

# Differentialtopologie II

Themen:

- Einführung in die Riemannsche Geometrie
- Beziehung: Topologie  $\leftrightarrow$  Geometrie
- Zellkomplexe; Homologie
- Morse-Theorie
- Faserbündel
- Charakteristische Klassen von Vektorraumbündeln

## 01. Einführung in die Riemannsche Geometrie

Überblick & Ideen:

Bisher können wir nur Differentialformen auf glatten Mannigfaltigkeiten ableiten ( $d: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ ), aber keine anderen Objekte wie z.B. Vektorfelder.

Wir können auch nicht über Beschleunigung sprechen.

Ziel: Wir wollen einen Rahmen finden, in dem z.B. Vektorfelder abgeleitet werden können.

Bsp.:  $M \xrightarrow{+} \mathbb{R}$  glatt;  $df = 0 \Rightarrow f$  konstant

$\Rightarrow$  Hätten wir für ein Vektorfeld  $\xi$  eine Ableitung, dann sollte  $d\xi = 0$  implizieren, dass  $\xi$  "konstant" ist.

Bsp.:  $\xi$  auf  $M = \mathbb{R}^n$  konstant  $\Rightarrow \xi$  parallel

Ableitung für Vektorfelder  $\Rightarrow$  Konzept von Parallelismus  
Problem: Kartenswitch erhält Parallelismus nicht!

$$M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3, p \in S^2, \xi(p) \in T_p S^2$$

Durch Projektion auf  $T_p S^2$  erhält man einen Tangentialvektor

$$\xi(p_1) \in T_{p_1} S^2$$

$$\xi(p_2) \in T_{p_2} S^2$$

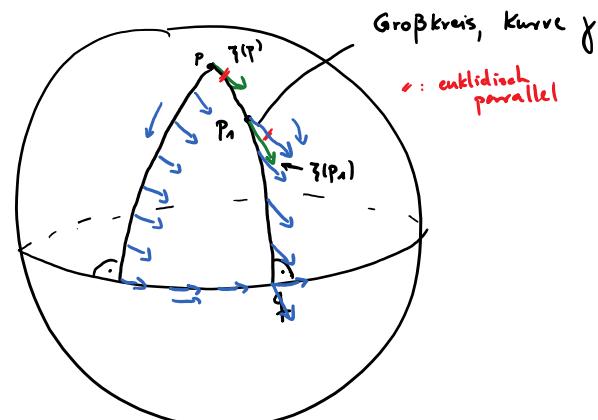
:

$$\xi(q)$$

$$\text{Dann: } \max_i |p_i p_{i+1}| \rightarrow 0$$

$$\leadsto \text{Erhalte } \xi(q) \in T_q S^2$$

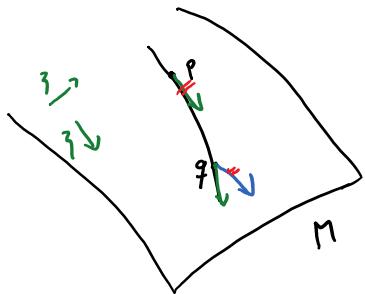
Paralleltransport  $\xi(p) \longrightarrow \xi(q)$  entlang  $\gamma$ .



Neues Phänomen: "Parallelverschiebung" hängt vom Weg  $\gamma$  ab!

Tritt im Euklidischen Raum nicht auf.

Zurück zu Ableitungen von Vektorfeldern: Konzept von Parallelismus sei gegeben.



$p \in M$ ,  $v \in T_p M$ ,  $\gamma: M \rightarrow TM$  Vektorfeld

Sei  $\gamma$  eine glatte Kurve mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$

Idee:  $\gamma(\eta) - (\text{parallel transport of } \gamma(p)) \in T_{\gamma(\eta)} M$

Dann:  $|\gamma_\eta| \rightarrow 0$  ( $\rightsquigarrow$  unabhängig von  $\gamma$ )

$\rightsquigarrow$  "Kovariante Ableitung" von  $\gamma$  in die Richtung  $v$ :  $\nabla_v \gamma \in T_p M$

Eigenschaften:

- Linear in  $v$ :  $\nabla_{\lambda v + w} \gamma = \lambda \nabla_v \gamma + \nabla_w \gamma$
- $\nabla_v (\gamma + \eta) = \nabla_v \gamma + \nabla_v \eta$
- $f \in C^\infty(M) \Rightarrow \nabla_v (f \gamma) = f \cdot \nabla_v \gamma + \underbrace{\nabla_f \gamma}_{:= v(f)}$

"Zusammenhang"

Geodätsche: Sei  $\gamma$  eine Kurve auf  $M$ .

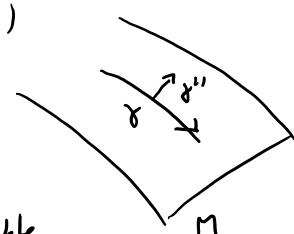
$\gamma$  heißt Geodätsche : $\Leftrightarrow \nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ , d.h. die Beschleunigung verschwindet.

" $\gamma$  ist parallel entlang  $\gamma$ "

Bsp.  $M^2 \equiv \mathbb{R}^3$

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0 \Leftrightarrow \gamma'' \perp M \quad (\text{Tangentialräume})$$

$\Rightarrow$  Beschleunigung von  $\gamma$  ist 0 aus Sicht von  $M$



Bsp.: Geraden sind Geodätsche im  $\mathbb{R}^n$

• Auf  $S^2$  sind Geodätsche gegeben durch Großkreise

Lokal minimieren Geodätsche den Abstand zweier Punkte.

