Dienstag, 17. April 2018 22:24

# ALGEBRAISCHE GRUPPEN

Literatur:
- T.A. Springer, Linear Algebraic Groups
- J.F. Humphreys, — " —
- W.C. Waterhouse, Introduction to Affine Group Schemes

[ Borel, Linear Algebraic Groups (setzt Geometric voraus) ]

## 0. EINLEITUNG

Algebraische Gruppen = Gruppenobjekte in der Kategorie algebraischer Varietäten.

Varietäten: Nullstellenmengen von Polynomen in $\mathbb{A}^n_k = k^n$ (oder $\mathbb{P}^n_k$)

Morphismen: komponentenweise durch Polynome gegeben.

Vergleiche: topologische Gruppen = Abb. sind stetig (Grp.obj in Top)

Lie - Gruppen = Abb. sind glatt (Grp.obj. in Mfd)

Beispiel:

$$G = GL_n(k), \qquad k = \bar{k} \text{ alg. abgeschlossen}$$

Trick von Rabinowitch: $GL_n(k) = \{ (a_{ij}, d) \in k^{n^2+1} \mid \det(a_{ij}) \cdot d = 1 \}$

$\Rightarrow$ $A = (a_{ij})$ hat $\det A \neq 0$, d.h. $A \in GL_n(k)$

$d = \det A^{-1}$, $\quad A^{-1} = d \cdot \underbrace{A^{adj}}_{\text{hängt polynomell von } (a_{ij}) \text{ ab.}}$

$\Rightarrow$ $A \longmapsto A^{-1}$ ist durch Polynome gegeben

$(A, B) \mapsto A \cdot B$ ist auch durch Polynome gegeben.

Beschränkt man sich auf affine Varietäten, erhält man affine algebraische Gruppen,

für die gilt: $G \hookrightarrow GL_n(k)$ Zariski-abg. Unterraum

für geeignetes $n$ (Einbettungssatz), daher auch der Name Lineare algebraische Gruppe.

Ziel: Struktur reduktiver / halbeinfacher affiner alg. Gruppen über alg. abg. Körper $k$ (mit char $k=0$ oder char $k=p>0$) untersuchen.

Strategie:

$$\begin{array}{ccll} & G & \text{reduktiv} & \\ & \cup\!| & & \\ U \rtimes T & = B & \text{'Borel-Untergruppe"} & \\ & \cup\!| & & \\ T \cong \mathbb{G}_m^n & U & \text{unipotent} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & GL_n(k) & \\ & \cup\!| & \\ & \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} & \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ T = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = U \end{array}$$

(kommutative) Torus Gruppe

$\mathbb{G}_m = GL_1(k)$

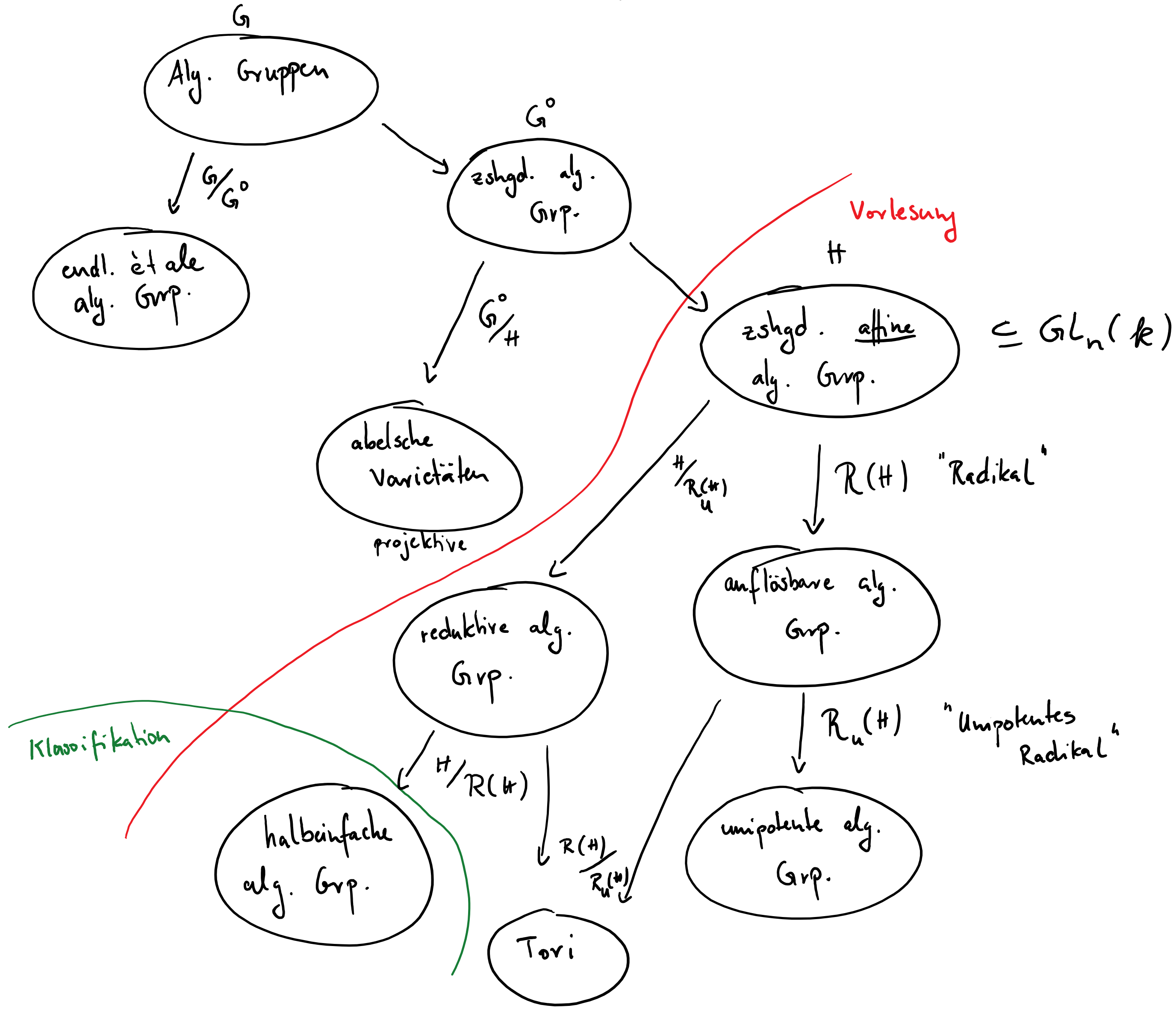
$T \subseteq G$ operiert auf $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G = T_e G$ (Tangentialraum)

(z.B. $GL_n(k)$ operiert via Konjugation auf $M_n(k) = \mathfrak{g}$)

Nicht-triviale Eigenräume liefern "Charaktere" $T \to k^\times$ (die die Eigenwerte "parametrisieren"), die ein sogenanntes Wurzelsystem bilden, welche man mittels sog. Dynkin-Diagrammen klassifizieren kann.

