ALGEBRAISCHE GRUPPEN

Literatur:
- T.A. Springer, Linear Algebraic Groups
- J.F. Humphreys, — " —
- W.C. Waterhouse, Introduction to Affine Group Schemes

[Borel, Linear Algebraic Groups (setzt Geometric voraus)]

0. EINLEITUNG

Algebraische Gruppen = Gruppenobjekte in der Kategorie algebraischer Varietäten.

Varietäten: Nullstellenmengen von Polynomen in $\mathbb{A}^n_k = k^n$ (oder $\mathbb{P}^n_k$)

Morphismen: komponentenweise durch Polynome gegeben.

Vergleiche: topologische Gruppen = Abb. sind stetig (Grp.obj in Top)

Lie-Gruppen = Abb. sind glatt (Grp.obj. in Mfd)

Beispiel:

$$G = GL_n(k), \quad k = \bar{k} \text{ alg. abgeschlossen}$$

Trick von Rabinowitch: $GL_n(k) = \{ (a_{ij}, d) \in k^{n^2+1} \mid \det(a_{ij}) \cdot d = 1 \}$

$\Rightarrow$ $A = (a_{ij})$ hat $\det A \neq 0$, d.h. $A \in GL_n(k)$

$$d = \det A^{-1}, \quad A^{-1} = d \cdot \underbrace{A^{adj}}_{\text{hängt polynomell von } (a_{ij}) \text{ ab.}}$$

$\Rightarrow$ $A \longmapsto A^{-1}$ ist durch Polynome gegeben

$(A, B) \mapsto A \cdot B$ ist auch durch Polynome gegeben.

Beschränkt man sich auf affine Varietäten, erhält man affine algebraische Gruppen, für die gilt: $G \hookrightarrow GL_n(k)$ Zariski-abg. Unterraum

für geeignetes n (Einbettungssatz), daher auch der Name Lineare algebraische Gruppe.

Ziel: Struktur reduktiver / halbeinfacher affiner alg. Gruppen über alg. abg. Körper k (mit char $k=0$ oder char $k=p>0$) untersuchen.

Strategie:

$$\begin{array}{ccll} & G & \text{reduktiv} & \\ & \cup\!\!\shortmid & & \\ U \rtimes T = & B & \text{'Borel-Untergruppe''} & \\ & \cup\!\!\shortmid & & \\ & U & \text{unipotent} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & GL_n(k) & \\ & \cup\!\!\shortmid & \\ & \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} & \\ \cup\!\!\shortmid & & \cup\!\!\shortmid \\ T = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = U \end{array}$$

$T \cong \mathbb{G}_m^n$ (kommutative) Torus Gruppe

$\mathbb{G}_m = GL_1(k)$

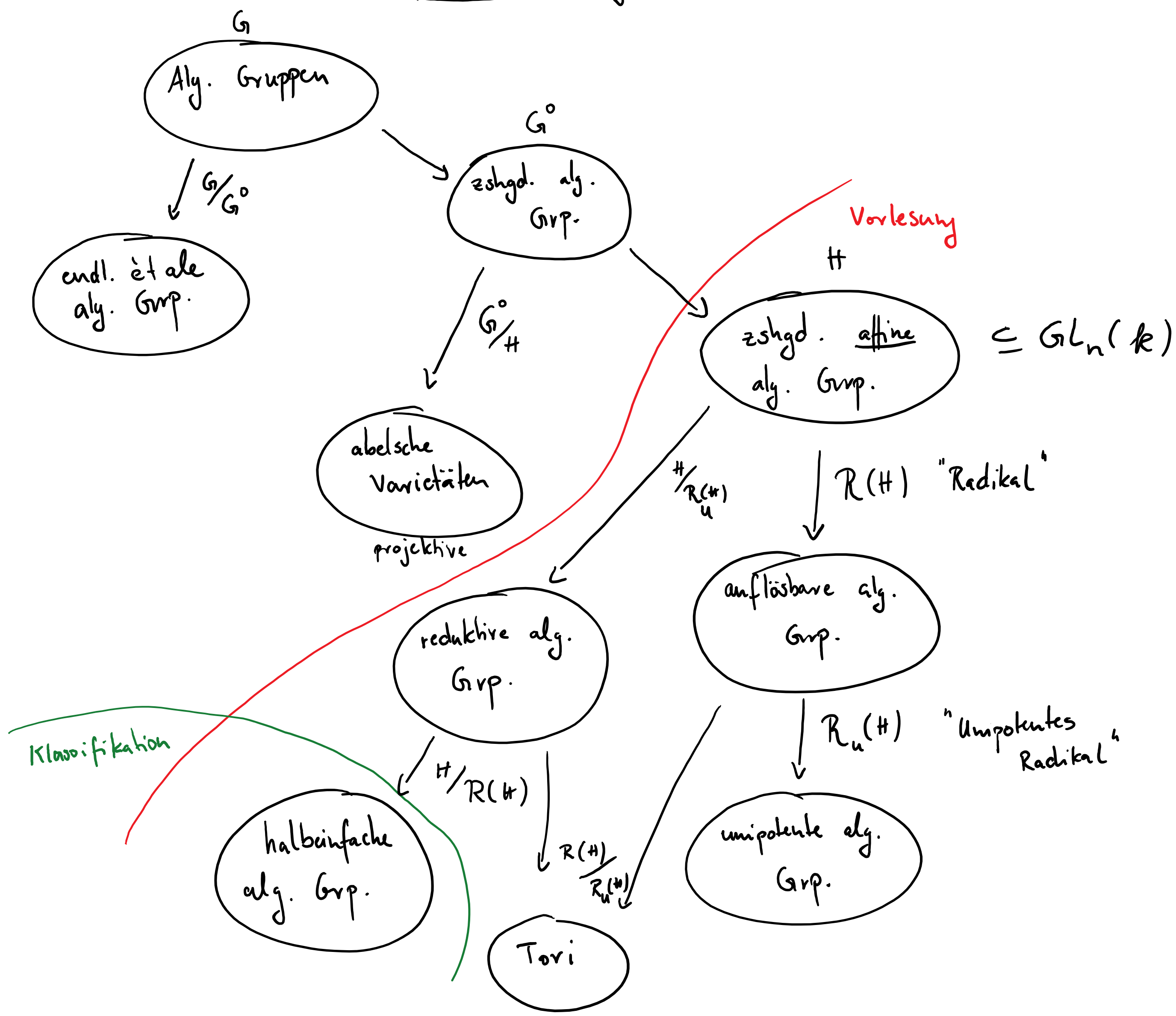
$T \subseteq G$ operiert auf $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G = T_e G$ (Tangentialraum)

(z.B. $GL_n(k)$ operiert via Konjugation auf $M_n(k) = \mathfrak{g}$)

Nicht-triviale Eigenräume liefern "Charaktere" $T \to k^\times$ (die die Eigenwerte "parametrisieren"), die ein sogenanntes Wurzelsystem bilden, welche man mittels sog. Dynkin-Diagrammen klassifizieren kann.

(z.B. $\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \mapsto \frac{x_i}{x_j}$ sind Wurzeln für $1 \le i \ne j \le n$ $GL_n(k)$)

Hierarchie algebraischer Gruppen



04

Freitag, 20. April 2018 14:25

01. Algebraische Geometrie und Funktoren

I. Affine Varietäten

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper; $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_k := k^n$ heißt affiner n-Raum.

Def. 1. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt affine Varietät, falls ein Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n] = k[\underline{X}]$ existiert, so dass $X = V(I) = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid \forall f \in I: f(P) = 0\}$

Nach dem Hilbert'schen Basissatz existieren endlich viele $f_1, \dots, f_n \in I$ mit $I = (f_1, \dots, f_n)$.

Lemma 2. Für Ideale $I_1, I_2, (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

(i) $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow V(I_2) \subseteq V(I_1)$

(ii) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2)$

(iii) $V(\sum_\lambda I_\lambda) = \bigcup_\lambda V(I_\lambda)$

Die Mengen $\{V(I) \mid I \trianglelefteq k[\underline{X}]\}$ bilden genau die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$, der sogenannten Zariski-Topologie. $(V(0) = \mathbb{A}^n,\ V(1) = \emptyset)$

Affine Varietäten tragen die Unterraumtopologie.

Lemma 3. Die offenen Mengen der Form $D(f) := V((f))^c = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid f(P) \neq 0\}$ mit $f \in k[X]$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$.

Für eine affine Varietät $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ setze $I(X) := \{f \in k[\underline{X}] \mid \forall P \in X: f(P) = 0\} \trianglelefteq k[\underline{X}]$.
Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ setze $\operatorname{rad} I := \sqrt{I} := \{f \in k[\underline{X}] \mid \exists n \in \mathbb{N}: f^n \in I\}$, das Radikal von I.

Gilt $I = \sqrt{I}$, so heißt I Radikalideal.

Theorem 4. (Hilbert'scher Nullstellensatz)
$I(\cdot)$, $V(\cdot)$ induzieren Bijektionen

$$\{\text{Radikalideale in } k[\underline{X}]\} \underset{V(\cdot)}{\overset{I(\cdot)}{\longleftrightarrow}} \{\text{affine Varietäten im } \mathbb{A}^n\}$$

Korollar 5. Maximale Ideale von $k[\underline{X}]$ entsprechen abgeschlossenen Punkten.

$$m_a := I(\{a\}) = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n); \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$$

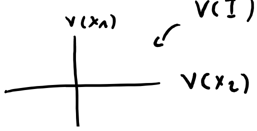
Lemma 6. Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

$$I \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}] \Leftrightarrow Z = V(I) \text{ ist irreduzibel als topologischer Raum.}$$

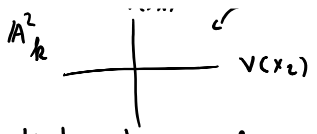
Irreduzible Räume sind zusammenhängend.
$Y \subseteq X$ irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

Korollar 9. Jede affine Varietät ist eine endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten.

Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$ $\qquad \mathbb{A}^2_k$



Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$



Koordinatenachsen, zerlege in irred. Komponenten.

05

Freitag, 20. April 2018 14:57

Def. 11. Für eine affine Varietät X heißt $A(X) := A_X := k[\underline{X}]/I(X)$ der Koordinatenring von X.

("Morphismen $X \longrightarrow \mathbb{A}^1$")

$A(X)$ ist eine reduzierte ($\sqrt{0} = 0$) endl. erz. k-Algebra.

$A(X)$ ist Integritätsring $\Leftrightarrow$ X ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I(X) \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}]$.

Def. 12. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Ein Morphismus $X \xrightarrow{\phi} Y$ von Varietäten besteht aus einem m-Tupel $\phi = (f_1, -, f_m) \in A(X)^m$

mit $\phi(P) := (f_1(P), -, f_m(P)) \in Y \quad \forall P \in X$.

Lemma 13. Morphismen von Varietäten sind stetig bzgl. der Zariski-Topologie.

Beweis.

$$\phi^{-1}(\underset{A(Y)}{D(f)}) = D(\underbrace{f \circ \phi}_{\in A(X)})$$

$\blacksquare$

Def. 14 $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$. Dann ist das kartesische Produkt $X \times Y \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ wieder eine affine Varietät, das Produkt von X, Y.

Achtung: $X \times Y$ trägt nicht die Produkttopologie

Beweis. (14)

$$X = V(f_1, -, f_n), \quad Y = V(g_1, -, g_m) \Rightarrow X \times Y = V(f_1, -, f_n, g_1, -, g_m)$$

$\blacksquare$

Theorem 15. Der Funktor $X \longmapsto A(X)$ induziert eine Kategorienäquivalenz von

$$\{\text{affine Varietäten} / k\}^{op} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{reduzierte endlich erz. } k\text{-Algebren}\}$$

$$(X \xrightarrow{\phi} Y) \longmapsto A(Y) \xrightarrow{\phi^*} A(X)$$

$$f + I(Y) \mapsto f \circ \phi + I(X)$$

Der quasiinverse Funktor ordnet R die Menge $\operatorname{Specm}(R)$ zu, $k[\underline{X}] \rightarrow R$ induziert $\operatorname{Specm}(R) \longrightarrow \operatorname{Specm} k[\underline{X}] = \mathbb{A}^n_k$

Alternativ können wir den Funktor $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(-, k)$ benutzen, da $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(R, k) \cong \operatorname{Specm} R$

$$f \longmapsto \ker f$$

($k \subseteq R/m$ ist endlich, d.h. $R/m = k$, da $k = \bar{k}$)

II. Funktoren

Yoneda-Lemma. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist der kontravariante Funktor

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \underline{\mathrm{Sets}}) = \underline{\mathrm{Sets}}^{\mathcal{C}},$$

$$\begin{array}{ccl} A & \longmapsto & h_A : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi^* \\ B & & h_B : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \end{array}$$

volltreu, d.h.

$$h_A(B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Func}}(h_B, h_A)$$

$$\phi \longmapsto \left(\phi^* : h_B(C) \longrightarrow h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}} \quad \text{(nat. Trafos)}$$

$$\eta_B(\mathrm{id}_B) \longleftarrow \left(\eta_C : h_B(C) \longrightarrow h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}}$$

Mit anderen Worten: $A \in \mathcal{C}$ ist genauso gut wie der Funktor h_A.

Funktoren der Form h_A heißen **darstellbar**.

Bsp. 1. $\mathcal{C}$: Kategorie endl. erz. reduzierter k-Algebren.

(i) $\mathbb{A}^n(\,) : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto R^n$ wird dargestellt von $k[X_1, \dots, X_n]$

da $R^n = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(k[\underline{X}], R)$

(ii) $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$ seien darstellbar. Dann ist der Produktfunktor

$F \times G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto F(R) \times G(R)$ darstellbar.

$$F = h_A,\ G = h_B,\ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow F(R) \times G(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(A, R) \times \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(B, R)$$

d.h. $F \times G = h_{A \otimes_k B}$ $\qquad = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(A \otimes_k B, R)$

II. Algebraische Gruppen: Grundlagen

1. Affine algebraische Gruppen. $k = \bar{k}$

Def. + Satz 1.

