01

Dienstag, 17. April 2018 22:21

Algebraische Zahlentheorie II.

Übungsblätter: Vorlesungshomepage.

01. Proendliche Gruppen

Wdh. · X Menge, Topologie auf X: $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit
(0) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ (1) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$ (2) $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I \Rightarrow \bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$

· $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt Basis $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T}\ \exists (B_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}^I: U = \bigcup_i B_i$

· $W \subseteq X$ heißt Umgebung (von $x \in X$) $:\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{T}: x \in V \subseteq W$.

Für $x \in X$ sei $\mathcal{U}(x)$ die Menge aller Umgebungen von x.

z.B.: (X, d) metrischer Raum $\Rightarrow \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ ist Basis für X.

· $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt stetig $:\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$.

· Produkttopologie: Seien $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ topologische Räume.

Basis der Produkttopologie auf $\prod_i X_i$: $\{\prod_i U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i, U_i = X_i \text{ f.f.a. } i \in I\}$

Satz von Tychonoff: Sind alle X_i kompakt, so auch $\prod_i X_i$

· Sei $X \xrightarrow{\pi} Y$ surjektiv, $(X, \mathcal{T})$ top. Raum.

$\{V \subseteq Y \mid \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ heißt Quotiententopologie.

Def. 1.1. (a) Eine topologische Gruppe $(G, e, \circ, \mathcal{T})$ besteht aus einer Gruppe $(G, e, \circ)$ und einem top. Raum $(G, \mathcal{T})$ so dass $G \times G \xrightarrow{\mu} G$, $(g, h) \mapsto g \circ h$, $G \xrightarrow{i} G$, $g \mapsto g^{-1}$ stetig sind, wobei $G \times G$ die Produkttopologie trägt.

(b) Ein Morphismus topologischer Gruppen ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

$\rightsquigarrow$ Man erhält die Kategorie topologischer Gruppen Top Grp.

Bsp. (ü) K normierter Körper $\Rightarrow (K, +), (K^\times, \cdot)$ sind topologische Gruppen.

Facts 1.2. Seien G, G' top. Grp., $G \xrightarrow{\phi} G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

(i) $l_g : G \to G,\ h \mapsto g \circ h$, $\quad r_g : G \to G,\ h \mapsto h \circ g$ sind Automorphismen (insb. Homöomorphismen)

(ii) ϕ ist stetig $\iff \forall\, W' \in \mathcal{U}(e') : \exists\, W \in \mathcal{U}(e) : \phi(W) \subseteq W'$

(iii) Eine offene Untergruppe $H \underset{\text{offen}}{\leq} G$ ist abgeschlossen.

(iv) Eine abgeschlossene Untergruppe $H \underset{\text{abg.}}{\leq} G$ mit $[G : H] < \infty$ ist offen.

(v) Ist G kompakt, $H \leq G$ offen, so gilt $[G : H] < \infty$.

(vi) Ist $H \leq G$ Untergruppe, so ist $(H, \tau_{G|H})$ eine topologische Untergruppe (Unterraumtop.)

(vii) Ist $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} G$, so ist $U^{-1} \underset{\text{offen}}{\subseteq} G$ und $cl(U) = \overline{U} \subseteq UU^{-1}$

(viii) G ist regulär, d.h. $\forall g \in G : \exists\, U, V \in \mathcal{U}(g)$ <u>offen</u> s.d. $V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

(ix) G ist hausdorffsch $\iff \{e\} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$

(x) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler, so ist G/N topologische Gruppe mit Quotiententopologie.
Dabei ist G/N hausdorffsch, falls $N \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$.

(xi) Sind $(G_i)_{i \in I}$ top. Grp., so ist $\prod_i G_i$ top. Grp.

Beweis.

(i) $l_g = G \to \{g\} \times G \xrightarrow{\text{inkl.}} G \times G \xrightarrow{\mu} G$ ist stetig, $\quad l_g \circ l_{g^{-1}} = id_G$

r_g analog.

(ii) "$\Rightarrow$": klar; "$\Leftarrow$": Sei $g \in G$, $g' := \phi(g)$, $W \in \mathcal{U}(g')$. Wähle $V \in \mathcal{U}(e)$ mit $\phi(V) \subseteq \underbrace{(g')^{-1} W}_{= l_{g'^{-1}}(W)}$

$\Rightarrow \phi(l_g(V)) \subseteq W$, also ist ϕ stetig.

(iii) $$G = H \,\dot\cup\, \underbrace{\bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} gH}_{\text{offen, da } gH = l_g(H)}$$

(iv) wie (iii): $$G = H \,\dot\cup\, \underbrace{\bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} \underbrace{gH}_{\text{abg}}}_{\text{abg., da endliche Vereinigung wg. } [G:H] < \infty}$$

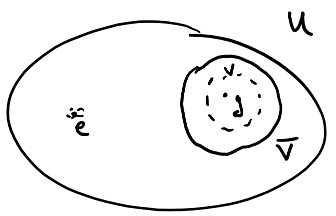
(v) $$G = \bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} \underbrace{gH}_{\text{offen}}$$ G kompakt $\Rightarrow [G : H] < \infty$

(vi), (vii): Übung.

