Beweis.

(v) OE $v \geq 1$. ($v=0$, $v=-1$ klar wegen ii)

$\exists i: \; i \leq v \leq i+1$ $\qquad\qquad [G_0 : G_u] = \frac{\# G_0}{\# G_u}$

$$\underset{v=\phi(u)}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\# G_0 \; v}_{\substack{\text{teile durch} \\ \# G_{i+1}}} = \underset{[0,1]}{\# G_1} + \underset{[1,2]}{\# G_2} + \ldots + \underset{[i-1,i)}{\# G_i}$$

$$\underset{v \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \quad u - i \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow u = i.$$

$\boxtimes$

Def. 4.17. $\quad G^v := G_{\psi(v)}$ $\quad$ (Verzweigungsgruppen in oberer Nummerierung!)

Satz 4.18. (Herbrand) Für $N \trianglelefteq G$ Normalteiler gilt:

$$\left(G/N\right)^v = G^v N / N. \qquad \forall v \in \mathbb{R}_{\geq -1}$$

08.05.18

Bem. zu 4.17.

i) $G^v = \{1\}$ für $v \gg 0$

ii) $G^0 = G_0$ $\quad (\psi(0)=0)$; $G^{-1} = G$

iii) Ü: $\psi(v) = \int_{w=0}^{v} [G^0 : G^w] \, dw$

Übung: Die Abbildung $\phi = \phi_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p}$ (mit Inverser ψ) erfüllt:

$$\phi'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ \frac{1}{p^k - p^{k-1}}, & p^{k-1} - 1 < t < p^k - 1 \qquad 1 \leq k \leq n-1 \\ \frac{1}{p^n - p^{n-1}}, & p^{n-1} - 1 < t \end{cases}$$

$$\psi'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ p^k - p^{k-1}, & k-1 < t < k \qquad 1 \leq k \leq n-1 \\ p^n - p^{n-1}, & n-1 < t \end{cases}$$

(Sprünge der Steigung von ψ an $\{0, \ldots, n-1\}$)

Proposition 4.19. Gelte $N \trianglelefteq G$ und sei $E = L^N$. Dann:

$$\varphi_{L|K} = \varphi_{E|K} \circ \varphi_{L|E} \quad \text{und} \quad \psi_{L|K} = \psi_{E|K} \circ \psi_{L|E}$$

Lemma 4.20. Für $N \trianglelefteq G$ und $E = L^N$ gilt:

$$\forall \delta \in \mathrm{Gal}(E|K): \quad i_{E|K}(\delta) = \frac{1}{e(L|E)} \sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma|_E = \delta}} i_{L|K}(\sigma)$$

$$G\left(\begin{array}{c} L \\ |\, N \\ E \\ |\, G/N \\ K \end{array}\right.$$

Beweis. (Tate)

- Falls $\delta = \mathrm{id}$: $\infty = \infty$.
- Falls $\delta \neq \mathrm{id}$: Wähle $x \in \mathcal{O}_L$, $y \in \mathcal{O}_E$ mit $\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_K[y] = \mathcal{O}_E$.

Wähle $\tau \in G$ mit $\tau|_E = \delta \Rightarrow \{\sigma \in G \mid \sigma|_E = \delta\} = \tau \cdot N = N \cdot \tau$

Beobachte:

$$e(L|E) \cdot i_{E|K}(\delta) = v_L(\tau y - y)$$

$$i_{L|K}(\sigma) = v_L(\sigma x - x)$$

Behauptung: $a = \tau y - y$ und $b = \prod_{\sigma \in N} (\tau\sigma x - x)$ sind assoziiert in $\mathcal{O}_L$.