(i) Eine affine (lineare) algebraische Gruppe $/_k$ ist eine affine Varietät G über k zusammen mit Morphismen

$$\mu : G \times G \longrightarrow G \quad (\text{Multiplikation})$$

$$\iota : G \longrightarrow G \quad (\text{Inversion})$$

$$\varepsilon : \mathbb{A}^0_k \longrightarrow G \quad (\text{neutrales Element})$$

so dass die Gruppenaxiome gelten:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd} \qquad (\text{Assoziativität})$$

$$\begin{tikzcd}
G \times \mathbb{A}^0 \arrow[r, "\mathrm{id} \times \varepsilon"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{A}^0 \times G \arrow[l, "\varepsilon \times \mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\
 & G &
\end{tikzcd} \qquad (\text{neutrales Element})$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, \iota)"] \arrow[d, "\text{konst.}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, phantom, "///"] & G \arrow[l, "(\iota, \mathrm{id})"'] \arrow[d, "\text{konst.}"] \\
\mathbb{A}^0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & G & \mathbb{A}^0 \arrow[l, "\varepsilon"]
\end{tikzcd} \qquad (\text{Inverses})$$

Morphismen in der Kategorie (affiner) alg. Gruppen: Morphismen von Varietäten, die obige Strukturen respektieren.

(ii) Die Kategorie affiner algebraischer Gruppen ist (anti-)äquivalent zu folgenden Kategorien:

a) Objekte: kommutative Hopf-k-Algebren, d.h. reduzierte, kommutative, endl. erz. k-Algebren A

zusammen mit Morphismen

- $\Delta : A \longrightarrow A \otimes_k A$ (Komultiplikation)
- $\iota : A \longrightarrow A$ (Koinversion)
- $\varepsilon : A \longrightarrow k$ (Ko-Einheit) so dass:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_k A \otimes_k A & A \otimes A \arrow[l, "\Delta \otimes id"'] \\
A \otimes A \arrow[u, "id \otimes \Delta"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes k & A \otimes A \arrow[l, "id \otimes \varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon \otimes id"] & k \otimes A \\
& A \arrow[ul] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\hat{=}$ Inklusion zweite Komp.

(Komultiplikation) (Koeinheit)

$$\begin{tikzcd}
A & A \otimes A \arrow[l, "(\iota, id)"'] \arrow[r, "(id, \iota)"] & A \\
k \arrow[u] & A \arrow[l, "\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[u, "\Delta"] & k \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Strukturmorph. → ← Strukturmorphismus

(Koinversion)

Morphismen: k-Algebren, kompatibel mit Zusatzstrukturen.

b) Objekte: Darstellbare Funktoren

$\mathcal{C} :=$ Kategorie red. endl. erz. k-Algebren $\longrightarrow$ $\underline{\mathrm{Grp}}$

Morphismen: Natürliche Transformationen.

Beweis.
(i) $\Longleftrightarrow$ (a): Thm. I.1.15 $\Rightarrow$ $G \longmapsto A(G)$ definiert (anti-)-Kategorienäquivalenz,

beachte $A(V \times W) = A(V) \otimes_k A(W)$, so dass die Diagramme

aus (a) denen aus (i) entsprechen.

(a) $\Longleftrightarrow$ (b): $A \longmapsto \mathrm{Hom}_k(A, -)$ induziert Kategorienäquivalenz nach Yoneda-Lemma:

Die Diagramme in (a) implizieren, dass die k_A Werte in Gruppen annehmen! ▨

Die Beschreibung (ii)(b) führt zu dem allgemeineren Begriff des (affinen) Gruppenschemas als Funktor

$$\begin{tikzcd}
k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \underline{\mathrm{Grp}} \arrow[d, "\text{Vergissfkt.}"] \\
& \underline{\mathrm{Set}}
\end{tikzcd}$$

so dass der induzierte Funktor durch eine (endl. erz.) k-Algebra darstellbar ist.

(jetzt kann k ein beliebiger Körper / Ring / Schema sein)

Beispiele 2.

1) $\mathbb{G}_a := \mathbb{A}^1$ ("additive Gruppe")

(i) $\mu(x,y) := x+y$, $\iota(x) = -x$, $\varepsilon(*) = 0$.

(a) $A = k[X]$, $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, $\iota(X) = -X$, $\varepsilon(X) = 0$

(b) $\mathbb{G}_a(R) = (R,+) = \mathrm{Hom}_k(k[X], R)$

2) $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = V(XY-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ ("multiplikative Gruppe")

(i) $\mu(x,y) = xy$, $\iota(x) = x^{-1}$, $\varepsilon(*) = 1$

(a) $A = k[X, X^{-1}]$, $\Delta(X) = X \otimes X$, $\iota(X) = X^{-1}$, $\varepsilon(X) = 1$

(b) $\mathbb{G}_m(R) = (R^\times, \cdot) = \mathrm{Hom}_k(k[X,X^{-1}], R)$

3) $\mu_n \ (\subseteq \mathbb{G}_m) = V(X^n - 1) \subseteq \mathbb{A}^1$ (i.A. <u>nicht</u> irreduzibel / zshgd.)

4) GL_n

(i) $GL_n(k) \subseteq M_n(k) = \mathbb{A}^{n^2}$

(a) $A = k[X_{ij}, \underbrace{\det(X_{ij})^{-1}}_{=:d}]$, $\Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}$, $\Delta(d) = d \otimes d$

$\iota(d) = \det(X_{ij})$, $\iota(X_{ij}) = d \cdot \mathrm{Adj}(X_{ij})$

$\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$, $\varepsilon(d) = 1$.

(b) $R \longmapsto GL_n(R)$

5) $SL_n = V(\det - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$

6) V endl.-dim. k-VR

(b) $R \longmapsto (V \otimes_k R, +)$

7) $GL(V)$ (V wie in 6) (b): $R \longmapsto GL(V \otimes_k R)$

8) Morphismen: $\lambda \in k^\times$, $n \in \mathbb{Z}$: $\mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a$, $x \longmapsto \lambda x$

$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$, $x \longmapsto x^n$

$GL_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m$

2. Untergruppen

Def. 1. Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ ist eine abgeschlossene Untervarietät, die zugleich eine Untergruppe ist. H besitzt (via Einschränkung der Multiplikation- / Inversen- / "Neutrales Element" - Abbildung) eine eindeutige Struktur als algebraische Gruppe, so dass die Inklusion $H \hookrightarrow G$ ein Morphismus alg. Grp. ist.

Bsp. 2. Abgeschlossene UG von GL_n

- SL_n $(\det = 1)$
- D_n Diagonalmatrizen $(X_{ij} = 0 \ \forall i \neq j)$
- B_n obere Dreiecksmatrizen $(X_{ij} = 0, \ i > j)$
- U_n: unipotente Matrizen
- O_n / Sp_{2n}: Matrizen A mit $A^T J A$ für $J = \left(E_n \ O_n \ \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} Sp_{2n} \right)$
- $SO_n = O_n \cap SL_n$

Proposition 3. Sei G eine algebraische Gruppe.

(i) Es gibt genau eine irreduzible Komponente $G^\circ \subseteq G$, die das neutrale Elt. e enthält

(ii) G° ist eine normale abg. Untergruppe von endlichem Index.

(iii) G° ist die einzige Zusammenhangskomponente, die e enthält.

(iv) Jede abg. Untergruppe von G von endlichem Index umfasst G°.

(Eine alg. Grp. ist genau dann zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist.)

Beweis.

(i) Seien X, Y irred. Komponenten (insb. abg.), die e enthalten.

$\underset{\text{AlgGeo}}{\Longrightarrow}$ $X \times Y$ irreduzible Varietät (Springer Thm. 1.5.4 $\leftrightarrow$ A, B integre k-Alg. $\Rightarrow$ $A \otimes_k B$ integer)

$\underset{\mu \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $X \cdot Y = \mu(X \times Y)$ irreduzibel.

$\Longrightarrow$ $\overline{X \cdot Y}$ irreduzibel $\Rightarrow$ (i) $X = \overline{XY} = Y$ und X ist abg. unter Multiplikation.

$\overline{X \cdot Y} \supseteq X, Y$ irreduzible Komponenten

Da ι Homöomorphismus, ist $e \in X^{-1}$ ebenfalls eine irreduzible Kompomente, d.h. $X = X^{-1}$

$\Rightarrow$ X abg. Untergruppe.

Analog folgt: $gXg^{-1} = X \quad \forall g \in G$, d.h. $X = G^\circ$ ist normal

Die Nebenklassen gX sind die Komponenten von G ($g \in Y$ bel. Komp.: $e \in g^{-1}Y \Rightarrow Y = gX$)

Da es in Varietäten nur endlich viele irreduzible Komponenten gibt folgt (ii).
Darüberhinaus sind alle irreduziblen Komponenten disjunkt.
Da Zusammenhangskomponenten Vereinigungen irred. Komponenten sind, müssen irred. und zsmh. Komponenten übereinstimmen. $\Rightarrow$ (iii).

(iv) Sei $H \subseteq G$ abg. von endlichem Index. $\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ abg. von endlichem Index.
$\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ ist offen abgeschlossen $\underset{G^\circ \text{ zsmhgd.}}{\Rightarrow}$ $H^\circ = G^\circ$ $\Rightarrow$ (iv).

gilt in top. Grp.

$\blacksquare$

G° heißt die Zusammenhangskomponente der 1.

27.04.18

Theorem 4. (Chevalley)
Sei $X \xrightarrow{\phi} Y$ ein Morphismus von (quasi-projektiven oder affinen) Varietäten. Dann existiert $\emptyset \neq U \subseteq \phi(X)$ mit $U \subseteq \overline{\phi(X)}$ offen.

Beweis. T. A. Springer, Theorem 1.9.5.

$\blacksquare$

Lemma 5. (i) Ist $H \subseteq G$ eine (abstrakte) Untergruppe, so ist $\overline{H} \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und damit selbst eine algebraische Gruppe.
(ii) Ist $G \xrightarrow{\phi} H$ ein Morphismus algebraischer Gruppen, so sind $\ker\phi$, $\operatorname{im}\phi$ abgeschlossene Untergruppen.

Beweis.
(i) Die Multiplikation mit $g \in G$ (von links oder rechts) induziert einen Isomorphismus (von Varietäten) $G \to G$. $\Rightarrow$ $g\overline{H}$ abgeschlossen und $g\overline{H} \supseteq gH$ $\Rightarrow$ $g\overline{H} \supseteq \overline{gH}$.
und $g\overline{H} = \overline{gH}$ (überlegen!)
Analog: $\overline{H}g = \overline{Hg}$. $\forall g \in G$.

1.) Beh.: $H\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Sei $h \in H$. $\Rightarrow$ $\overline{H}h = \underbrace{\overline{Hh}}_{=H} \subseteq \overline{H}$ ✓

2.) Beh.: $\overline{H}\,\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Sei $h \in \overline{H}$. $\underset{1.)}{\Rightarrow}$ $Hh \subseteq \overline{H}$. $\Rightarrow$ $\overline{H}h = \overline{Hh} \subseteq \overline{H}$ ✓

3.) $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$, da die Inversion $\iota: G \to G$ ein Isomorphismus von Varietäten ist.

2.), 3.) $\Rightarrow$ $\overline{H}$ ist Untergruppe, abgeschlossen klar.

(ii) $\ker\phi$ ist offensichtlich abgeschlossene Untergruppe (denn $\ker\phi = \phi^{-1}(\{e\})$ und $\{e\} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} H$ abgeschlossen; Punkte sind immer abgeschlossen in algebraischen Gruppen!)

Sogar in allgemeinen (affinen) Varietäten gemäß Hilberts Nullstellensatz

Nach Chevalley existiert $\emptyset \neq U \subseteq \phi(G)$ mit $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{\phi(G)}$
$\Rightarrow \phi(G) = \bigcup_{h \in \phi(G)} hU \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{\phi(G)}$. Die Behauptung folgt mit "$G = \phi(G)$", "$UV = U = V = \phi(G)$" aus dem Folgenden Lemma.

$\blacksquare$

Lemma 6. $U, V \subseteq G$ dicht und offen $\Rightarrow UV = G$.

Beweis. $U \subseteq G$ dicht, offen.

$$\underset{\substack{G = \coprod_{\text{endl.}} \underbrace{gG^\circ}_{\text{offen, abg.}} \\ \text{Prop. 3}}}{\Longrightarrow} \quad U \cap G^\circ \subseteq G^\circ \text{ dicht und } \emptyset \neq U \cap G^\circ \quad (\text{da } G^\circ \underset{\text{offen}}{\subseteq} G \text{ mit } G^\circ \neq \emptyset)$$

Also o.E. $G = G^\circ$ irreduzibel.

$g \in G$ beliebig $\Rightarrow gV^{-1}, U \subseteq G$ offen + dicht $\underset{G \text{ irreduzibel}}{\Longrightarrow} gV^{-1} \cap U \neq \emptyset$, d.h. $g \in UV$.
$\Rightarrow UV = G$. ■

Bemerkung. Algebraische Gruppen sind i.A. keine topologische Gruppen!
$G \times G \xrightarrow{\mu} G$ ist zwar stetig, aber bezüglich der Zariski-Topologie auf $G \times G$
($\neq$ Produkttopologie)

3. Einbettungen in GL_n

Sei G eine endliche Gruppe und $k[G]$ die zugehörige Gruppenalgebra. Die reguläre Darstellung (d.h. G operiert durch Multiplikation auf $k[G]$) induziert eine Abbildung

$$G \hookrightarrow GL(k[G]), \quad \text{die injektiv ist.}$$

Da das Bild endlich ist, ist es Zariski-abgeschlossen. Insbesondere ist jede endliche Gruppe eine algebraische Gruppe nach Lemma 2.5 und Def. 2.1.

<u>Idee</u>: Für affine algebraische Gruppe $G \neq 1$ ersetze $k[G]$ durch den Koordinatenring $A(G)$.

<u>Problem</u>: Im Allgemeinen ist $\dim_k A(G) = \infty$.

<u>Lösung</u>: Finde <u>endlich-dimensionalen</u> G-invarianten Teilraum V von $A(G)$, der hinreichend groß ist, dass $G \hookrightarrow GL(V)$ injektiv ist.

Für $g \in G$, betrachte den Automorphismus $r_g : G \to G$, $x \mapsto x \cdot g$, $\rho(g) = (r_g)^* : A(G) \to A(G)$ ist k-Algebren-Automorphismus.

Wir erhalten $\rho : G \to GL(A(G))$, $g \mapsto \rho(g)$ (Gruppenhomomorphismus bzw. Darstellung) indem wir $A(G)$ als k-VR auffassen.

Lemma 1. Sei $V \subseteq \mathcal{A}(G)$ ein k-Untervektorraum.

(i) V ist G-invariant (d.h. $\rho(g)V = (r_g)^*(V) \subseteq V.\ \forall g \in G.$)
$$\iff \Delta(V) = V \otimes_k \mathcal{A}(G) \qquad (\Delta: \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G) \otimes_k \mathcal{A}(G) \text{ Komultiplikation})$$

(ii) Gelte zusätzlich $\dim_k V < \infty$.

