Korollar 12: Sei $H \underset{abg.}{\leq} G$ diag.bar. $\Rightarrow$ $N_G(H)^\circ = Z_G(H)^\circ$, $[N_G(H) : Z_G(H)] < \infty$.
(G nicht notwendigerw.)

Beweis.

$$\begin{array}{ccc} H \times N_G(H)^\circ & \xrightarrow{\phi} & H \quad \text{Hom von Varietäten} \\ (h,n) & \longmapsto & nhn^{-1} \end{array}$$

$\overset{\text{Prop. 11}}{\Longrightarrow}$ $nhn^{-1} = 1h1 = h \quad \forall n, h$ $\Rightarrow$ $\underbrace{N_G(H)^\circ \subseteq Z_G(H) \subseteq N_G(H)}_{\text{endlicher Index}}$ ▨

5. Elementar unipotente Gruppen

18.05.18

Bem. 1. Für G alg. Gruppe gilt

$$A(G) := \mathrm{Hom}_{AlgGrp}(G, \mathbb{G}_a) = \mathrm{Hom}_{Hopf}(k[T], k[G]) \xrightarrow{\sim} \{a \in k[G] \mid \Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a, \ \varepsilon(a) = 0\}$$

$g \longmapsto g(T)$

<u>In diesem Abschnitt:</u> $k[G]$ bezeichnet den Koordinatenring!

ist R-Modul mit $R := \mathrm{End}_{AlgGrp}(\mathbb{G}_a) = \{g \in k[T] \mid g(x+y) = g(x) + g(y) \text{ in } k[x,y]\}$

$$= \begin{cases} \{\lambda T \mid \lambda \in k\}, & \text{char } k = p = 0 \\ \{\sum_i \lambda_i T^{p^i} \mid \lambda_i \in k\}, & \text{char } k = p > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k, & p = 0 \\ \underset{\llcorner \text{ nicht-kommutativ}}{k[f]}, \quad f \mathrel{\hat{=}} (-)^p, & p > 0 \end{cases}$$

$$\left(\sum_{m \geq 0} a_m f^m\right)\left(\sum_{n \geq 0} b_n f^n\right) = \sum_{m,n \geq 0} a_m (b_n)^{p^m} f^{m+n}$$

Proposition 2. Für G algebraische Gruppe sind äquivalent:

(i) $\exists\ G \cong H \underset{abg.}{\leq} \mathbb{G}_a^n$, $n \geq 0$

(ii) $A(G)$ ist R-Modul endl. erz. + $A(G)$ erzeugt $k[G]$ als k-Algebra

(iii) G kommutativ + $G = G_u$ (+ $G^p = 1$ für $p > 0$)

Beweis. Springer. ▨

Def. 3. (i) Eine algebraische Gruppe, die (i)-(iii) aus Proposition 2 erfüllt heißt elementar unipotent.

Insbesondere: $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist nicht elementar unipotent für $n>1$.

(ii) G heißt Vektorgruppe, falls $G \cong \mathbb{G}_a^n$, für $n \geq 0$.

Theorem 4. $A: \{\text{elt. unipot. Gruppen}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{e.e. } R\text{-Moduln}\}$ ist eine Kategorienäquivalenz.

Beweis. $p=0$:

$$\underbrace{\bigoplus_{n\geq 0} M^{\otimes_k n}_{\underbrace{\Sigma_n}_{\text{symmetrische Gruppe}}}}_{\text{symmetrische Algebra } /K} =: S_k(M) \xleftarrow{S_k} M$$

$p>0$:

$$S_k(M)/(f\cdot m - m^p \mid m \in M) \longleftarrow M$$

beachte in $S_k(M)$:

$$\Delta(m^p) = (m\otimes 1 + 1 \otimes m)^p = m^p \otimes 1 + 1 \otimes m^p$$

$$\Rightarrow m^p \in A\, S_k(M).$$

"■"

Korollar 5. (i) G elementar unipotent

$$\Leftrightarrow \begin{cases} G \cong \mathbb{G}_a^r, & p=0 \\ G \cong \mathbb{G}_a^r \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^s, & p>0. \end{cases}$$

(ii) Für G elt. unipotent gilt:

$$G \cong \mathbb{G}_a^r \Leftrightarrow G \text{ zshgd.} \Leftrightarrow A(G) \text{ freier } R\text{-Modul.}$$

Beweis. Theorem 4 $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii). ■

Theorem 6. Sei G alg. Grp., zshgd., $\dim G = 1$. $\Rightarrow G \cong \mathbb{G}_m$ oder $G \cong \mathbb{G}_a$.

