X projektive Varietät $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{X,P} := \left\{ \frac{f}{g} \bmod m_X \in k(X) \mid g(P) \neq 0 \right\}$
und es gilt für $P \in X^{(i)} := X \cap D_+(X_i)$: $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X,P}$ und daher $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X^{(j)},P}$ für $P \in X^{(i)} \cap X^{(j)}$.

(iii) X quasi-projektiv ($\Rightarrow \bar{X}$ projektiv)

$$k(X) := k(\bar{X}), \quad \mathcal{O}_{X,P} := \mathcal{O}_{\bar{X},P}$$

Für projektive und affine Varietäten stimmt dies mit den vorherigen Definitionen überein.

(iv) $U \subseteq X$ offen in quasi-proj. Varietät $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(U) := \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}$ ($\subseteq k(X)$) heißt Ring der regulären Funktionen auf U.

Ü: $\mathcal{O}(U) = \bigcap_i \mathcal{O}(U_i)$ für alle offenen Überdeckungen $\{U_i\}_i$ von U.

(v) Ein Morphismus $\varphi: X \longrightarrow Y$ quasi-projektiver Varietäten ist eine stetige Abbildung, so dass

(1) $\forall\, U \subseteq Y$ offen: $f \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))$.

Dies ist eine lokale Bedingung, d.h. erfüllt $\varphi/_{U_i}$ die Bedingung (1) für eine offene Überdeckung $\{U_i\}_i$ von U, so erfüllt φ (1). (Ü).

Bsp 5. (i) Für X, Y affin erhält man denselben Begriff wie vorher: o.E. $Y = \mathbb{A}^n$. Für $f_1, \dots, f_n \in A(X)$ hat $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ die Eigenschaft (1).

$X \longrightarrow Y$, $Q \longmapsto P$ induziert

$$\begin{array}{ccc} A(Y) & \xrightarrow{\varphi^*} & A(X) \\ \downarrow & \equiv & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,P} & \xrightarrow{\varphi_Q^*} & \mathcal{O}_{X,Q} \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

(ii) X quasi-projektiv, $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ $\Rightarrow$ $U \hookrightarrow X$ ist Morphismus.

Lemma 6. $P \in X$ quasi-projektiv. Dann existiert ein $P \in U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ mit U isomorph (als quasi-proj. Varietät) zu einer affinen Varietät.

Insbesondere: X hat offene, affine Überdeckung.

Beweis. $P \in X^{(i)} \subseteq X$. o.E. $Y = \mathbb{A}^n$
$X^{(i)}$ offen in Y, Y abg. in $\mathbb{A}^n$

$$X^{(i)} \cong D(f) \xleftarrow{\cong} V(xf - 1) \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbb{A}^{n+1}$$

Iso quasi-projektiver Varietäten.

Def. 7. Sei X irreduzible, quasi-proj. Varietät.

$$\dim X := \operatorname{trdeg}_k k(X)$$ (Transzendenzgrad), d.h. die maximale Zahl algebraisch unabhängiger Elemente in $k(X)$, heißt Dimension von X.

Für X beliebige quasi-proj. Varietät wird die Dimension von X als das Maximum der Dimensionen seiner irreduziblen Komponenten definiert.

Bsp. 8.
- $\dim \mathbb{A}^n = n$
- $\dim \mathbb{P}^n = n$, da $k(\mathbb{P}^n) \cong k(D_+(X_0)) \cong k(\mathbb{A}^n)$

Theorem 9. Ist X affin, so gilt $\dim X = \dim A(X)$ (Krulldimension)

(max. Länge von Ketten $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subseteq \mathfrak{p}_n$ von Primidealen in $A(X)$, bzw. irred. abg. Teilmengen in X)

$\boxtimes$

Proposition 10. Seien X, Y quasi-projektive Varietäten.

(i) $X \longrightarrow Y$ surjektiver Morphismus $\Rightarrow \dim Y \leq \dim X$.

(ii) X irreduzibel, $Y \subsetneq X$ abgeschlossen $\Rightarrow \dim Y < \dim X$.

(iii) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$

(iv) (Krull's Hauptidealsatz) $X \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbb{A}^n$ irreduzibel, $f \in k[X_1, \dots, X_n] = A(\mathbb{A}^n)$ mit $f(P) = 0$ für ein $P \in X$. $Z \subseteq X \cap V(f)$ irreduzible Komponente.

$$\Rightarrow \dim Z \geq \dim X - 1.$$

IV: Jordan-Zerlegung, diagonalisierbare und unipotente Gruppen

1. Jordan-Zerlegung

Durch Einbettung $G \overset{\varphi}{\hookrightarrow} GL_n$, $k = \bar{k}$ besitzen die Elemente $\varphi(g), g \in G$ eine Jordannormalform und wir können Begriffe wie "halbeinfach", "unipotent" etc. auf Elemente von G übertragen, sodass diese unabhängig von der Wahl von φ sind.

Def. 1. $\dim_k V < \infty$, $g \in End(V)$ heißt halbeinfach (oder diagonalisierbar), falls V Basis aus Eigenvektoren für g hat. g heißt nilpotent falls $g^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Bemerkung 2. (LA)

(i) g halbeinfach $\Leftrightarrow$ mipo(g) hat paarweise verschiedene Nullstellen

(ii) $W \leq V$ g-invarianter UVR + g halbeinfach $\Rightarrow g|_W$ ist halbeinfach, da mipo$(g|_W) \mid$ mipo(g)

Proposition 3. (Additive Jordanzerlegung) (k alg. abg.)

