05. Abgeleitete Funktoren (von Modulkategorien)

Sei R ein (nicht-notw. kommutativer) Ring mit 1.

${}_R\underline{\mathrm{Mod}} := R\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$: Kategorie der (Links-) R-Moduln.

Def. 5.1. $Ch^\circ(R)$: Kategorie der (kohomologischen) Komplexe über ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$.

<u>Objekte</u>: $C^\circ = (C^k, d^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ so dass $\forall k\in\mathbb{Z}$: $d^k : C^k \to C^{k+1}$ ein Morphismus in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ ist und $\forall k\in\mathbb{Z}$: $d^{k+1}\circ d^k = 0$.

<u>Morphismen</u>: $f^\circ = (f^k)_{k\in\mathbb{Z}} : C^\circ = (C^k, d^k)_{k\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \overline{C}^\circ = (\overline{C}^k, \overline{d}^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sind $\forall k\in\mathbb{Z}$: Morphismen $f^k : C^k \to \overline{C}^k$ so dass $\overline{d}^i \circ f^i = f^{i+1}\circ d^i$.

<u>Notation</u>: Komplexe

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & C^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d^i} & C^{i+1} & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow f^{i-1} & \shortparallel & \downarrow f^i & \shortparallel & \downarrow f^{i+1} & \\
\cdots \longrightarrow & \overline{C}^{i-1} & \xrightarrow{\overline{d}^{i-1}} & \overline{C}^i & \xrightarrow{\overline{d}^i} & \overline{C}^{i+1} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Proposition 5.2. $Ch^\circ(R)$ ist eine abelsche Kategorie.

<u>Struktur geg. durch</u>:

Addition auf $\mathrm{Hom}_{Ch^\circ(R)}(-,-)$: $(f^\circ + g^\circ)^i := f^i + g^i$

<u>Null</u>: Nullkomplex $\ldots \to 0 \to 0 \to \ldots \to 0 \to 0 \to \ldots$

<u>Kern</u>: zu $f^\circ : C^\circ \to \overline{C}^\circ$ definiere Komplex $\ker f^\circ := (\ker f^i, d^i|_{\ker f^i})_{i\in\mathbb{Z}}$ als Kern zu f° mit Inklusion nach C.

Cokern: dual.

<u>Bemerkung</u>: wg. Prop. 5.2. können von Exaktheit von Diagrammen $\overline{C}^\circ \to C^\circ \to \overline{\overline{C}}^\circ$ von Komplexen reden, und von kurzen exakten Sequenzen $0 \to \overline{C}^\circ \to C^\circ \to \overline{\overline{C}}^\circ \to 0$ in $Ch^\circ(R)$.

Def. 5.3. Sei $C^\circ = (C^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Ch^*(R)$. Definiere

$Z^i := Z^i(C^\circ) := \ker d^i$ (i-Kozykeln) $\quad (B^i \subseteq Z^i$ wg. $d^i\circ d^{i-1} = 0)$

$B^i := B^i(C^\circ) := \mathrm{im}\, d^{i-1}$ (i-Koränder)

$H^i := H^i(C^\circ) := Z^i(C^\circ) / B^i(C^\circ)$ (i-te Kohomologie)

$C^\bullet$ heißt exakt oder azyklisch $:\iff \forall i\in\mathbb{Z}: H^i(C^\bullet)=0$.

Für $f^\bullet: C^\bullet \to \bar{C}^\bullet$ ein Morphismus in $Ch^\bullet(R)$ gelten:

$$f^i(Z^i(C^\bullet)) \subseteq Z^i(\bar{C}^\bullet), \quad f^i(B^i(C^\bullet)) \subseteq B^i(\bar{C}^\bullet)$$

$\rightsquigarrow$ induzierte Abbildungen $H^i(f^\bullet): H^i(C^\bullet) \to H^i(\bar{C}^\bullet)$

Proposition 5.4. $\forall i\in\mathbb{Z}$: $H^i(-): Ch^\bullet(R) \to {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ ist ein Funktor.