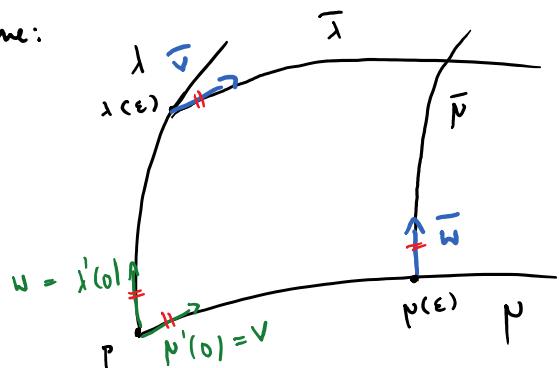
$$\Rightarrow \|v\| = 1 = \|w\|$$

norm einer Riemannschen Metrik

Sei  $\epsilon > 0$ .

$\|\bar{w}\| = 1 = \|\bar{v}\|$ , da Paralleltransport eine Isometrie ist, falls Metrik kompatibel zu  $\nabla$ .

$\lambda, \mu$ : Geodätsche.



Def.  $T(\zeta, \eta) := \underbrace{\nabla_{\zeta} \eta}_{\text{ist ein "Tensor",}} - \underbrace{\nabla_{\eta} \zeta}_{\text{"Lie-Klammer",}} - [\zeta, \eta]$   
d.h.  $C^\infty(M)$ -bilinear.

$\nabla$  heißt **symmetrisch** (o.d. **torsionsfrei**), wenn  $T(\zeta, \eta) = 0 \forall \zeta, \eta$ .

Ist  $\nabla$  symmetrisch, dann  $|\eta \eta'| = O(\varepsilon^3)$

$u_1 :=$  Paralleltransport von  $u$  entlang  $\lambda, \bar{\nu}$

$u_2 :=$  Paralleltransport von  $u$  entlang  $\nu, \bar{\lambda}$

$$\|u_1 - u_2\| \sim \varepsilon^2 \cdot R(v, w) u$$

"asymptotisch gleich"

$R(v, w) u$  heißt **Riemannscher Krümmungstensor**.

Die Lie-Klammer.

Sei  $M^n$  eine glatte Mfgkt.  $X, Y \in \chi(M) := \{V: M \rightarrow TM \mid V \text{ glattes VF}\}$

Lemma.  $\exists! \ z \in \chi(M): \forall f \in C^\infty(M): z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

Beweis.

Eindeutigkeit:  $p \in M$ , lokale Koordinaten  $\{x_i\}$  bei  $p$ .

$$\rightsquigarrow X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{für } a_i, b_j \in C^\infty(U), \quad U \in \mathcal{U}(p) \text{ offen.}$$

$$\Rightarrow X(Y(f)) = \sum_i a_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left( b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\text{Analog: } Y(X(f)) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow XY(f) - YX(f) &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= \sum_i \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j}^n \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

• Existenz: Sei  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $M$  durch Karten.

Definiere  $\mathcal{Z}_\alpha$  auf  $U_\alpha$  durch (\*). Wegen der Eindeutigkeit gilt

$\mathcal{Z}_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \mathcal{Z}_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ . Folglich definieren die VF  $\mathcal{Z}_\alpha$  ein globales  $\mathcal{Z} \in \mathcal{X}(M)$  durch  $\mathcal{Z}|_{U_\alpha} := \mathcal{Z}_\alpha$ .



Def.  $[X, Y] := \mathcal{Z}$  heißt **Lie-Klammer** von  $X, Y$ .

Eigenschaften:

$$\cdot [X, Y] = -[Y, X]$$

$$\cdot a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow [aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$$

Iteration:

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZX Y + Z Y X$$

$$\rightsquigarrow [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \text{"Jacobi-Identität"}$$

$$\begin{aligned} \cdot f, g \in C^\infty(M). \quad [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fX(g)Y + fgXY - gY(f)X - gfYX \\ &= fg[X, Y] - fX(g)Y - gY(f)X \end{aligned}$$

Da eine Mannigfaltigkeit lokal wie  $\mathbb{R}^n$  aussieht, lassen sich die bekannten Sätze zu Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Anfangsproblemen von gewöhnlichen DGL von  $\mathbb{R}^n$  auf Mfkt. verallgemeinern.

Satz. Sei  $M \in \underline{\text{Mfd}}$ ,  $X \in \mathcal{X}(M)$ ,  $p \in M$ .

Dann existiert ein  $U \in \mathcal{U}(p)$  offen,  $\exists \delta > 0, \exists \phi: (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$ , sodass gilt:

$t \mapsto \phi(t, p)$  ist die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, p) &= X(\phi(t, p)) \quad \forall t \in U \\ \text{mit } \phi(0, t) &= p \end{aligned}$$

Schreibweise:  $\phi_t(p) := \phi(t, p)$

Die glatte Abbildung  $\phi_t: U \rightarrow M$  heißt **Fluss** von  $X$ .

$$|s|, |t|, |s+t| < \delta$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) := \phi(t, \phi(s, p)) &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma'_1 = X(\gamma_1) \\ \gamma_1(0) = \phi(s, p) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Eind.}} \gamma_1 = \gamma_2 \\ \gamma_2(t) := \phi(t+s, p) &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma'_2 = X(\gamma_2) \\ \gamma_2(0) = \phi(s, p) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$$

$\Rightarrow \text{id} = \phi_0 = \phi_{t-t} = \phi_t \circ \phi_{-t} \Rightarrow$  Jedes  $\phi_t$  ist Diffeomorphismus  
(auf  $\text{im } \phi_t$ )

### Lie-Ableitung.

$$X, Y \in \mathcal{X}(M), p \in M.$$

$$\text{Sei } \phi_t \text{ der Fluss von } X: \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \phi(t, p) = X(\phi_t(p)) \\ \phi_0(p) = p \end{array} \right.$$

$$(L_X Y)(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (Y_p - d\phi_h(Y_{\phi_{-h}(p)})) \in T_p M$$

$$\text{Proposition. } L_X Y = [X, Y]$$

Für den Beweis dieser Prop. benötigen wir ein Lemma:

$$\begin{aligned} \text{Idee: } \mathbb{R} &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ glatt, } f(0) = 0. \quad f(t) = t f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + \dots \\ &\Rightarrow f(t) = t \cdot g(t) \\ &f'(0) = g(0) \end{aligned}$$

06

Lemma. Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $f \in C^\infty((- \varepsilon, \varepsilon) \times M)$ ,  $f(0, \cdot) = \text{id}_M$ .

