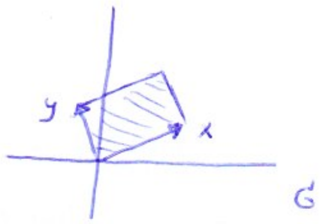
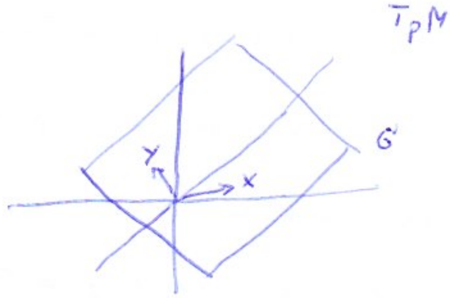


- Schnittkrümmung: Sei $p \in M$, $\sigma \subseteq T_pM$ ein 2-dim. Untervektorraum.

Sei $\{x,y\}$ eine Basis für σ.





Fläche des von x und y aufgespannten Parallelogramms ist

$$\sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2} =: A(x,y)$$

Wir betrachten: $K(x,y) := \dfrac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{A(x,y)^2}$

Lemma. $K(x,y)$ hängt nicht von der Wahl der Basis $\{x,y\}$ für σ ab.

Beweis. Jede andere Basis von σ erhält man aus $\{x,y\}$ durch Anwendung der folgenden drei elementaren Transformationen:

$$(x,y) \Rightarrow \begin{array}{l} \{y,x\} \\ (\lambda x, y) \quad \lambda \neq 0 \\ (x+\lambda y, y), \end{array}$$

— Überprüfe dann, dass $K(x,y)$ invariant bleibt unter Anwendung dieser drei Transformationen ∎

Lemma. ⟹ Wir definieren $K_p(\sigma) := K(x,y)$ für eine Basis (x,y) von σ.

"Schnittkrümmung" von M entlang σ im Punkt $p \in M$.

Die Familie $\{K_p(\sigma)\}_{\sigma \subseteq T_pM}$ bestimmt R im Punkt p eindeutig. Dies folgt aus einem Resultat der linearen Algebra, nämlich:

Prop. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein eukl. VR und seien $R, R' : V \times V \times V \to V$ trilineare Abbildungen, die beide die Symmetrien des Krümmungstensors erfüllen.

Gilt dann $\langle R(x,y)x, y\rangle = \langle R'(x,y)x, y\rangle \ \forall x,y \in V$, dann ist $R = R'$. ∎

- Ricci-Krümmung. Sei $p \in M$ und $x \in T_pM$ mit $\|x\| = 1$.

  Wir ergänzen x zu einer ONB $(x, z_1, \dots, z_{n-1})$ von T_pM.

$$Ric_p(x) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i\rangle \qquad \text{"Ricci-Krümmung"}$$

- $Ric_p(x)$ ist unabhängig von der Wahl von $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$:

$$Q(x,y) := \underset{\text{Spur}}{tr}(z \longmapsto R(x,z)y) \text{ ist eine Bilinearform. Es gilt:}$$

$$Q(x,x) = (n-1)\, Ric_p(x) \quad \text{ist unabhängig von } \{z_1, \dots, z_{n-1}\}.$$

Wie schnell entfernen sich Geodätische voneinander?

$\rightsquigarrow$ Jacobi-Felder

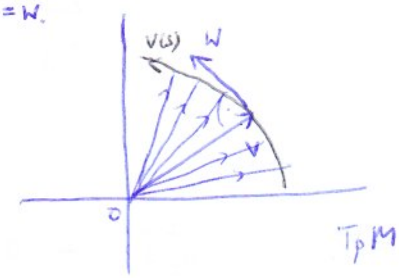
Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mfgkt. (∇ = Levi-Civita-Zshang)

Sei $p \in M$. $\exp_p : B_\varepsilon(M) \longrightarrow M$. Sei $v \in T_pM$.

$B_\varepsilon(M) \subseteq T_pM$

$$\gamma(t) = \exp_p(tv) \quad \text{Geodätische mit } \gamma'(0) = v.$$

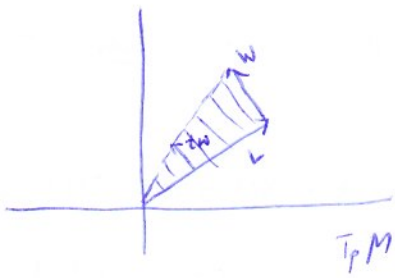
Wir betrachten Vektorfelder entlang von Geodätischen. Sei $w \in T_v T_pM$.



