Algebraische Gruppen

Literatur:
- T.A. Springer, Linear Algebraic Groups
- J.F. Humphreys, — " —
- W.C. Waterhouse, Introduction to Affine Group Schemes

[Borel, Linear Algebraic Groups (setzt Geometrie voraus)]

0. Einleitung

Algebraische Gruppen = Gruppenobjekte in der Kategorie algebraischer Varietäten.

Varietäten: Nullstellenmengen von Polynomen in $\mathbb{A}_k^n = k^n$ (oder $\mathbb{P}_k^n$)

Morphismen: komponentenweise durch Polynome gegeben.

Vergleiche: topologische Gruppen = Abb. sind stetig (Grp.obj in Top)

Lie - Gruppen = Abb. sind glatt (Grp.obj. in Mfd)

Beispiel:

$$G = GL_n(k), \qquad k = \overline{k} \text{ alg. abgeschlossen}$$

Trick von Rabinowitch: $GL_n(k) = \{ (a_{ij}, d) \in k^{n^2+1} \mid \det(a_{ij}) \cdot d = 1 \}$

$\Rightarrow$ $A = (a_{ij})$ hat $\det A \neq 0$, d.h. $A \in GL_n(k)$

$d = \det A^{-1}$, $A^{-1} = d \cdot \underbrace{A^{adj}}_{\text{hängt polynomell von } (a_{ij}) \text{ ab.}}$

$\Rightarrow$ $A \longmapsto A^{-1}$ ist durch Polynome gegeben

$(A, B) \mapsto A \cdot B$ ist auch durch Polynome gegeben.

02

Mittwoch, 18. April 2018 11:48

Beschränkt man sich auf affine Varietäten, erhält man affine algebraische Gruppen,

für die gilt: $G \hookrightarrow GL_n(k)$ Zariski-abg. Unterraum

für geeignetes n (Einbettungssatz), daher auch der Name Lineare algebraische Gruppe.

Ziel: Struktur reduktiver / halbeinfacher affiner alg. Gruppen über alg. abg. Körper k

(mit char $k=0$ oder char $k=p>0$) untersuchen.

Strategie:

$$\begin{array}{lll} & G & \text{reduktiv} \\ & \cup\!\mid & \\ U \rtimes T = & B & \text{'Borel-Untergruppe''} \\ & \cup\!\mid & \\ T \cong G_m^n & U & \text{unipotent} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & GL_n(k) & \\ & \cup\!\mid & \\ & \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} & \\ \cup\!\mid & & \cup\!\mid \\ T = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = U \end{array}$$

(kommutative) Torus Gruppe

$G_m = GL_1(k)$

$T \subseteq G$ operiert auf $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G = T_e G$ (Tangentialraum)

(z.B. $GL_n(k)$ operiert via Konjugation auf $M_n(k) = \mathfrak{g}$)

Nicht-triviale Eigenräume liefern "Charaktere" $T \to k^\times$ (die die Eigenwerte "parametrisieren"),

die ein sogenanntes Wurzelsystem bilden, welche man mittels sog. Dynkin-Diagrammen klassifizieren kann.

(z.B. $\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \longmapsto \dfrac{x_i}{x_j}$ sind Wurzeln für $1 \leq i \neq j \leq n$ $GL_n(k)$)

03

Mittwoch, 18. April 2018 12:23

Hierarchie algebraischer Gruppen