Beweis.

· Eindeutigkeit: $V(t)$ entlang $c(t)$. In lokalen Koordinaten $(x^1, -, x^n)$:

$$V(t) = \underset{\text{Summenkonvention}}{v^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}} \quad ; \quad c(t) = (x^1(t), -, x^n(t))$$

$$\frac{D}{dt} V = v^i \underbrace{\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}\right)}_{\overset{=}{3)} \nabla_{c'(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\underset{(*)}{=} v^i \nabla_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^{\ k} \right) \frac{d}{dx^k}$$

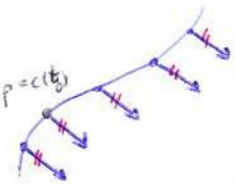
· Existenz:
Sei $\{(U_\alpha, x^\alpha)\}$ eine offene Überdeckung von M durch Karten.
Definiere $\frac{D}{dt}$ auf U_α durch $(*)$. Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ stimmen diese $\frac{D}{dt}$ überein wegen der Eindeutigkeit und definieren somit $\frac{D}{dt}$ überall. ▨

Bemerkung. Die Formel für ∇ in lokalen Koordinaten impliziert, dass $\nabla_X Y$ eine <u>lokale</u> Operation ist: $p \in M$.

$$(\nabla_X Y)(p) = \left(a^i(p) \frac{\partial b^k}{\partial x^i}(p) + a^i(p) b^j(p) \Gamma_{ij}^{\ k}(p) \right) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p$$

Y entlang einer Integralkurve $c(t)$ von X.

Proposition. Sei c eine Kurve in M, $p = c(t_0)$, sei $V^0 \in T_pM$. Dann:
$\exists!$ VF V entlang c mit $\frac{DV}{dt} = 0$ und $V(t_0) = V^0$.



Def. Sei V ein VF entlang c. Dann sagen wir V ist parallel entlang c, wenn $\frac{DV}{dt} = 0 \ \forall t$

30.04.18

Beweis der Proposition.
· Eindeutigkeit & lokale Existenz: Hier: $\frac{D}{dt} v = \underbrace{\left(\frac{dv^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^{\ k} \right)}_{\Rightarrow \ = 0} \frac{d}{dx^k} \equiv 0$

$$\Rightarrow \underline{\frac{dv^k}{dt} = -\left(\frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^{\ k} \right) v^j}, \quad k = 1 .. n$$

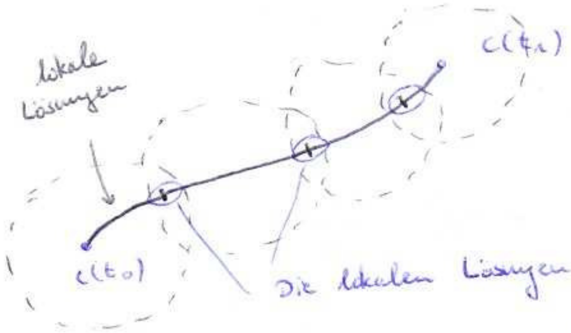
(*) System von <u>linearen</u> gewöhnlichen DGL. $\Rightarrow \exists!$ Lösungen v^k dieses Gleichungssystems

Linearität $\to$ Lösungen $v^k(t)$ existieren für alle $t \in \mathbb{R}$.

($v(t_0) = v^0$ übersetzt sich in die notwendigen Anfangspunkte)

· Globale Existenz: t_0, t_1 ; $c([t_0, t_1])$ ist kompakt.

$\Rightarrow$ $c([t_0,t_1])$ wird überdeckt durch endlich viele Karten von M.



Die lokalen Lösungen stimmen auf den Durchschnitten der Karten überein wegen Eindeutigkeit.

Bemerkung.

1) $$\begin{array}{ccc} \tau: T_pM & \longrightarrow & T_{c(t_1)}M \\ \cup & & \cup \\ V^0 & \longmapsto & V(t_1) \end{array}$$ "Paralleltransport"

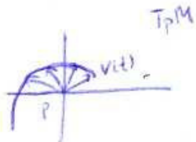
Linearität des Systems von DGL (*) in lokalen Koordinaten $\Rightarrow$ τ ist linear.

Umkehren der Zeit $\tau': T_{c(t_1)}M \longrightarrow T_pM$; Eindeutigkeit $\Rightarrow$ $\tau' \circ \tau = id$, $\tau \circ \tau' = id$

$\Rightarrow$ τ ist Isomorphismus, d.h. wir können Tangentialräume an verschiedenen Punkten mittels τ "vergleichen". Daher die Terminologie "Zusammenhang".

2) $\frac{DV}{dt}$ ordnet auch Vektoren an Punkten mit $c'(t) = 0$ zu. Diese Vektoren müssen nicht 0 sein!

