Satz 6.50. G endliche Gruppe. Dann sind für $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ äquivalent:

(a) A kohomologisch trivial

(b) $\forall p \in \mathbb{P}$ PZ. $\exists G_p \leq G$ p-Sylowuntergruppe: $\exists i_p \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^{i_p}(G_p, A) = 0 = \hat{H}^{i_p+1}(G_p, A)$

(c) $\exists$ kurze exakte Sequenz: $0 \to P^{-1} \to P^0 \to A \to 0$ mit P^i projektives $\mathbb{Z}[G]$-Modul. $(i=-1,0)$

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): klar.

(c) $\Rightarrow$ (a): wegen lange exakte Kohomologiesequenz.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei P^0 projektive Überdeckung von A (d.h. $P^0 \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$) und sei

$$P^{-1} = \ker(P^0 \twoheadrightarrow A).$$

$\underline{\text{z.z.:}}$ P^{-1} ist projektiv.

$\underline{\text{wissen}}$ P^{-1} ist $\mathbb{Z}$-torsionsfrei als Untermodul des freien $\mathbb{Z}$-Moduls P^0.

Nach 6.49 g.z.z.: P^{-1} kohomologisch trivial.

6.48 $\Rightarrow$ $\underline{\text{g.z.z.}}$: P^{-1} kohomologisch trivial $\forall G_p$ aus (b)

6.47 $\Rightarrow$ impliziert dies aber, da aus der Vorauss (b) folgt:

$$0 \to P^{-1} \to \underset{\text{proj.}}{\underline{P^0}} \to A \to 0$$

$$0 \to \hat{H}^{i_p}(G_p, A) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{i_p+1}(G_p, P^{-1}) \to 0 \to \hat{H}^{i_p+1}(G_p, A) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{i_p+2}(G_p, P^{-1}) \to 0$$

d.h. Vorauss. für 6.47 ist für P^{-1} erfüllt. $\blacksquare$

Satz von Tate und Tate-Nakayama.

G endliche Gruppe, $G_p \leq G$ Wahl einer p-Sylowgrp. $\forall p \in \mathbb{P}$: $p \mid G$.

Lemma 6.51. Sei $\kappa: A \to B$ ein Homomorphismus in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$. Sei $\kappa_p^i: \hat{H}^i(G_p, A) \to \hat{H}^i(G_p, B)$

Gelte $\forall p$ $\exists i_p \in \mathbb{Z}$: κ_p^i surjektiv für $i = i_p - 1$, bijektiv für $i = i_p$, injektiv für $i = i_p + 1$.

Dann gilt: $\kappa^i: \hat{H}^i(H, A) \to \hat{H}^i(H, B)$ ist Isomorphismus $\forall i \in \mathbb{Z}$. $\forall H \leq G$.

Beweis.

$$0 \to A \xrightarrow[\kappa \oplus \iota]{} B \oplus \mathrm{Coind}^G A \to C := \mathrm{coker}(\kappa \oplus \iota) \to 0.$$

Kohomologiesequenz $\Rightarrow$

$$\dots \to \hat{H}^{i_p-1}(G_p,A) \xrightarrow{\kappa_p^{i_p-1}} \hat{H}^{i_p-1}(G_p,B) \longrightarrow \hat{H}^{i_p-1}(G_p,C) \longrightarrow \hat{H}^{i_p}(G_p,A) \xrightarrow[\kappa_p^{i_p}]{\cong} \hat{H}^{i_p}(G_p,B)$$

$$\hookrightarrow \hat{H}^{i_p}(G_p,C) \longrightarrow \hat{H}^{i_p+1}(G_p,A) \xhookrightarrow{\kappa_p^{i_p+1}} \hat{H}^{i_p+1}(G_p,B) \longrightarrow \dots$$

$\underset{6.50}{\Rightarrow}$ C ist kohomologisch trivial $\underset{\text{Z.E.S. für } \hat{H}}{\Longrightarrow}$ Behauptung.