Dann:  $\exists g \in C^\infty((- \varepsilon, \varepsilon) \times M): f(t, \cdot) = t \cdot g(t, \cdot)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t}(0, p) = g(0, p)$ .

Beweis.

$$g(t, p) := \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(st, p) \, ds$$

□

Beweis der Proposition. Sei  $f \in C^\infty(M)$ . Hilfsfunktion  $h(t, p) := f(\phi_t(p)) - f(p)$   
 $\Rightarrow h(0, \cdot) \equiv 0$

Lemma  $\rightarrow \exists g: h(t, p) = t \cdot g(t, p)$  und  $\frac{\partial h}{\partial t}(0, p) = g(0, p)$   
 $\Rightarrow f \circ \phi_t = f + t \cdot g_t$ .

23.04.18

Es gilt:  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(p) = X(\phi_0(p)) = X_p$

$$\begin{aligned} X_p f &= \left[ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(p) \right] f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \phi_t(p)) \\ &\stackrel{\substack{f(p) \\ \text{währl. von} \\ t}}{=} \frac{\partial h}{\partial t}(0, p) = g(0, p) \quad \Rightarrow \begin{cases} f \circ \phi_t = f + t \cdot g_t & (1) \\ X f = g_0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$d\phi_h(Y_{\Phi_h(p)}) f = Y_{\Phi_h(p)}(f \circ \phi_h) \underset{(1)}{=} Y_{\Phi_h(p)}(f + h \cdot g_h)$$

$$\begin{aligned} (L_X Y) f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (Y_p - d\phi_h(Y_{\Phi_h(p)})) (f) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (Y_p - Y_{\Phi_h(p)})(f) - \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{h} h}_{\rightarrow Y_{\Phi_0(p)}(g_0)} Y_{\Phi_h(p)}(g_h) \\ &= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((Yf)_p - (Yf)_{\Phi_h(p)})}_{= Y_p(Xf)} - Y_p(Xf) \\ &= X_p(Yf) - Y_p(Xf) \\ &= [X, Y] f. \end{aligned}$$

□

Folgerungen:  $L_X Y = -L_Y X, L_X X = 0.$

Seien  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Man kann zeigen:  $\exists$  lokale Koordinaten  $(x^1, \dots, x^n)$ , sodass

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}. \text{ Wenn } Y = \frac{\partial}{\partial x^2}, \text{ dann } [X, Y] = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^1} = 0.$$

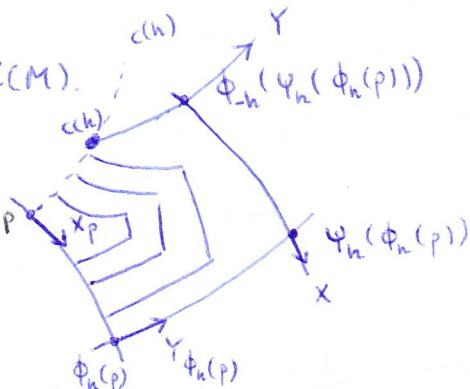
Also ist  $[X, Y] = 0$  eine notwendige Bedingung für die Existenz von lok. Koordinaten so dass

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}, Y = \frac{\partial}{\partial x^2} \quad (\text{auch hinreichend!})$$

Geometrische Interpretation der Lie-Klammer:  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

Sei  $\phi$  der Fluss von  $X$ ,  $\psi$  der Fluss von  $Y$ ,  $p \in M$ .

$$c(h) := (\psi_{-h} \circ \phi_{-h} \circ \psi_h \circ \phi_h)(p)$$



$h \mapsto c(h)$  definiert eine glatte Kurve

Es gilt:  $c'(0) = 0$ . Für Kurven  $\gamma(t)$  mit  $\gamma'(0) = 0$  lässt sich die zweite Ableitung definieren durch  $\gamma''(0)f := \left. \frac{d^2}{dt^2} (f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}$ . Dann ist  $\gamma''(0)$  eine Derivation.

$\Rightarrow c''(0)$  ist definiert.

Es gilt:  $c'(0) = 2[X, Y]_p$ .

## RIEMANNSCHE MANNIGFALTIGKEITEN

Sei  $M^n$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

Def. Eine Riemannsche Metrik auf  $M$  ist eine Zuordnung  $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$   $\forall p \in M$ , wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  ein inneres Produkt (symmetrisch, positiv definit, bilinear) auf  $T_p M$  ist. Diese Zuordnung soll glatt sein, d.h. für lokale Koordinaten  $(U, x)$  ist  $p \mapsto \langle \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \rangle_p$  eine glatte Funktion auf  $U$ .

$$g_{ij}(p) := \langle \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \rangle_p, g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt} \quad (g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

Das Paar  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Def. Ein Diffeomorphismus  $\phi: (M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M) \rightarrow (N, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$  heißt Isometrie:  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\forall p \in M: \forall u, v \in T_p M: \quad \langle u, v \rangle_{M,p} = \langle d\phi_p(u), d\phi_p(v) \rangle_{N, \phi(p)}$$

8

Bsp. ①  $M = \mathbb{R}^n$   $x = \text{Standardkoordinaten}$

$\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle_p = \delta_{ij}$  heißt Euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^n$ .

② Sei  $M \hookrightarrow N$  glatte Immersion,  $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$  sei Riemannsche Mannigfaltigkeit.  
Dann induziert  $f$  eine Riemannsche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  auf  $M$  durch

$$\langle u, v \rangle_{M,p} := \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{N,f(p)}$$

ist positiv-definit, da  $df$  injektiv!

