05

Freitag, 20. April 2018 09:17

Korrektur: X top. Raum.

X heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ $\emptyset, X$ sind die einzigen offen + abg. Teilmengen.

$x \sim_{zh} y \;:\Leftrightarrow\; \exists\, Y \subseteq X$ zshgd.: $x, y \in Y$. ist Äquivalenzrelation

Äquivalenzklassen unter $\sim_{zh}$ heißen Zusammenhangskomponenten.

Lemma. (Ribes-Zaleski, Lemma 1.1.11)
X kpt., hd. und $x \in X$. Dann ist die Zusammenhangskomp. die x enthält die Menge

$$[x]_{zh} = \bigcap \{ U \subseteq X \mid x \in U,\ U \text{ offen abg.} \}$$

Def. 1.5. Ein topologischer Raum X heißt total-unzusammenhängend $\Leftrightarrow$ alle Zshgskomp. von X sind 1-elementig.

Korollar. (aus Lemma) Sei X kompakt, hd. Dann gilt:
X total unzshgd $\Leftrightarrow$ Jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abg. Mengen.

Satz 1.7. Sei G eine topologische Gruppe. Dann sind äquivalent:
(i) G ist proendlich (ii) G ist kompakt, hausdorffsch und total unzusammenhängend.

Beweis.
(i) $\Rightarrow$ (ii): kompakt, hausdorffsch: letztes Mal.
g.z.z.: $e \in \prod G_i$ besitzt Umgebungsbasis aus offen abgeschlossenen Teilmengen.
Eine solche ist gegeben durch $\left\{ \prod_{i \in I_0} \{e_i\} \times \prod_{I \setminus I_0} G_i \;\middle|\; I_0 \subseteq I \text{ endlich} \right\} =: \mathcal{U}_e$
offen, abg. Normalteiler
letztes Mal: G kpt., hd., $H \leq G$ offene Untergrp. $\Rightarrow$ H abg.

Allgemeiner Fall: Schneide $\mathcal{U}_e$ mit $\varprojlim G_i$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Konsequenz aus dem folgenden Lemma. ∎

Lemma 1.8. Sei G kompakt, hausdorffsch, total unzshgd. und $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis der Eins bestehend aus offen-abg. Normalteilern.
Dann ist

$$G \xrightarrow{\varphi} \varprojlim_{N \in \mathcal{U}} G/N, \quad g \longmapsto (gN)_{N \in \mathcal{U}}$$

ein Isomorphismus topologischer Gruppen. (G/N endl. diskret)

Beweis. φ stetig: "obvious".
betrachte $G \longrightarrow \prod_{N \in \mathcal{U}} G/N$ $\leftarrow$ hat Umgebungsbasis $\mathcal{U}_e$ (s. 1.7).

Für $I_0 \subseteq \mathcal{U}_e$ endl. $\rightsquigarrow$ Umgebung $\prod_{N \in I_0} N/N \times \prod_{N \in \mathcal{U}_e \setminus I_0} G/N$

Urbild ist $\bigcap_{N \in I_0} N$ ist offen abg. Normalteiler in G $\Rightarrow$ stetig bei e $\Rightarrow$ stetig.

φ injektiv: $\varphi(g) = (e_N)_{N \in \mathcal{U}}$ $\Rightarrow$ $g \in N \;\forall N \in \mathcal{U}$.
Umgebungsbasis, G hausdorffsch.

$\Rightarrow$ $\bigcap_{\mathcal{U}_0} N = \{e\}$, d.h. $g = e$.

· φ surjektiv. Sei $(g_N \cdot N)_{N\in\mathfrak{U}} \in \varprojlim G/N$ $(N' \subseteq N \Rightarrow g_{N'}N = g_N N)$

gesucht:
$$g \in \bigcap_{N\in\mathfrak{U}} \underbrace{(g_N N)}_{\text{abg.}} \subseteq G \text{ kompakt}$$

Anm.: rechte Seite leer $\Rightarrow \exists I_0 \subseteq \mathfrak{U}$ endlich: $\bigcap_{N\in I_0} gN = \emptyset$. $\mathfrak{U}$ Umgebungsbasis