(z.B. $\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{x_i}{x_j}$ sind Wurzeln für $1 \leq i \neq j \leq n$ $GL_n(k)$)

# Hierarchie algebraischer Gruppen



04

Freitag, 20. April 2018 14:25

# 01. Algebraische Geometrie und Funktoren

## I. Affine Varietäten

$k$ sei ein algebraisch abgeschlossener Körper; $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_k := k^n$ heißt affiner n-Raum.

Def. 1. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt affine Varietät, falls ein Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, -, X_n] = k[\underline{X}]$ existiert, so dass $X = V(I) = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid \forall f \in I: \ f(P) = 0\}$

Nach dem Hilbert'schen Basissatz existieren endlich viele $f_1, -, f_n \in I$ mit $I = (f_1, -, f_n)$.

Lemma 2. Für Ideale $I_1, I_2, (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

(i) $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow V(I_2) \subseteq V(I_1)$

(ii) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2)$

(iii) $V(\sum_\lambda I_\lambda) = \bigcup_\lambda V(I_\lambda)$

Die Mengen $\{V(I) \mid I \trianglelefteq k[\underline{X}]\}$ bilden genau die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$, der sogenannten Zariski-Topologie. $(V(0) = \mathbb{A}^n, \ V(1) = \emptyset)$

Affine Varietäten tragen die Unterraumtopologie.

Lemma 3. Die offenen Mengen der Form $D(f) := V((f))^c = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid f(P) \neq 0\}$ mit $f \in k[X]$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$.

Für eine affine Varietät $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ setze $I(X) := \{f \in k[\underline{X}] \mid \forall P \in X: \ f(P) = 0\} \trianglelefteq k[\underline{X}]$.
Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ setze $\operatorname{rad} I := \sqrt{I} := \{f \in k[\underline{X}] \mid \exists n \in \mathbb{N}: \ f^n \in I\}$, das Radikal von $I$.

Gilt $I = \sqrt{I}$, so heißt $I$ Radikalideal.

Theorem 4. (Hilbert'scher Nullstellensatz)
$I(\cdot)$, $V(\cdot)$ induzieren Bijektionen

$$\{\text{Radikalideale in } k[\underline{X}]\} \underset{V(\cdot)}{\overset{I(\cdot)}{\longleftrightarrow}} \{\text{affine Varietäten im } \mathbb{A}^n\}$$

Korollar 5. Maximale Ideale von $k[\underline{X}]$ entsprechen abgeschlossenen Punkten.

$$\mathfrak{m}_a := I(\{a\}) = (X_1 - a_1, -, X_n - a_n); \quad a = (a_1, -, a_n) \in \mathbb{A}^n$$

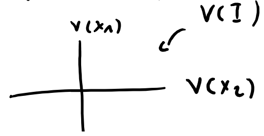
Lemma 6. Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

$$I \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}] \iff Z = V(I) \text{ ist irreduzibel als topologischer Raum.}$$

Irreduzible Räume sind zusammenhängend.
$Y \subseteq X$ irreduzibel $\iff$ $\overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

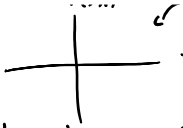
Korollar 9. Jede affine Varietät ist eine endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten.

Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$ $\quad \mathbb{A}^2_k$



Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$

$\mathbb{A}^2_k$




Koordinatenachsen, zerlege in irred. Komponenten.

**Def. 11.** Für eine affine Varietät $X$ heißt $A(X) := A_X := k[\underline{X}]/I(X)$ der Koordinatenring von $X$.
("Morphismen $X \to \mathbb{A}^1$")

$A(X)$ ist eine reduzierte ($\sqrt{0} = 0$) endl. erz. $k$-Algebra.

$A(X)$ ist Integritätsring $\Leftrightarrow$ $X$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I(X) \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}]$.

**Def. 12.** Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Ein Morphismus $X \xrightarrow{\phi} Y$ von Varietäten besteht aus einem $m$-Tupel $\phi = (f_1, -, f_m) \in A(X)^m$

mit $\phi(P) := (f_1(P), -, f_m(P)) \in Y \quad \forall P \in X$.

**Lemma 13.** Morphismen von Varietäten sind stetig bzgl. der Zariski-Topologie.

Beweis.

$$\phi^{-1}(\underset{\substack{\cap \\ A(Y)}}{D(f)}) = D(\underbrace{f \circ \phi}_{\in A(X)})$$

$\blacksquare$

**Def. 14** $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$. Dann ist das kartesische Produkt $X \times Y \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ wieder eine affine Varietät, das Produkt von $X, Y$.

Achtung: $X \times Y$ trägt nicht die Produkttopologie

Beweis. (14)

$$X = V(f_1, -, f_n), \quad Y = V(g_1, -, g_m) \Rightarrow X \times Y = V(f_1, -, f_n, g_1, -, g_m)$$

$\blacksquare$

**Theorem 15.** Der Funktor $X \mapsto A(X)$ induziert eine Kategorienäquivalenz von

$$\{\text{affine Varietäten} / k\}^{op} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{reduzierte endlich erz. } k\text{-Algebren}\}$$

$$(X \xrightarrow{\phi} Y) \longmapsto A(Y) \xrightarrow{\phi^*} A(X)$$

$$f + I(Y) \mapsto f \circ \phi + I(X)$$

Der quasiinverse Funktor ordnet $R$ die Menge $\operatorname{Specm}(R)$ zu, $k[\underline{X}] \to R$ induziert $\operatorname{Specm}(R) \to \operatorname{Specm} k[\underline{X}] = \mathbb{A}^n_k$

Alternativ können wir den Funktor $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(-, k)$ benutzen, da $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(R, k) \cong \operatorname{Specm} R$
$f \mapsto \ker f$

($k \subseteq R/m$ ist endlich, d.h. $R/m = k$, da $k = \bar{k}$)

# 06

Freitag, 20. April 2018 15:17

## II. Funktoren

**Yoneda-Lemma.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist der kontravariante Funktor

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \underline{\mathrm{Sets}}) = \underline{\mathrm{Sets}}^{\mathcal{C}},$$

$$\begin{array}{ccl} A & \longmapsto & h_A : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi^* \\ B & & h_B : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \end{array}$$

volltreu, d.h.

$$h_A(B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Func}}(h_B, h_A)$$

$$\phi \longmapsto \left(\phi^* : h_B(C) \longrightarrow h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}} \quad \text{(nat. Trafos)}$$

$$\eta_B(\mathrm{id}_B) \longleftarrow \left(\eta_C : h_B(C) \longrightarrow h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}}$$

Mit anderen Worten: $A \in \mathcal{C}$ ist genauso gut wie der Funktor $h_A$.

Funktoren der Form $h_A$ heißen **darstellbar**.

**Bsp. 1.** $\mathcal{C}$: Kategorie endl. erz. reduzierter $k$-Algebren.

(i) $\mathbb{A}^n() : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto R^n$ wird dargestellt von $k[X_1, \ldots, X_n]$

da $R^n = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathrm{Alg}}(k[\underline{X}], R)$

(ii) $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$ seien darstellbar. Dann ist der Produktfunktor

$F \times G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto F(R) \times G(R)$ darstellbar.

