Beweis. (i) EW von $g \neq 0 \implies$ EW von $g_s \neq 0 \implies g_s \in GL(V)$. $g_u := \mathrm{id}_V - g_s^{-1} \circ g_n$

(ii) z.z.: g_s^{-1} ist Polynom in g_s (damit auch Polynom in g)

$$\text{mipo } g_s = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \underset{\neq 0}{a_0} \implies g_s^{-1} = -a_0^{-1}\left[g_s^{n-1} - \ldots - a_1\right]$$

(iii) wie oben aus (ii). ▨

Def. 7. Sei nun V ein möglicherweise ∞-dim. k-VR, $g \in GL(V)$ und gelte

$$(*) \qquad V = \bigcup_{\substack{W \subseteq V \\ \text{endl.-dim. UVR} \\ g(W) \subseteq W}} W$$

Dann heißt g *halbeinfach (lokal unipotent)*, wenn $g|_W$ halbeinfach (unipotent) $\forall W$ wie oben.

Bsp. 8.
Nach Lemma II. 3.1 (ii) erfüllt $V = A(G)$ die Bedingung $(*)$ $[\forall g \in G: r_g^* \in GL(A(G))]$

Korollar 9. Unter der Bedingung $(*)$ für $g \in GL(V)$ gilt:

(i) $\exists!\, g_s, g_u \in GL(V)$ mit g_s halbeinfach, g_u lokal unipotent mit $g = g_s g_u = g_u g_s$

(ii) Analogon zu Korollar 6 (iii)

Beweis.

(i) $(g|_W)_s$, $(g|_W)_u$ verkleben zu g_s, g_u nach Korollar 6 (i), (ii).

(ii) W erfüllt ebenfalls $(*)$. Daher folgt die Behauptung ebenso aus Korollar 6 (ii). ▨

Bezeichne $\rho_G : G \hookrightarrow GL(A(G))$ die durch Rechtsmultiplikation induzierte Darstellung.

09.05.18

Theorem 10. Sei G eine affine algebraische Gruppe und $g \in G$.

(i) $\exists!\, g_s, g_u \in G$ mit $g = g_s g_u = g_u g_s$ und $\rho_G(g_s) = \rho_G(g)_s$, $\rho(g_u) = \rho(g)_u$

(ii) Ist $G = GL_n$, so stimmen g_s, g_u mit denen aus Korollar 6 überein.

(iii) Für jede Einbettung $\phi : G \hookrightarrow GL_n$ gilt: $\phi(g_s) = \phi(g)_s$ und $\phi(g_u) = \phi(g)_u$.

Allgemeiner kann man zeigen (Korollar 12 später), dass (iii) für beliebige Darstellungen $G \xrightarrow{\phi} GL(V)$, $\dim_k V < \infty$ gilt. g heißt halbeinfach (unipotent), falls $g = g_s$ ($g = g_u$).

Teil (ii) folgt aus dem folgenden

Lemma 11. Sei $\dim_k V < \infty$

$g \in GL(V)$ ist genau dann halbeinfach (unipotent), wenn $\rho_{GL}(g) \in GL(A(GL(V)))$ das ist.

<u>denn</u>:

$g = g_s g_u$, $\rho_{GL}(g) = \rho_{GL}(g)_s \, \rho_{GL}(g)_u$ sind eindeutig, d.h. $\rho_{GL}(g)_s = \rho_{GL}(g)_s$

und $\rho_{GL}(g)_u = \rho_{GL}(g_u)$, falls Lemma 11 gilt.

Beweis von Lemma 11.

$$\underset{\left(\overset{\shortparallel}{M_{\dim_k V}(k)}\right)}{\mathrm{End}_k(V)} \supseteq D(d) = GL(V) \text{ mit } d : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathbb{A}^1, \quad f \longmapsto \det f \qquad \text{als Varietäten.}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd}
A(\mathrm{End}_k V) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r_g^*"] & A(\mathrm{End}_k V)[\frac{1}{d}] \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & A(GL\,V) \arrow[d, "r_g^* = \rho(g)"] \\
A(\mathrm{End}_k V) \arrow[rr, hook] & & A(GL\,V)
\end{tikzcd}$$

$r_g : GL(V) \longrightarrow GL(V)$, $f \longmapsto fg$ $\Rightarrow$ $A(\mathrm{End}_k V) \subseteq A(GL\,V)$ ist ein $GL(V)$-invarianter Unterraum bezüglich der Rechtstranslation,

und es gilt: (1) $(r_g^*)(d) = d(g)\,d$, d.h. d ist Eigenvektor für r_g^*.