$\Rightarrow \exists N' \subseteq \bigcap_{N\in I_0} N$

φ Homöomorphismus: φ bijektiv, stetig, G kompakt, $\varprojlim G/N$ hausdorffsch. ▨

Bem. 1.9. (i) 1.8 ist anwendbar, wenn G proendlich
(ii) analog zu 1.8 lassen sich auch beweisen: G proendlich, $\mathfrak{U}$ wie 1.8

(a) $\forall\ H \leq G$ abg. gilt: $H \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{N\in\mathfrak{U}} H/N\cap H$

(b) $\forall\ H \trianglelefteq G$ abg. gilt $G/H \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{N\in\mathfrak{U}} G/N\cdot H$

Lemma 1.10. Sei G proendlich, $H \leq G$ Untergruppe. Dann sind äquivalent:
(i) H ist abgeschlossen
(ii) $H = \bigcap \{ U \mid U \leq G \text{ offene Untergruppe mit } H \leq U \}$

Beweis. "$\Leftarrow$": $U \leq G$ offen $\underset{G\text{ kpt.}}{\Rightarrow}$ U abg. Untergruppe $\Rightarrow \bigcap \{U \ldots\}$ ist abgeschlossen.

"$\Rightarrow$": Sei $V \in \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}$ wie oben) $\Rightarrow \underbrace{H\cdot V}_{=\bigcup_{h\in H} hV}$ ist offene Untergruppe von G.

In Ü: $\underset{\text{Teilmenge}}{H \subseteq G}$ kompakt $\Rightarrow \bigcap_{V\in\mathfrak{U}} H\cdot V = H$. ▨

Def. 1.11. Eine pro-p Gruppe ist ein inverser Limes von endlichen p-Gruppen.
(Insb. proendlich)

Def. 1.12. Sei G eine diskrete (i.a. unendliche) Gruppe.
Die pro-p Komplettierung von G ist
proendliche
$$\hat{G}^p := \varprojlim \{ G/N \mid N \trianglelefteq G \text{ und } G/N \text{ ist endliche } p\text{-Grp.}\}$$
endliche

Bsp. $\hat{\mathbb{Z}}^p = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$

(man kann auch Ringe pro-p oder pro-endl. komplettieren)

Def. 1.13. Der Prüferring ist die proendliche Komplettierung von $\mathbb{Z}$, $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

($\{n\mathbb{Z} \mid n\in\mathbb{N}\}$ bzgl. Inklusion, d.h. Teilbarkeit geordnet)

07

Freitag, 20. April 2018 10:12

Lemma. $\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}_p$

Beweis. $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{\text{CRS}}{\cong} \varprojlim_n \left(\prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}/p^{v_p(n)}\mathbb{Z} \right)$; $\prod_p \mathbb{Z}_p \overset{\text{proendl.}}{=} \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} \prod \mathbb{Z}_p/U$

$\mathcal{U} = \{ \underbrace{\prod_p (p^{v_p(n)} \mathbb{Z}_p)}_{=: U_n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ $\qquad = \varprojlim_n \prod \mathbb{Z}_p/U_n$

$\blacksquare$

Def. 1.14 Eine Teilmenge $S \subseteq G$ heißt topologisches Erzeugendensystem (ES) $:\Leftrightarrow$ G ist der topologische Abschluss der von S erzeugten Untergrp.

Bsp. $\{1\}$ ist topologisches EZS von $\mathbb{Z}_p$ und $\hat{\mathbb{Z}}$

Def. 1.15 Eine topologische Gruppe G heißt topologisch endlich erzeugt $:\Leftrightarrow \exists S \subseteq G$ endlich s.d. S ist top. EZS von G

Bsp. Die proendl. bzw. pro-p Komplettierung der freien nicht-abelschen Gruppen mit endlich vielen Erzeugern

Satz 1.16. (Burnside Basissatz)
Sei G eine pro-p-Gruppe. Sei $\Phi(G)$ der topologische Abschluss der von $[G,G]$ und $G^p = \{g^p \mid g \in G\}$ erzeugten Untergruppe. ($\Phi(G)$ heißt Frattini-Untergruppe von G)

Dann: G ist topologisch endl. erz. $\Leftrightarrow$ $G/\Phi(G)$ ist endlicher $\mathbb{F}_p$-VR.