$F = h_A$, $G = h_B$, $A, B \in \mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $F(R) \times G(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathrm{Alg}}(A, R) \times \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathrm{Alg}}(B, R)$

d.h. $F \times G = h_{A \otimes_k B}$ $\qquad = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathrm{Alg}}(A \otimes_k B, R)$

# II. Algebraische Gruppen: Grundlagen

## 1. Affine algebraische Gruppen. $k = \bar{k}$

**Def. + Satz 1.**

(i) Eine affine (lineare) algebraische Gruppe $/_k$ ist eine affine Varietät $G$ über $k$ zusammen mit Morphismen

$$\mu : G \times G \longrightarrow G \quad (\text{Multiplikation})$$

$$\iota : G \longrightarrow G \quad (\text{Inversion})$$

$$\varepsilon : \mathbb{A}^0_k \longrightarrow G \quad (\text{neutrales Element})$$

so dass die Gruppenaxiome gelten:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd} \qquad (\text{Assoziativität})$$

$$\begin{tikzcd}
G \times \mathbb{A}^0 \arrow[r, "\mathrm{id} \times \varepsilon"] \arrow[dr, "pr_1"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{A}^0 \times G \arrow[l, "\varepsilon \times \mathrm{id}"'] \arrow[dl, "pr_2"] \\
& G &
\end{tikzcd} \qquad (\text{neutrales Element})$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, \iota)"] \arrow[d, "\text{konst.}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, phantom, "///"] & G \arrow[l, "(\iota, \mathrm{id})"'] \arrow[d, "\text{konst.}"] \\
\mathbb{A}^0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & G & \mathbb{A}^0 \arrow[l, "\varepsilon"]
\end{tikzcd} \qquad (\text{Inverses})$$

Morphismen in der Kategorie (affiner) alg. Gruppen: Morphismen von Varietäten, die obige Strukturen respektieren.

(ii) Die Kategorie affiner algebraischer Gruppen ist (anti-)äquivalent zu folgenden Kategorien:

a) Objekte: kommutative Hopf-$k$-Algebren, d.h. reduzierte, kommutative, endl. erz. $k$-Algebren $A$

zusammen mit Morphismen

- $\Delta : A \longrightarrow A \otimes_k A$ (Komultiplikation)
- $\iota : A \longrightarrow A$ (Koinversion)
- $\varepsilon : A \longrightarrow k$ (Ko-Einheit) so dass:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_k A \otimes_k A & A \otimes A \arrow[l, "\Delta \otimes \mathrm{id}"'] \\
A \otimes A \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \arrow[ur, phantom, "///"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes k & A \otimes A \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"] & k \otimes A \\
 & A \arrow[ul] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong \text{ Inklusion zweite Komp.}"'] &
\end{tikzcd}$$

(Komultiplikation) (Koeinheit)

$$\begin{tikzcd}
A & A \otimes A \arrow[l, "(\iota, \mathrm{id})"'] \arrow[r, "(\mathrm{id}, \iota)"] & A \\
k \arrow[u, "\text{Strukturmorph.}"] \arrow[ur, phantom, "///"] & A \arrow[l, "\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, phantom, "///"] & k \arrow[u, "\text{Strukturmorphismus}"']
\end{tikzcd}$$

(Koinversion)

Morphismen: $k$-Algebren, kompatibel mit Zusatzstrukturen.

b) Objekte: Darstellbare Funktoren

$$\mathcal{C} := \begin{matrix}\text{Kategorie red. endl. erz.} \\ k\text{-Algebren}\end{matrix} \longrightarrow \underline{\mathrm{Grp}}$$

Morphismen: Natürliche Transformationen.

Beweis.
(i) $\Longleftrightarrow$ (a): Thm. I.1.15 $\Rightarrow$ $G \longmapsto A(G)$ definiert (anti-)-Kategorienäquivalenz,

beachte $A(V \times W) = A(V) \otimes_k A(W)$, so dass die Diagramme

aus (a) denen aus (i) entsprechen.

(a) $\Longleftrightarrow$ (b): $A \longmapsto \mathrm{Hom}_k(A, -)$ induziert Kategorienäquivalenz nach Yoneda-Lemma:

Die Diagramme in (a) implizieren, dass die $k_A$ Werte in Gruppen annehmen! $\blacksquare$

Die Beschreibung (ii)(b) führt zu dem allgemeineren Begriff des (affinen) Gruppenschemas als Funktor

$$\begin{tikzcd}
k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \underline{\mathrm{Grp}} \arrow[d, "\text{Vergissfkt.}"] \\
 & \underline{\mathrm{Set}}
\end{tikzcd}$$

so dass der induzierte Funktor durch eine (endl. erz.) $k$-Algebra darstellbar ist.

(jetzt kann $k$ ein beliebiger Körper / Ring / Schema sein)

Beispiele 2.

1) $\mathbb{G}_a := \mathbb{A}^1$ ("additive Gruppe")

(i) $\mu(x,y) := x+y$, $\iota(x) = -x$, $\varepsilon(*) = 0$.

(a) $A = k[X]$, $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, $\iota(X) = -X$, $\varepsilon(X) = 0$

(b) $\mathbb{G}_a(R) = (R,+) = \mathrm{Hom}_k(k[X], R)$

2) $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = V(XY-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ ("multiplikative Gruppe")

(i) $\mu(x,y) = xy$, $\iota(x) = x^{-1}$, $\varepsilon(*) = 1$

(a) $A = k[x,x^{-1}]$, $\Delta(X) = X \otimes X$, $\iota(X) = X^{-1}$, $\varepsilon(X) = 1$

(b) $\mathbb{G}_m(R) = (R^\times, \cdot) = \mathrm{Hom}_k(k[x,x^{-1}], R)$

3) $\mu_n \; (\subseteq \mathbb{G}_m) = V(x^n - 1) \subseteq \mathbb{A}^1$ (i.A. <u>nicht</u> irreduzibel / zsmhgd.)

4) $GL_n$

(i) $GL_n(k) \subseteq M_n(k) = \mathbb{A}^{n^2}$

(a) $A = k[X_{ij}, \underbrace{\det(x_{ij})^{-1}}_{=:d}]$, $\Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}$, $\Delta(d) = d \otimes d$

$\iota(d) = \det(x_{ij})$, $\iota(X_{ij}) = d \cdot \mathrm{Adj}(X_{ij})$

$\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$, $\varepsilon(d) = 1$.

(b) $R \longmapsto GL_n(R)$

5) $SL_n = V(\det - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$

6) $V$ endl.-dim. $k$-VR

(b) $R \longmapsto (V \otimes_k R, +)$

7) $GL(V)$ ($V$ wie in 6) (b): $R \longmapsto GL(V \otimes_k R)$

8) Morphismen: $\lambda \in k^\times$, $n \in \mathbb{Z}$: $\mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a$, $x \longmapsto \lambda x$

$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$, $x \longmapsto x^n$

$GL_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m$

## 2. Untergruppen

**Def. 1.** Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ ist eine abgeschlossene Untervarietät, die zugleich eine Untergruppe ist. $H$ besitzt (via Einschränkung der Multiplikation- / Inversen- / "Neutrales Element" - Abbildung) eine eindeutige Struktur als algebraische Gruppe, so dass die Inklusion $H \hookrightarrow G$ ein Morphismus alg. Grp. ist.