(Tate-Nakayama)

Satz 6.52. $A,B,C \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $\theta: A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to C$ Morphismus in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$.

$\alpha \in \hat{H}^k(G,A)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. $\forall i \in \mathbb{Z}\ \forall H \leq G$ schreibe

$$\theta^i_{H,\alpha}: \hat{H}^i(H,B) \longrightarrow \hat{H}^{i+k}(H,C),\ \beta \longmapsto \hat{H}^i(\theta)(\mathrm{Res}^H_G\,\alpha \cup \beta)$$

Gelte $\forall p \in \mathbb{P}\ \exists i_p \in \mathbb{Z}$, so dass $\theta^i_{G_p,\alpha}$ surj. für $i = i_p-1$, bijektiv für $i=i_p$, injektiv für $i=i_p+1$.

Dann ist $\theta^i_{H,\alpha}$ ein Isomorphismus $\forall H \leq G\ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis.

<u>Fall $k=0$:</u> Definiere $B \xrightarrow{\psi} C$, $b \longmapsto \theta(\hat{\alpha} \otimes \beta)$ (wähle $\hat{\alpha} \in H^0(G,A)$ Repräsentant für $\alpha \in \hat{H}^0(G,A)$)

$$\psi^i_H := \hat{H}^i(\mathrm{Res}^H_G\,\psi): \hat{H}^i(H,B) \longrightarrow \hat{H}^i(H,C)$$

<u>Beh.:</u> $\psi^i_H = \theta^i_{H,\alpha}$ $\left(\underset{+\psi}{\overset{6.51}{\Longrightarrow}}\right.$ Behauptung, falls $k=0\left.\right)$

<u>$i \geq 0$:</u> (ψ und θ induzieren Abb. auf Koketten für H mit Koeffizienten in B, C.

$$\tilde{\psi}^i: C^i(H,B) \longrightarrow C^i(H,C),\ (f^i: H^i \to B) \longmapsto ((h_1,\dots,h_i) \longmapsto \theta(\hat{\alpha} \otimes f(h_1,\dots,h_i)))$$

$$\tilde{\theta}^i_H: C^i(H,B) \xrightarrow{\hat{\alpha} \cup -} C^i(H, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \xrightarrow{C^i(\theta)} C^i(H,C),\ \underset{\text{AW-Formel}}{f \longmapsto} ((h_1,\dots,h_i) \mapsto \hat{\alpha} \otimes f(h_1,\dots,h_i))$$

$$\downarrow$$

$$\theta(\hat{\alpha} \otimes f(h_1,\dots,h_i))$$

<u>$i < 0$:</u> Dimensionsverschiebung (s. Sharifi Prop. 1.12.1)

Voraussetzung für B, C impliziert Voraus. für B_*, C_*.

Dann Induktion für $i<0$. $\rightarrow k=0\ \forall i \in \mathbb{Z}$ ✓

<u>Fall $k \neq 0$:</u> Voraussetzung für $A \rightsquigarrow$ auch für A_*, A^*

$\alpha \in \hat{H}^k(G,A)$ induziert $\delta^*\alpha \in \hat{H}^{k-1}(G,A^*)$ bzw. $\delta_*\alpha \in \hat{H}^{k+1}(G,A_*)$

(etc. ...)

$$\left(0 \to A \to \mathrm{CoInd}\,A \to A^* \to 0 \ \Rightarrow\ 0 \to A\otimes B \to \underbrace{\mathrm{CoInd}\,A \otimes B}_{=\mathrm{CoInd}(A\otimes B)} \to \underbrace{A^*\otimes B}_{(A\otimes B)^*} \to 0 \right)$$

Satz 6.53. (Tate; Spezialfall) $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $\alpha \in H^2(G, A)$.

