

Volumenmessung: sei $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Seien (U,x), (V,y) orientierte Karten auf M mit $U \cap V \neq \emptyset$.

Zur Erinnerung: (Difftop I)

Lemma. $f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \in \Omega^n(U)$, $g\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n \in \Omega^n(V)$

mit $f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = g\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ auf $U \cap V$.

$\Leftrightarrow$ $f = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) g$ auf $U \cap V$.

(Man erhält eine Differentialform $\omega \in \Omega^n(U \cup V)$ durch Verkleben!)

$g_{ij} : U \to \mathbb{R}$, $g_{ij}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p$; $p \in U$, $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) für T_pM (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$)

$\leadsto$ $X_i = \sum_j a_{ij} e_j$. Wir erhalten eine $n \times n$-Matrix $(a_{ij}) =: A$

Basiswechselmatrix

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \left\langle \sum_k a_{ik} e_k, \sum_l a_{jl} e_l \right\rangle$$
$$= \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_k a_{ik} a_{jk}$$

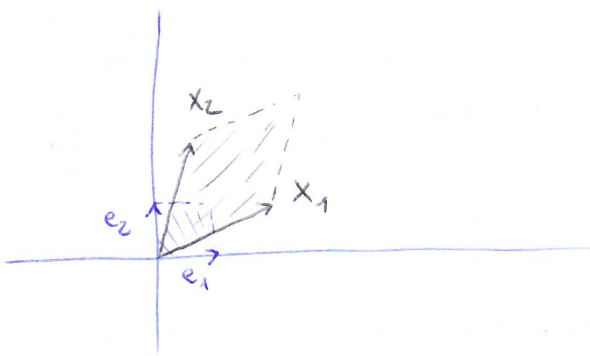
$$\Rightarrow \quad (g_{ij})_{ij} = A A^T$$

$\Rightarrow$ $\det(g_{ij}) = (\det A)^2 > 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\det(g_{ij})}$ ist wohldefiniert und

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = |\det A|$$

Transformationssatz:

$$\mathrm{vol}(X_1, \ldots, X_n) = |\det A| \cdot \underbrace{\mathrm{vol}(e_1, \ldots, e_n)}_{=1,\text{ da ONB.}}$$



$$\Rightarrow \quad \sqrt{\det(g_{ij})} = \mathrm{vol}(X_1, \ldots, X_n).$$

Auf (V,y): $h_{ij} = \langle \underbrace{\frac{\partial}{\partial y^i}}_{=: Y_i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \rangle \overset{\text{analog}}{\rightsquigarrow} \sqrt{\det(h_{ij})} = \mathrm{vol}(Y_1, \ldots, Y_n)$

$$\underset{\text{Trafo}}{=} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) \mathrm{vol}(X_1, \ldots, X_n)$$

$$= \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) \sqrt{\det(g_{ij})}$$

Lemma $\Rightarrow$ $\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \sqrt{\det(h_{ij})}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ auf $U \cap V$.

Wir erhalten somit eine globale glatte n-Form $\nu \in \Omega^n(M)$, $n = \dim M$.

Def. ν heißt Riemannsche Volumenform von $(M, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ (or.)

Def. Wenn M kompakt ist, dann setzen wir $\mathrm{vol}(M) := \int_M \nu < \infty$

"Riemannsches Volumen von $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$"

Wenn $\mathrm{vol}(K)$ unbeschränkt ist über kompakte Untermannigfaltigkeiten $K \subseteq M$, dann sagen wir "M hat unendliches Volumen"

Bemerkung. Oft sieht man in der Literatur das Symbol $dV = \nu = d\mathrm{vol}$, obwohl ν i.A. nicht exakt ist.

ZUSAMMENHÄNGE

Sei $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ der Vektorraum der glatten Schnitte von TM, d.h. der glatten Tangentialvektorfelder auf M.

Def. Ein Zusammenhang auf M ist eine Abbildung

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

sodass

1) $\forall f, g \in C^\infty(M)$: $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_{f \cdot X_1 + g \cdot X_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y$

2) $\forall X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

3) $\forall f \in C^\infty(M)$: $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_X (f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + X(f) \cdot Y$ "Produktregel"

11 ∇ in lokalen Koordinaten: (U,x) Karte, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

$$X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\nabla_X Y \underset{1)}{=} \sum_i a^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Big(\sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big) \underset{2)}{=} \sum_i a^i \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Big(b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big)$$

$$\underset{3)}{=} \sum_{i,j} a^i \Big(\frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + b^j \cdot \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}}_{\in \mathfrak{X}(M)} \Big)$$

$$= \sum_k \underbrace{\Gamma_{ij}^k}_{\text{„Christoffel-Symbole"}} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\Rightarrow \nabla_X Y = \sum_{i,j} a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j} a^i b^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \sum_{i,k} a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,j} a^i b^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \sum_k \Big(\sum_i a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + \sum_{i,j} a^i b^j \Gamma_{ij}^k \Big) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Kovariante Ableitung

Sei $V = V(t)$ ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c(t)$ in M.

Def. Eine kovariante Ableitung ist eine Zuordnung $\frac{D}{dt} : \{\text{VF entlang } c\} \to \{\text{VF entlang } c\}$, so dass:

1) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{D}{dt} V + \frac{D}{dt} W$

2) $\forall f \in C^\infty(M)$: $\frac{D}{dt}(fV) = f \cdot \frac{D}{dt} V + \frac{df}{dt} V$

3) $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$: $X(c(t)) = V(t)$, dann:

$$\nabla_{c'(t)} X = \frac{D}{dt} V$$

(∇ ist hier ein fest gewählter Zusammenhang auf M!)

Proposition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang ∇. Sei c eine Kurve auf M. Dann existiert eine eindeutige kovariante Ableitung $\frac{D}{dt}$ mit 1) – 3). bzgl. ∇.

Beweis.

- Eindeutigkeit: $V(t)$ entlang $c(t)$. In lokalen Koordinaten $(x^1, -, x^n)$:

$$V(t) = v^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad ; \quad c(t) = (x^1(t), -, x^n(t))$$

↑ Summenkonvention

$$\frac{D}{dt} V = v^i \underbrace{\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}\right)}_{\underset{3)}{=} \nabla_{c'(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\underset{(*)}{=} v^i \nabla_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

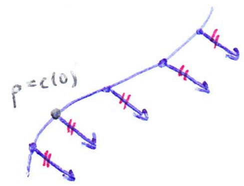
- Existenz: Sei $\{(U_\alpha, x^\alpha)\}$ eine offene Überdeckung von M durch Karten. Definiere $\frac{D}{dt}$ auf U_α durch $(*)$. Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ stimmen diese $\frac{D}{dt}$ überein wegen der Eindeutigkeit und definieren somit $\frac{D}{dt}$ überall. ▨

Bemerkung. Die Formel für ∇ in lokalen Koordinaten impliziert, dass $\nabla_X Y$ eine <u>lokale</u> Operation ist: $p \in M$.

$$(\nabla_X Y)(p) = \left(a^i(p) \frac{\partial b^k}{\partial x^i}(p) + a^i(p) b^j(p) \Gamma_{ij}^k(p)\right) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p$$

Y entlang einer Integralkurve $c(t)$ von X.

Proposition. Sei c eine Kurve in M, $p = c(0)$, sei $V^0 \in T_pM$. Dann:
$\exists!$ VF V entlang c mit $\frac{DV}{dt} = 0$ und $V(0) = V^0$.



Def. Sei V ein VF entlang c. Dann sagen wir V ist parallel entlang c, wenn $\frac{DV}{dt} = 0$.