ALGEBRAISCHE GRUPPEN

Literatur:
- T.A. Springer, Linear Algebraic Groups
- J.F. Humphreys, — " —
- W.C. Waterhouse, Introduction to Affine Group Schemes

[Borel, Linear Algebraic Groups (setzt Geometric voraus)]

0. EINLEITUNG

Algebraische Gruppen = Gruppenobjekte in der Kategorie algebraischer Varietäten.

Varietäten: Nullstellenmengen von Polynomen in $\mathbb{A}^n_k = k^n$ (oder $\mathbb{P}^n_k$)

Morphismen: komponentenweise durch Polynome gegeben.

Vergleiche: topologische Gruppen = Abb. sind stetig (Grp.obj in Top)

Lie - Gruppen = Abb. sind glatt (Grp.obj. in Mfd)

Beispiel:

$$G = GL_n(k), \qquad k = \bar{k} \text{ alg. abgeschlossen}$$

Trick von Rabinowitch: $GL_n(k) = \{ (a_{ij}, d) \in k^{n^2+1} \mid \det(a_{ij}) \cdot d = 1 \}$

$\Rightarrow$ $A = (a_{ij})$ hat $\det A \neq 0$, d.h. $A \in GL_n(k)$

$d = \det A^{-1}$, $A^{-1} = d \cdot \underbrace{A^{adj}}_{\text{hängt polynomell von } (a_{ij}) \text{ ab.}}$

$\Rightarrow$ $A \longmapsto A^{-1}$ ist durch Polynome gegeben

$(A, B) \mapsto A \cdot B$ ist auch durch Polynome gegeben.

Beschränkt man sich auf affine Varietäten, erhält man affine algebraische Gruppen,

für die gilt: $G \hookrightarrow GL_n(k)$ Zariski-abg. Unterraum

für geeignetes n (Einbettungssatz), daher auch der Name Lineare algebraische Gruppe.

Ziel: Struktur reduktiver / halbeinfacher affiner alg. Gruppen über alg. abg. Körper k

(mit $\operatorname{char} k = 0$ oder $\operatorname{char} k = p > 0$) untersuchen.

Strategie: G reduktiv

$$
\begin{array}{ccc}
 & G & \text{reduktiv} \\
 & \cup\!| & \\
U \rtimes T = & B & \text{„Borel-Untergruppe"} \\
 & \cup\!| & \\
 & U & \text{unipotent}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
GL_n(k) \\
\cup\!| \\
\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$T = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = U$$

$T \cong \mathbb{G}_m^n$

(kommutative)

Torus Gruppe

$$\mathbb{G}_m = GL_1(k)$$

$T \subseteq G$ operiert auf $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G = T_e G$ (Tangentialraum)

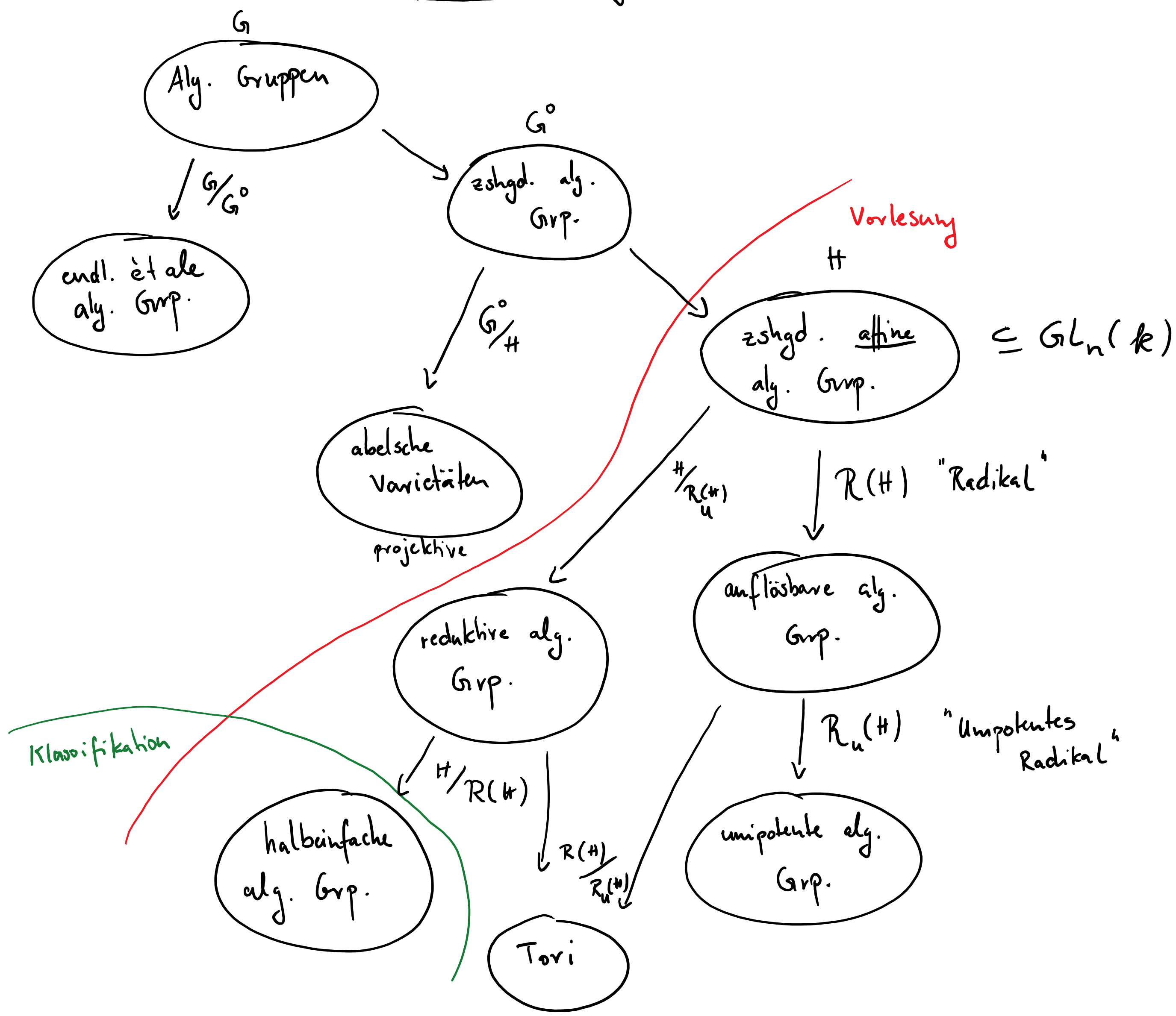
(z.B. $GL_n(k)$ operiert via Konjugation auf $M_n(k) = \mathfrak{g}$)

Nicht-triviale Eigenräume liefern "Charaktere" $T \longrightarrow k^\times$ (die die Eigenwerte „parametrisieren"),

die ein sogenanntes Wurzelsystem bilden, welche man mittels sog. Dynkin-Diagrammen klassifizieren kann.

(z.B. $\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \longmapsto \frac{x_i}{x_j}$ sind Wurzeln für $1 \le i \ne j \le n$ $GL_n(k)$)

Hierarchie algebraischer Gruppen



04

Freitag, 20. April 2018 14:25

01. Algebraische Geometrie und Funktoren

I. Affine Varietäten

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper; $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_k := k^n$ heißt affiner n-Raum.

Def. 1. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt affine Varietät, falls ein Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, -, X_n] = k[\underline{X}]$ existiert, so dass $X = V(I) = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid \forall f \in I: f(P) = 0\}$

Nach dem Hilbert'schen Basissatz existieren endlich viele $f_1, -, f_n \in I$ mit $I = (f_1, -, f_n)$.

Lemma 2. Für Ideale $I_1, I_2, (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

(i) $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow V(I_2) \subseteq V(I_1)$

(ii) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2)$

(iii) $V(\sum_\lambda I_\lambda) = \bigcup_\lambda V(I_\lambda)$

Die Mengen $\{V(I) \mid I \trianglelefteq k[\underline{X}]\}$ bilden genau die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$, der sogenannten Zariski-Topologie. $(V(0) = \mathbb{A}^n, \ V(1) = \emptyset)$

Affine Varietäten tragen die Unterraumtopologie.

Lemma 3. Die offenen Mengen der Form $D(f) := V((f))^c = \{P \in \mathbb{A}^n_k \mid f(P) \neq 0\}$ mit $f \in k[X]$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$.

Für eine affine Varietät $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ setze $I(X) := \{f \in k[\underline{X}] \mid \forall P \in X: f(P) = 0\} \trianglelefteq k[\underline{X}]$.
Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ setze $\operatorname{rad} I := \sqrt{I} := \{f \in k[\underline{X}] \mid \exists n \in \mathbb{N}: f^n \in I\}$, das Radikal von I.

Gilt $I = \sqrt{I}$, so heißt I Radikalideal.

Theorem 4. (Hilbert'scher Nullstellensatz)
$I(\cdot)$, $V(\cdot)$ induzieren Bijektionen

$$\{\text{Radikalideale in } k[\underline{X}]\} \underset{V(\cdot)}{\overset{I(\cdot)}{\rightleftarrows}} \{\text{affine Varietäten im } \mathbb{A}^n\}$$

Korollar 5. Maximale Ideale von $k[\underline{X}]$ entsprechen abgeschlossenen Punkten.

$$m_a := I(\{a\}) = (X_1 - a_1, -, X_n - a_n); \quad a = (a_1, -, a_n) \in \mathbb{A}^n$$

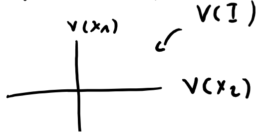
Lemma 6. Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

$$I \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}] \iff Z = V(I) \text{ ist irreduzibel als topologischer Raum.}$$

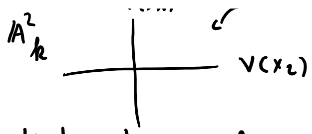
Irreduzible Räume sind zusammenhängend.
$Y \subseteq X$ irreduzibel $\iff \overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

Korollar 9. Jede affine Varietät ist eine endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten.

Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$ $\quad \mathbb{A}^2_k$



Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$



Koordinatenachsen, zerlege in irred. Komponenten.

Def. 11. Für eine affine Varietät X heißt $A(X) := A_X := k[\underline{X}]/I(X)$ der Koordinatenring von X.
("Morphismen $X \longrightarrow A^1$")

$A(X)$ ist eine reduzierte ($\sqrt{0} = 0$) endl. erz. k-Algebra.

$A(X)$ ist Integritätsring $\Leftrightarrow$ X ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I(X) \in \operatorname{Spec} k[\underline{X}]$.

Def. 12. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Ein Morphismus $X \xrightarrow{\phi} Y$ von Varietäten besteht aus einem m-Tupel $\phi = (f_1, \dots, f_m) \in A(X)^m$

$$\text{mit} \quad \phi(P) := (f_1(P), \dots, f_m(P)) \in Y \quad \forall P \in X.$$

Lemma 13. Morphismen von Varietäten sind stetig bzgl. der Zariski-Topologie.

Beweis.

$$\phi^{-1}(D(\underset{\underset{A(Y)}{\cap}}{f})) = D(\underbrace{f \circ \phi}_{\in A(X)})$$

∎

Def. 14 $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$. Dann ist das kartesische Produkt $X \times Y \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ wieder eine affine Varietät, das Produkt von X, Y.

Achtung: $X \times Y$ trägt nicht die Produkttopologie

Beweis. (14)

$$X = V(f_1, \dots, f_n), \quad Y = V(g_1, \dots, g_m) \quad \Rightarrow \quad X \times Y = V(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$$

∎

Theorem 15. Der Funktor $X \longmapsto A(X)$ induziert eine Kategorienäquivalenz von

$$\{\text{affine Varietäten}/k\}^{op} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{reduzierte endlich erz. } k\text{-Algebren}\}$$

$$(X \xrightarrow{\phi} Y) \longmapsto A(Y) \xrightarrow{\phi^*} A(X)$$

$$f + I(Y) \mapsto f \circ \phi + I(X)$$

Der quasiinverse Funktor ordnet R die Menge $\operatorname{Specm}(R)$ zu, $k[\underline{X}] \to R$ induziert $\operatorname{Specm}(R) \longrightarrow \operatorname{Specm} k[\underline{X}] = \mathbb{A}^n_k$

Alternativ können wir den Funktor $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(-, k)$ benutzen, da $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(R, k) \cong \operatorname{Specm} R$
$f \longmapsto \ker f$

($k \subseteq R/m$ ist endlich, d.h. $R/m = k$, da $k = \bar{k}$)

II. Funktoren

Yoneda-Lemma. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist der kontravariante Funktor

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \underline{\mathrm{Sets}}) = \underline{\mathrm{Sets}}^{\mathcal{C}},$$

$$\begin{array}{ccl} A & \longmapsto & h_A : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi^* \\ B & & h_B : C \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \end{array}$$

volltreu, d.h.

$$h_A(B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Func}}(h_B, h_A)$$

$$\phi \longmapsto \left(\phi^* : h_B(C) \longrightarrow h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}} \quad \text{(nat. Trafos)}$$

$$\eta_B(\mathrm{id}_B) \longleftarrow \left(\eta_C : h_B(C) \longrightarrow h_A(C)\right)_{C \in \mathcal{C}}$$

Mit anderen Worten: $A \in \mathcal{C}$ ist genauso gut wie der Funktor h_A.

Funktoren der Form h_A heißen darstellbar.

Bsp. 1. $\mathcal{C}$: Kategorie endl. erz. reduzierter k-Algebren.

(i) $\mathbb{A}^n(\,) : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto R^n$ wird dargestellt von $k[X_1, \dots, X_n]$

da $R^n = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(k[\underline{X}], R)$

(ii) $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$ seien darstellbar. Dann ist der Produktfunktor

$F \times G : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sets}}$, $R \longmapsto F(R) \times G(R)$ darstellbar.

$$F = h_A,\ G = h_B,\ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow F(R) \times G(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(A, R) \times \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(B, R)$$

$$\text{d.h. } F \times G = h_{A \otimes_k B} \qquad = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{\mathrm{Alg}}}(A \otimes_k B, R)$$

II. Algebraische Gruppen: Grundlagen

1. Affine algebraische Gruppen. $k = \bar{k}$

Def. + Satz 1.

(i) Eine affine (lineare) algebraische Gruppe $/_k$ ist eine affine Varietät G über k zusammen mit Morphismen

$$\mu : G \times G \longrightarrow G \quad \text{(Multiplikation)}$$

$$\iota : G \longrightarrow G \quad \text{(Inversion)}$$

$$\varepsilon : \mathbb{A}^0_k \longrightarrow G \quad \text{(neutrales Element)}$$

so dass die Gruppenaxiome gelten:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"'] \arrow[dr, phantom, "\rotatebox{45}{$\equiv$}"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd} \qquad \text{(Assoziativität)}$$

$$\begin{tikzcd}
G \times \mathbb{A}^0 \arrow[r, "\mathrm{id} \times \varepsilon"] \arrow[dr, "pr_1"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{A}^0 \times G \arrow[l, "\varepsilon \times \mathrm{id}"'] \arrow[dl, "pr_2"] \\
& G &
\end{tikzcd} \qquad \text{(neutrales Element)}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, \iota)"] \arrow[d, "\text{konst.}"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "(\iota, \mathrm{id})"'] \arrow[d, "\text{konst.}"] \\
\mathbb{A}^0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & G & \mathbb{A}^0 \arrow[l, "\varepsilon"]
\end{tikzcd} \qquad \text{(Inverses)}$$

Morphismen in der Kategorie (affiner) alg. Gruppen: Morphismen von Varietäten, die obige Strukturen respektieren.

(ii) Die Kategorie affiner algebraischer Gruppen ist (anti-)äquivalent zu folgenden Kategorien:

a) Objekte: kommutative Hopf-k-Algebren, d.h. reduzierte, kommutative, endl. erz. k-Algebren A zusammen mit Morphismen

- $\Delta : A \longrightarrow A \otimes_k A$ (Komultiplikation)
- $\iota : A \longrightarrow A$ (Koinversion)
- $\varepsilon : A \longrightarrow k$ (Ko-Einheit) so dass:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_k A \otimes_k A & A \otimes A \arrow[l, "\Delta \otimes id"'] \\
A \otimes A \arrow[u, "id \otimes \Delta"] \arrow[ur, phantom, "///"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes k & A \otimes A \arrow[l, "id \otimes \varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon \otimes id"] & k \otimes A \\
& A \arrow[ul] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong \text{ Inklusion zweite Komp.}"']
\end{tikzcd}$$

(Komultiplikation) (Koeinheit)

$$\begin{tikzcd}
A & A \otimes A \arrow[l, "(\iota, id)"'] \arrow[r, "(id, \iota)"] & A \\
k \arrow[u, "\text{Strukturmorph.}"] & A \arrow[l, "\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[u, "\Delta"] & k \arrow[u, "\text{Strukturmorphismus}"']
\end{tikzcd}$$

(Koinversion)

Morphismen: k-Algebren, kompatibel mit Zusatzstrukturen.

b) Objekte: Darstellbare Funktoren

$$\mathcal{C} := \begin{matrix}\text{Kategorie red. endl. erz.} \\ k\text{-Algebren}\end{matrix} \longrightarrow \underline{Grp}$$

Morphismen: Natürliche Transformationen.

Beweis.
(i) $\Longleftrightarrow$ (a): Thm. I.1.15 $\Rightarrow$ $G \longmapsto A(G)$ definiert (anti-)-Kategorienäquivalenz, beachte $A(V \times W) = A(V) \otimes_k A(W)$, so dass die Diagramme aus (a) denen aus (i) entsprechen.

(a) $\Longleftrightarrow$ (b): $A \longmapsto \mathrm{Hom}_k(A, -)$ induziert Kategorienäquivalenz nach Yoneda-Lemma: Die Diagramme in (a) implizieren, dass die k_A Werte in Gruppen annehmen! ▨

Die Beschreibung (ii)(b) führt zu dem allgemeineren Begriff des (affinen) Gruppenschemas als Funktor

$$\begin{tikzcd}
k\text{-}\underline{Alg} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \underline{Grp} \arrow[d, "\text{Vergissfkt.}"] \\
& \underline{Set}
\end{tikzcd}$$

so dass der induzierte Funktor durch eine (endl. erz.) k-Algebra darstellbar ist.
(jetzt kann k ein beliebiger Körper / Ring / Schema sein)

Beispiele 2.

1) $\mathbb{G}_a := \mathbb{A}^1$ ("additive Gruppe")

(i) $\mu(x,y) := x+y$, $\iota(x) = -x$, $\varepsilon(*) = 0$.

(a) $A = k[X]$, $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, $\iota(X) = -X$, $\varepsilon(X) = 0$

(b) $\mathbb{G}_a(R) = (R,+) = \mathrm{Hom}_k(k[X], R)$

2) $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = V(XY-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ ("multiplikative Gruppe")

(i) $\mu(x,y) = xy$, $\iota(x) = x^{-1}$, $\varepsilon(*) = 1$

(a) $A = k[x, x^{-1}]$, $\Delta(X) = X \otimes X$, $\iota(X) = X^{-1}$, $\varepsilon(X) = 1$

(b) $\mathbb{G}_m(R) = (R^\times, \cdot) = \mathrm{Hom}_k(k[x,x^{-1}], R)$

3) $\mu_n \, (\subseteq \mathbb{G}_m) = V(x^n - 1) \subseteq \mathbb{A}^1$ (i.A. <u>nicht</u> irreduzibel / zshgd.)

4) GL_n

(i) $GL_n(k) \subseteq M_n(k) = \mathbb{A}^{n^2}$

(a) $A = k[X_{ij}, \underbrace{\det(x_{ij})^{-1}}_{=:d}]$, $\Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}$, $\Delta(d) = d \otimes d$

$\iota(d) = \det(x_{ij})$, $\iota(X_{ij}) = d \cdot \mathrm{Adj}(X_{ij})$

$\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$, $\varepsilon(d) = 1$.