(viii) oE $g = e$ wegen (i). Sei U offene Umgebung von e.

Beh. (ii) $\exists$ offene Umgb. V von e mit $V \cdot V \subseteq U$, $V = V^{-1}$. Nun verwende (vii).

(ix) z.z.: können e und $g \neq e$ trennen (wg. (i))



$$G \setminus \bar{V} \cap V = \emptyset$$

(x), (xi) Übung. ∎

Whg. I sei teilgeordnete, filtrierte Menge, d.h. $\forall i,j \in I : \exists k \in I : i,j \leq k$.

Ein **inverses System (von Gruppen)** besteht aus einer Familie von Gruppen $(G_i)_{i \in I}$ zusammen mit Gruppenhomomorphismen $\phi_{ji} : G_j \to G_i$ $\forall i,j \in I$ mit $i \leq j$.

so dass: (i) $\phi_{ii} = \mathrm{id}_{G_i}$ (ii) $\phi_{ki} = \phi_{ji} \circ \phi_{kj}$ $\forall i \leq j \leq k$

Dann heißt $\varprojlim_{i \in I} G_i$ **Limes** des inversen Systems .... hat übliche universelle Eigenschaft.

- $\varprojlim_{i \in I} G_i$ existiert und ist gegeben durch $G := \{ (g_i)_{i \in I} \in \prod_i G_i \mid \phi_{ji}(g_j) = g_i \ \forall i \leq j \}$

Lemma 1.3. Sind alle G_i topologische Gruppen, so auch $\varprojlim G_i$ mit der Unterraumtop. von $\prod_i G_i$.
Sind alle G_i hausdorffsch (kompakt + hausdorffsch), so ist auch $\varprojlim G_i$ hausdorffsch (kpt. + hd.).

Beweis.
① $\prod_i G_i$ ist selbst $\varprojlim G_i$ für geeignet gewähltes inverses System I.
Alle G_i hausdorffsch $\Rightarrow$ $\prod_i G_i$ hausdorffsch (Produkte von Hausdorffräumen sind hausdorffsch)
Kompakt folgt mit dem Satz von Tychonoff.

② Allgemeiner Fall: Hausdorffsch überträgt sich auf Unterräume $\Rightarrow$ $\varprojlim G_i$ hd.

$$\varprojlim G_i = \bigcap_{i \leq j} \underbrace{\{ (g_k)_k \in \prod_k G_k \mid \phi_{ji}(g_j) = g_i \}}_{\text{"="}\ \Gamma_{\phi_{ji}} \times \prod_{k \neq i,j} G_k \ \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \ \prod_k G_k} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \prod_k G_k$$

$\left(\Gamma_{\phi_{ji}} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G_i \times G_j \text{ da } G_i \text{ hd.} \right)$

$\Rightarrow$ $\varprojlim G_i$ kpt. da abg. Teilraum eines kpt. Raumes. ∎

Def. 1.4. Eine proendliche Gruppe ist ein inverser Limes $\varprojlim G_i$ endlicher, diskreter topologischer Grp. $(G_i)_{i \in I}$ mit der Topologie aus 1.3.

(insb.: alle G_i hausdorffsch und kompakt)

Def. 1.5. Ein topologischer Raum heißt total unzusammenhängend :<=> Jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abgeschlossenen Mengen

$\underset{\text{ü}}{\Leftrightarrow}$ Die Zusammenhangskomponente von x ist $\{x\}$

Proposition 1.6. (ü) Eine kpt., hd. top. Grp. ist total unzusammenhängend <=> e besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abgeschlossenen Normalteilern von G. ☒

05

Freitag, 20. April 2018 09:17

Korrektur: X top. Raum.

X heißt zusammenhängend $:\Longleftrightarrow$ $\emptyset, X$ sind die einzigen offen + abg. Teilmengen.

$x \sim_{zh} y \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, Y \subseteq X$ zshgd.: $x, y \in Y$. ist Äquivalenzrelation

Äquivalenzklassen unter $\sim_{zh}$ heißen Zusammenhangskomponenten.

Lemma. (Ribes-Zaleski, Lemma 1.1.11)
X kpt., hd. und $x \in X$. Dann ist die Zusammenhangskomp. die x enthält die Menge

$$[x]_{zh} = \bigcap \{U \subseteq X \mid x \in U,\ U \text{ offen abg.}\}$$

Def. 1.5. Ein topologischer Raum X heißt total-unzusammenhängend $\Longleftrightarrow$ alle Zshgskomp. von X sind 1-elementig.

Korollar. (aus Lemma) Sei X kompakt, hd. Dann gilt:
X total unzshgd $\Longleftrightarrow$ Jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abg. Mengen.

Satz 1.7. Sei G eine topologische Gruppe. Dann sind äquivalent:
(i) G ist proendlich (ii) G ist kompakt, hausdorffsch und total unzusammenhängend.