Bemerkung: Homologische Komplexe: $Ch_\bullet(R)$

Objekte: $\dots\ C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \to \dots$

Z_i, B_i, H_i analog wie oben (z.B. $Z_i = \ker d_i$)

$\underset{\text{Homologie}}{=}$ $Ch^\bullet(R) \xrightarrow{\sim} Ch_\bullet(R): (C^i,d^i) \mapsto \underset{Ch_{\le 0}(R)}{(C_i,d_i)}$ mit $C_i := C^{-i}$, $d_i := d^{-i}$

Kohomologie verwendet üblicherweise $Ch^{\ge 0}(R) \subseteq Ch^\bullet(R)$, die Unterkategorie der Komplexe mit $(C^\bullet)^i = 0 \ \forall i<0$.

$(C_\bullet)_i = 0 \ \forall i>0$

Lange exakte Sequenzen. Sei $\mathcal{E}: 0 \to C'^\bullet \to C^\bullet \to C''^\bullet \to 0$ exakt in $Ch^\bullet(R)$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C'^i \arrow[r] \arrow[d, "d'^i"] & C^i \arrow[r] \arrow[d, "d^i"] & C''^i \arrow[r] \arrow[d, "d''^i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C'^{i+1} \arrow[r] & C^{i+1} \arrow[r] & C''^{i+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\underset{\text{lemma}}{\overset{\text{Schlangen-}}{\rightsquigarrow}}$

$$0 \to Z'^i \to Z^i \to Z''^i$$

$$C'^{i+1}/B'^{i+1} \to C^{i+1}/B^{i+1} \to C''^{i+1}/B''^{i+1} \to 0$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} & C'^i/B'^i \arrow[r] \arrow[d, "d'^i"] & C^i/B^i \arrow[r] \arrow[d, "d^i"] & C''^i/B''^i \arrow[r] \arrow[d, "d''^i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z'^{i+1} \arrow[r] & Z^{i+1} \arrow[r] & Z''^{i+1} & \end{tikzcd}$$

$\underset{\text{lemma}}{\overset{\text{Schlangen-}}{\rightsquigarrow}}$

$$\begin{tikzcd} H^i(C'^\bullet) \arrow[r] & H^i(C^\bullet) \arrow[r] & H^i(C''^\bullet) \arrow[dll, "\delta^i"'] \\ H^{i+1}(C'^\bullet) \arrow[r] & H^{i+1}(C^\bullet) \arrow[r] & H^{i+1}(C''^\bullet) \end{tikzcd}$$

Satz 5.5. (a) Erhalten Randabbildungen $\delta^i = \delta^i_{\mathcal{E}}$ zu $\mathcal{E}$ und lange exakte Kohomologiesequenz

hierbei sind $H^i(C'^\bullet) \to H^i(C^\bullet)$ bzw. $H^i(C^\bullet) \to H^i(C''^\bullet)$ die Abb.'en die durch die Funktoren aus 5.4. gegeben sind.

(b) Morphismen von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[d] & 0 \arrow[r] & \bar{C}^\cdot \arrow[r] \arrow[d, "\bar{h}^\cdot"] & C^\cdot \arrow[r] \arrow[d, "h^\cdot"] & \bar{\bar{C}}^\cdot \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\bar{h}}^\cdot"] & 0 \\ \mathcal{E}' & 0 \arrow[r] & \bar{D}^\cdot \arrow[r] & D^\cdot \arrow[r] & \bar{\bar{D}}^\cdot \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(in $Ch^\cdot(R)$) induzieren Morphismen zwischen den sich ergebenden langen ex. Sequenzen.

(genauer:
$$\begin{tikzcd} H^i(\bar{\bar{C}}^\cdot) \arrow[r, "\delta^i_{\mathcal{E}}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & H^{i+1}(\bar{C}^\cdot) \arrow[d] \\ H^i(\bar{\bar{D}}^\cdot) \arrow[r, "\delta^i_{\mathcal{E}'}"] & H^{i+1}(\bar{D}^\cdot) \end{tikzcd}$$
)

Homotopie:

Def. 5.6. (a) $f^\cdot: C^\cdot \to D^\cdot$ in $Ch^\cdot(R)$ heißt 0-homotop $\iff$

$\exists$ (0-Homotopie) $(s^i: C^i \to D^{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$ mit s^i Morphismus in ${}_R\underline{Mod}$.

so dass $\forall i \in \mathbb{Z}$: $f^i - 0 = s^{i+1} \circ d^i_{C^\cdot} + d^{i-1}_{D^\cdot} \circ s^i$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C^i \arrow[r, "d^i_C"] \arrow[dl, "s^i"'] \arrow[d, "f^i"] & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, "s^{i+1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] D^{i-1} \arrow[r] & D^i \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

(b) $f^\cdot, g^\cdot: C^\cdot \to D^\cdot$ in $Ch^\cdot(R)$ heißen homotop $:\iff$ $f-g$ ist 0-homotop
$(f \sim g)$

Satz 5.7. (a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $Hom_{Ch^\cdot(R)}(-,-)$

(b) $f^\cdot \sim g^\cdot \Rightarrow H^i(f^\cdot) = H^i(g^\cdot) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

(c) $id_{C^\cdot} \sim 0 \Rightarrow C^\cdot$ ist azyklisch.