Dann existiert ein endlich-dimensionaler G-invarianter k-UVR $W \subseteq \mathcal{A}(G)$ mit $V \subseteq W$.

Insbesondere gilt:
$$\mathcal{A}(G) = \bigcup_{\substack{W \subseteq \mathcal{A}(G) \text{ UVR}, \\ \dim_k W < \infty \\ W\ G\text{-invariant}}} W$$

Beweis.

(i) "$\Leftarrow$": Zu $f \in V$ wähle $f_i \in V$, $g_i \in \mathcal{A}(G)$ so dass
$$\mu^*(f) = \Delta(f) = \sum_{i=1}^r f_i \otimes g_i$$

Ferner
$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\Delta(f) = f \circ \mu"'] & G \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\ & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$
$(\mu^*(f) = f \circ \mu)$

$$\Rightarrow \left((r_g^*)(f)\right)(h) = f(hg)$$
$$= f \circ \mu(h,g) = \Delta(f)(h,g)$$
$$= \sum_{i=1}^r f_i(h) \cdot g_i(g) \quad \forall h \in G$$

d.h. $\rho(g)(f)(\cdot) = \sum_{i=1}^r \underbrace{g_i(g)}_{\in k} \cdot \underbrace{f_i(\cdot)}_{\in V} \in V.$

"$\Rightarrow$": Sei $(f_i, i \in I)$ eine Basis von V und $(g_j, j \in J)$ s.d. $(f_i, g_j, i \in I, j \in J)$ eine k-Basis von $\mathcal{A}(G)$ ist. Für $f \in V$ beliebig existieren $u_i, v_j \in \mathcal{A}(G)$ mit
$$\Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i + \sum_{j \in J} g_j \otimes v_j$$

$\underset{\text{s. oben}}{\Rightarrow}$ $\underbrace{\rho(g)(f)(\cdot)}_{\text{d.h. } \rho(g)(f) \text{ als Funktion } G \to \mathbb{A}^1} = \sum_{i \in I} f_i(\cdot) \cdot u_i(g) + \sum_{j \in J} g_j(\cdot) \cdot v_j(g) \in V$

Nach Voraussetzung, da V G-invariant

$\Rightarrow v_j(g) = 0 \ \forall g \in G \Rightarrow v_j \equiv 0 \Rightarrow \Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i \in V \otimes_k \mathcal{A}(G).$

(ii) o.E. $\dim_k V = 1$, d.h. $V = \langle f \rangle_k \Rightarrow \exists f_i, g_i \in \mathcal{A}(G)$: $\Delta(f) = \sum_{i=1}^r f_i \otimes g_i$

Setze $W' := \langle f_1, \dots, f_r \rangle_k \underset{(i)}{\Rightarrow} \rho(g)(f) \in W'$

Setze nun $W := \langle \rho(g)(f) \mid g \in G \rangle \subseteq W' \Rightarrow W$ ist endlich-dimensional.

$f \in W$, da $f = \rho(1_G)(f) \Rightarrow V \subseteq W$; $\rho(g)(\rho(h)(f)) = \rho(gh)(f) \in W \Rightarrow W$ ist G-invariant. ▨

Bemerkung 2. Ersetzt man $G \times G \xrightarrow{\mu} G$ durch eine Gruppenaktion (Morphismus von Varietäten) $G \times X \xrightarrow{\theta} X$ von G auf einer Varietät X, so erhält man $G \longrightarrow GL(A(X))$ für die man analoge Aussagen wie in Lemma 1 für $V \subseteq A(X)$ zeigen kann $(\Delta \longleftrightarrow \theta^*)$

Theorem 3. Jede affine algebraische Gruppe G lässt sich abgeschlossen in GL_n, für $n \in \mathbb{N}$ geeignet, einbetten.

Beweis. Sei $A(G) = k[g_1, \dots, g_r]$ als k-Algebra und $V = \langle g_1, \dots, g_r \rangle_k$ als k-VR.

$\underset{\text{Lemma 1 (ii)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n$ k-Lin. unabhängige k-Algebren-Erzeuger von $A(G)$, s.d. $W = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_k$ G-invariant ist. (und $V \subseteq W$).

$\underset{\text{Lemma 1 (i)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, a_{ij} \in A(G)$ mit $\Delta(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \otimes a_{ij}$, $1 \leq i \leq n$ $\qquad (1)$

$\underset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow}$ $\rho(g)(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \cdot a_{ij}(g)$, $1 \leq i \leq n$, $g \in G$; d.h. $(a_{ij}(g))$ ist Darstellungsmatrix von $\rho(g)$ bzgl. $f_1, \dots, f_n$.

Wir erhalten einen Morphismus

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[ddr, dashed, "\varphi"'] & \mathbb{A}^{n^2}, \quad g \longmapsto (a_{ij}(g)) \\ & \cup \\ & GL_n \end{tikzcd}$$

φ Gruppenhomomorphismus nach Konstruktion

(landet in GL_n, da $\rho(g)$ Automorphismen sind)

$\Longrightarrow$ $\varphi^* : A(GL_n) \longrightarrow A(G)$ schickt $X_{ij} \longmapsto a_{ij}$

$\underset{\text{s. (1)}}{\Longrightarrow}$ $f_i(g) = \rho(g)(f_i)(1_G) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G)\, a_{ij}(g) \quad \forall g \in G$

d.h. $f_i = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G) \cdot a_{ij}$ $\underset{\substack{f_i \text{ erzeugen} \\ A(G)}}{\Longrightarrow}$ φ^* ist surjektiv

$\Longrightarrow$ $G \longrightarrow GL_n$ ist abgeschlossene Einbettung (denn $I := \ker \varphi^*$, $X' = V(I) \subseteq GL_n$
$\Longrightarrow A(X') \cong A(G) \underset{\text{Kat.-äquiv.}}{\Longrightarrow} X' \cong G$ $\blacksquare$

Korollar 4. G affine, algebraische Gruppe, $H \leq G$ abgeschlossene Untergruppe. Dann existiert ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum W mit UVR W_H sowie eine abgeschlossene Einbettung $G \hookrightarrow GL(W)$ mit $H = \mathrm{Stab}_G(W_H)$.

Beweis. $I_H := \{ f \in A(G) \mid f|_H = 0 \}$ ist ein Ideal.

Im obigen Beweis von Theorem 3 o.E. $f_1, \dots, f_r$ $(r \geq n)$ erzeugen das Ideal I_H.

$W_H := W \cap I_H$. Dann gilt:

$$g \in H \Leftrightarrow hg \in H \ \forall h \in H \Leftrightarrow r_g^*(I_H) \subseteq I_H$$

$$\Leftrightarrow r_g^*(W_H) \subseteq W_H$$

da $W_H = W \cap I_H$ und W ohnehin G-invariant ist. ▨

02.05.18

Lemma 5. (Chevalley) Man kann erreichen, dass $\dim_k W_H = 1$ ist.

Beweis.

Starte mit Einbettung $G \hookrightarrow GL(W)$ aus Korollar 4. $d := \dim_k W_H$.

$L := \Lambda^d W_H \subseteq \Lambda^d W$; $\dim_k L = \binom{d}{d} = 1$. $\quad \rho : G \to GL(\Lambda^d W)$

$G \curvearrowright \Lambda^d W$ via $g(w_1 \wedge \dots \wedge w_d) = g(w_1) \wedge \dots \wedge g(w_d)$.

Behauptung: $H = \mathrm{Stab}_G^{\rho}(L)$

"$\subseteq$": klar, da H W_h invariant lässt bzgl. der ursprünglichen Wirkung $G \curvearrowright W$.

"$\supseteq$": Nun gelte $g(L) = L$ bzgl. ρ.

$$\underbrace{e_1, \dots, e_m, \overbrace{e_{m+1}, \dots, e_d}^{\text{Basis } W_H \cap gW_H}}_{W_H \text{ Basis}}, \underbrace{e_{d+1}, \dots, e_{d+m}}, \dots, e_n$$

sei Basis von W. (Basis ergänzen ...)

$e_{m+1}, \dots, e_{d+m}$: Basis gW_H

z.z.: $m = \operatorname{codim}_{W_H} W_H \cap gW_H \overset{!}{=} 0$ (d.h. $gW_H = W_H$ bzw. $g \in \operatorname{Stab}_G(W_H) = H$)

IA: $m \neq 0 \underset{\text{L.A.}}{\Rightarrow} \underbrace{e_1 \wedge \dots \wedge e_d}_{\in L}, \underbrace{e_{m+1} \wedge \dots \wedge e_{m+d}}_{g(e_1 \wedge \dots \wedge e_d) \in L \text{ nach Vorauss. bis auf Skalar}}$ sind l.u. in $\Lambda^d W$.

$G \to GL(\Lambda^d W)$ Einbettung: Übung. $\quad$ ↯ da $\dim_k L = 1$.

$\blacksquare$

Proposition 6. Sei $H \trianglelefteq_{\text{abg}} G$ ein abg. Normalteiler. Dann existiert ein endl. dim. VR W und ein Morphismus $\rho: G \to GL(W)$ algebraischer Gruppen mit $\ker \rho = H$.

Beweis. Starte mit Darstellung $\phi: G \to GL(V)$, bei der $H = \operatorname{Stab}_G^+(\langle v \rangle)$ für ein $v \in V$ wie aus Lemma 5.

$\Rightarrow$ v ist gemeinsamer Eigenvektor $\forall h \in H$. $V_H := \langle w \mid w \text{ ist EV } \forall h \in H \rangle \subseteq V$

$h(v) = \chi(h)\, v$ für $\chi(h) \in k^\times$ (h invertierbar) $\quad$ ($\chi: H \to \mathbb{G}_m$ ist Charakter)

Da $H \trianglelefteq G$, gilt für alle $g \in G$:

$$hgv = g(\underbrace{g^{-1}hg}_{\in H})v = \chi(g^{-1}hg)\, gv \quad \forall h \in H$$

$\Rightarrow$ $gv \in V_H$, d.h. V_H ist G-Invariant.

ŒE: $V = V_H$ (sonst ersetzen) d.h.

$$V = \bigoplus_{i=1}^r V_i, \quad V_i \text{ gemeinsame Eigenräume für } H.$$

$$W := \prod_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i) \subseteq \operatorname{End}(V)$$ Unterraum derjenigen Endomorphismen, die jedes V_i invariant/stabil lassen.

$G \curvearrowright \operatorname{End}(V)$ via: $g(\lambda) := \phi(g) \circ \lambda \circ \phi(g)^{-1}$ und W ist diesbezüglich G-invariant:

$V_i \xrightarrow{\phi(g)^{-1}} \phi(g)^{-1} V_i \xrightarrow{\lambda} \phi(g)^{-1} V_i \xrightarrow{\phi(g)} V_i$, d.h. $g(\lambda) \in W$

da mit V_i auch $\phi(g)^{-1} V_i$ ein gemeinsamer Eigenraum für H ist

Wir erhalten $\rho : G \to GL(W)$ Morphismus alg. Grp.

Beh.: $H = \ker \rho$

"$\subseteq$": $\rho(h)(\lambda) = \phi(h) \circ \lambda \circ \phi(h)^{-1} = \lambda$, da $\lambda = \Sigma \lambda_i$, $\lambda_i \in End(W_i)$

$$\phi(h) \circ \lambda \circ \phi(h)^{-1} v_i = \chi(h)\chi(h)^{-1} \lambda_i(v_i) = \lambda_i(v_i)$$

"$\supseteq$": $g \in \ker \rho \underset{\text{Alg. } \rho}{\Longrightarrow} \phi(g) \in \text{Zentrum}(W) = \prod_i \underbrace{\text{Zentrum}(End(V_i))}_{= k \cdot id_{V_i}}$

$\Rightarrow \phi(g) v \in k^\times v \to g \in Stab_G(\langle v \rangle) = H$. ▨

III Einschub: Quasiprojektive Varietäten und Dimension

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_k := \frac{k^{n+1} \setminus \{0\}}{k^\times} = \{[a_0 : \ldots : a_n] \mid a_j \in k, \text{ nicht alle } 0\}$$

$$[a_0 : \ldots : a_n] = [b_0 : \ldots : b_n] \iff a_i = \lambda b_i \text{ für ein } \lambda \in k^\times.$$

Def. 1. Teilmengen von $\mathbb{P}^n$ der Form $V(f_1, \ldots, f_n) = \{P \in \mathbb{P}^n_k \mid f_i(P) = 0,\ i = 1 \ldots n\}$ für <u>homogene</u> Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$ heißen projektive Varietäten. Sie bilden die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^n$. Lokal abgeschlossene Teilmengen (Durchschnitte einiger offenen und abgeschlossenen Mengen) heißen quasi-projektive Varietäten.

Bemerkung 2. Die Zariski-offenen Teilmengen $D_+(X_i) = \mathbb{P}^n \setminus V(X_i) = \{P = [x_0 : \ldots : x_n] \mid X_i \neq 0\}$ $0 \leq i \leq n$

bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n$

$$\mathbb{A}^n \longrightarrow D_+(X_i),\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto [x_1 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n]$$

ist ein Homöomorphismus.

Proposition 3.

(i) Die Segre-Einbettung, $N = nm + n + m$

$$S^{n,m}: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N, ([a_0 : \dots : a_n], [b_0 : \dots : b_m]) \longmapsto [a_0b_0 : a_0b_1 : \dots : a_0b_m : a_1b_0 : \dots : a_nb_m]$$

ist injektiv mit abg. Bild.

(lexikografisch geordnet)

(ii) Für quasi-projektive Varietät $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ ist das Produkt $X \times Y$ definiert als $S^{n,m}(X, Y) \subseteq \mathbb{P}^N$.

$X \times Y$ ist quasi-projektiv, und, falls X, Y projektiv ebenfalls projektiv.

Beweis. Hartshorne. ☒

Ab jetzt sind alle Varietäten irreduzibel!

Def. 4. (i) Für X affin, heißt $k(X) := \mathrm{Quot}(A(X))$ der Funktionenkörper von X.
wtf., da X irreduzibel

Für $P \in X$ heißt $\mathcal{O}_{X,P} := A(X)_{m_P}$ (Lokalisierung bei m_P)

der lokale Ring in P.