<u>$a \mid b$:</u> Sei $f \in E[X]$ das Minimalpolynom von x über E.

$$f(X) = \prod_{\sigma \in N} (X - \sigma x) = X^{\# N} + \sum_{i=0}^{\# N - 1} b_i X^i \quad \text{mit } b_i \in \mathcal{O}_E \text{ da } x \text{ ganz über } \mathcal{O}_E.$$

$$\tau f - f = \sum_{i=0}^{\# N - 1} \underbrace{(\tau b_i - b_i)}_{v_E(\,\cdot\,) \geq i_{E|K}(\delta)} X^i \qquad (\tau b_i = \delta b_i)$$

$$\xrightarrow[\text{Koeffizienten von } f]{a \text{ teilt}} \quad a \mid (\tau f - f)(x) = (\tau f)(x) = \prod_{\sigma \in N} (x - \tau\sigma x) = \pm b$$

<u>$b \mid a$:</u> Schreibe $y = g(x)$ für ein $g \in \mathcal{O}_K[X]$.

$\Rightarrow g(X) - y \in \mathcal{O}_E(X)$ und das Polynom hat x als Nullstelle.

$\Rightarrow g(X) - y = \underbrace{f(X)}_{\text{normiert}} \cdot h(X)$ für ein $h \in \mathcal{O}_E[X]$.

Wende τ an; anschließend x einsetzen. (beachte $\tau g = g$)

$$\rightarrow a = y - \tau y = (\tau f)(x) \; (\tau h)(x)$$
$$= \pm b \cdot (\tau h)(x)$$

also gilt $b \mid a$.

∎

Korollar 4.21. (s. Serre, Local Fields) Sei $N = G_j$ für ein $j \geq 0$. Dann:

(a) $(G/N)_i = G_i/N$ für $i < j$ (b) $(G/N)_i = \{1\}$ für $i \geq j$

Beweis. Übung.

∎

Lemma 4.22. Für $t \geq -1$ gilt:

$$\phi_{L|K}(t) + 1 = \frac{1}{\# G_0} \sum_{\sigma \in G} \min(i_{L|K}(\sigma), t+1)$$

Beweis. Beide Seiten sind 1 an $t=0$, ($i_{L|K}(\sigma) = 0$ für $\sigma \in G \setminus G_0$, ≥ 1 für $\sigma \in G_0$)

stückweise linear für $t \in [i, i+1]$ und stetig. Sei $t \in \mathbb{R}_{\geq -1} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\phi'_{L|K}(t) = \frac{1}{[G_0 : G_{i+1}]} = \frac{\# G_{i+1}}{\# G_0}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Rechte} \\ \text{Seite}\end{pmatrix}'(t) = \frac{1}{\# G_0} \sum_{\sigma \in G} \frac{d}{dt} \underbrace{\min\{i_{L|K}(\sigma), t+1\}}_{\text{Fkt. konstant nahe } t \iff i_{L|K}(\sigma) < t+1 \iff i_{L|K}(\sigma) \leq i+1}$$

$$= \frac{1}{\# G_0} \left(\sum_{\sigma \in G \setminus G_{i+1}} 0 + \sum_{\sigma \in G_{i+1}} 1 \right)$$

∎

Lemma 4.23. Für $N \trianglelefteq G$, $E = L^N$, $\delta \in \mathrm{Gal}(E|K)$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ gilt:

$$i_{E|K}(\delta) - 1 = \max\{\phi_{L|E}(i_{L|K}(\sigma) - 1) \mid \sigma \in G, \sigma|_E = \delta\}$$

Beweis. Wähle $\sigma \in \{\sigma' \in G \mid \sigma'|_E = \delta\}$ für welches $i_{L|K}(\sigma)$ maximal ist. Sei

$$m = i_{L|K}(\sigma) - 1. \quad \underline{\text{Behauptung:}} \; \forall \tau \in N: \; i_{L|K}(\sigma\tau) = \min\{i_{L|K}(\tau), m+1\}$$

Fall $\tau \in N_m$: d.h. $i_{L|K}(\tau) - 1 \geq m. \Rightarrow i_{L|K}(\sigma\tau) \geq \min\{i_{L|K}(\sigma), i_{L|K}(\tau)\}$

$= m+1$ und $=$ nach Wahl von σ.