Bsp.  $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  induziert eine Metrik auf  $S^n$ : "Standardsphäre"

③ Produktmetrik: Seien  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ ,  $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

$M \times N$   
 $\pi_1 \downarrow \quad \downarrow \pi_2$  Projektionen; Seien  $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$   
 $\downarrow d\pi_1 \quad \downarrow d\pi_2$   
 $T_p M \quad T_q N$

$$\langle u, v \rangle_{M \times N, (p,q)} := \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_{M,p} + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v) \rangle_{N,q}$$

ist Riemannsche Metrik, die sogenannte Produktmetrik.

Bsp.  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  erhält die Produktmetrik (der "flache" Torus)

(flacher Torus lässt sich nicht zeichnen, nicht einbettbar)

Proposition. Jede glatte Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik.

Beweis. Sei  $\{U_\alpha, x_\alpha\}_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $M$  durch Karten und  $\{f_\alpha\}_\alpha$  eine glatte Partition der 1 bzgl.  $\{U_\alpha\}_\alpha$ ,  $\text{supp } f_\alpha \subseteq U_\alpha$ .

Über  $U_\alpha$  betrachte die eindimensionale Riemannsche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle^\alpha$  sodass

$(U_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle^\alpha) \xrightarrow{x_\alpha} (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Eukl.}})$  eine Isometrie ist.

Nun:  $\langle u, v \rangle_p := \sum_\alpha f_\alpha(p) \langle u, v \rangle_p^\alpha$  für  $p \in M$ ,  $u, v \in T_p M$ .

Längenmessung: Sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Kurve in  $M$ .

Def. Ein Vektorfeld entlang  $c$  ist eine glatte Zuordnung  $t \mapsto v(t) \in T_{c(t)} M$

Bem. Ein VF entlang  $c$  lässt sich nicht unbedingt auf ein VF auf einer offenen Umgebung der Kurve fortsetzen

Wir schreiben auch für  $v \in T_p M$ :  $\|v\|^2 := \langle v, v \rangle_p$ .

$c: \mathbb{R} \rightarrow M$  Kurve  $\Rightarrow l_a^b(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt$  heißt Länge der Kurve (von  $a$  bis  $b$ ).

Volumenmessung: Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Seien  $(U, x), (V, y)$  orientierte Karten auf  $M$  mit  $U \cap V \neq \emptyset$ .

zur Erinnerung: (DiffTop I)

Lemma:  $f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega^n(U)$ ,  $g dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \in \Omega^n(V)$

mit  $f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = g dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$  auf  $U \cap V$ .

$$\Leftrightarrow f = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) g \text{ auf } U \cap V.$$

(Man erhält eine Differentialform  $\omega \in \Omega^n(U \cup V)$  durch Verkleben!)

$$g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}, g_{ij}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p \quad i, j \in \mathbb{N}, \quad X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis (ONB) für  $T_p M$  (bzl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ )

$\Rightarrow X_i = \sum_j a_{ij} e_j$ . Wir erhalten eine  $n \times n$ -Matrix  $(a_{ij}) =: A$

↑  
Basiswechselmatrix

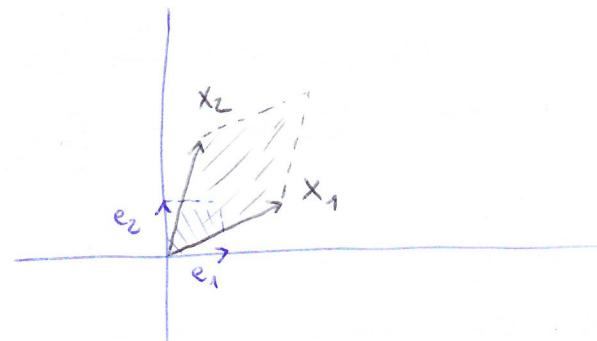
$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle X_i, X_j \rangle = \left\langle \sum_k a_{ik} e_k, \sum_l a_{jl} e_l \right\rangle \\ &= \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{S_{kl}} = \sum_k a_{ik} a_{jk} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g_{ij})_{ij} = A A^\top$$

$$\Rightarrow \det(g_{ij}) = (\det A)^2 > 0 \quad \Rightarrow \sqrt{\det(g_{ij})} \text{ ist wohldefiniert und} \\ \sqrt{\det(g_{ij})} = |\det A|$$

Transformationssatz:

$$\text{vol}(X_1, \dots, X_n) = |\det A| \cdot \underbrace{\text{vol}(e_1, \dots, e_n)}_{=1, \text{ da ONB.}}$$



$$\Rightarrow \sqrt{\det(g_{ij})} = \text{vol}(X_1, \dots, X_n).$$

Diff top II

Auf  $(V, g)$ :  $h_{ij} = \left\langle \underbrace{\frac{\partial}{\partial y^i}}_{=: Y_i}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial y^j}}_{=: Y_j} \right\rangle$  analog  $\sqrt{\det(h_{ij})} = \text{vol}(Y_1, \dots, Y_n)$

$= \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) \text{vol}(X_1, \dots, X_n)$

$= \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) \sqrt{\det(g_{ij})}$

Lemma  $\Rightarrow \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{\det(h_{ij})} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$  auf  $U \cap V$ .

Wir erhalten somit eine globale glatte  $n$ -Form  $\nu \in \Omega^n(M)$ ,  $n = \dim M$ .

Def.  $\nu$  heißt Riemannsche Volumenform von  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (cor.)

Def. Wenn  $M$  kompakt ist, dann setzen wir  $\text{vol}(M) := \int_M \nu < \infty$

$\int_M$  "Riemannsches Volumen von  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ "

Wenn  $\text{vol}(K)$  unbeschränkt ist über kompakte Untermannigfaltigkeiten  $K \subseteq M$ , dann sagen wir  
" $M$  hat unendliches Volumen"

Bemerkung. Oft sieht man in der Literatur das Symbol  $dV = \nu = d\text{vol}$ , obwohl  $\nu$  i.A. nicht exakt ist.