Es gilt: $A(X) = \bigcap_P \mathcal{O}_{X,P} \quad (\subseteq k(X))$

(ii) Für X projektiv betrachte den Ring $\mathcal{R}(X) := \mathcal{R}_X := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; \begin{array}{l} f, g \in k[X_0, \dots, X_n] \text{ homogen} \\ g \notin I(X),\ \deg f = \deg g \end{array} \right\}$

$$\cup\!\!\!\mid$$

$$\underbrace{m_X}_{\text{ist maximales Ideal}} := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{R}(X) \;\middle|\; f \in I(X) \right\}$$

$\Rightarrow k(X) := \mathcal{R}(X)/m_X$ heißt der Funktionenkörper von X, seine Elemente heißen auch rationale Funktionen auf X.

Faktum: Für jedes i gibt es einen Isomorphismus $\quad X^{(i)} := X \cap D_+(X_i)$

$$k(X) \xrightarrow{\cong} k(X^{(i)})$$

$$\frac{f(x_0, \dots, x_n)}{g(x_0, \dots, x_n)} \longmapsto \frac{f(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n)}{g(\;—\;\;"\;\;—\;)}$$

X projektive Varietät $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{X,P} := \left\{ \frac{f}{g} \bmod m_X \in k(X) \mid g(P) \neq 0 \right\}$

und es gilt für $P \in X^{(i)} := X \cap D_+(X_i)$: $\quad \mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X,P}$ und daher $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X^{(j)},P}$ für $P \in X^{(i)} \cap X^{(j)}$.

(iii) X quasi-projektiv ($\Rightarrow \bar{X}$ projektiv)

$$k(X) := k(\bar{X}), \quad \mathcal{O}_{X,P} := \mathcal{O}_{\bar{X},P}$$

Für projektive und affine Varietäten stimmt dies mit den vorherigen Definitionen überein.

(iv) $U \subseteq X$ offen in quasi-proj. Varietät $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(U) := \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}$ $(\subseteq k(X))$ heißt Ring der regulären Funktionen auf U.

<u>Ü:</u> $\mathcal{O}(U) = \bigcap_i \mathcal{O}(U_i)$ für alle offenen Überdeckungen $\{U_i\}_i$ von U.

(v) Ein Morphismus $\varphi: X \longrightarrow Y$ quasi-projektiver Varietäten ist eine stetige Abbildung, so dass

(1) $\forall\, U \subseteq Y$ offen: $\quad f \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))$.

Dies ist eine lokale Bedingung, d.h. erfüllt $\varphi|_{U_i}$ die Bedingung (1) für eine offene Überdeckung $\{U_i\}_i$ von U, so erfüllt φ (1). (Ü).

Bsp 5. (i) Für X, Y affin erhält man denselben Begriff wie vorher: o.E. $Y = \mathbb{A}^n$. Für $f_1, \dots, f_n \in A(X)$ hat $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ die Eigenschaft (1).

$$\begin{array}{ll} X \longrightarrow Y \\ Q \longmapsto P \end{array} \quad \text{induziert} \quad \begin{tikzcd} A(Y) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & A(X) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{Y,P} \arrow[r, "\varphi_Q^*"] & \mathcal{O}_{X,Q} \\ f \arrow[r, mapsto] & f \circ \varphi \end{tikzcd}$$

(ii) X quasi-projektiv, $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ $\Rightarrow$ $U \hookrightarrow X$ ist Morphismus.

Lemma 6. $P \in X$ quasi-projektiv. Dann existiert ein $P \in U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ mit U isomorph (als quasi-proj. Varietät) zu einer affinen Varietät.

Insbesondere: X hat offene, affine Überdeckung.

Beweis. $P \in X^{(i)} \subseteq X$. o.E. $Y = \mathbb{A}^n$
offen in Y, abg. in $\mathbb{A}^n$

$$X^{(i)} \cong D(f) \xleftarrow{\cong} V(xf-1) \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbb{A}^{n+1}$$

Iso quasi-projektiver Varietäten.

Def. 7. Sei X irreduzible, quasi-proj. Varietät.

$$\dim X := \operatorname{trdeg}_k k(X)$$ (Transzendenzgrad), d.h. die maximale Zahl algebraisch unabhängiger Elemente in $k(X)$, heißt Dimension von X.

Für X beliebige quasi-proj. Varietät wird die Dimension von X als das Maximum der Dimensionen seiner irreduziblen Komponenten definiert.

Bsp. 8.
- $\dim \mathbb{A}^n = n$
- $\dim \mathbb{P}^n = n$, da $k(\mathbb{P}^n) \cong k(D_+(X_0)) \cong k(\mathbb{A}^n)$

Theorem 9. Ist X affin, so gilt $\dim X = \dim A(X)$ (Krulldimension)

(max. Länge von Ketten $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subseteq \mathfrak{p}_n$ von Primidealen in $A(X)$, bzw. irred. abg. Teilmengen in X) ☒

Proposition 10. Seien X, Y quasi-projektive Varietäten.

(i) $X \longrightarrow Y$ surjektiver Morphismus $\Rightarrow \dim Y \leq \dim X$.

(ii) X irreduzibel, $Y \subsetneq X$ abgeschlossen $\Rightarrow \dim Y < \dim X$.

(iii) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$

(iv) (Krull's Hauptidealsatz) $X \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbb{A}^n$ irreduzibel, $f \in k[X_1, \dots, X_n] = A(\mathbb{A}^n)$ mit $f(P) = 0$ für ein $P \in X$. $Z \subseteq X \cap V(f)$ irreduzible Komponente.

$$\Rightarrow \dim Z \geq \dim X - 1.$$

IV: Jordan-Zerlegung, diagonalisierbare und unipotente Gruppen

1. Jordan-Zerlegung

Durch Einbettung $G \overset{\varphi}{\hookrightarrow} GL_n$, $k = \bar{k}$ besitzen die Elemente $\varphi(g), g \in G$ eine Jordannormalform und wir können Begriffe wie "halbeinfach", "unipotent" etc. auf Elemente von G übertragen, sodass diese unabhängig von der Wahl von φ sind.

Def. 1. $\dim_k V < \infty$, $g \in \operatorname{End}(V)$ heißt halbeinfach (oder diagonalisierbar), falls V Basis aus Eigenvektoren für g hat. g heißt nilpotent falls $g^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Bemerkung 2. (LA)

(i) g halbeinfach $\Leftrightarrow$ mipo(g) hat paarweise verschiedene Nullstellen

(ii) $W \leq V$ g-invarianter UVR + g halbeinfach $\Rightarrow g|_W$ ist halbeinfach, da mipo$(g|_W)$ | mipo(g)

Proposition 3. (Additive Jordanzerlegung) (k alg. abg.)

Sei $g \in \mathrm{End}_k(V)$, $\dim_k V < \infty$. Dann: $\exists!\ g_s, g_n \in \mathrm{End}(V)$ mit g_s halbeinfach, g_n nilpotent,

sodass $g = g_s + g_n$ und $g_s \circ g_n = g_n \circ g_s$.

Beweis.

$g_s \mathrel{\hat{=}}$ Diagonalmatrix aus JNF, $g_n := g - g_s$. ∎

Bemerkung 4. (i) In obiger Situation existieren $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$ und $g_s = P(g)$, $g_n = Q(g)$.

(ii) Ist $U \leq V$ ein g-invarianter UVR, so ist W auch g_s und g_n-invariant und $(g|_W)_s = g_s|_W$ sowie $(g|_W)_n = g_n|_W$.

Beweis.

(i) $\phi(T) = \det(T \cdot \mathrm{id}_V - g) = \prod (T - \lambda_i)^{n_i}$ (char. Polynom)

$$(V \cong)\ k[T]/\langle \phi(T) \rangle \underset{CRS}{\cong} \bigoplus k[T]/(T-\lambda_i)^{n_i}$$

$\exists\, P \in k[T]: P \equiv \lambda_i \mod (T - \lambda_i)^{n_i} \quad \forall i$

Ist $\phi(0) = 0$, so ist 0 ein Eigenwert von $g \Rightarrow P \equiv 0 \mod T$.

Sei $\phi(0) \neq 0$. $\Rightarrow$ Ändere P durch konstantes Vielfaches von ϕ ab

$\Rightarrow P(0) = 0$. Setze $Q = T - P$.

$\Rightarrow P(g) = g_s$, $Q(g) = g_n$.

(ii) Wegen (i) ist W auch g_s, g_n-invariant. Da $\mathrm{charpol}(g|_W) \mid \Phi$, ist P auch für W eine geeignete Wahl und $(g|_W)_s = P(g|_W) = P(g)|_W = g_s|_W$. ∎

Def 5. $h \in \mathrm{End}_k(V)$ heißt unipotent, falls $h - \mathrm{id}_V$ nilpotent ist. ($\Leftrightarrow$ alle EW $= 1$)

Korollar 6. (Multiplikative Jordanzerlegung)

$g \in GL(V)$, $\dim_k V < \infty$.

(i) $\exists!\ g_s, g_u \in GL(V)$ mit g_s halbeinfach und g_u unipotent s.d. $g = g_s \circ g_u = g_u \circ g_s$

(ii) $\exists\, P, R \in k[T]$ mit $P(0) = R(0) = 0$ und $g_s = P(g)$, $g_u = R(g)$.

(iii) Ist $W \leq V$ g-invarianter UVR, so ist W auch g_s, g_u-invarianter UVR und $(g_s)|_W = (g|_W)_s$ sowie $(g_u)|_W = (g|_W)_u$.

Beweis. (i) EW von $g \neq 0 \Rightarrow$ EW von $g_s \neq 0 \Rightarrow g_s \in GL(V)$. $g_u := id_V - g_s^{-1} \circ g_n$

(ii) z.z.: g_s^{-1} ist Polynom in g_s (damit auch Polynom in g)

$$\text{mipo } g_s = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + \underbrace{a_0}_{\neq 0} \Rightarrow g_s^{-1} = -a_0^{-1}[g_s^{n-1} - \dots - a_1]$$

(iii) wie oben aus (ii). $\blacksquare$

Def. 7. Sei nun V ein möglicherweise ∞-dim. k-VR, $g \in GL(V)$ und gelte

$$(*) \qquad V = \bigcup_{\substack{W \subseteq V \\ \text{endl.-dim. UVR} \\ g(W) \subseteq W}} W$$

Dann heißt g *halbeinfach* (*lokal unipotent*), wenn $g|_W$ halbeinfach (unipotent) $\forall W$ wie oben.

Bsp. 8.
Nach Lemma II.3.1 (ii) erfüllt $V = A(G)$ die Bedingung (*) $[\forall g \in G: r_g^* \in GL(A(G))]$

Korollar 9. Unter der Bedingung (*) für $g \in GL(V)$ gilt:

(i) $\exists!\, g_s, g_u \in GL(V)$ mit g_s halbeinfach, g_u lokal unipotent mit $g = g_s g_u = g_u g_s$

(ii) Analogon zu Korollar 6 (iii)

Beweis.

(i) $(g|_W)_s$, $(g|_W)_u$ verkleben zu g_s, g_u nach Korollar 6 (i), (ii).

(ii) W erfüllt ebenfalls (*). Daher folgt die Behauptung ebenso aus Korollar 6 (ii). $\blacksquare$

Bezeichne $\rho_G : G \hookrightarrow GL(A(G))$ die durch Rechtsmultiplikation induzierte Darstellung.

09.05.18

Theorem 10. Sei G eine affine algebraische Gruppe und $g \in G$.

(i) $\exists!\, g_s, g_u \in G$ mit $g = g_s g_u = g_u g_s$ und $\rho_G(g_s) = \rho_G(g)_s$, $\rho(g_u) = \rho(g)_u$

(ii) Ist $G = GL_n$, so stimmen g_s, g_u mit denen aus Korollar 6 überein.

(iii) Für jede Einbettung $\phi: G \hookrightarrow GL_n$ gilt: $\phi(g_s) = \phi(g)_s$ und $\phi(g_u) = \phi(g)_u$.

Allgemeiner kann man zeigen (Korollar 12), dass (iii) für beliebige Darstellungen $G \xrightarrow{\phi} GL(V)$, $\dim_k V < \infty$ gilt. g heißt halbeinfach (unipotent), falls $g = g_s$ ($g = g_u$).

später

Teil (ii) folgt aus dem folgenden

Lemma 11. Sei $\dim_k V < \infty$

$g \in GL(V)$ ist genau dann halbeinfach (unipotent), wenn $\rho_{GL}(g) \in GL(A(GL(V)))$ das ist.

<u>denn</u>:

$g = g_s g_u$, $\rho_{GL}(g) = \rho_{GL}(g)_s \, \rho_{GL}(g)_u$ sind eindeutig, d.h. $\rho_{GL}(g)_s = \rho_{GL}(g)_s$

und $\rho_{GL}(g)_u = \rho_{GL}(g_u)$, falls Lemma 11 gilt.

Beweis von Lemma 11.

$\operatorname{End}_k(V) \supseteq D(d) = GL(V)$ mit $d : \operatorname{End}(V) \to \mathbb{A}^1$, $f \mapsto \det f$ als Varietäten.

$\left(\overset{\cong}{M_{\dim_k V}(k)}\right)$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
A(\operatorname{End}_k V) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r_g^*"] & A(\operatorname{End}_k V)[\frac{1}{d}] \cong A(GL\,V) \arrow[d, "r_g^* = \rho(g)"] \\
A(\operatorname{End}_k V) \arrow[r, hook] & A(GL\,V)
\end{tikzcd}$$

$r_g : GL(V) \to GL(V)$, $f \mapsto fg$ $\Rightarrow$ $A(\operatorname{End}_k V) \subseteq A(GL\,V)$ ist ein $GL(V)$-invarianter Unterraum bezüglich der Rechtstranslation,

und es gilt: (1) $(r_g^*)(d) = d(g)\,d$, d.h. d ist Eigenvektor für r_g^*.

<u>Beh. 1</u>: Für $f \in A(\operatorname{End}_k V)$ gilt:

f ist EV für r_g^* auf $A(\operatorname{End}_k V)$ $\Longleftrightarrow$ fd^{-m} ist EV. für r_g^* auf $A(GL\,V)$ $\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

<u>denn</u>: "$\Rightarrow$": $fd^{-m} : GL(V) \to \mathbb{A}^1$; $r_g^*(fd^{-m})(x) = f(xg)\, d^{-m}(xg) = f(xg)\, d^{-m}(x)\, d^{-m}(g)$

$$= d^{-m}(g)\left(\underline{r_g^*(f)(x)\, d^{-m}(x)}\right) \qquad (2)$$

$$= c_g f(x)\, d^{-m}(x)$$

$$= c_g\, d^{-m}(g) \; (fd^{-m})(x)$$

"$\Leftarrow$": $m = 0$.