Beweis.

$$\phi_\gamma : G \to G, \quad g \mapsto g\gamma g^{-1} \quad \text{mit } \gamma \in G \text{ fix.} \quad \Rightarrow \overline{\phi_\gamma(G)} \text{ irreduzibel, abgeschlossen.}$$

$\underset{\substack{G \text{ zshgd.} \\ \dim G = 1}}{\Longrightarrow}$ $\overline{\phi_\gamma(G)} = \{\gamma\}$ oder $\overline{\phi_\gamma(G)} = G$.

Wir zeigen: G ist abelsch.

Falls: $\overline{\phi_\gamma(G)} = \{\gamma\}$ $\forall \gamma \in G$ $\Rightarrow$ G kommutativ.

Falls: $\exists\, \gamma \in G$: $\overline{\phi_\gamma(G)} = G$

Wähle $G \overset{\rho}{\hookrightarrow} GL_n$, $\psi: G \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$

$g \longmapsto$ Koeffizienten des char. Polynoms $\det(T - \rho(g))$.

$\Rightarrow$ $\psi(g\gamma g^{-1}) = \psi(\gamma)$ $\forall g \in G$ (gilt nach Konstruktion des char. Polynoms)

$\Rightarrow$ $\psi \circ \phi_\gamma$ konstant $\underset{\overline{\phi_\gamma(G)} = G}{\Longrightarrow}$ ψ konstant.

$\Rightarrow$ $\det(T - \rho(g)) = \det(T - \rho(1)) = (T-1)^n$ $\forall g \in G$

$\Rightarrow G = G_u \Rightarrow G$ unipotent $\Rightarrow$ $\underbrace{[G, G]}_{=1} \subsetneq G$ $\Rightarrow$ G kommutativ.

G zshgd., $\dim G = 1$.

Also ist G abelsch.

Prop. III.3.3

$\Longrightarrow$ $G_s \times G_u \xrightarrow{\sim} G$ ist Isomorphismus $\underset{1\text{-dim.}}{\Longrightarrow}$ $G = G_s$ oder $G = G_u$

$(g, h) \longmapsto gh$

Falls: $G = G_s$ $\underset{+\dim G = 1}{\overset{\text{Kor. 4.6}}{\Longrightarrow}}$ $G \cong \mathbb{G}_m$

Falls: $G = G_u$: zeige elt. unipotent.

Prop. 2 $\Rightarrow$ z.z. $G^p = 1$, falls $p > 0$.

A: $G^p \neq 1 \Rightarrow G^p = G \Rightarrow G = G^p = G^{p^2} = \ldots$

$G = G_u \overset{\rho}{\hookrightarrow} (GL_n)_u \Rightarrow (\rho(g) - 1)^n = 0$ $\forall g \in G$ $\Rightarrow \forall p^r > n$: $0 = (g-1)^{p^r} = g^{p^r} - 1$

$\Rightarrow g^{p^r} = 1 \Rightarrow G^{p^r} = 1$

$\Rightarrow$ G elt. unipotent $\underset{+\text{ zshgd.}}{\overset{\text{Kor. 5}}{\Longrightarrow}}$ $G \cong \mathbb{G}_a$.

V. Lie-Algebren

1. Tangentialräume

Def. 1. Sei X eine Varietät.

Der Tangentialraum von X am Punkt $x \in X$ ist definiert als

$$T_x X := \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k) = \{ \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\delta} k \,/\, \delta \text{ } k\text{-linear}, \ \delta(fg) = f(x)\delta(g) + g(x)\delta(f) \ \forall f, g \in \mathcal{O}_{X,x} \}$$

Lemma 2. Es sei A eine k-Algebra, $A \xrightarrow{\varepsilon} k$ k-Algebrenhomomorphismus (Kategorie der k-Algebren über k)

(i)
$$\underset{\{\delta : A \to k \,|\, \delta(fg) = \varepsilon(f)\delta(g) + \varepsilon(g)\delta(f)\}}{\mathrm{Der}_k(A, k)} \xrightarrow{\sim} \left((\ker \varepsilon) / (\ker \varepsilon)^2 \right)^{\vee} = \mathrm{Hom}_k(\ker \varepsilon / (\ker \varepsilon)^2, k)$$

$$\delta \longmapsto \delta|_{\ker \varepsilon}$$

(ii)
$$\mathrm{Der}_k(A, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}/k}(A, \underbrace{k[\epsilon]}_{\substack{= k[T]/T^2 \\ \epsilon := \bar{T}}}) = \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & k[\epsilon] \arrow[d] \arrow[dr, "\epsilon"] & \\ & k & 0 \arrow[l] \end{tikzcd} \right\}$$

$$\delta \longmapsto [a \longmapsto \varepsilon(a) + \epsilon\, \delta(a)]$$

Korollar 3. $T_x X \cong \left(m_{X,x} / m_{X,x}^2 \right)^{\vee}$ ist endlich-dimensional $\forall x \in X$.