Bemerkung. "Man" definiert $K^\cdot(R)$ als $Ch^\cdot(R)/\sim$ (Objekte dieselben, auf den Morphismen bildet man Äquivalenzklassen)

$K^\cdot(R)$ ist selten eine abelsche Kategorie (aber immer eine triangulierte Kategorie)

(abelsche Kategorie $\underset{??}{\iff}$ alle Objekte in ${}_R\underline{Mod}$ sind injektiv)

Auflösungen: Why. I injektiv $:\iff \mathrm{Hom}_R(-,I)$ exakter Funktor

P projektiv $:\iff \mathrm{Hom}_R(P,-)$ exakter Funktor

Sei R eine A-Algebra (A kommutativ!)

$F \in {}_R\mathrm{Mod}$ ist A-flach $:\iff F \otimes_A -$ ist exakter Funktor

Proposition. (a) ${}_R\mathrm{Mod}$ besitzt genügend injektive und genügend projektive

(b) Ist R A-flach, so besitzt ${}_R\mathrm{Mod}$ genügend viele A-flache (alle proj. R-Moduln sind A-flach)

Bemerkung: Grothendieck-Kategorien besitzen genügend viele Injektive.

Def. 5.8. (a) Ein Komplex $I^\bullet \in Ch^{\geq 0}(R)$ zusammen mit einer Abbildung $\varepsilon: M \to I^0$ ($M \in {}_R\mathrm{Mod}$) heißt injektive Auflösung von M $:\iff$ alle I^i sind injektiv und $\underset{-1}{0} \to M \xrightarrow{\varepsilon} \underset{0}{I^0} \xrightarrow{d^0} \underset{1}{I^1} \to \dots$ ist exakt.

(b) Sei $M \in {}_R\mathrm{Mod}$. Ein Komplex $P^\bullet \in Ch^{\leq 0}(R)$ zusammen mit einer Abbildung $\varepsilon: P^0 \to M$ heißt projektive Auflösung $:\iff$ alle P^i sind projektiv und

$$\dots \to P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \to M \to 0 \text{ ist exakt.}$$

Notation: $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M, \quad M \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$

Satz 5.9. (a) Jedes Objekt in ${}_R\mathrm{Mod}$ besitzt eine injektive Auflösung.

(b) zu $M \xrightarrow{\varphi} M'$ ein Morphismus in ${}_R\mathrm{Mod}$ $\exists$ Inj. Auflösungen $M \to I^\bullet$, $M' \to I'^\bullet$ und eine Abbildung von Komplexen $\psi: I^\bullet \to I'^\bullet$ so dass

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & I^0 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & /\!/\!/ & \downarrow{\scriptstyle \psi^0} \\ M' & \longrightarrow & I'^0 \end{array}$$

(c) Die Abbildung $\psi: I^\bullet \to I'^\bullet$ (zu geg. $\varphi: M \to M'$, zu gg. $I^\bullet, I'^\bullet$) ist eindeutig bis auf Homotopie.

(d) Es gelten analoge (duale) Aussagen für projektive Auflösungen

Derivierte Funktoren.

Sei $F : {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ ein additiver Funktor, (d.h. die Abbildungen

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(FM, FN) \quad \text{sind } \mathbb{Z}\text{-linear} \quad \forall M,N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}})$$
$$\varphi \mapsto F\varphi$$

- F induziert additiver Funktor $Ch^\cdot(R) \to Ch^\cdot(\mathbb{Z})$
$$(C^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (FC^i, Fd^i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

Def. 5.10. (a) Sei $P^\cdot \xrightarrow{\varepsilon} M$ eine projektive Auflösung und für $\varphi : M \to M'$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ sei $\varphi : P^\cdot \to P^{\cdot\prime}$ Abbildung projektiver Auflösungen wie in 5.9.