Bilden $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ eine Basis von $G/\Phi(G)$, dann ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ ein <u>minimales</u> EZS.

Beweis. (ü).

$\blacksquare$

<u>Bem.</u> 1) $G/\overline{[G,G]}$ ist abelsche, hausdorff. topol. Grp.

$\Rightarrow$ $G/\overline{[G,G]G^p}$ ist abelsche p-Torsionsgruppe (d.h. $\mathbb{F}_p$-VR)

(– " – heißt p-elementar abelsch)

2) Sei G eine abelsche pro-p-Gruppe.
(a) Dann ist G ein $\mathbb{Z}_p$-Modul!, d.h. haben stetige $\mathbb{Z}_p$-Operation $\mathbb{Z}_p \times G \to G$

$$\underbrace{\alpha}_{\substack{\in \mathbb{Z}_p \\ = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}} \cdot \underbrace{g}_{= (g_i)_i \in \varprojlim G_i} := \underbrace{(\alpha \bmod \underbrace{\#G_i}_{p\text{-Potenz}} \cdot g_i)}_{= \alpha \bmod \operatorname{ord}(g_i) \cdot g_i}{}_{i \in I} \in \varprojlim_I G_i = G.$$

G_i: endl. abelsche p-Grp.

(<u>wohldef</u>? $\pi_{ji}: \begin{cases} G_j \to G_i \\ g_j \mapsto g_i \end{cases}$ $\quad \pi_{ji}(\alpha \bmod \operatorname{ord}(g_j) \cdot g_j) \overset{\operatorname{ord}(g_i) \mid \operatorname{ord}(g_j)}{=} (\alpha \bmod \operatorname{ord}(g_i) \cdot g_i)$)

z.B. $(1 + p\mathbb{Z}_p, \cdot) = \varprojlim_n \underbrace{\left(\frac{1+p\mathbb{Z}_p}{1+p^n\mathbb{Z}_p} \right)}_{= \{\beta \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \mid \beta \equiv 1 \ (n)\}} = \langle 1+p \rangle \cong \mathbb{Z}/p^{n-1}$

$\beta \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p$
$\rightsquigarrow \beta^\alpha \in 1 + p\mathbb{Z}_p$

$\blacksquare$

(b) G topol. endlich erzeugt $\underset{\ddot{u}}{\Longleftrightarrow}$ G ist endl. erz. als $\mathbb{Z}_p$-Modul

In diesem Fall kann man den Struktursatz für endl. erz. Moduln über HI-Ringen anwenden
$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_p^r \times \prod_{i=1}^{t} \mathbb{Z}/p^{n_i}$ . . .

02. Galoistheorie und unendliche Galoiserweiterungen

Whg. $L|K$ algebraische Erweiterung von Körpern

$L|K$ normal $\Longleftrightarrow \forall \alpha \in L$: $\mathrm{mipo}_K(\alpha) \in K[X]$ zerfällt über L in Linearfaktoren
$L|K$ separabel $\Longleftrightarrow \forall \alpha \in L$: $\mathrm{mipo}_K(\alpha)$ besitzt nur einfache Nullstellen in K^{alg}.
$L|K$ galoissch $:\Longleftrightarrow$ $L|K$ normal + separabel

Definiere dann: $\mathrm{Gal}(L|K) := G_{L|K} := \{ \sigma \in \mathrm{Aut}(L) \mid \sigma|_K = \mathrm{id}_K \}$

Fakt: Ist $L|F|K$ ein Zwischenkp., so ist $L|F$ galoissch.

Hauptsatz der endlichen Galoistheorie: $L|K$ endlich $\Rightarrow$ Die Abbildungen

$$\{ H \leq \mathrm{Gal}(L|K) \text{ UG} \} \underset{\mathrm{Gal}(L|F) \leftarrow F}{\overset{H \mapsto L^H}{\longleftrightarrow}} \{ L|F|K \text{ Zwischenkp.} \}$$

definiert eine Bijektion.

$$\{ H \trianglelefteq G \text{ NT} \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{ F \text{ Zwkp.} \mid F|K \text{ galoissch} \}$$

Was geht schief, wenn $L|K$ unendlich?
Man hat zu viele Untergruppen!