ALGEBRAISCHE GRUPPEN

Literatur:
- T.A. Springer, Linear Algebraic Groups
- J.F. Humphreys, — " —
- W.C. Waterhouse, Introduction to Affine Group Schemes

[Borel, Linear Algebraic Groups (setzt Geometric voraus)]

0. EINLEITUNG

Algebraische Gruppen = Gruppenobjekte in der Kategorie algebraischer Varietäten.

Varietäten: Nullstellenmengen von Polynomen in $\mathbb{A}^n_k = k^n$ (oder $\mathbb{P}^n_k$)

Morphismen: komponentenweise durch Polynome gegeben.

Vergleiche: topologische Gruppen = Abb. sind stetig (Grp.obj in Top)

Lie - Gruppen = Abb. sind glatt (Grp.obj. in Mfd)

Beispiel:

$$G = GL_n(k), \qquad k = \overline{k} \text{ alg. abgeschlossen}$$

Trick von Rabinowitch: $GL_n(k) = \{ (a_{ij}, d) \in k^{n^2+1} \mid \det(a_{ij}) \cdot d = 1 \}$

$\Rightarrow$ $A = (a_{ij})$ hat $\det A \neq 0$, d.h. $A \in GL_n(k)$

$d = \det A^{-1}$, $A^{-1} = d \cdot \underbrace{A^{adj}}_{\text{hängt polynomell von } (a_{ij}) \text{ ab.}}$

$\Rightarrow$ $A \longmapsto A^{-1}$ ist durch Polynome gegeben

$(A, B) \mapsto A \cdot B$ ist auch durch Polynome gegeben.

02

Mittwoch, 18. April 2018 11:48

Beschränkt man sich auf affine Varietäten, erhält man affine algebraische Gruppen, für die gilt: $G \hookrightarrow GL_n(k)$ Zariski-abg. Unterraum

für geeignetes n (Einbettungssatz), daher auch der Name Lineare algebraische Gruppe.

Ziel: Struktur reduktiver / halbeinfacher affiner alg. Gruppen über alg. abg. Körper k (mit char $k = 0$ oder char $k = p > 0$) untersuchen.

Strategie:

G reduktiv

$\cup\!\vert$

$U \rtimes T = B$ 'Borel-Untergruppe'