(b) $R \longmapsto GL_n(R)$

5) $SL_n = V(\det - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$

6) V endl.-dim. k-VR

(b) $R \longmapsto (V \otimes_k R, +)$

7) $GL(V)$ (V wie in 6) (b): $R \longmapsto GL(V \otimes_k R)$

8) Morphismen: $\lambda \in k^\times$, $n \in \mathbb{Z}$: $\mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a$, $x \longmapsto \lambda x$

$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$, $x \longmapsto x^n$

$GL_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m$

2. Untergruppen

Def. 1. Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ ist eine abgeschlossene Untervarietät, die zugleich eine Untergruppe ist. H besitzt (via Einschränkung der Multiplikation- / Inversen- / "Neutrales Element" - Abbildung) eine eindeutige Struktur als algebraische Gruppe, so dass die Inklusion $H \hookrightarrow G$ ein Morphismus alg. Grp. ist.

Bsp. 2. Abgeschlossene UG von GL_n

- SL_n $(\det = 1)$
- D_n Diagonalmatrizen $(X_{ij} = 0 \; \forall i \neq j)$
- B_n obere Dreiecksmatrizen $(X_{ij} = 0, \; i > j)$
- U_n: unipotente Matrizen
- $O_n \,/\, Sp_{2n}$: Matrizen A mit $A^T J A$ für $J = \left(E_n \;\; O_n \;\; \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} Sp_{2n} \right)$
- $SO_n = O_n \cap SL_n$

Proposition 3. Sei G eine algebraische Gruppe.

(i) Es gibt genau eine irreduzible Komponente $G^\circ \subseteq G$, die das neutrale Elt. e enthält

(ii) G° ist eine normale abg. Untergruppe von endlichem Index.

(iii) G° ist die einzige Zusammenhangskomponente, die e enthält.

(iv) Jede abg. Untergruppe von G von endlichem Index umfasst G°.

(Eine alg. Grp. ist genau dann zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist.)

Beweis.

(i) Seien X, Y irred. Komponenten (insb. abg.), die e enthalten.

$\underset{\text{AlgGeo}}{\Longrightarrow}$ $X \times Y$ irreduzible Varietät (Springer Thm. 1.5.4
$\leftrightarrow$ A, B integre k-Alg. $\Rightarrow$ $A \otimes_k B$ integer)

$\underset{\mu \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $X \cdot Y = \mu(X \times Y)$ irreduzibel.

$\Longrightarrow$ $\overline{X \cdot Y}$ irreduzibel $\quad \Rightarrow$ (i) $X = \overline{XY} = Y$ und X ist abg. unter Multiplikation.
$\quad$ UI
X, Y irreduzible Komponenten

Da ι Homöomorphismus, ist $e \in X^{-1}$ ebenfalls eine irreduzible Komponente, d.h. $X = X^{-1}$

$\Longrightarrow$ X abg. Untergruppe.

Analog folgt: $gXg^{-1} = X \quad \forall g \in G$, d.h. $X = G^\circ$ ist normal

Die Nebenklassen gX sind die Komponenten von G ($g \in Y$ bel. Komp.: $e \in g^{-1}Y \Rightarrow Y = gX$)

Da es in Varietäten nur endlich viele irreduzible Komponenten gibt folgt (ii).
Darüberhinaus sind alle irreduziblen Komponenten disjunkt.
Da Zusammenhangskomponenten Vereinigungen irred. Komponenten sind, müssen irred. und zsmh. Komponenten übereinstimmen. $\Rightarrow$ (iii).

(iv) Sei $H \subseteq G$ abg. von endlichem Index. $\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ abg. von endlichem Index.
$\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ ist offen abgeschlossen $\underset{G^\circ \text{ zsmhgd.}}{\Longrightarrow}$ $H^\circ = G^\circ$ $\Rightarrow$ (iv).
gilt in top. Grp.

∎

G° heißt die Zusammenhangskomponente der 1.

27.04.18

Theorem 4. (Chevalley)
Sei $X \xrightarrow{\phi} Y$ ein Morphismus von (quasi-projektiven oder affinen) Varietäten. Dann existiert $\emptyset \neq U \subseteq \phi(X)$ mit $U \subseteq \overline{\phi(X)}$ offen.

Beweis. T. A. Springer, Theorem 1.9.5.

∎

Lemma 5. (i) Ist $H \subseteq G$ eine (abstrakte) Untergruppe, so ist $\overline{H} \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und damit selbst eine algebraische Gruppe.
(ii) Ist $G \xrightarrow{\phi} H$ ein Morphismus algebraischer Gruppen, so sind $\ker\phi$, $\operatorname{im}\phi$ abgeschlossene Untergruppen.

Beweis.
(i) Die Multiplikation mit $g \in G$ (von links oder rechts) induziert einen Isomorphismus (von Varietäten) $G \to G$. $\Rightarrow$ $g\overline{H}$ abgeschlossen und $g\overline{H} \supseteq gH$ $\Rightarrow$ $g\overline{H} \supseteq \overline{gH}$.
und $g\overline{H} = \overline{gH}$ (überlegen!)
Analog: $\overline{H}g = \overline{Hg}$. $\forall g \in G$.

1.) Beh.: $H\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Sei $h \in H$. $\Rightarrow$ $\overline{H}h = \underbrace{\overline{Hh}}_{=H} \subseteq \overline{H}$ ✓

2.) Beh.: $\overline{H}\,\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Sei $h \in \overline{H}$. $\underset{1.)}{\Rightarrow}$ $Hh \subseteq \overline{H}$. $\Rightarrow$ $\overline{H}h = \overline{Hh} \subseteq \overline{H}$ ✓

3.) $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$, da die Inversion $\iota: G \to G$ ein Isomorphismus von Varietäten ist.

2.), 3.) $\Rightarrow$ $\overline{H}$ ist Untergruppe, abgeschlossen klar.

(ii) $\ker\phi$ ist offensichtlich abgeschlossene Untergruppe (denn $\ker\phi = \phi^{-1}(\{e\})$ und $\{e\} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} H$ abgeschlossen, Punkte sind immer abgeschlossen in algebraischen Gruppen!)

sogar in allgemeinen (affinen) Varietäten gemäß Hilberts Nullstellensatz

Nach Chevalley existiert $\emptyset \neq U \subseteq \phi(G)$ mit $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{\phi(G)}$
$\Rightarrow$ $\phi(G) = \bigcup_{h \in \phi(G)} hU \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{\phi(G)}$. Die Behauptung folgt mit "$G = \phi(G)$", "$UV = U = V = \phi(G)$" aus dem Folgenden Lemma.

∎

Lemma 6. $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq G$ dicht und offen $\Rightarrow \mathcal{U}\mathcal{V} = G$.

Beweis. $\mathcal{U} \subseteq G$ dicht, offen.

$$\underset{\substack{G = \coprod\limits_{\text{endl.}} \underbrace{gG^\circ}_{\text{offen, abg.}} \\ \text{Prop. 3}}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{U} \cap G^\circ \subseteq G^\circ \text{ dicht und } \emptyset \neq \mathcal{U} \cap G^\circ \quad (\text{da } G^\circ \underset{\text{offen}}{\subseteq} G \text{ mit } G^\circ \neq \emptyset)$$

Also o.E. $G = G^\circ$ irreduzibel.

$g \in G$ beliebig $\Rightarrow g\mathcal{V}^{-1}, \mathcal{U} \subseteq G$ offen + dicht $\underset{G \text{ irreduzibel}}{\Longrightarrow} g\mathcal{V}^{-1} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, d.h. $g \in \mathcal{U}\mathcal{V}$.
$\Rightarrow \mathcal{U}\mathcal{V} = G$. ∎

Bemerkung. Algebraische Gruppen sind i.A. keine topologische Gruppen!
$G \times G \xrightarrow{\mu} G$ ist zwar stetig, aber bezüglich der Zariski-Topologie auf $G \times G$
($\neq$ Produkttopologie)

3. Einbettungen in GL_n

Sei G eine endliche Gruppe und $k[G]$ die zugehörige Gruppenalgebra. Die reguläre Darstellung (d.h. G operiert durch Multiplikation auf $k[G]$) induziert eine Abbildung

$$G \hookrightarrow GL(k[G]), \quad \text{die injektiv ist.}$$

Da das Bild endlich ist, ist es Zariski-abgeschlossen. Insbesondere ist jede endliche Gruppe eine algebraische Gruppe nach Lemma 2.5 und Def. 2.1.

<u>Idee</u>: Für affine algebraische Gruppe $G \neq 1$ ersetze $k[G]$ durch den Koordinatenring $\mathcal{A}(G)$.

<u>Problem</u>: Im Allgemeinen ist $\dim_k \mathcal{A}(G) = \infty$.

<u>Lösung</u>: Finde <u>endlich-dimensionalen</u> G-invarianten Teilraum V von $\mathcal{A}(G)$, der hinreichend groß ist, dass $G \hookrightarrow GL(V)$ injektiv ist.

Für $g \in G$, betrachte den Automorphismus $r_g : G \to G$, $x \mapsto x \cdot g$, $\rho(g) = (r_g)^* : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)$ ist k-Algebren-Automorphismus.

Wir erhalten $\rho : G \to GL(\mathcal{A}(G))$, $g \mapsto \rho(g)$ (Gruppenhomomorphismus bzw. Darstellung) indem wir $\mathcal{A}(G)$ als k-VR auffassen.

Lemma 1. Sei $V \subseteq \mathcal{A}(G)$ ein k-Untervektorraum.

(i) V ist G-invariant (d.h. $\rho(g)V = (r_g)^*(V) \subseteq V.\ \forall g \in G.$)

$$\iff \quad \Delta(V) = V \otimes_k \mathcal{A}(G) \qquad (\Delta : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G) \otimes_k \mathcal{A}(G) \text{ Komultiplikation})$$

(ii) Gelte zusätzlich $\dim_k V < \infty$.