Beh. 2 a) r_g^* h.e. auf $A(GL\,V)$ $\Leftrightarrow$ r_g^* h.e. auf $A(\mathrm{End}_k(V))$

b) r_g^* lokal unipotent. auf $A(GL\,V)$ $\Leftrightarrow$ r_g^* lokal unipotent auf $A(\mathrm{End}_k(V))$

dem: "$\Rightarrow$": Korollar 9.2(ii): etwa $r_g^* = (r_g^*)_s$ auf $A(GL\,V)$

$$\Rightarrow \left((r_g^*)\big|_{A(\mathrm{End}_k V)} \right) = (r_g^*)_s\Big|_{A(\mathrm{End}_k V)} = r_g^*\big|_{A(\mathrm{End}_k V)}$$

für u analog.

"$\Leftarrow$": Sei $W \subseteq A(GL\,V)$ r_g^*-inv., endl.-dim. UVR

$\Rightarrow$ $W' := W \cap A(\mathrm{End}\,V) \subseteq A(\mathrm{End}\,V)$ — " —

und $W \subseteq W'[\frac{1}{d}] = \bigcup_{m \geq 0} \frac{1}{d^m} W' \subseteq A(GL\,V)$

$$\Rightarrow A(GL\,V) = \bigcup_{\substack{m \geq 0 \\ W' \subseteq A(\mathrm{End}\,V) \\ r_g^*\text{-inv,} \\ \text{endl. dim.}}} \frac{1}{d^m} W' \quad \text{und} \quad r_g^*|_W \text{ h.e.} \overset{\text{Beh.1}}{\Longrightarrow} r_g^*|_{d^{-m}W'} \text{ h.e.}$$

$r_g^*|_W$ unipotent ($EW = 1$)

$\Downarrow (1)$

$d(g) = 1$. $\underset{(2)}{\Longrightarrow}$ $r_g^*|_{d^{-m}W}$ unipotent

Beh. 3. $g \in GL(V)$ h.e. (unipotent) $\Leftrightarrow$ r_g^* ist h.e. (unipotent) auf $\mathrm{End}(V)^*$ Dualraum

bzgl. $(r_g^*)(f)(x) := f(xg)$

$\Leftrightarrow$ r_g ist h.e. (unipotent) auf $\mathrm{End}(V)$

(klar, LA)
(Matrix $\to$ Matrix^T)

Beh. 4. r_g^* h.e. (unipotent) auf $\mathrm{End}(V)^*$ $\Leftrightarrow$ r_g^* h.e. (unipotent) auf $A(\mathrm{End}\,V)$

Beweis Behauptung 3: reduziert sich formal auf folgende Übung:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(V) & \xrightarrow{r_-} & \mathrm{End}(\mathrm{End}\,V) \\ \cup\!\mid & /\!/\!/ & \cup\!\mid \\ GL(V) & \xrightarrow[r_-]{} & GL(\mathrm{End}\,V) \\ \Psi & & \\ g & & \end{array}$$

g h.e. (unipotent) $\Leftrightarrow$ r_g h.e. (unipotent)

Beweis zu Beh. 4.: $A(\mathrm{End}_k V) \overset{\text{symm. Algebra}}{\cong} \mathrm{Sym}(\mathrm{End}(V)^*)$ $\left(A(\mathrm{End}_k V) = \{ \mathrm{End}_k V \xrightarrow{\text{Morphismen}} \mathbb{A}^1_k \} \supseteq \mathrm{End}(V)^* \right)$

$$A(\mathrm{End}_k V) = \bigoplus_{m \geq 0} \mathrm{Sym}^m(\mathrm{End}(V)^*) \qquad \mathrm{Sym}(\mathrm{End}(V)^*) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\mathrm{End}(V)^*)^{\otimes m} \Big/ \underbrace{\langle x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in \mathrm{End}(V)^* \rangle}_{\text{zweiseitiges Ideal}}$$

$$\supseteq$$

$\mathrm{End}(V^*)$ ist "Grad $m = 1$"

Dabei stimmen die Operationen von r_j^* auf beiden Seiten übereinstimmen.

(Fortsetzung auf die symmetrische Algebra $\otimes$-Faktorweise)

Also folgt "$\Leftarrow$" aus Korollar 6/9 (iii/ ii)

Für "$\Rightarrow$" nutze: $A \in \mathrm{End}(W)$ h.e. (unipotent) $\Rightarrow$ $A^{\otimes m} \in \mathrm{End}(W^{\otimes m})$ h.e. (unipotent)

für $W = \mathrm{End}(V)^*$

$\blacksquare$

Beweis von Theorem 10.

Betrachte Einbettung

$$\begin{array}{ccc} G & \xhookrightarrow{\phi} & GL(V) \\ \uparrow r_g & /// & \uparrow r_{\phi(g)} \\ G & \xhookrightarrow{\phi} & GL(V) \end{array} \qquad g \in G \text{ beliebig.}$$

$\Rightarrow$ Kategorien-äquivalenz

$$\begin{array}{ccc} A(GL V) & \xrightarrow{\phi^*} & A(G) \\ \downarrow \rho_{GL(V)}(\phi(g)) & /// & \downarrow \rho(g) \\ A(GL V) & \xrightarrow{\phi^*} & A(G) \end{array} \qquad (3)$$

$\phi(g) = \phi(g)_s \, \phi(g)_u$ eindeutige Jordan-Zerlegung (Kor. 6)

Beh.: $\phi(g)_s, \phi(g)_u \in \phi(G)$, dazu: $I := \ker(\phi^*)$.

Für $x \in GL(V)$ gilt:

$$x \in \phi(G) \Leftrightarrow hx \in \phi(G) \ \forall h \in \phi(G) \Leftrightarrow r_x^*(I) \subseteq I \qquad (4)$$

Funktionen, die auf G verschwinden

Insbesondere: $r^*_{\phi(g)}(I) \subseteq I \underset{\text{Kor. 9 (ii)}}{\Longrightarrow} \underbrace{\left(r^*_{\phi(g)}\right)_{s/u}}_{\overset{\text{Lemma 11}}{=} \left(\left(r_{\phi(g)}\right)_{s/u}\right)^*}(I) \subseteq I$

$\underset{(4)}{\Longrightarrow} \quad \phi(g)_{s/u} \in \phi(G)$ ✓

(i) g_s (g_u) sei das eindeutige Element, so dass $\phi(g_{s/u}) = \phi(g)_{s/u}$ gilt.

Für $G = GL(V)$ (und $\phi = id$) folgt (i) aus Lemma 11.

Aus (3), auch für g_s/g_u statt g, folgt:

$\rho_G(g_{s/u})$ ist induziert von $\rho_{GL}(\phi(g_{s/u})) = \rho_{GL}(\phi(g)_{s/u})$

$\rho_G(g)_{s/u}$ — " — $\rho_{GL}(\phi(g))_{s/u}$

wegen der Eindeutigkeit in Korollar 9.

Die Eindeutigkeit folgt, da ρ_G injektiv ist, da $\rho_G : G \to GL(A(G)) \hookrightarrow GL(W)$ injektiv ist nach Beweis von Theorem 3.

(iii) folgt nach Konstruktion, da wegen der Eindeutigkeit in (i) unabhängig von ϕ ist. ▨

Korollar 12. Sei $G \xrightarrow{\psi} H$ ein Morphismus algebraischer Gruppen. Dann gilt: 11.05.18

$\forall g \in G: \quad \psi(g_s) = \psi(g)_s$ und $\psi(g_u) = \psi(g)_u$.

Insbesondere gilt Theorem 10 (iii) für beliebige Darstellungen $G \xrightarrow{\Phi} GL_n$!

Beweis.

Fall 1: ψ surjektiv. $\Rightarrow$ $\psi^* : A(H) \hookrightarrow A(G)$ injektiv und $\psi^*(A(H)) \subseteq A(G)$ ist r_g^*-invariant. (vgl. (3) oben)

Wende dann Korollar 9 (ii) an.

Fall 2: ψ injektiv.

Wähle Einbettung $H \hookrightarrow GL_n$ und wende Theorem 10 (iii) an auf $\underset{[1]}{\phi \circ \psi}$ und $\underset{[2]}{\phi}$.

$$\phi(\psi(g_{s/u})) \underset{[1]}{=} \left((\phi\circ\psi)(g)\right)_{s/u} \underset{[2]}{=} \phi(\psi(g)_{s/u})$$

$$\underset{\phi \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} \quad \psi(g_{s/u}) = \psi(g)_{s/u}.$$

Fall 3: ψ allgemein. $\underbrace{G \xrightarrow{\psi} \operatorname{im}\psi \xrightarrow{i} H}_{\psi}$ faktorisiert in Surjektion + Inklusion, nun verwende Fall 1 + 2. $\blacksquare$

2. Kommutatoren

Proposition 1. $H, K \underset{\text{abg.}}{\leq} G$ seien abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppen.

Dann:

$$[H,K] := \langle \underbrace{[h,k]}_{= hkh^{-1}k^{-1}} \mid h \in H, k \in K \rangle \leq G \quad \text{ist ein zusammenhängender,}$$

abgeschlossener Normalteiler. Es reicht sogar die Annahme "H oder K zshgd."; ← vgl. Beweis.

Borel zeigt sogar (ohne zshgd.), dass $[H,K]$ stets abgeschlossen ist.

Lemma 2. Sei $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ein System irreduzibler Varietäten sowie $(X_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} G)_{\alpha\in\Lambda}$ ein System von Morphismen nach G, s.d. $\forall \alpha \in \Lambda$: $e \in Y_\alpha := \phi_\alpha(X_\alpha)$. Dann gilt:

$$H := \langle Y_\alpha, \alpha \in \Lambda \rangle \leq G \text{ ist zshgd. und abgeschlossen.}$$

Zudem existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ s.d. $H = Y_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \cdots Y_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$.

Beweis von Lemma 2. oE.: $\phi_\alpha^{-1} := \underset{\text{Inversion in } G}{\iota} \circ \phi_\alpha : X_\alpha \to G$ gehört auch zu dem System $\forall \alpha \in \Lambda$.

Für $n \geq 1$, $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Lambda^n$ setze $Y_a := Y_{\alpha_1} \cdots Y_{\alpha_n} \leq G$.

$\Rightarrow Y_a, \overline{Y_a}$ sind irreduzibel (vgl. Bemerkung II Prop. 2.3)

Wähle n, a s.d. $\overline{Y_a}$ maximal ist.

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}\ \forall b \in \Lambda^m: \quad \overline{Y_a} \underset{e \in Y_b}{\subseteq} \overline{Y_a}\cdot\overline{Y_b} \underset{\text{vgl. Bem. nach Lemma II 2.5.}}{\subseteq} \overline{Y_a Y_b} = \overline{Y_{(a,b)}} \underset{\text{max.}}{\subseteq} \overline{Y_a}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Y_a} = \overline{Y_{(a,b)}} \supseteq \overline{Y_b} \qquad \underset{b=a}{\Longrightarrow} \quad \overline{Y_a}\cdot\overline{Y_a} \subseteq \overline{Y_{(a,a)}} = \overline{Y_a} \text{ und } \overline{Y_a}^{-1} \subseteq \overline{Y_a}$$

$$\overline{Y_a}^{-1} = \overline{Y_{a^{-1}}} \text{ mit } Y_{a^{-1}} := Y_{\alpha_1}^{-1} \cdots Y_{\alpha_n}^{-1}$$

Nach Chevalley (Thm. II.2.4) angewandt auf $Y_{\alpha_1} \times \dots \times Y_{\alpha_n} \hookrightarrow G \times \dots \times G \xrightarrow{\text{mult.}} G$

existiert $\emptyset \neq U \subseteq Y_a$ s.d. $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{Y_a}$ (und damit auch dicht, da $\overline{Y_a}$ irreduzibel)

$$\underset{\text{Lemma II 2.6}}{\Longrightarrow} \quad \overline{Y_a} = \underbrace{U \cdot U}_{\subseteq Y_a Y_a} \quad \Longrightarrow \quad \overline{Y_a} = Y_a Y_a = Y_{(a,a)} = H.$$

∎

Beweis von Proposition 1. Betrachte das System von Morphismen $\left\{ \begin{matrix} H \xrightarrow{\phi_k} G \\ h \mapsto [h,k] \end{matrix} \right\}_{k \in K}$.

Man kann die Rollen von H und K austauschen, deswegen reicht <u>H oder K</u> irreduzibel $\underset{\text{Lemma 2}}{\Longrightarrow}$ $[H,K]$ abgeschlossen und zushgd.

$[H,K]$ ist durchin Normalteiler nach allgemeiner Gruppentheorie.

∎

Korollar 3. Ist $(H_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ein System zshgd., abg. Untergruppen, so ist

$\langle H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda \rangle \leq G$ ebenfalls abgeschlossen und zushgd.

Korollar 4. Ist G zushgd., so ist ihre abgeleitete Untergruppe $DG := [G,G] \leq G$ abgeschlossen und zushgd.

Def. 5. (1) Definiere induktiv die abgeleitete Reihe von G: $G \geq DG \geq D^2G \geq \ldots \geq D^nG \geq \ldots$

via $D^0G := G$, $D^nG := D(D^{n-1}G) = [D^{n-1}G, D^{n-1}G]$

$$\Longrightarrow \quad D^{n+1}G \trianglelefteq D^nG.$$

G heißt auflösbar, falls $D^nG = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$

(2) Definiere die absteigende Zentralreihe von G $\quad G \geq \ell^1 G \geq \ell^2 G \geq \ldots \geq \ell^n G \geq \ldots$ induktiv via

$$\ell^0(G) := G, \quad \ell^n G := [G, \ell^{n-1} G]$$

$$\ell^{n+1} G \trianglelefteq \ell^n G \quad \text{(sogar zentral)}$$

G heißt nilpotent, falls $\ell^n G = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 6. (Erinnerung aus der Gruppentheorie)

(i) nilpotent $\Rightarrow$ auflösbar

(ii) G auflösbar / nilpotent $\Rightarrow$ Untergruppen / Faktorgruppen von G auflösbar / nilpotent.

(iii) $N \trianglelefteq G$, N, G/N auflösbar $\Rightarrow$ G auflösbar.

Bsp. 7. B_n ist auflösbar $(DB_n = U_n)$, U_n ist nilpotent.

3. Unipotente Gruppen

Def. 1. $G_s := \{ g \in G \mid g = g_s \}$; $G_u := \{ g \in G \mid g = g_u \}$

Bemerkung 2.