$\cup\!\vert$

U unipotent

$T \cong \mathbb{G}_m^n$ (kommutative) Torus Gruppe

$\mathbb{G}_m = GL_1(k)$

$GL_n(k)$

$\cup\!\vert$

$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = U$

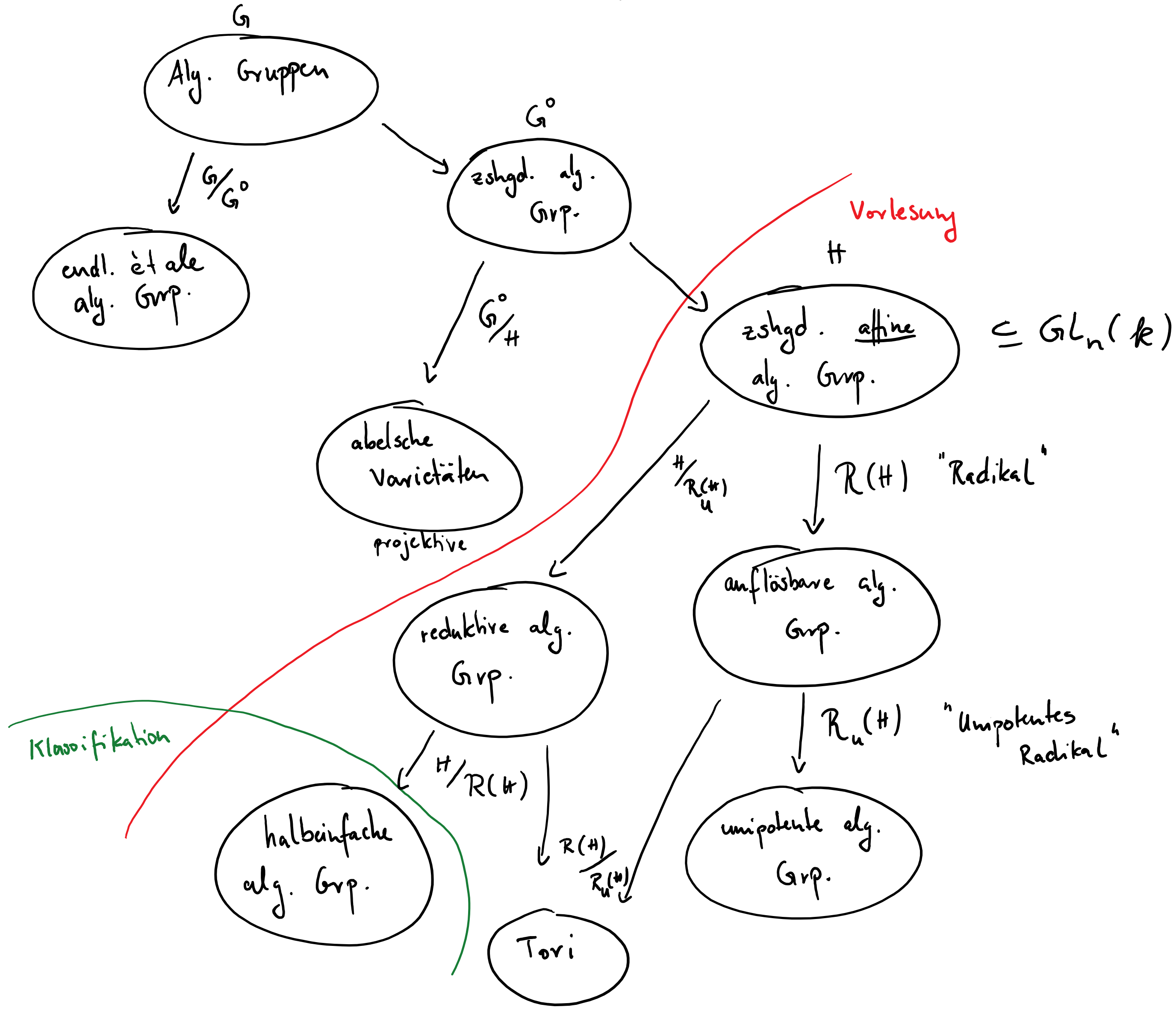
$T \subseteq G$ operiert auf $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G = T_e G$ (Tangentialraum)

(z.B. $GL_n(k)$ operiert via Konjugation auf $M_n(k) = \mathfrak{g}$)

Nicht-triviale Eigenräume liefern "Charaktere" $T \to k^\times$ (die die Eigenwerte "parametrisieren"), die ein sogenanntes Wurzelsystem bilden, welche man mittels sog. Dynkin-Diagrammen klassifizieren kann.

(z.B. $\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \longmapsto \dfrac{x_i}{x_j}$ sind Wurzeln für $1 \le i \ne j \le n$ $GL_n(k)$)

Hierarchie algebraischer Gruppen



04

Freitag, 20. April 2018 14:25

01. Algebraische Geometrie und Funktoren

I. Affine Varietäten

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper; $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_k := k^n$ heißt affiner n-Raum.

Def. 1. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt affine Varietät, falls ein Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n] = k[\underline{X}]$ existiert, so dass $X = V(I) = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid \forall f \in I: f(P) = 0\}$

Nach dem Hilbert'schen Basissatz existieren endlich viele $f_1, \dots, f_n \in I$ mit $I = (f_1, \dots, f_n)$.

Lemma 2. Für Ideale $I_1, I_2, (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

(i) $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow V(I_2) \subseteq V(I_1)$

(ii) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2)$

(iii) $V(\sum_\lambda I_\lambda) = \bigcup_\lambda V(I_\lambda)$

Die Mengen $\{V(I) \mid I \trianglelefteq k[\underline{X}]\}$ bilden genau die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$, der sogenannten Zariski-Topologie. $(V(0) = \mathbb{A}^n, \; V(1) = \emptyset)$

Affine Varietäten tragen die Unterraumtopologie.

