Lemma 7.5. Sei $d_A^i : C^i(G,A) \to C^{i+1}(G,A)$ das übliche Differential.

Dann gilt: $d_A^i(C^i_{cts}(G,A)) \subseteq C^{i+1}_{cts}(G,A)$, d.h. $(C^\bullet_{cts}(G,A), d_A^i)$ ist ein Komplex.

Beweis.
$$(d_A^i f)(g_1,\dots,g_{i+1}) = g_1 f(g_2,\dots,g_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(g_1,\dots,g_{j-1}, g_j g_{j+1}, g_{j+2},\dots,g_{i+1})$$
$$+ (-1)^{i+2} f(g_1,\dots,g_i)$$

f ist stetig, $g\cdot - : A \to A$ stetig, $G\times G \to G$ stetig. ▨

$$\rightsquigarrow \quad H^i_{cts}(G,A) := H^i(C^\bullet_{cts}(G,A))$$

12.06.18
Lec 01

Proposition 7.6. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ kurze exakte Sequenz von diskreten G-Moduln, so ist
$$0 \to C^\bullet_{cts}(G,A) \xrightarrow{C^\bullet(\alpha)} C^\bullet_{cts}(G,B) \xrightarrow{C^\bullet(\beta)} C^\bullet_{cts}(G,C) \to 0$$
eine exakte Sequenz in $Ch^\bullet(\mathbb{Z})$.

Beweis. Nur Surjektivität, Rest Übung. Sei dazu $s: C \to B$ ein mengentheoretischer Schnitt. Dieser ist stetig, da C die diskrete Topologie trägt. Ist nun $f \in C^i_{cts}(G,C)$, so ist $s\circ f \in C^i_{cts}(G,B)$ und
$$C^i(\beta)(s\circ f) = f.$$
▨

Def. 7.7. $H^i_{cts}(G,A) := H^i(C^\bullet_{cts}(G,A))$ heißt i-te stetige Kohomologiegruppe zu G mit Koeffizienten in A.

Satz 7.8. Unter den Voraussetzungen zu 7.6. erhalten eine lange ex. Kohomologiesequenz
$$0 \to H^0_{cts}(G,A) \to H^0_{cts}(G,B) \to H^0_{cts}(G,C) \xrightarrow{\delta^0} H^1_{cts}(G,A) \to \dots$$
und zu Morphismen kurzer exakter Sequenzen von diskreten G-Moduln erhält man induz. Morphismen der entsprechenden langen exakten Sequenzen.

Beweis. Klar nach 7.6. ▨

Bsp. 7.9. G eine pro-p-Gruppe. $\Phi(G) = \overline{\langle [G,G], G^p \rangle}$

$$H^1_{cts}(G, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}_{cts}(G, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}(G/\Phi(G), \mathbb{F}_p) \underset{\text{Burnside}}{\Longrightarrow} \dim_{\mathbb{F}_p} H^1_{cts}(G,\mathbb{F}_p) = \text{min. Anzahl von Erzeugern von } G.$$
(falls endlich)

Proposition 7.10. Sei G pro-endlich. Sei $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis von $e \in G$ bestehend aus offenen Normalteilern. (A diskreter G-Modul) Dann gilt:

$$H^i_{cts}(G, A) = \varinjlim_{U \in \mathfrak{U}} H^i(G/U, A^U) \qquad (\varinjlim \text{ unter Inflationsabb.})$$

$$\left(U' \subseteq U \subseteq G \Rightarrow G/U' \longrightarrow G/U \rightsquigarrow H^i(G/U, A^U) \longrightarrow H^i(G/U', A^{U'}) \right)$$

Beweis.

Inflationsabbildung ist auf Kokettenniveau definiert. Zeige also:

$$C^i_{cts}(G, A) = \varinjlim_{U \in \mathfrak{U}} C^i(G/U, A^U)$$

"$\supseteq$": klar

"$\subseteq$": Sei $f : \underbrace{G^i}_{\substack{\text{kpt.} \\ \text{pro endlich}}} \longrightarrow \underbrace{A}_{A = \varinjlim A^U}$ stetig. $\quad \mathrm{im}(f)$ ist endlich (kpt. + diskret)

$\Rightarrow \quad \exists U \in \mathfrak{U}: \quad \mathrm{im} f \subseteq A^U.$

$\forall a \in A$: $\quad f^{-1}(\{a\}) \underset{\text{offen}}{\subseteq} G^i$ auch abgeschlossen, also kompakt, d.h. endliche Vereinigung

$V_1 \times \ldots \times V_i$ mit $V_i \underset{\text{offen}}{\subseteq} G$ (keine Untergruppe)

$\Rightarrow \exists \, U_a \in \mathfrak{U}$: alle beteiligten $V_1 \times \ldots \times V_i$ Vereinigung von Translaten $(g_1, \ldots, g_i) \cdot U_a^i$ sind!