**Bsp. 2.** Abgeschlossene UG von $GL_n$

- $SL_n$ $(\det = 1)$
- $D_n$ Diagonalmatrizen $(X_{ij} = 0 \ \forall i \neq j)$
- $B_n$ obere Dreiecksmatrizen $(X_{ij} = 0, \ i > j)$
- $U_n$: unipotente Matrizen
- $O_n / Sp_{2n}$: Matrizen $A$ mit $A^T J A$ für $J = \left( E_n \ O_n \quad \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} Sp_{2n} \right)$
- $SO_n = O_n \cap SL_n$

**Proposition 3.** Sei $G$ eine algebraische Gruppe.

(i) Es gibt genau eine irreduzible Komponente $G^\circ \subseteq G$, die das neutrale Elt. $e$ enthält

(ii) $G^\circ$ ist eine normale abg. Untergruppe von endlichem Index.

(iii) $G^\circ$ ist die einzige Zusammenhangskomponente, die $e$ enthält.

(iv) Jede abg. Untergruppe von $G$ von endlichem Index umfasst $G^\circ$.

(Eine alg. Grp. ist genau dann zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist.)

**Beweis.**

(i) Seien $X, Y$ irred. Komponenten (insb. abg.), die $e$ enthalten.

$\underset{\text{AlgGeo}}{\Longrightarrow}$ $X \times Y$ irreduzible Varietät (Springer Thm. 1.5.4 $\leftrightarrow$ $A, B$ integre $k$-Alg. $\Rightarrow$ $A \otimes_k B$ integer)

$\underset{\mu \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $X \cdot Y = \mu(X \times Y)$ irreduzibel.

$\Longrightarrow$ $\overline{X \cdot Y}$ irreduzibel $\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $X = \overline{XY} = Y$ und $X$ ist abg. unter Multiplikation.

$\overline{X \cdot Y} \supseteq X, Y$ irreduzible Komponenten

Da $\iota$ Homöomorphismus, ist $e \in X^{-1}$ ebenfalls eine irreduzible Kompomente, d.h. $X = X^{-1}$

$\Longrightarrow$ $X$ abg. Untergruppe.

Analog folgt: $gXg^{-1} = X \ \ \forall g \in G$, d.h. $X = G^\circ$ ist normal

Die Nebenklassen $gX$ sind die Komponenten von $G$ ($g \in Y$ bel. Komp.: $e \in g^{-1}Y \Rightarrow Y = gX$)

Da es in Varietäten nur endlich viele irreduzible Komponenten gibt folgt (ii).
Darüberhinaus sind alle irreduziblen Komponenten disjunkt.
Da Zusammenhangskomponenten Vereinigungen irred. Komponenten sind, müssen irred. und zsmh. Komponenten übereinstimmen. $\Rightarrow$ (iii).

(iv) Sei $H \subseteq G$ abg. von endlichem Index. $\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ abg. von endlichem Index.
$\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ ist offen abgeschlossen $\underset{G^\circ \text{ zsmhgd.}}{\Longrightarrow}$ $H^\circ = G^\circ$ $\Rightarrow$ (iv).
gilt in top. Grp.

$\blacksquare$

$G^\circ$ heißt die Zusammenhangskomponente der 1.

27.04.18

**Theorem 4.** (Chevalley)
Sei $X \xrightarrow{\phi} Y$ ein Morphismus von (quasi-projektiven oder affinen) Varietäten. Dann existiert $\emptyset \neq U \subseteq \phi(X)$ mit $U \subseteq \overline{\phi(X)}$ offen.

Beweis. T. A. Springer, Theorem 1.9.5.

$\blacksquare$

**Lemma 5.** (i) Ist $H \subseteq G$ eine (abstrakte) Untergruppe, so ist $\overline{H} \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und damit selbst eine algebraische Gruppe.
(ii) Ist $G \xrightarrow{\phi} H$ ein Morphismus algebraischer Gruppen, so sind $\ker\phi$, $\operatorname{im}\phi$ abgeschlossene Untergruppen.

Beweis.
(i) Die Multiplikation mit $g \in G$ (von links oder rechts) induziert einen Isomorphismus (von Varietäten) $G \to G$. $\Rightarrow$ $g\overline{H}$ abgeschlossen und $g\overline{H} \supseteq gH$ $\Rightarrow$ $g\overline{H} \supseteq \overline{gH}$.
und $g\overline{H} = \overline{gH}$ (überlegen!)
Analog: $\overline{H}g = \overline{Hg}$. $\forall g \in G$.

1.) Beh.: $H\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Sei $h \in H$. $\Rightarrow$ $\overline{H}h = \underbrace{\overline{Hh}}_{=H} \subseteq \overline{H}$ ✓

2.) Beh.: $\overline{H}\,\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Sei $h \in \overline{H}$. $\underset{1.)}{\Rightarrow}$ $Hh \subseteq \overline{H}$. $\Rightarrow$ $\overline{H}h = \overline{Hh} \subseteq \overline{H}$ ✓

3.) $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$, da die Inversion $\iota: G \to G$ ein Isomorphismus von Varietäten ist.

2.), 3.) $\Rightarrow$ $\overline{H}$ ist Untergruppe, abgeschlossen klar.

(ii) $\ker\phi$ ist offensichtlich abgeschlossene Untergruppe (denn $\ker\phi = \phi^{-1}(\{e\})$ und $\{e\} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} H$ abgeschlossen, Punkte sind immer abgeschlossen in algebraischen Gruppen!)

Sogar in allgemeinen (affinen) Varietäten gemäß Hilberts Nullstellensatz

Nach Chevalley existiert $\emptyset \neq U \subseteq \phi(G)$ mit $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{\phi(G)}$
$\Rightarrow$ $\phi(G) = \bigcup_{h \in \phi(G)} hU \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{\phi(G)}$. Die Behauptung folgt mit "$G = \phi(G)$", "$UV = U = V = \phi(G)$" aus dem Folgenden Lemma.

$\blacksquare$

**Lemma 6.** $U, V \subseteq G$ dicht und offen $\Rightarrow UV = G$.

Beweis. $U \subseteq G$ dicht, offen.

$$\underset{\substack{G = \coprod_{\text{endl.}} \underbrace{gG^\circ}_{\text{offen, abg.}} \\ \text{Prop. 3}}}{\Longrightarrow} \quad U \cap G^\circ \subseteq G^\circ \text{ dicht und } \emptyset \neq U \cap G^\circ \quad (\text{da } G^\circ \underset{\text{offen}}{\subseteq} G \text{ mit } G^\circ \neq \emptyset)$$

Also o.E. $G = G^\circ$ irreduzibel.