Bsp. $c(t) \equiv p \ \forall t$



$\frac{DV}{dt}$ ist $v'(t)$ im Euklidschen Sinne.

DER LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Def. Ein Zusammenhang ∇ auf M heißt **kompatibel** mit der Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$, wenn $\forall$ Kurven c $\forall$ parallele VF P, Q entlang c gilt: $\langle P, Q\rangle$ = konstant, d.h. Paralleltransport ist eine Isometrie.

Proposition. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ∇ sind kompatibel $\Leftrightarrow$ $\forall$ VF V, W entlang einer Kurve c gilt

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \tfrac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \tfrac{DW}{dt}\rangle$$

Beweis. "$\Leftarrow$": Seien P, Q parallele VF entlang c. $\frac{d}{dt}\langle P, Q\rangle = \langle \underbrace{\tfrac{DP}{dt}}_{=0}, Q\rangle + \langle P, \underbrace{\tfrac{DQ}{dt}}_{=0}\rangle = 0$

$\Rightarrow$ $\langle P, Q\rangle$ konstant.

"$\Rightarrow$": Seien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ∇ kompatibel.

Sei $\{P_1(t_0), \ldots, P_n(t_0)\} \subseteq T_{c(t_0)}M$ eine Orthonormalbasis.

Paralleltransport liefert VF $P_1, \ldots, P_n$ entlang mit $\{P_i(t_0)\}_i$ die gegebene ONB, P_i parallel entlang c.

Kompatibilität $\Rightarrow$ $\{P_1(t), \ldots, P_n(t)\}$ ist ONB in $T_{c(t)}M$.

Seien V, W VF entlang c.

$$V(t) = v^i(t) P_i(t), \quad W(t) = w^j(t) P_j(t)$$

$$\frac{DV}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Produkt-} \\ \text{regel}}}{=} \frac{dv^i}{dt} P_i + v^i \underbrace{\frac{DP_i}{dt}}_{=0} = \frac{dv^i}{dt} P_i \underset{\text{analog}}{\Rightarrow} \frac{DW}{dt} = \frac{dw^j}{dt} P_j$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle = \left\langle \frac{dv^i}{dt} P_i, w^j P_j \right\rangle = \frac{dv^i}{dt} w^j \underbrace{\langle P_i, P_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \frac{dv^i}{dt} w^i \delta_{ii}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) \delta_{ii}$$

$$\langle V, W \rangle = \langle v^i P_i, w^j P_j \rangle = v^i w^j \underbrace{\langle P_i, P_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = v^i w^i \delta_{ii}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) \delta_{ii}$$

$\square$

Korollar. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ∇ sind kompatibel $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y, Z \in \Gamma(M)$:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

Beweis. $p \in M$. Wähle Kurve c mit $c(0) = p$, $c'(0) = X_p$.

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \underset{\substack{\parallel \\ V(t)}}{Y_{c(t)}}, \underset{\substack{\parallel \\ W(t)}}{Z_{c(t)}} \rangle$$

$\square$

Symmetrie von Zusammenhängen:

Def. Ein Zusammenhang ∇ heißt symmetrisch, wenn $\forall X, Y \in \Gamma(M)$: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

In lokalen Koordinaten für $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Für die Christoffel-Symbole bedeutet dies $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Bemerkung. $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ „Torsion", T ist bilinear über $C^\infty(M)$, d.h. T ist ein sog. Tensor.

∇ symmetrisch $\Leftrightarrow$ ∇ torsionsfrei.

Satz. (LEVI-CIVITA)

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang ∇ auf M (der Riemannsche Zusammenhang oder Levi-Civita-Zusammenhang), sodass gilt:

(i) ∇ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sind kompatibel (ii) ∇ ist symmetrisch.

Beweis. - Eindeutigkeit.

$X, Y, Z \in \Gamma(M)$.

$$X\langle Y, Z\rangle \underset{\text{komp.}}{=} \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$+ \quad Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$- \quad Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = \langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X\rangle + \langle X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y\rangle + \langle Z, \nabla_X Y + \nabla_Y X\rangle$$

$$\underset{\text{symmetrisch}}{=} \langle Y, [X,Z]\rangle + \langle X, [Y,Z]\rangle + \langle Z, [X,Y]\rangle + 2\cdot\langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$\Rightarrow \langle Z, \nabla_Y X\rangle \underset{(1)}{=} \frac{1}{2}\Big[X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle - \langle Z,[X,Y]\rangle \Big]$$

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit

Existenz: Definiere ∇ durch (1). Dann rechnet man nach, dass ∇ ein Zusammenhang ist, der symmetrisch und kompatibel mit der Riemannschen Metrik ist.