Korollar 6.23.

(a) Die Tate-Kohomologie assoziiert zu jeder kurzen exakten Sequenz eine lange ex. Kohomologiesequenz + Morphismen zw. Abb.'en kurzer ex. Seq.

(b) $M = \mathrm{CoInd}_H^G N \Rightarrow \hat{H}^i(G,M) \cong \hat{H}^i(H,N)$ (Shapiro) Funktoriell in M

(c) $G = \{e\} \Rightarrow \hat{H}^i(G,M) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

(d) M induzierter G-Modul (oder CoInd) $\Rightarrow \hat{H}^i(G,M) = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis.
(a) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \rightsquigarrow 0 \to \mathrm{Hom}_G(Q, M') \to \mathrm{Hom}_G(Q,M) \to \mathrm{Hom}_G(Q, M'') \to 0$ exakt, da Q^i $\mathbb{Z}[G]$-projektiv

etc.

(b) $\mathrm{Hom}_G(Q^\bullet, \mathrm{CoInd}_H^G N) \underset{\text{Adj.}}{\cong} \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_G^H Q, N)$

(rein formal aus Def.) $\to$ ein proj. Kplx. für Tate Kohomologie von H

und $\mathrm{Res}_G^H \mathbb{Z}[G]$ ist ein freier endl. erz. $\mathbb{Z}[H]$-Modul

(c) Nur $i = 0, 1$ interessant: $\left.\begin{array}{ccc} M_G & \xrightarrow{N_G} & M^G \\ \| & & \| \\ M & \xrightarrow{1\cdot} & M \end{array}\right\} H^{-1} = H^0 = 0$ $G = \{e\}$

(d) folgt aus (b) ∧ (c). ▢

Dimensionsverschiebung. $H \leq G$ Untergruppe.

Lemma 6.24. Sei $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $B \in {}_H\underline{\mathrm{Mod}}$. Dann existieren funktorielle Isomorphismen

(a) $\mathrm{CoInd}_H^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq \mathrm{CoInd}_H^G (B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A)$

(b) $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}_H^G B \simeq \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_G^H A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$

Beweis. 29.05.18
(a) $\mathrm{CoInd}_H^G(B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A) = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A) = Y$ $\quad \phi: X \to Y$

Für $f \in Y \to (gf)(g') = f(g'g)$ $\quad h \cdot (b \otimes a) = hb \otimes ha$

$\mathrm{CoInd}_H^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B) \otimes_{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B \otimes_A \mathrm{Res}_G^H A) = X$

$h \circ_1 (b \otimes a) = hb \otimes a$

$h \circ_2 (b \otimes a) = b \otimes ha$

Für $f \in X \to (g \cdot f)(g') = g \circ_2 f(g'g)$

wobei ϕ def. durch $\phi(f) := (g \mapsto g \cdot_2 f(g))$ (auf $\mathbb{Z}$-Basis von G!)

$\underline{\phi(f) \in Y}$:

$$\phi(f)(hg) = (hg) \cdot_2 f(hg) \underset{f \in X}{=} h \cdot_2 g \cdot_2 h \cdot_1 f(g) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s. Def.} \\ \cdot_1, \cdot_2}}{=} h \cdot_2 h \cdot_1 g \cdot_2 f(g)$$

$$= h \cdot (g \cdot_2 f(g)) = h \cdot \phi(f)(g).$$

$\underline{G\text{-äquivariant}}$: $(g\,\phi(f))(g') = \phi(f)(g'g) \underset{\text{Def.}}{=} g' \cdot_2 g \cdot_2 f(g'g)$

$$\phi(g \cdot f)(g') = g' \cdot_2 (g \cdot f)(g') = g' \cdot_2 g \cdot_2 f(g'g)$$

$\underline{\text{Isomorphismus}}$: $\phi^{-1}(f) := (g \mapsto g^{-1} \cdot_2 f(g))$ für $f \in Y$ . . .

(b) analog...

Korollar 6.25. Bezeichnung wie in 6.24 mit $H = \{e\}$, $A^0 := \mathrm{Res}_G^{\{1\}} A$.