$g \in G$ beliebig $\Rightarrow gV^{-1}, U \subseteq G$ offen + dicht $\underset{G \text{ irreduzibel}}{\Longrightarrow} gV^{-1} \cap U \neq \emptyset$, d.h. $g \in UV$.
$\Rightarrow UV = G$. ∎

Bemerkung. Algebraische Gruppen sind i.A. keine topologische Gruppen!
$G \times G \xrightarrow{\mu} G$ ist zwar stetig, aber bezüglich der Zariski-Topologie auf $G \times G$
($\neq$ Produkttopologie)

## 3. Einbettungen in $GL_n$

Sei $G$ eine endliche Gruppe und $k[G]$ die zugehörige Gruppenalgebra. Die reguläre Darstellung (d.h. $G$ operiert durch Multiplikation auf $k[G]$) induziert eine Abbildung

$$G \hookrightarrow GL(k[G]), \quad \text{die injektiv ist.}$$

Da das Bild endlich ist, ist es Zariski-abgeschlossen. Insbesondere ist jede endliche Gruppe eine algebraische Gruppe nach Lemma 2.5 und Def. 2.1.

Idee: Für affine algebraische Gruppe $G \neq 1$ ersetze $k[G]$ durch den Koordinatenring $A(G)$.

Problem: Im Allgemeinen ist $\dim_k A(G) = \infty$.

Lösung: Finde endlich-dimensionalen $G$-invarianten Teilraum $V$ von $A(G)$, der hinreichend groß ist, dass $G \hookrightarrow GL(V)$ injektiv ist.

Für $g \in G$, betrachte den Automorphismus $r_g : G \to G$, $x \mapsto x \cdot g$, $\rho(g) = (r_g)^* : A(G) \to A(G)$ ist $k$-Algebren-Automorphismus.

Wir erhalten $\rho : G \to GL(A(G))$, $g \mapsto \rho(g)$ (Gruppenhomomorphismus bzw. Darstellung) indem wir $A(G)$ als $k$-VR auffassen.

**Lemma 1.** Sei $V \subseteq A(G)$ ein $k$-Untervektorraum.

(i) $V$ ist $G$-invariant (d.h. $\rho(g)V = (r_g)^*(V) \subseteq V \ \forall g \in G$.)

$$\iff \Delta(V) = V \otimes_k A(G) \qquad (\Delta : A(G) \to A(G) \otimes_k A(G) \text{ Komultiplikation})$$

(ii) Gelte zusätzlich $\dim_k V < \infty$.

Dann existiert ein endlich-dimensionaler $G$-invarianter $k$-UVR $W \subseteq A(G)$ mit $V \subseteq W$.

Insbesondere gilt:

$$A(G) = \bigcup_{\substack{W \subseteq A(G) \text{ UVR}, \\ \dim_k W < \infty \\ W \ G\text{-invariant}}} W$$

Beweis.

(i) "$\Leftarrow$": Zu $f \in V$ wähle $f_i \in V$, $g_i \in A(G)$ so dass

$$\mu^*(f) = \Delta(f) = \sum_{i=1}^r f_i \otimes g_i$$

Ferner

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\Delta(f) = f \circ \mu"'] & G \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

$(\mu^*(f) = f \circ \mu)$

$$\Rightarrow \left((r_g^*)(f)\right)(h) = f(hg) = f \circ \mu(h,g) = \Delta(f)(h,g) = \sum_{i=1}^r f_i(h) \cdot g_i(g) \quad \forall h \in G$$

d.h. $$\rho(g)(f)(\cdot) = \sum_{i=1}^r \underbrace{g_i(g)}_{\in k} \cdot \underbrace{f_i(\cdot)}_{\in V} \in V.$$

"$\Rightarrow$": Sei $(f_i, i \in I)$ eine Basis von $V$ und $(g_j, j \in J)$ s.d. $(f_i, g_j, i \in I, j \in J)$ eine $k$-Basis von $A(G)$ ist. Für $f \in V$ beliebig existieren $u_i, v_j \in A(G)$ mit

$$\Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i + \sum_{j \in J} g_j \otimes v_j$$

$$\underset{\text{s. oben}}{\Rightarrow} \underbrace{\rho(g)(f)(\cdot)}_{\substack{\text{d.h. } \rho(g)(f) \text{ als} \\ \text{Funktion } G \to \mathbb{A}^1}} = \sum_{i \in I} f_i(\cdot) \cdot u_i(g) + \sum_{j \in J} g_j(\cdot) \cdot v_j(g) \in V$$

Nach Voraussetzung, da $V$ $G$-invariant

$$\Rightarrow v_j(g) = 0 \ \forall g \in G \Rightarrow v_j \equiv 0 \Rightarrow \Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i \in V \otimes_k A(G).$$

(ii) o.E. $\dim_k V = 1$, d.h. $V = \langle f \rangle_k \Rightarrow \exists f_i, g_i \in A(G)$: $\Delta(f) = \sum_{i=1}^r f_i \otimes g_i$

Setze $W' := \langle f_1, \ldots, f_r \rangle_k \underset{(i)}{\Rightarrow} \rho(g)(f) \in W'$

Setze nun $W := \langle \rho(g)(f) \mid g \in G \rangle \subseteq W' \Rightarrow W$ ist endlich-dimensional.

$f \in W$, da $f = \rho(1_G)(f) \Rightarrow V \subseteq W$; $\rho(g)(\rho(h)(f)) = \rho(gh)(f) \in W \Rightarrow W$ ist $G$-invariant. $\blacksquare$

Bemerkung 2. Ersetzt man $G \times G \xrightarrow{\mu} G$ durch eine Gruppenaktion (Morphismus von Varietäten) $G \times X \xrightarrow{\theta} X$ von $G$ auf einer Varietät $X$, so erhält man $G \longrightarrow GL(A(X))$ für die man analoge Aussagen wie in Lemma 1 für $V \subseteq A(X)$ zeigen kann $(\Delta \longleftrightarrow \theta^*)$

Theorem 3. Jede affine algebraische Gruppe $G$ lässt sich abgeschlossen in $GL_n$, für $n \in \mathbb{N}$ geeignet, einbetten.

Beweis. Sei $A(G) = k[g_1, \dots, g_r]$ als $k$-Algebra. und $V = \langle g_1, \dots, g_r \rangle_k$ als $k$-VR.

$\underset{\text{Lemma 1 (ii)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n$ $k$-Lin. unabhängige $k$-Algebren-Erzeuger von $A(G)$, s.d. $W = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_k$ $G$-invariant ist. (und $V \subseteq W$).

$\underset{\text{Lemma 1 (i)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, a_{ij} \in A(G)$ mit $\Delta(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \otimes a_{ij}$, $1 \leq i \leq n$ (1)

$\underset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow}$ $\rho(g)(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \cdot a_{ij}(g)$, $1 \leq i \leq n$, $g \in G$; d.h. $(a_{ij}(g))$ ist Darstellungsmatrix von $\rho(g)$ bzgl. $f_1, \dots, f_n$.