<u>Beh. 1</u>: Für $f \in A(\mathrm{End}_k V)$ gilt:

f ist EV für r_g^* auf $A(\mathrm{End}_k V)$ $\Longleftrightarrow$ fd^{-m} ist EV für r_g^* auf $A(GL\,V)$ $\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

<u>denn</u>: "$\Rightarrow$": $fd^{-m} : GL(V) \longrightarrow \mathbb{A}^1$; $\quad r_g^*(fd^{-m})(x) = f(xg)\, d^{-m}(xg) = f(xg)\, d^{-m}(x)\, d^{-m}(g)$

$$= d^{-m}(g)\,\big(\underline{r_g^*(f)(x)\, d^{-m}(x)}\big) \qquad (2)$$

$$= c_g f(x)\, d^{-m}(x)$$

$$= c_g\, d^{-m}(g)\, (fd^{-m})(x)$$

"$\Leftarrow$": $m=0$.

Beh. 2 a) r_g^* h.e. auf $A(GL\,V)$ $\Leftrightarrow$ r_g^* h.e. auf $A(\mathrm{End}_k(V))$

b) r_g^* lokal unipotent auf $A(GL\,V)$ $\Leftrightarrow$ r_g^* lokal unipotent auf $A(\mathrm{End}_k(V))$

dem: "$\Rightarrow$": Korollar 9.(ii): etwa $r_g^* = (r_g^*)_s$ auf $A(GL\,V)$

$$\Rightarrow \left((r_g^*)\big|_{A(\mathrm{End}_k V)}\right) = (r_g^*)_s\big|_{A(\mathrm{End}_k V)} = r_g^*\big|_{A(\mathrm{End}_k V)}$$

für u analog.

"$\Leftarrow$": Sei $W \subseteq A(GL\,V)$ r_g^*-inv., endl.-dim. UVR

$\Rightarrow W' := W \cap A(\mathrm{End}\,V) \subseteq A(\mathrm{End}\,V)$ — " —

und $W \subseteq W'[\frac{1}{d}] = \bigcup_{m\geq 0} \frac{1}{d^m} W' \subseteq A(GL\,V)$

$$\Rightarrow A(GL\,V) = \bigcup_{\substack{m\geq 0 \\ W' \subseteq A(\mathrm{End}\,V) \\ r_g^*\text{-inv}, \\ \text{endl. dim.}}} \frac{1}{d^m} W' \quad \text{und} \quad r_g^*|_W \text{ h.e.} \overset{}{\underset{\text{Beh. 1}}{\Rightarrow}} r_g^*|_{d^{-m}W'} \text{ h.e.}$$

$r_g^*|_W$ unipotent (EW $=1$) $\overset{(1)}{\Downarrow}$ $d(g)=1$. $\underset{(2)}{\Rightarrow}$ $r_g^*|_{d^{-m}W}$ unipotent

Beh. 3. $g \in GL(V)$ h.e. (unipotent) $\Leftrightarrow$ r_g^* ist h.e. (unipotent) auf $\mathrm{End}(V)^*$ Dualraum

bzgl. $(r_g^*)(f)(x) := f(xg)$

$\Leftrightarrow$ r_g ist h.e. (unipotent) auf $\mathrm{End}(V)$
(klar, LA)
(Matrix $\to$ Matrix^T)

Beh. 4. r_g^* h.e. (unipotent) auf $\mathrm{End}(V)^*$ $\Leftrightarrow$ r_g^* h.e. (unipotent) auf $A(\mathrm{End}\,V)$

Beweis Behauptung 3: reduziert sich formal auf folgende Übung:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(V) & \xrightarrow{r_-} & \mathrm{End}(\mathrm{End}\,V) \\ \cup & /// & \cup \\ GL(V) & \xrightarrow{r_-} & GL(\mathrm{End}\,V) \\ \psi & & \\ g & & \end{array}$$

g h.e. (unipotent) $\Leftrightarrow$ r_g h.e. (unipotent)

