01

Donnerstag, 19. April 2018 11:23

Differentialtopologie II

Themen:

- Einführung in die Riemannsche Geometrie
- Zellkomplexe; Homologie

Faserbündel

- Beziehung: Topologie $\longleftrightarrow$ Geometrie
- Morse-Theorie
- Charakteristische Klassen von Vektorraumbündeln

01. Einführung in die Riemannsche Geometrie

Überblick & Ideen:

Bisher können wir nur Differentialformen auf glatten Mannigfaltigkeiten ableiten ($d: \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$), aber keine anderen Objekte wie z.B. Vektorfelder.

Wir können auch nicht über Beschleunigung sprechen.

Ziel: Wir wollen einen Rahmen finden, in dem z.B. Vektorfelder abgeleitet werden können.

Bsp.: $M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ glatt ; $df = 0 \underset{M \text{ zshgd.}}{\Longrightarrow} f$ konstant

$\Rightarrow$ Hätten wir für ein Vektorfeld ξ eine Ableitung, dann sollte $d\xi = 0$ implizieren, dass ξ "konstant" ist.

Bsp. ξ auf $M = \mathbb{R}^n$ konstant $\Rightarrow$ ξ parallel

Ableitung für Vektorfelder $\Rightarrow$ Konzept von Parallelismus

Problem: Kartenwechsel erhält Parallelismus nicht!

$M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $p \in S^2$, $\xi(p) \in T_p S^2$

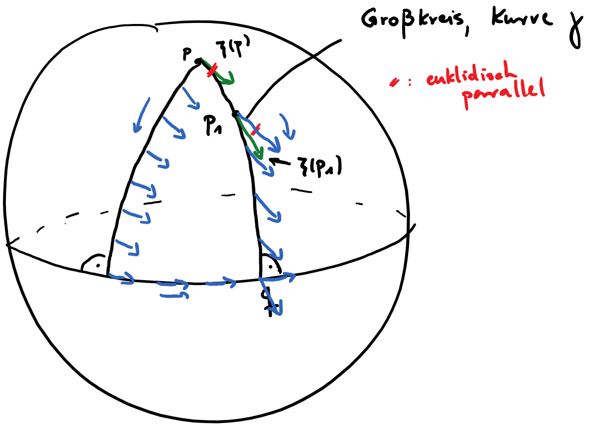
Durch Projektion auf $T_{p_1} S^2$ erhält man einen Tangentialvektor

$\xi(p_1) \in T_{p_1} S^2$

$\xi(p_2) \in T_{p_2} S^2$

$\vdots$

$\xi(q)$



Dann: $\max_i |p_i p_{i+1}| \longrightarrow 0$

$\rightsquigarrow$ Erhalte $\xi(q) \in T_q S^2$

Paralleltransport $\xi(p) \longrightarrow \xi(q)$ entlang γ.

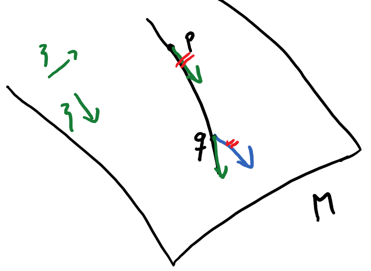
02

Donnerstag, 19. April 2018 11:40

Neues Phänomen: "Parallelverschiebung" hängt vom Weg γ ab!

Tritt im Euklidischen Raum nicht auf.

Zurück zu Ableitungen von Vektorfeldern: Konzept von Parallelismus sei gegeben.



$p \in M$, $v \in T_pM$, $\zeta : M \to TM$ Vektorfeld

Sei γ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$

Idee: $\zeta(q) - \left(\begin{smallmatrix}\parallel\text{-Transport von } \zeta(p) \\ \text{entlang } \gamma \text{ nach } q\end{smallmatrix}\right) \in T_qM$

Dann: $|qp| \longrightarrow 0$ ($\rightsquigarrow$ unabhängig von γ)

$\rightsquigarrow$ "Kovariante" Ableitung von ζ in die Richtung v: $\nabla_v \zeta \in T_pM$

"Zusammenhang"

Eigenschaften:

- Linear in v: $\nabla_{\lambda v + w} = \lambda \nabla_v + \nabla_w$
- $\nabla_v(\zeta + \eta) = \nabla_v \zeta + \nabla_v \eta$
- $f \in C^\infty(M) \Rightarrow \nabla_v(f\zeta) = f \cdot \nabla_v \zeta + \underbrace{\nabla_v f}_{:= v(f)} \cdot \zeta$

<u>Geodätische:</u> Sei γ eine Kurve auf M.

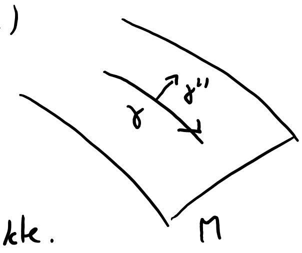
γ heißt Geodätische $:\Leftrightarrow$ $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, d.h. die Beschleunigung verschwindet.

"γ ist parallel entlang γ"

<u>Bsp.</u> $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0 \Leftrightarrow \gamma'' \perp M$ (Tangentialräume)

$\rightarrow$ Beschleunigung von γ ist 0 <u>aus Sicht von M</u>

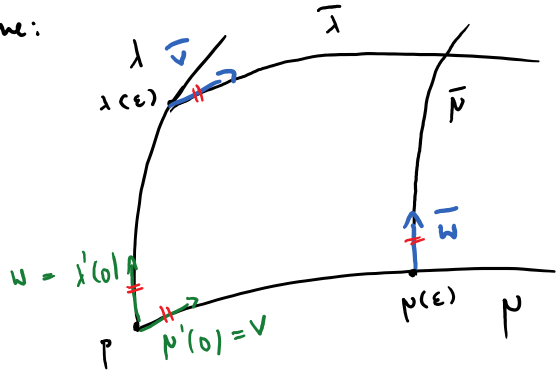


Bsp. • Geraden sind Geodätische im $\mathbb{R}^n$

• Auf S^2 sind Geodätische gegeben durch Großkreise

Lokal minimieren Geodätische den Abstand zweier Punkte.

Parallelogramme:



$\Rightarrow \|v\| = 1 = \|w\|$

Norm einer Riemannschen Metrik

Sei $\varepsilon > 0$.

$\|\bar w\| = 1 = \|\bar v\|$, da Paralleltransport eine Isometrie ist, falls Metrik kompatibel zu ∇.

λ, μ: Geodätische.

03

Dienstag, 17. April 2018 22:32

Def. $T(\xi,\eta) := \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - \underbrace{[\xi,\eta]}$ "Lie-Klammer"

ist ein "Tensor",
d.h. $C^\infty(M)$-bilinear.

∇ heißt symmetrisch (od. torsionsfrei), wenn $T(\xi,\eta) = 0 \ \forall \xi,\eta$.

Ist ∇ symmetrisch, dann $|qq'| = O(\varepsilon^3)$

$u_1 :=$ Paralleltransport von u entlang $\lambda, \bar{\mu}$
$u_2 :=$ Paralleltransport von u entlang $\mu, \bar{\lambda}$

$\| u_1 - u_2 \| \sim \varepsilon^2 \cdot R(v,w)u$
"asymptotisch gleich"

$R(v,w)u$ heißt Riemannscher Krümmungstensor.

Die Lie-Klammer.

Sei M^n eine glatte Mfgkt. $X,Y \in \mathfrak{X}(M) := \{V: M \to TM \mid V \text{ glattes VF}\}$

Lemma. $\exists!\ Z \in \mathfrak{X}(M): \forall f \in C^\infty(M): \ Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

Beweis.
Eindeutigkeit: $p \in M$, lokale Koordinaten $\{x_i\}$ bei p.

$\leadsto \quad X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ für $a_i, b_j \in C^\infty(U)$, $U \in \mathcal{U}(p)$ offen.

$$\Rightarrow X(Y(f)) = \sum_i a_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Analog: $$Y(X(f)) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\Rightarrow XY(f) - YX(f) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$
$$= \sum \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

- Existenz: Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M durch Karten. Definiere Z_α auf U_α durch (*). Wegen der Eindeutigkeit gilt $Z_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = Z_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Folglich definieren die VF Z_α ein globales $Z \in \mathfrak{X}(M)$ durch $Z|_{U_\alpha} := Z_\alpha$.

