$\exp_p : B_\varepsilon(0) \to M$ ist ein Diffeomorphismus auf $\exp(B_\varepsilon(0))$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.

$0 < r < \varepsilon$: $\quad B_r(p) \subseteq M, \quad B_r(p) := \exp_p(\underbrace{B_r(0)}_{\subseteq T_pM})$

"geodätischer Ball"

$S_r(p) := \{ \exp_p(v) \mid \|v\| = r \}$

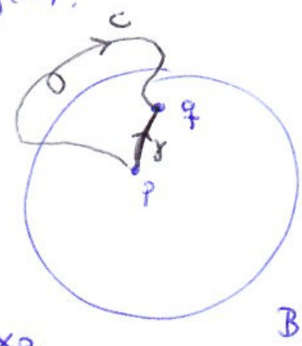
"geodätische Sphäre"

Gauss Lemma. "Geodätische Kurven durch p stehen senkrecht auf geodätischen Sphären."

Proposition. (Geodätische minimieren lokal die Länge von Kurven)
Sei $p \in M$, $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to M$ ein Diffeomorphismus auf $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ ist. Sei $\gamma : [0,1] \to B := B_r(p)$, $r < \varepsilon$, $\gamma(0) = p$ eine Geodätische. Sei $c : [0,1] \to M$ eine (stückweise) glatte Kurve mit $c(0) = p$, $c(1) = q = \gamma(1)$.

Dann gilt: $\quad \ell_0^1(c) \geq \ell_0^1(\gamma)$ und

$\ell_0^1(c) = \ell_0^1(\gamma) \implies \operatorname{im} c = \operatorname{im} \gamma.$



Beweis.
Idee: Schreibe $c = c(s)$ in Polarkoordinaten: $\qquad \exp := \exp_p$

$$c(s) = \exp(r(s) \cdot v(s)) \quad \text{mit} \quad r > 0 \text{ für } s > 0$$ (Zerlege Kurve s.d. $p \notin c((0,1])$)

Wir nehmen dabei zunächst an, dass $c([0,1]) \subseteq B$.

o.B.d.A.: $\quad c(s) \neq p \quad \forall s > 0$

Setze $\quad f(r,s) := \exp(r \cdot v(s)) \implies c(s) = f(r(s), s)$

$$\implies c'(s) = \frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{r(s)} \cdot \frac{\partial r}{\partial s}\Big|_s + \frac{\partial f}{\partial s}\Big|_s$$

$$\|c'\|^2 = \left\| \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \right\|^2 + 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle + \left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|^2$$

$$= \left| \frac{\partial r}{\partial s} \right|^2 \underbrace{\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\|^2}_{=1} + 2 \frac{\partial r}{\partial s} \underbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle}_{=0, \text{ Gauss-Lemma}} + \left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|^2$$

denn:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial r} \exp(r v(s)) \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial r} \gamma(r, p, v(s)) \right\| = \|v(s)\| = 1.$$

$$\Rightarrow \|c'\|^2 = \left|\frac{\partial r}{\partial s}\right|^2 + \left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|^2 \Rightarrow \|c'\|^2 \geq \left|\frac{\partial r}{\partial s}\right|^2.$$ Sei $\delta > 0$ klein.

$$\underbrace{\int_\delta^1 \|c'(s)\| ds}_{\xrightarrow[\delta\to 0]{} l_0^1(c)} \geq \int_\delta^1 |r'(s)|\, ds \geq \int_\delta^1 r'(s)\, ds = r(1) - \underbrace{r(\delta)}_{\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0} \xrightarrow[\delta\to 0]{} r(1) = l_0^1(\gamma)$$

$$\left(r' = \frac{\partial r}{\partial s}\right)$$

Gleichheit $\Rightarrow \left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\| = 0 \Rightarrow f(r,s)$ konstant in s $\Rightarrow v(s) = v_0 \; \forall s$

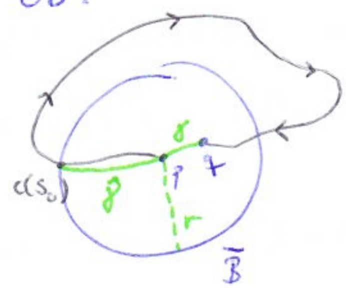
$\Rightarrow c(s) = \exp(r(s)v_0) \Rightarrow c$ ist eine Reparametrisierung von γ

(monoton: $r' = |r'| \Rightarrow r' \geq 0$)

$\Rightarrow \operatorname{im} c = \operatorname{im} \gamma$.

