01

Donnerstag, 19. April 2018 11:23

Differentialtopologie II

Themen:
- Einführung in die Riemannsche Geometrie
- Zellkomplexe; Homologie
- Faserbündel
- Beziehung: Topologie $\longleftrightarrow$ Geometrie
- Morse-Theorie
- Charakteristische Klassen von Vektorraumbündeln

01. Einführung in die Riemannsche Geometrie

Überblick & Ideen:

Bisher können wir nur Differentialformen auf glatten Mannigfaltigkeiten ableiten ($d: \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$), aber keine anderen Objekte wie z.B. Vektorfelder.

Wir können auch nicht über Beschleunigung sprechen.

Ziel: Wir wollen einen Rahmen finden, in dem z.B. Vektorfelder abgeleitet werden können.

Bsp.: $M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ glatt; $df = 0 \underset{M \text{ zshgd.}}{\Longrightarrow} f$ konstant

$\Rightarrow$ Hätten wir für ein Vektorfeld ξ eine Ableitung, dann sollte $d\xi = 0$ implizieren, dass ξ "konstant" ist.

Bsp. ξ auf $M = \mathbb{R}^n$ konstant $\Rightarrow$ ξ parallel

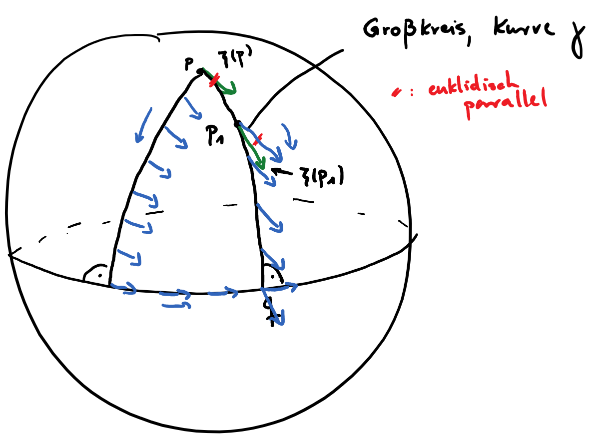
Ableitung für Vektorfelder $\Rightarrow$ Konzept von Parallelismus

Problem: Kartenwechsel erhält Parallelismus nicht!

$M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $p \in S^2$, $\xi(p) \in T_pS^2$

Durch Projektion auf $T_{p_1}S^2$ erhält man einen Tangentialvektor

$\xi(p_1) \in T_{p_1}S^2$
$\xi(p_2) \in T_{p_2}S^2$
$\vdots$
$\xi(q)$



Dann: $\max_i |p_i p_{i+1}| \longrightarrow 0$

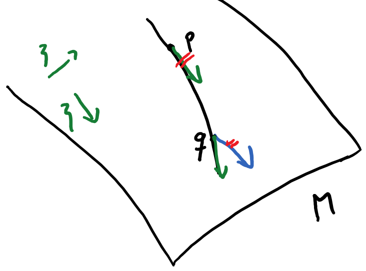
$\leadsto$ Erhalte $\xi(q) \in T_qS^2$

Paralleltransport $\xi(p) \longrightarrow \xi(q)$ entlang γ.

Neues Phänomen: "Parallelverschiebung" hängt vom Weg γ ab!

Tritt im Euklidischen Raum nicht auf.

Zurück zu Ableitungen von Vektorfeldern: Konzept von Parallelismus sei gegeben.



$p \in M$, $v \in T_pM$, $\xi : M \to TM$ Vektorfeld

Sei γ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$

Idee: $\xi(q) - \left(\begin{array}{l}\text{∥-Transport von } \xi(p) \\ \text{entlang } \gamma \text{ nach } q\end{array}\right) \in T_qM$

Dann: $|qp| \longrightarrow 0$ ($\rightsquigarrow$ unabhängig von γ)

$\rightsquigarrow$ "Kovariante" Ableitung von ξ in die Richtung v: $\nabla_v \xi \in T_pM$

"Zusammenhang"

Eigenschaften:

- Linear in v: $\nabla_{\lambda v + w} = \lambda \nabla_v + \nabla_w$
- $\nabla_v(\xi + \eta) = \nabla_v \xi + \nabla_v \eta$
- $f \in C^\infty(M) \Rightarrow \nabla_v(f\xi) = f \cdot \nabla_v \xi + \underbrace{\nabla_v f}_{:= v(f)} \cdot \xi$

<u>Geodätische:</u> Sei γ eine Kurve auf M.