$\boxtimes$

Def. $[X,Y] := Z$ heißt Lie-Klammer von X, Y.

Eigenschaften:

- $[X,Y] = -[Y,X]$
- $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow [aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$

Iteration:

$$[[X,Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

$$\rightsquigarrow \quad [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0 \quad \text{"Jacobi-Identität"}$$

- $f, g \in C^\infty(M)$.
$$\begin{aligned}[fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fX(g)Y + fgXY - gY(f)X - gfYX \\ &= fg[X,Y] - fX(g)Y - gY(f)\cdot X\end{aligned}$$

Da eine Mannigfaltigkeit lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, lassen sich die bekannten Sätze zu Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Anfangsproblemen von gewöhnlichen DGL von $\mathbb{R}^n$ auf Mfgkt. verallgemeinern.

Satz. Sei $M \in \underline{\text{Mfd}}$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$.
Dann existiert ein $U \in \mathcal{U}(p)$ offen, $\exists \delta > 0$, $\exists \phi : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow M$, sodass gilt:
$t \mapsto \phi(t,p)$ ist die eindeutige Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t,p) = X(\phi(t,p)) \quad \forall p \in U$$
$$\text{mit } \phi(0,t) = p$$

Schreibweise: $\phi_t(p) := \phi(t,p)$

Die glatte Abbildung $\phi_t : U \to M$ heißt Fluss von X.

$|s|, |t|, |s+t| < \delta$

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma_1(t) := \phi(t, \phi(s,p)) \Rightarrow & \begin{cases} \gamma_1' = X(\gamma_1) \\ \gamma_1(0) = \phi(s,p) \end{cases} \\[2ex] \gamma_2(t) := \phi(t+s, p) \Rightarrow & \begin{cases} \gamma_2' = X(\gamma_2) \\ \gamma_2(0) = \phi(s,p) \end{cases} \end{array}\right\}_{\text{Eind.}} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$$

d.h. $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$

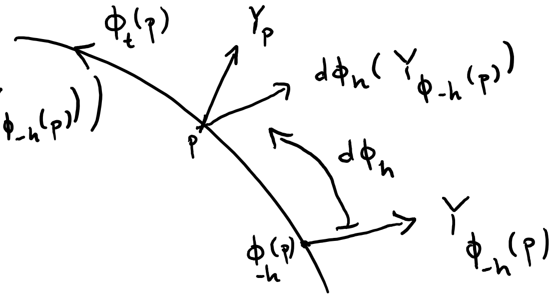
$\Rightarrow \quad id = \phi_0 = \phi_{t-t} = \phi_t \circ \phi_{-t} \quad \Rightarrow$ Jedes ϕ_t ist Diffeomorphismus (auf $\operatorname{im} \phi_t$)

Lie-Ableitung.

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$.

Sei ϕ_t der Fluss von X: $\begin{cases} \partial_t \phi(t,p) = X(\phi_t(p)) \\ \phi_0(p) = p \end{cases}$

$$(L_X Y)(p) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(Y_p - d\phi_h(Y_{\phi_{-h}(p)})\right) \in T_pM$$



Proposition. $L_X Y = [X, Y]$

Für den Beweis dieser Prop. benötigen wir ein Lemma:

Idee: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ glatt, $f(0) = 0$.

$$f(t) = t f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + \dots = t\underbrace{\left(f'(0) + \frac{t}{2} f''(0) + \dots\right)}_{=: g}$$

$\Rightarrow f(t) = t \cdot g(t)$

$f'(0) = g(0)$

Lemma. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)\times M)$, $f(0,\cdot) = id_M$.

Dann: $\exists g \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)\times M)$: $f(t,\cdot) = t\cdot g(t,\cdot)$, $\frac{\partial f}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$.

Beweis.

$$g(t,p) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(st,p)\, ds$$

$\blacksquare$

Beweis der Proposition. Sei $f \in C^\infty(M)$. Hilfsfunktion $h(t,p) := f(\phi_t(p)) - f(p)$

$$\Rightarrow h(0,\cdot) \equiv 0$$

Lemma $\Rightarrow \exists g: h(t,p) = t g(t,p)$ und $\frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$

$$\Rightarrow f\circ\phi_t = f + t\cdot g_t.$$

23.04.18

Es gilt:
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t(p) = X(\phi_0(p)) = X_p$$

$$X_p f = \left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi_t(p)\right] f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(f\circ\phi_t(p))$$

$$\underset{\substack{f(p)\\ \text{unabh. von}\\ t}}{=} \frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = g(0,p) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} f\circ\phi_t = f + t g_t & (1)\\ Xf = g_0 & (2)\end{cases}$$

$$d\phi_h(Y_{\phi_{-h}(p)})\, f = Y_{\phi_{-h}(p)}(f\circ\phi_h) \underset{(1)}{=} Y_{\phi_{-h}(p)}(f + t g_t)$$

$$(L_X Y) f = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(Y_p - d\phi_h(Y_{\phi_{-h}(p)})\right)(f)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(Y_p - Y_{\phi_{-h}(p)}\right)(f) - \lim_{h\to 0}\cancel{\frac{1}{h}}\cdot\cancel{h}\, \underbrace{Y_{\phi_{-h}(p)}(g_h)}_{\to Y_{\phi_0(p)}(g_0) = Y_p(Xf)}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left((Yf)_p - (Yf)_{\phi_{-h}(p)}\right)} - Y_p(Xf)$$

$$= X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

$$= [X,Y] f.$$

$\blacksquare$

Folgerungen: $\quad L_X Y = -L_Y X, \quad L_X X = 0.$

Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Man kann zeigen: $\exists$ lokale Koordinaten $(x^1, -, x^n)$, sodass

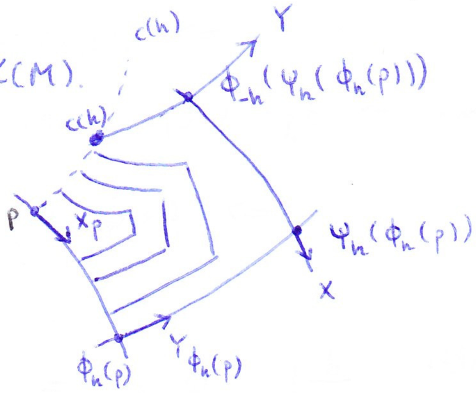
$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}. \quad \text{Wenn } Y = \frac{\partial}{\partial x^2}, \text{ dann } [X, Y] = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^1} = 0.$$

Also ist $[X,Y] = 0$ eine notwendige Bedingung für die Existenz von lok. Koordinaten so dass

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^2} \quad \text{(auch hinreichend!)}$$

- Geometrische Interpretation der Lie-Klammer: $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Sei ϕ der Fluss von X, ψ der Fluss von Y, $p \in M$.



$$c(h) := (\psi_{-h} \circ \phi_{-h} \circ \psi_h \circ \phi_h)(p)$$

$h \mapsto c(h)$ definiert eine glatte Kurve

Es gilt: $c'(0) = 0$. Für Kurven $\gamma(t)$ mit $\gamma'(0) = 0$ lässt sich die zweite Ableitung definieren durch $\gamma''(0) f := \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} (f \circ \gamma)(t)$. Dann ist $\gamma''(0)$ eine Derivation.

$\Rightarrow$ $c''(0)$ ist definiert.

Es gilt: $\quad c''(0) = 2[X, Y]_p$

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit.

Def. Eine Riemannsche Metrik auf M ist eine Zuordnung $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ $\forall p \in M$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ein inneres Produkt (symmetrisch, positiv definit, bilinear) auf T_pM ist. Diese Zuordnung soll glatt sein, d.h. für lokale Koordinaten (U, x) ist $p \mapsto \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p \rangle_p$ eine glatte Funktion auf U.

$$g_{ij}(p) := \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \rangle_p, \quad g_{ij} : U \to \mathbb{R} \text{ glatt} \quad (g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

Das Paar $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Def. Ein Diffeomorphismus $\phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M) \to (N, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$ heißt Isometrie $:\Leftrightarrow$

$$\forall p \in M : \forall u, v \in T_pM : \quad \langle u, v \rangle_{M,p} = \langle d\phi_p(u), d\phi_p(v) \rangle_{N, \phi(p)}$$

Bsp. ① $M = \mathbb{R}^n$ x = Standardkoordinaten

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p = \delta_{ij}$$ heißt Euklidsche Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

② Sei $M \xhookrightarrow{f} N$ glatte Immersion, $(N, \langle \cdot,\cdot \rangle_N)$ sei Riemannsche Mannigfaltigkeit.
Dann induziert f eine Riemannsche Metrik $\langle \cdot,\cdot \rangle_M$ auf M durch

$$\langle u, v \rangle_{M,p} := \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{N, f(p)}$$

ist positiv-definit, da df injektiv!

