12.06.18
Lec 2.

Korollar 7.17. $L|K$ endl., zyklisch galoissch, $\langle \sigma \rangle = G = Gal(L|K)$. Dann:

$$\ker(N_{L|K} : L^\times \to K^\times) = \operatorname{im}(L^\times \to L^\times,\ \alpha \mapsto \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha})$$

Beweis. verwende zyklische Auflösung $P^\cdot \quad \dots \to \underset{-2}{\mathbb{Z}[G]} \xrightarrow{\sum \sigma^i} \underset{-1}{\mathbb{Z}[G]} \xrightarrow{\sigma - 1} \underset{0}{\mathbb{Z}[G]} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$

$$0 = H^1(L|K, L^\times) = H^1(\operatorname{Hom}_G(P^\cdot, L^\times)) = H^1(\dots \leftarrow L^\times \leftarrow L^\times \leftarrow L^\times \leftarrow \dots)$$

$\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \leftarrow\!\shortmid\ \alpha$

$N_{L|K}(\beta) \leftarrow\!\shortmid\ \beta$

Satz 7.18. $H^i(L/K, L) = 0 \quad \forall i > 0$

Beweis. wie in 7.16 oE L/K endlich. Dann: $L \simeq K[G] = \operatorname{Ind}_e^G K \cong \operatorname{CoInd}_e^G K$ als $K[G]$-Modul (Normalbasissatz)

Nun: $H^i(L/K, \operatorname{CoInd}_e^G K) \underset{\text{Shap.}}{\simeq} H^i(K/K, K) = 0 \ \forall i \geq 1$.

(Normalbasissatz: L | endl. galoissch K $\Rightarrow \exists b \in L : \{gb \mid g \in Gal(L|K)\}$ ist K-Basis von L.)

▨

Def. 7.19. $Br(K) := H^2(K, (K^{sep})^\times)$ heißt Brauergruppe von K.

Proposition 7.20. Folgende Sequenz ist linksexakt.

$$0 \to H^2(L/K, L^\times) \xrightarrow{\text{Inf}} Br(K) \xrightarrow{\text{Res}} Br(L)$$

Beweis. Inflations-Restriktionssequenz. und $(L^{sep})^\times = (K^{sep})^\times$ und $((K^{sep})^\times)^{G_L} = L^\times$, $G_L = Gal(L^{sep}/L)$

▨

Bsp. 7.21. K endlicher Körper $\Rightarrow Br(K) = 0$.

Beweis. z.z.: $H^2(L/K, L^\times) = 0$. für L/K endlich.

Ü: $L^\times$ endl., $L|K$ endl. zyklisch $\Rightarrow \# H^2(L/K, L^\times) = \# H^1(L/K, L^\times) \underset{H.90}{\Rightarrow} H^2(L/K, L^\times) = 0$.

▨

Kummertheorie. (vgl. Aufgabe 5) $\mu_n = \{\zeta \in K^{alg} \mid \zeta^n = 1\}$ (implizit: char $K \nmid n$!)

$A \in {}_G\underline{\text{Mod}} \Rightarrow A[n] = n$-Torsionsuntermodul $\in {}_G\underline{\text{Mod}}$
$= \{a \in A \mid n \cdot a = 0\}$

$(K^{sep})^\times[n] = \mu_n$.

Proposition 7.22. Falls $\operatorname{char} K \nmid n$, so existieren kanonische Isomorphismen

$$\alpha : H^1(K, \mu_n) \xleftarrow{\sim} K^\times / K^{\times n}, \qquad \beta : H^2(K, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Br}(K)[n].$$

Beweis. Verwende die Kummersequenz: $0 \to \mu_n \to (K^{sep})^\times \xrightarrow[x \mapsto x^n]{} (K^{sep})^\times \to 0$

wende $H^\bullet_{cts}(G_K, -)$ an:

$$\ldots \to K^\times \xrightarrow[x \mapsto x^n]{} K^\times \to H^1(K, \mu_n) \to 0 \xrightarrow{\text{Hilbert 90}} 0 \to H^2(K, \mu_n) \to \operatorname{Br}(K) \xrightarrow{x \mapsto n \cdot x} \operatorname{Br}(K)$$

$$\Rightarrow K^\times / K^{\times n} \cong H^1(K, \mu_n), \quad H^2(K, \mu_n) \cong \operatorname{im}(H^2(K, \mu_n) \to \operatorname{Br}(K)) = \ker(x \mapsto nx) = \operatorname{Br}(K)[n].$$ ▨

Bemerkung 7.23. Explizite Beschreibung von α!