Lemma 3. Die offenen Mengen der Form $D(f) := V((f))^c = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid f(P) \neq 0\}$ mit $f \in k[X]$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$.

Für eine affine Varietät $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ setze $I(X) := \{f \in k[\underline{X}] \mid \forall P \in X: f(P) = 0\} \trianglelefteq k[\underline{X}]$.
Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ setze $\operatorname{rad} I := \sqrt{I} := \{f \in k[\underline{X}] \mid \exists n \in \mathbb{N}: f^n \in I\}$, das Radikal von I.

Gilt $I = \sqrt{I}$, so heißt I Radikalideal.

Theorem 4. (Hilbert'scher Nullstellensatz)
$I(\cdot)$, $V(\cdot)$ induzieren Bijektionen

$$\{\text{Radikalideale in } k[\underline{X}]\} \underset{V(\cdot)}{\overset{I(\cdot)}{\longleftrightarrow}} \{\text{affine Varietäten im } \mathbb{A}^n\}$$

Korollar 5. Maximale Ideale von $k[\underline{X}]$ entsprechen abgeschlossenen Punkten.

$$m_a := I(\{a\}) = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n); \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$$

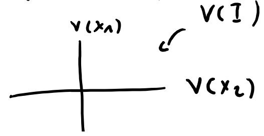
Lemma 6. Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

$$I \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}] \iff Z = V(I) \text{ ist irreduzibel als topologischer Raum.}$$

Irreduzible Räume sind zusammenhängend.
$Y \subseteq X$ irreduzibel $\iff$ $\overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

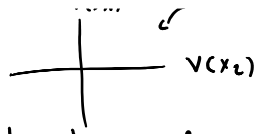
Korollar 9. Jede affine Varietät ist eine endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten.

Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$ $\quad \mathbb{A}^2_k$



Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$

$\mathbb{A}^2_k$



Koordinatenachsen, zerlege in irred. Komponenten.

Def. 11. Für eine affine Varietät X heißt $A(X) := A_X := k[\underline{X}]/I(X)$ der Koordinatenring von X.

("Morphismen $X \longrightarrow \mathbb{A}^1$")

$A(X)$ ist eine reduzierte ($\sqrt{0} = 0$) endl. erz. k-Algebra.

$A(X)$ ist Integritätsring $\Leftrightarrow$ X ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I(X) \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}]$.

Def. 12. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Ein Morphismus $X \xrightarrow{\phi} Y$ von Varietäten besteht aus einem m-Tupel $\phi = (f_1, -, f_m) \in A(X)^m$

mit $\phi(P) := (f_1(P), -, f_m(P)) \in Y \quad \forall P \in X$.

Lemma 13. Morphismen von Varietäten sind stetig bzgl. der Zariski-Topologie.

Beweis.

$$\phi^{-1}(\underset{\substack{\cap \\ A(Y)}}{D(f)}) = D(\underbrace{f \circ \phi}_{\in A(X)})$$

$\blacksquare$

Def. 14 $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$. Dann ist das kartesische Produkt $X \times Y \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ wieder eine affine Varietät, das Produkt von X, Y.

Achtung: $X \times Y$ trägt nicht die Produkttopologie

Beweis. (14)

$X = V(f_1, -, f_n)$, $Y = V(g_1, -, g_m)$ $\Rightarrow$ $X \times Y = V(f_1, -, f_n, g_1, -, g_m)$ $\blacksquare$

Theorem 15. Der Funktor $X \longmapsto A(X)$ induziert eine Kategorienäquivalenz von

$$\{\text{affine Varietäten} / k\}^{op} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{reduzierte endlich erz. } k\text{-Algebren}\}$$

$$(X \xrightarrow{\phi} Y) \longmapsto A(Y) \xrightarrow{\phi^*} A(X)$$

$$f + I(Y) \mapsto f \circ \phi + I(X)$$

Der quasiinverse Funktor ordnet R die Menge $\operatorname{Specm}(R)$ zu, $k[\underline{X}] \twoheadrightarrow R$ induziert $\operatorname{Specm}(R) \longrightarrow \operatorname{Specm} k[\underline{X}] = \mathbb{A}^n_k$