Bsp. $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induziert eine Metrik auf S^n: "Standardsphäre"

③ Produktmetrik: Seien $(M, \langle \cdot,\cdot \rangle_M)$, $(N, \langle \cdot,\cdot \rangle_N)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

$$\begin{array}{ccc} & M \times N & \\ {}^{\pi_1}\swarrow & & \searrow^{\pi_2} \\ M & & N \end{array}$$

Projektionen; Seien $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$

$$\begin{array}{ccc} & T_{(p,q)}(M \times N) & \\ {}^{d\pi_1}\swarrow & & \searrow^{d\pi_2} \\ T_pM & & T_qM \end{array}$$

$$\langle u, v \rangle_{M\times N, (p,q)} := \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_{M,p} + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v) \rangle_{N,q}$$

ist Riemannsche Metrik, die sogenannte Produktmetrik.

Bsp. $T^n = S^1 \times \_ \times S^1$ erhält die Produktmetrik (der "flache" Torus)

(flacher Torus lässt sich nicht zeichnen, nicht einbetten)

Proposition. Jede glatte Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik.

Beweis. Sei $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M durch Karten und $\{f_\alpha\}_\alpha$ eine glatte Partition der 1 bzgl. $\{U_\alpha\}_\alpha$, $\operatorname{supp} f_\alpha \subseteq U_\alpha$.

Über U_α betrachte die eindeutige Riemannsche Metrik $\langle \cdot,\cdot \rangle^\alpha$ sodass

$$(U_\alpha, \langle \cdot,\cdot \rangle^\alpha) \xrightarrow{x_\alpha} (\mathbb{R}^n, \langle \cdot,\cdot \rangle_{\text{Eukl.}})$$ eine Isometrie ist.

Nun: $$\langle u, v \rangle_p := \sum_\alpha f_\alpha(p) \langle u, v \rangle_p^\alpha$$ für $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

$\blacksquare$

Längenmessung: Sei $c: \mathbb{R} \to M$ eine Kurve in M.

Def. Ein Vektorfeld entlang c ist eine glatte Zuordnung $t \mapsto v(t) \in T_{c(t)}M$

Bem. Ein VF entlang c lässt sich nicht unbedingt auf ein VF auf einer offenen Umgebung der Kurve fortsetzen

Wir schreiben auch für $v \in T_pM$: $\|v\|^2 := \langle v, v \rangle_p$.

$c: \mathbb{R} \to M$ Kurve $\Rightarrow$ $$l_a^b(c) := \int_a^b \|c'(t)\|\, dt$$ heißt Länge der Kurve (von a bis b).

Volumenmessung: Sei $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Seien (U,x), (V,y) orientierte Karten auf M mit $U \cap V \neq \emptyset$.

Zur Erinnerung: (Difftop I)

Lemma. $f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega^n(U)$, $g\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \in \Omega^n(V)$

mit $f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = g\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$ auf $U \cap V$.

$\Leftrightarrow \quad f = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) g$ auf $U \cap V$.

(Man erhält eine Differentialform $\omega \in \Omega^n(U \cup V)$ durch Verkleben!)

$g_{ij} : U \to \mathbb{R}$, $g_{ij}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p$; $p \in U$, $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) für T_pM (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$)

$\rightsquigarrow \quad X_i = \sum_j a_{ij} e_j$. Wir erhalten eine $n \times n$-Matrix $(a_{ij}) =: A$

Basiswechselmatrix

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \left\langle \sum_k a_{ik} e_k, \sum_l a_{jl} e_l \right\rangle$$

$$= \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_k a_{ik} a_{jk}$$

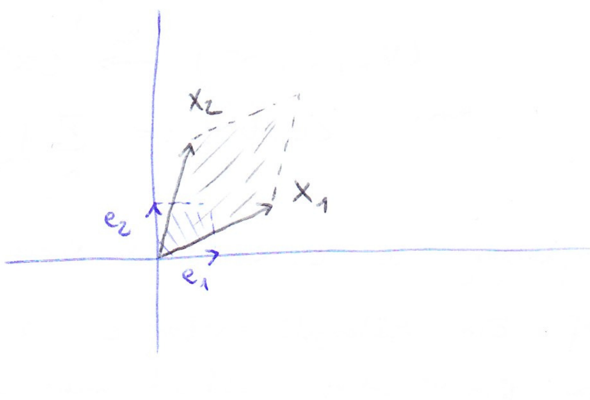
$$\Rightarrow \quad (g_{ij})_{ij} = A A^T$$

$\Rightarrow \quad \det(g_{ij}) = (\det A)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\det(g_{ij})}$ ist wohldefiniert und

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = |\det A|$$

Transformationssatz:

$$\mathrm{vol}(X_1, \dots, X_n) = |\det A| \cdot \underbrace{\mathrm{vol}(e_1, \dots, e_n)}_{=1, \text{ da ONB.}}$$



$$\Rightarrow \quad \sqrt{\det(g_{ij})} = \mathrm{vol}(X_1, \dots, X_n).$$

Auf (V,y): $h_{ij} = \langle \underbrace{\frac{\partial}{\partial y^i}}_{=: Y_i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \rangle \underset{\text{analog}}{\rightsquigarrow} \sqrt{\det(h_{ij})} = vol(Y_1, \ldots, Y_n)$

$$\underset{\text{Trafo}}{=} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) vol(X_1, \ldots, X_n)$$

$$= \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) \sqrt{\det(g_{ij})}$$

Lemma $\Rightarrow$ $\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \sqrt{\det(h_{ij})}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ auf $U \cap V$.

Wir erhalten somit eine globale glatte n-Form $\nu \in \Omega^n(M)$, $n = \dim M$.

Def. ν heißt Riemannsche Volumenform von $(M, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ (or.)

Def. Wenn M kompakt ist, dann setzen wir $vol(M) := \int_M \nu < \infty$

"Riemannsches Volumen von $(M, \langle \cdot,\cdot \rangle)$"

Wenn $vol(K)$ unbeschränkt ist über kompakte Untermannigfaltigkeiten $K \subseteq M$, dann sagen wir "M hat unendliches Volumen"

Bemerkung. Oft sieht man in der Literatur das Symbol $dV = \nu = dvol$, obwohl ν i.A. nicht exakt ist.

ZUSAMMENHÄNGE

Sei $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ der Vektorraum der glatten Schnitte von TM, d.h. der glatten Tangentialvektorfelder auf M.

Def. Ein Zusammenhang auf M ist eine Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

sodass

1) $\forall f, g \in C^\infty(M): \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_{f \cdot X_1 + g \cdot X_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y$

2) $\forall X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

3) $\forall f \in C^\infty(M): \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$: $\nabla_X (f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + X(f) \cdot Y$ "Produktregel"

∇ in lokalen Koordinaten: $\quad (U,x)$ Karte, $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

$$X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\nabla_X Y \underset{1)}{=} \sum_i a^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Big(\sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big) \underset{2)}{=} \sum_i a^i \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Big(b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big)$$

$$\underset{3)}{=} \sum_{i,j} a^i \Big(\frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + b^j \cdot \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}}_{\in \mathfrak{X}(M)} \Big)$$

$$= \sum_k \underbrace{\Gamma_{ij}^k}_{\text{"Christoffel-Symbole"}} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\Rightarrow \nabla_X Y = \sum_{i,j} a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j} a^i b^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \sum_{i,k} a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,j} a^i b^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \sum_k \Big(\sum_i a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + \sum_{i,j} a^i b^j \Gamma_{ij}^k \Big) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Kovariante Ableitung

Sei $V = V(t)$ ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c(t)$ in M.