Sei $x \in K^\times$, sei $y \in (K^{sep})^\times$ eine n-te Wurzel. Sei $\chi_x : G_K \to \mu_n$, $\sigma \mapsto \frac{\sigma(y)}{y}$.

Dann ist $\chi_x \in Z^1(G_K, \mu_n)$ und $\alpha(x \cdot K^{\times n}) = [\chi_x]$.

Anwendung.

Lemma 7.24. $L|K$ galoisch (in K^{sep}), gelte $\mu_n \subseteq L$, $\operatorname{char} K \nmid n$.

Dann: α induziert Isomorphismus: $(K^\times \cap L^{\times n}) / K^{\times n} \xrightarrow{\sim} H^1(L/K, \mu_n)$

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
(K^\times \cap L^{\times n}) / K^{\times n} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dashed, "\text{kan.}"'] & H^1(L/K, \mu_n) \arrow[d, "\substack{\text{inf.-Rest.} \\ (\text{benötigt } \mu_n = \mu_n^{G_L}) \\ (\Leftrightarrow \mu_n \subseteq L\,!)}"] \\
K^\times / K^{\times n} \arrow[r, "\alpha_K", "\sim"'] \arrow[d, "\substack{\text{kommutiert z.B.} \\ \text{wg. 7.23.}}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & H^1(K, \mu_n) \arrow[d] \\
L^\times / L^{\times n} \arrow[r, "\alpha_L", "\sim"'] & H^1(L, \mu_n)
\end{tikzcd}$$ ▨

Kor. 7.25. $\operatorname{char} K \nmid n$, $\mu_n \subseteq K$, L/K zyklisch von Grad n $\Rightarrow \exists x \in K^\times : L = K(\sqrt[n]{x})$. ($\sqrt[n]{x}$: beliebige n-Wurzel)

Beweis. 7.24 anwenden auf L/K, $\mu_n \subseteq K$! $\quad (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \operatorname{Gal}(L/K))$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xleftarrow{\sim} (K^\times \cap L^{\times n}) / K^{\times n}$$ wähle $y \in L^\times$.

$$1 \longleftarrow\!\shortmid\; y^n$$

$\chi_{y^n} : G_K \to \mu_n$, $\sigma \mapsto \frac{\sigma(y)}{y}$ hat Ordnung n.

$\underset{[L:K]=n}{\Longrightarrow}$ $L = K(y)$. y hat n Galois-Konjugierte. ▨

Theorem 7.26. (Kummer-Dualität) $L|K$ abelsche Galoiserw., so dass $Gal(L|K)$ von $n \in \mathbb{N}$ annulliert wird, gelte char $K \nmid n$ und $\mu_n \subseteq K$. Sei $\Delta := L^{\times n} \cap K^{\times}$.

Dann: $L = K(\sqrt[n]{\Delta})$ und

$$(\cdot,\cdot) : \underbrace{Gal(L|K)}_{\text{i.A. kpt. ab. Gruppe}} \times \underbrace{\Delta/K^{\times n}}_{\text{diskreter Modell}} \longrightarrow \mu_n$$

$$(\sigma, \alpha^n) \longmapsto \left(\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}\right) \quad (\alpha \in L^\times)$$

ist eine perfekte Paarung.