## ZUSAMMENHÄNGE

Sei  $\Gamma(TM) = \mathcal{X}(M)$  der Vektorraum der glatten Schnitte von  $TM$ , d.h. der glatten Tangentialvektorfelder auf  $M$ .

Def. Ein Zusammenhang auf  $M$  ist eine Abbildung  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$   
 $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$

sodass

1)  $\forall f, g \in C^\infty(M) : \forall X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M) \quad \forall Y \in \mathcal{X}(M) : \quad \nabla_{f \cdot X_1 + g \cdot X_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y$

2)  $\forall X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M) : \quad \nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

3)  $\forall f \in C^\infty(M) : \forall X, Y \in \mathcal{X}(M) : \quad \nabla_X(f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + X(f) \cdot Y$  "Produktregel"

11  $\nabla$  in lokalen Koordinaten:  $(U, x)$  Karte,  $X, Y \in X(M)$ .

$$X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i a^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_i a^i \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{i,j} a^i \left( \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + b^j \cdot \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}}_{\Gamma^{ik}_{ij} \in X(M)} \right) \\ &= \sum_k \underbrace{\Gamma^{ik}_{ij}}_{\text{"Christoffel-Symbole"}} \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla_X Y = \sum_{i,j} a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j} a^i b^j \sum_k \Gamma^{ik}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \sum_{i,k} a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,j} a^i b^j \sum_k \Gamma^{ik}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \sum_k \left( \sum_i a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + \sum_{i,j} a^i b^j \Gamma^{ik}_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

### KOVARIANTE ABLEITUNG

Sei  $V = V(t)$  ein Vektorfeld entlang einer Kurve  $c(t)$  in  $M$ .

Def. Eine kovariante Ableitung ist eine Zuordnung  $\frac{D}{dt} : \{VF \text{ entlang } c\} \rightarrow \{VF \text{ entlang } c\}$ ,  
so dass:

$$1) \frac{D}{dt} (V+W) = \frac{d}{dt} V + \frac{d}{dt} W$$

$$2) \forall f \in C^\infty(M): \frac{D}{dt}(fV) = f \cdot \frac{D}{dt} V + \frac{df}{dt} V$$

$$3) \forall X \in X(M): X(c(t)) = V(t), \text{ dann: } \nabla_{c'(t)} X = \frac{D}{dt} V$$

( $\nabla$  ist hier ein fest gewählter Zusammenhang auf  $M$ !)

Proposition. Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang  $\nabla$ . Sei  $c$  eine Kurve auf  $M$ .  
Dann existiert eine eindeutige kovariante Ableitung  $\frac{D}{dt}$  mit 1) - 3). bzgl.  $\nabla$ .

Beweis.

• Eindeutigkeit:  $V(t)$  entlang  $c(t)$ . In lokalen Koordinaten  $(x^1, \dots, x^n)$ :

$$V(t) = v^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} ; \quad c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

2 Summenkonvention

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} V &= v^i \underbrace{\frac{D}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{c(t)} \right)}_{= \nabla_{c'(t)} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= v^i \nabla_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left( \frac{dx^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

$$(*)$$

• Existenz:

Sei  $\{(U_\alpha, x^\alpha)\}$  eine offene Überdeckung von  $M$  durch Karten.

Definiere  $\frac{D}{dt}$  auf  $U_\alpha$  durch (\*). Auf  $U_\alpha \cap U_\beta$  stimmen diese  $\frac{D}{dt}$  überein wegen der Eindeutigkeit und definieren somit  $\frac{D}{dt}$  überall.  $\square$

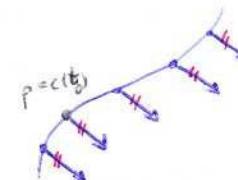
Bemerkung. Die Formel für  $\nabla$  in lokalen Koordinaten impliziert, dass  $\nabla_X Y$  eine lokale Operation ist:  $p \in M$ .

$$(\nabla_X Y)(p) = \left( a^i(p) \frac{\partial b^k}{\partial x^i}(p) + a^i(p) b^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$$

$Y$  entlang einer Integralkurve  $c(t)$  von  $X$ .

Proposition. Sei  $c$  eine Kurve in  $M$ ,  $p = c(t_0)$ , sei  $V^0 \in T_p M$ . Dann:

$\exists!$  VF  $V$  entlang  $c$  mit  $\frac{DV}{dt} = 0$  und  $V(t_0) = V^0$ .



Def. Sei  $V$  ein VF entlang  $c$ . Dann sagen wir  $V$  ist parallel entlang  $c$ , wenn  $\frac{DV}{dt} = 0 \forall t$

30.04.18

Beweis der Proposition.

• Eindeutigkeit & lokale Existenz: Hier:  $\frac{D}{dt} V = \underbrace{\left( \frac{dx^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right)}_{=0} \frac{\partial}{\partial x^k} \equiv 0$

$$\Rightarrow \frac{dV^k}{dt} = - \left( \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) v^j, \quad k=1 \dots n$$

(\*) System von linearen gewöhnlichen DGL.  $\Rightarrow \exists!$  Lösungen  $v^k$  dieses Gleichungssystems

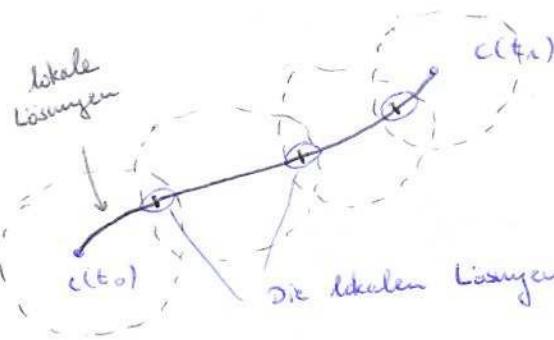
$(V(t_0) = V^0)$  überetzt sich in die notwendigen Anfangswerte

Linearität  $\rightarrow$  Lösungen  $V^k(t)$  existieren für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

13

- Globale Existenz:  $t_0, t_1 \in \mathbb{C}([t_0, t_1])$  ist kompakt.