(hier: $\varepsilon : \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x} / m_{X,x} \cong k$ Projektion) ▨

Bsp. $X = \mathbb{A}^n \Rightarrow T_x X = \bigoplus_{1 \le i \le n} k \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$

Def. 4. Sei X eine Varietät.

(i) X heißt glatt bei x, falls $\dim_k T_x X = \dim X$

(ii) X heißt glatt, wenn X überall glatt ist.

Bemerkung 5. (i) Jeder Homomorphismus $X \xrightarrow{\phi} Y$ induziert eine k-lineare Abbildung

$$d\phi_x := d\phi : T_x X \longrightarrow T_{\phi(x)} Y$$
$$\delta \longmapsto \delta \circ \phi_x^*$$

(ii) $x \in U \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ offene affine Umgebung $\Rightarrow d\iota : T_x U \xrightarrow{\sim} T_x X$

(iii) $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y$ lokal abgeschlossen (X abg. in einer offenen Menge in Y)

$$\Rightarrow d\iota : T_x X \hookrightarrow T_{\iota(x)} Y$$

Theorem 6. $\dim_k T_x X \geq \dim X \quad \forall x \in X$ mit Gleichheit auf einer dichten Teilmenge.

∎

Bemerkung 7. G alg. Grp. $\rightsquigarrow$ $d(g \cdot \_) : T_1 G \xrightarrow{\sim} T_g G \underset{\text{Thm. 6}}{\Rightarrow} G$ glatte Varietät.

2. Lie Algebren

Def. 1. Eine Lie Algebra ist ein k-VR $\mathfrak{g}$ zusammen mit einer k-bilinearen Abb. $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \xrightarrow{[\cdot,\cdot]} \mathfrak{g}$ mit

(i) $\forall x \in \mathfrak{g}: \ [x,x] = 0.$ (Antisymmetrie)

(ii) $\forall x,y,z \in \mathfrak{g}: \ [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (Jacobi-Identität)

Ein Lie Algebrenhomomorphismus ist eine k-lin. Abbildung $\mathfrak{g} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{h}$

mit $\forall x,y \in \mathfrak{g}: \ [\phi(x), \phi(y)] = \phi([x,y]).$

Bsp. 2.

(i) A assoziative k-Algebra $\Rightarrow$ A Lie Algebra via $[x,y] := xy - yx$

(ii) V k-Vektorraum $\Rightarrow$ V Lie Algebra via $[x,y] := 0$; solche Lie Algebren nennt man <u>kommutativ</u>.

z.B. $G = GL_n \rightsquigarrow \mathcal{L}ie(G) := \mathfrak{gl}_n(k)$

Lie Algebra induziert von Matrizen-Ring $M_n(k) = k^{n \times n}$.

Proposition 3. Es gibt einen Funktor $\{\text{alg. Grp}/k\} \xrightarrow{\text{Lie}} \{\text{Lie Algebren}/k\}$

$$G \longmapsto \mathcal{L}ie(G) := T_1 G = \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{G,1}, k)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_{G,1}/\mathfrak{m}_{G,1}^2, k)$$

in $\mathcal{O}_{G,1}$

$$= \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_1^2, k)$$

in $k[G]$

$$= \mathrm{Hom}_k(\ker(\varepsilon)/\ker(\varepsilon)^2, k)$$

Beweis.

1) $\mathrm{Hom}_k(k[G], k)$ ist assoziative k-Algebra via

$$f * g := \mu_k(f \otimes g) \circ \Delta$$

Mult. $k \otimes k \to k$, $a \otimes b \mapsto ab$

$\Leftarrow$ Assoziativität der Gruppenstruktur gg. durch Δ

2) nachrechnen, dass $\mathrm{Der}_k(k[G], k) \leq \mathrm{Hom}_k(k[G], k)$ Teil-Lie Algebra.

$\boxtimes$