Wenn $c([0,1]) \subsetneq B$, sei s_0 der kleinste Wert s mit $c(s) \in \partial\bar{B}$.

$$l_0^1(c) \geq l_0^{s_0}(c) \geq l_0^1(\hat{\gamma}) = r \geq l_0^1(\gamma)$$



$\hat{\gamma}$: Geodäte $p \longleftrightarrow c(s_0)$

Bemerkung:

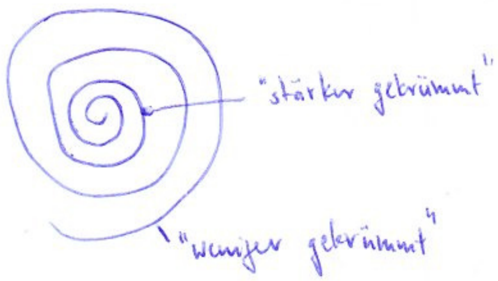
1) Man kann zeigen: Ist γ eine Kurve, parametrisiert proportional zur Bogenlänge, sodass

$$l_0^1(\gamma) \leq l_0^1(c) \quad \forall \text{ Kurven } c,\ \gamma(0) = c(0),\ \gamma(1) = c(1)$$

dann ist γ eine Geodätische.

2) Isometrien erhalten Geodätische

KRÜMMUNG



Bsp.

Krümmung (Kreis mit Radius r) $:= \frac{1}{r}$

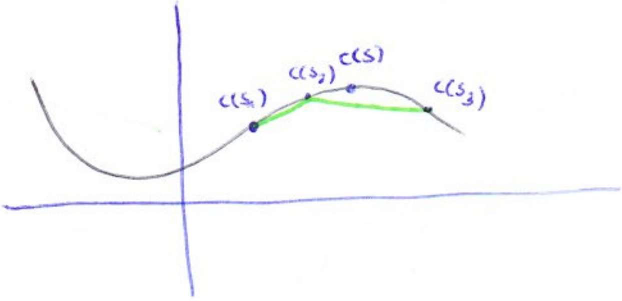
• Kurven $\subseteq \mathbb{R}^2$: (Kurven seien parametrisiert durch die Bogenlänge)

$c(s)$.

Sei $c''(s) \neq 0$.

s_1, s_2, s_3 nahe bei s

$\Rightarrow c(s_1), c(s_2), c(s_3)$ nicht kollinear.

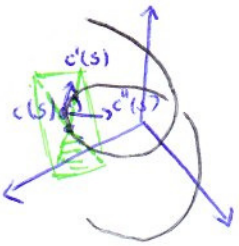


$\Rightarrow c(s_1), c(s_2), c(s_3)$ liegen auf einem eindeutig bestimmten Kreis mit Radius R.

Für $s_1, s_2, s_3 \to s$ erhält man einen wohldefinierten Grenzkreis, den sogenannten "oskulierenden" Kreis in $c(s)$.

Krümmung in $c(s)$:= Krümmung des osk. Kreises in $c(s)$. $= \frac{1}{R} \underset{\text{lässt sich zeigen}}{=} |c''(s)|$

• Kurven $\subseteq \mathbb{R}^3$. Wir fixieren wieder s. Sei $c''(s) \neq 0$.



$c(s_1), c(s_2), c(s_3)$ definieren eine Ebene $\subseteq \mathbb{R}^3$.

$s_1, s_2, s_3 \to s$ Grenzebene $=:$ oskulierende Ebene

Der oskulierende Kreis liegt dann in der osk. Ebene.

