Bemerkung. Sei F kontravariant, $F: {}_R\text{Mod}^{op} \to \underline{Ab}$

1) $I \in {}_R\text{Mod}$ injektiv $\iff$ $I \in {}_R\text{Mod}^{op}$ projektiv
$\Updownarrow$ $\Updownarrow$
$\text{Hom}_{{}_R\text{Mod}}(\cdot, I)$ exakt, $\text{Hom}_{{}_R\text{Mod}^{op}}(I, \cdot)$ exakt

2) F linksexakt: $0 \to M' \to M \to M''$ in ${}_R\underline{\text{Mod}}^{op}$ exakt

$\Rightarrow 0 \to FM' \to FM \to FM''$ in $\underline{Ab}$ exakt, d.h.:

$M'' \to M \to M' \to 0$ in ${}_R\underline{\text{Mod}}$ exakt $\Rightarrow$ $0 \to FM' \to FM \to FM''$ in $\underline{Ab}$ exakt

d.h. Für F linksexakt, kontravariant, definiere $(R^iF)(M) := H^i(FP^\bullet)$
mit $M \to P^\bullet$ inj. Auflösung in ${}_R\underline{\text{Mod}}^{op}$
$\leftrightarrow$ $P^\bullet \to M$ proj. Auflösung in ${}_R\underline{\text{Mod}}$.

## Ext.

$\forall N \in {}_R\underline{\text{Mod}}$: $\text{Hom}_R(\cdot, N): {}_R\underline{\text{Mod}}^{op} \to \underline{Ab}$ ist linksexakt.

$\forall M \in {}_R\underline{\text{Mod}}$: $\text{Hom}_R(M, \cdot): {}_R\underline{\text{Mod}} \to \underline{Ab}$ ist linksexakt.

Def. 5.14.
- $\text{Ext}^i_R(\cdot, N) := R^i(\text{Hom}_R(\cdot, N))$ (Auflösung mit projektiven)
- $\overline{\text{Ext}}^i_R(M, \cdot) := R^i(\text{Hom}_R(M, \cdot))$ (Auflösung mit injektiven)

Satz 5.15. (aus 5.12, 5.13)

Ist $0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0$ in ${}_R\underline{\text{Mod}}$ exakt, so

$\exists$ lange exakte Sequenz $0 \to \text{Hom}_R(M, Q') \to \text{Hom}_R(M, Q) \to \text{Hom}_R(M, Q'') \to \overline{\text{Ext}}^1_R(M, Q') \to$

$\exists$ lange exakte Sequenz $0 \to \text{Hom}_R(Q'', N) \to \text{Hom}_R(Q, N) \to \text{Hom}_R(Q', N) \to \text{Ext}^1_R(Q'', N) \to \ldots$

Weiter gelten: $\overline{\text{Ext}}^i(M, Q) = 0$ falls Q injektiv und $i \geq 1$.
$\text{Ext}^i(Q, N) = 0$ falls Q projektiv und $i \geq 1$.

<u>Bem.</u> $\text{Ext}^1_R(Q, N) = 0$ $\forall N \in {}_R\underline{\text{Mod}}$ $\Rightarrow$ Q projektiv (analog $\overline{\text{Ext}}^1_R \ldots$)

Interpretation von $\mathrm{Ext}^1_R$ und $\overline{\mathrm{Ext}}^1_R$:

Definiere $\quad \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,N) := \{$ kurze ex. Seq. $\varepsilon: 0 \to N \to E \to M$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}\,\}/\sim$

wobei $\varepsilon \sim \varepsilon' :\Leftrightarrow \exists$ komm. Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & M \arrow[r] & 0 & \text{in } {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \\ & & E' \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

5-Lemma $\Rightarrow$ $\varphi$ Isomorphismus

Ü: $\sim$ ist Äquivalenzrelation.