(i) $G_s \cap G_u = 1$ (wg. der Eindeutigkeit in der Zerlegung $g = g_s g_u$)

(ii) $G_u \subseteq G$ ist abgeschlossene Teilmenge. G_s ist nicht notwendigerweise abgeschlossen in G.

(iii) Sei $* \in \{s, u\}$, $g, h \in G_*$ mit $[g,h] = 1$. $\Rightarrow gh,\ g^{-1} \in G_*$

Beweis.

(i) klar in GL_n: EW $= 1$ + diagonalisierbar. ✓

(ii) $G \subseteq GL_n$ abg. Einbettung. Es gilt: $G_u = \{ g \in G \mid \underbrace{(g - \mathbb{1})^n = 0}_{\text{abg. Bedingung}} \} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$

$$G = B_2 = \begin{pmatrix} k^\times & k \\ 0 & k^\times \end{pmatrix} \Rightarrow G_s = \begin{pmatrix} k^\times & 0 \\ 0 & k^\times \end{pmatrix} \text{ \underline{nicht} abg. in } G.$$

(iii) oE: $G = GL_n$

$\underline{* = s}$: g, h $\underbrace{\text{simultan diagonalisierbar}}_{\text{weil sie kommutieren}}$ $\Rightarrow gh, g^{-1}$ auch

$\underline{* = u}$: g, h simultan (oberhalb) $\underbrace{\text{triag'bar}}_{+\text{EW} = 1}$ $\Rightarrow gh, g^{-1}$ auch

Proposition 3. Sei G kommutativ. Dann sind $G_s, G_u \leq G$ abgeschlossene Untergruppen und

$$\mu : G_s \times G_u \longrightarrow G \text{ ist ein Isomorphismus algebraischer Gruppen.}$$

Beweis.
- Untergruppen nach Bemerkung 2 (iii)
- $G_u \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$ nach Bemerkung 2 (ii)

$\underline{\text{o.E.:}}$ $G \subseteq GL(V)$ abg. für V endl.-dim. k-VR, $V = \bigoplus_{\lambda : G_s \to k^\times} V_\lambda$ direkte Summe von Eigenräumen bzgl. G_s.

V_λ ist G-invariant: $g_s(v) = \lambda(g_s) \cdot v \Rightarrow g_s \cdot g \cdot v = g \cdot g_s \cdot v = \lambda(g_s) \cdot g \cdot v$ ✓

Wähle Basen für V_λ s.d. die G-Aktion oberhalb triag'bar ist

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} g & \in & G & \subseteq & B_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ g_s & \in & G_s & \subseteq & D_n \ (= B_n/U_n) \end{array} \quad \text{und } G_s = G \cap D_n \Rightarrow G_s \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} G \to G_s \times G_u \\ g \mapsto (g_s, g_s^{-1} g) \end{array} \quad \underline{\text{Morphismus}} \text{ Invers zu } \mu.$$

☒

Def. 4. G heißt unipotent, falls $G = G_u$.

Bsp. 5. U_n ; $\mathbb{G}_a (\cong U_2)$

Proposition 6. Sei G unipotent, $G \xrightarrow{\phi} GL_n$ ein Morphismus. Dann:

$\exists\, \gamma \in GL_n$: $\gamma \operatorname{im}\phi\, \gamma^{-1} \subseteq U_n$, d.h. "alle unipotenten Gruppen sind bis auf Konjugation in U_n enthalten".

Beweis. Induktion nach n.

$\underline{n=1}$: $(GL_1)_u = 1 = U_n$; Für $m<n$ gelte die Behauptung. Sei $\phi : G \to GL(V)$ mit $\dim_k V = n$.

$\underline{\text{Fall 1}}$: $\exists\, 0 \subsetneq W_1 \subsetneq V$ G-inv. Teilraum. Wähle Komplement W_2: $V = W_1 \oplus W_2$

$$\phi_1 : G \longrightarrow GL(V) \longrightarrow GL(W_1) = GL_{n_1}$$

$$\phi_2 : G \longrightarrow \underset{\underset{W_2}{\cong}}{GL(V/W_1)} = GL_{n_2} \qquad \phi = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \phi_1 & * \\ \hline 0 & \phi_2 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} W_1 \\ V/W_1 \end{array}$$

$n_1, n_2 < n \Rightarrow \exists\, \gamma_i \in GL_{n_i}$: $\gamma_i \operatorname{im}\phi_i\, \gamma_i^{-1} \subseteq U_{n_i}$ (für geeignete Basiswahl)

$\Rightarrow$ $\gamma \operatorname{im}\phi\, \gamma^{-1} \subseteq U_n$ für $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$

$\underline{\text{Fall 2}}$: V irred. G-Darstellung

$tr(\phi(g)) = n \Rightarrow \forall\, h \in G$:

EW $=1$, $\dim_k V = n$

$$tr((\phi(g) - \mathbb{1})\phi(h)) = tr(\phi(gh)) - tr(\phi(h)) = n - n = 0.$$

$\underline{\text{Burnside - Theorem}}$ (Lang, Ch. $\underline{\text{XVII}}$, §3)

$$\operatorname{End}(V) = \langle \phi(G) \rangle_k \quad k\text{-lin. Spann} \Rightarrow \forall x \in \operatorname{End}(V) : tr((\phi(g) - \mathbb{1})x) = 0$$

$k = \bar{k}$

$\Longrightarrow$ d.h. Spur-Paarung nicht ausgeartet

$$\phi(g) - \mathbb{1} = 0, \text{ d.h. } \phi(g) = \mathbb{1}, \text{ bzw. } \operatorname{im}\phi = \underline{1}.$$

$\blacksquare$

Korollar 7. G unipotent $\Rightarrow$ G nilpotent ($\Rightarrow$ G auflösbar)

Beweis. U_n ist nilpotent.

$\blacksquare$

Korollar 8. Jede irreduzible Darstellung einer unipotenten Gruppe ist trivial.

Beweis. aus Beweis von Proposition 6.

$\blacksquare$

4. Diagonalisierbare Gruppen und Tori.

Def. 1. Sei G eine algebraische Gruppe.

(i) G heißt diagonalisierbar, falls G isomorph ist zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $D_n \cong \mathbb{G}_m^n$ $(n \geq 0)$

(ii) G heißt Torus, falls $G \cong D_n$, $n \geq 0$

(iii) Die Charaktergruppe von G ist

$$\begin{tikzcd} X^*(G) := \mathrm{Hom}_{AlgGrp}(G, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "1:1", equal] & \mathrm{Hom}_{k\text{-Hopf}}(k[T^{\pm 1}], A(G)) \arrow[d, "\wr"] \\ & \{\chi \in A(G)^\times \mid \Delta(\chi) = \chi \otimes \chi, \ \varepsilon(\chi) = 1\} \end{tikzcd}$$

$g \mapsto g(T)$

Proposition 2. (Dedekind). $X^*(G) \subseteq A(G)$ ist linear unabhängig.

Beweis. $\underline{A:}$ $\exists n \geq 2$ (oE minimal) mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i = 0$. $\lambda_i \neq 0$, $\chi_i \neq \chi_j$ für $i \neq j$

$$\Rightarrow \forall g, h \in G \quad \begin{cases} \sum_i \lambda_i \chi_i(gh) = 0 \\ \sum_i \lambda_i \chi_i(g) \chi_n(h) = 0 \end{cases} \overset{\text{Diff.}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\chi_i(h) - \chi_n(h)) \chi_i = 0. \ \forall h \in G$$

$$\underset{n \text{ minimal}}{\Longrightarrow} \lambda_i(\chi_i(h) - \chi_n(h)) = 0 \quad \forall i \, \forall h \in G \Rightarrow \chi_i = \chi_n$$

$\lightning$ ■

Proposition 3. Für G algebraische Grp. sind äquivalent:

(i) G diagonalisierbar (ii) $X^*(G) \hookrightarrow A(G)$ Basis $+$ $X^*(G)$ ist e.e. abelsche Grp.

(iii) G ist abelsch und $G = G_s$ (iv) Jedes $G \xrightarrow{\rho} GL_n$ ist direkte Summe 1-Dim.-Darstellungen von G.

Beweis.

$\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$: Wähle Einbettung $G \hookrightarrow D_n$; $k[D_n] = A(D_n) = k[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}] \xleftarrow{\sim} A(X^*(D_n))$

$\underset{\text{Monome}}{\cup\!\!\mathrm{I}} \qquad \Uparrow \ = X^*(D_n)$

ist Isomorphismus von Hopf-Algebren, wenn man definiert $\Delta(\chi) := \chi \otimes \chi$, $\varepsilon(\chi) := 1$, $i(\chi) := \chi^{-1}$.

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} k[X^*(G)] \arrow[d, "\text{kan}"'] & k[X^*(D_n)] \arrow[l] \arrow[d, "\text{kanonisch}", "\wr"'] \arrow[dl, phantom, "///"] \\ A(G) & A(D_n) \arrow[l, two heads] \end{tikzcd}$$

Prop. 2 $\rightarrow$ kan. ist Iso $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} X^*(G) & X^*(D_n) \arrow[l, two heads] & T^a = T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n} \\ & \mathbb{Z}^n \arrow[u, "\wr"] & a \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

<u>(ii) ⇒ (iii):</u> Seien $\chi_1, \dots, \chi_n \in X^*(G)$ Erzeuger.

$\Rightarrow$ können explizit Hom. von Hopfalgebren konstruieren

$$\phi^* : A(D_n) \cong \underset{\text{Gruppenring}}{k[\mathbb{Z}^n]} \longrightarrow A(X^*(G)) = A(G)$$
$$\mathbb{Z}^n \ni a \longmapsto \chi_1^{a_1} \cdots \chi_n^{a_n}$$

$\rightsquigarrow$ erhalte abg. Immersion $G \overset{\phi}{\hookrightarrow} D_n \Rightarrow G \leq D_n$ abelsch, $G = G_s$ (Thm. III.1.10)

<u>(iii) ⇒ (iv):</u> $\rho(G) = \rho(G_s) = \rho(G)_s \leq (GL_n)_s$ abelsche Untergruppe Kor. III.1.12

$\underset{LA}{\Rightarrow}$ $\rho(G)$ simultan diagonalisierbar.

<u>(iv) ⇒ (i):</u> Wähle Darstellung $G \overset{\rho}{\hookrightarrow} GL_n$ (Einbettungssatz von Cayley)

$\underset{\substack{\text{L.A.} \\ \text{Basiswechsel}}}{\Rightarrow}$ oE. $\rho(G) \leq D_n$. ▨

Korollar 4. Für G diagonalisierbar gilt:

(i) $U \leq G \Rightarrow U$ diagonalisierbar.

(ii) $G \overset{\phi}{\to} H \Rightarrow \phi(G)$ diagonalisierbar.

Beweis. Prop. 3 (iii) + Korollar III.1.12. ▨

Theorem 5. Sei $p = \mathrm{char}\, k$. Dann gilt:

$$X^*: \{\text{diag'bare alg. Grp.}\} \longrightarrow \{\text{e.e. ab. Grp. ohne } p\text{-Torsion (für } p>0)\}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. X^* ist (Hom-)Funktor in die Kategorie abelscher Gruppen.

$\mathbb{A}: \exists\, 1 \neq \chi \in X^*(G) : \chi^{p^r} = 1, \quad p, r > 0$

$\Rightarrow$ in $A(G)$: $(\underbrace{\chi - 1}_{\neq 0})^{p^r} = \chi^{p^r} - 1 = 0$ } zu $A(G)$ reduziert.

Def. "inversen" Funktor $F: A \longmapsto k[A] := \bigoplus_{a \in A} k\underline{a}$ Gruppenring mit

$$\Delta(\underline{a}) := \underline{a} \otimes \underline{a}$$
$$\varepsilon(\underline{a}) := 1$$
$$\iota(\underline{a}) := \underline{-a}.$$

F wohldefiniert, da für $A = \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{1 \le i \le s} \mathbb{Z}/n_i$ $\Rightarrow F(A) \cong k[\mathbb{Z}]^{\otimes r} \otimes \bigoplus_{1 \le i \le s} k[\mathbb{Z}/n_i]$

$$= \overbrace{k[\mathbb{G}_m]}^{} \quad \overbrace{k[\mu_{n_i}]}^{}$$

$$\cong k[T^{\pm 1}] \bigotimes_{1 \le i \le s} \underbrace{k[T]/(T^{n_i} - 1)}_{\text{separabel in allen Fällen}}$$

Prop. 3 $\Rightarrow F X^*(G) = k[X^*(G)] \xrightarrow[\sim]{\text{kan}} A(G)$

$\rightsquigarrow$ bleibt z.z.: für A aus rechter Kategorie gilt:

$$A \hookrightarrow X^* F(A) \subseteq k[A]$$
$$a \longmapsto \underline{a}$$

Sei $\lambda = \sum_{a \in A} \lambda_a \underline{a} \in X^* F(A)$

1) $\sum_a \lambda_a \underline{a} \otimes \underline{a} = \Delta(\lambda) = \lambda \otimes \lambda = \sum_{a,b} \lambda_a \lambda_b \underline{a} \otimes \underline{b}$

$$\Leftrightarrow \lambda_a \lambda_b = \begin{cases} \lambda_a, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

2) $1 = \varepsilon(\lambda) = \sum_a \lambda_a \Rightarrow \exists\, a \in A: \lambda_a \neq 0.$

$\underset{1)}{\Rightarrow} \lambda_a^2 = \lambda_a \neq 0 \Rightarrow \lambda_a = 1. \underset{1)}{\Rightarrow} \forall\, b \neq a \in A: \lambda_b = 1 \cdot \lambda_b = \lambda_a \lambda_b = 0.$

$\Rightarrow \lambda = 1 \cdot \underline{a}$ kommt von A.

$\blacksquare$

Korollar 6. (i) G diagonalisierbar $\iff G \cong \mathbb{G}_m^r \times H$, $p \nmid \# H < \infty$

(ii) Für G diagonalisierbar:

G Torus $\iff$ G zshgd. $\iff$ $X^*(G)$ frei abelsch.

Beweis.

(i) G diag-bar $\underset{\text{Thm 5}}{\Longrightarrow}$ $X^*(G) = \mathbb{Z}^r \oplus H$ und $p \nmid \# H < \infty$

$$\overset{\text{Prop. 3}}{\Longrightarrow} A(G) = k[X^*(G)] = \underbrace{k[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]}_{= k[\mathbb{G}_m^r]} \otimes k[H]$$

$$\iff G \cong \mathbb{G}_m^r \times H.$$

Umgekehrt ist jede solche Gruppe nach Thm. 5 diag-bar.

