01

Dienstag, 17. April 2018 22:21

Algebraische Zahlentheorie II.

Übungsblätter: Vorlesungshomepage.

01. Proendliche Gruppen.

Whg. · X Menge, Topologie auf X: $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit

(0) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ (1) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$ (2) $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I \Rightarrow \bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$

· $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt Basis $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T}\ \exists (B_i)_{i\in I} \in \mathcal{B}^I: U = \bigcup_i B_i$

· $W \subseteq X$ heißt Umgebung (von $x \in X$) $:\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{T}: x \in V \subseteq W$.

Für $x \in X$ sei $\mathcal{U}(x)$ die Menge aller Umgebungen von x.

z.B.: (X,d) metrischer Raum $\Rightarrow \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ ist Basis für X.

· $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt stetig $:\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$.

· Produkttopologie: Seien $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i\in I}$ topologische Räume.

Basis der Produkttopologie auf $\prod_i X_i$: $\left\{\prod_i U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i, U_i = X_i \text{ f.f.a. } i \in I\right\}$

Satz von Tychonoff: Sind alle X_i kompakt, so auch $\prod_i X_i$

· Sei $X \xrightarrow{\pi} Y$ surjektiv, $(X, \mathcal{T})$ top. Raum.

$\{V \subseteq Y \mid \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ heißt Quotiententopologie.

Def. 1.1. (a) Eine topologische Gruppe $(G, e, \circ, \mathcal{T})$ besteht aus einer Gruppe $(G, e, \circ)$ und einem top. Raum $(G, \mathcal{T})$ so dass

$G \times G \xrightarrow{\mu} G$, $(g,h) \mapsto g \circ h$, $G \xrightarrow{i} G$, $g \mapsto g^{-1}$ stetig sind, wobei $G \times G$ die Produkttopologie trägt.

(b) Ein Morphismus topologischer Gruppen ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

$\rightsquigarrow$ Man erhält die Kategorie topologischer Gruppen $\underline{\text{Top Grp}}$.

Bsp. (ü) K normierter Körper $\Rightarrow (K, +), (K^\times, \cdot)$ sind topologische Gruppen.

Facts 1.2. Seien G, G' top. Grp., $G \xrightarrow{\phi} G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

(i) $l_g : G \to G,\ h \mapsto g \circ h$, $r_g : G \to G,\ h \mapsto h \circ g$ sind Automorphismen (insb. Homöomorphismen)

(ii) ϕ ist stetig $\iff \forall\, W' \in \mathcal{U}(e') : \exists\, W \in \mathcal{U}(e) : \phi(W) \subseteq W'$

(iii) Eine offene Untergruppe $H \underset{\text{offen}}{\leq} G$ ist abgeschlossen.

(iv) Eine abgeschlossene Untergruppe $H \underset{\text{abg.}}{\leq} G$ mit $[G:H] < \infty$ ist offen.

(v) Ist G kompakt, $H \leq G$ offen, so gilt $[G:H] < \infty$.

(vi) Ist $H \leq G$ Untergruppe, so ist $(H, \tau_{G|H})$ eine topologische Untergruppe (Unterraumtop.)

(vii) Ist $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} G$, so ist $U^{-1} \underset{\text{offen}}{\subseteq} G$ und $cl(U) = \overline{U} \subseteq UU^{-1}$

(viii) G ist regulär, d.h. $\forall g \in G : \exists\, U, V \in \mathcal{U}(g)$ offen s.d. $V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

(ix) G ist hausdorffsch $\iff \{e\} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$

(x) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler, so ist G/N topologische Gruppe mit Quotiententopologie.
Dabei ist G/N hausdorffsch, falls $N \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$.

(xi) Sind $(G_i)_{i \in I}$ top. Grp., so ist $\prod_i G_i$ top. Grp.

Beweis.

(i) $l_g = G \to \{g\} \times G \xrightarrow{\text{inkl.}} G \times G \xrightarrow{\mu} G$ ist stetig, $l_g \circ l_{g^{-1}} = id_G$

r_g analog.

(ii) "$\Rightarrow$": klar; "$\Leftarrow$": Sei $g \in G$, $g' := \phi(g)$, $W \in \mathcal{U}(g')$. Wähle $V \in \mathcal{U}(e)$ mit $\phi(V) \subseteq \underbrace{(g')^{-1} W}_{= l_{g'^{-1}}(W)}$

$\Rightarrow \phi(l_g(V)) \subseteq W$, also ist ϕ stetig.