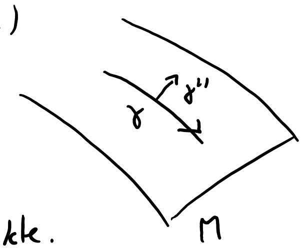
γ heißt Geodätische $:\Leftrightarrow$ $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, d.h. die Beschleunigung verschwindet.

"γ ist parallel entlang γ"

<u>Bsp.</u> $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0 \Leftrightarrow \gamma'' \perp M$ (Tangentialräume)

$\rightarrow$ Beschleunigung von γ ist 0 <u>aus Sicht von M</u>

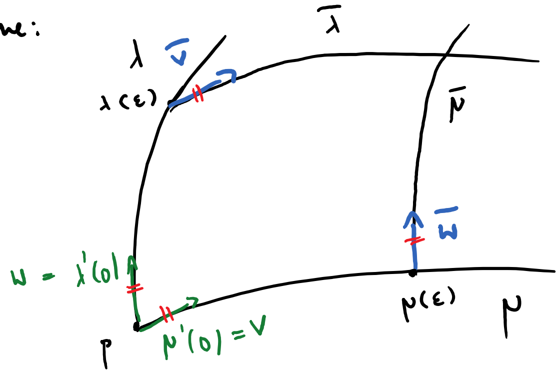


Bsp. · Geraden sind Geodätische im $\mathbb{R}^n$

· Auf S^2 sind Geodätische gegeben durch Großkreise

Lokal minimieren Geodätische den Abstand zweier Punkte.

Parallelogramme:



$\Rightarrow \|v\| = 1 = \|w\|$

Norm einer Riemannschen Metrik

Sei $\varepsilon > 0$.

$\|\bar{w}\| = 1 = \|\bar{v}\|$, da Paralleltransport eine Isometrie ist, falls Metrik kompatibel zu ∇.

λ, μ: Geodätische.

03

Dienstag, 17. April 2018 22:32

Def. $T(\xi,\eta) := \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - \underbrace{[\xi,\eta]}_{\text{"Lie-Klammer"}}$

ist ein "Tensor",
d.h. $C^\infty(M)$-bilinear.

∇ heißt symmetrisch (od. torsionsfrei), wenn $T(\xi,\eta) = 0 \ \forall \xi,\eta$.

Ist ∇ symmetrisch, dann $|q q'| = O(\varepsilon^3)$

$u_1 :=$ Paralleltransport von u entlang $\lambda, \bar\mu$

$u_2 :=$ Paralleltransport von u entlang $\mu, \bar\lambda$

$\| u_1 - u_2 \| \sim \varepsilon^2 \cdot R(v,w)u$

"asymptotisch gleich"

$R(v,w)u$ heißt Riemannscher Krümmungstensor.

Die Lie-Klammer.

Sei M^n eine glatte Mfgkt. $X, Y \in \mathfrak{X}(M) := \{V : M \to TM \mid V \text{ glattes VF}\}$

Lemma. $\exists!\ Z \in \mathfrak{X}(M) : \forall f \in C^\infty(M) : \ Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

Beweis.

Eindeutigkeit: $p \in M$, lokale Koordinaten $\{x_i\}$ bei p.

$\leadsto \quad X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ für $a_i, b_j \in C^\infty(U)$, $U \in \mathcal{U}(p)$ offen.

$$\Rightarrow X(Y(f)) = \sum_i a_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Analog: $$Y(X(f)) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\Rightarrow XY(f) - YX(f) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$
$$= \sum \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

- Existenz: Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M durch Karten. Definiere Z_α auf U_α durch (*). Wegen der Eindeutigkeit gilt $Z_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = Z_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Folglich definieren die VF Z_α ein globales $Z \in \mathfrak{X}(M)$ durch $Z|_{U_\alpha} := Z_\alpha$.

$\boxtimes$

Def. $[X,Y] := Z$ heißt **Lie-Klammer** von X,Y.