Beweis.
(i) $\Rightarrow$ (ii): kompakt, hausdorffsch: letztes Mal.

z.z.: $e \in \prod G_i$ besitzt Umgebungsbasis aus offen abgeschlossenen Teilmengen.

Eine solche ist gegeben durch $\left\{ \prod_{i \in I_0} \{e_i\} \times \prod_{I \setminus I_0} G_i \;\middle|\; I_0 \subseteq I \text{ endlich} \right\} =: \mathcal{U}_e$

offen, abg. Normalteiler

letztes Mal: G kpt., hd., $H \leq G$ offene Untergrp. $\Rightarrow$ H abg.

Allgemeiner Fall: Schneide $\mathcal{U}_e$ mit $\varprojlim G_i$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Konsequenz aus dem folgenden Lemma. $\blacksquare$

Lemma 1.8. Sei G kompakt, hausdorffsch, total unzshgd. und $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis der Eins bestehend aus offen-abg. Normalteilern.

Dann ist
$$G \xrightarrow{\varphi} \varprojlim_{N \in \mathcal{U}} G/N, \quad g \longmapsto (gN)_{N \in \mathcal{U}}$$
ein Isomorphismus topologischer Gruppen. (G/N endl. diskret)

Beweis. φ stetig: "obvious".
betrachte $G \longrightarrow \prod_{N \in \mathcal{U}} G/N$ $\leftarrow$ hat Umgebungsbasis $\mathcal{U}_e$ (s. 1.7).

Für $I_0 \subseteq \mathcal{U}_e$ endl. $\rightsquigarrow$ Umgebung $\prod_{N \in I_0} N/N \times \prod_{N \in \mathcal{U}_e \setminus I_0} G/N$

Urbild ist $\bigcap_{N \in I_0} N$ ist offen abg. Normalteiler in G $\Rightarrow$ stetig bei e $\Rightarrow$ stetig.

φ injektiv: $\varphi(g) = (e_N)_{N \in \mathcal{U}}$ $\Rightarrow$ $g \in N \;\; \forall N \in \mathcal{U}$.
Umgebungsbasis, G hausdorffsch.

$\Rightarrow$ $\bigcap_{\mathcal{U}_0} N = \{e\}$, d.h. $g = e$.

· φ surjektiv. Sei $(g_N \cdot N)_{N \in \mathfrak{U}} \in \varprojlim G/N$ $\quad (N' \subseteq N \to g_{N'} N = g_N N)$

gesucht:
$$g \in \bigcap_{N \in \mathfrak{U}} \underbrace{(g_N N)}_{\text{abg.}} \subseteq G \text{ kompakt}$$

Anm.: rechte Seite leer $\Rightarrow \exists I_0 \subseteq \mathfrak{U}$ endlich: $\bigcap_{N \in I_0} gN = \emptyset$. $\mathfrak{U}$ Umgebungsbasis

$\Rightarrow \exists N' \subseteq \bigcap_{N \in I_0} N$

φ Homöomorphismus: φ bijektiv, stetig, G kompakt, $\varprojlim G/N$ hausdorffsch. ☒

Bem. 1.9. (i) 1.8 ist anwendbar, wenn G proendlich
(ii) analog zu 1.8 lassen sich auch beweisen: G proendlich, $\mathfrak{U}$ wie 1.8

(a) $\forall H \leq G$ abg. gilt: $H \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{N \in \mathfrak{U}} H/N \cap H$

(b) $\forall H \trianglelefteq G$ abg. gilt $G/H \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{N \in \mathfrak{U}} G/N \cdot H$

Lemma 1.10. Sei G proendlich, $H \leq G$ Untergruppe. Dann sind äquivalent:
(i) H ist abgeschlossen

(ii) $H = \bigcap \{ U \mid U \leq G \text{ offene Untergruppe mit } H \leq U \}$

Beweis.
"$\Leftarrow$": $U \leq G$ offen $\underset{G \text{ kpt.}}{\Rightarrow}$ U abg. Untergruppe $\Rightarrow \bigcap \{U \ldots\}$ ist abgeschlossen.

"$\Rightarrow$": Sei $V \in \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}$ wie oben) $\Rightarrow \underbrace{H \cdot V}_{= \bigcup_{h \in H} hV}$ ist offene Untergruppe von G.