Gelte $\forall_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ (p \mid \# G \ldots)}}$: $H^1(G_p, A) = 0$, $H^2(G_p, A) = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{Res}_G^{G_p} \alpha \cong \mathbb{Z}/_{\# G_p}\mathbb{Z}$

Dann ist $\Theta^i_{H,\alpha}: \hat{H}^i(H, \mathbb{Z}) \longrightarrow \hat{H}^{i+2}(H, A)$, $\beta \mapsto \mathrm{Res}(\alpha) \cup \beta$ ein Isomorphismus $\forall i \in \mathbb{Z}\ \forall H \leq G$.

$(\Theta: \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{\sim} A)$

Beweis.

$i_p = 0$.

$\Theta^{-1}_{G_p,\alpha}: \hat{H}^{-1}(G_p, \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{\hat{H}^1(G_p, A)}_{=0}$ $\Rightarrow$ ist surjektiv.

$\Theta^1_{G_p,\alpha}: \underbrace{\hat{H}^1(G_p, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\overset{\text{endl.}}{G_p}, \overset{\text{keine Torsion}}{\mathbb{Z}})}_{=0} \longrightarrow \hat{H}^3(G_p, A)$ $\Rightarrow$ ist injektiv.

$\Theta^0_{G_p,\alpha}: \underbrace{\hat{H}^0(G_p, \mathbb{Z})}_{\substack{= \mathbb{Z}^G/N_{G_p}\mathbb{Z} \\ = \mathbb{Z}/\# G_p\mathbb{Z}}} \longrightarrow \hat{H}^2(G_p, A) \cong \mathbb{Z}/_{\# G_p}\mathbb{Z}$ mit Erzeuger $\mathrm{Res}_G^{G_p}(\alpha)$

$\bar{1} \longmapsto \mathrm{Res}_G^{G_p} \alpha \cup 1 = \mathrm{Res}_G^{G_p} \alpha$ $\Rightarrow$ ist bijektiv.

$\underset{6.52}{\Longrightarrow}$ Behauptung.

▨

07. Galoiskohomologie

Kohomologie pro-endl. Gruppen. Sei G eine topologische Gruppe.

Def. 7.1. Ein topologischer G-Modul ist ein G-Modul A, welcher eine Topologie trägt, so dass $(A,+)$ eine topologische Gruppe ist und $G \times A \to A$ stetig ist. (bzgl. Produkttopologie)

A heißt diskreter G-Modul $\Leftrightarrow$ A ist G-Modul und mit der diskreten Topologie ein topologischer G-Modul.

Bsp. 7.2. · A ein trivialer G-Modul $\Rightarrow$ A ist diskreter G-Modul.

· G endlich (diskr. Topologie) $\Rightarrow$ jeder G-Modul ist diskreter G-Modul

· jede endl. top. Hausdorffgruppe ist diskret.

Proposition 7.3. Sei G pro-endlich. Für einen G-Modul A sind äquivalent:

(a) A ist diskret.

(b) $\forall a \in A$: $\mathrm{Stab}_G(a)$ ist offen ist offen in G

(c) Sei $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis der Eins von G bestehend aus offenen Normalteilern. Dann gilt: $A = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} A^U$.

Beweis. Sei $\pi : G \times A \to A$ die G-Operation auf A.

(a) $\Rightarrow$ (b): $\underbrace{\pi^{-1}(\underbrace{\{a\}}_{\text{offen}})}_{\text{offen}} \cap \underbrace{G \times \{a\}}_{\text{offen}} = \mathrm{Stab}_G(a) \times \{a\} \Rightarrow \mathrm{Stab}_G(a)$ ist offen.

(b) $\Rightarrow$ (c): $\mathfrak{U}$ Umg-basis von e (aus offenen Normalteilern).

$\Rightarrow \forall a \in A \; \exists U_a \in \mathfrak{U}: \quad U_a \subseteq \mathrm{Stab}_G(a) \quad \Rightarrow \quad a \in A^{U_a}$.