Alternativ können wir den Funktor $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(-, k)$ benutzen, da $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(R, k) \cong \operatorname{Specm} R$

$f \longmapsto \ker f$

($k \subseteq R/m$ ist endlich, d.h. $R/m = k$, da $k = \bar{k}$)

II. FUNKTOREN

Yoneda-Lemma. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist der kontravariante Funktor

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \underline{\mathrm{Sets}}) = \underline{\mathrm{Sets}}^{\mathcal{C}},$$

$$\begin{array}{ccl} A & \longmapsto & h_A : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi^* \\ B & & h_B : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \end{array}$$

volltreu, d.h.

$$h_A(B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Func}}(h_B, h_A)$$

$$\phi \longmapsto \left(\phi^* : h_B(C) \to h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}} \quad \text{(nat. Trafos)}$$

$$\eta_B(\mathrm{id}_B) \longleftarrow \left(\eta_C : h_B(C) \to h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}}$$

Mit anderen Worten: $A \in \mathcal{C}$ ist genauso gut wie der Funktor h_A.

Funktoren der Form h_A heißen darstellbar.

Bsp. 1. $\mathcal{C}$: Kategorie endl. erz. reduzierter k-Algebren.

(i) $\mathbb{A}^n(\,) : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto R^n$ wird dargestellt von $k[X_1, \dots, X_n]$

da $R^n = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(k[\underline{X}], R)$

(ii) $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$ seien darstellbar. Dann ist der Produktfunktor

$F \times G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto F(R) \times G(R)$ darstellbar.

$$F = h_A,\ G = h_B,\ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow F(R) \times G(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(A, R) \times \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(B, R)$$

$$\text{d.h.}\quad F \times G = h_{A \otimes_k B} \qquad = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(A \otimes_k B, R)$$

II. Algebraische Gruppen: Grundlagen

1. Affine algebraische Gruppen. $k = \overline{k}$

Def. + Satz 1.

(i) Eine affine (lineare) algebraische Gruppe $/_k$ ist eine affine Varietät G über k zusammen mit Morphismen

$$\mu : G \times G \longrightarrow G \quad (\text{Multiplikation})$$
$$\iota : G \longrightarrow G \quad (\text{Inversion})$$
$$\varepsilon : \mathbb{A}^0_k \longrightarrow G \quad (\text{neutrales Element})$$

so dass die Gruppenaxiome gelten:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd} \quad (\text{Assoziativität})$$

$$\begin{tikzcd}
G \times \mathbb{A}^0 \arrow[r, "\mathrm{id} \times \varepsilon"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{A}^0 \times G \arrow[l, "\varepsilon \times \mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\
 & G &
\end{tikzcd} \quad (\text{neutrales Element})$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, \iota)"] \arrow[d, "\text{konst.}"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & G \arrow[l, "(\iota, \mathrm{id})"'] \arrow[d, "\text{konst.}"] \\
\mathbb{A}^0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & G & \mathbb{A}^0 \arrow[l, "\varepsilon"]
\end{tikzcd} \quad (\text{Inverses})$$

Morphismen in der Kategorie (affiner) alg. Gruppen: Morphismen von Varietäten, die obige Strukturen respektieren.

