Proposition 3. Es gibt einen Funktor $\{\text{alg. Grp}/k\} \xrightarrow{\text{Lie}} \{\text{Lie Algebren}/k\}$

$$G \longmapsto \mathrm{Lie}(G) := T_1 G = \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{G,1}, k)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_k(m_{G,1}/m_{G,1}^2, k)$$

in $\mathcal{O}_{G,1}$

$$= \mathrm{Hom}_k(m_1/m_1^2, k)$$

in $k[G]$

$$= \mathrm{Hom}_k(\ker(\varepsilon)/\ker(\varepsilon)^2, k)$$

Beweis.

1) $\mathrm{Hom}_k(k[G], k)$ ist assoziative k-Algebra via

$$f * g := \mu_k(f \otimes g) \circ \Delta$$

Mult. $K \otimes K \to K$, $a \otimes b \mapsto ab$

$\Leftarrow$ Assoziativität der Gruppenstruktur gg. durch Δ

2) nachrechnen, dass $\mathrm{Der}_k(k[G], k) \leq \mathrm{Hom}_k(k[G], k)$ Teil-Lie Algebra.

$\blacksquare$

23.05.18

$\mathrm{Lie}\, G := T_e G$, d.h. $\dim_k \mathrm{Lie}\, G = \dim G$ da G glatt.

$G(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{Alg}}(A_G, R)$ lässt sich auch für R nicht notwendigerweise reduziert definieren.

Lemma 4. $\mathrm{Lie}\, G \cong_{\underline{Ab}} \ker\left(G(k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \longrightarrow G(k)\right)$ als abelsche Gruppen.

$$k[\varepsilon]/\varepsilon^2 \to k, \quad \varepsilon \mapsto 0$$

Beweis.

$$\mathrm{Der}_k(A_G, k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{Alg}}(A_G, k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{Alg}}(A_G, k)$$

$$0 = ev_e(-)$$

k ist A_G Modul via Auswertung ev_e

$$\delta \longmapsto \theta_\delta : A_G \to k[\varepsilon]/\varepsilon^2$$

$$f \mapsto \underbrace{ev_e(f)}_{= f(e)} + \delta(f)\,\varepsilon$$

<u>zz</u>: $\theta_\delta(fg) \overset{!}{=} \theta_\delta(f)\,\theta_\delta(g) = (f(e) + \delta(f)\varepsilon)(g(e) + \delta(g)\varepsilon)$

$\quad \| \text{Def.} \qquad\qquad = f(e)g(e) + (f(e)\delta(g) + g(e)\delta(f))\,\varepsilon$

$f(e)g(e) + \delta(fg)\,\varepsilon$

$\Longleftrightarrow \quad \delta$ Derivation.

Bsp 5.

(i) $G = GL_n$, $\quad \operatorname{Lie} GL_n = \ker\left(GL_n(k[\varepsilon]) \longrightarrow GL_n(k) \right)$

$$= \{ \mathbb{1}_n + \varepsilon A \mid A \in M_n(k) \} \cong M_n(k)$$

$$\operatorname{Lie} GL_n \xrightarrow{\cong} M_n(k)$$
$$\delta \longmapsto \left(\delta(T_{ij})\right)_{i,j}$$

(ii) V endl.-dim. K-VR. $GL(V) \subseteq \operatorname{End}(V)$ offen.

$\Rightarrow \operatorname{Lie} GL\,V \xrightarrow{\sim} T_{id}\operatorname{End}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(V)$

Def. 6. Ein Vektorfeld $\overset{(\text{auf } G)}{v}$ ist ein $D \in \operatorname{Der}_k(A_G, A_G)$ $\quad \left[\delta_g := ev_g \circ D \in \operatorname{Der}_k(A_G, k) = T_g G \ ! \right]$

Ein Vektorfeld D heißt (links-) invariant, falls das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A_G \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\Delta"] & A_G \arrow[d, "\Delta"] \arrow[ddr, bend left, "ev_{g_1 g_2}"] & \\
A_G \otimes A_G \arrow[r, "id \otimes D"'] \arrow[d, shift right, "ev_1"'] \arrow[d, shift left, "\delta_{g_2}"] & A_G \otimes A_G \arrow[dr, "ev_{g_1} \otimes ev_{g_2}"] & \\
k \arrow[rr, equal] & & k
\end{tikzcd}$$