Def. Eine kovariante Ableitung ist eine Zuordnung $\frac{D}{dt} : \{\text{VF entlang } c\} \longrightarrow \{\text{VF entlang } c\}$, so dass:

1) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{D}{dt} V + \frac{D}{dt} W$

2) $\forall f \in C^\infty(M)$: $\frac{D}{dt}(fV) = f \cdot \frac{D}{dt} V + \frac{df}{dt} V$

3) $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$: $X(c(t)) = V(t)$, dann:
$$\nabla_{c'(t)} X = \frac{D}{dt} V$$

(∇ ist hier ein fest gewählter Zusammenhang auf M!)

Proposition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang ∇. Sei c eine Kurve auf M. Dann existiert eine eindeutige kovariante Ableitung $\frac{D}{dt}$ mit 1) – 3). bzgl. ∇.

Beweis.

· Eindeutigkeit: $V(t)$ entlang $c(t)$. In lokalen Koordinaten $(x^1, .., x^n)$:

$$V(t) = v^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad ; \quad c(t) = (x^1(t), .., x^n(t))$$

↑ Summenkonvention

$$\frac{D}{dt} V = v^i \underbrace{\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)} \right)}_{\underset{3)}{=} \nabla_{c'(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\underset{(*)}{=} v^i \nabla_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^{\ k} \right) \frac{d}{dx^k}.$$

· Existenz:

Sei $\{(U_\alpha, x^\alpha)\}$ eine offene Überdeckung von M durch Karten.

Definiere $\frac{D}{dt}$ auf U_α durch $(*)$. Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ stimmen diese $\frac{D}{dt}$ überein wegen der Eindeutigkeit und definieren somit $\frac{D}{dt}$ überall. ∎

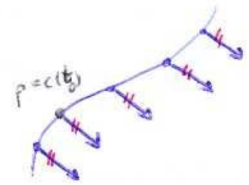
Bemerkung. Die Formel für ∇ in lokalen Koordinaten impliziert, dass $\nabla_X Y$ eine <u>lokale</u> Operation ist: $p \in M$.

$$(\nabla_X Y)(p) = \left(a^i(p) \frac{\partial b^k}{\partial x^i}(p) + a^i(p) b^j(p) \Gamma_{ij}^{\ k}(p) \right) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p$$

Y entlang einer Integralkurve $c(t)$ von X.

Proposition. Sei c eine Kurve in M, $p = c(t_0)$, sei $V^0 \in T_pM$. Dann:

$\exists!$ VF V entlang c mit $\frac{DV}{dt} = 0$ und $V(t_0) = V^0$.



Def. Sei V ein VF entlang c. Dann sagen wir V ist parallel entlang c, wenn $\frac{DV}{dt} = 0.\ \forall t$

30.04.18

Beweis der Proposition.

· Eindeutigkeit & lokale Existenz: Hier: $\frac{D}{dt} V = \underbrace{\left(\frac{dv^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^{\ k} \right)}_{\Rightarrow\ = 0} \frac{d}{dx^k} \equiv 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dv^k}{dt} = - \left(\frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^{\ k} \right) v^j}, \quad k = 1 .. n$$

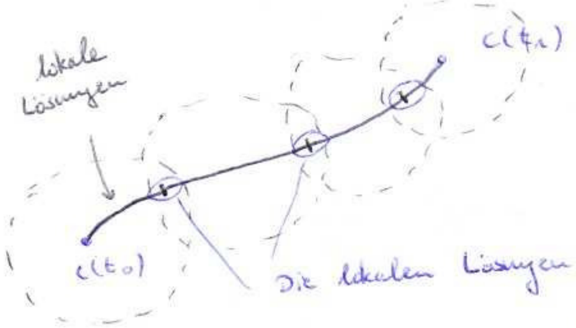
(*) System von <u>linearen</u> gewöhnlichen DGL. $\Rightarrow \exists!$ Lösungen v^k dieses Gleichungssystems

Linearität $\rightarrow$ Lösungen $v^k(t)$ existieren für alle $t \in \mathbb{R}$.

($V(t_0) = V^0$ übersetzt sich in die notwendigen Anfangspunkte)

- Globale Existenz: t_0, t_1. ; $c([t_0,t_1])$ ist kompakt.

$\Rightarrow$ $c([t_0,t_1])$ wird überdeckt durch endlich viele Karten von M.



Die lokalen Lösungen stimmen auf den Durchschnitten der Karten überein wegen Eindeutigkeit. ☒

Bemerkung.
1) $\tau : T_pM \longrightarrow T_{c(t_1)}M$ "Paralleltransport"
$\quad V^0 \longmapsto V(t_1)$

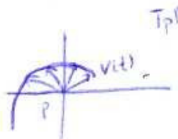
Linearität des Systems von DGL (*) in lokalen Koordinaten $\Rightarrow$ τ ist linear.

Umkehren der Zeit $\tau' : T_{c(t_1)}M \to T_pM$; Eindeutigkeit $\Rightarrow$ $\tau' \circ \tau = id$, $\tau \circ \tau' = id$

$\Rightarrow$ τ ist Isomorphismus, d.h. wir können Tangentialräume an verschiedenen Punkten mittels τ "vergleichen". Daher die Terminologie "Zusammenhang".

2) $\frac{DV}{dt}$ ordnet auch Vektoren an Punkten mit $c'(t) = 0$ zu. Diese Vektoren müssen nicht 0 sein!

Bsp. $c(t) \equiv p \ \forall t$



$\frac{DV}{dt}$ ist $V'(t)$ im Euklidschen Sinne.

DER LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Def. Ein Zusammenhang ∇ auf M heißt **kompatibel** mit der Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$, wenn $\forall$ Kurven c $\forall$ parallele VF P, Q entlang c gilt: $\langle P, Q\rangle$ = konstant, d.h. Paralleltransport ist eine Isometrie.

Proposition. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ∇ sind kompatibel $\Leftrightarrow$ $\forall$ VF V, W entlang einer Kurve c gilt

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle$$

Beweis. "$\Leftarrow$": Seien P, Q parallele VF entlang c. $\frac{d}{dt}\langle P,Q\rangle = \underbrace{\langle \frac{DP}{dt}, Q\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle P, \underbrace{\frac{DQ}{dt}}_{=0}\rangle}_{=0} = 0$

$\Rightarrow$ $\langle P,Q\rangle$ konstant.

"$\Rightarrow$": Seien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ∇ kompatibel.

Sei $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\} \subseteq T_{c(t_0)}M$ eine Orthonormalbasis.

Paralleltransport liefert VF $P_1, \dots, P_n$ entlang mit $\{P_i(t_0)\}_i$ die gegebene ONB, P_i parallel entlang c.

Kompatibilität $\Rightarrow$ $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ ist ONB in $T_{c(t)}M$.

Seien V, W VF entlang c.

$$V(t) = v^i(t)\, P_i(t), \quad W(t) = w^j(t)\, P_j(t)$$

$$\frac{DV}{dt} \underset{\substack{\text{Produkt-}\\\text{regel}}}{=} \frac{dv^i}{dt} P_i + v^i \underbrace{\frac{DP_i}{dt}}_{=0} = \frac{dv^i}{dt} P_i \underset{\text{analog}}{\Rightarrow} \frac{DW}{dt} = \frac{dw^j}{dt} P_j$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle = \left\langle \frac{dv^i}{dt} P_i, w^j P_j \right\rangle = \frac{dv^i}{dt} w^j \underbrace{\langle P_i, P_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \frac{dv^i}{dt} w^i \delta_{ii}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) \delta_{ii}$$

$$\langle V, W\rangle = \langle v^i P_i, w^j P_j\rangle = v^i w^j \underbrace{\langle P_i, P_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = v^i w^i \delta_{ii}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) \delta_{ii}$$

Korollar. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ∇ sind kompatibel $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y, Z \in \Gamma(M)$:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

Beweis. $p \in M$. Wähle Kurve c mit $c(0) = p$, $c'(0) = X_p$.

$$X_p\langle Y, Z\rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \underset{\substack{\shortparallel\\ V(t)}}{Y_{c(t)}}, \underset{\substack{\shortparallel\\ W(t)}}{Z_{c(t)}} \rangle$$

Symmetrie von Zusammenhängen:

Def. Ein Zusammenhang ∇ heißt symmetrisch, wenn $\forall X, Y \in \Gamma(M)$: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

In lokalen Koordinaten für $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0.$$

Für die Christoffel-Symbole bedeutet dies $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Bemerkung. $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ „Torsion"; T ist bilinear über $C^\infty(M)$, d.h. T ist ein sog. Tensor.

