Blatt 01 Übungsgruppe: AZT II.

Aufgabe 01. $G := Gal(L|K)$

$$\begin{array}{ccc} l_w & L & w \\ | & | & | \\ k_v & K & v \end{array}$$

Restklassenkörper

(a) $D_{w|v} = \{ g \in G \mid g \cdot w = w \} = Stab_G(w)$

wobei $g \cdot w := w \circ g^{-1}$ $\to G \curvearrowright P_L$

· w unverzweigt in L/K $:\Longleftrightarrow$ $e(w,v) = 1$

$= e(\mathfrak{P}_w, \mathfrak{p}_v)$

wobei $\mathfrak{p}_v = \{ x \in K_v \mid |x|_v < 1 \}$

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{p}_v \cdot L_w = \mathfrak{P}_1^1 \cdots \mathfrak{P}_g^1$

different prime ideals.

(b) (i) · $D_{w|u}$ ist sicher eine Gruppe.

$D_{w|u} \subseteq D_{w|v}$: $g : L \to L \in D_{w|u} \subseteq Gal(L/M) \subseteq Gal(L|K)$

$\rightsquigarrow g \in D_{w|v}$

$(D_{w|u} = Gal(L/M) \cap D_{w|v})$

· $r_{w|u} = r_{w|v}\big|_{D_{w|u}}$: klar, vgl. konkrete Def. von $r_{w|v}$ ..

· $G_{w|u}(\alpha) = \alpha^{\# m_u} = \alpha^{\# k_v \cdot \underbrace{[m_u : k_v]}_{= f(u|v)}}$

$= G_{w|v}(\alpha)^{f(u|v)}$

· $(w, L/M) = (w, L|K)^{f(u|v)}$: folgt direkt aus der Aussage für $G_{w|v}$.

(ii) $D_{w|v}\, Gal(L/M) \xrightarrow{\varphi} D_{u|v}$, $\sigma \mapsto \sigma|_M$ ist wohldef.:

$\sigma = \alpha \circ \beta$ für $\alpha \in D_{w|v}$, $\beta \in Gal(L/M)$.

$\sigma \cdot u(x) = u \circ \sigma^{-1}(x) = u \circ \beta^{-1} \circ \underbrace{\alpha^{-1}(x)}_{\in M}$ $\quad \beta^{-1}|_M = id_M$

$= u(\alpha^{-1}(x)) \underset{\alpha \in D_{w|v}}{=} u(x)$

$\Rightarrow \sigma|_M \in D_{u|v}$

$Gal(L/M) = \ker \varphi$: "$\subseteq$": klar "$\supseteq$": $D_{w|v}\, Gal(L/M) \subseteq Gal(L|K)$.

Sei $\sigma \in D_{u|v}$. Sei $\tilde{\sigma} \in Gal(L|K)$ s.d. $\tilde{\sigma}|_M = \sigma$; $\tilde{\sigma} w \in P_u$ $(\tilde{\sigma} \in D_{w|u})$

$Gal(L/M) \curvearrowright P_u$ transitiv $\Rightarrow \exists\, \alpha \in Gal(L/M)$: $\tilde{\sigma} w = \alpha w$

$\Rightarrow \tilde{\sigma}^{-1} \cdot \alpha \cdot w = w \Rightarrow \tilde{\sigma}^{-1} \circ \alpha \in D_{w|v}$

$\Rightarrow \varphi(\tilde{\sigma} \alpha) = \sigma$, da $\alpha|_M = id_M$, $\tilde{\sigma}|_M = \sigma$.

• $D_{w|v} / D_{w,u} \cong D_{u,v}$

$D_{w,v} \xrightarrow{\varphi} D_{u,v}$ wohldefiniert nach obiger Rechnung.

