Beweis (2) $u \in \mathrm{Hom}(P^{-i}, A)$, $v \in \mathrm{Hom}(P^{-j}, A)$

$$\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(u) \cup v) = \mathrm{Cor}(u|_{P|_H} \cup v) = \mathrm{Cor}((-1)^{ij}\, u \otimes v)$$

$$= \Big(\underset{P^i \otimes P^j}{\alpha} \mapsto (-1)^{ij} \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1}(u\otimes v)(g\alpha)\Big) = \sum_{g \in H\backslash G} (-1)^{ij}\, u(\alpha) \otimes g^{-1} v(g\alpha)$$

$$= (\alpha \mapsto (-1)^{ij}\, u(\alpha) \otimes \mathrm{Cor}(v)(\alpha))$$

$$= u \cup \mathrm{Cor}(v).$$

($\underline{\mathrm{Cor}}$:
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_H(P_H^\bullet, A) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, \mathrm{CoInd}_H^G A) \arrow[r, "\pi\circ\varphi"] & \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, A) \end{tikzcd}$$
$\varphi : \mathrm{CoInd}_H^G A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_H^G A$

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, mapsto] & ((\alpha, g) \mapsto w(g\alpha)), \arrow[d, "\varphi"] & (\alpha \mapsto \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} w(g\alpha)) \\ & (\alpha \mapsto \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} \otimes w(g\alpha)) \arrow[ur, mapsto, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$
)

∎

Für eine kurze exakte Sequenz $\varepsilon : 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ sei
$$\partial_\varepsilon^i : H^i(G, A'') \to H^{i+1}(G, A') \quad \text{die } i\text{-te Randabbildung.}$$

Theorem 6.43. Die Familie aller Cup-Produkte $\cup_{i,j} : H^i(G,A) \otimes H^j(G,B) \to H^{i+j}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$ für alle $A, B \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ ist eindeutig charakterisiert durch: $(i,j \in \mathbb{N}_0\,!)$

(i) Die $\cup_{i,j}$ sind funktoriell in $A \to A'$, $B \to B'$

(ii) $\cup_{0,0} : A^G \otimes_{\mathbb{Z}} B^G \to (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^G$ ist induziert von $\mathrm{id}_{A\otimes_{\mathbb{Z}} B}$

(iii) $\forall$ ex. Sequenzen $\varepsilon : 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, so dass $\varepsilon \otimes_{\mathbb{Z}} B$ exakt ist, gilt $\forall \alpha'' \in H^i(G, A''), \beta \in H^j(G,B)$: $\delta^{i+j}_{\varepsilon\otimes B}(\alpha'' \cup_{i,j} \beta) = \delta^i_\varepsilon(\alpha'') \cup_{i+1,j} \beta$

(iv) Es gilt das Analogon zu (iii) im 2. Argument.

Beweis. (Sharifi 7.8.4) Dimensionsverschiebung.

∎

Dimensionsverschiebung gilt für G endlich auch für die Tate-Kohomologie
$$\hat{H}^i(G,A) = \hat{H}^{i-1}(G, A^*) = \hat{H}^{i+1}(G, A_*)$$

$\Rightarrow$ 6.44.

Theorem 6.44. $\exists!$ Familie von Cup-Produkten $\cup_{i,j} : \hat{H}^i(G,A) \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{H}^j(G,B) \to \hat{H}^{i+j}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$ $\forall i,j \in \mathbb{Z}$, so dass (i)–(iv) aus Thm. 6.43 auch für $\hat{H}^\bullet$ gelten.

(mit (ii) entsprechend angepasst...)

∎

Kohomologische Trivialität: Sei G endl. Gruppe.

Def. 6.45. $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ heißt kohomologisch trivial $:\Longleftrightarrow$ $\forall H \leq G$ UG: $\forall i \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^i(H, A) = 0$.

Bsp.
- A freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul
- A proj. $\mathbb{Z}[G]$-Modul
- A induzierter Modul $\Big(\underbrace{\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_G^H \, \mathrm{Ind}_0^G X)}_{=Y} \Big) = \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{Z} \otimes \mathrm{Ind}_e^G X = \mathrm{Ind}_e^G\left(\mathrm{Res}_H^e \, \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{Z} \otimes X\right)\Big)$

  nach 6.24 (a), $B = \mathbb{Z}$.

$$\hat{H}^i(H, \mathrm{Ind}_0^G X) \overset{\text{Sh.}}{=} \hat{H}^i(G, Y) = \ldots = 0.$$

Lemma 6.46. Sei G eine p-Gruppe, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ p-Torsion. $(\Longleftrightarrow A \in {}_{\mathbb{F}_p[G]}\underline{\mathrm{Mod}})$

Dann sind äquivalent:

(i) A kohomologisch trivial (ii) A ist freier $\mathbb{F}_p[G]$-Modul (iii) $\exists i \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^i(G, A) = 0$.

Vorüberlegung: (i) $0 \neq C \in {}_{\mathbb{F}_p[G]}\underline{\mathrm{Mod}} \Longrightarrow C^G \neq 0 \neq C_G$

G p-Gruppe! (ii) $C \to C'$ in ${}_{\mathbb{F}_p[G]}\underline{\mathrm{Mod}}$ und $\bar{\varphi}: C_G \to C'_G$ surj. $\Longrightarrow \varphi$ surj.