$= i_{L|K}(\sigma)$

Fall $\tau \in N \setminus N_m$: $i_{L|K}(\tau) \leq m \underset{4.5\,(ii)}{\Rightarrow} i_{L|K}(\sigma\tau) \underset{\text{wie oben}}{=} i_{L|K}(\tau) \Rightarrow \boxed{} \text{ Behauptung.}$

$$4.20 \Rightarrow i_{E|K}(\delta) \underset{\text{Beh.}}{=} \frac{1}{e(L|E)} \sum_{\tau \in N} \min\{i_{L|K}(\tau), m+1\}$$

$\{\sigma' \in G \mid \sigma'|_E = \delta\} = \sigma N$

$$= \frac{1}{\# N_0} \sum_{\tau \in N} \min\{\underline{i_{L|E}(\tau)}, m+1\} \underset{\substack{4.22 \\ \text{für } N}}{=} \phi_{L|E}(m) + 1$$

$(\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L \Rightarrow \mathcal{O}_E[x] = \mathcal{O}_L)$

$$= \max\{\phi_{L|E}(i_{L|K}(\sigma) - 1) \mid \sigma \in G, \sigma|_E = \delta\} + 1$$

ϕ konvex $\Rightarrow$ "$\max(\phi) = \phi(\max)$"

$\blacksquare$

Korollar 4.24. (Herbrand's Theorem)

Sei $v = \phi_{L|E}(u)$. Dann: $$G_u N / N = \underbrace{(G/N)}_{\cong \mathrm{Gal}(E|K)}{}_v$$

Beweis. (Notation wie in 4.23)

$$\delta \in G_u N/N \iff \max\{i_{L|K}(\sigma) - 1 \mid \sigma \in G, \sigma|_E = \delta\} \geq u$$

$$\underset{\substack{4.23, \\ \phi_{L|E} \text{ mon. wachs.}}}{\iff} i_{E|K}(\delta) - 1 \geq \phi_{L|E}(u) = v$$

$$\iff \delta \in (G/N)_v$$

$\blacksquare$

Beweis von 4.19. (Transitivität

(nur für ϕ, da $\psi = \phi^{-1}$ ..) Sei $u \in \mathbb{R}_{\geq -1} \setminus \mathbb{Z}$.

$$\frac{d}{dt}\left(\phi_{E|K} \circ \phi_{L|E}\right)(u) = \phi'_{E|K}(v) \cdot \phi'_{L|E}(u)$$

$v := \phi_{L|E}(u) \notin \mathbb{Z}$ (4.16 v)

$$= \frac{\#\left(Gal(E|K)_v\right)}{e(E|K)} \cdot \frac{\#\left(Gal(L|E)_u\right)}{e(L|E)} \underset{4.24}{=} \frac{\# G_uN/N \cdot \# Gal(L|E)_u}{e(L|K)}$$

$$\left(G_uN/N \cong G_u/N \cap G_u \cong G_u/N_u \right) \Rightarrow \quad = \frac{\# G_u/\# N_u \cdot \# N_u}{e(L|K)}$$

$$= \phi'_{L|K}(u)$$

∎

Beweis von 4.18. Sei $v \in \mathbb{R}_{\geq -1}$, $x = \psi_{E|K}(v)$, $w = \psi_{L|E}(x) = \psi_{L|K}(v)$

$$(G/N)^v \underset{Def.}{=} (G/N)_{\psi_{E|K}(v)} = (G/N)_x \underset{\substack{4.24 \\ \phi_{L|E}(w) = x}}{=} G_wN/N = G_{\psi_{L|K}(v)}N/N$$

$$\underset{Def.}{=} G^vN/N.$$

∎

Satz. (Hasse-Arf, o. Beweis, s. Serre)

Ist $\underset{Gal(L|K)}{\overset{\shortparallel}{G}}$ abelsch, $v \in \mathbb{Q}$ ein Sprung der oberen Verzweigungs Filtrierung, so gilt: $v \in \mathbb{Z}$.