(ii) direkt aus (i)

$\blacksquare$

Bem. / Def. 7. $\mu_n := \ker(\mathbb{G}_m \xrightarrow{(-)^n} \mathbb{G}_m)$, $n \geq 1$.

$$\rightsquigarrow A(\mu_n) = k[T] / \underbrace{(T^n - 1)}_{\text{sep. falls } p \nmid n}.$$

Korollar 8. $X^*: \mathrm{Aut}_{\text{alg grp}}(D_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\underline{Ab}}(\mathbb{Z}^n) = GL_n(\mathbb{Z})$.

<u>**Fakt:**</u> Für G diag-bar erhalte

1) $G \times X^*(G) \longrightarrow \mathbb{G}_m$ perfekte Paarung, d.h. bilineare Abb., die Isomorphismen erzeugt.
$(g, \chi) \longmapsto \chi(g)$

$$X^*(G) \underset{\text{id}}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}_{\text{AlgGrp}}(G, \mathbb{G}_m), \quad G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(X^*(G), \mathbb{G}_m)$$

2) Galois-Korrespondenz: (inklusionsumkehrend)

$$\{U \leq G \text{ abg.}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{Y \leq X^*(G) \mid p \nmid [X^*(G) : Y]\}$$

$$H \longmapsto H^\perp$$
$$Y^\perp \longmapsfrom Y$$

Def. 9. Sei G eine alg. Grp.

$$X_*(G) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg\,Grp}}(\mathbb{G}_m, G) \text{ heißen Kocharaktere von } G.$$

G abelsch $\Rightarrow$ $X_*(G)$ abelsche Gruppe.

Proposition 10. Ist T Torus, so sind $X_*(T)$, $X^*(T)$ frei abelsch und

$$X^*(T) \times X_*(T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg\,Grp}}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$$
$$(\chi, \lambda) \longmapsto \chi \circ \lambda$$

ist perfekte Paarung.

Beweis.

$$X_*(T) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg\,Grp}}(\mathbb{G}_m, T) \xrightarrow[\text{Thm. 5}]{X^* \; \sim} \mathrm{Hom}_{Ab}(X^*(T), \underbrace{X^*(\mathbb{G}_m)}_{\cong \mathbb{Z}})$$

$$X^*(T) \cong \mathbb{Z}^r \Rightarrow X^*(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(\underbrace{\mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(X^*(T), \mathbb{Z})}_{\cong X_*(T)}, \mathbb{Z})$$

$\blacksquare$

Proposition 11. (Rigidität diagonalisierbarer Gruppen)

Seien G, H diag. alg. Grp., V eine zshgd. affine Varietät, $G \times V \xrightarrow{\phi} H$ Hom. von Varietäten.

der Art, dass $\phi_v : G \to H$, $g \mapsto \phi(g, v)$ $\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg\,Grp}}(G, H)$ $\forall v \in V$.

$\Rightarrow$ ϕ_v ist unabhängig von $v \in V$.

Beweis. ϕ ist gegeben durch $\phi^* : A(H) \longrightarrow A(G) \otimes A(V)$

Basis da dig-bar $\rightarrow$ $X^*(H) \ni \chi \longmapsto \sum_{\chi' \in X(G)} \chi' \otimes \underbrace{f_{\chi,\chi'}}_{\in A(V)}$ geeignet

$$\Rightarrow \sum_{\chi'} f_{\chi,\chi'}(v) \cdot \chi' = \phi_v^*(\chi) \in X^*(G) \quad \forall \chi \in X^*(H)$$

$$\Rightarrow f_{\chi,\chi'}^{(v)} \in \{0,1\} \quad \forall v \in V \; \forall \chi, \chi' \quad \rightarrow (f_{\chi,\chi'})^2 = f_{\chi,\chi'} \quad \forall \chi, \chi'$$

$$\Rightarrow V = V(f_{\chi,\chi'}) \sqcup V(1 - f_{\chi,\chi'}) \quad \forall \chi, \chi'$$

$$\xrightarrow{V \text{ zshgd.}} f_{\chi\chi'} \text{ konstant } \forall \chi, \chi' \quad \rightarrow \phi_v \text{ unabhängig von } v.$$

$\blacksquare$

Korollar 12: Sei $H \underset{abg.}{\leq} G$ diag'bar. (G nicht notwendigerw.) $\Rightarrow$ $N_G(H)^\circ = Z_G(H)^\circ$, $[N_G(H) : Z_G(H)] < \infty$.

Beweis.
$$\begin{aligned} H \times N_G(H)^\circ &\xrightarrow{\phi} H \quad \text{Hom von Varietäten} \\ (h, n) &\longmapsto nhn^{-1} \end{aligned}$$

$\overset{\text{Prop. 11}}{\Longrightarrow}$ $nhn^{-1} = 1h1 = h \quad \forall n, h$ $\Rightarrow$ $\underbrace{N_G(H)^\circ \subseteq Z_G(H) \subseteq N_G(H)}_{\text{endlicher Index}}$ ▨

5. Elementar unipotente Gruppen

18.05.18

Bem. 1. Für G alg. Gruppe gilt

$$A(G) := \mathrm{Hom}_{AlgGrp}(G, \mathbb{G}_a) = \mathrm{Hom}_{Hopf}(k[T], k[G]) \xrightarrow{\sim} \{a \in k[G] \mid \Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a, \ \varepsilon(a) = 0\}$$

$g \longmapsto g(T)$

In diesem Abschnitt: $k[G]$ bezeichnet den Koordinatenring!

ist R-Modul mit

$$R := \mathrm{End}_{AlgGrp}(\mathbb{G}_a) = \{g \in k[T] \mid g(x+y) = g(x) + g(y) \text{ in } k[x,y]\}$$

$$= \begin{cases} \{\lambda T \mid \lambda \in k\}, & \text{char } k = p = 0 \\ \{\sum_i \lambda_i T^{p^i} \mid \lambda_i \in k\}, & \text{char } k = p > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k, & p = 0 \\ \underbrace{k[f]}_{\text{nicht-kommutativ}}, \quad f \mathrel{\hat=} (-)^p, & p > 0 \end{cases}$$

$$\left(\sum_{m \geq 0} a_m f^m\right)\left(\sum_{n \geq 0} b_n f^n\right) = \sum_{m,n \geq 0} a_m (b_n)^{p^m} f^{m+n}$$

Proposition 2. Für G algebraische Gruppe sind äquivalent:

(i) $\exists\, G \cong H \underset{abg.}{\leq} \mathbb{G}_a^n$, $n \geq 0$

(ii) $A(G)$ ist R-Modul endl. erz. + $A(G)$ erzeugt $k[G]$ als k-Algebra

(iii) G kommutativ + $G = G_u$ $(+\ G^p = 1$ für $p > 0)$

Beweis. Springer. ▨

Def. 3. (i) Eine algebraische Gruppe, die (i)-(iii) aus Proposition 2 erfüllt heißt elementar unipotent.

Insbesondere: $\mathbb{Z}/_{p^n\mathbb{Z}}$ ist nicht elementar unipotent für $n>1$.

(ii) G heißt Vektorgruppe, falls $G \cong \mathbb{G}_a^n$, für $n \geq 0$.

Theorem 4. $A: \{\text{elt. unipot. Gruppen}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{e.e. } R\text{-Moduln}\}$ ist eine Kategorienäquivalenz.

Beweis. $\underline{p=0}$:

$$\underbrace{\bigoplus_{n\geq 0} M^{\otimes n}_{\underbrace{\Sigma_n}_{\text{symmetrische Gruppe}}}}_{\text{symmetrische Algebra}/_K} =: S_k(M) \xleftarrow{S_k} M$$

$$S_k(M) \longleftarrow\!\shortmid M$$

$\underline{p>0}$:

$$S_k(M)/_{(f\cdot m - m^p \mid m \in M)} \longleftarrow\!\shortmid M$$

beachte in $S_k(M)$:

$$\Delta(m^p) = (m\otimes 1 + 1\otimes m)^p$$
$$= m^p \otimes 1 + 1 \otimes m^p$$
$$\Rightarrow m^p \in A\, S_k(M).$$

"$\blacksquare$"

Korollar 5. (i) G elementar unipotent

$$\Leftrightarrow \begin{cases} G \cong \mathbb{G}_a^r, & p=0 \\ G \cong \mathbb{G}_a^r \times (\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^s, & p>0. \end{cases}$$

(ii) Für G elt. unipotent gilt:

$$G \cong \mathbb{G}_a^r \Leftrightarrow G \text{ zshgd.} \Leftrightarrow A(G) \text{ freier } R\text{-Modul.}$$

Beweis. Theorem 4 $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii). $\blacksquare$

Theorem 6. Sei G alg. Grp., zshgd., $\dim G = 1$. $\Rightarrow G \cong \mathbb{G}_m$ oder $G \cong \mathbb{G}_a$.

Beweis.

$$\phi_\gamma : G \to G, \quad g \mapsto g\gamma g^{-1}$$ mit $\gamma \in G$ fix. $\Rightarrow \overline{\phi_\gamma(G)}$ irreduzibel, abgeschlossen.

$\underset{\substack{G \text{ zshgd.} \\ \dim G = 1}}{\Longrightarrow}$ $\overline{\phi_\gamma(G)} = \{\gamma\}$ oder $\overline{\phi_\gamma(G)} = G$.

Wir zeigen: G ist abelsch.

Falls: $\overline{\phi_\gamma(G)} = \{\gamma\}$ $\forall \gamma \in G$ $\Rightarrow$ G kommutativ.

Falls: $\exists\, \gamma \in G$: $\overline{\phi_\gamma(G)} = G$

Wähle $G \xhookrightarrow{\rho} GL_n$, $\quad \psi : G \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$

$g \longmapsto$ Koeffizienten des char. Polynoms $\det(T - \rho(g))$.

$\Rightarrow$ $\psi(g\gamma g^{-1}) = \psi(\gamma)$ $\forall g \in G$ (gilt nach Konstruktion des char. Polynoms)

$\Rightarrow$ $\psi \circ \phi_\gamma$ konstant $\underset{\overline{\phi_\gamma(G)} = G}{\Longrightarrow}$ ψ konstant.

$\Rightarrow$ $\det(T - \rho(g)) = \det(T - \rho(1)) = (T-1)^n$ $\forall g \in G$

$\Rightarrow$ $G = G_u$ $\Rightarrow$ G unipotent $\Rightarrow$ $\underbrace{[G, G]}_{=1} \subsetneq G$ $\Rightarrow$ G kommutativ.

G zshgd., $\dim G = 1$.

Also ist G abelsch.

Prop. III.3.3

$\Longrightarrow$ $G_s \times G_u \xrightarrow{\sim} G$ ist Isomorphismus $\underset{1\text{-dim.}}{\Longrightarrow}$ $G = G_s$ oder $G = G_u$

$(g, h) \longmapsto gh$

Falls: $G = G_s$ $\underset{+\dim G = 1}{\overset{\text{Kor. 4.6}}{\Longrightarrow}}$ $G \cong \mathbb{G}_m$

Falls: $G = G_u$: zeige elt. unipotent.

Prop. 2 $\Rightarrow$ z.z. $G^p = 1$, falls $p > 0$.

A: $G^p \neq 1$ $\Rightarrow$ $G^p = G$ $\Rightarrow$ $G = G^p = G^{p^2} = \dots$

$G = G_u \xhookrightarrow{\rho} (GL_n)_u$ $\Rightarrow$ $(\rho(g) - 1)^n = 0$ $\forall g \in G$ $\Rightarrow \forall p^r > n$: $0 = (g-1)^{p^r} = g^{p^r} - 1$

$\Rightarrow$ $g^{p^r} = 1$ $\Rightarrow$ $G^{p^r} = 1$

$\Rightarrow$ G elt. unipotent $\underset{+\text{ zshgd.}}{\overset{\text{Kor. 5}}{\Longrightarrow}}$ $G \cong \mathbb{G}_a$. $\blacksquare$

V. Lie-Algebren

1. Tangentialräume

Def. 1. Sei X eine Varietät.

Der Tangentialraum von X am Punkt $x \in X$ ist definiert als

$$T_x X := \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k) = \{ \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\delta} k \mid \delta \ k\text{-linear}, \ \delta(fg) = f(x)\delta(g) + g(x)\delta(f) \ \forall f,g \in \mathcal{O}_{X,x} \}$$

Lemma 2. Es sei A eine k-Algebra, $A \xrightarrow{\varepsilon} k$ k-Algebrenhomomorphismus (Kategorie der k-Algebren über k)

(i) $\mathrm{Der}_k(A,k) \xrightarrow{\sim} \left((\ker \varepsilon) / (\ker \varepsilon)^2 \right)^\vee$

$$\mathrm{Der}_k(A,k) = \{ \delta : A \to k \mid \delta(fg) = \varepsilon(f)\delta(g) + \varepsilon(g)\delta(f) \} \qquad \left((\ker \varepsilon) / (\ker \varepsilon)^2 \right)^\vee = \mathrm{Hom}_k(\ker \varepsilon / (\ker \varepsilon)^2, k)$$

$$\delta \longmapsto \delta|_{\ker \varepsilon}$$

(ii) $\mathrm{Der}_k(A,k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}/k}(A, \underbrace{k[\epsilon]}_{= k[T]/T^2,\ \epsilon := \bar{T}}) = \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & k[\epsilon] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\shortparallel"] & \epsilon \arrow[dl, mapsto] \\ & k & 0 \end{tikzcd} \right\}$

$$\delta \longmapsto [a \longmapsto \varepsilon(a) + \epsilon\,\delta(a)]$$

Korollar 3. $T_x X \cong \left(\mathfrak{m}_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x}^2 \right)^\vee$ ist endlich-dimensional $\forall x \in X$.

(hier: $\varepsilon : \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \cong k$ Projektion) ☒

Bsp. $X = \mathbb{A}^n \Rightarrow T_x X = \bigoplus_{1 \le i \le n} k \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$

Def. 4. Sei X eine Varietät.

(i) X heißt glatt bei x, falls $\dim_k T_x X = \dim X$

(ii) X heißt glatt, wenn X überall glatt ist.