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A) \cong \mathrm{CoInd}_{\{1\}}^G A^0$

(b) $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong_{{}_G\mathrm{Mod}} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A^0$

$\underline{\text{Aus Übung}}$: $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathrm{CoInd}_{\{1\}}^G A$, $a \mapsto (f_a : g \mapsto ga)$

$\mathrm{Ind}_{\{1\}}^G A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$, $g \otimes a \mapsto ga$

Definiere Kokern bzw. Kern $\rightsquigarrow$ erhalten kurze ex. Sequenzen

$$0 \to A \to \mathrm{CoInd}_{\{1\}}^G A \to A^* \to 0, \quad 0 \to A_* \to \mathrm{Ind}_{\{1\}}^G A \to A \to 0$$

$\underline{\text{Bemerkung}}$: $A_* \cong I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$, $A^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G, A)$ (da $0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$ spaltet (in ${}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$))

Proposition 6.26. Es existieren funktorielle Isomorphismen (in A):

(a) $H^{i+1}(G, A) \cong H^i(G, A^*)$ für $i \geq 1$

(b) $H_{i+1}(G, A) \cong H_i(G, A_*)$ für $i \geq 1$

(c) G endlich $\rightsquigarrow \forall i \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^{i-1}(G, A^*) \cong \hat{H}^i(G, A) \cong \hat{H}^{i+1}(G, A_*)$

Bemerkung: In (a) und (b) erhalten wir noch 4-Term exakte Sequenzen, z.B.

$$0 \to H^0(G,A) \to H^0(G, \operatorname{CoInd}_{\{1\}}^G A) \to H^0(G, A^*) \to H^1(G,A) \to 0.$$

(analog für (b))

Beweis. folgt aus Shapiro's Lemma und $H^i(1,-)=0$, $H_i(1,-)=0$ $\forall i\geq 1$

denn hieraus folgt:

$$H^i(G, \operatorname{CoInd}_1^G A) = H^i(1, A^0) = 0, \text{ analog } H_i(G, \operatorname{Ind}_1^G A) = 0 \quad \forall i>0$$

$$\hat{H}^i(G, \operatorname{CoInd}_1^G A) = 0 \quad \forall i\in\mathbb{Z}$$

+ lange exakte Kohomologiesequenzen zu (*). $\square$

Korollar 6.27. Sei G endlich, A ein G-Modul.

(a) Multiplikation mit $\#G$ annulliert $\hat{H}^i(G,A)$ $\forall i\in\mathbb{Z}$

(b) A endl. erz. $\mathbb{Z}$-Modul $\Rightarrow$ $\hat{H}^i(G,A)$ <u>endlich</u> $\forall i\in\mathbb{Z}$

(c) Ist $A \xrightarrow{\#G\cdot} A$ ein Isomorphismus, so gilt $\hat{H}^i(G,A)=0$ $\forall i\in\mathbb{Z}$

Beweis.

(a) Nach 6.26.: o.E. $i=0$.

$$\hat{H}^0(G,A) = A^G/N_G A, \text{ aber für } a\in A^G \text{ gilt } \#G\cdot a = N_G a \Rightarrow \#G\,\bar{a} = 0 \text{ in } \hat{H}^0(G,A)$$

(b) A endl. erz., G endlich $\Rightarrow$ A_*, A^* endl. erz./$\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ oE: $i=0$.

Dann ist die Aussage klar nach (a), da A^G endl. erz./$\mathbb{Z}$ und $\#G$-Torsion.

(c) Ist $A \xrightarrow{\#G\cdot} A$ Isomorphismus $\Rightarrow$ $\hat{H}^i(G,A) \xrightarrow{\#G\cdot} \hat{H}^i(G,A)$ Isomorphismus

$$\underset{(a)}{\Rightarrow} \hat{H}^i(G,A)=0.$$

$\square$

<u>Funktorialität in Paaren (G,A):</u> (zunächst für Kohomologie)

$\rho: G' \to G$ Grp.homomorphismus, $\lambda: A \to A'$ $\mathbb{Z}$-Modulhom., s.d. $\quad (A\in {}_G\underline{Mod},\ A'\in {}_{G'}\underline{Mod})$

$$\lambda(\rho(g')\cdot a) = g'\cdot\lambda(a) \quad \forall a\in A\ \forall g'\in G'$$

Bemerkung: ⓪ Man kann eine Kategorie (kohomologischer) Gruppe-Modul Paare definieren.
Objekte: (G,A), Morphismen: $(\rho,\lambda): (G,A) \to (G',A')$ wie oben.