Wir erhalten einen Morphismus

$$\begin{array}{ccl} G & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{A}^{n^2}, \quad g \longmapsto (a_{ij}(g)) \\ & \underset{\varphi}{\searrow} \;\; /// & \quad \cup\!| \\ & & GL_n \end{array}$$

$\varphi$ Gruppenhomomorphismus nach Konstruktion

(landet in $GL_n$, da $\rho(g)$ Automorphismen sind)

$\Longrightarrow$ $\varphi^*: A(GL_n) \longrightarrow A(G)$ schickt $X_{ij} \longmapsto a_{ij}$

$\underset{\text{s. (1)}}{\Longrightarrow}$ $f_i(g) = \rho(g)(f_i)(1_G) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G)\, a_{ij}(g) \quad \forall g \in G$

d.h. $f_i = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G) \cdot a_{ij}$ $\underset{f_i \text{ erzeugen } A(G)}{\Longrightarrow}$ $\varphi^*$ ist surjektiv

$\Longrightarrow$ $G \longrightarrow GL_n$ ist abgeschlossene Einbettung (denn $I := \ker \varphi^*$, $X' = V(I) \subseteq GL_n$ $\Rightarrow A(X') \cong A(G) \underset{\text{Kat.-äquiv.}}{\Longrightarrow} X' \cong G$

▨

**Korollar 4.** $G$ affine, algebraische Gruppe, $H \leq G$ abgeschlossene Untergruppe. Dann existiert ein endlich-dimensionaler $k$-Vektorraum $W$ mit UVR $W_H$ sowie eine abgeschlossene Einbettung $G \hookrightarrow GL(W)$ mit $H = \mathrm{Stab}_G(W_H)$.

**Beweis.** $I_H := \{ f \in A(G) \mid f|_H = 0 \}$ ist ein Ideal.

Im obigen Beweis von Theorem 3 o.E. $f_1, \dots, f_r$ $(r \geq n)$ erzeugen das Ideal $I_H$.

$W_H := W \cap I_H$. Dann gilt:

$$g \in H \iff hg \in H \ \forall h \in H \iff r_g^*(I_H) \subseteq I_H$$

$$\iff r_g^*(W_H) \subseteq W_H$$

da $W_H = W \cap I_H$ und $W$ ohnehin $G$-invariant ist. ▨

02.05.18

**Lemma 5.** (Chevalley) Man kann erreichen, dass $\dim_k W_H = 1$ ist.

**Beweis.**

Starte mit Einbettung $G \to GL(W)$ aus Korollar 4. $d := \dim_k W_H$.

$L := \Lambda^d W_H \subseteq \Lambda^d W$ ; $\dim_k L = \binom{d}{d} = 1$. $\rho : G \to GL(\Lambda^d W)$

$G \curvearrowright \Lambda^d W$ via $g(w_1 \wedge \dots \wedge w_d) = g(w_1) \wedge \dots \wedge g(w_d)$.

Behauptung: $H = \mathrm{Stab}_G^\rho(L)$

"$\subseteq$": klar, da $H$ $W_H$ invariant lässt bzgl. der ursprünglichen Wirkung $G \curvearrowright W$.

"$\supseteq$": Nun gelte $g(L) = L$ bzgl. $\rho$.

$$\underbrace{e_1, \dots, e_m, \overbrace{\underbrace{e_{m+1}, \dots, e_d}_{\text{Basis } W_H \cap gW_H}, e_{d+1}, \dots, e_{d+m}}^{}}_{} , \dots, e_n$$

$e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_d$: Basis $W_H$; $e_{m+1}, \dots, e_{d+m}$: Basis $gW_H$

sei Basis von $W$. (Basis ergänzen …)

z.z.: $m = \operatorname{codim}_{W_H} W_H \cap gW_H \overset{!}{=} 0$ (d.h. $gW_H = W_H$ bzw. $g \in \operatorname{Stab}_G(W_H) = H$)

A: $m \neq 0 \underset{\text{L.A.}}{\Rightarrow} \underbrace{e_1 \wedge \dots \wedge e_d}_{\in L}, \underbrace{e_{m+1} \wedge \dots \wedge e_{m+d}}_{g(e_1 \wedge \dots \wedge e_d) \in L \text{ nach Vorauss. bis auf Skalar}}$ sind l.u. in $\Lambda^d W$.

$\lightning$ da $\dim_k L = 1$.

$G \to GL(\Lambda^d W)$ Einbettung: Übung.

$\blacksquare$

Proposition 6. Sei $H \trianglelefteq_{abg} G$ ein abg. Normalteiler. Dann existiert ein endl. dim. VR $W$ und ein Morphismus $\rho : G \to GL(W)$ algebraischer Gruppen mit $\ker \rho = H$.

Beweis. Starte mit Darstellung $\phi : G \to GL(V)$, bei der $H = \operatorname{Stab}_G^+(\langle v \rangle)$ für ein $v \in V$ wie aus Lemma 5.

$\Rightarrow$ $v$ ist gemeinsamer Eigenvektor $\forall h \in H$. $V_H := \langle w \mid w \text{ ist EV } \forall h \in H \rangle \subseteq V$

$h(v) = \chi(h) v$ für $\chi(h) \in k^\times$ ($h$ invertierbar) ($\chi : H \to \mathbb{G}_m$ ist Charakter)

Da $H \trianglelefteq G$, gilt für alle $g \in G$:

$$hgv = g(\underbrace{g^{-1}hg}_{\in H})v = \chi(g^{-1}hg)\, gv \quad \forall h \in H$$

$\Rightarrow$ $gv \in V_H$, d.h. $V_H$ ist $G$-Invariant.

ŒE: $V = V_H$ (sonst ersetzen) d.h.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i, \quad V_i \text{ gemeinsame Eigenräume für } H.$$

$W := \prod_{i=1}^{r} \operatorname{End}(V_i) \subseteq \operatorname{End}(V)$ Unterraum derjenigen Endomorphismen, die jedes $V_i$ invariant/stabil lassen.

$G \curvearrowright \operatorname{End}(V)$ via: $g(\lambda) := \phi(g) \circ \lambda \circ \phi(g)^{-1}$ und $W$ ist diesbezüglich $G$-invariant:

$$V_i \xrightarrow{\phi(g)^{-1}} \phi(g)^{-1} V_i \xrightarrow{\lambda} \phi(g)^{-1} V_i \xrightarrow{\phi(g)} V_i, \text{ d.h. } g(\lambda) \in W$$

da mit $V_i$ auch $\phi(g)^{-1} V_i$ ein gemeinsamer Eigenraum für $H$ ist

Wir erhalten $\rho : G \to GL(W)$ Morphismus alg. Grp.

Beh.: $H = \ker \rho$

"$\subseteq$": $\rho(h)(\lambda) = \phi(h) \circ \lambda \circ \phi(h)^{-1} = \lambda$, da $\lambda = \sum \lambda_i$, $\lambda_i \in End(W_i)$

$$\phi(h) \circ \lambda \circ \phi(h)^{-1} v_i = \chi(h)\chi(h)^{-1} \lambda_i(v_i) = \lambda_i(v_i)$$

"$\supseteq$": $g \in \ker \rho \underset{\text{Def. }\rho}{\Longrightarrow} \phi(g) \in \text{Zentrum}(W) = \prod_i \underbrace{\text{Zentrum}(End(V_i))}_{= k \cdot id_{V_i}}$

$\Rightarrow \phi(g) v \in k^\times v \to g \in Stab_G(\langle v \rangle) = H$.