Beweis zu Beh. 4.:

$$A(\mathrm{End}_k V) \overset{\text{symm. Algebra}}{\cong} \mathrm{Sym}(\mathrm{End}(V)^*) \qquad \left(A(\mathrm{End}_k V) = \{ \mathrm{End}_k V \xrightarrow{\text{Morphismen}} \mathbb{A}^1_k \} \supseteq \mathrm{End}(V)^* \right)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\bigoplus_{m\geq 0} \mathrm{Sym}^m(\mathrm{End}(V)^*) \qquad \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\mathrm{End}(V)^*)^{\otimes m} \Big/ \underbrace{\langle x\otimes y - y\otimes x \mid x,y \in \mathrm{End}(V)^* \rangle}_{\text{zweiseitiges Ideal}}$$

$$\cup\!|$$

$\mathrm{End}(V^*)$ ist "Grad $m = 1$"

Dabei stimmen die Operationen von r_g^* auf beiden Seiten übereinstimmen.
(Fortsetzung auf die symmetrische Algebra $\otimes$-Faktorweise)

Also folgt "$\Leftarrow$" aus Korollar 6/9 (iii/ii)

Für "$\Rightarrow$" nutze: $A \in \mathrm{End}(W)$ h.e. (unipotent) $\Rightarrow$ $A^{\otimes m} \in \mathrm{End}(W^{\otimes m})$ h.e. (unipotent)

für $W = \mathrm{End}(V)^*$

$\blacksquare$

Beweis von Theorem 10.
Betrachte Einbettung

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook, "\phi"] & GL(V) \\ G \arrow[u, "r_g"] \arrow[r, hook, "\phi"] \arrow[ur, phantom, "\equiv"] & GL(V) \arrow[u, "r_{\phi(g)}"'] \end{tikzcd} \qquad g\in G \text{ beliebig.}$$

$\Rightarrow$
Kategorien-äquivalenz

$$\begin{tikzcd} A(GL\,V) \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[d, "\rho_{GL(V)}(\phi(g))"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & A(G) \arrow[d, "\rho(g)"] \\ A(GL\,V) \arrow[r, "\phi^*"] & A(G) \end{tikzcd} \qquad (3)$$

$\phi(g) = \phi(g)_s\, \phi(g)_u$ eindeutige Jordan-Zerlegung (Kor. 6)

Beh.: $\phi(g)_s, \phi(g)_u \in \phi(G)$, dazu: $I := \ker(\phi^*)$.

Für $x \in GL(V)$ gilt:

$$x \in \phi(G) \Leftrightarrow hx \in \phi(G)\ \forall h \in \phi(G) \Leftrightarrow r_x^*(I) \subseteq I \qquad (4)$$

Funktionen, die auf G verschwinden

Insbesondere: $r^*_{\phi(g)}(I) \subseteq I \underset{\text{Kor. 9 (ii)}}{\Longrightarrow} \underbrace{\left(r^*_{\phi(g)}\right)_{s/u}}_{\overset{\text{Lemma 11}}{=} \left(\left(r_{\phi(g)}\right)_{s/u}\right)^*}(I) \subseteq I$

$\underset{(4)}{\Longrightarrow} \quad \phi(g)_{s/u} \in \phi(G)$ ✓

(i) g_s (g_u) sei das eindeutige Element, so dass $\phi(g_{s/u}) = \phi(g)_{s/u}$ gilt.

Für $G = GL(V)$ (und $\phi = id$) folgt (i) aus Lemma 11.

Aus (3), auch für g_s/g_u statt g, folgt:

$\rho_G(g_{s/u})$ ist induziert von $\rho_{GL}(\phi(g_{s/u})) = \rho_{GL}(\phi(g)_{s/u})$

$\rho_G(g)_{s/u}$ — " — $\rho_{GL}(\phi(g))_{s/u}$

wegen der Eindeutigkeit in Korollar 9.

Die Eindeutigkeit folgt, da ρ_G injektiv ist, da $\rho_G : G \to GL(A(G)) \hookrightarrow GL(W)$ injektiv ist nach Beweis von Theorem 3.

(iii) folgt nach Konstruktion, da wegen der Eindeutigkeit in (i) unabhängig von ϕ ist. ▨