Dann existiert ein endlich-dimensionaler G-invarianter k-UVR $W \subseteq \mathcal{A}(G)$ mit $V \subseteq W$

Insbesondere gilt:

$$\mathcal{A}(G) = \bigcup_{\substack{W \subseteq \mathcal{A}(G) \text{ UVR}, \\ \dim_k W < \infty \\ W\ G\text{-invariant}}} W$$

Beweis.

(i) "$\Leftarrow$": Zu $f \in V$ wähle $f_i \in V$, $g_i \in \mathcal{A}(G)$ so dass

$$\mu^*(f) = \Delta(f) = \sum_{i=1}^r f_i \otimes g_i$$

Ferner

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\Delta(f) = f \circ \mu"'] & G \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\ & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

$(\mu^*(f) = f \circ \mu)$

$$\Rightarrow \quad ((r_g^*)(f))(h) = f(hg)$$
$$= f \circ \mu(h,g) = \Delta(f)(h,g)$$
$$= \sum_{i=1}^r f_i(h) \cdot g_i(g) \quad \forall h \in G$$

d.h. $\rho(g)(f)(\cdot) = \sum_{i=1}^r \underbrace{g_i(g)}_{\in k} \cdot \underbrace{f_i(\cdot)}_{\in V} \in V.$

"$\Rightarrow$": Sei $(f_i, i \in I)$ eine Basis von V und $(g_j, j \in J)$ s.d $(f_i, g_j, i \in I, j \in J)$ eine k-Basis von $\mathcal{A}(G)$ ist. Für $f \in V$ beliebig existieren $u_i, v_j \in \mathcal{A}(G)$ mit

$$\Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i + \sum_{j \in J} g_j \otimes v_j$$

$$\underset{\text{s. oben}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\rho(g)(f)(\cdot)}_{\text{d.h. } \rho(g)(f) \text{ als Funktion } G \to \mathbb{A}^1} = \sum_{i \in I} f_i(\cdot) \cdot u_i(g) + \sum_{j \in J} g_j(\cdot) \cdot v_j(g) \in V$$

Nach Voraussetzung, da V G-invariant

$\Rightarrow v_j(g) = 0 \ \forall g \in G \Rightarrow v_j \equiv 0 \Rightarrow \Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i \in V \otimes_k \mathcal{A}(G).$

(ii) o.E. $\dim_k V = 1$, d.h. $V = \langle f \rangle_k \Rightarrow \exists f_i, g_i \in \mathcal{A}(G)$: $\Delta(f) = \sum_{i=1}^r f_i \otimes g_i$

Setze $W' := \langle f_1, \dots, f_r \rangle_k \underset{(i)}{\Rightarrow} \rho(g)(f) \in W'$

Setze nun $W := \langle \rho(g)(f) \mid g \in G \rangle \subseteq W' \Rightarrow W$ ist endlich-dimensional.

$f \in W$, da $f = \rho(1_G)(f) \Rightarrow V \subseteq W$; $\rho(g)(\rho(h)(f)) = \rho(gh)(f) \in W \Rightarrow W$ ist G-invariant. ▨

Bemerkung 2. Ersetzt man $G \times G \xrightarrow{\mu} G$ durch eine Gruppenaktion (Morphismus von Varietäten)

$G \times X \xrightarrow{\theta} X$ von G auf einer Varietät X, so erhält man

$G \longrightarrow GL(\mathcal{A}(X))$ für die man analoge Aussagen wie in Lemma 1

für $V \subseteq \mathcal{A}(X)$ zeigen kann $(\Delta \longleftrightarrow \theta^*)$

Theorem 3. Jede affine algebraische Gruppe G lässt sich abgeschlossen in GL_n, für $n \in \mathbb{N}$ geeignet, einbetten.

Beweis. Sei $\mathcal{A}(G) = k[g_1, \dots, g_r]$ als k-Algebra und $V = \langle g_1, \dots, g_r \rangle_k$ als k-VR.

$\underset{\text{Lemma 1 (ii)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n$ k-lin. unabhängige k-Algebren-Erzeuger von $\mathcal{A}(G)$, s.d.
$W = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_k$ G-invariant ist. (und $V \subseteq W$).

$\underset{\text{Lemma 1 (i)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, a_{ij} \in \mathcal{A}(G)$ mit $\Delta(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \otimes a_{ij}$, $1 \leq i \leq n$ $\qquad (1)$

$\underset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow}$ $\rho(g)(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \cdot a_{ij}(g)$, $1 \leq i \leq n$, $g \in G$; d.h. $(a_{ij}(g))$ ist Darstellungsmatrix von $\rho(g)$ bzgl. $f_1, \dots, f_n$.

Wir erhalten einen Morphismus

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & \mathbb{A}^{n^2} \arrow[d, phantom, "\cup|"] \\ & GL_n \end{tikzcd} \qquad g \longmapsto (a_{ij}(g))$$

ψ Gruppenhomomorphismus nach Konstruktion

(landet in GL_n, da $\rho(g)$ Automorphismen sind)

$\Longrightarrow$ $\psi^* : \mathcal{A}(GL_n) \longrightarrow \mathcal{A}(G)$ schickt $X_{ij} \longmapsto a_{ij}$

$\underset{\text{s. (1)}}{\Longrightarrow}$ $f_i(g) = \rho(g)(f_i)(1_G) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G)\, a_{ij}(g) \quad \forall g \in G$

d.h. $f_i = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G) \cdot a_{ij}$ $\underset{f_i \text{ erzeugen } \mathcal{A}(G)}{\Longrightarrow}$ ψ^* ist surjektiv

$\Longrightarrow$ $G \longrightarrow GL_n$ ist abgeschlossene Einbettung (denn $I := \ker \psi^*$, $X' = V(I) \subseteq GL_n$
$\Longrightarrow \mathcal{A}(X') \cong \mathcal{A}(G) \underset{\text{Kat.-äquiv.}}{\Longrightarrow} X' \cong G$

∎

Korollar 4. G affine, algebraische Gruppe, $H \leq G$ abgeschlossene Untergruppe. Dann existiert ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum W mit UVR W_H sowie eine abgeschlossene Einbettung $G \hookrightarrow GL(W)$ mit $H = \mathrm{Stab}_G(W_H)$.

Beweis. $I_H := \{ f \in A(G) \mid f|_H = 0 \}$ ist ein Ideal.

Im obigen Beweis von Theorem 3 o.E. $f_1, \dots, f_r$ $(r \geq n)$ erzeugen das Ideal I_H.

$W_H := W \cap I_H$. Dann gilt:

$$g \in H \iff hg \in H \ \forall h \in H \iff r_g^*(I_H) \subseteq I_H$$

$$\iff r_g^*(W_H) \subseteq W_H$$

da $W_H = W \cap I_H$ und W ohnehin G-invariant ist.

▨

02.05.18

Lemma 5. (Chevalley) Man kann erreichen, dass $\dim_k W_H = 1$ ist.

Beweis.

Starte mit Einbettung $G \to GL(W)$ aus Korollar 4. $d := \dim_k W_H$.

$$L := \Lambda^d W_H \subseteq \Lambda^d W \quad ; \quad \dim_k L = \binom{d}{d} = 1. \qquad \rho : G \to GL(\Lambda^d W)$$

$$G \curvearrowright \Lambda^d W \quad \text{via} \quad g(w_1 \wedge \dots \wedge w_d) = g(w_1) \wedge \dots \wedge g(w_d).$$

Behauptung: $H = \mathrm{Stab}_G^\rho(L)$

"$\subseteq$": klar, da H W_h invariant lässt bzgl. der ursprünglichen Wirkung $G \curvearrowright W$.

"$\supseteq$": Nun gelte $g(L) = L$ bzgl. ρ.

$$\underbrace{e_1, \dots, e_m, \underbrace{e_{m+1}, \dots, e_d}_{\text{Basis } \downarrow \ W_H \cap gW_H}}_{\text{Basis } W_H}, \ \underbrace{e_{d+1}, \dots, e_{d+m}}_{\text{Basis } gW_H \text{ (mit } e_{m+1},\dots,e_d)}, \dots, e_n \quad \text{sei Basis von } W.$$

(Basis ergänzen ...)

z.z.: $m = \operatorname{codim}_{W_H} W_H \cap gW_H \overset{!}{=} 0$ (d.h. $gW_H = W_H$ bzw. $g \in \mathrm{Stab}_G(W_H) = H$)

IA: $m \neq 0 \underset{\text{L.A.}}{\Rightarrow} \underbrace{e_1 \wedge \dots \wedge e_d}_{\in L}, \underbrace{e_{m+1} \wedge \dots \wedge e_{m+d}}_{g(e_1 \wedge \dots \wedge e_d) \in L \text{ nach Voraus.}}$ sind l.u. in $\Lambda^d W$.

bis auf Skalar

$G \to GL(\Lambda^d H)$ Einbettung: Übung.

$\lightning$ da $\dim_k L = 1$.

$\blacksquare$

Proposition 6. Sei $H \trianglelefteq_{abg} G$ ein abg. Normalteiler. Dann existiert ein endl. dim. VR W und ein Morphismus $\rho : G \to GL(W)$ algebraischer Gruppen mit $\ker \rho = H$.

Beweis. Starte mit Darstellung $\phi : G \to GL(V)$, bei der $H = \mathrm{Stab}_G^\phi(\langle v \rangle)$ für ein $v \in V$ wie aus Lemma 5.

$\Rightarrow v$ ist gemeinsamer Eigenvektor $\forall h \in H$. $V_H := \langle w \mid w \text{ ist EV } \forall h \in H \rangle \subseteq V$

$h(v) = \chi(h) v$ für $\chi(h) \in k^\times$ (h invertierbar) ($\chi : H \to \mathbb{G}_m$ ist Charakter)

Da $H \trianglelefteq G$, gilt für alle $g \in G$:

$$hgv = g\underbrace{(g^{-1}hg)}_{\in H} v = \chi(g^{-1}hg)\, gv \quad \forall h \in H$$

$\Rightarrow gv \in V_H$, d.h. V_H ist G-Invariant.