Wie im Gauss-Lemma sei $v(s)$ eine Kurve in T_pM mit $v(0) = v$, $v'(0) = w$.

$f(t,s) := \exp_p(t \cdot v(s))$.

Sei $J(t) = d(\exp_p)_{t\cdot v}(tw) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$. Dann ist J ein VF entlang γ.



γ Geodätische $\rightarrow \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{dt}\gamma' = 0$.

$$\Rightarrow \frac{D}{ds}\left(\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0.$$

Ist V ein VF entlang einer parametrisierten Fläche f, dann gilt:

$$\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}V - \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}V = R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)V. \quad \text{(Nachrechnen in lokalen Koordinaten)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{D}{ds}\Big(\underbrace{\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}}_{=\tilde{V}}\Big)}_{=0} = \frac{D}{dt}\underbrace{\Big(\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}\Big)}_{\underset{\nabla \text{ symm.}}{=} \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}} + R\Big(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\Big)\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \frac{D}{dt}\frac{D}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial s}\Big) + R\Big(\gamma', \frac{\partial f}{\partial s}\Big)\gamma'$$

$$\Rightarrow [1]: \frac{D^2}{dt^2} J + R(\gamma', J)\gamma' = 0. \qquad \text{"Jacobi-Gleichung"}$$

In lokalen Koordinaten:

Seien $\{e_1(t), -, e_n(t)\}$ parallele VF entlang γ, die an jedem Punkt $\gamma(t)$ eine ONB von $T_{\gamma(t)}M$ bilden. (Nutze Paralleltransport zur Konstruktion von $\{e_1(t), -, e_n(t)\}$.)

$$\Rightarrow J(t) = f^i(t)\, e_i(t).$$

- $\frac{D^2}{dt^2} J(t) = \partial_t^2 f^i(t)\, e_i(t)$

- $R(\gamma', J)\gamma' = \sum_i \langle R(\gamma', J)\gamma', e_i\rangle e_i$ "Fourier-Entwicklung"

$$= \sum_{i,j} f^j \underbrace{\langle R(\gamma', e_j)\gamma', e_i\rangle}_{=: a_{ij}} e_i$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 f^i + a_{ij} f^j = 0. \quad [2]$$

Dies ist eine <u>lineare</u> DGL 2. Ordnung.

Def. Ein Vektorfeld $J(t)$ entlang einer Geodätischen $\gamma(t)$ heißt Jacobi-Feld, wenn $J(t)$ die Jacobi-Gleichung [1] erfüllt.

[2] $\Rightarrow$ Nach Wahl von $J(0)$, $\frac{D}{dt}J(0)$ erhält man ein eindeutiges Jacobi-Feld durch Lösen von [2].

Bsp. • $\gamma'(t)$, $t\gamma'(t)$ sind Jacobi-Felder.

• Jacobi-Felder auf Mfkten. konstanter Schnittkrümmung K.

$$\langle R'(X,Y)Z, W\rangle := \langle X, Z\rangle \cdot \langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle$$

ist trilinear und erfüllt die Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors.

$$\langle R'(X,Y)X, Y\rangle = \|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2 = A(X,Y)^2.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\langle K\cdot R'(X,Y)X,Y\rangle}{A(X,Y)^2} = K = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{A(X,Y)^2}$$

$\Rightarrow$ (Lemma vorhin) $\quad R = K\cdot R'$.

Einsetzen in [1]:

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', T\rangle = K\langle R'(\gamma', J)\gamma', T\rangle$$

$$= K\left(\langle \gamma', \gamma'\rangle\langle J, T\rangle - \langle \gamma', T\rangle\langle J, \gamma'\rangle\right)$$

Sei γ parametrisiert durch die Bogenlänge und $J \perp \gamma$.

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', T\rangle = K\langle J, T\rangle \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{D^2}{dt^2}J + K\cdot J = 0.} \quad [3]$$

Sei $W(t)$ ein VF entlang γ, $\|W(t)\| = 1$ und $\langle W(t), \gamma'\rangle = 0$, W parallel.

[3] $\Rightarrow$ $\qquad \sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{K}t)}{\sqrt{K}} W(t), & K > 0 \\ t\cdot W(t), & K = 0 \\ \frac{\sinh(\sqrt{-K}\cdot t)}{\sqrt{-K}} W(t), & K < 0 \end{cases}$$