In Ü: $\underset{\text{Teilmenge}}{H \subseteq G}$ kompakt $\Rightarrow \bigcap_{V \in \mathfrak{U}} H \cdot V = H$. ☒

Def. 1.11. Eine pro-p Gruppe ist ein inverser Limes von endlichen p-Gruppen.
(Insb. proendlich)

Def. 1.12. Sei G eine diskrete (i.a. unendliche) Gruppe.
Die pro-p Komplettierung / proendliche Komplettierung von G ist
$$\hat{G}^p := \varprojlim \{ G/N \mid N \trianglelefteq G \text{ und } G/N \text{ ist endliche } p\text{-Grp.} / \text{endliche} \}$$

Bsp. $\hat{\mathbb{Z}}^p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$

(man kann auch Ringe pro-p oder pro-endl. komplettieren)

Def. 1.13. Der Prüferring ist die proendliche Komplettierung von $\mathbb{Z}$, $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

($\{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzgl. Inklusion, d.h. Teilbarkeit geordnet)

Lemma. $\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}_p$

Beweis. $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{\text{CRS}}{\cong} \varprojlim_n \left(\prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}/p^{v_p(n)}\mathbb{Z} \right)$; $\prod_p \mathbb{Z}_p \overset{\text{pro endl.}}{=} \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} \prod \mathbb{Z}_p/U = \varprojlim_n \prod \mathbb{Z}_p/U_n$

$\mathcal{U} = \{ \underbrace{\prod_p (p^{v_p(n)} \mathbb{Z}_p)}_{=: U_n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

☒

Def. 1.14 Eine Teilmenge $S \subseteq G$ heißt topologisches Erzeugendensystem (ES) $:\Leftrightarrow$ G ist der topologische Abschluss der von S erzeugten Untergrp.

Bsp. $\{1\}$ ist topologisches EZS von $\mathbb{Z}_p$ und $\hat{\mathbb{Z}}$

Def. 1.15 Eine topologische Gruppe G heißt topologisch endlich erzeugt $:\Leftrightarrow \exists S \subseteq G$ endlich s.d. S ist top. EZS von G

Bsp. Die pro endl. bzw. pro-p Komplettierung der freien nicht-abelschen Gruppen mit endlich vielen Erzeugern

Satz 1.16. (Burnside Basissatz)
Sei G eine pro-p-Gruppe. Sei $\Phi(G)$ der topologische Abschluss der von $[G,G]$ und $G^p = \{g^p \mid g \in G\}$ erzeugten Untergruppe. ($\Phi(G)$ heißt Frattini-Untergruppe von G)

Dann: G ist topologisch endl. erz. $\Leftrightarrow$ $G/\Phi(G)$ ist endlicher $\mathbb{F}_p$-VR.

Bilden $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ eine Basis von $G/\Phi(G)$, dann ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ ein minimales EZS.

Beweis. (ü).

☒

Bem. 1) $G/\overline{[G,G]}$ ist abelsche, hausdorff. topol. Grp.

$\rightarrow$ $G/\overline{[G,G]G^p}$ ist abelsche p-Torsionsgruppe (d.h. $\mathbb{F}_p$-VR)

(— " — heißt p-elementar abelsch)

2) Sei G eine abelsche pro-p-Gruppe.
(a) Dann ist G ein $\mathbb{Z}_p$-Modul!, d.h. haben stetige $\mathbb{Z}_p$-Operation $\mathbb{Z}_p \times G \longrightarrow G$

$$\underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{g}_{=(g_i)_i \in \varprojlim G_i} := \underbrace{(\alpha \bmod \underbrace{\#G_i}_{p\text{-Potenz}} \cdot g_i)_{i \in I}}_{= \alpha \bmod \operatorname{ord}(g_i) \cdot g_i} \in \varprojlim_I G_i = G.$$

G_i: endl. abelsche p-Grp.

(wohldef? $\pi_{ji}: \begin{cases} G_j \longrightarrow G_i \\ g_j \longmapsto g_i \end{cases}$ $\pi_{ji}(\alpha \bmod \operatorname{ord}(g_j) \cdot g_j) \overset{/}{=} (\alpha \bmod \operatorname{ord}(g_i) \cdot g_i)$)

$\operatorname{ord}(g_i) \mid \operatorname{ord}(g_j)$

z.B. $(1 + p\mathbb{Z}_p, \cdot) = \varprojlim_n \underbrace{\left(\frac{1+p\mathbb{Z}_p}{1+p^n\mathbb{Z}_p} \right)}_{= \{\beta \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \mid \beta \equiv 1 \ (p)\} = \langle 1+p \rangle \cong \mathbb{Z}/p^{n-1}}$

$\beta \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p$
$\rightsquigarrow \beta^\alpha \in 1 + p\mathbb{Z}_p$

☒

(b) G topol. endlich erzeugt $\overset{}{\underset{\ddot{u}}{\Longleftrightarrow}}$ G ist endl. erz. als $\mathbb{Z}_p$-Modul

In diesem Fall kann man den Struktursatz für endl. erz. Moduln über HI-Ringen anwenden
$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_p^r \times \prod_{i=1}^{t} \mathbb{Z}/p^{n_i} \quad \dots$

02. Galoistheorie und unendliche Galoiserweiterungen

Whg. $L|K$ algebraische Erweiterung von Körpern

$L|K$ normal $\Leftrightarrow \forall \alpha \in L$: $\operatorname{mipo}_K(\alpha) \in K[X]$ zerfällt über L in Linearfaktoren
$L|K$ separabel $\Leftrightarrow \forall \alpha \in L$: $\operatorname{mipo}_K(\alpha)$ besitzt nur einfache Nullstellen in K^{alg}.
$L|K$ galoissch $:\Leftrightarrow$ $L|K$ normal + separabel

Definiere dann: $\operatorname{Gal}(L|K) := G_{L|K} := \{\sigma \in \operatorname{Aut}(L) \mid \sigma|_K = \operatorname{id}_K\}$

Fakt: Ist $L|F|K$ ein Zwischenkp., so ist $L|F$ galoissch.