Wähle $U' \in \mathfrak{U}$: $U' \subseteq U$, $U' \subseteq U_a \; \forall a \in \mathrm{im} f$. $\Rightarrow$ f ist konstant auf jedem Translat von $(U')^i$, $\mathrm{im} f \subseteq A^{U'}$.

d.h. $f \in C^i(G/U', A^{U'})$. $\qquad (H^0(\varprojlim \;) = \varprojlim H^0 \ldots)$ filtrierte Colimiten sind exakt

∎

$H^\bullet_{cts}$ als derivierte Funktorkohomologie.

(Referenz: S. Shatz: Profinite Groups, Arithmetic & Geometry, II. 1+2+3)

Sei G eine proendliche Gruppe, $\mathfrak{U}$ wie in 7.10.

Def. (a)

Mod^d_G: Kategorie diskreter G-Moduln.

(b) Für $A \in Mod_G$ definiere $A^d = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} A^U$

(c) Für $H \leq G$ abg. UG und $A \in Mod^d_H$ definiere $ct\text{-}CoInd^G_H A := \{ f: G \to A \text{ stetig} \mid \forall h \in H: f(hg) = hf(g) \}$

mit G-Operation $(gf)g' := f(g'g)$

Bemerkung. $H \leq G$ offene Untergruppe $\Rightarrow$ $ct\text{-}CoInd^G_H A = CoInd^G_H A$.

Lemma. (ii)

(a) Mod^d_G ist abelsche Kategorie

(b) $A \mapsto A^d$ definiert Funktor $Mod_G \to Mod^d_G$ (rechtsadjungiert zu $Mod^d_G \hookrightarrow Mod_G$)

(c) $ct\text{-}CoInd^G_H : Mod^d_H \to Mod^d_G$ ist Funktor

(d) $I \in Mod_G$ injektiv $\Rightarrow$ I^d injektiv in Mod^d_G.

(e) $I \in Mod_{\mathbb{Z}}$ injektiv $\Rightarrow$ $ct\text{-}CoInd^G_e I \in Mod^d_G$ injektiv.

Korollar. Mod^d_G hat genügend viele Injektive.

Satz. (Shapiro) $H \leq G$ abgeschlossen, $A \in Mod^d_H$. Dann:

$$H^i_{cts}(H, A) \xrightarrow{\sim} H^i_{cts}(G, ct\text{-}CoInd^G_H A) \quad \text{(funktoriell in } A)$$

Insbesondere: $H^i_{cts}(G, cts\text{-}CoInd^G_e A) = 0 \quad \forall i \geq 1, \ A \in Mod_{\mathbb{Z}}$.

Korollar. $(H^\bullet_{cts}(G, A))$ (als δ-Funktor) ist isomorph zur derivierten Funktorkohomologie zu $F: Mod^d_G \to \underline{Ab}$, $A \mapsto A^G$

Beweis. des Korollars.

Geg. sind 2 δ-Funktoren mit einer gemeinsamen Menge von azyklischen Objekten und einer der δ-Funktoren (der derivierte..) ist universell $\Rightarrow$ δ-Funktoren sind isomorph.

Alternativ:

Sei $\tilde{H}^i(G,A) := (R^iF)(A)$. Dann: $\tilde{H}^0(G,A) = A^G = H^0_{cts}(G,A) = \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \underbrace{H^0(G/U, A^U)}_{= A^G}$

Ist nun $0 \to A \to ct\text{-}CoInd^G_e A' \to A'' \to 0$ gegeben, so erhält man wegen

$$H^i_{cts}(G, ct\text{-}CoInd^G A') \underset{Satz}{=} 0 \underset{\substack{Lemma\\(e)}}{=} \tilde{H}^i(G, ct\text{-}CoInd^G A')$$

$(i = 1!)$

$(A \hookrightarrow A'$ injektiv Einhüllende als $\mathbb{Z}$-Modul$)$

dann:

$$\begin{array}{ccccccc} H^0_{cts}(--) & \to & H^0_{cts}(G,A'') & \to & H^1_{cts}(G,A) & \to & 0 \\ \| & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \\ \tilde{H}^0(\cdot - -) & \to & \tilde{H}^0(G,A'') & \to & \tilde{H}^1(G,A) & \to & 0 \end{array}$$

$\Leftarrow$ Isomorph. $\|$ oder univ.-δ-Fkt. + Induktion.