Eigenschaften:
- $[X,Y] = -[Y,X]$
- $a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow [aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1,Y] + b[X_2,Y]$

Iteration:

$$[[X,Y],Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

$$\rightsquigarrow \quad [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0 \quad \text{"Jacobi-Identität"}$$

- $f,g \in C^\infty(M)$.

$$\begin{aligned}[fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fX(g)Y + fgXY - gY(f)X - gfYX \\ &= fg[X,Y] - fX(g)Y - gY(f)\cdot X\end{aligned}$$

Da eine Mannigfaltigkeit lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, lassen sich die bekannten Sätze zu Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Anfangsproblemen von gewöhnlichen DGL von $\mathbb{R}^n$ auf Mfgkt. verallgemeinern.

Satz. Sei $M \in \underline{\text{Mfd}}$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$.
Dann existiert ein $U \in \mathcal{U}(p)$ offen, $\exists \delta > 0$, $\exists \phi : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow M$, sodass gilt:
$t \mapsto \phi(t,p)$ ist die eindeutige Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,p) = X(\phi(t,p)) \quad \forall p \in U$$

$$\text{mit } \phi(0,t) = p$$

Schreibweise: $\phi_t(p) := \phi(t,p)$

Die glatte Abbildung $\phi_t : U \to M$ heißt **Fluss** von X.

05

Mittwoch, 18. April 2018 10:18

$|s|, |t|, |s+t| < \delta$

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma_1(t) := \phi(t, \phi(s,p)) \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1' = X(\gamma_1) \\ \gamma_1(0) = \phi(s,p) \end{cases} \\ \gamma_2(t) := \phi(t+s, p) \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2' = X(\gamma_2) \\ \gamma_2(0) = \phi(s,p) \end{cases} \end{array}\right\}_{\text{Eind.}} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$$

d.h. $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$

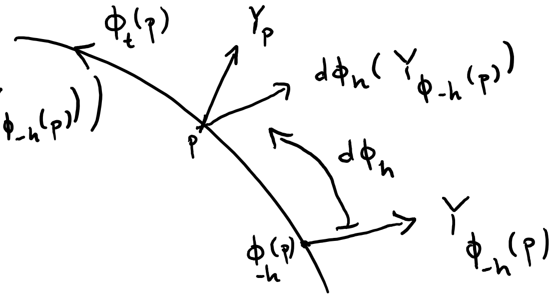
$\Rightarrow \quad id = \phi_0 = \phi_{t-t} = \phi_t \circ \phi_{-t} \quad \Rightarrow$ Jedes ϕ_t ist Diffeomorphismus (auf $\operatorname{im} \phi_t$)

Lie-Ableitung.

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$.

Sei ϕ_t der Fluss von X: $\begin{cases} \partial_t \phi(t,p) = X(\phi_t(p)) \\ \phi_0(p) = p \end{cases}$

$$(L_X Y)(p) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(Y_p - d\phi_h(Y_{\phi_{-h}(p)})\right) \in T_pM$$



Proposition. $L_X Y = [X, Y]$

Für den Beweis dieser Prop. benötigen wir ein Lemma:

Idee: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ glatt, $f(0) = 0$. $\quad f(t) = t f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + \ldots$

$$= t\underbrace{\left(f'(0) + \frac{t}{2} f''(0) + \ldots\right)}_{=: g}$$

$\Rightarrow f(t) = t \cdot g(t)$

$f'(0) = g(0)$

Lemma. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)\times M)$, $f(0,\cdot) = id_M$.

Dann: $\exists g \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)\times M)$: $f(t,\cdot) = t\cdot g(t,\cdot)$, $\frac{\partial f}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$.

Beweis.

$$g(t,p) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(st,p)\, ds$$

$\blacksquare$

Beweis der Proposition. Sei $f \in C^\infty(M)$. Hilfsfunktion $h(t,p) := f(\phi_t(p)) - f(p)$

$$\Rightarrow h(0,\cdot) \equiv 0$$

Lemma $\Rightarrow \exists g: h(t,p) = t g(t,p)$ und $\frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$

$$\Rightarrow f\circ\phi_t = f + t\cdot g_t.$$

23.04.18

Es gilt: $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t(p) = X(\phi_0(p)) = X_p$

$$X_p f = \left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi_t(p)\right] f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(f\circ\phi_t(p))$$

$$\overset{\substack{f(p)\\ \text{unabh. von}\\ t}}{=} \frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = g(0,p) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f\circ\phi_t = f + t g_t & (1) \\ Xf = g_0 & (2)\end{cases}$$