Hauptsatz der endlichen Galoistheorie: $L|K$ endlich $\Rightarrow$ Die Abbildungen

$$\{H \leq \operatorname{Gal}(L|K) \text{ UG}\} \underset{\operatorname{Gal}(L|F) \leftarrow F}{\overset{H \mapsto L^H}{\longleftrightarrow}} \{L|F|K \text{ Zwischenkp.}\}$$

definiert eine Bijektion.

$$\{H \trianglelefteq G \text{ NT}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{F \text{ Zwkp.} \mid F|K \text{ galoissch}\}$$

Was geht schief, wenn $L|K$ unendlich?
Man hat zu viele Untergruppen!

Proposition 2.1. Sei $L|K$ galoissch. Sei $\Sigma := \{E \mid L \text{ Unterkörper} \mid E|K \text{ endlich galoissch}\}$, geordnet mit $\subseteq$, $\rightsquigarrow (\Sigma, \subseteq) \longrightarrow \mathrm{Grp},\ E \longmapsto \mathrm{Gal}(E|K)$ ist ein inverses System.

Dann ist $\mathrm{Gal}(L|K) \xrightarrow{\rho} \varprojlim_{E\in\Sigma} \mathrm{Gal}(E/K),\quad \sigma \mapsto (\sigma|_E)_{E\in\Sigma}$ ein Gruppenisomorphismus.

Beweis.

- Homomorphismus nach Konstruktion.
- Injektiv: $\rho(\sigma) = \mathrm{id} \iff \sigma|_E = \mathrm{id}_E \ \forall E \in \Sigma \implies \sigma = \mathrm{id}_L$
- Surjektiv: Sei $(\sigma_E)_{E\in\Sigma} \in \varprojlim_{E\in\Sigma} \mathrm{Gal}(E/K) \subseteq \prod_{E\in\Sigma} \mathrm{Gal}(E|K)$

$\underline{\text{d.h.:}}$ $E'|E \in \Sigma \implies \sigma_{E'}|_E = \sigma_E$

Wegen $L = \bigcup_{E\in\Sigma} E$, definiere $\sigma: L \longrightarrow L,\ \alpha \longmapsto \sigma_E(\alpha)$ falls $\alpha \in E \in \Sigma$

(wohldefiniert, da $(\sigma_E)_E$ kompatibel)

$\implies \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\rho(\sigma) = (\sigma_E)_E$

(Automorphismus da $\sigma|_E$ Automorphismus) $\square$

Def. 2.2. Die **Krulltopologie** auf $\mathrm{Gal}(L|K)$ ist die Topologie für welche ρ ein Isomorphismus topologischer Gruppen wird. (mit der proendl. Topologie auf $\varprojlim_{\Sigma} \mathrm{Gal}(E/K)$)

$\underline{\text{Konkret}}$: Umgebungsbasis der Eins in $\mathrm{Gal}(L|K)$ ist $\{\underbrace{\mathrm{Gal}(L/E)}_{=\ker(\mathrm{Gal}(L|K)\to\mathrm{Gal}(E|K))} \mid E \in \Sigma\}$ $\leftarrow$ Umgebungsbasis offen-abg. Normalteiler von $\mathrm{Gal}(L|K)$

Lemma 2.3. Sei $L|K$ galoissch. Dann sind die offenen Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L|K)$ gerade die Untergruppen $\mathrm{Gal}(L|F)$ mit $F|K$ endlich.

Beweis. Sei $H \leq \mathrm{Gal}(L|K)$ offene Untergruppe. Wähle $E \in \Sigma$ mit $\mathrm{Gal}(L|E) \subseteq H$.

$\implies \overline{H} = \text{Bild von } H \text{ in } \mathrm{Gal}(E/K) = \{\sigma|_E \mid \sigma \in H\} \quad \left(= \mathrm{Gal}(L|K)/\mathrm{Gal}(L/E)\right)$

Sei $F = E^{\overline{H}}$ ... Prüfe: $H = \mathrm{Gal}(L/F)$.

$$\begin{array}{l} L \\ | \\ E \\ | \ \overline{H} \\ F \\ | \\ K \end{array} \quad \text{endlich}$$

Umgekehrt: $F|K$ endl. Erweiterung in $L \rightsquigarrow$ Sei E der Galoisabschluss von $F|K$

$\implies [E:K] < \infty \implies \underbrace{\mathrm{Gal}(L|E)}_{\text{offen}} \subseteq \mathrm{Gal}(L|F)$.

$$\implies \mathrm{Gal}(L|F) = \underbrace{\bigcup_{g \in \mathrm{Gal}(L|F)/\mathrm{Gal}(L|E)} g\,\mathrm{Gal}(L|E)}_{\subseteq_{\text{offen}}\ \mathrm{Gal}(L|K)}$$

$\square$

Korollar 2.4. Sei L wie in 2.3. Dann gilt:

$$\{H \leq Gal(L|K) \mid H \text{ abg.}\} = \{Gal(L|F) \mid L|F|K\}$$

Beweis.
"$\supseteq$": Schreibe $F = \bigcup_{i \in I} F_i$, I Menge, $F_i|K$ endl. Erw.