① Jeder Morphismus dieser Kategorie ist Verkettung $(G,A) \xrightarrow{(\rho,\mathrm{id}_A)} \underset{?}{(G',A)} \xrightarrow{(\mathrm{id}_{G'},\lambda)} (G',A')$

A G'-Modul durch $g'a = \rho(g')a$, schreibe ggf. $\rho^* A$

Bsp. (i) $H \leq G$ UG, p Inklusion. $\lambda = \mathrm{id}_A : \underset{= \mathrm{Res}^H_G A}{A} \longrightarrow A$ $\quad (A \in {}_G\mathrm{Mod})$

(ii) $H \trianglelefteq G$, $p : G \to G/H$ Projektion, $\lambda = \text{Inkl.} : \underbrace{A^H}_{G/H\text{-Modul}} \hookrightarrow A$

Definiere zu Morphismus (p, λ) in der obigen Kategorie eine Abbildung

$$H^i(G,A) \longrightarrow H^i(G',A') \quad \forall i \geq 0 \quad \text{wie folgt.}$$

$G' \xrightarrow{p} G$ induziert $\mathbb{Z}[(G')^i] \longrightarrow \mathbb{Z}[G^i]$ trägt auch G'-Operation

induziert $\mathrm{Std}_{G'} \longrightarrow \mathrm{Std}_G$ in $\mathrm{Ch}^\cdot(\mathbb{Z}[G'])$

Damit: (1) $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Std}_G, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'}(\mathrm{Std}_G, p^*A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'}(\mathrm{Std}_{G'}, p^*A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'}(\mathrm{Std}_{G'}, A')$ in $\mathrm{Ch}^\cdot(\mathbb{Z})$

Proposition 6.28. (1) induziert Abbildungen $H^i(G,A) \longrightarrow H^i(G',A')$

(mit gewissen Funktorialitäten in
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B' \end{array} \quad \text{etc.}$$
)

(Die induzierte Abbildung ist eine natürliche Transformation von δ-Funktoren, siehe Brown, Cohomology of Groups)

Insbesondere sind die $H^i(G,A) \longrightarrow H^i(G',A')$ durch $H^0(G,A) = A^G \longrightarrow A'^{G'} = H^0(G',A')$ $\forall A \to A'$ eindeutig bestimmt.

$\boxtimes$

Bemerkung. Die Abbildungen in 6.28 sind induziert von Abbildungen

(ii) $\qquad C(G^i, A) \longrightarrow C((G')^i, A'), \quad f \longmapsto f'$

wobei
$$f'(g_1', \ldots, g_i') := \lambda(f(p(g_1'), \ldots, p(g_i'))) \quad \forall (g_1', \ldots, g_i') \in (G')^i.$$

Bemerkung. Zu
$$\begin{tikzcd} (G,A) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & (G',A') \arrow[d] \\ & (G'',A'') \end{tikzcd}$$
erhalten wir
$$\begin{tikzcd} H^i(G,A) \arrow[r] \arrow[dr] & H^i(G',A') \arrow[d] \\ & H^i(G'',A'') \end{tikzcd}$$

Def. 6.29. $H \leq G$ Untergruppe (obigen Beispiel (a))

erhalten $\mathrm{Res}: H^i(G,A) \longrightarrow H^i(H,A)$ $\quad (\rho = H \hookrightarrow G,\ \lambda = id_A)$

(Ü auf Koketten: $C^i(G,A) \to C^i(H,A),\ f \mapsto f|_{H^i}$) "Restriktion"

Def. 6.30. $N \trianglelefteq G$ Normalteiler (obigen Bsp. (b))

erhalten $\mathrm{Inf}: H^i(G/N, A^N) \longrightarrow H^i(G,A)$ $\quad (\rho = G \twoheadrightarrow G/N,\ \lambda = A^N \hookrightarrow A)$

"Inflation"

Bemerkung: Res induziert Abb'en auf langen exakten Kohomologiesequenzen.