Auswertung von $\Delta \circ D$ bei $g_1 g_2$: $\quad \delta_{g_1 g_2}$ $\quad \|$ $\leftarrow$ Kommutativität

$\quad$ – " – $\quad (id \otimes D) \circ \Delta$ bei $g_1 g_2$: $\quad \delta_{g_2} \circ \ell_{g_1}^* \underset{\text{Def. d}}{=} d\ell_{g_1}(\delta_{g_2})$

<u>da</u>:

$$(ev_{g_1} \otimes ev_{g_2}) \circ (id \otimes D) \circ \Delta = \left(ev_{g_1} \otimes \underbrace{(ev_{g_2} \otimes D)}_{= \delta_{g_2}} \right) \circ \Delta = \delta_{g_2} \circ \underbrace{(ev_{g_1} \otimes id) \circ \Delta}_{= \ell_{g_1}^*} = \delta_{g_2} \circ \ell_{g_1}^*.$$

D.h. Links-Invarianz von $D \iff \delta_{g_1 g_2} = dl_{g_1}(\delta_{g_2}) \quad \forall g_1, g_2 \in G$

$\mathcal{D}_G$ bezeichne den VR aller links-invarianten Vektorfelder auf G.

Theorem 7. $\mathcal{D}_G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}\, G$ ist ein linearer Isomorphismus.
$D \longmapsto \delta_e = ev_e \circ D$

Beweis. Wir zeigen, dass ein inverser Funktor durch $\delta \mapsto (id \otimes \delta) \circ \Delta$ gegeben ist:

$$D := id \otimes \delta \circ \Delta : \begin{tikzcd} A_G \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & A_G \\ A_G \otimes A_G \arrow[r, "id \otimes \delta"] & A_G \otimes k \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Beh.: (i) $id \otimes \delta : A_G \otimes A_G \to A_G \in \mathrm{Der}_k(A_G \otimes A_G, A_G)$, wobei A_G via $id \otimes ev_e$ als $A_G \otimes A_G$-Modul aufgefasst wird.

(ii) $D \in \mathcal{D}_G$ (iii) Funktoren sind invers.

zu (i):

$$(id \otimes \delta)((f_1 \otimes f_2)(g_1 \otimes g_2)) = (id \otimes \delta)(f_1 g_1 \otimes f_2 g_2) = f_1 g_1 \cdot \delta(f_2 g_2)$$

$$= f_1 g_1 \left(f_2(e)\delta(g_2) + g_2(e)\delta(f_2)\right) = f_1 f_2(e) g_1 \delta(g_2) + g_1 g_2(e) f_1 \delta(f_2)$$

$$= f_1 f_2(e) \, (id \otimes \delta)(g_1 \otimes g_2) + g_1 g_2(e) \cdot (id \otimes \delta)(f_1 \otimes f_2)$$

zu (ii): $D \in \mathrm{Der}_k(A_G, A_G)$:

denn: $D(f \cdot h) = (id \otimes \delta)(\Delta(fh)) = (id \otimes \delta)(\Delta(f)\Delta(h))$

$$\underset{(i)}{=} \underbrace{(id \otimes ev_e)(\Delta f)}_{f} \underbrace{(id \otimes \delta)(\Delta h)}_{D(h)} + \underbrace{(id \otimes ev_e)(\Delta h)}_{h} \underbrace{(id \otimes \delta)(\Delta f)}_{D(f)}$$

$$= f \, D(h) + h \, D(f)$$

D linksinvariant, denn:

$$(id \otimes D) \circ \Delta \overset{Def.}{=} \left[id \otimes ((id \otimes \delta) \circ \Delta)\right] \circ \Delta \overset{\text{nachrechnen}}{=} (id \otimes (id \otimes \delta)) \circ (id \otimes \bar{\Delta}) \circ \Delta$$

$$\overset{\text{Koassoziativität}}{=} id \otimes (id \otimes \delta) \circ (\Delta \otimes id) \circ \Delta \underset{[1]}{=} \Delta \circ (id \otimes \delta) \circ \Delta = \Delta \circ D.$$