$$d\phi_h(Y_{\phi_{-h}(p)}) f = Y_{\phi_{-h}(p)}(f\circ\phi_h) \underset{(1)}{=} Y_{\phi_{-h}(p)}(f + t g_t)$$

$$(L_X Y) f = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(Y_p - d\phi_h(Y_{\phi_{-h}(p)})\right)(f)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(Y_p - Y_{\phi_{-h}(p)}\right)(f) - \lim_{h\to 0}\cancel{\tfrac{1}{h}}\cancel{h}\, \underbrace{Y_{\phi_{-h}(p)}(g_h)}_{\to Y_{\phi_0(p)}(g_0) = Y_p(Xf)}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left((Yf)_p - (Yf)_{\phi_{-h}(p)}\right)}_{} - Y_p(Xf)$$

$$= X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

$$= [X,Y] f.$$

$\blacksquare$

Folgerungen: $L_X Y = -L_Y X$, $L_X X = 0$.

Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Man kann zeigen: $\exists$ lokale Koordinaten $(x^1, -, x^n)$, sodass

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}. \quad \text{Wenn } Y = \frac{\partial}{\partial x^2}, \text{ dann } [X, Y] = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^1} = 0.$$

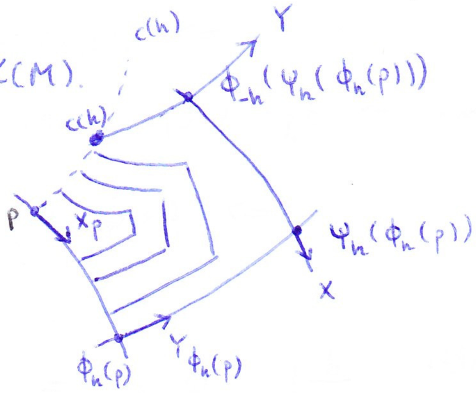
Also ist $[X,Y] = 0$ eine notwendige Bedingung für die Existenz von lok. Koordinaten so dass

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^2} \quad \text{(auch hinreichend!)}$$

- Geometrische Interpretation der Lie-Klammer: $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Sei ϕ der Fluss von X, ψ der Fluss von Y, $p \in M$.

$$c(h) := (\psi_{-h} \circ \phi_{-h} \circ \psi_h \circ \phi_h)(p)$$



$h \mapsto c(h)$ definiert eine glatte Kurve

Es gilt: $c'(0) = 0$. Für Kurven $\gamma(t)$ mit $\gamma'(0) = 0$ lässt sich die zweite Ableitung definieren durch $\gamma''(0) f := \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} (f \circ \gamma)(t)$. Dann ist $\gamma''(0)$ eine Derivation.

$\Rightarrow$ $c''(0)$ ist definiert.

Es gilt: $c'(0) = 2[X, Y]_p$

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit.

Def. Eine Riemannsche Metrik auf M ist eine Zuordnung $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p \; \forall p \in M$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ein inneres Produkt (symmetrisch, positiv definit, bilinear) auf T_pM ist. Diese Zuordnung soll glatt sein, d.h. für lokale Koordinaten (U, x) ist $p \mapsto \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p \rangle_p$ eine glatte Funktion auf U.

$$g_{ij}(p) := \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \rangle_p, \quad g_{ij} : U \to \mathbb{R} \text{ glatt} \quad (g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

Das Paar $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Def. Ein Diffeomorphismus $\phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M) \to (N, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$ heißt Isometrie $:\Leftrightarrow$

$$\forall p \in M : \forall u, v \in T_pM : \quad \langle u, v \rangle_{M,p} = \langle d\phi_p(u), d\phi_p(v) \rangle_{N, \phi(p)}$$

Bsp. ① $M = \mathbb{R}^n$ x = Standardkoordinaten

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p = \delta_{ij}$$ heißt Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

② Sei $M \overset{f}{\hookrightarrow} N$ glatte Immersion, $(N, \langle\cdot,\cdot\rangle_N)$ sei Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann induziert f eine Riemannsche Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ auf M durch

$$\langle u, v\rangle_{M,p} := \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{N, f(p)}$$

ist positiv-definit, da df injektiv!