$\blacksquare$

## III Einschub: Quasiprojektive Varietäten und Dimension

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_k := \frac{k^{n+1} \setminus \{0\}}{k^\times} = \{[a_0 : \ldots : a_n] \mid a_j \in k, \text{ nicht alle } 0\}$$

$$[a_0 : \ldots : a_n] = [b_0 : \ldots : b_n] \iff a_i = \lambda b_i \text{ für ein } \lambda \in k^\times.$$

Def. 1. Teilmengen von $\mathbb{P}^n$ der Form $V(f_1, \ldots, f_n) = \{P \in \mathbb{P}^n_k \mid f_i(P) = 0,\ i = 1 \ldots n\}$ für <u>homogene</u> Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$ heißen projektive Varietäten. Sie bilden die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^n$. Lokal abgeschlossene Teilmengen (Durchschnitte einiger offenen und abgeschlossenen Mengen) heißen quasi-projektive Varietäten.

Bemerkung 2. Die Zariski-offenen Teilmengen $D_+(X_i) = \mathbb{P}^n \setminus V(X_i) = \{P = [x_0 : \ldots : x_n] \mid X_i \neq 0\}$, $0 \le i \le n$

bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n$

$$\mathbb{A}^n \longrightarrow D_+(X_i),\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto [x_1 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n]$$

ist ein Homöomorphismus.

Proposition 3.

(i) Die Segre-Einbettung, $N = nm + n + m$

$$S^{n,m}: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N, ([a_0 : \dots : a_n], [b_0 : \dots : b_m]) \longmapsto [a_0b_0 : a_0b_1 : \dots : a_0b_m : a_1b_0 : \dots : a_nb_m]$$

ist injektiv mit abg. Bild.

(lexikografisch geordnet)

(ii) Für quasi-projektive Varietät $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ ist das Produkt $X \times Y$ definiert als $S^{n,m}(X, Y) \subseteq \mathbb{P}^N$.

$X \times Y$ ist quasi-projektiv, und, falls $X, Y$ projektiv ebenfalls projektiv.

Beweis. Hartshorne. ☒

Ab jetzt sind alle Varietäten irreduzibel!

Def. 4. (i) Für $X$ affin, heißt $k(X) := \mathrm{Quot}(A(X))$ der Funktionenkörper von $X$.
$\phantom{x}$ wtf., da $X$ irreduzibel

Für $P \in X$ heißt $\mathcal{O}_{X,P} := A(X)_{m_P}$ (Lokalisierung bei $m_P$)

der lokale Ring in $P$.

Es gilt: $A(X) = \bigcap_P \mathcal{O}_{X,P} \quad (\subseteq k(X))$

(ii) Für $X$ projektiv betrachte den Ring $\mathcal{R}(X) := \mathcal{R}_X := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; \begin{array}{l} f, g \in k[X_0, \dots, X_n] \text{ homogen} \\ g \notin I(X),\ \deg f = \deg g \end{array} \right\}$

$$\cup\!\!\!\!\mid$$

$$\underbrace{m_X}_{\text{ist maximales Ideal}} := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{R}(X) \;\middle|\; f \in I(X) \right\}$$

$\Rightarrow$ $k(X) := \mathcal{R}(X)/m_X$ heißt der Funktionenkörper von $X$, seine Elemente heißen auch rationale Funktionen auf $X$.

Faktum: Für jedes $i$ gibt es einen Isomorphismus $\quad X^{(i)} := X \cap D_+(X_i)$

$$k(X) \xrightarrow{\cong} k(X^{(i)})$$

$$\frac{f(x_0, \dots, x_n)}{g(x_0, \dots, x_n)} \longmapsto \frac{f(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n)}{g(\; - \quad " \quad - \;)}$$

$X$ projektive Varietät $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{X,P} := \left\{ \frac{f}{g} \bmod m_X \in k(X) \mid g(P) \neq 0 \right\}$
und es gilt für $P \in X^{(i)} := X \cap D_+(X_i)$: $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X,P}$ und daher $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X^{(j)},P}$ für $P \in X^{(i)} \cap X^{(j)}$.

(iii) $X$ quasi-projektiv ($\Rightarrow \bar{X}$ projektiv)

$$k(X) := k(\bar{X}), \quad \mathcal{O}_{X,P} := \mathcal{O}_{\bar{X},P}$$

Für projektive und affine Varietäten stimmt dies mit den vorherigen Definitionen überein.

(iv) $U \subseteq X$ offen in quasi-proj. Varietät $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(U) := \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}$ ($\subseteq k(X)$) heißt Ring der regulären Funktionen auf $U$.

$\underline{ü}$: $\mathcal{O}(U) = \bigcap_i \mathcal{O}(U_i)$ für alle offenen Überdeckungen $\{U_i\}_i$ von $U$.

(v) Ein Morphismus $\varphi: X \longrightarrow Y$ quasi-projektiver Varietäten ist eine stetige Abbildung, so dass

(1) $\forall\, U \subseteq Y$ offen: $f \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))$.

Dies ist eine lokale Bedingung, d.h. erfüllt $\varphi|_{U_i}$ die Bedingung (1) für eine offene Überdeckung $\{U_i\}_i$ von $U$, so erfüllt $\varphi$ (1). (ü).

Bsp 5. (i) Für $X, Y$ affin erhält man denselben Begriff wie vorher: o.E. $Y = \mathbb{A}^n$. Für $f_1, \dots, f_n \in A(X)$ hat $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ die Eigenschaft (1).

$$\begin{matrix} X \longrightarrow Y \\ Q \longmapsto P \end{matrix} \quad \text{induziert} \quad \begin{tikzcd} A(Y) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & A(X) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{Y,P} \arrow[r, "\varphi_Q^*"] & \mathcal{O}_{X,Q} \\ f \arrow[r, mapsto] & f \circ \varphi \end{tikzcd}$$

(ii) $X$ quasi-projektiv, $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ $\Rightarrow$ $U \hookrightarrow X$ ist Morphismus.

Lemma 6. $P \in X$ quasi-projektiv. Dann existiert ein $P \in U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ mit $U$ isomorph (als quasi-proj. Varietät) zu einer affinen Varietät.

Insbesondere: $X$ hat offene, affine Überdeckung.

Beweis. $P \in X^{(i)} \subseteq X$. o.E. $Y = \mathbb{A}^n$

$$\begin{matrix} X^{(i)} \\ \text{offen } \cap \\ Y \\ \text{abg. } \cap \\ \mathbb{A}^n \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & & \mathbb{A}^{n+1} \\ & & \cup \text{ abg.} \\ X^{(i)} \cong D(f) & \xleftarrow{\cong} & V(x f - 1) \end{matrix}$$

Iso quasi-projektiver Varietäten.

**Def. 7.** Sei $X$ irreduzible, quasi-proj. Varietät.

$$\dim X := \operatorname{trdeg}_k k(X)$$ (Transzendenzgrad), d.h. die maximale Zahl algebraisch unabhängiger Elemente in $k(X)$, heißt Dimension von $X$.

Für $X$ beliebige quasi-proj. Varietät wird die Dimension von $X$ als das Maximum der Dimensionen seiner irreduziblen Komponenten definiert.

