Dienstag, 17. April 2018 22:24

ALGEBRAISCHE GRUPPEN

Literatur:
- T.A. Springer, Linear Algebraic Groups
- J.F. Humphreys, — " —
- W.C. Waterhouse, Introduction to Affine Group Schemes

[Borel, Linear Algebraic Groups (setzt Geometric voraus)]

0. EINLEITUNG

Algebraische Gruppen = Gruppenobjekte in der Kategorie algebraischer Varietäten.

Varietäten: Nullstellenmengen von Polynomen in $\mathbb{A}^n_k = k^n$ (oder $\mathbb{P}^n_k$)

Morphismen: komponentenweise durch Polynome gegeben.

Vergleiche: topologische Gruppen = Abb. sind stetig (Grp.obj in Top)

Lie-Gruppen = Abb. sind glatt (Grp.obj. in Mfd)

Beispiel:

$$G = GL_n(k), \qquad k = \bar{k} \text{ alg. abgeschlossen}$$

Trick von Rabinowitch: $GL_n(k) = \{ (a_{ij}, d) \in k^{n^2+1} \mid \det(a_{ij}) \cdot d = 1 \}$

$\Rightarrow$ $A = (a_{ij})$ hat $\det A \neq 0$, d.h. $A \in GL_n(k)$

$d = \det A^{-1}$, $A^{-1} = d \cdot \underbrace{A^{adj}}_{\text{hängt polynomell von } (a_{ij}) \text{ ab.}}$

$\Rightarrow$ $A \longmapsto A^{-1}$ ist durch Polynome gegeben

$(A,B) \mapsto A \cdot B$ ist auch durch Polynome gegeben.

Beschränkt man sich auf affine Varietäten, erhält man affine algebraische Gruppen, für die gilt: $G \hookrightarrow GL_n(k)$ Zariski-abg. Unterraum für geeignetes n (Einbettungssatz), daher auch der Name lineare algebraische Gruppe.

<u>Ziel</u>: Struktur reduktiver / halbeinfacher affiner alg. Gruppen über alg. abg. Körper k (mit char $k = 0$ oder char $k = p > 0$) untersuchen.

<u>Strategie</u>:

$$\begin{array}{lcll} & & G & \text{reduktiv} \\ & & \cup\!\!\mid & \\ U \rtimes T & = & B & \text{'Borel-Untergruppe'} \\ & & \cup\!\!\mid & \\ T \cong \mathbb{G}_m^n & & U & \text{unipotent} \end{array}$$

(kommutative) Torus Gruppe

$\mathbb{G}_m = GL_1(k)$

$$\begin{array}{ccc} & GL_n(k) & \\ & \cup\!\!\mid & \\ & \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} & \\ \cup\!\!\mid & & \cup\!\!\mid \\ T = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = U \end{array}$$

$T \subseteq G$ operiert auf $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G = T_e G$ (Tangentialraum)

(z.B. $GL_n(k)$ operiert via Konjugation auf $M_n(k) = \mathfrak{g}$)

Nicht-triviale Eigenräume liefern "<u>Charaktere</u>" $T \to k^\times$ (die die Eigenwerte "parametrisieren"), die ein sogenanntes <u>Wurzelsystem</u> bilden, welche man mittels sog. <u>Dynkin-Diagrammen</u> klassifizieren kann.

(z.B. $\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \mapsto \frac{x_i}{x_j}$ sind <u>Wurzeln</u> für $1 \leq i \neq j \leq n$ $GL_n(k)$)

Hierarchie algebraischer Gruppen