Dann definiere $(L_i F)(M) := H^{-i}(FP^\cdot) \quad \forall i \geq 0$

$$(L_iF)(\varphi) : (L_iF)(M) \to (L_iF)(N) = H^{-i}(FP^\cdot \xrightarrow{F\varphi^\cdot} FP^{\cdot\prime})$$

(b) Sei $M \xrightarrow{\varepsilon} I^\cdot$ eine injektive Auflösung, und zu $M \xrightarrow{\varphi} M'$ sei $I^\cdot \xrightarrow{\varphi} I^{\cdot\prime}$ Abb. von Auflösungen. Definiere

$$(R^iF)(M) := H^i(FI^\cdot) \quad \text{und} \quad (R^iF)(\varphi) := H^i(FI^\cdot \xrightarrow{F\varphi^\cdot} FI^{\cdot\prime})$$

Proposition 5.11. $\forall i \geq 0$ erhält man Funktoren $R^iF, L_iF : {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$

<u>Idee:</u> (a) wähle $\forall M \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ projektive Auflösung $P_M^\cdot \xrightarrow{\varepsilon_M} M$

und $\forall \varphi$ Morphismen von Moduln

Wissen: $\downarrow\downarrow$ und $($ sind homotop

$$\begin{tikzcd} P_M^\cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & M \arrow[d] \\ P_{M'}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[d] \\ P_{M''}^\cdot \arrow[r] & M'' \end{tikzcd}$$

$\underset{5.9.}{\Longrightarrow}$ induz. Abb'en $(L_iF)(M) \to (L_iF)(M')$ sind dieselben.

=

<u>Horseshoe Lemma.</u> Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakte Sequenz in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$, so existiert eine kurze exakte Sequenz von proj. Auflösungen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^{\cdot\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & P^\cdot \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & P^{\cdot\prime\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und von injektiven Auflösungen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I^{\cdot\prime} \arrow[r] & I^\cdot \arrow[r] & I^{\cdot\prime\prime} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Beweis ist ein Induktionsargument. In jedem Schritt (z.B. projektiv)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^{\circ\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"', "\text{surj.}"] & P^{\circ} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha'\oplus\hat{\alpha}"'] & P^{\circ\prime\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''", "\text{surj.}"'] \arrow[dl, dashed, "\exists\hat{\alpha}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Hufeisen

Bemerkung. $\forall i$: $0 \to P^{-i\prime} \to P^{-i} \to P^{-i\prime\prime} \to 0$ spaltet

$\Rightarrow F($ — " — $)$ spaltet, ist also exakt!

$\Rightarrow \quad 0 \to FP^{-i\prime} \to FP^{-i} \to FP^{-i\prime\prime} \to 0$ exakt!!

Satz 5.12. Erhalten lange exakte Kohomologiesequenzen

z.B. $0 \to R^0FM' \to R^0FM \to R^0FM'' \to R^1FM' \to R^1FM \to \ldots$

(lange exakte Kohomologiesequenz zu $0 \to FI^{\circ\prime} \to FI^{\circ} \to FI^{\circ\prime\prime} \to 0$)

F heißt rechtsexakt (kovariant) $:\Leftrightarrow$ $\forall$ rechts ex. Sequenzen $M' \to M \to M'' \to 0$ ist $FM' \to FM \to FM'' \to 0$ rechtsexakt.

(analog linksexakt)

Lemma 5.13. (a) F rechtsexakt $\to$ $L_0F(M) = M$ (kanonisch)

und $(L_iF)(P) = 0$ $\forall i > 0$ falls P projektiv

(b) die duale Aussage für F linksexakt; $R^0F(M)$ und für Injektive.

Beweis. (a) Proj. Auflösung $\ldots \to P^{-1} \to P^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ (rechtsexakt)

$\xrightarrow[F \text{ rechtsexakt}]{}$ $\ldots \to FP^{-1} \to FP^0 \to FM \to 0$

$\Rightarrow H^0(FP) = \dfrac{FP^0}{Fd^{-1}(FP^{-1})} \underset{\text{via } \varepsilon}{\overset{\text{kanonisch}}{=}} FM.$

(i) Ist P projektiv, so ist $\underset{-3}{0} \to \underset{-2}{0} \to \underset{-1}{0} \to \underset{0}{P} \xrightarrow{id} \underset{1}{P}$ projektive Auflösung.

$\square$