∇ symmetrisch $\Leftrightarrow$ ∇ torsionsfrei.

Satz. (LEVI-CIVITA)
Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang ∇ auf M (der Riemannsche Zusammenhang oder Levi-Civita-Zusammenhang), sodass gilt:

(i) ∇ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sind kompatibel (ii) ∇ ist symmetrisch.

Beweis. - Eindeutigkeit.
$X, Y, Z \in \Gamma(M)$.

$$X\langle Y, Z\rangle \underset{\text{komp.}}{=} \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$+ \quad Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$- \quad Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = \langle Y, \underbrace{\nabla_X Z - \nabla_Z X}\rangle + \langle X, \underbrace{\nabla_Y Z - \nabla_Z Y}\rangle + \langle Z, \nabla_X Y + \nabla_Y X\rangle$$

$$\underset{\text{symmetrisch}}{=} \langle Y, [X,Z]\rangle + \langle X, [Y,Z]\rangle + \langle Z, [X,Y]\rangle + 2\cdot\langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$\Rightarrow \langle Z, \nabla_Y X\rangle \underset{(1)}{=} \frac{1}{2}\Big[X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle - \langle Z,[X,Y]\rangle\Big]$$

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit

Existenz: Definiere ∇ durch (1). Dann rechnet man nach, dass ∇ ein Zusammenhang ist, der symmetrisch und kompatibel mit der Riemannschen Metrik ist.

02.05.17

GEODÄTISCHE KURVEN

$(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang.
Geodätische sind Kurven auf M mit Beschleunigung 0.

Def. Sei $\gamma: I \to M$ eine glatte Kurve. γ ist eine Geodätische wenn $\frac{D}{dt}(\gamma') = 0$.

Bsp. $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidschen Metrik. Levi-Civita Zsmhg. hat $\Gamma_{ij}^k = 0$. $\Rightarrow \frac{D}{dt} = \frac{d}{dt}$.
$0 = \frac{D}{dt}(\gamma') = \gamma'' \Rightarrow \gamma' = \text{konstant} \Rightarrow \gamma = at + b$ Geraden.

Sei γ eine Geodätische. $\frac{d}{dt}\langle\gamma', \gamma'\rangle = 2\cdot\langle\underbrace{\tfrac{D}{dt}\gamma'}_{=0}, \gamma'\rangle = 0$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = c = \text{konstant}$, $c \neq 0$ (Annahme), $0, t \in I$.

$$l_0^t(\gamma) = \int_0^t \underbrace{\|\gamma'(\tau)\|}_{\equiv c} d\tau = c\int_0^t 1\, d\tau = ct.$$

Die Bogenlänge ist proportional zum Parameter t. Ist $c=1$, dann sagen wir "γ ist parametrisiert durch die Bogenlänge".

In lokalen Koordinaten x: $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$; Sei $V(t)$ ein VF entlang γ.

$$V(t) = v^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}$$; Schon gesehen: $$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Für $V(t) = \gamma'(t)$:

$$v^k(t) = \frac{dx^k}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{D\gamma'}{dt} = \left(\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \overset{!}{=} 0,$$ da γ Geodätische

$$\Rightarrow \forall k = 1, \ldots, n: \quad \frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\Gamma_{ij}^k = 0.$$

System von gewöhnlichen DGL 2. Ordnung. $\Leftrightarrow$ $$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\Gamma_{ij}^k$$

Auf dem Tangentialbündel TM kann dieses System umgeschrieben werden in ein System 1. Ordnung. Seien die Koordinaten x definiert auf $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} M$.

$v \in T_pM$ lässt sich schreiben als $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$.

Dann sind $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ lokale Koordinaten auf TM, definiert in TU.

$t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ definiert eine glatte Kurve auf TM.

$$\Rightarrow \quad (*) \begin{cases} v^k = \frac{d}{dt} x^k \\ \frac{dv^k}{dt} = -\Gamma_{ij}^k v^i v^j \end{cases}$$ System von DGL 1. Ordnung

Wir wenden den Satz über Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Anfangsbedingungen an auf $(*)$ auf TM.

Proposition. $\forall p \in M: \exists\, \delta, \varepsilon_1 > 0: \exists\ \gamma: (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \longrightarrow M$ glatt,

wobei $\mathcal{U} = \{ (q,v) \in V \times T_qM \mid \|v\| < \varepsilon_1 \}$ ($V \underset{\text{offen}}{\subseteq} M$ geeignet mit $p \in V$)

so dass

$$t \longmapsto \gamma(t,q,v) \quad \text{die eindeutige Geodätische in } M \text{ ist}$$

$$\text{mit} \quad \gamma(0,q,v) = q \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\Big|_{(0,q,v)} \gamma = v.$$

Homogenität von Geodätischen

Geodätische $\gamma(t,q,v)$ definiert für $|t| < \delta$ $\Longrightarrow$ $a > 0$. Geodätische $\gamma(at,q,v)$ definiert für $|t| < \frac{\delta}{a}$, mit $\gamma(at,q,v) = \gamma(t,q,av)$

Beweis.

Setze $c(t) := \gamma(at,q,v)$

$\rightsquigarrow$
- $c(0) = \gamma(0,q,v) = q$.
- $\frac{d}{dt}\Big|_{(0,q,v)} c(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{(0,q,v)} \gamma(at,q,v) \underset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} a \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{(0,q,v)} \gamma(t,q,v)}_{=v} = a \cdot v.$

c ist geodätische: $\frac{D}{dt} c' = \nabla_{c'} c' = \nabla_{a\gamma'} (a\gamma') = a^2 \underbrace{\nabla_{\gamma'} \gamma'}_{=0,\text{ da } \gamma \text{ Geodätische.}} = 0$

$\underset{\text{Eindeutigkeit}}{\Longrightarrow}$ $c(t) = \gamma(t,q,av)$ (brauchen $\|v\| < \frac{\varepsilon_1}{2}$).

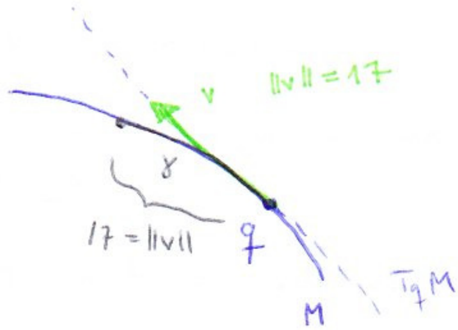
Die Exponentialabbildung

$q \in V$, $v \in T_qM$, $\|v\| < \varepsilon$.

$$\left(|t| < 2 = \frac{\delta}{\delta/2},\ a = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta \varepsilon_1}{2} \right.$$
$$\left. \Rightarrow \gamma(t,q,v) \text{ für } |t| < 2,\ \|v\| < \varepsilon \right)$$

$$\exp_q(v) := \gamma(1,q,v) \underset{v \neq 0}{=} \gamma\left(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|}\right)$$

$$\exp = \exp_q : \underset{\overset{\cap}{T_q M}}{B_\varepsilon(0)} \longrightarrow M$$



Bemerkung. G Lie-Gruppe
$\overset{\in}{e}$ neutrales Element

$$\exp : \underbrace{T_e G}_{\substack{\| \\ \mathfrak{g}}} \longrightarrow G$$

$\mathfrak{g}$: Lie-Algebra von G

Proposition. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\exp : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ ein Diffeomorphismus auf das Bild von $B_\varepsilon(0)$ ist.