$\rightsquigarrow$ Krümmung

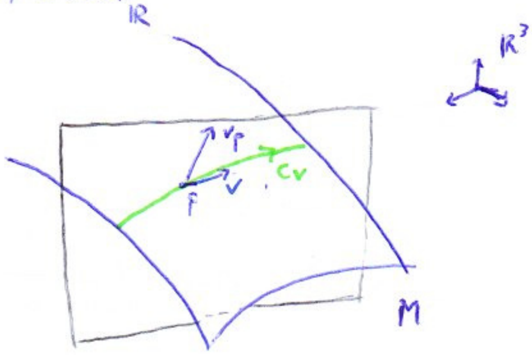
$$\underbrace{\frac{d}{ds} \underbrace{\|c'\|^2}_{\text{konst}}}_{=0} = \frac{d}{ds} \langle c', c' \rangle = 2 \langle c'', c' \rangle \Rightarrow c''(s) \perp c'(s)$$

Es gilt: osk. Ebene $= \langle c'(s), c''(s) \rangle_{\mathbb{R}}$

• Flächen und Euler. $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$p \in M$. Sei v_p ein Einheitsnormalenvektor am Pkt p:

$v_p \perp T_pM$, $\|v_p\| = 1$.



Sei $v \in T_pM$, $\|v\| = 1$.

v_p und v spannen eine Ebene E_v auf.

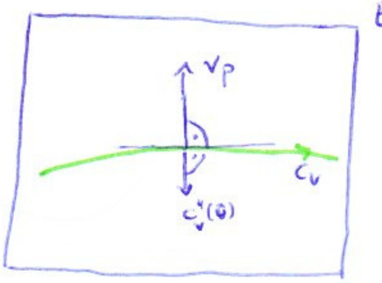
$E_v \cap M =$ Kurve c_v

parametrisiert durch Bogenlänge $c_v(0) = p$, $c_v'(0) = v$.

$c_v''(0) \perp T_pM$

$\exists!\, \kappa_v \in \mathbb{R}: \quad c_v''(0) = \kappa_v \cdot \nu_p$

offensichtlich: $\kappa_{-v} = \kappa_v$.



$\Rightarrow \kappa_v < 0$

$\rightsquigarrow$ Wir erhalten eine Funktion $\kappa: \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{R}$
$v \mapsto \kappa_v$

Satz von Euler. Es existieren eindeutige Richtungen $v_1, v_2 \in \mathbb{RP}^1$, so dass

$$k_1 := \kappa_{v_1} = \min_v \kappa_v \leq \max_v \kappa_v = \kappa_{v_2} =: k_2 .$$

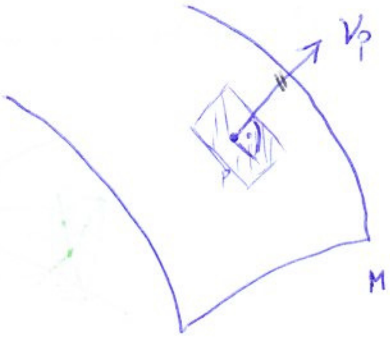
Es gilt: $\quad v_1 \perp v_2 \quad$ und $\quad \kappa_v = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$, wobei $\theta = \sphericalangle(v, v_1)$

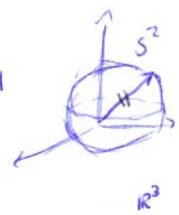
09.05.18

Krümmung von Flächen nach Gauss.

Sei $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche. $p \in M$.

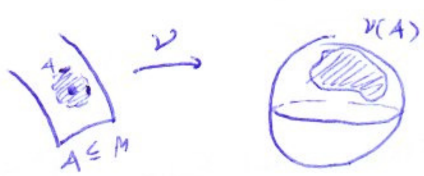
Sei ν_p jener Einheitsnormalenvektor auf M am Punkt p, so dass (ν_p, v, w) positiv orientiert ist, wobei (v, w) - positiv orientiert ist in T_pM.





$\rightsquigarrow$ Gauss-Abbildung: $\nu: M \longrightarrow S^2$
$p \longmapsto \nu_p$

Gauss-Krümmung: $\quad K(p) = \lim\limits_{A \to p} \dfrac{\mathrm{vol}(\nu(A))}{\mathrm{vol}(A)}$



Bsp. 1) $M^2 = S^2 = S^2_1$ Einheitssphäre.

$\rightsquigarrow \nu = \mathrm{id}: S^2 \to S^2$

$$\Rightarrow \forall p \in S^2: \quad K(p) = \lim_{A \to p} \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(A)} = \underline{1}.$$

2) $M = S^2_r$: Sphäre vom Radius r.

$\rightsquigarrow \quad \mathrm{vol}(\nu(A)) = \dfrac{1}{r^2} \mathrm{vol}(A) \qquad \rightarrow \quad K(p) = \dfrac{1}{r^2}.$