Bemerkung 5. (i) Jeder Homomorphismus $X \xrightarrow{\phi} Y$ induziert eine k-lineare Abbildung

$$d\phi_x := d\phi : T_x X \longrightarrow T_{\phi(x)} Y$$
$$\delta \longmapsto \delta \circ \phi_x^*$$

(ii) $x \in U \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ offene affine Umgebung $\Rightarrow d\iota : T_x U \xrightarrow{\sim} T_x X$

(iii) $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y$ lokal abgeschlossen (X abg. in einer offenen Menge in Y)

$\Rightarrow d\iota : T_x X \hookrightarrow T_{\iota(x)} Y$

Theorem 6. $\dim_k T_x X \geq \dim X \quad \forall x \in X$ mit Gleichheit auf einer dichten Teilmenge.

∎

Bemerkung 7. G alg. Grp. $\rightsquigarrow$ $d(g \cdot \_) : T_1 G \xrightarrow{\sim} T_g G \underset{\text{Thm. 6}}{\Longrightarrow} G$ glatte Varietät.

2. LIE ALGEBREN

Def. 1. Eine Lie Algebra ist ein k-VR $\mathfrak{g}$ zusammen mit einer k-bilinearen Abb. $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \xrightarrow{[\cdot,\cdot]} \mathfrak{g}$ mit

(i) $\forall x \in \mathfrak{g}: \ [x,x] = 0.$ (Antisymmetrie)

(ii) $\forall x,y,z \in \mathfrak{g}: \ [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (Jacobi-Identität)

Ein Lie Algebrenhomomorphismus ist eine k-lin. Abbildung $\mathfrak{g} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{h}$

mit $\forall x,y \in \mathfrak{g}: \ [\phi(x), \phi(y)] = \phi([x,y])$.

Bsp. 2.

(i) A assoziative k-Algebra $\Rightarrow$ A Lie Algebra via $[x,y] := xy - yx$

(ii) V k-Vektorraum $\Rightarrow$ V Lie Algebra via $[x,y] := 0$; solche Lie Algebren nennt man <u>kommutativ</u>.

z.B. $G = GL_n \rightsquigarrow \mathcal{L}ie(G) := \mathfrak{gl}_n(k)$

Lie Algebra induziert von Matrizen-Ring $M_n(k) = k^{n \times n}$.

Proposition 3. Es gibt einen Funktor $\{\text{alg. Grp}/k\} \xrightarrow{\text{Lie}} \{\text{Lie Algebren}/k\}$

$$G \longmapsto \mathcal{L}ie(G) := T_1 G = Der_k(\mathcal{O}_{G,1}, k)$$

$$\cong Hom_k(m_{G,1}/m_{G,1}^2, k)$$ in $\mathcal{O}_{G,1}$

$$= Hom_k(m_1/m_1^2, k)$$ in $k[G]$

$$= Hom_k(\ker(\varepsilon)/\ker(\varepsilon)^2, k)$$

Beweis.

1) $Hom_k(k[G], k)$ ist assoziative k-Algebra via

$$f * g := \mu_k(f \otimes g) \circ \Delta$$

Mult. $K \otimes K \to K$, $a \otimes b \mapsto ab$

$\Leftarrow$ Assoziativität der Gruppenstruktur gg. durch Δ

2) nachrechnen, dass $Der_k(k[G], k) \leq Hom_k(k[G], k)$ Teil-Lie Algebra.

$\blacksquare$

23.05.18

Lie $G := T_e G$, d.h. $\dim_k \text{Lie}\, G = \dim G$ da G glatt.

$G(R) = Hom_{k\text{-}\underline{Alg}}(A_G, R)$ lässt sich auch für R nicht notwendigerweise reduziert definieren.

Lemma 4. Lie $G \cong_{\underline{Ab}} \ker\left(G(k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \longrightarrow G(k) \right)$ als abelsche Gruppen.

$k[\varepsilon]/\varepsilon^2 \to k$

$\varepsilon \mapsto 0$

Beweis.

$$Der_k(A_G, k) \longrightarrow Hom_{k\text{-}\underline{Alg}}(A_G, k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \longrightarrow Hom_{k\text{-}\underline{Alg}}(A_G, k)$$

$0 = ev_e(-)$

k ist A_G Modul via Auswertung ev_e

$$\delta \longmapsto \Theta_\delta : A_G \to k[\varepsilon]/\varepsilon^2$$

$$f \mapsto \underbrace{ev_e(f)}_{= f(e)} + \delta(f)\varepsilon$$

zz: $\Theta_\delta(fg) \overset{!}{=} \Theta_\delta(f)\,\Theta_\delta(g) = (f(e) + \delta(f)\varepsilon)(g(e) + \delta(g)\varepsilon)$

$\| \text{Def.}$ $\quad = f(e)g(e) + (f(e)\delta(g) + g(e)\delta(f))\,\varepsilon$

$f(e)g(e) + \delta(fg)\,\varepsilon$

$\Longleftrightarrow$ δ Derivation.

$\blacksquare$

Bsp 5.

(i) $G = GL_n$, $\quad \operatorname{Lie} GL_n = \ker\left(GL_n(k[\varepsilon]) \longrightarrow GL_n(k)\right)$

$$= \{ \mathbb{1}_n + \varepsilon A \mid A \in M_n(k) \} \cong M_n(k)$$

$$\operatorname{Lie} GL_n \xrightarrow{\cong} M_n(k)$$
$$\delta \longmapsto \left(\delta(T_{ij})\right)_{i,j}$$

(ii) V endl.-dim. K-VR. $GL(V) \subseteq \operatorname{End}(V)$ offen.

$$\Rightarrow \operatorname{Lie} GLV \xrightarrow{\sim} T_{id}\operatorname{End}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(V)$$

Def. 6. Ein Vektorfeld v (auf G) ist ein $D \in \operatorname{Der}_k(A_G, A_G)$ $\left[\delta_g := ev_g \circ D \in \operatorname{Der}_k(A_G, k) = T_g G \ !\right]$

Ein Vektorfeld D heißt (links-)invariant, falls das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A_G \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, phantom, "in"] & A_G \arrow[d, "\Delta"] \arrow[ddr, "ev_{g_1 g_2}"] & \\
A_G \otimes A_G \arrow[r, "id \otimes D"'] \arrow[d, shift right, "ev_1"'] \arrow[d, shift left, "\delta_{g_2}"] & A_G \otimes A_G \arrow[dr, "ev_{g_1} \otimes ev_{g_2}"'] & \\
k \arrow[rr, equal] & & k
\end{tikzcd}$$

Auswertung von $\Delta \circ D$ bei $g_1 g_2$: $\quad \delta_{g_1 g_2}$ $\quad \|$ $\leftarrow$ Kommutativität

$\quad$ – " – $\quad (id \otimes D) \circ \Delta$ bei $g_1 g_2$: $\quad \delta_{g_2} \circ l_{g_1}^* \underset{\text{Def. } d}{=} dl_{g_1}(\delta_{g_2})$

da:

$$(ev_{g_1} \otimes ev_{g_2}) \circ (id \otimes D) \circ \Delta = \left(ev_{g_1} \otimes \underbrace{(ev_{g_2} \otimes D)}_{= \delta_{g_2}}\right) \circ \Delta = \delta_{g_2} \circ \underbrace{(ev_{g_1} \otimes id) \circ \Delta}_{= l_{g_1}^*} = \delta_{g_2} \circ l_{g_1}^*.$$

D. h. Links-Invarianz von $D \iff \delta_{g_1 g_2} = dl_{g_1}(\delta_{g_2}) \quad \forall g_1, g_2 \in G$

$\mathcal{D}_G$ bezeichne den VR aller links-invarianten Vektorfelder auf G.

Theorem 7. $\mathcal{D}_G \xrightarrow{\sim} \operatorname{Lie} G$ ist ein linearer Isomorphismus.

$D \longrightarrow \delta_e = ev_e \circ D$

Beweis. Wir zeigen, dass ein inverser Funktor durch $\delta \to (id \otimes \delta) \circ \Delta$ gegeben ist:

$$D := id \otimes \delta \circ \Delta : \begin{tikzcd} A_G \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & A_G \\ A_G \otimes A_G \arrow[r, "id \otimes \delta"] & A_G \otimes k \arrow[u, "\cong"] \end{tikzcd}$$

Beh.: (i) $id \otimes \delta : A_G \otimes A_G \to A_G \in \operatorname{Der}_k(A_G \otimes A_G, A_G)$, wobei A_G via $id \otimes ev_e$ als $A_G \otimes A_G$-Modul aufgefasst wird.

(ii) $D \in \mathcal{D}_G$ (iii) Funktoren sind invers.

zu (i):

$$(id \otimes \delta)((f_1 \otimes f_2)(g_1 \otimes g_2)) = (id \otimes \delta)(f_1 g_1 \otimes f_2 g_2) = f_1 g_1 \cdot \delta(f_2 g_2)$$

$$= f_1 g_1 (f_2(e)\delta(g_2) + g_2(e)\delta(f_2)) = f_1 f_2(e) g_1 \delta(g_2) + g_1 g_2(e) f_1 \delta(f_2)$$

$$= f_1 f_2(e)\,(id \otimes \delta)(g_1 \otimes g_2) + g_1 g_2(e) \cdot (id \otimes \delta)(f_1 \otimes f_2)$$

zu (ii): $D \in \operatorname{Der}_k(A_G, A_G)$: denn:

$$D(f \cdot h) = (id \otimes \delta)(\Delta(fh)) = (id \otimes \delta)(\Delta(f)\Delta(h))$$

$$\underset{(i)}{=} \underbrace{(id \otimes ev_e)(\Delta f)}\,\underbrace{(id \otimes \delta)(\Delta h)} + \underbrace{(id \otimes ev_e)(\Delta h)}\,\underbrace{(id \otimes \delta)(\Delta f)}$$

$$= f \quad D(h) \quad + \quad h \quad D(f)$$

D linksinvariant, denn:

$$(id \otimes D) \circ \Delta \overset{\text{def.}}{=} [id \otimes ((id \otimes \delta) \circ \Delta)] \circ \Delta \overset{\text{nachrechnen}}{=} (id \otimes (id \otimes \delta)) \circ (id \otimes \Delta) \circ \Delta$$

$$\overset{\text{Koassoziativität}}{=} id \otimes (id \otimes \delta) \circ (\Delta \otimes id) \circ \Delta \underset{[1]}{=} \Delta \circ (id \otimes \delta) \circ \Delta = \Delta \circ D.$$

✓

[1]:

$$\begin{tikzcd}
A_G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A_G \otimes A_G \arrow[r, "\Delta \otimes id"] \arrow[d, equal] \arrow[l, phantom, "///"] & A_G \otimes A_G \otimes A_G \arrow[r, "id \otimes id \otimes \delta"] & A_G \otimes A_G \arrow[d, equal] \\
A_G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A_G \otimes A_G \arrow[rr, "\Delta \otimes \delta"] \arrow[d, equal] \arrow[l, phantom, "///"] & & A_G \otimes A_G \arrow[d, equal] \\
A_G \arrow[r, "\Delta"] & A_G \otimes A_G \arrow[r, "id \otimes \delta"] & A_G \arrow[r, "\Delta"] & A_G \otimes A_G
\end{tikzcd}$$

$$f \otimes g \mapsto \Delta(f) \cdot \delta(g)$$

$$f \otimes g \longmapsto f \cdot \delta(g) \longmapsto \Delta(f\delta(g)) = \Delta(f) \cdot \delta(g)$$

(iii)

$$\delta \mapsto (id \otimes \delta) \circ \Delta \mapsto ev_e \circ (id \otimes \delta) \circ \Delta = \delta \circ \underbrace{(ev_e \otimes id) \circ \Delta}_{= id} = \delta$$

$$D \mapsto ev_e \circ D \longmapsto (id \otimes (ev_e \circ D)) \circ \Delta = (id \otimes ev_e) \circ (id \otimes D) \circ \Delta$$
$$= \underbrace{(id \otimes ev_e) \circ \Delta}_{id} \circ D = D$$

▨

Übung 8. (i) $\mathcal{D}_G \subseteq \mathrm{Hom}_k(A_G, A_G)$ erfüllt

$$[\mathcal{D}_G, \mathcal{D}_G] \subseteq \mathcal{D}_G$$

bzgl. $$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

(ii) Die so definierte Lie-Klammer stimmt mit derjenigen aus Prop. 3 überein.

(iii) Für char $k = p > 0$ ist $\mathcal{D}_G$ auch stabil unter $D \mapsto D^p = \underbrace{D \circ \ldots \circ D}_{p\text{-mal}}$

Proposition 9. Seien $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Lie}\, G$. Dann ist $[\delta_1, \delta_2]: A_G \to k$ geg. durch

$$[\delta_1, \delta_2] = (\delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1) \circ \Delta$$

Beweis. $D_i := (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta$, $i = 1, 2$. Dann gilt:

$$[\delta_1, \delta_2] = ev_e \circ [D_1, D_2] = ev_e\, D_1 D_2 - ev_e\, D_2 D_1$$

$$= ev_e \circ (\mathrm{id} \otimes \delta_1) \circ \Delta \circ (\mathrm{id} \otimes \delta_2) \circ \Delta - \ldots$$

$$= \delta_1 \circ \underbrace{(ev_e \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta}_{= \mathrm{id}} \circ (\mathrm{id} \otimes \delta_2) \circ \Delta - \ldots$$

$$= (\delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1) \circ \Delta.$$

$\blacksquare$

Korollar 10. $G \xrightarrow{\phi} H$ Morphismus alg. Grp. Dann gilt:

$d\phi = d\phi_e : \mathrm{Lie}\, G \to \mathrm{Lie}\, H$ ist Lie-Alg. Homomorphismus, d.h.

$$d\phi([\delta_1, \delta_2]_G) = [d\phi(\delta_1), d\phi(\delta_2)]_H.$$

Beweis.

$$d\phi([\delta_1, \delta_2]_G) \underset{\text{Prop 9.}}{=} (\delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1) \circ \underbrace{\Delta \circ \phi^*}_{= \phi^* \circ \Delta} = \left((\delta_1 \circ \phi^*) \otimes (\delta_2 \circ \phi^*) - (\delta_2 \circ \phi^*) \otimes (\delta_1 \circ \phi^*)\right) \circ \Delta$$

$$= [d\phi(\delta_1), d\phi(\delta_2)]_H.$$

$\blacksquare$

Korollar 11. Ist G kommutativ, so auch $\mathrm{Lie}\, G$, d.h. $[\cdot, \cdot]_G \equiv 0$.

Beweis.

$$(\delta_1 \otimes \delta_2) \circ \Delta = (\delta_2 \otimes \delta_1) \circ \Delta, \text{ da } \Delta \text{ symmetrisch.}$$

$\blacksquare$