Beweis. $$d\exp_0(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\cdot v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{\gamma(1, q, t\cdot v)}_{= \gamma(t,q,v)} = v.$$

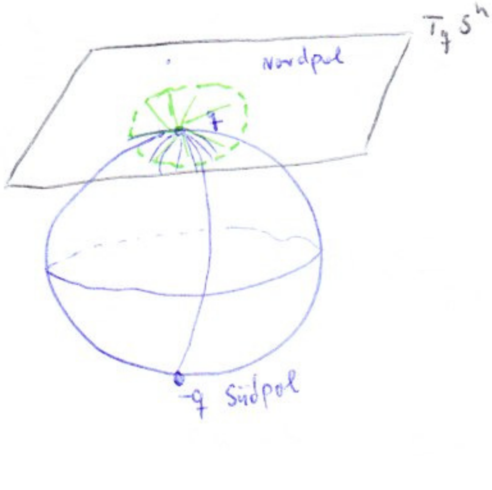
$$d\exp_0 = \mathrm{id}_{T_q M}.$$

Satz über umkehrbare Funktionen $\Rightarrow$ exp ist lokaler Diffeomorphismus in der Nähe von $0 \in T_q M$.

VIII

Bsp. 1) $M = \mathbb{R}^n$: $\exp_{q=0} : \underset{\overset{\cong}{\mathbb{R}^n}}{T_0 \mathbb{R}^n} \xrightarrow[\mathrm{id}]{} \mathbb{R}^n$

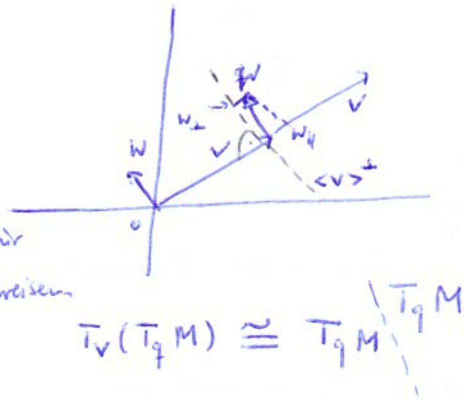
2) Einheitssphäre $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$; $\exp_q : \underset{}{\overset{\overset{T_q S^n}{\cup}}{B_\pi(0)}} \overset{\cong}{\Longrightarrow} S^n - \{-q\}$



$$\exp(\partial \overline{B_\pi(0)}) = \{-q\}$$

Gauss-Lemma. $v, w \in T_q M$.

$$\langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$



Beweis. Wir schreiben $w = w_\parallel + w_\perp$, $w_\parallel \in \langle v \rangle$, $w_\perp \in \langle v \rangle^\perp$

Linearität $\Rightarrow$ Es genügt die Aussage für $w_\parallel$ und für $w_\perp$ zu beweisen.

$T_v(T_q M) \cong T_q M$

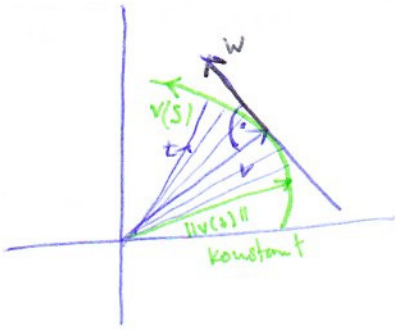
1) Für $w_\parallel = \lambda v$.

$$\langle d\exp_v(v), d\exp_v(\lambda v) \rangle = \lambda \cdot \| d\exp_v(v) \|^2 = \lambda \cdot \|v\|^2 = \langle v, w \rangle$$

$$\| d\exp_v(v) \| = \Big\| \frac{d}{dt} \underbrace{\gamma(1, q, v + tv)}_{= \gamma(1+t, q, v)} \Big\| = \| v \| .$$

2) Für $w_\perp$. Wir schreiben $w = w_\perp$, $\langle v, w \rangle = 0$. z.z.: $\langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = 0$.

Sei $v(s)$ eine Kurve in $T_q M$ mit $v(\underset{s}{0}) = v$, $v'(0) = w$, $\|v(s)\|$ konstant.



Setze $f(t, s) := \exp(t\, v(s))$. "parametrisierte Fläche"

$$\langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle (\underset{t}{1}, \underset{s}{0})$$

Behauptung: $\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle$ ist unabhängig von t:

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle = \langle \underbrace{\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t}}_{= 0 \ (\gamma \text{ Geodätische})}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \rangle$$

$$\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle \underset{\substack{\text{Symmetrie} \\ \text{des Levi-Civita} \\ \nabla}}{=} \langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \Big\| \frac{df}{dt} \Big\|^2 = 0,$$

da $\|v(s)\|$ konstant.

$$\Rightarrow \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle (1, s) = \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle (0, s) \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial s}(0, s) = 0 : \; f(0, s) = \exp(0) = q.$$

$$= 0.$$

$$\Rightarrow \langle d\exp_v(v), d\exp_v(w) \rangle = 0 = \langle v, w \rangle.$$

$\blacksquare$

$\exp_p: B_\varepsilon(0) \to M$ ist ein Diffeomorphismus auf $\exp(B_\varepsilon(0))$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.

$0 < r < \varepsilon$: $\quad B_r(p) \subseteq M, \quad B_r(p) := \exp_p(\underbrace{B_r(0)}_{\subseteq T_pM})$

"geodätischer Ball"

$S_r(p) := \{ \exp_p(v) \mid \|v\| = r \}$

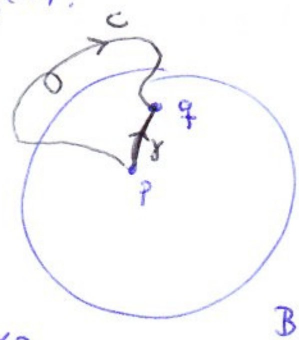
"geodätische Sphäre"

Gauss Lemma. "Geodätische Kurven durch p stehen senkrecht auf geodätischen Sphären."

Proposition. (Geodätische minimieren lokal die Länge von Kurven)
Sei $p \in M$, $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\exp_p: B_\varepsilon(0) \to M$ ein Diffeomorphismus auf $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ ist. Sei $\gamma: [0,1] \to B := B_r(p)$, $r < \varepsilon$, $\gamma(0) = p$ eine Geodätische. Sei $c: [0,1] \to M$ eine (stückweise) glatte Kurve mit $c(0) = p$, $c(1) = q = \gamma(1)$.

Dann gilt: $\quad \ell_0^1(c) \geq \ell_0^1(\gamma)$ und

$$\ell_0^1(c) = \ell_0^1(\gamma) \Rightarrow \operatorname{im} c = \operatorname{im} \gamma.$$



Beweis.
Idee: Schreibe $c = c(s)$ in Polarkoordinaten: $\qquad \exp := \exp_p$

$$c(s) = \exp(r(s) \cdot v(s)) \quad \text{mit} \quad r > 0 \text{ für } s > 0$$ (Zerlege Kurve s.d. $p \notin c((0,1])$)

Wir nehmen dabei zunächst an, dass $c([0,1]) \subseteq B$.

o.B.d.A.: $\quad c(s) \neq p \quad \forall s > 0$

Setze $\quad f(r,s) := \exp(r \cdot v(s)) \quad \Rightarrow \quad c(s) = f(r(s), s)$

$$\Rightarrow c'(s) = \frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{r(s)} \cdot \frac{\partial r}{\partial s}\Big|_s + \frac{\partial f}{\partial s}\Big|_s$$

$$\|c'\|^2 = \left\| \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \right\|^2 + 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle + \left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|^2$$

$$= \left| \frac{\partial r}{\partial s} \right|^2 \underbrace{\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\|^2}_{=1} + 2 \frac{\partial r}{\partial s} \underbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle}_{=0,\ \text{Gauss-Lemma}} + \left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|^2$$

denn:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial r} \exp(r v(s)) \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial r} \gamma(r, p, v(s)) \right\| = \|v(s)\| = 1.$$

$\Rightarrow \|c'\|^2 = \left|\frac{\partial r}{\partial s}\right|^2 + \left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\|^2 \Rightarrow \|c'\|^2 \geq \left|\frac{\partial r}{\partial s}\right|^2.$ Sei $\delta > 0$ klein.

$$\underbrace{\int_\delta^1 \|c'(s)\| ds}_{\xrightarrow[\delta \to 0]{} l_0^1(c)} \geq \int_\delta^1 |r'(s)| \, ds \geq \int_\delta^1 r'(s) \, ds = r(1) - \underbrace{r(\delta)}_{\xrightarrow[\delta \to 0]{} 0} \xrightarrow[\delta \to 0]{} r(1) = l_0^1(\gamma)$$

$$\left(r' = \frac{\partial r}{\partial s}\right)$$

Gleichheit $\Rightarrow \left\|\frac{\partial f}{\partial s}\right\| = 0 \Rightarrow f(r,s)$ konstant in s $\Rightarrow v(s) = v_0 \;\; \forall s$

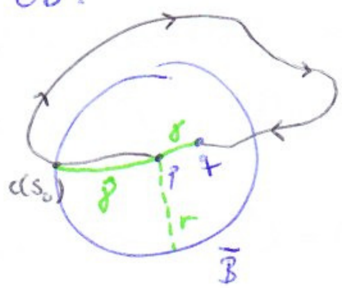
$\Rightarrow c(s) = \exp(r(s) v_0) \Rightarrow c$ ist eine Reparametrisierung von γ

(monoton: $r' = |r'| \Rightarrow r' \geq 0$)

$\Rightarrow \operatorname{im} c = \operatorname{im} \gamma$.