Bsp. $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induziert eine Metrik auf S^n: "Standardsphäre"

③ Produktmetrik: Seien $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle_M)$, $(N, \langle\cdot,\cdot\rangle_N)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

$$\begin{array}{ccc} & M \times N & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ M & & N \end{array}$$

Projektionen; Seien $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$

$$\begin{array}{ccc} & T_{(p,q)}(M\times N) & \\ d\pi_1 \swarrow & & \searrow d\pi_2 \\ T_pM & & T_qM \end{array}$$

$$\langle u, v\rangle_{M\times N, (p,q)} := \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle_{M,p} + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle_{N,q}$$

ist Riemannsche Metrik, die sogenannte Produktmetrik.

Bsp. $T^n = S^1 \times \_ \times S^1$ erhält die Produktmetrik (der "flache" Torus)

(flacher Torus lässt sich nicht zeichnen, nicht einbetten)

Proposition. Jede glatte Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik.

Beweis. Sei $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M durch Karten und $\{f_\alpha\}_\alpha$ eine glatte Partition der 1 bzgl. $\{U_\alpha\}_\alpha$, $\operatorname{supp} f_\alpha \subseteq U_\alpha$.

Über U_α betrachte die eindeutige Riemannsche Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle^\alpha$ sodass

$$(U_\alpha, \langle\cdot,\cdot\rangle^\alpha) \xrightarrow{x_\alpha} (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{Eukl.}})$$ eine Isometrie ist.

Nun:
$$\langle u, v\rangle_p := \sum_\alpha f_\alpha(p) \langle u, v\rangle_p^\alpha$$ für $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

$\blacksquare$

Längenmessung: Sei $c: \mathbb{R} \to M$ eine Kurve in M.

Def. Ein Vektorfeld entlang c ist eine glatte Zuordnung $t \mapsto v(t) \in T_{c(t)}M$

Bem. Ein VF entlang c lässt sich nicht unbedingt auf ein VF auf einer offenen Umgebung der Kurve fortsetzen

Wir schreiben auch für $v \in T_pM$: $\|v\|^2 := \langle v, v\rangle_p$.

$c: \mathbb{R} \to M$ Kurve $\Rightarrow$ $l_a^b(c) := \int_a^b \|c'(t)\| \, dt$ heißt Länge der Kurve (von a bis b).

 25.04.18

Volumenmessung: sei $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Seien (U,x), (V,y) orientierte Karten auf M mit $U \cap V \neq \emptyset$.

zur Erinnerung: (Difftop I)

Lemma. $f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \in \Omega^n(U)$, $g\,dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n \in \Omega^n(V)$

mit $f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = g\,dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ auf $U \cap V$.

$\iff$ $f = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) g$ auf $U \cap V$.

(Man erhält eine Differentialform $\omega \in \Omega^n(U \cup V)$ durch Verkleben!)

$g_{ij} : U \to \mathbb{R}$, $g_{ij}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p$; $p \in U$, $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) für T_pM (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$)

$\leadsto$ $X_i = \sum_j a_{ij} e_j$. Wir erhalten eine $n \times n$-Matrix $(a_{ij}) =: A$

Basiswechselmatrix

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \left\langle \sum_k a_{ik} e_k, \sum_l a_{jl} e_l \right\rangle$$

$$= \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_k a_{ik} a_{jk}$$

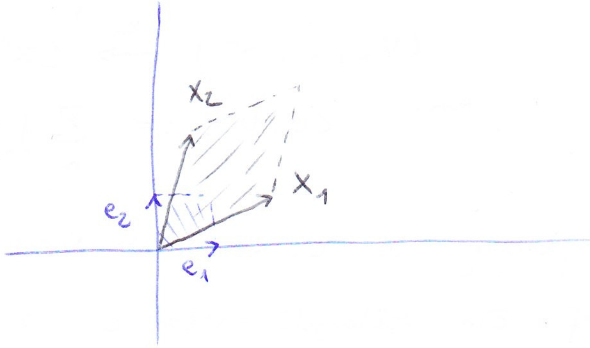
$\Rightarrow$ $(g_{ij})_{ij} = A A^T$

$\Rightarrow$ $\det(g_{ij}) = (\det A)^2 > 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\det(g_{ij})}$ ist wohldefiniert und

$\sqrt{\det(g_{ij})} = |\det A|$

Transformationssatz:

$\operatorname{vol}(X_1, \ldots, X_n) = |\det A| \cdot \underbrace{\operatorname{vol}(e_1, \ldots, e_n)}_{=1,\text{ da ONB}}$



$\Rightarrow$ $\sqrt{\det(g_{ij})} = \operatorname{vol}(X_1, \ldots, X_n)$.