Dann:
$$Gal(L|F) = \bigcap_{i \in I} \underbrace{Gal(L|F_i)}_{\text{offen-abgeschlossen}}$$

$$\sigma|_F = id_F \qquad \sigma|_{F_i} = id_{F_i}$$

"$\subseteq$": Jede abg. Untergruppe einer proendlichen Gruppe ist der Durchschnitt offener Untergruppen (1.10)

$$H = \bigcap_{i \in I} U_i \qquad U_i: \text{ offene Untergruppe in } G, \quad U_i = Gal(L|F_i) \text{ nach 2.3}$$

$$\underset{F = K[F_i \mid i \in I]}{\longrightarrow} \quad = \bigcap_{i \in I} Gal(L|F_i) = Gal(L|F)$$

▨

Satz 2.5. Sei $L|K$ galoissch. Dann sind die Abbildungen

$$\{H \leq Gal(L|K) \mid H \text{ abg.}\} \underset{Gal(L/F) \,\leftarrow\!\!\shortmid\, F}{\overset{H \,\mapsto\, L^H}{\rightleftarrows}} \{F \subseteq L \mid F|K \text{ Körpererweiterung}\}$$

zueinander inverse Bijektionen (ordnungsumkehrend). Die Restriktionen der Abbildungen definieren Bijektion:

$$\{H \trianglelefteq Gal(L|K) \mid H \text{ abg. Normalteiler}\} \rightleftarrows \{E \subseteq L \mid E|K \text{ Galoiserweiterung}\}$$

Dabei gilt (topologisch):
$$Gal(L/K)/N \xrightarrow{\sim} Gal(L^N/K)$$

Beweis. Reduktion auf den endlichen Fall. – Sharifi 8.3.6.

▨

Bezeichnung: K ein beliebiger Körper.
K^{alg} bezeichne einen algebraischen Abschluss
$\underset{\text{ist galoisch über } K}{K^{sep}} \subseteq K^{alg}$ bezeichne einen separablen Abschluss $\quad (K^{sep} = \{\alpha \in K^{alg} \mid K(\alpha)|K \text{ separabel}\})$

$$\rightsquigarrow \quad G_K := Gal(K^{sep}/K) \text{ die absolute Galoisgruppe von } K$$

$$\left(\begin{array}{rcl} Aut_K(K^{alg}) & \longrightarrow & G_K \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_{K^{sep}} \end{array} \text{ ist ein Isomorphismus} \right)$$

Bsp. • $G_{\mathbb{F}_q} \simeq \hat{\mathbb{Z}}$ ($\mathbb{F}_q$ perfekt $\Rightarrow$ $\mathbb{F}_q^{alg} = \mathbb{F}_q^{sep}$)

$\mathbb{F}_{q^n} = \{ \alpha \in \mathbb{F}_q^{alg} \mid \alpha^{q^n} = \alpha \} \mid \mathbb{F}_q$ galoissch mit $Gal(\mathbb{F}_{q^n} / \mathbb{F}_q) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$(\sigma_q : \alpha \mapsto \alpha^q) \quad \longmapsto 1$

und $\mathbb{F}_q^{alg} = \bigcup_n \mathbb{F}_{q^n} \Rightarrow G_{\mathbb{F}_q} \cong \varprojlim_{(\mathbb{N}, |)} Gal(\mathbb{F}_{q^n} \mid \mathbb{F}_q) \cong \hat{\mathbb{Z}}$

• $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$

$$\Rightarrow Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) / \mathbb{Q}_p) = \varprojlim Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) / \mathbb{Q}_p) = \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n)^\times$$

$$= \mathbb{Z}_p^\times$$

($\zeta_n \in K^{alg}$ primitive n-te EW sofern $\operatorname{char} K \nmid n$ und falls $n \mid n'$ ($\operatorname{char} K \nmid n'$) wollen $\zeta_n = (\zeta_{n'})$)

Bezeichnung: $G_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow[\text{Projektion}]{\text{kanonische}} Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) / \mathbb{Q}_p) \xrightarrow[\text{isom.}]{\text{obiger}} \mathbb{Z}_p^\times$

heißt p-adischer Kreisteilungscharakter.