Wenn $c([0,1]) \not\subseteq B$, sei s_0 der kleinste Wert s mit $c(s) \in \partial \bar{B}$.

$l_0^1(c) \geq l_0^{s_0}(c) \geq l_0^1(\hat{\gamma}) = r \geq l_0^1(\gamma)$



$\hat{\gamma}$: Geodäte $p \longleftrightarrow c(s_0)$

Bemerkung:

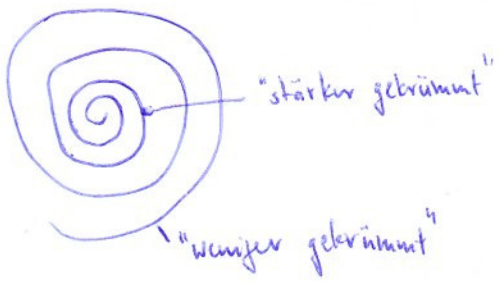
1) Man kann zeigen: Ist γ eine Kurve, parametrisiert proportional zur Bogenlänge, sodass

$$l_0^1(\gamma) \leq l_0^1(c) \quad \forall \text{ Kurven } c, \; \gamma(0) = c(0), \; \gamma(1) = c(1)$$

dann ist γ eine Geodätische.

2) Isometrien erhalten Geodätische

KRÜMMUNG



Bsp.

Krümmung (Kreis mit Radius r) $:= \frac{1}{r}$

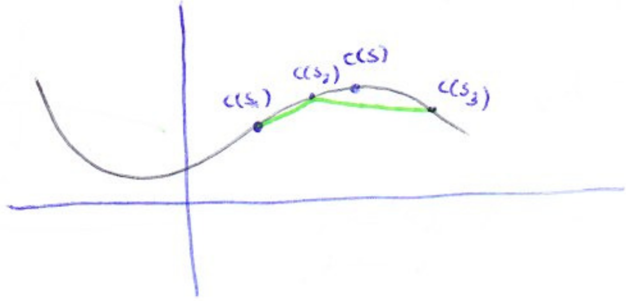
• Kurven $\subseteq \mathbb{R}^2$: (Kurven seien parametrisiert durch die Bogenlänge)

$c(s)$.

Sei $c''(s) \neq 0$.

s_1, s_2, s_3 nahe bei s

$\Rightarrow c(s_1), c(s_2), c(s_3)$ nicht kollinear.

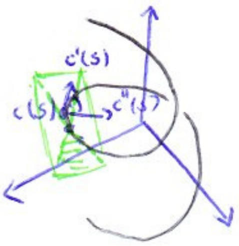


$\Rightarrow c(s_1), c(s_2), c(s_3)$ liegen auf einem eindeutig bestimmten Kreis mit Radius R.

Für $s_1, s_2, s_3 \to s$ erhält man einen wohldefinierten Grenzkreis, den sogenannten "oskulierenden" Kreis in $c(s)$.

Krümmung in $c(s)$:= Krümmung des osk. Kreises in $c(s)$. $= \frac{1}{R} \underset{\substack{\text{lässt sich}\\ \text{zeigen}}}{=} |c''(s)|$

• Kurven $\subseteq \mathbb{R}^3$. Wir fixieren wieder s. Sei $c''(s) \neq 0$.



$c(s_1), c(s_2), c(s_3)$ definieren eine Ebene $\subseteq \mathbb{R}^3$.

$s_1, s_2, s_3 \to s$ Grenzebene =: oskulierende Ebene

Der oskulierende Kreis liegt dann in der osk. Ebene.

$\rightsquigarrow$ Krümmung

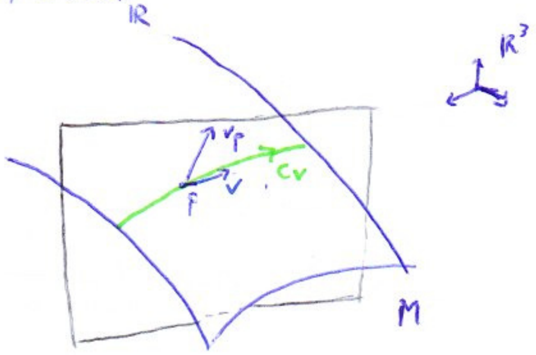
$$\underbrace{\frac{d}{ds} \underbrace{\|c'\|^2}_{\text{konst}}}_{=0} = \frac{d}{ds} \langle c', c' \rangle = 2 \langle c'', c' \rangle \Rightarrow c''(s) \perp c'(s)$$

Es gilt: osk. Ebene $= \langle c'(s), c''(s) \rangle_{\mathbb{R}}$

• Flächen und Euler. $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$p \in M$. Sei ν_p ein Einheitsnormalenvektor am Pkt p:

$\nu_p \perp T_pM$, $\|\nu_p\| = 1$.



Sei $v \in T_pM$, $\|v\| = 1$.

ν_p und v spannen eine Ebene E_v auf.

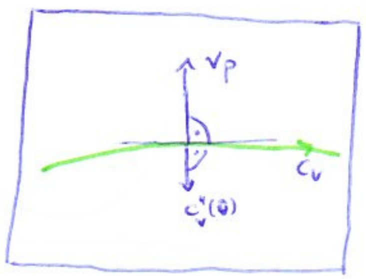
$E_v \cap M =$ Kurve c_v

parametrisiert durch Bogenlänge $c_v(0) = p$, $c_v'(0) = v$.

$c_v''(0) \perp T_pM$

$\exists!\, \kappa_v \in \mathbb{R}: \quad c_v''(0) = \kappa_v \cdot \nu_p$

Offensichtlich: $\quad \kappa_{-v} = \kappa_v$.



$\Rightarrow \kappa_v < 0$

$\rightsquigarrow$ Wir erhalten eine Funktion $\quad \kappa: \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{R}$

$$v \mapsto \kappa_v$$

Satz von Euler. Es existieren eindeutige Richtungen $v_1, v_2 \in \mathbb{RP}^1$, so dass

$$k_1 := \kappa_{v_1} = \min_v \kappa_v \leq \max_v \kappa_v = \kappa_{v_2} =: k_2.$$

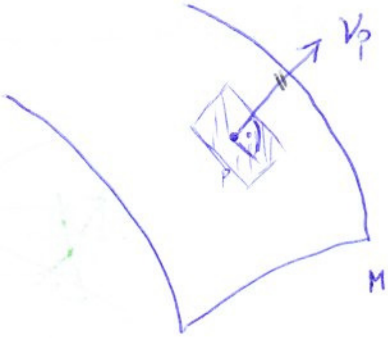
Es gilt: $\quad v_1 \perp v_2$ und $\kappa_v = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$, wobei $\theta = \sphericalangle(v, v_1)$

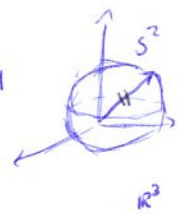
09.05.18

<u>Krümmung von Flächen nach Gauss.</u>

Sei $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche. $p \in M$.

Sei ν_p jener Einheitsnormalenvektor auf M am Punkt p, so dass (ν_p, v, w) positiv orientiert ist, wobei (v, w)-positiv orientiert ist in T_pM.