Auf (V,y): $h_{ij} = \langle \underbrace{\frac{\partial}{\partial y^i}}_{=:Y_i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \rangle \underset{\text{analog}}{\leadsto} \sqrt{\det(h_{ij})} = vol(Y_1, \ldots, Y_n)$

$\underset{\text{Trafo}}{=} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) vol(X_1, \ldots, X_n)$

$= \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) \sqrt{\det(g_{ij})}$

Lemma $\Rightarrow$ $\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \sqrt{\det(h_{ij})}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ auf $U \cap V$.

Wir erhalten somit eine globale glatte n-Form $\nu \in \Omega^n(M)$, $n = \dim M$.

Def. ν heißt Riemannsche Volumenform von $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (or.)

Def. Wenn M kompakt ist, dann setzen wir $vol(M) := \int_M \nu < \infty$

"Riemannsches Volumen von $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$"

Wenn $vol(K)$ unbeschränkt ist über kompakte Untermannigfaltigkeiten $K \subseteq M$, dann sagen wir "M hat unendliches Volumen"

Bemerkung. Oft sieht man in der Literatur das Symbol $dV = \nu = dvol$, obwohl ν i. A. nicht exakt ist.

Zusammenhänge

Sei $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ der Vektorraum der glatten Schnitte von TM, d.h. der glatten Tangentialvektorfelder auf M.

Def. Ein Zusammenhang auf M ist eine Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$
$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$

sodass

1) $\forall f, g \in C^\infty(M): \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_{f \cdot X_1 + g \cdot X_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y$

2) $\forall X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

3) $\forall f \in C^\infty(M): \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_X(f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + X(f) \cdot Y$ "Produktregel"

∇ in lokalen Koordinaten: (U, x) Karte, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

$$X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\nabla_X Y \underset{1)}{=} \sum_i a^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Big(\sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big) \underset{2)}{=} \sum_i a^i \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Big(b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big)$$

$$\underset{3)}{=} \sum_{i,j} a^i \Big(\frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + b^j \cdot \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}}_{\in \mathcal{X}(M)} \Big)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \underbrace{\Gamma_{ij}^k}_{\text{"Christoffel-Symbole"}} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\Rightarrow \nabla_X Y = \sum_{i,j} a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j} a^i b^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \sum_{i,k} a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,j} a^i b^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \sum_k \Big(\sum_i a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + \sum_{i,j} a^i b^j \Gamma_{ij}^k \Big) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

KOVARIANTE ABLEITUNG

Sei $V = V(t)$ ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c(t)$ in M.

Def. Eine kovariante Ableitung ist eine Zuordnung $\frac{D}{dt} : \{\text{VF entlang } c\} \to \{\text{VF entlang } c\}$, so dass:

1) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{D}{dt} V + \frac{D}{dt} W$

2) $\forall f \in C^\infty(M)$: $\frac{D}{dt}(fV) = f \cdot \frac{D}{dt} V + \frac{df}{dt} V$

3) $\forall X \in \mathcal{X}(M)$: $X(c(t)) = V(t)$, dann:
$$\nabla_{c'(t)} X = \frac{D}{dt} V$$

(∇ ist hier ein fest gewählter Zusammenhang auf M!)

Proposition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang ∇. Sei c eine Kurve auf M. Dann existiert eine eindeutige kovariante Ableitung $\frac{D}{dt}$ mit 1) – 3). bzgl. ∇.

Beweis.

· Eindeutigkeit: $V(t)$ entlang $c(t)$. In lokalen Koordinaten $(x^1, -, x^n)$:

$$V(t) = \underset{\text{Σ Summenkonvention}}{v^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}} \quad ; \quad c(t) = (x^1(t), -, x^n(t))$$

$$\frac{D}{dt}V = v^i \underbrace{\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}\right)}_{\underset{3)}{=} \nabla_{c'(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)} + \frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\underset{(*)}{=} v^i \nabla_{c'(t)}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^{\ k}\right)\frac{d}{dx^k}$$

