Nachtrag zu $\otimes$: $A \to R$, $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$ $(\otimes_A)$ behandelt

2. Möglichkeit für Tor_i zu $\otimes$: verwende $\otimes_R$

$${}_{R^{op}}\underline{\mathrm{Mod}} \times {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}} \quad \text{(bifunktor)}$$

Bem: ${}_{R^{op}}\underline{\mathrm{Mod}} \cong \underline{\mathrm{Mod}}_R$. Rechtsmoduln

Erhalten: $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = L_i(- \otimes_R N)(M) \overset{\text{Thm.}}{=} (L_i(M \otimes_R -))(N)$.

Es gelten analoge Aussagen zu 5.19.

Proposition. ${}_{\mathbb{Z}[G]}\underline{\mathrm{Mod}} \xrightarrow{\sim} {}_{\mathbb{Z}[G^{op}]}\underline{\mathrm{Mod}} = {}_{\mathbb{Z}[G]^{op}}\underline{\mathrm{Mod}}$ ist ein Isomorphismus von Kategorien unter folgendem Funktor.

$$(M, \cdot : G \times M \to M) \longmapsto (M, \cdot' : M \times G \to M, (m,g) \mapsto g^{-1}m)$$

Bsp. Sei $N_G := \sum_{g \in G} g$, falls G endlich, $N_G = 0$ sonst. Dann:

(a) $\mathbb{Z}[G]^G = \mathbb{Z} \cdot N_G$ (b) $\mathbb{Z}[G]_G \cong \mathbb{Z}$ via Augmentationsabb.

Gruppen (Ko-) Homologie.

Sei M ein G-Modul.

Def. 6.5.
$$H^i(G,M) := \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \overset{(*)}{=} (R^i(-)^G)(M)$$
$$H_i(G,M) := \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \overset{(**)}{=} (L_i(-)_G)(M)$$

Können kohomologischen Formalismus von Ext und Tor auf $H^i(G,\cdot)$ und $H_i(G,\cdot)$ anwenden ...

Explizite Beschreibung: (nur für Kohomologie)

Für $i \geq 0$ sei $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$ ein G-Modul durch $g \cdot (g_0, \dots, g_i) := (gg_0, \dots, gg_i)$

Lemma 6.6. $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$ ist ein freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul mit Basis $\{(1, g_1, \dots, g_i) \mid (g_1, \dots, g_i) \in G^i\}$

Lemma 6.7. Der Komplex Std_G in $\mathrm{Ch}^\bullet({}_G\underline{\mathrm{Mod}})$

$$\mathbb{Z}[G^{i+1}] \xrightarrow{d^{-i}} \mathbb{Z}[G^i] \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}[G^2] \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow 0 \quad \text{mit}$$

$-i \qquad\qquad -1 \qquad\qquad 0$

$$d^{-i}((g_0,\dots,g_i)) := \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (g_0,\dots,g_{j-1},g_{j+1},\dots,g_i)$$

zusammen mit $\varepsilon: \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ ist eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ (als trivialer G-Modul!)

Beweis.
$$d^{i+1} \circ d^i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \qquad (\text{ii in Vorzeichen...})$$

Auflösung: Zeige dazu $Std_G \to \mathbb{Z} \to 0 \to \dots$ ist nullhomotop.

Zeige dazu dass die Abb'en $s^{-i}: \mathbb{Z}[G^{i+1}] \to \mathbb{Z}[G^{i+2}]$, $(g_0,\dots,g_i) \mapsto (1,g_0,\dots,g_i)$ (i "$\in \mathbb{Z}$") eine Nullhomotopie ist.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathbb{Z}[G^{i+1}] \arrow[r, "d^{-i}"] \arrow[dl, "s^{-i}"'] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z}[G^i] \arrow[r] \arrow[dl, "s^{-i+1}"] & \dots \\
\mathbb{Z}[G^{i+2}] \arrow[r, "d^{-i-1}"'] & \mathbb{Z}[G^{i+1}] \arrow[r] & \dots &
\end{tikzcd}$$

$$id_{\mathbb{Z}[G^{i+1}]} = d^{-i-1} \circ s^{-i} + s^{-i+1} \circ d^{-i}.$$

Bar-Auflösung: Es gilt: $Bar_G = Std_G$.

Lemma 6.7.b. (ii) (a) Die Elemente $[g_1|\dots|g_i] := (1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2g_3\cdots g_i)$ für $(g_1,\dots,g_i) \in G^i$ bilden eine $\mathbb{Z}[G]$-Basis von $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$.

(b) Es gilt:
$$d^{-i}[g_1|\dots|g_i] = g_1[g_2|\dots|g_i] + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j [g_1|\dots|\hat{g}_j|g_jg_{j+1}|g_{j+2}|\dots g_i]$$
$$+ (-1)^i [g_1|\dots|g_{i-1}].$$

Für $M \in {}_G\underline{Mod}$ gilt: $H^i(G,M) = H^i(\underbrace{\mathrm{Hom}_G(Bar_G, M)}_{\text{in } Ch^\cdot(\mathbb{Z})})$

Beh.:
$$\mathrm{Hom}_G(Bar_G^{-i}, M) \xleftarrow[\simeq]{\phi} Abb(G^i, M) =: C^i(G,M) \quad \text{ist } \mathbb{Z}\text{-linearer Isomorphismus.}$$
$$F = \phi(f) \longleftarrow f \qquad \text{Dabei: } G^0 := \{e\}.$$

mit $F(g[g_1|\dots|g_i]) := g \cdot f(g_1,\dots,g_i)$.