OE: $V = V_H$ (sonst ersetzen) d.h.

$$V = \bigoplus_{i=1}^r V_i, \quad V_i \text{ gemeinsame Eigenräume für } H.$$

$W := \prod_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i) \subseteq \operatorname{End}(V)$ Unterraum derjenigen Endomorphismen, die jedes V_i invariant/stabil lassen.

$G \curvearrowright \operatorname{End}(V)$ via: $g(\lambda) := \phi(g) \circ \lambda \circ \phi(g)^{-1}$ und W ist diesbezüglich G-invariant:

$$V_i \xrightarrow{\phi(g)^{-1}} \phi(g)^{-1} V_i \xrightarrow{\lambda} \phi(g)^{-1} V_i \xrightarrow{\phi(g)} V_i, \text{ d.h. } g(\lambda) \in W$$

da mit V_i auch $\phi(g)^{-1} V_i$ ein gemeinsamer Eigenraum für H ist

Wir erhalten $\rho : G \to GL(W)$ Morphismus alg. Grp.

Beh.: $H = \ker \rho$

"$\subseteq$": $g(h)(\lambda) = \phi(h) \circ \lambda \circ \phi(h)^{-1} = \lambda$, da $\lambda = \sum \lambda_i$, $\lambda_i \in End(W_i)$

$$\phi(h) \circ \lambda \circ \phi(h)^{-1} v_i = \chi(h)\chi(h)^{-1} \lambda_i(v_i) = \lambda_i(v_i)$$

"$\supseteq$": $g \in \ker \rho \underset{\text{Def. } \rho}{\Longrightarrow} \phi(g) \in \text{Zentrum}(W) = \prod_i \underbrace{\text{Zentrum}(End(V_i))}_{= k \cdot id_{V_i}}$

$\Rightarrow \phi(g) v \in k^\times v \to g \in Stab_G(\langle v \rangle) = H$.

$\square$

III Einschub: Quasiprojektive Varietäten und Dimension

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_k := \frac{k^{n+1} \setminus \{0\}}{k^\times} = \{[a_0 : \ldots : a_n] \mid a_j \in k, \text{ nicht alle } 0\}$$

$$[a_0 : \ldots : a_n] = [b_0 : \ldots : b_n] \iff a_i = \lambda b_i \text{ für ein } \lambda \in k^\times.$$

Def. 1. Teilmengen von $\mathbb{P}^n$ der Form $V(f_1, \ldots, f_n) = \{P \in \mathbb{P}^n_k \mid f_i(P) = 0,\ i = 1 \ldots n\}$ für <u>homogene</u> Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$ heißen projektive Varietäten. Sie bilden die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^n$.
Lokal abgeschlossene Teilmengen (Durchschnitte einiger offenen und abgeschlossenen Mengen) heißen quasi-projektive Varietäten.

Bemerkung 2. Die Zariski-offenen Teilmengen $D_+(X_i) = \mathbb{P}^n \setminus V(X_i) = \{P = [x_0 : \ldots : x_n] \mid X_i \neq 0\}$, $0 \leq i \leq n$

bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n$

$$\mathbb{A}^n \longrightarrow D_+(X_i),\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto [x_1 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n]$$

ist ein Homöomorphismus.

Proposition 3.

(i) Die Segre-Einbettung, $N = nm + n + m$

$$S^{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N, \ ([a_0 : \ldots : a_n], [b_0 : \ldots : b_m]) \longmapsto [a_0 b_0 : a_0 b_1 : \ldots : a_0 b_m : a_1 b_0 : \ldots : a_n b_m]$$

ist injektiv mit abg. Bild. (lexikografisch geordnet)

(ii) Für quasi-projektive Varietät $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ ist das Produkt $X \times Y$ definiert als $S^{n,m}(X, Y) \subseteq \mathbb{P}^N$.

$X \times Y$ ist quasi-projektiv, und, falls X, Y projektiv ebenfalls projektiv.

Beweis. Hartshorne. $\square$

Ab jetzt sind alle Varietäten irreduzibel!

Def. 4. (i) Für X affin, heißt $k(X) := \mathrm{Quot}(A(X))$ der Funktionenkörper von X.
wtf., da X irreduzibel

Für $P \in X$ heißt $\mathcal{O}_{X,P} := A(X)_{m_P}$ (Lokalisierung bei m_P)

der lokale Ring in P.

Es gilt: $A(X) = \bigcap_P \mathcal{O}_{X,P} \quad (\subseteq k(X))$

(ii) Für X projektiv betrachte den Ring

$$\mathcal{R}(X) := \mathcal{R}_X := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; \begin{array}{l} f, g \in k[X_0, \ldots, X_n] \text{ homogen} \\ g \notin I(X), \ \deg f = \deg g \end{array} \right\}$$

$$\cup\!\!\mid$$

$$\underbrace{m_X}_{\text{ist maximales Ideal}} := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{R}(X) \;\middle|\; f \in I(X) \right\}$$

$\Rightarrow$ $k(X) := \mathcal{R}(X) / m_X$ heißt der Funktionenkörper von X, seine Elemente heißen auch rationale Funktionen auf X.

Faktum: Für jedes i gibt es einen Isomorphismus $\qquad X^{(i)} := X \cap D_+(X_i)$

$$k(X) \xrightarrow{\cong} k(X^{(i)})$$

$$\frac{f(X_0, \ldots, X_n)}{g(X_0, \ldots, X_n)} \longmapsto \frac{f(t_1, \ldots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \ldots, t_n)}{g(\quad - \quad " \quad - \quad)}$$

X projektive Varietät $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{X,P} := \left\{ \frac{f}{g} \bmod m_X \in k(X) \mid g(P) \neq 0 \right\}$
und es gilt für $P \in X^{(i)} := X \cap D_+(X_i)$: $\quad \mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X,P}$ und daher $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X^{(j)},P}$ für $P \in X^{(i)} \cap X^{(j)}$.

(iii) X quasi-projektiv ($\Rightarrow \bar{X}$ projektiv)

$$k(X) := k(\bar{X}), \quad \mathcal{O}_{X,P} := \mathcal{O}_{\bar{X},P}$$

Für projektive und affine Varietäten stimmt dies mit den vorherigen Definitionen überein.

(iv) $\mathcal{U} \subseteq X$ offen in quasi-proj. Varietät $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(\mathcal{U}) := \bigcap_{P \in \mathcal{U}} \mathcal{O}_{X,P}$ $(\subseteq k(X))$ heißt Ring der regulären Funktionen auf $\mathcal{U}$.

<u>Ü:</u> $\mathcal{O}(\mathcal{U}) = \bigcap_i \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$ für alle offenen Überdeckungen $\{\mathcal{U}_i\}_i$ von $\mathcal{U}$.

(v) Ein Morphismus $\varphi: X \longrightarrow Y$ quasi-projektiver Varietäten ist eine stetige Abbildung, so dass

(1) $\forall\, \mathcal{U} \subseteq Y$ offen: $\quad f \in \mathcal{O}(\mathcal{U}) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))$.

Dies ist eine lokale Bedingung, d.h. erfüllt $\varphi/_{\mathcal{U}_i}$ die Bedingung (1) für eine offene Überdeckung $\{\mathcal{U}_i\}_i$ von $\mathcal{U}$, so erfüllt φ (1). (Ü).

Bsp 5. (i) Für X, Y affin erhält man denselben Begriff wie vorher: o.E. $Y = \mathbb{A}^n$. Für $f_1, \dots, f_n \in A(X)$ hat $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ die Eigenschaft (1).

$$\begin{matrix} X \longrightarrow Y \\ Q \longmapsto P \end{matrix} \quad \text{induziert} \quad \begin{tikzcd} A(Y) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & A(X) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{Y,P} \arrow[r, "\varphi_Q^*"] & \mathcal{O}_{X,Q} \\ f \arrow[r, mapsto] & f \circ \varphi \end{tikzcd}$$

(ii) X quasi-projektiv, $\mathcal{U} \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U} \hookrightarrow X$ ist Morphismus.

Lemma 6. $P \in X$ quasi-projektiv. Dann existiert ein $P \in \mathcal{U} \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ mit $\mathcal{U}$ isomorph (als quasi-proj. Varietät) zu einer affinen Varietät.

Insbesondere: X hat offene, affine Überdeckung.

Beweis. $P \in X^{(i)} \subseteq X$. o.E. $Y = \mathbb{A}^n$
$X^{(i)}$ offen in Y, Y abg. in $\mathbb{A}^n$

$$X^{(i)} \cong D(f) \xleftarrow{\cong} V(xf - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \text{ abg.}$$

Iso quasi-projektiver Varietäten.

Def. 7. Sei X irreduzible, quasi-proj. Varietät.

$$\dim X := \operatorname{trdeg}_k k(X) \quad (\text{Transzendenzgrad}),$$ d.h. die maximale Zahl algebraisch unabhängiger Elemente in $k(X)$, heißt Dimension von X.

Für X beliebige quasi-proj. Varietät wird die Dimension von X als das Maximum der Dimensionen seiner irreduziblen Komponenten definiert.

Bsp. 8.
- $\dim \mathbb{A}^n = n$
- $\dim \mathbb{P}^n = n$, da $k(\mathbb{P}^n) \cong k(D_+(X_0)) \cong k(\mathbb{A}^n)$

Theorem 9. Ist X affin, so gilt $\dim X = \dim A(X)$ (Krulldimension)

(max. Länge von Ketten $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subseteq \mathfrak{p}_n$ von Primidealen in $A(X)$, bzw. irred. abg. Teilmengen in X) $\boxtimes$

Proposition 10. Seien X, Y quasi-projektive Varietäten.

(i) $X \longrightarrow Y$ surjektiver Morphismus $\Rightarrow \dim Y \leq \dim X$.

(ii) X irreduzibel, $Y \subsetneq X$ abgeschlossen $\Rightarrow \dim Y < \dim X$.