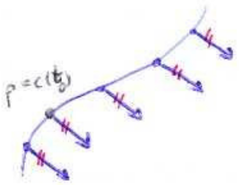
· Existenz:
Sei $\{(U_\alpha, x^\alpha)\}$ eine offene Überdeckung von M durch Karten.
Definiere $\frac{D}{dt}$ auf U_α durch $(*)$. Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ stimmen diese $\frac{D}{dt}$ überein wegen der Eindeutigkeit und definieren somit $\frac{D}{dt}$ überall. ▨

Bemerkung. Die Formel für ∇ in lokalen Koordinaten impliziert, dass $\nabla_X Y$ eine <u>lokale</u> Operation ist: $p \in M$.

$$(\nabla_X Y)(p) = \left(a^i(p)\frac{\partial b^k}{\partial x^i}(p) + a^i(p)b^j(p)\Gamma_{ij}^{\ k}(p)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p$$

Y entlang einer Integralkurve $c(t)$ von X.

Proposition. Sei c eine Kurve in M, $p = c(t_0)$, sei $V^0 \in T_pM$. Dann:
$\exists!$ VF V entlang c mit $\frac{DV}{dt} = 0$ und $V(t_0) = V^0$.



Def. Sei V ein VF entlang c. Dann sagen wir V ist parallel entlang c, wenn $\frac{DV}{dt} = 0 \ \forall t$

30.04.18

Beweis der Proposition.
· Eindeutigkeit & lokale Existenz: Hier: $\frac{D}{dt}v = \underbrace{\left(\frac{dv^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt}v^j\Gamma_{ij}^{\ k}\right)}_{\Rightarrow \ = 0}\frac{d}{dx^k} \equiv 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dv^k}{dt} = -\left(\frac{dx^i}{dt}\Gamma_{ij}^{\ k}\right)v^j}, \quad k = 1..n$$

$(*)$ System von <u>linearen</u> gewöhnlichen DGL. $\Rightarrow \exists!$ Lösungen v^k dieses Gleichungssystems

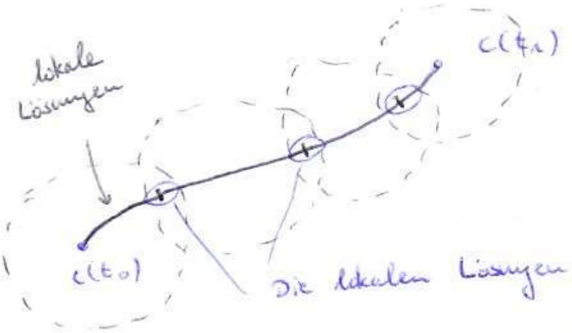
Linearität $\rightarrow$ Lösungen $v^k(t)$ existieren für alle $t \in \mathbb{R}$.

($v(t_0) = v^0$ übersetzt sich in die notwendigen Anfangspunkte)

13

- Globale Existenz: t_0, t_1 ; $c([t_0,t_1])$ ist kompakt.

$\Rightarrow$ $c([t_0,t_1])$ wird überdeckt durch endlich viele Karten von M.



Die lokalen Lösungen stimmen auf den Durchschnitten der Karten überein wegen Eindeutigkeit. ▨

Bemerkung.

1) $$\begin{array}{ccc} \tau: T_pM & \longrightarrow & T_{c(t_1)}M \\ \cup & & \cup \\ V^0 & \longmapsto & V(t_1) \end{array}$$ „Paralleltransport"

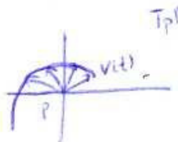
Linearität des Systems von DGL $(*)$ in lokalen Koordinaten $\Rightarrow$ τ ist linear.

Umkehren der Zeit $\tau': T_{c(t_1)}M \to T_pM$; Eindeutigkeit $\Rightarrow$ $\tau'\circ\tau = id$, $\tau\circ\tau' = id$

$\Rightarrow$ τ ist Isomorphismus, d.h. wir können Tangentialräume an verschiedenen Punkten mittels τ „vergleichen". Daher die Terminologie „Zusammenhang".

2) $\frac{DV}{dt}$ ordnet auch Vektoren an Punkten mit $c'(t) = 0$ zu. Diese Vektoren müssen nicht 0 sein!

Bsp. $c(t) \equiv p$ $\forall t$



$\frac{DV}{dt}$ ist $V'(t)$ im Euklidschen Sinne.