$\square$

Def. 7.11. G, G' proendlich, $A \in Mod^d_G$, $A' \in Mod^d_{G'}$

$(\rho: G' \to G, \lambda: A \to A')$ heißen (kohomologisch) kompatibles Paar $:\Leftrightarrow$

ρ ist stetiger Gruppenhomomorphismus, $\lambda: A \to A'$ $\mathbb{Z}$-Modulhom., s.d.

$$\forall g' \in G' \ \forall a \in A: \ \lambda(\rho(g')a) = g'\lambda(a)$$

zu einem solchen Paar erhält man $(H^i_{cts}(G,A) \xrightarrow{H^i_{cts}(\rho,\lambda)} H^i_{cts}(G',A'))_{i\in\mathbb{Z}}$

Bemerkung 7.12.

(a) Erhalten Inf, Res, Konjugation in topol. Kontext für diskrete G-Moduln.

(b) Die Abb'en Inf, Res, Konj. ergeben sich auch als direkte Limiten der entspr. Abb. für endliche Gruppen

(c) Ist $H \leq G$ offene UG., so $\exists$ Korestriktion wie üblich.

(d) Infl.-Restr.-Sequenz gilt auch für $N \trianglelefteq G$ abg. Normalteiler.

Proposition 7.13. G proendlich, $N \trianglelefteq G$ abg. Normalteiler, $A \in Mod^d_G$ und $H^j_{cts}(N,A) = 0$ $j = 1..,i-1$

Dann ist:

$$0 \to H^i_{cts}(G/N, A^N) \to H^i_{cts}(G,A) \to H^i_{cts}(N,A)^{G/N} \text{ exakt.}$$

Galoiskohomologie

$L|K$ galoissch (nicht notw. endlich!)

Wähle $K^{alg} \supseteq K^{sep} \supseteq L$; $A \in \mathrm{Mod}^{d}_{Gal(L/K)}$ ← Krull-Topologie.

Def. 7.14.

$$H^i(L/K, A) := H^i_{cts}(Gal(L/K), A)$$

(falls $L = K^{sep}$: $H^i(K, A) := H^i(L/K, A)$)

Bsp. 7.15. • $(L, +)$, $(L^\times, \cdot)$ sind diskrete $Gal(L/K)$-Moduln

Sei $U = Gal(L/E)$ für E/K endl. galoissch $(L \supseteq E)$ $(\rightsquigarrow \mathcal{U})$

Dann:

$$L^{\times U} = E^\times \qquad (\Rightarrow A = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} A^U)$$

Satz 7.16. (Hilbert 90) $H^1(L/K, L^\times) = 0$.

Beweis.

oE L/K endlich wegen 7.10. $\left(H^1(L/K, L^\times) = \lim\limits_{\substack{L|E|K \\ \text{endlich}}} H^1(E/K, E^\times) \right)$

Für $E|K$ endlich galoissch. Sei $0 \neq f \in Z^1(E/K, E^\times)$

Dedekind unabh. von Charakteren $\Rightarrow$ $\sigma: E^\times \to E^\times$, $\sigma \in Gal(E/K)$ sind E-l.u.

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{\sigma \in Gal(E/K)} f(\sigma) \cdot \sigma}_{\text{Abb. } E^\times \to E} \neq 0 \quad (\text{in } E[Gal(E/K)])$$

wähle $\alpha \in E^\times$ s.d. $z = \sum_{\sigma \in Gal(E/K)} f(\sigma) \cdot \sigma(\alpha) \neq 0$.

Nun: Für $\tau \in Gal(E/K)$: $\tau^{-1}(z) = \sum_{\underbrace{\sigma \in Gal(E/K)}_{=:G}} \tau^{-1}(f(\sigma)\sigma(\alpha)) = \sum_{\sigma \in G} \frac{f(\tau^{-1}\sigma)}{f(\tau^{-1})} \tau^{-1}(\sigma(\alpha))$

$$\left(f(\tau^{-1}\sigma) = {}^{\tau^{-1}}f(\sigma) \cdot f(\tau^{-1}) \right) \qquad = \sum_{\sigma \in G} \frac{f(\sigma)}{f(\tau^{-1})} \sigma(\alpha) = \frac{z}{f(\tau^{-1})}$$

$\Leftrightarrow$ $f(\tau^{-1}) = \frac{z}{\tau^{-1}(z)}$, d.h. $f = \partial z$. $\Rightarrow f \in B^1(--)$

$\blacksquare$