Analog: $\tilde{\mathbb{Q}} = \bigcup_n \mathbb{Q}(\zeta_n)$ (alle n) wissen $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \simeq \prod_{p \text{ PZ}} Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{p^{v_p(n)}})/\mathbb{Q})$

$$Gal(\tilde{\mathbb{Q}} / \mathbb{Q}) \cong \varprojlim Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong \prod_{p \text{ PZ}} Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}) = \prod_p \mathbb{Z}_p^\times = (\hat{\mathbb{Z}})^\times$$

Satz (Kronecker-Weber)

$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{ab}$ wobei $K^{ab} = \bigcup \{ E \mid K \text{ galoissch} \mid Gal(E \mid K) \text{ abelsch} \}$

$$\text{d.h.: } Gal(K^{ab} / K) \simeq G_K^{ab} = G_K / \overline{[G_K, G_K]}$$

∎

Bemerkung. $G_{\mathbb{Q}_p}$ für $p > 2$ ist beschrieben durch Koch-Jansen-Wingberg. (~1985)

($\widehat{G}_K^{\,p}$, K lokal: ~1967)

03. Weitere Eigenschaften lokaler Körper

Sei K ein nicht-archimedischer lokaler Körper. Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ Bewertungsring,

$v = v_K : K^\times \to \mathbb{Z}$ normalisierte Bewertung.

$k := k_K$ (endl.!) Restklassenkörper, $\pi \in \mathcal{O}$ Primelement (Uniformisierer von K)

$p = \operatorname{char} k$, $q = \# k$, $f = [k : \mathbb{F}_p]$, $e := \begin{cases} e(K/\mathbb{Q}_p), & K \mid \mathbb{Q}_p \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

A. Die multiplikative Gruppe von K

Def. 3.1. Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{U}_i := \mathcal{U}_i(K)$ definiert als $\mathcal{U}_0 := \mathcal{O}^\times$, $\mathcal{U}_i = 1 + \pi^i \mathcal{O}$ für $i \geq 1$.
Sei $\mu^{(p)}(K) = \{ \zeta \in K^\times \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : \zeta^n = 1 \text{ und } p \nmid n \} \subseteq \mathcal{O}^\times$ endliche Untergruppe

Lemma 3.2. $\mu^{(p)}(K) \longrightarrow k^\times$, $\zeta \longmapsto \zeta \bmod \pi$ ist Gruppeniso. (ü)

Proposition 3.3. Die kanonische Abbildung $\pi^{\mathbb{Z}} \times \mu^{(p)}(K) \times \mathcal{U}_1 \longrightarrow K^\times$ ist ein topologischer Isomorphism
(ANT I, topologisch: ü)

Lemma 3.4. $\forall i \in \mathbb{N}_0$: $\mathcal{U}_i / \mathcal{U}_{i+1} \xrightarrow{\sim} (k, +)$, $1 + a\pi^i \longmapsto a \bmod \pi$ ist Gruppenisomorphismus.

Beweis. $(1 + a\pi^i)(1 + b\pi^i) = 1 + (a + b(1 + \pi^i a))\pi^i$ $\quad (i \geq 1)$

$$\in (1 + (a+b)\pi^i)\,\mathcal{U}_{i+1}$$

$\Rightarrow \mathcal{U}_i \to (k, +)$, $1 + a\pi^i \mapsto a \bmod \pi$ ist Gruppenhomomorphismus

mit Kern $\mathcal{U}_{i+1}$.

$\square$

Korollar 3.5. $\forall i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: $\mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{j \geq i} \mathcal{U}_i / \mathcal{U}_j$ ($\rightsquigarrow \mathcal{U}_i$ ist pro-p Gruppe)

Beweis.
<u>injektiv</u>: ✓
<u>surjektiv</u>: Sei $\overline{\alpha_j} \in \mathcal{U}_i/\mathcal{U}_j$ kompatible Familie. Wähle $\alpha_j \in \mathcal{U}_i$ mit Reduktion $\overline{\alpha_j}$.

$\Rightarrow (\alpha_j)_j$ bilden CF in $\mathcal{O}^\times \subseteq \mathcal{O}$ $\underset{\substack{\mathcal{U}_i \text{ kpt.} \\ (\mathcal{O} \text{ kpt.!})}}{\Longrightarrow}$ $\alpha := \lim_j \alpha_j$ existiert in $\mathcal{U}_i$.

$\rightsquigarrow \alpha \longmapsto (\overline{\alpha_j})_j$.

$\square$

Lemma 3.6. Sei K p-adisch, $i \geq 1$. Dann:

(0) $(1+\pi^i a)^p \equiv 1 + p\pi^i a + \pi^{pi} a^p \mod \pi^{e+2i}\mathcal{O}$ $\quad e = e(K/\mathbb{Q}_p) = v_K(p)$ $\quad (p \mathrel{\hat=} \pi^e)$

(1) $(1+\pi^i a)^p \equiv 1 + a^p \pi^{ip} \mod \pi^{ip+1}$, falls $i < \frac{e}{p-1}$

(2) $(1+\pi^i a)^p \equiv 1 + p\pi^i a \mod \pi^{i+e+1}$, falls $i > \frac{e}{p-1}$