DER LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Def. Ein Zusammenhang ∇ auf M heißt **kompatibel** mit der Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$, wenn $\forall$ Kurven c $\forall$ parallele VF P, Q entlang c gilt: $\langle P, Q\rangle =$ konstant, d.h. Paralleltransport ist eine Isometrie.

Proposition. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ∇ sind kompatibel $\Leftrightarrow$ $\forall$ VF V, W entlang einer Kurve c gilt

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \tfrac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \tfrac{DW}{dt}\rangle$$

Beweis. „$\Leftarrow$": Seien P, Q parallele VF entlang c. $\frac{d}{dt}\langle P,Q\rangle = \underbrace{\langle \tfrac{DP}{dt}, Q\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle P, \underbrace{\tfrac{DQ}{dt}}_{=0}\rangle}_{=0} = 0$

$\Rightarrow$ $\langle P, Q\rangle$ konstant.

"$\Rightarrow$": Seien $\langle \cdot,\cdot \rangle$ und ∇ kompatibel.

Sei $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\} \subseteq T_{c(t_0)} M$ eine Orthonormalbasis.

Paralleltransport liefert VF $P_1, \dots, P_n$ entlang mit $\{P_i(t_0)\}_i$ die gegebene ONB, P_i parallel entlang c.

Kompatibilität $\Rightarrow$ $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ ist ONB an $T_{c(t)}M$.

Seien V, W VF entlang c

$$V(t) = v^i(t) P_i(t), \quad W(t) = w^j(t) P_j(t)$$

$$\frac{DV}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Produkt-} \\ \text{regel}}}{=} \frac{dv^i}{dt} P_i + v^i \underbrace{\frac{DP_i}{dt}}_{=0} = \frac{dv^i}{dt} P_i \underset{\text{analog}}{\Rightarrow} \frac{DW}{dt} = \frac{dw^j}{dt} P_j$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle = \left\langle \frac{dv^i}{dt} P_i, w^j P_j \right\rangle = \frac{dv^i}{dt} w^j \underbrace{\langle P_i, P_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \frac{dv^i}{dt} w^i \delta_{ii}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) \delta_{ii}$$

$$\langle V, W \rangle = \langle v^i P_i, w^j P_j \rangle = v^i w^j \underbrace{\langle P_i, P_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = v^i w^i \delta_{ii}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) \delta_{ii}$$ ☐

Korollar. $\langle \cdot,\cdot \rangle$ und ∇ sind kompatibel $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y, Z \in \Gamma(M)$:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

Beweis. $p \in M$. Wähle Kurve c mit $c(0) = p$, $c'(0) = X_p$.

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \underset{\substack{\| \\ V(t)}}{Y_{c(t)}}, \underset{\substack{\| \\ W(t)}}{Z_{c(t)}} \rangle$$ ☐

Symmetrie von Zusammenhängen:

Def. Ein Zusammenhang ∇ heißt symmetrisch, wenn $\forall X, Y \in \Gamma(M)$: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

In lokalen Koordinaten für $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Für die Christoffel-Symbole bedeutet dies $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Bemerkung. $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ "Torsion"; T ist bilinear über $C^\infty(M)$, d.h. T ist ein sog. Tensor.

∇ symmetrisch $\Leftrightarrow$ ∇ torsionsfrei.

Satz. (LEVI-CIVITA)

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang ∇ auf M (der Riemannsche Zusammenhang oder Levi-Civita-Zusammenhang), sodass gilt:

(i) ∇ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind kompatibel (ii) ∇ ist symmetrisch.

Beweis. - Eindeutigkeit.

$X, Y, Z \in \Gamma(M)$.

$$X\langle Y, Z\rangle \underset{\text{komp.}}{=} \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$+ \quad Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$- \quad Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X\rangle + \langle X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y\rangle + \langle Z, \nabla_X Y + \nabla_Y X\rangle$$

$$\underset{\text{symmetrisch}}{=} \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle + 2 \cdot \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$\Rightarrow \langle Z, \nabla_Y X\rangle \underset{①}{=} \frac{1}{2}\Big[X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle - \langle Z, [X, Y]\rangle \Big]$$

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit

Existenz: Definiere ∇ durch ①. Dann rechnet man nach, dass ∇ ein Zusammenhang ist, der symmetrisch und kompatibel mit der Riemannschen Metrik ist.