Beweis von 6.46.

(i) $\Rightarrow$ (iii): klar.

(ii) $\Rightarrow$ (i): klar

(iii) $\Rightarrow$ (ii): z.z. A induziert (von einem $\mathbb{F}_p$-VR V!)

$$\Big(A = \mathrm{Ind}_0^G V = \bigoplus_{\substack{b \in B \\ \text{Basis}}} \mathrm{Ind}_e^G \mathbb{F}_p = \bigoplus_{b \in B} \mathbb{F}_p[G] \Big)$$

$\underline{\text{OE} \quad i = -2 \quad \text{in (c)}}$ (A induziert, p-Torsion $\Longleftrightarrow A_*$ induziert, p-Torsion $\Longleftrightarrow A^*$ induziert, p-Torsion)

d.h. $H_1(G, A) = 0$. Sei $X = A_G$ $\left(A = \mathrm{Ind}_0^G \tilde{X} \Rightarrow \tilde{X} \cong A_G \right)$

$\mathrm{Ind}_e^G X$ ist freier $\mathbb{F}_p[G]$-Modul, da X $\mathbb{F}_p$-VR.

Betrachte:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}_0^G X \arrow[r, dashed, "\exists \varphi"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"'] & A \arrow[d, "\mathrm{can.}"] \\ X \arrow[r, "\bar{\varphi}", "="'] & A_G \end{tikzcd}$$

$\dashrightarrow \exists$ da $\mathrm{Ind}_e^G X$ projektiv

Es gilt: $\bar{\varphi} = \varphi \otimes_{\mathbb{F}_p[G]} I_G$

$\underset{\text{Vorüberlegung}}{\Longrightarrow}$ φ surjektiv.

Nun: (l.e. Sequenz!)
$$\underbrace{H_1(G, A)}_{=0,\ \text{n.V.}} \to (\ker \varphi)_G \to X \xrightarrow[\mathrm{id}]{\bar{\varphi}} A_G \to 0 \Rightarrow (\ker\varphi)_G = 0 \overset{\text{Vorüberl.}}{\Longrightarrow} \ker\varphi = 0.$$

Lemma 6.47. G p-Gruppe, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $\ker(A \xrightarrow{\cdot p} A) = 0$.
Dann sind äquivalent:

(i) A kohomologisch trivial

(ii) A/pA freier $\mathbb{F}_p[G]$-Modul

(iii) $\exists i \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^i(G,A) = 0 = \hat{H}^{i+1}(G,A)$

Beweis.
(i) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (ii): Betrachte $0 \to A \xrightarrow{\cdot p} A \to A/p \to 0$ (exakt n. Voraussetzung)

l. ex. Kohomologiesequenz $\Rightarrow$ $0 = \hat{H}^i(G,A) \to \hat{H}^i(G, A/p) \to \hat{H}^{i+1}(G,A) = 0 \to \dots$

$\Downarrow$

$\hat{H}^i(G, A/pA) = 0$, nun nutze 6.46! $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): 6.46 $\Rightarrow$ $\hat{H}^i(H, A/pA) = 0 \;\; \forall i \in \mathbb{Z},\, H \leq G$ UG.

$\xrightarrow{\text{l. ex. Sequenz}}$ $\hat{H}^i(H,A) \xrightarrow{\cdot p} \hat{H}^i(H,A)$ ist Isomorphismus $\forall i \in \mathbb{Z}$

wissen aber: $\underbrace{\#H}_{p\text{-Potenz}} \cdot \hat{H}^i(H,A) = 0$ $\Rightarrow$ $\hat{H}^i(H,A) = 0 \;\; \forall i \in \mathbb{Z}$ $\forall H \leq G$.

$\square$

Lemma 6.48. Für G endlich, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ sind äquivalent:

(i) A kohomologisch trivial.

(ii) $\forall$ p-Sylowug. $G_p \leq G$: $\mathrm{Res}^{G_p}_{G} A$ ist kohomologisch trivial

((i) $\Rightarrow$ (ii): klar, (ii) $\Rightarrow$ (i): verwende 6.39; Sharifi 7.11.8)

Lemma 6.49. Sei G endlich, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ frei als $\mathbb{Z}$-Modul.
Dann: A kohomologisch trivial $\Leftrightarrow$ A ist projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

Beweisidee: · Zeige $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(A,B) = 0 \quad \forall B \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$

dazu: $\mathrm{Hom}_G(A,B) = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, \underbrace{\mathrm{Hom}_G(A,B)}_{G\text{-Modul durch } (gf)(a) = gf(g^{-1}a)})$

A freier $\mathbb{Z}$-Modul $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,-)$ exakt! und ist I injektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul, so ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,I)$ injektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul (ist also $B \to I^{\bullet}$ inj. Auflösung, so auch $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,I^{\bullet})$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_G(A, I^{\bullet}) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I^{\bullet}))$ liefert $\mathrm{Ext}^i_G(A,B) = H^i(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B))$

Sharifi 7.11.9: A wie angenommen $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)$ koh. trivial.

$\square$