(ii) Die Kategorie affiner algebraischer Gruppen ist (anti-)äquivalent zu folgenden Kategorien:

a) Objekte: kommutative Hopf-k-Algebren, d.h. reduzierte, kommutative, endl. erz. k-Algebren A zusammen mit Morphismen

- $\Delta : A \longrightarrow A \otimes_k A$ (Komultiplikation)
- $\iota : A \longrightarrow A$ (Koinversion)
- $\varepsilon : A \longrightarrow k$ (Ko-Einheit) so dass:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_k A \otimes_k A & & A \otimes A \arrow[ll, "\Delta \otimes id"'] \\
& /// & \\
A \otimes A \arrow[uu, "id \otimes \Delta"] & & A \arrow[ll, "\Delta"] \arrow[uu, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes k & A \otimes A \arrow[l, "id \otimes \varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon \otimes id"] & k \otimes A \\
& A \arrow[ul] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong \text{ Inklusion zweite Komp.}"'] &
\end{tikzcd}$$

(Komultiplikation) (Koeinheit)

$$\begin{tikzcd}
A & A \otimes A \arrow[l, "(\iota, id)"'] \arrow[r, "(id, \iota)"] & A \\
& /// \quad /// & \\
k \arrow[uu, "\text{Strukturmorph.}"] & A \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[uu, "\Delta"] & k \arrow[uu, "\text{Strukturmorphismus}"']
\end{tikzcd}$$

(Koinversion)

Morphismen: k-Algebren, kompatibel mit Zusatzstrukturen.

b) Objekte: Darstellbare Funktoren

$$\mathcal{C} := \begin{array}{c}\text{Kategorie red. endl. erz.}\\ k\text{-Algebren}\end{array} \longrightarrow \underline{Grp}$$

Morphismen: Natürliche Transformationen.

Beweis.
(i) $\Longleftrightarrow$ (a): Thm. I.1.15 $\Rightarrow$ $G \longmapsto A(G)$ definiert (anti-)-Kategorienäquivalenz,
beachte $A(V \times W) = A(V) \otimes_k A(W)$, so dass die Diagramme aus (a) denen aus (i) entsprechen.

(a) $\Longleftrightarrow$ (b): $A \longmapsto \mathrm{Hom}_k(A, -)$ induziert Kategorienäquivalenz nach Yoneda-Lemma:
Die Diagramme in (a) implizieren, dass die k_A Werte in Gruppen annehmen! $\blacksquare$

Die Beschreibung (ii)(b) führt zu dem allgemeineren Begriff des (affinen) Gruppenschemas als Funktor

$$\begin{tikzcd}
k\text{-}\underline{Alg} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \underline{Grp} \arrow[d, "\text{Vergissfkt.}"] \\
& \underline{Set}
\end{tikzcd}$$

so dass der induzierte Funktor durch eine (endl. erz.) k-Algebra darstellbar ist.

(jetzt kann k ein beliebiger Körper / Ring / Schema sein)

Beispiele 2.

1) $\mathbb{G}_a := \mathbb{A}^1$ ("additive Gruppe")

(i) $\mu(x,y) := x+y, \quad \iota(x) = -x, \quad \varepsilon(*) = 0.$

(a) $A = k[X], \quad \Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \iota(X) = -X, \quad \varepsilon(X) = 0$

(b) $\mathbb{G}_a(R) = (R,+) = \mathrm{Hom}_k(k[X], R)$

2) $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = V(XY-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ ("multiplikative Gruppe")

(i) $\mu(x,y) = xy, \quad \iota(x) = x^{-1}, \quad \varepsilon(*) = 1$

(a) $A = k[x,x^{-1}], \quad \Delta(X) = X \otimes X, \quad \iota(X) = X^{-1}, \quad \varepsilon(X) = 1$

(b) $\mathbb{G}_m(R) = (R^\times, \cdot) = \mathrm{Hom}_k(k[x,x^{-1}], R)$

3) $\mu_n \, (\subseteq \mathbb{G}_m) = V(x^n - 1) \subseteq \mathbb{A}^1$ (i.A. <u>nicht</u> irreduzibel / zsmhgd.)