**Bsp. 8.**
- $\dim \mathbb{A}^n = n$
- $\dim \mathbb{P}^n = n$, da $k(\mathbb{P}^n) \cong k(D_+(X_0)) \cong k(\mathbb{A}^n)$

**Theorem 9.** Ist $X$ affin, so gilt $\dim X = \dim A(X)$ (Krulldimension)

(max. Länge von Ketten $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subseteq \mathfrak{p}_n$ von Primidealen in $A(X)$, bzw. irred. abg. Teilmengen in $X$) $\boxtimes$

**Proposition 10.** Seien $X, Y$ quasi-projektive Varietäten.

(i) $X \longrightarrow Y$ surjektiver Morphismus $\Rightarrow \dim Y \leq \dim X$.

(ii) $X$ irreduzibel, $Y \subsetneq X$ abgeschlossen $\Rightarrow \dim Y < \dim X$.

(iii) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$

(iv) (Krull's Hauptidealsatz) $X \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbb{A}^n$ irreduzibel, $f \in k[X_1, \dots, X_n] = A(\mathbb{A}^n)$ mit $f(P) = 0$ für ein $P \in X$. $Z \subseteq X \cap V(f)$ irreduzible Komponente.

$$\Rightarrow \dim Z \geq \dim X - 1.$$

# IV: Jordan-Zerlegung, diagonalisierbare und unipotente Gruppen

## 1. Jordan-Zerlegung

Durch Einbettung $G \xhookrightarrow{\varphi} GL_n$, $k = \bar{k}$ besitzen die Elemente $\varphi(g), g \in G$ eine Jordannormalform und wir können Begriffe wie "halbeinfach", "unipotent" etc. auf Elemente von $G$ übertragen, sodass diese unabhängig von der Wahl von $\varphi$ sind.

**Def. 1.** $\dim_k V < \infty$, $g \in \operatorname{End}(V)$ heißt halbeinfach (oder diagonalisierbar), falls $V$ Basis aus Eigenvektoren für $g$ hat. $g$ heißt nilpotent falls $g^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

**Bemerkung 2.** (LA)

(i) $g$ halbeinfach $\Leftrightarrow$ mipo($g$) hat paarweise verschiedene Nullstellen

(ii) $W \leq V$ $g$-invarianter UVR + $g$ halbeinfach $\Rightarrow g|_W$ ist halbeinfach, da $\operatorname{mipo}(g|_W) \mid \operatorname{mipo}(g)$

**Proposition 3.** (Additive Jordanzerlegung) ($k$ alg. abg.)

Sei $g \in \mathrm{End}_k(V)$, $\dim_k V < \infty$. Dann: $\exists!\ g_h, g_n \in \mathrm{End}(V)$ mit $g_h$ halbeinfach, $g_n$ nilpotent,

sodass $g = g_h + g_n$ und $g_h \circ g_n = g_n \circ g_h$.

**Beweis.**

$g_h \mathrel{\hat{=}}$ Diagonalmatrix aus JNF, $g_n := g - g_h$. ∎

**Bemerkung 4.** (i) In obiger Situation existieren $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$ und $g_h = P(g)$, $g_n = Q(g)$

(ii) Ist $W \leq V$ ein $g$-invarianter UVR, so ist $W$ auch $g_h$ und $g_n$-invariant und $(g|_W)_h = g_h|_W$ sowie $(g|_W)_n = g_n|_W$.

**Beweis.**

(i) $\phi(T) = \det(T \cdot \mathrm{id}_V - g) = \prod (T - \lambda_i)^{n_i}$ (char. Polynom)

$$(V \cong)\ k[T]/\langle \phi(T) \rangle \underset{\text{CRS}}{\cong} \bigoplus k[T]/(T-\lambda_i)^{n_i}$$

$\exists\, P \in k[T]:\ P \equiv \lambda_i \mod (T-\lambda_i)^{n_i}\ \forall i$

Ist $\phi(0) = 0$, so ist $0$ ein Eigenwert von $g \Rightarrow P \equiv 0 \mod T$.

Sei $\phi(0) \neq 0$. $\Rightarrow$ Ändere $P$ durch konstantes Vielfaches von $\phi$ ab

$\Rightarrow P(0) = 0$. Setze $Q = T - P$

$\Rightarrow P(g) = g_h$, $Q(g) = g_n$.

(ii) Wegen (i) ist $W$ auch $g_h, g_n$-invariant. Da $\mathrm{charpol}(g|_W) \mid \Phi$, ist $P$ auch für $W$ eine geeignete Wahl und $(g|_W)_h = P(g|_W) = P(g)|_W = g_h|_W$. ∎

**Def 5.** $h \in \mathrm{End}_k(V)$ heißt unipotent, falls $h - \mathrm{id}_V$ nilpotent ist. ($\Leftrightarrow$ alle EW $= 1$)

**Korollar 6.** (Multiplikative Jordanzerlegung)

$g \in GL(V)$, $\dim_k V < \infty$.

(i) $\exists!\ g_h, g_u \in GL(V)$ mit $g_h$ halbeinfach und $g_u$ unipotent s.d. $g = g_h \circ g_u = g_u \circ g_h$

(ii) $\exists\, P, R \in k[T]$ mit $P(0) = R(0) = 0$ und $g_h = P(g)$, $g_u = R(g)$.

(iii) Ist $W \leq V$ $g$-invarianter UVR, so ist $W$ auch $g_h, g_u$-invarianter UVR und $(g_h)|_W = (g|_W)_h$ sowie $(g_u)|_W = (g|_W)_u$.

Beweis. (i) EW von $g \neq 0 \Rightarrow$ EW von $g_h \neq 0 \Rightarrow g_h \in GL(V)$. $g_u := \mathrm{id}_V - g_h^{-1} \circ g_n$

(ii) z.z.: $g_h^{-1}$ ist Polynom in $g_h$ (damit auch Polynom in $g$)

$$\text{mipo } g_h = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \underbrace{a_0}_{\neq 0} \Rightarrow g_h^{-1} = -a_0^{-1}\left[g_h^{n-1} - \ldots - a_1\right]$$

(iii) wie oben aus (ii). $\blacksquare$

Def. 7. Sei nun $V$ ein möglicherweise $\infty$-dim. $k$-VR, $g \in GL(V)$. und gelte

$$(*) \qquad V = \bigcup_{\substack{W \leq V \\ \text{endl.-dim. UVR} \\ g(W) \leq W}} W$$

Dann heißt $g$ *halbeinfach* (*lokal unipotent*), wenn $g|_W$ halbeinfach (unipotent) $\forall W$ wie oben.

Bsp. 8.
Nach Lemma II.3.1 (ii) erfüllt $V = A(G)$ die Bedingung $(*)$ $\left[\forall g \in G: r_g^* \in GL(A(G))\right]$

Korollar 9. Unter der Bedingung $(*)$ für $g \in GL(V)$ gilt:

(i) $\exists!\, g_h, g_u \in GL(V)$ mit $g_h$ halbeinfach, $g_u$ lokal unipotent mit $g = g_h g_u = g_u g_h$

(ii) Analogon zu Korollar 6 (ii)

Beweis.

(i) $(g|_W)_h$, $(g|_W)_u$ verkleben zu $g_h, g_u$ nach Korollar 6 (i), (ii).

(ii) $W$ erfüllt ebenfalls $(*)$. Daher folgt die Behauptung ebenso aus Korollar 6 (ii). $\blacksquare$