$\Rightarrow c([t_0, t_1])$  wird überdeckt durch endlich viele Karten von  $M$ .



Die lokalen Lösungen stimmen auf den Durchschnitten der Kurven überein wegen Eindeutigkeit.

70

Bewerking -

$$\text{working - } \tau: T_p M \xrightarrow{\quad} T_{\gamma(t_1)} M \quad \text{"Paralleltransport"} \\ 1) \quad \begin{matrix} \tau & : & T_p M & \xrightarrow{\quad} & T_{\gamma(t_1)} M \\ & & v & \mapsto & v(t_1) \end{matrix}$$

Linearität des Systems von DGL (\*) in lokalen Koordinaten  $\Rightarrow \bar{\tau}$  ist linear.

Umkehr der Zeit  $T^*: T_{(t_0)} M \rightarrow T_p M$ ; Eindeutigkeit  $\Rightarrow T^* \circ T = id, T \circ T^* = id$   
 $\Rightarrow T$  ist Isomorphismus, d.h. wir können Tangentialräume

an verschiedenen Punkten mittels  $\tau$  "vergleichen". Dafür die Terminologie "Zusammenhang".

2)  $\frac{D\mathbf{v}}{dt}$  ordnet auch Vektoren an Punkten mit  $c'(t) = 0$  zu. Diese Vektoren müssen nicht 0 sein!

$$\text{Bsp: } c(t) = p \quad \forall t$$

$\frac{DV}{dt}$  ist  $V'(t)$  im Euklidischen Sinne.

## DER LEVI - CIVITA - ZUSAMMENHANG

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Def. Ein Zusammenhang  $\nabla$  auf  $M$  heißt kompatibel mit der Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , wenn

$\forall$  Kurven  $c$   $\forall$  parallele VF  $P, Q$  entlang  $c$  gilt:  $\langle P, Q \rangle =$  konstant, d.h. Paralleltransport ist eine Isometrie.

Proposition:  $\prec, \succ$  und  $\triangleright$  sind kompatibel  $\Leftrightarrow \forall V, W$  entlang einer Kurve  $c$  gilt

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle \frac{dV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{dW}{dt} \rangle$$

Beweis. " $\leq$ ": Seien  $P, Q$  parallele VF entlang c.  $\frac{d}{dt} \langle P, Q \rangle = \underbrace{\langle \frac{dP}{dt}, Q \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle P, \frac{dQ}{dt} \rangle}_{=0} = 0$   
 $\Rightarrow \langle P, Q \rangle$  konstant.

14

" $\Rightarrow$ ": Seien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $\nabla$  kompatibel.

Sei  $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\} \subseteq T_{c(t_0)} M$  eine Orthonormalbasis.

Paralleltransport liefert VF  $P_1, \dots, P_n$  entlang mit  $\{P_i(t_0)\}_i$  die gegebene ONB,  
 $P_i$  parallel entlang  $c$ .

Kompatibilität  $\Rightarrow \{P_i(t), \dots, P_n(t)\}$  ist ONB in  $T_{c(t)} M$ .

Seien  $V, W$  VF entlang  $c$ .

$$V(t) = v^i(t) P_i(t), \quad W(t) = w^j(t) P_j(t)$$

$$\frac{DV}{dt} = \underbrace{\frac{dv^i}{dt} P_i + v^i \frac{DP_i}{dt}}_{=0} = \frac{dv^i}{dt} P_i \quad \xrightarrow{\text{analog}} \quad \frac{DW}{dt} = \frac{dw^j}{dt} P_j$$

$$\Rightarrow \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle = \langle \frac{dv^i}{dt} P_i, w^j P_j \rangle = \underbrace{\frac{dv^i}{dt} w^j}_{-\delta_{ij}} \underbrace{\langle P_i, P_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \frac{dv^i}{dt} w^i \delta_{ii}$$

$$\Rightarrow \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle = \left( \frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) \delta_{ii}$$

$$\langle V, W \rangle = \langle v^i P_i, w^j P_j \rangle = v^i w^j \underbrace{\langle P_i, P_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = v^i w^i \delta_{ii}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left( \frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) \delta_{ii}$$

Korollar.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $\nabla$  sind kompatibel  $\Leftrightarrow \forall X, Y, Z \in \Gamma(M)$ :

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

Beweis.  $p \in M$ . Wähle Kurve  $c$  mit  $c(0) = p$ ,  $c'(0) = X_p$ .

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle Y_{c(t)}, Z_{c(t)} \rangle \\ \stackrel{!!}{=} \underbrace{v(t)}_{V(t)} \underbrace{w(t)}_{W(t)} =$$

Symmetrie von Zusammenhangen:

Def. Ein Zusammenhang  $\nabla$  heißt symmetrisch, wenn  $\forall X, Y \in \Gamma(M)$ :  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

In lokalen Koordinaten für  $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Für die Christoffel-Symbole bedeutet dies  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

Bemerkung.  $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  "Torsion";  $T$  ist bilinear über  $C^\infty(M)$ , d.h.  $T$  ist ein sog. Tensor.

$\nabla$  symmetrisch  $\Leftrightarrow \nabla$  torsionsfrei.

## Satz. (LEVI-CIVITA)

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang  $\nabla$  auf  $M$  (der Riemannsche Zusammenhang oder Levi-Civita-Zusammenhang), sodass gilt:

(i)  $\nabla$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sind kompatibel (ii)  $\nabla$  ist symmetrisch.

Beweis. - Eindeutigkeit.