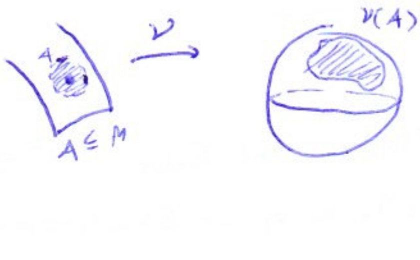




$\rightsquigarrow$ Gauss-Abbildung: $\quad \nu: M \longrightarrow S^2$

$$p \longmapsto \nu_p$$

Gauss-Krümmung: $\quad K(p) = \lim\limits_{A \to p} \dfrac{\mathrm{vol}(\nu(A))}{\mathrm{vol}(A)}$



<u>Bsp.</u> 1) $M^2 = S^2 = S^2_1$ Einheitssphäre.

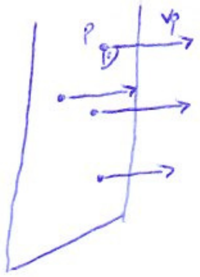
$$\rightsquigarrow \nu = \mathrm{id}: S^2 \to S^2$$

$$\Rightarrow \forall p \in S^2: \quad K(p) = \lim_{A \to p} \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(A)} = \underline{1}.$$

2) $M = S^2_r$: Sphäre vom Radius r.

$\rightsquigarrow \quad \mathrm{vol}(\nu(A)) = \dfrac{1}{r^2}\,\mathrm{vol}(A) \quad \rightarrow \quad K(p) = \dfrac{1}{r^2}$.

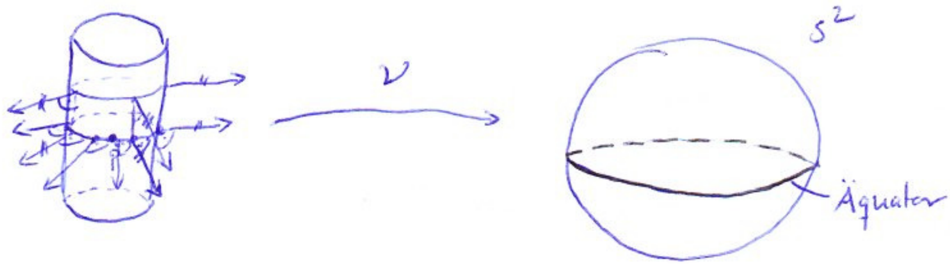
3) M = Ebene



$\Rightarrow \quad \nu :$ Ebene $\to S^2$ ist konstant.

$$\Rightarrow \quad K(p) = \lim \frac{vol(\nu(A))}{vol(A)} = \lim \frac{0}{vol(A)} = 0.$$

4) M = Zylinder



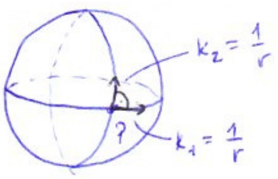
$$\Rightarrow \lim \frac{\overbrace{vol(\nu(A))}^{\text{1-dim.}}}{vol(A)} = 0.$$

$\Rightarrow$ Zylinder ist <u>nicht</u> gekrümmt!

Satz. (Beziehung Gauss-Euler)

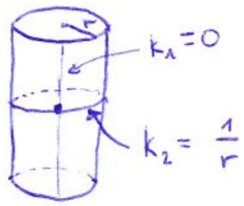
Es gilt: $\quad K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p)$

<u>Bsp.</u> 1) $S_r^2 \subseteq \mathbb{R}^3$



$\Rightarrow \quad k_1 k_2 = \frac{1}{r^2} = K(p)$

2)

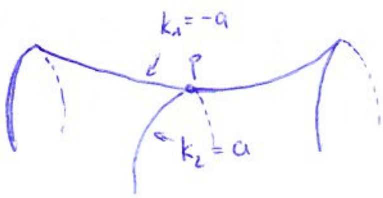


$\Rightarrow \quad k_1 \cdot k_2 = 0 = K(p)$

3) Fläche $z = \frac{ax^2}{2} - \frac{ay^2}{2} \quad (a > 0) \qquad \underbrace{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{ax^2}{2}\right) = a}_{=k_2} > 0 \ ; \quad \frac{d^2}{dy^2}\left(-\frac{ay^2}{2}\right) = \underbrace{-a}_{=k_1} < 0$

$p = (0,0,0)$.

$\Rightarrow \quad k_1 k_2 = -a^2 < 0 \quad$ <u>negative Krümmung</u>!



KRÜMMUNG NACH RIEMANN

Idee: M^n Mfkt., $p \in M$. Sei $\sigma \subseteq T_pM$ ein 2-dim. Untervektorraum.

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \xrightarrow{\cong} U = \text{geodätischer Ball um } p.$$

$F^2 := \exp_p(B_\varepsilon(0) \cap \sigma)$; F erhält die induzierte Metrik von M.

Fläche $\subseteq U$

$K(p,\sigma) :=$ Krümmung von F im Punkt p nach Euler und Gauss.

Formell: Sei ∇ der Levi-Civita Zsmhang. auf der Riemannschen Mfgkt. $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Wir definieren:

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M)$$
$$(X, Y, Z) \longmapsto R(X,Y)Z$$

$$R(X,Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

In lokalen Koordinaten $\{x^i\}$. $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ $\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$

$$\Rightarrow R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k = R_{ijk}^{l} \frac{\partial}{\partial x^l}$$
$$= R_{ijk}^{l}\, \partial_l$$

Eigenschaften: $f, g : M \to \mathbb{R}$

- $R(fX_1 + gX_2, Y)Z = f R(X_1, Y)Z + g R(X_2, Y)Z$
- $R(X, fY_1 + gY_2)Z = f R(X, Y_1)Z + g R(X, Y_2)Z$
- $R(X,Y)(fZ) = \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_X \nabla_Y (fZ) + \nabla_{[X,Y]}(fZ)$

$$= \nabla_Y (f \cdot \nabla_X Z + X(f)Z) - \nabla_X (f \nabla_Y Z + Y(f)Z) + f \nabla_{[X,Y]} Z + [X,Y](f) \nabla Z$$
$$= f \nabla_Y \nabla_X Z + \cancel{Y(f) \nabla_X Z} + \cancel{X(f) \nabla_Y Z} - Y\cancel{X}(f) Z$$
$$- f \nabla_X \nabla_Y Z \cancel{- X(f) \nabla_Y Z} \cancel{- Y(f) \nabla_X Z} - X\cancel{Y}(f) Z$$
$$+ f \nabla_{[X,Y]} Z + X\cancel{Y}(f) Z - YX(f) Z$$

$$= f R(X,Y)Z$$

$\Rightarrow R(X,Y)(fZ_1 + gZ_2) = f R(X,Y)Z_1 + g R(X,Y)Z_2$ auch linear in Z !

$\Rightarrow$ R ist ein sogenannter "Tensor", der sog. Riemannsche Krümmungstensor.

(dies erklärt den Term $\nabla_{[X,Y]} Z$)

Es folgt auch, dass $(R(X,Y)Z)_p$ nur von X_p, Y_p, Z_p abhängt.

Weitere Eigenschaften:

1) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$

2) Symmetrie von ∇ + Jacobi-Identität für $[\cdot,\cdot]$ $\to$ $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$.
(Bianchi-Identität)

3) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(X,Y)W, Z\rangle = 0$; $W \in \Gamma(M)$

folgt aus nachfolgender Rechnung:

$$\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle$$

$$= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle + \langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle$$

Interlude:

$$Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle$$
$$X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle$$
$$[X,Y]\langle Z, Z\rangle = 2\langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle$$

$$= Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle - X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle$$

$$= 0$$

nochmal so ein Interlude.

4) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$

Beweis: 4 × Bianchi Identität für zyklische Permutation, aufsummieren, Symmetrie...

In lokale Koordinaten: $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$; $X,Y,Z \in \Gamma(M)$: $X = x^i \partial_i$, $Y = y^j \partial_j$, $Z = z^k \partial_k$

$$R(X,Y)Z = x^i y^j z^k \underbrace{R(\partial_i, \partial_j)\partial_k}_{= R_{ijk}^{\ell} \partial_\ell} = x^i y^j z^k R_{ijk}^{\ell} \partial_\ell$$

- $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k = \nabla_{\partial_j}(\Gamma_{ik}^{\ell} \partial_\ell) - \nabla_{\partial_i}(\Gamma_{jk}^{\ell} \partial_\ell)$