<u>Erhalten:</u> induzierte Differentiale
$$\bar{d}^i : C^i(G,M) \longrightarrow C^{i+1}(G,M)$$
$$f \longmapsto (\phi^{-1} \circ d^{-i} \circ \phi)(f)$$

<u>explizit:</u>
$$(\bar{d}^i f)(g_0, \dots, g_i) = g_0 f(g_1, \dots, g_i) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(g_0, \dots, \hat{g}_j, g_j g_{j+1}, g_{j+2}, \dots, g_i)$$

(ü).
$$+ (-1)^{i+1} f(g_0, \dots, g_{i-1}).$$

Def. $Z^i(G,M) := \ker \bar{d}^i$, $B^i(G,M) := \operatorname{im} \bar{d}^{i-1}$

$$\bar{H}^i(G,M) := Z^i(G,M) / B^i(G,M)$$

Für $M \to M'$ G-Modul-Homomorphismus erhalten $C^i(G,M) \to C^i(G,M') \rightsquigarrow \bar{H}^i(G,M) \to \bar{H}^i(G,M')$

Proposition 6.8. • Erhalten Kettenkomplexe $(C^i(G,M), \bar{d}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$

• Haben natürliche Isom'en (nach Wahl von Bar_G)
$$H^i(G,M) \xrightarrow{\sim} \bar{H}^i(G,M) \quad + \text{ Funktorialität für } M \to M'.$$

Proposition 6.9. + Kompatibilität für lange exakte Sequenzen

Beweis. obige Überlegungen + 5.17. ▨

Übung 6.10.
• $\bar{H}^0(G,M) = Z^0(G,M) = M^G$ (Randabb.: $m \mapsto gm - m$)
• $Z^1(G,M) = \{ f : G \to M \mid f(gh) = g f(h) + f(g) \ \forall g,h \in G \}$
• Ist M trivial als G-Modul, so gilt $B^1(G,M) = 0$. und folglich
$$\bar{H}^1(G,M) = \operatorname{Hom}_{\underline{Grp}}(G,M) = \operatorname{Hom}_{\underline{Ab}}(G^{ab}, M)$$

Gruppenextensionen.

$$1 \to \underset{\substack{\text{abelscher} \\ \text{Normalteiler}}}{A} \to E \to G \to 1 \quad : \text{Erweiterung von } G \text{ um } A$$

$\rightsquigarrow$ A ist G-Modul via Konjugation.

$$\{\text{Erweiterung von } G \text{ um } A\} /_{\cong} \overset{=}{\underset{\text{Satz}}{}} H^2(G,A).$$

"triviale Erw." $? \longleftarrow \longleftarrow 0$

triviale Erw.: sind die semidirekten Produkte.

Induzierte Moduln & Shapiro's Lemma.

Def. 6.11. $H \leq G$ Untergruppe, B ein H-Modul.

$$\mathrm{Ind}_H^G(B) := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} B \quad ; \quad \mathrm{CoInd}_H^G(B) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], B) \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$$

mit $g(\alpha \otimes b) := g\alpha \otimes b$ sowie $(gf)(\alpha) := f(\alpha g)$

heißen induzierte bzw. koinduzierte Darstellungen zu B von H auf G.

Lemma 6.12. Sei $(-)|_H := \mathrm{Res}_G^H : {}_G\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_H\underline{\mathrm{Mod}}$ der Restriktionsfunktor. Dann gilt:

(a) $\mathrm{Ind}_H^G \dashv \mathrm{Res}_G^H$ (b) $\mathrm{Res}_G^H \dashv \mathrm{CoInd}_H^G$

Beweis.

Adjunktion von $\otimes$ und Hom:

$$\mathrm{Hom}_R({}_RL_S \otimes_S {}_SM, {}_RN) \simeq \mathrm{Hom}_S({}_SM, \mathrm{Hom}_R({}_RL_S, {}_RN))$$

sowie $R \otimes_R M \cong M \cong \mathrm{Hom}_R(R, M)$ für:

(a) ${}_RL_S = {}_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G]_{\mathbb{Z}[H]}$, ${}_{\mathbb{Z}[H]}M = B$, ${}_{\mathbb{Z}[G]}N = A$.

(b) andere Wahlen...

Bemerkung 6.13. $H \leq G$ Untergruppe $\Rightarrow$ Std_G ist proj. Auflösung von $\mathbb{Z}$ als H-Modul. Denn: $\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{g \in {}_H\backslash G} g\,\mathbb{Z}[H]$ ist freier $\mathbb{Z}[H]$-Modul. ▨

Satz 6.14. (Shapiro's Lemma) $H \leq G$ Untergruppe

$\forall i \geq 0$ $\exists$ Isom'en $H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G(B)) \cong H_i(H, B)$ und $H^i(G, \mathrm{CoInd}_H^G(B)) \cong H^i(H, B)$

(funktoriell im Argument B).

Beweis.

$$H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G(B)) \simeq H^{-i}(\mathrm{Std}_G \otimes_G \mathrm{Ind}_H^G B) \cong H^{-i}(\mathrm{Std}_G \otimes_G (\mathbb{Z}[G] \otimes_H B))$$

$$\cong H^{-i}(\underbrace{\mathrm{Std}_G|_H}_{\substack{\text{proj. Auflösung} \\ \text{von } \mathbb{Z} \text{ als } H\text{-Modul}}} \otimes_H B) \underset{6.13.}{=} H_i(H, B).$$

H^i analog; verwendet 6.12 und 6.13! $\left(\ldots = H^i(\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Std}_G, \mathrm{CoInd}_H^G B)) \underset{6.12}{=} H^i(\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Std}_G|_H, B)) = \ldots\right)$

▨