(iii) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$

(iv) (Krull's Hauptidealsatz) $X \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbb{A}^n$ irreduzibel, $f \in k[X_1, \dots, X_n] = A(\mathbb{A}^n)$ mit $f(P) = 0$ für ein $P \in X$. $Z \subseteq X \cap V(f)$ irreduzible Komponente.

$$\Rightarrow \dim Z \geq \dim X - 1.$$

IV: Jordan-Zerlegung, diagonalisierbare und unipotente Gruppen

1. Jordan-Zerlegung

Durch Einbettung $G \overset{\varphi}{\hookrightarrow} GL_n$, $k = \bar{k}$ besitzen die Elemente $\varphi(g), g \in G$ eine Jordannormalform und wir können Begriffe wie "halbeinfach", "unipotent" etc. auf Elemente von G übertragen, sodass diese unabhängig von der Wahl von φ sind.

Def. 1. $\dim_k V < \infty$, $g \in \mathrm{End}(V)$ heißt halbeinfach (oder diagonalisierbar), falls V Basis aus Eigenvektoren für g hat. g heißt nilpotent falls $g^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Bemerkung 2. (LA)

(i) g halbeinfach $\Leftrightarrow$ $\mathrm{mipo}(g)$ hat paarweise verschiedene Nullstellen

(ii) $W \leq V$ g-invarianter UVR + g halbeinfach $\Rightarrow g|_W$ ist halbeinfach, da $\mathrm{mipo}(g|_W) \mid \mathrm{mipo}(g)$

Proposition 3. (Additive Jordanzerlegung) (k alg. abg.)

Sei $g \in \mathrm{End}_k(V)$, $\dim_k V < \infty$. Dann: $\exists!\ g_s, g_n \in \mathrm{End}(V)$ mit g_s halbeinfach, g_n nilpotent,

sodass $g = g_s + g_n$ und $g_s \circ g_n = g_n \circ g_s$.

Beweis.

$g_s \mathrel{\hat{=}}$ Diagonalmatrix aus JNF, $g_n := g - g_s$. ∎

Bemerkung 4. (i) In obiger Situation existieren $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$ und $g_s = P(g)$, $g_n = Q(g)$

(ii) Ist $W \leq V$ ein g-invarianter UVR, so ist W auch g_s und g_n-invariant und $(g|_W)_s = g_s|_W$ sowie $(g|_W)_n = g_n|_W$.

Beweis.

(i) $\phi(T) = \det(T \cdot \mathrm{id}_V - g) = \prod (T - \lambda_i)^{n_i}$ (char. Polynom)

$$(V \cong)\ k[T]/\langle \phi(T) \rangle \underset{\text{CRS}}{\cong} \bigoplus k[T]/(T-\lambda_i)^{n_i}$$

$\exists\, P \in k[T]: P \equiv \lambda_i \mod (T - \lambda_i)^{n_i} \ \forall i$

Ist $\phi(0) = 0$, so ist 0 ein Eigenwert von g $\Rightarrow P \equiv 0 \mod T$.

Sei $\phi(0) \neq 0$. $\Rightarrow$ Ändere P durch konstantes Vielfaches von ϕ ab

$\Rightarrow P(0) = 0$. Setze $Q = T - P$

$\Rightarrow P(g) = g_s$, $Q(g) = g_n$.

(ii) Wegen (i) ist W auch g_s, g_n-invariant. Da $\mathrm{charpol}(g|_W) \mid \Phi$, ist P auch für W eine geeignete Wahl und $(g|_W)_s = P(g|_W) = P(g)|_W = g_s|_W$. ∎

Def. 5. $h \in \mathrm{End}_k(V)$ heißt unipotent, falls $h - \mathrm{id}_V$ nilpotent ist. ($\Leftrightarrow$ alle EW $= 1$)

Korollar 6. (Multiplikative Jordanzerlegung)

$g \in GL(V)$, $\dim_k V < \infty$.

(i) $\exists!\ g_s, g_u \in GL(V)$ mit g_s halbeinfach und g_u unipotent s.d. $g = g_s \circ g_u = g_u \circ g_s$

(ii) $\exists\, P, R \in k[T]$ mit $P(0) = R(0) = 0$ und $g_s = P(g)$, $g_u = R(g)$.

(iii) Ist $W \leq V$ g-invarianter UVR, so ist W auch g_s, g_u-invarianter UVR und $(g_s)|_W = (g|_W)_s$ sowie $(g_u)|_W = (g|_W)_u$.

Beweis. (i) EW von $g \neq 0 \Rightarrow$ EW von $g_s \neq 0 \Rightarrow g_s \in GL(V)$. $g_u := id_V - g_s^{-1} \circ g_n$

(ii) z.z.: g_s^{-1} ist Polynom in g_s (damit auch Polynom in g)

$$\text{mipo}\, g_s = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \underset{\neq 0}{\underline{a_0}} \Rightarrow g_s^{-1} = -a_0^{-1}[g_s^{n-1} - \ldots - a_1]$$

(iii) wie oben aus (ii). ▨

Def. 7. Sei nun V ein möglicherweise ∞-dim. k-VR, $g \in GL(V)$. und gelte

$$(*) \qquad V = \bigcup_{\substack{W \subseteq V \\ \text{endl.-dim. UVR} \\ g(W) \subseteq W}} W$$

Dann heißt g *halbeinfach* (*lokal unipotent*), wenn $g|_W$ halbeinfach (unipotent) $\forall W$ wie oben.

Bsp. 8.
Nach Lemma II. 3.1 (ii) erfüllt $V = A(G)$ die Bedingung $(*)$ $[\forall g \in G: \; r_g^* \in GL(A(G))]$

Korollar 9. Unter der Bedingung $(*)$ für $g \in GL(V)$ gilt:

(i) $\exists!\, g_s, g_u \in GL(V)$ mit g_s halbeinfach, g_u lokal unipotent mit $g = g_s . g_u = g_u g_s$

(ii) Analogon zu Korollar 6 (iii)

Beweis.

(i) $(g|_W)_s, (g|_W)_u$ verkleben zu g_s, g_u nach Korollar 6 (i), (ii).

(ii) W erfüllt ebenfalls $(*)$. Daher folgt die Behauptung ebenso aus Korollar 6 (ii). ▨

Bezeichne $\rho_G : G \hookrightarrow GL(A(G))$ die durch Rechtsmultiplikation induzierte Darstellung.

09.05.18

Theorem 10. Sei G eine affine algebraische Gruppe und $g \in G$.

(i) $\exists!\, g_s, g_u \in G$ mit $g = g_s g_u = g_u g_s$ und $\rho_G(g_s) = \rho_G(g)_s$, $\rho(g_u) = \rho(g)_u$

(ii) Ist $G = GL_n$, so stimmen g_s, g_u mit denen aus Korollar 6 überein.

(iii) Für jede Einbettung $\phi : G \hookrightarrow GL_n$ gilt: $\phi(g_s) = \phi(g)_s$ und $\phi(g_u) = \phi(g)_u$.

Allgemeiner kann man zeigen (Korollar 12), dass (iii) für beliebige Darstellungen $G \xrightarrow{\phi} GL(V)$, $\dim_k V < \infty$ gilt. g heißt *halbeinfach* (*unipotent*), falls $g = g_s$ ($g = g_u$).

später

Teil (ii) folgt aus dem folgenden

Lemma 11. Sei $\dim_k V < \infty$

$g \in GL(V)$ ist genau dann halbeinfach (unipotent), wenn $\rho_{GL}(g) \in GL(A(GL(V)))$ das ist.

<u>denn</u>:

$g = g_s g_u$, $\rho_{GL}(g) = \rho_{GL}(g)_s \, \rho_{GL}(g)_u$ sind eindeutig, d.h. $\rho_{GL}(g)_s = \rho_{GL}(g)_s$

und $\rho_{GL}(g)_u = \rho_{GL}(g_u)$, falls Lemma 11 gilt.

Beweis von Lemma 11.

$\underset{\left(\overset{\cong}{M_{\dim_k V}(k)}\right)}{\mathrm{End}_k(V)} \supseteq D(d) = GL(V)$ mit $d : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{A}^1$, $f \mapsto \det f$ als Varietäten.

$\Downarrow$

$$\begin{tikzcd} A(\mathrm{End}_k V) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r_g^*"] & A(\mathrm{End}_k V)[\frac{1}{d}] \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & A(GL\, V) \arrow[d, "r_g^* = \rho(g)"] \\ A(\mathrm{End}_k V) \arrow[rr, hook] & & A(GL\, V) \end{tikzcd}$$

$r_g : GL(V) \to GL(V)$, $f \mapsto fg$ $\Rightarrow$ $A(\mathrm{End}_k V) \subseteq A(GL\, V)$ ist ein $GL(V)$-invarianter Unterraum bezüglich der Rechtstranslation,

und es gilt: (1) $(r_g^*)(d) = d(g)\, d$, d.h. d ist Eigenvektor für r_g^*.

<u>Beh. 1</u>: Für $f \in A(\mathrm{End}_k V)$ gilt:

f ist EV für r_g^* auf $A(\mathrm{End}_k V)$ $\Leftrightarrow$ fd^{-m} ist EV. für r_g^* auf $A(GL\, V)$ $\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

<u>denn</u>: "$\Rightarrow$": $fd^{-m} : GL(V) \to \mathbb{A}^1$; $\quad r_g^*(fd^{-m})(x) = f(xg)\, d^{-m}(xg) = f(xg)\, d^{-m}(x)\, d^{-m}(g)$

$$= d^{-m}(g)\, \big(\underline{r_g^*(f)(x)\, d^{-m}(x)}\big) \qquad (2)$$

$$= c_g f(x)\, d^{-m}(x)$$

$$= c_g\, d^{-m}(g)\, (fd^{-m})(x)$$

"$\Leftarrow$": $m=0$.

Beh. 2 a) r_g^* h.e. auf $A(GL\,V)$ $\Leftrightarrow$ r_g^* h.e. auf $A(\mathrm{End}_k(V))$

b) r_g^* lokal unipotent. auf $A(GL\,V)$ $\Leftrightarrow$ r_g^* lokal unipotent auf $A(\mathrm{End}_k(V))$

dem.: "$\Rightarrow$": Korollar 9.(ii): etwa $r_g^* = (r_g^*)_s$ auf $A(GL\,V)$

$$\Rightarrow \left((r_g^*)\big|_{A(\mathrm{End}_k V)}\right) = (r_g^*)_s\Big|_{A(\mathrm{End}_k V)} = r_g^*\big|_{A(\mathrm{End}_k V)}$$

für u analog.