✓

[1]:

$$\begin{tikzcd}
A_G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A_G \otimes A_G \arrow[rr, "\Delta \otimes id"] \arrow[d, equal] & & A_G \otimes A_G \otimes A_G \arrow[r, "id \otimes id \otimes \delta"] & A_G \otimes A_G \arrow[d, equal] \\
A_G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & A_G \otimes A_G \arrow[rrr, "\Delta \otimes \delta"] \arrow[d, equal] & & & A_G \otimes A_G \arrow[d, equal] \\
A_G \arrow[r, "\Delta"] & A_G \otimes A_G \arrow[r, "id \otimes \delta"] & A_G \arrow[rr, "\Delta"] & & A_G \otimes A_G
\end{tikzcd}$$

$f \otimes g \mapsto \Delta(f) \cdot \delta(g)$

$f \otimes g \mapsto f \cdot \delta(g) \longmapsto \Delta(f\delta(g)) = \Delta(f) \cdot \delta(g)$

(iii)

$$\delta \mapsto (id \otimes \delta) \circ \Delta \mapsto ev_e \circ (id \otimes \delta) \circ \Delta = \delta \circ \underbrace{(ev_e \otimes id) \circ \Delta}_{= id} = \delta$$

$$D \mapsto ev_e \circ D \longmapsto (id \otimes (ev_e \circ D)) \circ \Delta = (id \otimes ev_e) \circ (id \otimes D) \circ \Delta$$
$$= \underbrace{(id \otimes ev_e) \circ \Delta}_{id} \circ D = D$$

Übung 8. (i) $\mathcal{D}_G \subseteq \mathrm{Hom}_k(A_G, A_G)$ erfüllt

$$[\mathcal{D}_G, \mathcal{D}_G] \subseteq \mathcal{D}_G$$

bzgl. $$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

(ii) Die so definierte Lie-Klammer stimmt mit derjenigen aus Prop. 3 überein.

(iii) Für char $k = p > 0$ ist $\mathcal{D}_G$ auch stabil unter $D \mapsto D^p = \underbrace{D \circ \ldots \circ D}_{p\text{-mal}}$

Proposition 9. Seien $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Lie}\, G$. Dann ist $[\delta_1, \delta_2] : A_G \to k$ geg. durch

$$[\delta_1, \delta_2] = (\delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1) \circ \Delta$$

Beweis. $D_i := (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta$, $i = 1, 2$. Dann gilt:

$$[\delta_1, \delta_2] = ev_e \circ [D_1, D_2] = ev_e\, D_1 D_2 - ev_e\, D_2 D_1$$

$$= ev_e \circ (\mathrm{id} \otimes \delta_1) \circ \Delta \circ (\mathrm{id} \otimes \delta_2) \circ \Delta - \ldots$$

$$= \delta_1 \circ \underbrace{(ev_e \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta}_{= \mathrm{id}} \circ (\mathrm{id} \otimes \delta_2) \circ \Delta - \ldots$$

$$= (\delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1) \circ \Delta.$$

∎

Korollar 10. $G \xrightarrow{\phi} H$ Morphismus alg. Grp. Dann gilt:

$d\phi = d\phi_e : \mathrm{Lie}\, G \to \mathrm{Lie}\, H$ ist Lie-Alg. Homomorphismus, d.h.

$$d\phi([\delta_1, \delta_2]_G) = [d\phi(\delta_1), d\phi(\delta_2)]_H.$$

Beweis.

$$d\phi([\delta_1, \delta_2]_G) \underset{\text{Prop 9.}}{=} (\delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1) \circ \underbrace{\Delta \circ \phi^*}_{= \phi^* \circ \Delta} = \big((\delta_1 \circ \phi^*) \otimes (\delta_2 \circ \phi^*) - (\delta_2 \circ \phi^*) \otimes (\delta_1 \circ \phi^*)\big) \circ \Delta$$

$$= [d\phi(\delta_1), d\phi(\delta_2)]_H.$$

∎

Korollar 11. Ist G kommutativ, so auch $\mathrm{Lie}\, G$, d.h. $[\cdot, \cdot]_G \equiv 0$.

Beweis.

$(\delta_1 \otimes \delta_2) \circ \Delta = (\delta_2 \otimes \delta_1) \circ \Delta$, da Δ symmetrisch.

∎