(iii) $$G = H \,\dot{\cup}\, \underbrace{\bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} gH}_{\text{offen, da } gH = l_g(H)}$$

(iv) wie (iii): $$G = H \,\dot{\cup}\, \underbrace{\bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} \underbrace{gH}_{\text{abg}}}_{\text{abg., da endliche Vereinigung wg. } [G:H] < \infty}$$

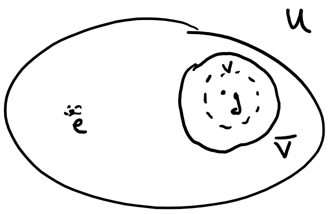
(v) $$G = \bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} \underbrace{gH}_{\text{offen}} \qquad G \text{ kompakt} \Rightarrow [G:H] < \infty$$

(vi), (vii): Übung.

(viii) oE $g = e$ wegen (i). Sei U offene Umgebung von e.

<u>Beh.</u> (ii) $\exists$ offene Umgb. V von e mit $V \cdot V \subseteq U$, $V = V^{-1}$. Nun verwende (vii).

(ix) z.z.: können e und $g \neq e$ trennen (wg. (i))



$G \setminus \bar{V} \cap V = \emptyset$

(x), (xi) Übung. ∎

Whg. I sei teilgeordnete, filtrierte Menge, d.h. $\forall i,j \in I: \exists k \in I: i,j \leq k$.

Ein **inverses System** (von Gruppen) besteht aus einer Familie von Gruppen $(G_i)_{i \in I}$ zusammen mit Gruppenhomomorphismen $\phi_{ji} : G_j \to G_i$ $\forall i,j \in I$ mit $i \leq j$.

so dass: (i) $\phi_{ii} = \mathrm{id}_{G_i}$ (ii) $\phi_{ki} = \phi_{ji} \circ \phi_{kj}$ $\forall i \leq j \leq k$

Dann heißt $\varprojlim_{i \in I} G_i$ **Limes** des inversen Systems .... hat übliche universelle Eigenschaft.

- $\varprojlim_{i \in I} G_i$ existiert und ist gegeben durch $G := \{ (g_i)_{i \in I} \in \prod_i G_i \mid \phi_{ji}(g_j) = g_i \ \forall i \leq j \}$

Lemma 1.3. Sind alle G_i topologische Gruppen, so auch $\varprojlim G_i$ mit der Unterraumtop. von $\prod_i G_i$.
Sind alle G_i hausdorffsch (kompakt + hausdorffsch), so ist auch $\varprojlim G_i$ hausdorffsch (kpt. + hd.).

Beweis.
① $\prod_i G_i$ ist selbst $\varprojlim G_i$ für geeignet gewähltes inverses System I.
Alle G_i hausdorffsch $\Rightarrow$ $\prod_i G_i$ hausdorffsch (Produkte von Hausdorffräumen sind hausdorffsch)
Kompakt folgt mit dem Satz von Tychonoff.

② Allgemeiner Fall: Hausdorffsch überträgt sich auf Unterräume $\Rightarrow$ $\varprojlim G_i$ hd.

$$\varprojlim G_i = \bigcap_{i \leq j} \underbrace{\{ (g_k)_k \in \prod_k G_k \mid \phi_{ji}(g_j) = g_i \}}_{\text{"="}\ \Gamma_{\phi_{ji}} \times \prod_{k \neq i,j} G_k \ \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \ \prod_k G_k} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \prod_k G_k$$

($\Gamma_{\phi_{ji}} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G_i \times G_j$ da G_i hd.)

$\Rightarrow$ $\varprojlim G_i$ kpt. da abg. Teilraum eines kpt. Raumes. ∎

04

Mittwoch, 18. April 2018 21:09

Def. 1.4. Eine proendliche Gruppe ist ein inverser Limes $\varprojlim G_i$ endlicher, diskreter topologischer Grp. $(G_i)_{i\in I}$ mit der Topologie aus 1.3.

(insb.: alle G_i hausdorffsch und kompakt)

Def. 1.5. Ein topologischer Raum heißt total unzusammenhängend $:\Leftrightarrow$

Jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abgeschlossenen Mengen

$\underset{\ddot{u}}{\Leftrightarrow}$ Die Zusammenhangskomponente von x ist $\{x\}$

Proposition 1.6. (ü) Eine kpt., hd. top. Grp. ist total unzusammenhängend $\Leftrightarrow$

e besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abgeschlossenen Normalteilern von G.