Addition auf $\overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,N)$: (Baer, Summe)

Definiere $\varepsilon +_B \varepsilon'$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N\oplus N \arrow[r] \arrow[d, "+"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & E\oplus E' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & M\oplus M \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \mathrm{P.O.} \arrow[r] & M\oplus M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[u, "="] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{III}"] & \mathrm{P.B.} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{III}"] & M \arrow[r] \arrow[u, "\Delta = \mathrm{Diag.}"] & 0 \end{tikzcd}$$

P.O.: Pushout

P.B.: Pullback.

Satz 5.16. (Jacobson BA II, 6.9)

$\exists$ nat. Isomorphismus: $\left(\overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,N), +_B\right) \cong \left(\mathrm{Ext}^1_R(M,N), +\right) \cong \left(\overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,N), +\right)$.

$\blacksquare$

Ausblick: Doppelkomplexe.

Def. Ein Doppelkomplex (in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$) ist ein Tupel

$$C^{\bullet\bullet} = \left(C^{i,j},\ d_h^{i,j},\ d_v^{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \qquad \text{(s. Weibel A.A)}$$

so dass $\forall (i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $\quad d_h^{i,j}: C^{i,j} \to C^{i+1,j}, \quad d_v^{i,j}: C^{i,j} \to C^{i,j+1}$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$

erfüllen: $\quad d_h^{i+1,j}\circ d_h^{i,j} = 0$ und $d_v^{i,j+1}\circ d_v^{i,j} = 0$ und $d_v^{i+1,j}\circ d_h^{i,j} + d_h^{i,j+1}\circ d_v^{i,j} = 0$.

Darstellung als "Gitter":

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{i,j+1} \arrow[r, "d_h^{i,j+1}"'] & C^{i+1,j+1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{i,j} \arrow[u, "d_v^{i,j}"] \arrow[r, "d_h^{i,j}"'] & C^{i+1,j} \arrow[u, "d_v^{i+1,j}"] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(1) $\Rightarrow$ alle Zeilen sind Komplexe

(2) $\Rightarrow$ alle Spalten sind Komplexe

(3) $\Rightarrow$ $(d_h^{i,j}(-1)^j)_{j\in\mathbb{Z}}$ und $(d_v^{i,j}\circ(-1)^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sind Abbildungen von Komplexen in benachbarten Spalten ($i$ und $i+1$) bzw. Zeilen ($j$ und $j+1$)

Def. Der Totalkomplex eines Doppelkomplexes $C^{i,j}$ ist $\mathrm{Tot}\, C^{\cdot\cdot} := TC^{\cdot}$ definiert durch

$$TC^i := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} C^{i-j,j} \quad \text{und} \quad d^i_{TC^\cdot} : TC^i \to TC^{i+1} \quad \text{dabei ist}$$

$d^i_{TC^\cdot}$ ist die Summe (über alle $j$) der Abbildungen

$$C^{i-j,j} \xrightarrow[d_h^{i-j,j}\oplus d_v^{i-j,j}]{} C^{i-j+1,j} \oplus C^{i-j,j+1} \hookrightarrow TC^{i+1}$$

—

Wir betrachten hier nur Doppelkomplexe für welche (F) gilt.

(F) $\forall n\in\mathbb{Z}: \#\{(i,j) \mid C^{i,j}\neq 0 \text{ und } i+j=n\} < \infty$ ($\Rightarrow$ irrelevant ob $\bigoplus$ oder $\prod$)

Def. Ein Morphismus $D^\cdot \xrightarrow{f^\cdot} D'^\cdot$ in $Ch^\cdot(R)$ heißt Quasi-Isomorphismus $:\Leftrightarrow$

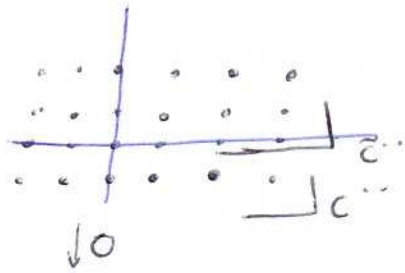
$\forall i\in\mathbb{Z}$: $H^i(f^\cdot): H^i(D^\cdot) \to H^i(D'^\cdot)$ ist Isomorphismus.