Ü: $\mathrm{Res} = \left(H^i(G,A) \xrightarrow[\substack{H^i(G,\iota) \\ \text{aus Übung}}]{} H^i(G, \mathrm{CoInd}_H^G A) \xrightarrow[\text{Shapiro}]{\cong} H^i(H,A) \right)$

Def. 6.31. $H \leq G$ Untergruppe, $g \in G$, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$.

$$\rho_{g,H}: gHg^{-1} \xrightarrow{\sim} H,\ \tilde{h} \mapsto g^{-1}\tilde{h}g, \quad \lambda_g: A \to A,\ a \mapsto ga$$

$$\left(\lambda_g(\rho_{g,H}(\tilde{h})a) = \lambda_g(g^{-1}\tilde{h}ga) = \tilde{h}ga = \tilde{h}\lambda_g(a) \right)$$

induziert Abb'en

$$g^*: H^i(H,A) \longrightarrow H^i(gHg^{-1},A)$$

Proposition 6.32.

(a) $\forall g_1, g_2 \in G: \quad (g_1 \cdot g_2)^* = g_1^* \circ g_2^*$

(b) $\underline{N \trianglelefteq G} \Rightarrow \quad G \to \mathrm{Aut}(H^i(N,A)),\ g \mapsto g^*$ ist Gruppenwirkung mit N im Kern.

Insbesondere gilt $g^* = id$ falls $G = N$

Außerdem erhalten wir einen kohomol. Funktor ${}_G\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_{G/N}\underline{\mathrm{Mod}},\ A \mapsto H^i(N,A)$

(c) Für $K \leq H \leq G$ Untergruppen. komm. Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^i(H,A) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^i(K,A) \\ \downarrow g^* & \circlearrowleft & \downarrow g^* \\ H^i(gHg^{-1},A) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^i(gKg^{-1},A) \end{array}$$

so dass in (b) gilt:

$\mathrm{Res}: H^i(G,A) \to H^i(N,A)$ hat Bild

$H^i(N,A)^G = H^i(N,A)^{G/N}$.

Ü

Satz. 6.33. (Inflations-Restriktions-Sequenz) (ii) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$,

so ist

(a) $0 \to H^1(G/N, A^N) \xrightarrow{\mathrm{inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(N, A)^{G/N}$ exakt.

(b) gilt zusätzlich: $H^i(N, A) = 0$ für $i = 1, \dots, k-1$, so ist

$0 \to H^k(G/N, A^N) \xrightarrow{\mathrm{inf}} H^k(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^k(N, A)^{G/N}$ exakt.

Def. 6.34. (Koreskiktion)

Gelte $[G:H] < \infty$, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ (Res kann über π definiert werden!)

Cor: $H^i(H, A) \underset{\text{Shapiro}}{\simeq} H^i(G, \underbrace{\mathrm{CoInd}_H^G A}_{\substack{\cong \\ \mathrm{Ind}_H^G A, \text{ da } [G:H] < \infty}}) \simeq H^i(G, \mathrm{Ind}_H^G A) \xrightarrow[H^i(G, \pi)]{} H^i(G, A)$

heißt "Koreskiktion"

Explizit: $i = 0$:

$$\begin{array}{ccccc} a & \longmapsto & \mathrm{const}_a & \longmapsto & \sum_{g \in H \backslash G} ga. \\ H^0(H, A) & \xrightarrow{\text{Shapiro}} & H^0(G, \mathrm{CoInd}_H^G A) & \longrightarrow & H^0(G, A) \\ \| & & \| & & \\ A^H & \longrightarrow & (\mathrm{CoInd}_H^G A)^G & & \\ a & \longmapsto & (g \mapsto a)_{\text{konstant}} & & \end{array}$$

Nun

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CoInd}_H^G A & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_H^G A & \xrightarrow{\pi} & A \\ f & \longmapsto & \sum_{g \in H \backslash G} g^{-1} \otimes f(g) & \longmapsto & \sum_{g \in H \backslash G} g^{-1} f(g) = \sum_{g \in H \backslash G} g f(g^{-1}) \end{array}$$