Lemma 6.15. Ist $H \leq G$ von endlichem Index, so ist

$$\chi : \operatorname{CoInd}_H^G B \longrightarrow \operatorname{Ind}_H^G B, \quad \varphi \longmapsto \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} \otimes \varphi(g)$$

ein wohl-definierter G-Modulisomorphismus.

Beweis.

- prüfe: χ ist wohldefiniert.
- G-Modul homomorphismus: ✓ $\quad (\varphi(\underbrace{gg'}_{=\tilde{g}}) \quad \rightsquigarrow g = \tilde{g}(g'^{-1}))$
- Für Iso: Inverse Abbildung:

$$\beta = \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} \otimes b_g \longmapsto f_\beta : \begin{cases} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow B \\ g \longmapsto b_g \end{cases} \quad \text{und } H\text{-äquivariant.}$$

* aus Repräsentantensystem

$\boxtimes$

Def. 6.16. Ein G-Modul M heißt $^{(\text{co-})}$induziert $:\Longleftrightarrow \exists X \in \underline{\mathrm{Ab}}$ (als $\mathbb{Z}[\{e\}]$-Modul):

$$M \cong \operatorname{CoInd}_{\{e\}}^G X \quad \left(= \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X \right)$$

25.05.18

<u>Nachtrag:</u>

$$\big(\underbrace{\mathbb{Z}[G]}_{=:M}, \ \cdot : \begin{matrix} M \times G \longrightarrow M \\ (m,g) \longmapsto g^{-1} m \end{matrix} \big) \cong \big(\underbrace{\mathbb{Z}[G]}_{=:M}, \ \cdot : \begin{matrix} M \times G \longrightarrow M \\ (m,g) \longmapsto m \cdot g \end{matrix} \big) \quad \text{als rechts-Moduln}$$

$$\sum_g a_g g \longmapsto \sum_g a_g g^{-1}$$

$f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)$ $\quad (gf)(\alpha) = f(\alpha g)$ $\quad$ (f erfüllt $f(h\alpha) = hf(\alpha)$)

alternativ $\quad (gf)(\alpha) = f(g^{-1}\alpha)$ $\quad$ (f erfüllt $f(\alpha h^{-1}) = hf(\alpha)$)

Bemerkung. $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X \cong \operatorname{Ind}^G X$ als G-Modul

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} X \cong \operatorname{CoInd}^G X$$

Def. 6.17. Ein G-Modul A heißt G-(<u>Ko-</u>)azyklisch $:\Longleftrightarrow H_i^{i}(G, A) = 0 \ \forall i > 0$

Bemerkung. $H^i(\{e\}, M) = H_i(\{e\}, M) = \begin{cases} M, & i = 0 \\ 0, & i > 0 \end{cases}$, denn:

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(\underset{\substack{| \\ \text{projektiv}}}{\mathbb{Z}}, M) = 0 \ \forall i > 0, \qquad \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\underset{\substack{? \\ \text{projektiv}}}{\mathbb{Z}}, M) = 0 \ \forall i > 0$$

Korollar 6.18. (zu Shapiro + Bem.)

(Ko-)induzierte Moduln sind (Ko-)azyklisch.

Beweis. (z.B. Ko-)

$$H^i(G, \mathrm{CoInd}^G M) \underset{\text{Shap.}}{\cong} H^i(\{e\}, M) \ldots$$

Bemerkung. Mit (Ko)azyklischen Auflösungen kann man (Ko-)Homologie berechnen!

<u>Skizze</u>.

$$\begin{tikzcd} \text{azykl. Aufl.} \arrow[r] & A \arrow[r] & M \\ & P^{\bullet\bullet} \arrow[u] & \end{tikzcd} \quad \Bigg\} \text{ quasiiso.} \rightarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{Aufl.}"] & M \\ \mathrm{Tot}\, P \arrow[u] \arrow[ur, "\text{Aufl.}"'] & \end{tikzcd}$$

Doppelkomplex, spaltenweise Auflösung von A.

—— $(F = \mathbb{Z} \otimes_G -)$

$FP \longrightarrow FA$ – spaltenweise exakt, da die A^{-i} azyklisch!

$$\Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} FA \\ \mathrm{Tot}\, FP = F(\mathrm{Tot}\, P) \arrow[u, "\text{quasi-iso}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} FA \text{ berechnet Homologie} \\ \Uparrow \\ \leftarrow \text{Berechnet Homologie} \end{array}$$

<u>Tate Kohomologie</u> Sei G eine <u>endliche</u> Gruppe.

Sei $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung, mit P^{-i} endl. erz. über $\mathbb{Z}[G]$ ($\Rightarrow$ über $\mathbb{Z}$, da G endlich)

Lemma 6.19. Sei M ein endl. erz., projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul, $N \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$. Dann:

(a) $M^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ mit $(g\varphi)(m) := \varphi(g^{-1}m)$ ist endl.-erz., projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

(b) $\psi: M \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M^*, N)$, $m \otimes n \longmapsto (f_{m \otimes n}: \varphi \longmapsto \varphi(m) \cdot n)$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln.