<u>Ü</u>: (a) $\mathrm{Tot}: \underbrace{Ch^{\cdot,\cdot}(R)}_{\substack{\text{abelsche}\\ \text{Kategorie}}} \to Ch^\cdot(R)$ ist ein additiver Funktor abelscher Kategorien.

(b) Gilt (F), so ist Tot exakt und es gilt weiter: Sind alle Zeilen oder alle Spalten in $C^{\cdot,\cdot}$ exakt, so ist $\mathrm{Tot}\, C^{\cdot,\cdot}$ exakt.

(c) Gilt in (b) zusätzlich: alle Spalten von $C^{\cdot,\cdot}$ exakt und $C^{i,j}=0$ $\forall j\le -2$ und ist $\tilde{C}^{\cdot,\cdot}$ der Doppelkomplex mit $\tilde{C}^{i,j} := C^{i,j}$ $\forall j\ge 0$ und $\tilde{C}^{i,j}=0$ $\forall j<0$, Dann ex. ein "natürlicher" Quasi-Isomorphismus

$$\mathrm{Tot}\, \tilde{C} \longleftarrow (C^{j,-1})_{j\in\mathbb{Z}} \quad \text{in } Ch^{\cdot}(R)$$




<u>Beispiel</u>: $M, N \in {}_R\underline{Mod}$.

$P^{\cdot} \to M$ proj. Auflösung $(\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^{0} \to 0 \to \cdots)$

$N \to I^{\cdot}$ inj. Auflösung $(\cdots 0 \to 0 \to \ldots \to I^{0} \to I^{1} \to \cdots)$

$C^{\cdot,\cdot} := \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot})$ ist ein Doppelkomplex!

$$\begin{array}{ccc} C^{i,j} = \mathrm{Hom}_R(P^{-i}, I^{j}) & \longrightarrow & C^{i+1,j} = \mathrm{Hom}_R(P^{-i-1}, I^{j}) \\ \varphi \downarrow \quad \big\downarrow d_{I^{\cdot}}^{j} \circ \varphi & & \varphi \longmapsto \varphi \circ d_{P^{\cdot}}^{-i-1} \circ (-1)^{j} \\ C^{i,j+1} = \mathrm{Hom}_R(P^{-i}, I^{j+1}) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\mathrm{Hom}(M, I^{\cdot}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot})} & & \leftarrow \text{hat exakte Zeilen} \\ \uparrow & \uparrow & \\ \text{2 Doppelkomplexe} \longrightarrow & \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, N) & \leftarrow \text{hat exakte Spalten.} \end{array}$$

Ü (c) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(M, I^{\cdot}) & \to & \mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot})) \\ \swarrow & & \uparrow \\ \mathrm{Ext}^{i}(M,N) & & \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, N) \\ & & \searrow \overline{\mathrm{Ext}}^{i}(M,N) \end{array}$$

sind Quasi-Isomorphismen

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Ext}^{i}(M,N) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^{i}(M,N).$$

<u>Erweiterung</u>: $0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0$ exakt in ${}_R\underline{Mod}$ und

$0 \to I'^{\cdot} \to I^{\cdot} \to I''^{\cdot} \to 0$ exakte Seq. von injektiven Auflösungen (horse shoe lemma)

erhalten Morphismen von kurzen exakten Sequenzen von Komplexen!

$$\begin{array}{c} 0 \to \mathrm{Hom}(M, I'^{\bullet}) \to \mathrm{Hom}(M, I^{\bullet}) \to \mathrm{Hom}(M, I''^{\bullet}) \to 0 \\ \downarrow q\text{-iso} \\ \uparrow q\text{-iso} \\ 0 \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q') \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q) \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q'') \to 0 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Isomorphismus langer ex. Kohomologiesequenzen.