"$\Leftarrow$": Sei $W \subseteq A(GL\,V)$ r_g^*-inv., endl.-dim. UVR

$\Rightarrow W' := W \cap A(\mathrm{End}\,V) \subseteq A(\mathrm{End}\,V)$ — " —

und $W \subseteq W'[\frac{1}{d}] = \bigcup_{m \geq 0} \frac{1}{d^m} W' \subseteq A(GL\,V)$

$\Rightarrow A(GL\,V) = \bigcup\limits_{\substack{m \geq 0 \\ W' \subseteq A(\mathrm{End}\,V) \\ r_g^*\text{-inv,} \\ \text{endl. dim.}}} \frac{1}{d^m} W'$ und $r_g^*|_W$ h.e. $\underset{\text{Beh. 1}}{\Rightarrow}$ $r_g^*|_{d^{-m}W'}$ h.e.

— $r_g^*|_W$ unipotent $(EW = 1)$

$\Downarrow (1)$

$d(g) = 1.$ $\underset{(2)}{\Rightarrow}$ $r_g^*|_{d^{-m}W}$ unipotent

Beh. 3. $g \in GL(V)$ h.e. (unipotent) $\Leftrightarrow$ r_g^* ist h.e. (unipotent) auf $\mathrm{End}(V)^*$ ← Dualraum

bzgl. $(r_g^*)(f)(x) := f(xg)$

$\Leftrightarrow$ r_g ist h.e. (unipotent) auf $\mathrm{End}(V)$
(klar, LA)
(Matrix $\to$ Matrix^T)

Beh. 4. r_g^* h.e. (unipotent) auf $\mathrm{End}(V)^*$ $\Leftrightarrow$ r_g^* h.e. (unipotent) auf $A(\mathrm{End}\,V)$

Beweis Behauptung 3: reduziert sich formal auf folgende Übung:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(V) & \xrightarrow{r_-} & \mathrm{End}(\mathrm{End}\,V) \\ \cup\!\text{I} & /\!/\!/ & \cup\!\text{I} \\ GL(V) & \xrightarrow[r_-]{} & GL(\mathrm{End}\,V) \\ \Psi & & \\ g & & \end{array}$$

g h.e. (unipotent) $\Leftrightarrow$ r_g h.e. (unipotent)

Beweis zu Beh. 4.: $A(\mathrm{End}_k V) \overset{\text{symm. Algebra}}{\cong} \mathrm{Sym}(\mathrm{End}(V)^*)$ $\left(A(\mathrm{End}_k V) = \{ \mathrm{End}_k V \xrightarrow{\text{Morphismen}} \mathbb{A}^1_k \} \supseteq \mathrm{End}(V)^* \right)$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\bigoplus_{m \geq 0} \mathrm{Sym}^m(\mathrm{End}(V)^*) \qquad \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\mathrm{End}(V)^*)^{\otimes m} \Big/ \underbrace{\langle x \otimes y - y \otimes x \mid x,y \in \mathrm{End}(V)^* \rangle}_{\text{zweiseitiges Ideal}}$$

$$\cup\!|$$

$\mathrm{End}(V^*)$ ist "Grad $m = 1$"

Dabei stimmen die Operationen von r_g^* auf beiden Seiten übereinstimmen.
(Fortsetzung auf die symmetrische Algebra $\otimes$-Faktorweise)

Also folgt "<=" aus Korollar 6/9 (iii/ii)

Für "=>" nutze: $A \in \mathrm{End}(W)$ h.e. (unipotent) $\Longrightarrow$ $A^{\otimes m} \in \mathrm{End}(W^{\otimes m})$ h.e. (unipotent)

für $W = \mathrm{End}(V)^*$

$\blacksquare$

Beweis von Theorem 10.
Betrachte Einbettung

$$\begin{array}{ccc} G & \overset{\phi}{\hookrightarrow} & GL(V) \\ \uparrow r_g & /\!/\!/ & \uparrow r_{\phi(g)} \\ G & \overset{\phi}{\hookrightarrow} & GL(V) \end{array} \qquad g \in G \text{ beliebig.}$$

$\Longrightarrow$ Kategorien-äquivalenz

$$\begin{array}{ccc} A(GL\,V) & \xrightarrow{\phi^*} & A(G) \\ \downarrow \rho_{GL(V)}(\phi(g)) & /\!/\!/ & \downarrow \rho(g) \\ A(GL\,V) & \xrightarrow{\phi^*} & A(G) \end{array} \qquad (3)$$

$\phi(g) = \phi(g)_s\, \phi(g)_u$ eindeutige Jordan-Zerlegung (Kor. 6)

Beh.: $\phi(g)_s, \phi(g)_u \in \phi(G)$, dazu: $I := \ker(\phi^*)$.

Für $x \in GL(V)$ gilt:

$x \in \phi(G) \Longleftrightarrow hx \in \phi(G)\ \forall h \in \phi(G) \Longleftrightarrow r_x^*(I) \subseteq I$ (4)

Funktionen, die auf G verschwinden

Insbesondere: $r_{\phi(g)}^*(I) \subseteq I \underset{\text{Kor. 9 (ii)}}{\Longrightarrow} \underbrace{\left(r_{\phi(g)}^*\right)_{s/u}}_{\overset{\text{Lemma 11}}{\|}\ \left(\left(r_{\phi(g)}\right)_{s/u}\right)^*}(I) \subseteq I$

$\underset{(4)}{\Longrightarrow} \quad \phi(g)_{s/u} \in \phi(G)$ ✓

(i) g_s (g_u) sei das eindeutige Element, so dass $\phi(g_{s/u}) = \phi(g)_{s/u}$ gilt.

Für $G = GL(V)$ (und $\phi = id$) folgt (i) aus Lemma 11.

Aus (3), auch für g_s/g_u statt g, folgt:

$\rho_G(g_{s/u})$ ist induziert von $\rho_{GL}(\phi(g_{s/u})) = \rho_{GL}(\phi(g)_{s/u})$

$\rho_G(g)_{s/u}$ — " — $\rho_{GL}(\phi(g))_{s/u}$

wegen der Eindeutigkeit in Korollar 9.

Die Eindeutigkeit folgt, da ρ_G injektiv ist, da $\rho_G : G \to GL(A(G)) \hookrightarrow GL(W)$ injektiv ist nach Beweis von Theorem 3.

(iii) folgt nach Konstruktion, da wegen der Eindeutigkeit in (i) unabhängig von ϕ ist. ▨

Korollar 12. Sei $G \xrightarrow{\psi} H$ ein Morphismus algebraischer Gruppen. Dann gilt: 11.05.18

$\forall g \in G: \quad \psi(g_s) = \psi(g)_s \quad$ und $\quad \psi(g_u) = \psi(g)_u$.

Insbesondere gilt Theorem 10 (iii) für beliebige Darstellungen $G \xrightarrow{\phi} GL_n$!

Beweis.

Fall 1: ψ surjektiv. $\Rightarrow$ $\psi^*: A(H) \hookrightarrow A(G)$ injektiv und $\psi^*(A(H)) \subseteq A(G)$ ist r_g^*-invariant. (vgl. (3) oben)

Wende dann Korollar 9 (ii). an.

Fall 2: ψ injektiv.

Wähle Einbettung $H \hookrightarrow GL_n$ und wende Theorem 10 (iii) an auf $\underset{[1]}{\phi\circ\psi}$ und $\underset{[2]}{\phi}$.

$$\phi(\psi(g_{s/u})) \underset{[1]}{=} \left((\phi\circ\psi)(g)\right)_{s/u} \underset{[2]}{=} \phi(\psi(g)_{s/u})$$

$$\underset{\phi \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} \quad \psi(g_{s/u}) = \psi(g)_{s/u}. \qquad \blacksquare$$

Fall 3: ψ allgemein. $\underbrace{G \xrightarrow{\psi} \operatorname{im}\psi \overset{i}{\hookrightarrow} H}_{\psi}$ faktorisiert in Surjektion + Inklusion, nun verwende Fall 1 + 2.

2. Kommutatoren

Proposition 1. $H, K \underset{\text{abg.}}{\leq} G$ seien abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppen.

Dann:
$$[H,K] := \langle \underbrace{[h,k]}_{=hkh^{-1}k^{-1}} \mid h\in H,\ k\in K\rangle \leq G$$ ist ein zusammenhängender, abgeschlossener Normalteiler. Es reicht sogar die Annahme "H oder K zshgd."; ← vgl. Beweis.

Borel zeigt sogar (ohne zshgd.), dass $[H,K]$ stets abgeschlossen ist.

Lemma 2. Sei $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ein System irreduzibler Varietäten sowie $(X_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} G)_{\alpha\in\Lambda}$ ein System von Morphismen nach G, s.d. $\forall \alpha\in\Lambda$: $e \in Y_\alpha := \phi_\alpha(X_\alpha)$. Dann gilt:

$$H := \langle Y_\alpha,\ \alpha\in\Lambda\rangle \leq G \text{ ist zshgd. und abgeschlossen.}$$

Zudem existieren $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \Lambda$, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ s.d. $H = Y_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\cdots Y_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$.

Beweis von Lemma 2. oE.: $\phi_\alpha^{-1} := \underset{\uparrow \text{ Inversion in } G}{\iota} \circ \phi_\alpha : X_\alpha \to G$ gehört auch zu dem System $\forall \alpha\in\Lambda$.

Für $n\geq 1$, $a = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Lambda^n$ setze $Y_a := Y_{\alpha_1}\cdots Y_{\alpha_n} \leq G$.