$\sigma \longmapsto \sigma|_M$

$\ker \varphi = \{ \sigma \in D_{w|v} \mid \sigma|_M = id_M \} = D_{w|M}$

φ surjektiv: siehe φ surjektiv oben.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D_{w|u} \arrow[r] \arrow[d, "r_{w|M}"] & D_{w|v} \arrow[r] \arrow[d, "r_{w|v}"] & D_{u|v} \arrow[r] \arrow[d, "r_{u|v}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Gal(\ell_w / m_u) \arrow[r] & Gal(\ell_w / k_v) \arrow[r] & Gal(m_u / k_v) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Obere Sequenz exakt: Gerade nachgerechnet

Untere Sequenz exakt: Galoistheorie

Nachrechnen, dass Diagramme kommutieren (klar..)

$$(w, L|K)|_M \underset{\text{Diagr.}}{=} (r_{u|v}^{-1} \circ (-)|_M \circ r_{w|v})$$

$$= r_{u|v}^{-1} (\sigma_{w|v}|_M) = r_{u|v}^{-1} (\sigma_{u|v})$$

$$= (u, M|K)$$

$(\sigma_{w|v}|_M = \sigma_{u|v}$: klar $)$

(iii) klar.

Blatt 01 Übungsgruppe AZT II

Aufgabe 02. $K := \mathbb{Q}$, $L := \mathbb{Q}(\zeta_n)$

(a) (i) z.z.: $(w, \mathbb{Q}(\zeta_n) | \mathbb{Q}) = \sigma_q$ $w \in P_q$ Stelle über q.

$ggT(q,n) = 1 \Rightarrow q \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \Rightarrow w$ unverzweigt in $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$.

$\overset{A1}{\Rightarrow} D_{w|q} \cong Gal(l_w | k_q)$

$\sigma_q : L \to L,\ \zeta_n \mapsto \zeta_n^q$ $l_w \to l_w,\ x + P_w \mapsto \underbrace{\sigma_q(x)}_{= x^q} + P_w$

$q = \# \mathbb{F}_q = \# k_q$

Jetzt: $r_{w,q}((w, L|K)) = r_{w|q}(\sigma_q)$

(Nachrechnen, $\{\zeta_n^k\}_{k-}$ ist Ganzheitsbasis ..)

(ii) $S := \{ q \text{ PZ} \mid q \equiv a \pmod n \}$.

z.z.: S ist unendliche Menge $\forall a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Beweis. $q \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to q \in P_K \setminus \Sigma$

$\Rightarrow \sigma_q = \sigma_a$, $C := \{\sigma_a\}$

$\overset{\text{Čebotarev}}{\Rightarrow} \infty = \#\{ v \in P_K \setminus \Sigma \mid \exists\, w \in P_L \text{ über } v : (w, L|K) \in C \}$

$= \#\{ q \in \mathbb{P} \mid \sigma_q = \sigma_a \} = \# S$ ■

(b)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L = MM' \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ M \arrow[dr, dash] & & M' \arrow[dl, dash] \\ & K & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] u \arrow[dr, dash] & & u' \arrow[dl, dash] \\ & v & \end{tikzcd}$$

i) $M \subseteq M'$ $\Longleftrightarrow$ ii) $\forall u \in P_M, u' \in P_{M'}$: $u|_K = u'|_K = v \in P_K \setminus \Sigma$: $ord(u, M|K) \mid ord(u', M'|K)$

i) $\Rightarrow$ ii): $\begin{matrix} u' & M' \\ & | \\ u & M \\ | & | \\ v & K \end{matrix}$ $(u, M|K) = (u', M'|K)|_M$.

(u' liegt über $g \cdot u$ für ein $g \in Gal(M|K)$, $\to$ ord gleich)

ii) $\Rightarrow$ i): · Reduziere auf den Fall $M \cap M' = K$: (ersetze $K \leftrightarrow M \cap M'$)

A: i) ist falsch. · A1 (iii) $\to$ $Gal(L|K) \xrightarrow{\cong} Gal(M|K) \times Gal(M'|K)$

$\uparrow$ Isomorphismus nach Algebra I.

Sei $(\sigma, id_{M'}) \in Gal(M|K) \times Gal(M'|K)$ $(\sigma \neq id_M)$

$Gal(L|K) \ni \tau$ $\updownarrow$ Sei C_τ die Konjugationsklasse davon in $Gal(L|K)$.

Chebotarev $\rightsquigarrow \# \underbrace{\{ v \in P_k \setminus \Sigma \mid (v, L|K) \in C_\tau \}}_{=: S_\tau} = \infty$

Seien μ, μ' über v. Dann ist $\operatorname{ord}((\mu, M|K)) > \underline{1}$.

$\operatorname{ord}((\mu', M|K)) = 1$. ↯

(ii) ist falsch.