04

Freitag, 20. April 2018 14:25

01. Algebraische Geometrie und Funktoren

I. Affine Varietäten

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper; $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_k := k^n$ heißt **affiner n-Raum**.

Def. 1. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt **affine Varietät**, falls ein Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n] = k[\underline{X}]$ existiert, so dass $X = V(I) = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid \forall f \in I: f(P) = 0\}$

Nach dem Hilbert'schen Basissatz existieren endlich viele $f_1, \dots, f_n \in I$ mit $I = (f_1, \dots, f_n)$.

Lemma 2. Für Ideale $I_1, I_2, (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

(i) $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow V(I_2) \subseteq V(I_1)$

(ii) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2)$

(iii) $V(\sum_\lambda I_\lambda) = \bigcup_\lambda V(I_\lambda)$

Die Mengen $\{V(I) \mid I \trianglelefteq k[\underline{X}]\}$ bilden genau die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$, der sogenannten **Zariski-Topologie**. $(V(0) = \mathbb{A}^n,\ V(1) = \emptyset)$

Affine Varietäten tragen die Unterraumtopologie.

Lemma 3. Die offenen Mengen der Form $D(f) := V((f))^c = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid f(P) \neq 0\}$ mit $f \in k[X]$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$.

Für eine affine Varietät $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ setze $I(X) := \{f \in k[\underline{X}] \mid \forall P \in X: f(P) = 0\} \trianglelefteq k[\underline{X}]$.
Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ setze $\operatorname{rad} I := \sqrt{I} := \{f \in k[\underline{X}] \mid \exists n \in \mathbb{N}: f^n \in I\}$, das **Radikal** von I.

Gilt $I = \sqrt{I}$, so heißt I **Radikalideal**.

Theorem 4. (**Hilbert'scher Nullstellensatz**)
$I(\cdot)$, $V(\cdot)$ induzieren Bijektionen

$$\{\text{Radikalideale in } k[\underline{X}]\} \underset{V(\cdot)}{\overset{I(\cdot)}{\longleftrightarrow}} \{\text{affine Varietäten im } \mathbb{A}^n\}$$

Korollar 5. Maximale Ideale von $k[\underline{X}]$ entsprechen abgeschlossenen Punkten.

$$\mathfrak{m}_a := I(\{a\}) = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n); \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$$

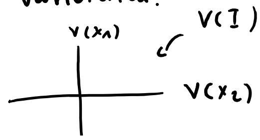
Lemma 6. Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

$$I \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}] \iff Z = V(I) \text{ ist irreduzibel als topologischer Raum.}$$

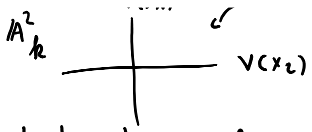
Irreduzible Räume sind zusammenhängend.
$Y \subseteq X$ irreduzibel $\iff$ $\overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

Korollar 9. Jede affine Varietät ist eine endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten.

Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$ $\mathbb{A}^2_k$



Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$



Koordinatenachsen, zerlege in irred. Komponenten.

05

Freitag, 20. April 2018 14:57

Def. 11. Für eine affine Varietät X heißt $A(X) := A_X := k[\underline{X}]/I(X)$ der Koordinatenring von X.
("Morphismen $X \longrightarrow \mathbb{A}^1$")

$A(X)$ ist eine reduzierte ($\sqrt{0} = 0$) endl. erz. k-Algebra.

$A(X)$ ist Integritätsring $\Leftrightarrow$ X ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I(X) \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}]$.

Def. 12. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Ein Morphismus $X \xrightarrow{\phi} Y$ von Varietäten besteht aus einem m-Tupel $\phi = (f_1, -, f_m) \in A(X)^m$

mit $\phi(P) := (f_1(P), -, f_m(P)) \in Y \quad \forall P \in X$.

Lemma 13. Morphismen von Varietäten sind stetig bzgl. der Zariski-Topologie.

Beweis.

$$\phi^{-1}(\underset{A(Y)}{D(\underset{\cap}{f})}) = D(\underbrace{f \circ \phi}_{\in A(X)})$$

$\blacksquare$

Def. 14 $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$. Dann ist das kartesische Produkt $X \times Y \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ wieder eine affine Varietät, das Produkt von X, Y.

Achtung: $X \times Y$ trägt nicht die Produkttopologie

Beweis. (14)

$$X = V(f_1, -, f_n),\ Y = V(g_1, -, g_m) \Rightarrow X \times Y = V(f_1, -, f_n, g_1, -, g_m)$$

$\blacksquare$

Theorem 15. Der Funktor $X \longmapsto A(X)$ induziert eine Kategorieäquivalenz von

$$\{\text{affine Varietäten} / k\}^{op} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{reduzierte endlich erz. } k\text{-Algebren}\}$$

$$(X \xrightarrow{\phi} Y) \longmapsto A(Y) \xrightarrow{\phi^*} A(X)$$

$$f + I(Y) \mapsto f \circ \phi + I(X)$$

Der quasiinverse Funktor ordnet R die Menge $\operatorname{Specm}(R)$ zu, $k[\underline{X}] \to R$ induziert $\operatorname{Specm}(R) \longrightarrow \operatorname{Specm} k[\underline{X}] = \mathbb{A}^n_k$

Alternativ können wir den Funktor $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(-, k)$ benutzen, da $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(R, k) \cong \operatorname{Specm} R$
$f \longmapsto \ker f$

($k \subseteq R/m$ ist endlich, d.h. $R/m = k$, da $k = \bar{k}$)

II. Funktoren

Yoneda-Lemma. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist der kontravariante Funktor

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \underline{\mathrm{Sets}}) = \underline{\mathrm{Sets}}^{\mathcal{C}},$$

$$\begin{array}{ccl} A & \longmapsto & h_A : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ \big\downarrow \phi & & \big\uparrow \phi^* \\ B & & h_B : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \end{array}$$

volltreu, d.h.

$$h_A(B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Func}}(h_B, h_A)$$

$$\phi \longmapsto \left(\phi^* : h_B(C) \to h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}} \quad \text{(nat. Trafos)}$$

$$\eta_B(\mathrm{id}_B) \longleftarrow \left(\eta_C : h_B(C) \to h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}}$$

Mit anderen Worten: $A \in \mathcal{C}$ ist genauso gut wie der Funktor h_A.

Funktoren der Form h_A heißen darstellbar.

Bsp. 1. $\mathcal{C}$: Kategorie endl. erz. reduzierter k-Algebren.

(i) $\mathbb{A}^n(): \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto R^n$ wird dargestellt von $k[X_1, \dots, X_n]$

da $R^n = \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[\underline{X}], R)$

(ii) $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$ seien darstellbar. Dann ist der Produktfunktor

$F \times G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto F(R) \times G(R)$ darstellbar.

$$F = h_A,\ G = h_B,\ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow F(R) \times G(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, R) \times \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, R)$$

$$\text{d.h. } F \times G = h_{A \otimes_k B} \qquad = \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A \otimes_k B, R)$$