\
L^{G_1} \arrow[dr, dash, "\text{zahm verzweigt, da } p \nmid \# G_0/G_1"] \arrow[dd, dash] & \\
& K^{G_0} \arrow[dl, dash, "\text{unverzweigt}"] \\
K &
\end{tikzcd}$$
$\Rightarrow L^{G_1}$ größte zahm verzweigte Untererweiterung von K in L

▨

Ü: $G_0 \simeq G_1 \rtimes {G_0}/{G_1}$ (Schur-Zassenhaus, ... lieber elementar)

Def. 4.11. $G_1 \trianglelefteq G$ heißt wilde Verzweigungsgruppe von G.

Bsp. 4.12. (Ü)
Sei $L_i = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^i})$ $i \geq 0$

$$\mathrm{Gal}(L_n \mid \mathbb{Q}_p)_i = \begin{cases} G, & -1 \leq i \leq 0 \\ \mathrm{Gal}(L_n / L_k), & p^{k-1} \leq i \leq p^k - 1 \quad k \in \{1, .., n-1\} \\ \{1\}, & i \geq p^{n-1} \end{cases}$$

Bemerkung 4.13 (siehe Serre) $\sigma \in G_i$, $\tau \in G_j$, $i,j \geq 1$

$\Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \in G_{i+j+1}$

Der Satz von Herbrand

Für $u \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ setze $G_u := G_{\lceil u \rceil}$

$(\sigma \in G_u \Leftrightarrow i_{L|K}(\sigma) \geq u+1)$

Def. 4.14. (Herbrand Funktion)

$$\phi = \phi_{L|K} : [-1, \infty) \longrightarrow [-1, \infty), \quad t \longmapsto \int_{s=0}^{t} \frac{1}{[G_0 : G_s]} \, ds$$

beachte: $s \longmapsto [G_0 : G_s]^{-1}$ ist monoton ~~wachsend~~ fallend in s und $\frac{1}{[G_0 : G_s]} \geq \frac{1}{\# G_0}$

Prop. 4.15. (Ü)

(i) ϕ ist stetig, stückweise linear (auf $(i, i+1)$) streng monoton wachsend und konkav.

(ii) $\phi(0) = 0$, Steigung 1 auf $-1 \leq t \leq 0$

(iii) Für $u \in \mathbb{R}_{\geq 1} \setminus \mathbb{Z}$: $\phi'(u) = \frac{1}{[G_0 : G_u]} \geq \frac{1}{\# G_0}$

(iv) $\phi : [-1, \infty) \longrightarrow [-1, \infty)$ ist bijektiv.

Sei $\psi = \psi_{L|K} = \phi^{-1} : [-1, \infty) \longrightarrow [-1, \infty)$

Korollar 4.16. (Ü) (i) ψ ist stetig, stückweise linear, streng monoton wachsend, konvex

(ii), (iv) wie für ϕ

(iii) Sei $v = \phi(u)$, $u \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \psi'(v) = [G_0 : G_u]$ $(\in \mathbb{N})$ | (v) $u \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \Rightarrow u = \psi(v) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Beweis.

(v) OE $v \geq 1$. ($v=0$, $v=-1$ klar wegen ii)

$\exists i: \; i \leq v \leq i+1$ $\qquad [G_0 : G_u] = \frac{\# G_0}{\# G_u}$

$$\underset{v=\phi(u)}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\# G_0 \; v}_{\substack{\text{teile durch} \\ \# G_{i+1}}} = \underset{[0,1]}{\# G_1} + \underset{[1,2]}{\# G_2} + \ldots + \underset{[i-1,i)}{\# G_i}$$

$$\underset{v \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \quad u - i \in \mathbb{Z} \Rightarrow u = i.$$

▨

Def. 4.17. $G^v := G_{\psi(v)}$ (Verzweigungsgruppen in oberer Nummerierung!)

Satz 4.18. (Herbrand) Für $N \trianglelefteq G$ Normalteiler gilt:

$$\left(G/N\right)^v = G^v N/N \qquad \forall v \in \mathbb{R}_{\geq -1}$$

08.05.18

Bem. zu 4.17.

i) $G^v = \{1\}$ für $v \gg 0$

ii) $G^0 = G_0$ ($\psi(0) = 0$); $G^{-1} = G$

iii) Ü: $\psi(v) = \int_{w=0}^{v} [G^0 : G^w] \, dw$

Übung: Die Abbildung $\phi = \phi_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p}$ (mit Inverser ψ) erfüllt:

$$\phi'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ \frac{1}{p^k - p^{k-1}}, & p^{k-1} - 1 < t < p^k - 1 \qquad 1 \leq k \leq n-1 \\ \frac{1}{p^n - p^{n-1}}, & p^{n-1} - 1 < t \end{cases}$$

$$\psi'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ p^k - p^{k-1}, & k-1 < t < k \qquad 1 \leq k \leq n-1 \\ p^n - p^{n-1}, & n-1 < t \end{cases}$$

(Sprünge der Steigung von ψ an $\{0, \ldots, n-1\}$)