(c) Man hat Isomorphismen $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \xrightarrow[(*)]{} (M \otimes_{\mathbb{Z}} N)^G \xrightarrow[\text{(aus b)}]{\sim} \mathrm{Hom}_G(M^*, N)$ (von ab. Gruppen!)

wobei $(*)$ $m \otimes n \longmapsto \sum_{g \in G} g^{-1}m \otimes gn$ und M in $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ ist ein rechts-G-Modul durch $m \cdot g := g^{-1}m$

<u>Bem</u> G-op. in (b) ist gg. durch $(gf)(\varphi) = g f(g^{-1}\varphi)$

<u>Beweis.</u> (0) M^* ist ein G-Modul.

(a) Falls $M = \mathbb{Z}[G]$: $\mathbb{Z}[G]^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) = \mathrm{CoInd}^G \mathbb{Z} \cong \mathrm{Ind}^G \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[G]$

verwende Nachtrag

M beliebig: $M \oplus M' \cong \mathbb{Z}[G]^r$ $(r \in \mathbb{N})$ $\overset{\text{1. Fall}}{\Longrightarrow}$ $M^* \oplus (M')^* \cong \mathbb{Z}[G]^r$

$\Longrightarrow M^*$ projektiv.

(b) G-Operation: $g(m \otimes n) = gm \otimes gn$, $(gf)(\varphi) = g \cdot f(g^{-1}\varphi)$

G-Äquivarianz: $\Psi(g(m\otimes n))(\varphi) = \Psi(gm \otimes gn)(\varphi) = \varphi(gm) \cdot gn$ $\quad \| \; -(h\varphi)(m) = \varphi(h^{-1}m)$

$$(g \cdot \Psi(m \otimes n))(\varphi) = g(\Psi(m\otimes n)(g^{-1}\varphi)) = g\underbrace{(g^{-1}\varphi)(m)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot n = \varphi(gm)\cdot(gn)$$

Isomorphismus: genügt als $\mathbb{Z}$-Modul. Beobachtung: M endl.-erz. projektiv / $\mathbb{Z}[G]$

$\underset{G \text{ endl.}}{\Longrightarrow}$ M proj. endl. erz. / $\mathbb{Z}$ $\underset{\text{OE}}{\Longrightarrow}$ $M = \mathbb{Z}$ ... klar.

(c) Zeige nur Isom. links, rechts folgt aus (b) und $(-)^G$.

$M = \mathbb{Z}[G]$: (Ü)

Verwende $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \xrightarrow{\sim} N \longrightarrow (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} N)^G$

$$n \longmapsto \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes gn$$

∎

Korollar 6.20. (a) Dualisieren von $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ liefert einen exakten Komplex $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^*} P^{*\bullet}$ (alle $(P^i)^*$ sind proj., endl. erz. nach 6.19)

(b) $H_i(G, M) = H^{-i}(\mathrm{Hom}_G(P^*, M))$ $\forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (a) $P^\bullet \to \mathbb{Z}$ ist ein exakter Komplex freier $\mathbb{Z}$-Moduln $\underset{\text{dualisieren exakt}}{\Longrightarrow}$ $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^*} P^{*\bullet}$

(b) $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P^{-i}, \mathbb{Z}), M) \underset{\text{Lemma (c)}}{\cong} P^{-i} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$ (Abbildungen wie erwartet Ü)

∎

Tate:

Definiere $Q \in Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G])$ als

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & P^* \\ & \mathbb{Z} \arrow[ur, "\varepsilon^*"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \overset{-2}{P^{-2}} \arrow[r] & \overset{-1}{P^{-1}} \arrow[r] & \overset{0}{P^0} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & \overset{1}{(P^0)^*} \arrow[r] & \overset{2}{(P^{-1})^*} \arrow[r] & \overset{3}{(P^{-2})^*} \arrow[r] & \cdots \\ & & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[ur, "\varepsilon^*"] & 0 & & & \end{tikzcd}$$

} exakter Komplex proj. endl. erz. $\mathbb{Z}[G]$-Moduln.

← weglassen.

Definition 6.21. $\hat{H}^i(G,M) := H^i(\mathrm{Hom}_G(Q,M))$ ist die i-te Tate Kohomologie

Proposition 6.22.