(c) $\Rightarrow$ (a): z.z.: $\forall a \in A$: $\pi^{-1}(a) \underset{\text{offen}}{\subseteq} G \times A$.

Wähle $U_a \in \mathfrak{U}$: $a \in A^{U_a}$. Wähle Repräsentantensystem R_a von G/U_a.

$$\Rightarrow \pi^{-1}(a) = \bigcup_{g \in R_a} g^{-1} U_a \times \{g \cdot a\}$$

$\blacksquare$

Def. 7.4. A topologischer G-Modul, $i \in \mathbb{Z}$. $C^i_{cts}(G,A) := \{f : G^i \to A \mid f \text{ stetig}\} \subseteq C^i(G,A)$. ist die Gruppe der stetigen Koketten von G mit Koeffizienten in A.

Lemma 7.5. Sei $d_A^i : C^i(G,A) \longrightarrow C^{i+1}(G,A)$ das übliche Differential:
Dann gilt: $d_A^i(C^i_{cts}(G,A)) \subseteq C^{i+1}_{cts}(G,A)$, d.h. $(C^\bullet_{cts}(G,A), d_A^i)$ ist ein Komplex.

Beweis.
$$(d_A^i f)(g_1,\dots,g_{i+1}) = g_1 f(g_2,\dots,g_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(g_1,\dots,g_{j-1}, g_j g_{j+1}, g_{j+2},\dots,g_{i+1})$$
$$+ (-1)^{i+2} f(g_1,\dots,g_i)$$

$+$ ist stetig, $g\cdot - : A \to A$ stetig, $G \times G \to G$ stetig.

▨

$$\rightsquigarrow \quad H^i_{cts}(G,A) := H^i(C^\bullet_{cts}(G,A))$$

12.06.18
Lec 01

Proposition 7.6. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ kurze exakte Sequenz von diskreten G-Moduln, so ist
$0 \to C^\bullet_{cts}(G,A) \xrightarrow{C(\alpha)} C^\bullet_{cts}(G,B) \xrightarrow{C(\beta)} C^\bullet_{cts}(G,C) \to 0$ eine exakte Sequenz in $Ch^\bullet(\mathbb{Z})$.

Beweis.
Nur Surjektivität, Rest Übung. Sei dazu $s : C \to B$ ein mengentheoretischer Schnitt. Dieser ist stetig, da C die diskrete Topologie trägt. Ist nun $f \in C^i_{cts}(G,C)$, so ist $s\circ f \in C^i_{cts}(G,B)$ und
$$C^i(\beta)(s\circ f) = f.$$

▨

Def. 7.7. $H^i_{cts}(G,A) := H^i(C^\bullet_{cts}(G,A))$ heißt i-te stetige Kohomologiegruppe zu G mit Koeffizienten in A.

Satz 7.8. Unter den Voraussetzungen zu 7.6.: erhalten eine lange ex. Kohomologiesequenz
$$0 \to H^0_{cts}(G,A) \to H^0_{cts}(G,B) \to H^0_{cts}(G,C) \xrightarrow{\delta^0} H^1_{cts}(G,A) \to \dots$$
und zu Morphismen kurzer exakter Sequenzen von diskreten G-Moduln erhält man induz. Morphismen der entsprechenden langen exakten Sequenzen.

Beweis. Klar nach 7.6.

▨

Bsp. 7.9. G eine pro-p-Gruppe. $\Phi(G) = \overline{\langle [G,G], G^p \rangle}$

$$H^1_{cts}(G, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}_{cts}(G, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}(G/\Phi(G), \mathbb{F}_p) \underset{\text{Burnside}}{\Longrightarrow} \dim_{\mathbb{F}_p} H^1_{cts}(G,\mathbb{F}_p) = \text{min. Anzahl von Erzeugern von } G.$$
(falls endlich)