(perfekt: $(\sigma, \alpha) = 0 \ \forall \alpha \Rightarrow \sigma = id$; $(\sigma, \alpha) = 0 \ \forall \sigma \Rightarrow \alpha \in K^{\times n}$)

Beweis. s. Sharifi. ▨

(7.24: $(\sigma, \alpha) = 0 \ \forall \sigma \Rightarrow \alpha \in K^{\times n}$)

Korollar 7.27. char $K \nmid n$, $\mu_n \subseteq K$, $L|K$ die maximale abelsche Erweiterung von K, so dass n $Gal(L|K)$ annulliert, so gilt: $Gal(L|K) \cong \underbrace{Hom(\underbrace{K^\times/K^{\times n}}_{\text{diskret}}, \mu_n)}_{\text{kpt.}}$

Korollar 7.28. char $K = 0$, $K \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \Rightarrow G_K^{ab} \cong Hom_{cts}(\widehat{K^\times}, \varinjlim \mu_n)$ ▨

$\left(\widehat{K^\times} = \varprojlim_n K^\times/K^{\times n}\right)$

08. KLASSENFORMATIONEN

K Körper, $K^{sep} | K$ separabler Abschluss.

A diskreter G_K-Modul. $\left(A = \bigcup_{\substack{L|K \\ \text{endl. galoissch}}} A^{G_L} \right)$

(evtl. trägt A noch weitere gröbere Topologie)

$\mathcal{F}_K^{sep} = \{ L \subseteq K^{sep} \mid L \text{ endl. Erw. von } K \}$, $\mathcal{G}_K := \{ L \in \mathcal{F}_K^{sep} \mid L|K \text{ galoissch} \}$

Def. 8.1. Eine Klassenformation für K ist ein Paar (A, inv) bestehend aus einem diskreten G_K-Modul A und einer Familie $\mathrm{inv} = (\mathrm{inv}_L)_{L \in \mathcal{F}_K^{sep}}$ von Homomorphismen

$$\mathrm{inv}_L : H^2(L, A) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{so dass}$$

Axiom I: $\forall L \in \mathcal{F}_K^{sep}$: $H^1(L, A) = 0$

Axiom II: (a) $\forall L \in \mathcal{F}_K^{sep}$: inv_L ist ein Isomorphismus

(b) $\forall M | L$ auf $\mathcal{F}_K^{sep}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} H^2(L,A) \arrow[r, "\mathrm{inv}_L", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, "{[M:L]\cdot -}"] \\ H^2(M,A) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{inv}_M"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Bsp. (später)

(a) K lokaler Körper, $A = (K^{sep})^\times$, $\mathrm{inv} = ?$

(b) K globaler Körper, $A = \varinjlim_{L \in \mathcal{F}_K^{sep}} \underbrace{\mathbb{A}_L^\times / L^\times}_{\text{"Idelenklassengruppe"}}$, $\mathrm{inv} = ??$

Bemerkung. (A, inv) Klassenformation für K $\Rightarrow$ Einschränkung ist Klassenformation für L $\forall L \in \mathcal{F}_K^{sep}$.

<u>Notation</u>:

- $A_L := A^{G_L}$ für $L \in \mathcal{F}_K^{sep}$.
- $\mathrm{Res}_{L|E}$, $\mathrm{Cor}_{L|E}$ für $L|E$ in $\mathcal{F}_K^{sep}$
- $N_{L|E} = \mathrm{Cor}_{L|E}$ (für H^0): $A_L \longrightarrow A_E$, $a \longmapsto \sum_{g \in G_E/G_L} g \cdot a$

Facts 8.2. (i) $\mathrm{Res}_{L|E} : H^2(E,A) \longrightarrow H^2(L,A)$ ist surjektiv

(ii)

(ii) $\mathrm{Cor}_{L|E} : H^2(L,A) \longrightarrow H^2(E,A)$ ist injektiv

(iii) Für $\sigma \in G_K$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} H^2(L,A) \arrow[d, "\sigma^*"] \arrow[dr, "\mathrm{inv}_L"] & \\ H^2(\sigma L, A) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{\sigma L}"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Facts 8.3. $\forall L \in \mathcal{F}_K^{sep}\ \forall E \in \mathcal{G}_L$:

(i) $H^1(E/L, A_E) = 0$ (ii) inv_L induziert Isomorphismus $H^2(L/E, A_L) \xrightarrow{\sim} \frac{1}{[L:E]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

Inf-Res!