(a) $\hat{H}^i(G,M) = H^i(G,M), \quad i \geq 1$

(b) $\hat{H}^{-i-1}(G,M) = H_i(G,M), \quad i \geq 1$

(c) ${}_N M := \ker(N_G : M \to M, m \mapsto \sum_{g \in G} gm)$. Dann ex. 4-Term exakte Sequenz

$$0 \to \hat{H}^{-1}(G,M) \to H_0(G,M) \to H^0(G,M) \to \hat{H}^0(G,M) \to 0$$

$$0 \to {}_N M / I_G M \to M_G = M/I_G M \xrightarrow{N_G \cdot -} M^G \to M^G / N_G M \to 0$$

$$\bar{m} \mapsto \sum_g g\bar{m}$$

Beweis.

(a) ✓, nach Def.

(b) ✓, Korollar 6.20

(c) Sei $C = \mathrm{Hom}_G(Q,M) \quad (\in Ch^\cdot(\mathbb{Z}))$

$$C^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1$$

$C^{-1} = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]^*, M) \cong M \to M_G$

$C^0 = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]^*, M) \cong M \hookleftarrow M^G$

coker $d^{-2} = M_G = C^{-1}/B^{-1}$ Kor!

im $d^{-2} = I_G M$

$\ker d^0 = M^G$
 $= Z^0(C^\cdot)$

$$M_G \dashrightarrow M^G$$

$$0 \to H^{-1}(C^\cdot) \to C^{-1}/B^{-1} \xrightarrow{\bar{d}^{-1}} Z^0 \to H^0(C^\cdot) \to 0$$

$$\bar{d}^{-1} : M \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M)^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]^*, M) \xrightarrow{\circledast} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], M) \cong M$$

$$m \mapsto 1 \otimes m \mapsto \sum_g g^{-1} \otimes gm \mapsto (\varphi \mapsto \sum_g \varphi(g^{-1}) gm) \mapsto (h \mapsto \sum_g \underbrace{\varphi_h(g^{-1})}_{=1} gm) = N_G m$$

$\circledast$: $\mathrm{Hom}_G(\varepsilon^* \circ \varepsilon, M)$

$$\varepsilon^* \circ \varepsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G]^*, \quad g \mapsto (\varphi_g : h \mapsto 1)$$

$$\Rightarrow \bar{d}^{-1} = (N_G \cdot -)$$

Korollar 6.23.

(a) Die Tate-Kohomologie assoziiert zu jeder kurzen exakten Sequenz eine lange ex. Kohomologiesequenz + Morphismen zw. Abb.'en kurzer ex. Seq.

(b) $M = \mathrm{CoInd}_H^G N \implies \hat{H}^i(G,M) \cong \hat{H}^i(H,N)$ (Shapiro) Funktoriell in M

(c) $G = \{e\} \implies \hat{H}^i(G,M) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

(d) M induzierter G-Modul (oder CoInd) $\implies \hat{H}^i(G,M) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis.

(a) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \quad \rightsquigarrow \quad 0 \to \mathrm{Hom}_G(Q, M') \to \mathrm{Hom}_G(Q,M) \to \mathrm{Hom}_G(Q^i, M'') \to 0$ exakt, da Q^i $\mathbb{Z}[G]$-projektiv

etc.

(b) $\mathrm{Hom}_G(Q^i, \mathrm{CoInd}_H^G N) \underset{\text{Adj.}}{\cong} \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_G^H Q, N)$

(rein formal an Def.) $\to$ ein proj. Kplx. für Tate Kohomologie von H

und $\mathrm{Res}_G^H \mathbb{Z}[G]$ ist ein freier endl. erz. $\mathbb{Z}[H]$-Modul

(c) Nur $i = 0, 1$ interessant: $G = \{e\}$

$$\left.\begin{array}{ccc} M_G & \xrightarrow{N_G} & M^G \\ \| & & \| \\ M & \xrightarrow{1} & M \end{array}\right\} \hat{H}^{-1} = \hat{H}^0 = 0$$

(d) folgt aus (b) $\wedge$ (c). $\blacksquare$

Dimensionsverschiebung

$H \leq G$ Untergruppe.

Lemma 6.24. Sei $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $B \in {}_H\underline{\mathrm{Mod}}$. Dann existieren funktorielle Isomorphismen

(a) $\mathrm{CoInd}_H^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq \mathrm{CoInd}_H^G (B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A)$

(b) $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}_H^G B \simeq \mathrm{Ind}_H^G (\mathrm{Res}_G^H A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$

Beweis. 29.05.18

(a) $\mathrm{CoInd}_H^G (B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A) = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A) = Y$ $\quad \phi: X \to Y$

Für $f \in Y \to (gf)(g') = f(g'g)$ $\quad h \cdot (b \otimes a) = hb \otimes ha$

$\mathrm{CoInd}_H^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B) \otimes_{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B \otimes_A \mathrm{Res}_G^H A) = X$

$h \circ_1 (b \otimes a) = hb \otimes a$

$h \circ_2 (b \otimes a) = b \otimes ha$

Für $f \in X \to (g \cdot f)(g') = g \circ_2 f(g'g)$