Sei $g \in \mathrm{End}_k(V)$, $\dim_k V < \infty$. Dann: $\exists!\ g_s, g_n \in \mathrm{End}(V)$ mit g_s halbeinfach, g_n nilpotent,

sodass $g = g_s + g_n$ und $g_s \circ g_n = g_n \circ g_s$.

Beweis.

$g_s \hat{=}$ Diagonalmatrix aus JNF, $g_n := g - g_s$. ∎

Bemerkung 4. (i) In obiger Situation existieren $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$ und $g_s = P(g)$, $g_n = Q(g)$

(ii) Ist $U \leq V$ ein g-invarianter UVR, so ist W auch g_s und g_n-invariant und $(g|_W)_s = g_s|_W$ sowie $(g|_W)_n = g_n|_W$.

Beweis.

(i) $\phi(T) = \det(T \cdot \mathrm{id}_V - g) = \prod (T - \lambda_i)^{n_i}$ (char. Polynom)

$(V \cong)\ k[T]/\langle \phi(T) \rangle \underset{CRS}{\cong} \bigoplus k[T]/(T-\lambda_i)^{n_i}$

$\exists\ P \in k[T]: P \equiv \lambda_i \mod (T-\lambda_i)^{n_i} \quad \forall i$

Ist $\phi(0) = 0$, so ist 0 ein Eigenwert von g $\Rightarrow P \equiv 0 \mod T$.

Sei $\phi(0) \neq 0$. $\Rightarrow$ Ändere P durch konstantes Vielfaches von ϕ ab

$\Rightarrow P(0) = 0$. Setze $Q = T - P$.

$\Rightarrow P(g) = g_s$, $Q(g) = g_n$.

(ii) Wegen (i) ist W auch g_s, g_n-invariant. Da $\mathrm{charpol}(g|_W) \mid \Phi$, ist P auch für W eine geeignete Wahl und $(g|_W)_s = P(g|_W) = P(g)|_W = g_s|_W$. ∎

Def 5. $h \in \mathrm{End}_k(V)$ heißt unipotent, falls $h - \mathrm{id}_V$ nilpotent ist. ($\Leftrightarrow$ alle EW $= 1$)

Korollar 6. (Multiplikative Jordanzerlegung)

$g \in GL(V)$, $\dim_k V < \infty$.

(i) $\exists!\ g_s, g_u \in GL(V)$ mit g_s halbeinfach und g_u unipotent s.d. $g = g_s \circ g_u = g_u \circ g_s$

(ii) $\exists\ P, R \in k[T]$ mit $P(0) = R(0) = 0$ und $g_s = P(g)$, $g_u = R(g)$.

(iii) Ist $W \leq V$ g-invarianter UVR, so ist W auch g_s, g_u-invarianter UVR und $(g_s)|_W = (g|_W)_s$ sowie $(g_u)|_W = (g|_W)_u$.

Beweis. (i) EW von $g \neq 0 \Rightarrow$ EW von $g_s \neq 0 \Rightarrow g_s \in GL(V)$. $g_u := \mathrm{id}_V - g_s^{-1} \circ g_n$

(ii) z.z.: g_s^{-1} ist Polynom in g_s (damit auch Polynom in g)

$$\text{mipo } g_s = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \underset{\neq 0}{\underline{a_0}} \Rightarrow g_s^{-1} = -a_0^{-1}\left[g_s^{n-1} - \ldots - a_1\right]$$

(iii) wie oben aus (ii). $\blacksquare$

Def. 7. Sei nun V ein möglicherweise ∞-dim. k-VR, $g \in GL(V)$ und gelte

$$(*) \qquad V = \bigcup_{\substack{W \subseteq V \\ \text{endl.-dim. UVR} \\ g(W) \subseteq W}} W$$

Dann heißt g *halbeinfach* (*lokal unipotent*), wenn $g|_W$ halbeinfach (unipotent) $\forall W$ wie oben.

Bsp. 8.
Nach Lemma II.3.1 (ii) erfüllt $V = A(G)$ die Bedingung $(*)$ $[\forall g \in G: r_g^* \in GL(A(G))]$

Korollar 9. Unter der Bedingung $(*)$ für $g \in GL(V)$ gilt:

(i) $\exists!\, g_s, g_u \in GL(V)$ mit g_s halbeinfach, g_u lokal unipotent mit $g = g_s g_u = g_u g_s$

(ii) Analogon zu Korollar 6 (iii)

Beweis.

(i) $(g|_W)_s$, $(g|_W)_u$ verkleben zu g_s, g_u nach Korollar 6 (i), (ii).

(ii) W erfüllt ebenfalls $(*)$. Daher folgt die Behauptung ebenso aus Korollar 6 (ii). $\blacksquare$

Bezeichne $\rho_G : G \hookrightarrow GL(A(G))$ die durch Rechtsmultiplikation induzierte Darstellung.

09.05.18

Theorem 10. Sei G eine affine algebraische Gruppe und $g \in G$.

(i) $\exists!\, g_s, g_u \in G$ mit $g = g_s g_u = g_u g_s$ und $\rho_G(g_s) = \rho_G(g)_s$, $\rho(g_u) = \rho(g)_u$

(ii) Ist $G = GL_n$, so stimmen g_s, g_u mit denen aus Korollar 6 überein.

(iii) Für jede Einbettung $\phi: G \hookrightarrow GL_n$ gilt: $\phi(g_s) = \phi(g)_s$ und $\phi(g_u) = \phi(g)_u$.

Allgemeiner kann man zeigen (Korollar 12), dass (iii) für beliebige Darstellungen $G \xrightarrow{\phi} GL(V)$, $\dim_k V < \infty$ gilt. g heißt später halbeinfach (unipotent), falls $g = g_s$ ($g = g_u$).