4) GL_n

(i) $GL_n(k) \subseteq M_n(k) = \mathbb{A}^{n^2}$

(a) $A = k[X_{ij}, \underbrace{\det(x_{ij})^{-1}}_{=:d}], \quad \Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}, \quad \Delta(d) = d \otimes d$

$\iota(d) = \det(x_{ij}), \quad \iota(X_{ij}) = d \cdot \mathrm{Adj}(X_{ij})$

$\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \varepsilon(d) = 1.$

(b) $R \longmapsto GL_n(R)$

5) $SL_n = V(\det - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$

6) V endl.-dim. k-VR

(b) $R \longmapsto (V \otimes_k R, +)$

7) $GL(V)$ (V wie in 6) (b): $R \longmapsto GL(V \otimes_k R)$

8) Morphismen: $\lambda \in k^\times, n \in \mathbb{Z}$: $\mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a, \; x \longmapsto \lambda x$

$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m, \; x \longmapsto x^n$

$GL_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m$

2. Untergruppen

Def. 1. Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ ist eine abgeschlossene Untervarietät, die zugleich eine Untergruppe ist. H besitzt (via Einschränkung der Multiplikation-/Inversen-/"Neutrales Element" - Abbildung) eine eindeutige Struktur als algebraische Gruppe, so dass die Inklusion $H \hookrightarrow G$ ein Morphismus alg. Grp. ist.

Bsp. 2. Abgeschlossene UG von GL_n

- SL_n $(\det = 1)$
- D_n Diagonalmatrizen $(X_{ij} = 0 \ \forall i \neq j)$
- B_n obere Dreiecksmatrizen $(X_{ij} = 0, \ i > j)$
- U_n: unipotente Matrizen
- $O_n \,/\, Sp_{2n}$: Matrizen A mit $A^T J A$ für $J = \left(\begin{pmatrix} E_n & O_n \\ & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} Sp_{2n} \right)$
- $SO_n = O_n \cap SL_n$

Proposition 3. Sei G eine algebraische Gruppe.

(i) Es gibt genau eine irreduzible Komponente $G^\circ \subseteq G$, die das neutrale Elt. e enthält

(ii) G° ist eine normale abg. Untergruppe von endlichem Index.

(iii) G° ist die einzige Zusammenhangskomponente, die e enthält.

(iv) Jede abg. Untergruppe von G von endlichem Index umfasst G°.

(Eine alg. Grp. ist genau dann zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist.)

Beweis.

(i) Seien X, Y irred. Komponenten (insb. abg.), die e enthalten.

$\underset{\text{AlgGeo}}{\Longrightarrow}$ $X \times Y$ irreduzible Varietät (Springer Thm. 1.5.4
$\leftrightarrow A, B$ integre k-Alg. $\Rightarrow A \otimes_k B$ integer)

$\underset{\mu \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $X \cdot Y = \mu(X \times Y)$ irreduzibel.

$\Longrightarrow$ $\overline{X \cdot Y}$ irreduzibel $\Longrightarrow$ (i) $X = \overline{XY} = Y$ und X ist abg. unter Multiplikation.

$\quad\ \cup\!|$

X, Y irreduzible Komponenten

Da ι Homöomorphismus, ist $e \in X^{-1}$ ebenfalls eine irreduzible Kompomente, d.h. $X = X^{-1}$

$\Longrightarrow$ X abg. Untergruppe.

Analog folgt: $gXg^{-1} = X \quad \forall g \in G$, d.h. $X = G^\circ$ ist normal

Die Nebenklassen gX sind die Komponenten von G ($g \in Y$ bel. Komp.: $e \in g^{-1}Y \Rightarrow Y = gX$)

Da es in Varietäten nur endlich viele irreduzible Komponenten gibt folgt (ii).

Darüberhinaus sind alle irreduziblen Komponenten disjunkt.

Da Zusammenhangskomponenten Vereinigungen irred. Komponenten sind, müssen irred. und zsmh. Komponenten übereinstimmen. $\Rightarrow$ (iii).

(iv) Sei $H \subseteq G$ abg. von endlichem Index. $\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ abg. von endlichem Index.

gilt in top. Grp. $\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ ist offen abgeschlossen $\xrightarrow[G^\circ \text{ zsmhgd.}]{}$ $H^\circ = G^\circ$ $\Rightarrow$ (iv). $\blacksquare$

G° heißt die Zusammenhangskomponente der 1.