$X, Y, Z \in \Gamma(M)$ .

$$X \langle Y, Z \rangle = \underbrace{\langle \nabla_X Y, Z \rangle}_{\text{komp.}} + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

$$+ Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle$$

$$- Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$$


---

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \underbrace{\langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X \rangle}_{+} + \underbrace{\langle X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y \rangle}_{+} + \underbrace{\langle Z, \nabla_X Y + \nabla_Y X \rangle}_{+}$$

$$\stackrel{\text{symmetrisch}}{=} \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + 2 \cdot \langle Z, \nabla_Y X \rangle$$

$$\Rightarrow \langle Z, \nabla_Y X \rangle \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{2} \left[ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle \right]$$

$\Rightarrow$  Eindeutigkeit

Existenz: Definiere  $\nabla$  durch  $\textcircled{1}$ . Dann rechnet man nach, dass  $\nabla$  ein Zusammenhang ist, der symmetrisch und kompatibel mit der Riemannschen Metrik ist.

02.05.17

## GEODÄTISCHE KURVEN

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang.

Geodätische sind Kurven auf  $M$  mit Beschleunigung 0.

Def. Sei  $\gamma: I \rightarrow M$  eine glatte Kurve.  $\gamma$  ist eine Geodätische wenn  $\frac{D}{dt}(\gamma') = 0$ .

Bsp.  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik. Levi-Civita-Zsmhy. hat  $\Gamma_{ij}^k = 0$ .  $\Rightarrow \frac{D}{dt} = \frac{d}{dt}$ .

$0 = \frac{D}{dt}(\gamma') = \gamma'' \Rightarrow \gamma' = \text{konstant} \Rightarrow \gamma = at + b$  Geraden.

Sei  $\gamma$  eine Geodätische.  $\frac{d}{dt} \langle \gamma', \gamma' \rangle = 2 \cdot \underbrace{\langle \frac{D}{dt} \gamma', \gamma' \rangle}_{=0} = 0$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = c = \text{konstant}, c \neq 0$  (Annahme),  $0, t \in I$ .

$$l_c^t(\gamma) = \int_0^t \underbrace{\|\gamma'(t)\| dt}_{\equiv c} = c \int_0^t 1 dt = ct.$$

Die Bogenlänge ist proportional zum Parameter  $t$ . Ist  $c=1$ , dann sagen wir  
" $\gamma$  ist parametrisiert durch die Bogenlänge".

In lokalen Koordinaten  $x$ :  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ ; Sei  $V(t)$  ein VF entlang  $\gamma$ .

$$V(t) = V^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}; \text{ Schon gesehen: } \frac{dV}{dt} = \left( \frac{dV^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} V^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Für  $V(t) = \gamma'(t)$ :

$$V^k(t) = \frac{dx^k}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma^i}{dt} = \left( \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \stackrel{!}{=} 0, \text{ da } \gamma \text{ Geodätische}$$

$$\Rightarrow \forall k=1, \dots, n: \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0.$$

$$\text{System von gewöhnlichen DGL 2. Ordnung.} \Leftrightarrow \frac{d^2 x^k}{dt^2} = - \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k$$

Auf dem Tangentialbündel  $TM$  kann dieses System umgeschrieben werden in ein System 1. Ordnung. Seien die Koordinaten  $x$  definiert auf  $U \subseteq M$  offen.

$v \in T_p M$  lässt sich schreiben als  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ .

Dann sind  $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$  lokale Koordinaten auf  $TM$ , definiert in  $TU$ .

$t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$  definiert eine glatte Kurve auf  $TM$ .

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} v^k = \frac{dx^k}{dt} & \text{System von DGL 1. Ordnung} \\ \frac{dv^k}{dt} = - \Gamma_{ij}^k v^i v^j \end{cases}$$

Wir wenden den Satz über Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Anfangsbedingungen an auf  $(*)$  auf  $TM$ .

Proposition.  $\forall p \in M : \exists \delta, \varepsilon_1 > 0 : \exists \gamma : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$  glatt,

wobei  $U = \{ (q, v) \in V \times T_q M \mid \|v\| < \varepsilon_1 \}$  ( $V \subseteq M$  geeignet mit  $p \in V$ )

so dass

$t \mapsto \gamma(t, q, v)$  die eindimensionale Geodätische in  $M$  ist

$$\text{mit } \gamma(0, q, v) = q \text{ und } \frac{d}{dt} \Big|_{(0, q, v)} \gamma = v.$$

### HOMOGENITÄT VON GEODÄTISCHEN

Geodätische  $\gamma(t, q, v)$   $a > 0$ .

definiert für  $\rightarrow$  Geodätische  $\gamma(at, q, v)$

$|t| < \delta$  definiert für

$$|t| < \frac{\delta}{a}, \text{ mit } \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av)$$

Beweis.

Setze  $c(t) := \gamma(at, q, v)$

$$\rightsquigarrow c(0) = \gamma(0, q, v) = q.$$

$$\cdot \frac{d}{dt} \Big|_{(0, q, v)} c(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{(0, q, v)} \gamma(at, q, v) = a \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \Big|_{(0, q, v)} \gamma(t, q, v)}_{\text{Kettenregel}} = a \cdot v = v$$

$c$  ist geodätische:  $\frac{D}{dt} c^i = \nabla_{c^j} c^i = \nabla_{q^j} (\alpha \gamma^i) = a^2 \underbrace{\nabla_{q^j} \gamma^i}_{=0, \text{ da } \gamma \text{ Geodätische.}} = 0$

$\Rightarrow$  Eindimensionalität  $c(t) = \gamma(t, q, av)$  (brauchen  $\|v\| < \frac{\varepsilon_1}{2}$ ).

### Die Exponentialabbildung

$q \in V, v \in T_q M, \|v\| < \varepsilon$ .