Satz 5.17. $\forall i \geq 0: \forall M, N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $\exists$ in $(M,N)$ funktorielle Iso's

$\mathrm{Ext}^i(M,N) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N)$ und die langen ex. Kohomologiesequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots \to & \mathrm{Ext}^i(M,N') & \to & \mathrm{Ext}^i(M,N) & \to & \mathrm{Ext}^i(M,N'') & \to & \mathrm{Ext}^{i+1}(M,N') & \to \dots \\ & \downarrow \wr & /// & \downarrow \wr & /// & \downarrow \wr & /// & \downarrow \wr & \\ \dots \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N') & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N) & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N'') & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^{i+1}(M,N') & \to \dots \end{array}$$

Tor. A kommutativer Ring, $A \to R$ eine A-Algebra und R sei A-flach.

Wissen: Die Funktoren ${}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $M \otimes_A -$, $- \otimes_A N$ sind rechtsexakt.

Def. 5.18. $\mathrm{Tor}_i^A(M, \cdot) := L_i(M \otimes_A \cdot)$

$\overline{\mathrm{Tor}}_i^A(\cdot, N) := L_i(\cdot \otimes_A N)$

Satz. 5.19. (i) Erhalten lange ex. Sequenz in beiden Argumenten

(ii) $Q \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ ist A-flach $\iff \forall i \geq 1$: $\mathrm{Tor}_i^A(Q,N) = 0 \ \forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$

$\iff \forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $\mathrm{Tor}_1^A(Q,N) = 0$

(iii) $\mathrm{Tor}_i^A \cong \overline{\mathrm{Tor}}_i^A$. (nat. isomorph)

# 06. Gruppenkohomologie

- $G$ Gruppe, $\mathbb{Z}[G]$ Gruppenring zu $G$, d.h.

$$\mathbb{Z}[G] := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}[g] \quad \text{(freier } \mathbb{Z}\text{-Modul mit Basis } G\text{)}$$

als additive Gruppe.

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{g\in G} b_g g\right) := \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}\right) g$$

$\mathbb{Z}[G]$ ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra, $0$ klar, $1 = 1\cdot e$.

**Def. 6.1.** Ein $G$-Modul ist ein (links) $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

schreibe $\mathrm{Hom}_G(\cdot,\cdot)$ für $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\cdot,\cdot)$, ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ für ${}_{\mathbb{Z}[G]}\underline{\mathrm{Mod}}$ (manchmal auch $\underline{\mathrm{Mod}}_G$, $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{Z}[G]}$)

Alternativ: $M$ trägt $\mathbb{Z}$-lineare Links-Operation von $G$:

$\cdot : G \times M \to M$, diese erfüllt $g(m_1 + m_2) = gm_1 + gm_2$

**Def. 6.2.** Ein $G$-Modul $M$ heißt trivial $:\Leftrightarrow \forall g \in G : \forall m \in M : g\cdot m = m$.

<u>Bsp</u>: Schreibe $\mathbb{Z}$ (auch) für den trivialen $G$-Modul.

**Lemma 6.3.** Sei $\varepsilon := \varepsilon_G : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$, $\sum_g a_g g \mapsto \sum_g a_g$ die Augmentationsabbildung.

Dann ist $I_G := \ker \varepsilon_G$ das Augmentationsideal. Es ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis

$B = \{ g - 1 \mid g \in G \setminus \{e\} \}$

*Beweis.* $B$ $\mathbb{Z}$ l.u.: ✓ <u>$B$ ES von $I_G$</u>: $x = \sum_g a_g g \in I_G \Leftrightarrow \sum_g a_g = 0 \Rightarrow x = x - 0\cdot 1$
$= \sum_g a_g (g-1)$ ☒

**Def. 6.4.** Sei $M$ ein $G$-Modul.

(i) $M^G := \{ m \in M \mid \forall g \in G : gm = m \}$ der Untermodul der $G$-Invarianten von $M$.

(ii) $M_G := M / I_G M$ der Faktormodul der $G$-Koinvarianten von $M$.

Bemerkung: (i) $(*)$ $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \cong M^G$ $(\varphi \mapsto \varphi(1))$

(ii) $(**)$ $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \cong M / I_G M = M_G$.

Funktoren ${}_G\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$