$\Rightarrow$ $Y_a, \overline{Y_a}$ sind irreduzibel (vgl. Bemerkung II Prop. 2.3)

Wähle n, a s.d. $\overline{Y_a}$ maximal ist.

$$\Rightarrow \forall m\in\mathbb{N}\ \forall b\in\Lambda^m: \quad \overline{Y_a} \underset{e\in Y_b}{\subseteq} \overline{Y_a}\cdot\overline{Y_b} \underset{\text{vgl. Bem. nach Lemma II 2.5}}{\subseteq} \overline{Y_a Y_b} = \overline{Y_{(a,b)}} \underset{\text{max.}}{\subseteq} \overline{Y_a}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Y_a} = \overline{Y_{(a,b)}} \supseteq Y_b \qquad \underset{b=a}{\Longrightarrow} \overline{Y_a}\cdot\overline{Y_a} \subseteq \overline{Y_{(a,a)}} = \overline{Y_a} \text{ und } \overline{Y_a}^{-1} \subseteq \overline{Y_a}$$

$\overline{Y_a}^{-1} = \overline{Y_{a^{-1}}}$ mit $Y_{a^{-1}} := Y_{\alpha_1}^{-1}\cdots Y_{\alpha_n}^{-1}$

Nach Chevalley (Thm. II.2.4) angewandt auf $Y_{\alpha_1}\times\dots\times Y_{\alpha_n} \hookrightarrow G\times\dots\times G \xrightarrow{\text{mult.}} G$

existiert $\emptyset \neq U \subseteq Y_a$ s.d. $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \overline{Y_a}$ (und damit auch dicht, da $\overline{Y_a}$ irreduzibel)

$$\underset{\text{Lemma II 2.6}}{\Longrightarrow} \quad \overline{Y_a} = \underbrace{U \cdot U}_{\subseteq Y_a Y_a} \Longrightarrow \overline{Y_a} = Y_a Y_a = Y_{(a,a)} = H.$$

$\blacksquare$

=

Beweis von Proposition 1. Betrachte das System von Morphismen $\left\{ \begin{array}{l} H \xrightarrow{\phi_k} G \\ h \mapsto [h,k] \end{array} \right\}_{k \in K}$.

Mann kann die Rollen von H und K austauschen, deswegen reicht H oder K irreduzibel $\underset{\text{Lemma 2}}{\Longrightarrow}$ $[H,K]$ abgeschlossen und zshgd.

$[H,K]$ ist durchin Normalteiler nach allgemeiner Gruppentheorie.

$\blacksquare$

=

Korollar 3. Ist $(H_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ein System zshgd., abg. Untergruppen, so ist

$$\langle H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda \rangle \leq G$$ ebenfalls abgeschlossen und zshgd.

Korollar 4. Ist G zshgd., so ist ihre abgeleitete Untergruppe $DG := [G,G] \leq G$ abgeschlossen und zshgd.

Def. 5. (1) Definiere induktiv die abgeleitete Reihe von G: $G \geq DG \geq D^2G \geq \ldots \geq D^nG \geq \ldots$

via $D^0G := G$, $D^nG := D(D^{n-1}G) = [D^{n-1}G, D^{n-1}G]$

$$\Longrightarrow \quad D^{n+1}G \trianglelefteq D^nG.$$

G heißt auflösbar, falls $D^nG = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$

(2) Definiere die absteigende Zentralreihe von G $\quad G \geq \ell^1G \geq \ell^2G \geq \ldots \geq \ell^nG \geq \ldots$

induktiv via $\quad \ell^0(G) := G, \quad \ell^nG := [G, \ell^{n-1}G]$

$$\ell^{n+1}G \trianglelefteq \ell^nG \quad (\text{sogar zentral})$$

G heißt nilpotent, falls $\ell^nG = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 6. (Erinnerung aus der Gruppentheorie)

(i) nilpotent $\Longrightarrow$ auflösbar

(ii) G auflösbar / nilpotent $\Longrightarrow$ Untergruppen / Faktorgruppen von G auflösbar / nilpotent.

(iii) $N \trianglelefteq G$, N, G/N auflösbar $\Longrightarrow$ G auflösbar.

Bsp. 7. B_n ist auflösbar $(DB_n = U_n)$, U_n ist nilpotent.

3. Unipotente Gruppen

Def. 1. $G_s := \{ g \in G \mid g = g_s \}$; $G_u := \{ g \in G \mid g = g_u \}$

Bemerkung 2.

(i) $G_s \cap G_u = 1$ (wg. der Eindeutigkeit in der Zerlegung $g = g_s g_u$)

(ii) $G_u \subseteq G$ ist abgeschlossene Teilmenge. G_s ist nicht notwendigerweise abgeschlossen in G.

(iii) Sei $* \in \{s, u\}$, $g, h \in G_*$ mit $[g,h] = 1$. $\Rightarrow gh,\ g^{-1} \in G_*$

Beweis.

(i) klar in GL_n: $EW = 1$ + diagonalisierbar. ✓

(ii) $G \subseteq GL_n$ abg. Einbettung. Es gilt: $G_u = \{ g \in G \mid \underbrace{(g - \mathbb{1})^n = 0}_{\text{abg. Bedingung}} \} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$

$$G = B_2 = \begin{pmatrix} k^\times & k \\ 0 & k^\times \end{pmatrix} \Rightarrow G_s = \begin{pmatrix} k^\times & 0 \\ 0 & k^\times \end{pmatrix} \text{ nicht abg. in } G.$$

(iii) oE: $G = GL_n$

$* = s$: g, h $\underbrace{\text{simultan diagonalisierbar}}_{\text{weil sie kommutieren}}$ $\Rightarrow gh, g^{-1}$ auch

$* = u$: g, h simultan (oberhalb) $\underset{+EW = 1}{\text{triag'bar}}$ $\Rightarrow gh, g^{-1}$ auch

Proposition 3. Sei G kommutativ. Dann sind $G_s, G_u \leq G$ abgeschlossene Untergruppen und

$$\mu : G_s \times G_u \longrightarrow G \text{ ist ein Isomorphismus algebraischer Gruppen.}$$

Beweis.
- Untergruppen nach Bemerkung 2 (iii)
- $G_u \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$ nach Bemerkung 2 (ii)

o.E.: $G \subseteq GL(V)$ abg. für V endl.-dim. k-VR, $V = \bigoplus_{\lambda : G_s \to k^\times} V_\lambda$ direkte Summe von Eigenräumen bzgl. G_s.

V_λ ist G-invariant: $g_s(v) = \lambda(g_s) \cdot v \Rightarrow g_s \cdot g \cdot v = g \cdot g_s \cdot v = \lambda(g_s) \cdot g \cdot v$ ✓

Wähle Basen für V_λ s.d. die G-Aktion oberhalb triag'bar ist

$\Rightarrow$
$$\begin{array}{ccccc} g & \in & G & \subseteq & B_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ g_s & \in & G_s & \subseteq & D_n \ (= B_n/U_n) \end{array}$$
und $G_s = G \cap D_n \Rightarrow G_s \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$.

$\Rightarrow$ $G \to G_s \times G_u$, $g \mapsto (g_s, g_s^{-1} g)$ Morphismus Invers zu μ. ◻

Def. 4. G heißt unipotent, falls $G = G_u$.

Bsp. 5. U_n ; $\mathbb{G}_a (\cong U_2)$

Proposition 6. Sei G unipotent, $G \xrightarrow{\phi} GL_n$ ein Morphismus. Dann:

$\exists \gamma \in GL_n$: $\gamma \operatorname{im}\phi \, \gamma^{-1} \subseteq U_n$, d.h. "alle unipotenten Gruppen sind bis auf Konjugation in U_n enthalten".

Beweis. Induktion nach n.

$\underline{n=1}$: $(GL_1)_u = 1 = U_n$; Für $m<n$ gelte die Behauptung. Sei $\phi : G \to GL(V)$ mit $\dim_k V = n$.

$\underline{\text{Fall 1}}$: $\exists\, 0 \subsetneq W_1 \subsetneq V$ G-inv. Teilraum. Wähle Komplement W_2: $V = W_1 \oplus W_2$

$$\phi_1 : G \longrightarrow GL(V) \longrightarrow GL(W_1) = GL_{n_1}$$

$$\phi_2 : G \longrightarrow \underset{\substack{\cong \\ W_2}}{GL(V/W_1)} = GL_{n_2} \qquad \phi = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{c|c} \phi_1 & * \\ \hline 0 & \phi_2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} W_1 \\ V/W_1 \end{array} \end{array}$$

$n_1, n_2 < n \Rightarrow \exists\, \gamma_i \in GL_{n_i}$: $\gamma_i \operatorname{im}\phi_i \, \gamma_i^{-1} \subseteq U_{n_i}$ (für geeignete Basiswahl)

$\Rightarrow$ $\gamma \operatorname{im}\phi \, \gamma^{-1} \subseteq U_n$ für $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$

$\underline{\text{Fall 2}}$: V irred. G-Darstellung

$\underset{\substack{EW=1 \\ \dim_k V = n}}{tr(\phi(g)) = n} \Rightarrow \forall h \in G$:

$$tr((\phi(g) - \mathbb{1})\phi(h)) = tr(\phi(gh)) - tr(\phi(h)) = n - n = 0.$$

$\underline{\text{Burnside-Theorem}}$ (Lang, Ch. $\underline{\text{XVII}}$, §3)

$\operatorname{End}(V) = \langle \phi(G) \rangle_k$ k-lin. Spann $\Rightarrow \forall x \in \operatorname{End}(V)$: $tr((\phi(g) - \mathbb{1})x) = 0$

$\xrightarrow{k=\bar{k}}$ d.h. Spur-Paarung nicht ausgeartet

$\phi(g) - \mathbb{1} = 0$, d.h. $\phi(g) = \mathbb{1}$, bzw. $\operatorname{im}\phi = \underline{1}$.

$\boxtimes$

Korollar 7. G unipotent $\to$ G nilpotent ($\Rightarrow G$ auflösbar)

Beweis. U_n ist nilpotent.

$\boxtimes$

Korollar 8. Jede irreduzible Darstellung einer unipotenten Gruppe ist trivial.

Beweis. aus Beweis von Proposition 6.

$\boxtimes$