$\exp_q(v) := \gamma(1, q, v)$

$$= \gamma\left(\frac{\|v\|}{\|v\|}, q, \frac{v}{\|v\|}\right)$$

$$\left( |t| < 2 = \frac{\delta}{\delta/2}, a = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta \varepsilon_1}{2} \right)$$

$\Rightarrow \gamma(t, q, v)$  für  $|t| < 2, \|v\| < \varepsilon$

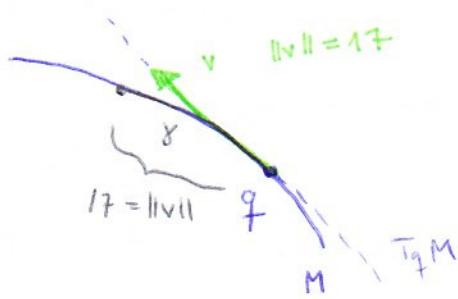
18

$$\exp = \exp_q : B_\epsilon(0) \xrightarrow{\sim} M$$

$\Downarrow$

$T_q M$

Bemerkung:  $G$  Lie-Gruppe  
 $\stackrel{*}{e}$  neutrales Element



$$\exp : \underbrace{T_e G}_{\mathfrak{g}} \longrightarrow G$$

$\Downarrow$

$\mathfrak{g}$ : Lie-Algebra von  $G$

Proposition. Es existiert ein  $\epsilon > 0$ , sodass  $\exp : B_\epsilon(0) \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus auf das Bild von  $B_\epsilon(0)$  ist.

Beweis.

$$d\exp_0(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t \cdot v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \underbrace{\gamma(1, q, t \cdot v)}_{\gamma(t, q, v)} = v.$$

$$d\exp_0 = \text{id}_{T_q M}$$

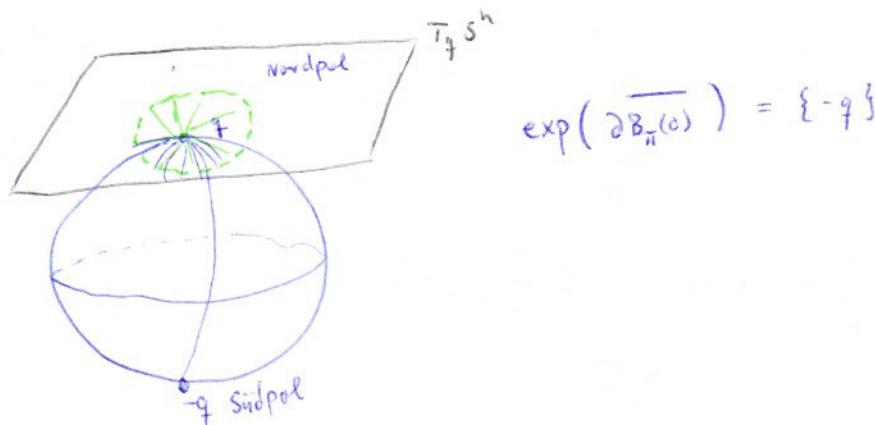
Satz über umkehrbare Funktionen  $\Rightarrow \exp$  ist lokaler Diffeomorphismus in der Nähe von  $0 \in T_q M$ .

Bsp. 1)  $M = \mathbb{R}^n$ :  $\exp_{q=0} : T_0 \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{R}^n$

$\Downarrow$

$T_q \mathbb{R}^n$

2) Einheitssphäre  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ;  $\exp_q : B_{\pi}(0) \xrightarrow{\cong} S^n - \{-q\}$

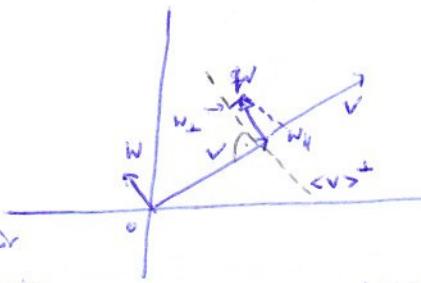


19

Gauss-Lemma.  $v, w \in T_q M$ .

$$\langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Beweis. Wir schreiben  $w = w_{||} + w_{\perp}$ ,  $w_{||} \in \langle v \rangle$ ,  $w_{\perp} \in \langle v \rangle^{\perp}$



Linearität  $\Rightarrow$  Es genügt die Aussage für  $w_{||}$  und für  $w_{\perp}$  zu beweisen.

$$T_v(T_q M) \cong T_q M \setminus T_q M$$

1) Für  $w_{||} = \lambda v$ .

$$\langle d\exp_v(v), d\exp_v(\lambda v) \rangle = \lambda \cdot \|d\exp_v(v)\|^2 = \lambda \cdot \|v\|^2 = \langle v, w \rangle$$

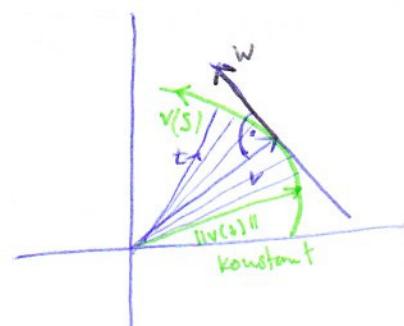
$$\begin{aligned} \|d\exp_v(v)\| &= \left\| \frac{d}{dt} \underbrace{\gamma(1, q, v + tv)}_{\gamma(1+t, q, v)} \right\| = \|v\|, \\ &= \gamma(1+t, q, v) \end{aligned}$$

2) Für  $w_{\perp}$ . Wir schreiben  $w = w_{\perp}$ ,  $\langle v, w \rangle = 0$ . z.B.:  $\langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = 0$ .

Sei  $v(s)$  eine Kurve in  $T_q M$  mit  $v(0) = v$ ,

$v'(0) = w$ ,  $\|v(s)\|$  konstant.

Setze  $f(t, s) := \exp(t v(s))$ . "parametrisierte Fläche"



$$\langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle (1, 0)$$

Behauptung:  $\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle$  ist unabhängig von  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle &= \underbrace{\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle}_{=0 \text{ (geodätische)}} + \langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle &= \underbrace{\langle \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle}_{\substack{\text{Symmetrie} \\ \text{des Levi-Civita}}} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 = 0, \\ &\quad \text{da } \|v(s)\| \text{ konstant.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle (1, s) &= \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle (0, s); \quad \frac{\partial f}{\partial s}(0, s) = 0: f(0, s) = \exp(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = 0 = \langle v, w \rangle.$$

□