(3) $(1+\pi^i a)^p \equiv 1 \mod \pi^{i+e}$, falls $i = \frac{e}{p-1}$

Beweis. (0): Binomischer Lehrsatz und $p \mid \binom{p}{j}$ für $j = 1 \ldots p-1$

und $v(\pi^{2i} p) = 2i + e$

(1) – (3): $v(p\pi^i) > v(\pi^{pi}) \iff e + i > pi \iff \frac{e}{p-1} > i$, etc. ▨

Korollar 3.7. Sei K p-adisch. $\mathcal{O}^\times \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^\times$, $\alpha \mapsto \alpha^p$. Dann gilt:

(1) $\forall i > \frac{e}{p-1} : \forall k \geq 1$: φ induziert Isomorphismus $U_i / U_{i+k} \xrightarrow{\sim} U_{i+e} / U_{i+e+k}$

(2) $\forall i > \frac{e}{p-1}$: φ induziert Isomorphismus $U_i \xrightarrow{\sim} U_{i+e}$

Beweis.
(1) $\underline{k=1}$:

$$\begin{array}{ccc} U_i / U_{i+1} & \longrightarrow & U_{i+e} / U_{i+e+1} \\ \cong & & \cong \\ (k,+) & & (k,+) \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} (1+a\pi^i)\, U_{i+1} & \xmapsto[3.6]{} & (1+pa\pi^i)\, U_{i+e+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ a \mod \pi & & a \cdot \underbrace{\tfrac{p}{\pi^e}}_{\text{Einheit}} \mod \pi \end{array}$$

(aus 3.6. Isomorphismus!)

Induktion:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & U_{i+1}/U_{i+k+1} & \to & U_i/U_{i+k+1} & \to & U_{i+k}/U_{i+k+1} & \to & 1 \\ & & \text{IV} \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \ \text{IV} & & \\ 1 & \to & U_{i+e+1}/U_{i+e+k+1} & \to & U_{i+e}/U_{i+e+k+1} & \to & U_{i+e+k}/U_{i+e+k+1} & \to & 1 \end{array}$$

$\cong$: Schlangenlemma.

(2) verwendet

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_{j \geq i} U_i/U_j \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \ \varphi \mod \ldots \\ U_{i+e} & \longrightarrow & \varprojlim_{j \geq i} U_{i+e}/U_{j+e} \end{array}$$

rechts Isomorphismus wegen (1). ▨

(2) alternativ:

$$\begin{tikzcd}
\underbrace{(1+\pi^i\mathcal{O},\cdot)}_{=\mathcal{U}_i} \arrow[r, shift left, "\log"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (\pi^i\mathcal{O},+) \arrow[l, shift left, "\exp"] \arrow[d, "p\cdot -"] \\
(\mathcal{U}_{i+e},\cdot) \arrow[r, shift left, "\log"] \arrow[r, phantom, "\sim"] & (\pi^{i+e}\mathcal{O},+) \arrow[l, shift left, "\exp"]
\end{tikzcd}$$

$p\cdot -$ ist Isomorphismus

$\boxtimes$

27.04.18

Satz 3.8. K sei p-adischer Körper. Dann:

(1) $\mathcal{U}_1(K) \cong \mu_{p^\infty}(K) \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ als topologische Gruppen.

(2) $K^\times \cong \pi^{\mathbb{Z}} \times \mu^{(p)}(K) \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ als topologische Gruppen.

Dabei

- $\mu_{p^\infty}(K) = \{\zeta\in K^\times \mid \exists n>0:\ \zeta^{p^n}=1\}$
- $\#\mu_{p^\infty}(K) < \infty$: $[K:\mathbb{Q}_p]<\infty$ und $[\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}):\mathbb{Q}_p] = \phi(p^n)$
  $$= p^{n-1}(p-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Bemerkung: · $\mathcal{U}_1(K)$ ist abelsche pro-p-Gruppe (letztes mal), d.h. $\mathbb{Z}_p$-Modul.

· $\mathcal{U}_1(K)_{tors} \cong \mu_{p^\infty}(K)$ <u>und</u> $\mathcal{U}_1(K)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Q}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$

Beweis. (2) folgt aus (1) und 3.3.

(1) $\mathcal{U}_1(K)$ ist abelsche pro-p-Gruppe.

$$\mathcal{U}_1(K)_{tors} = \{x\in\mathcal{U}_1(K) \mid \exists n\in\mathbb{N}:\ x^{p^n}=1\} = \mu_{p^\infty}(K) \quad (<\infty)$$

<u>Beh.</u> $\mathcal{U}_1(K)$ topol. endl. erz.
$\Rightarrow \mathcal{U}_1(K)$ endl. erz. $\mathbb{Z}_p$-Modul
$\Rightarrow \mathcal{U}_1(K) \cong \mathcal{U}_1(K)_{tors}\times\mathbb{Z}_p^r$ für ein $r\in\mathbb{N}_0$

Dazu: (Burnside Basissatz) z.z. $\mathcal{U}_1(K)/\mathcal{U}_1(K)^n$ endlich

<u>dazu</u>: $\mathcal{U}_1(K)^p \supseteq \mathcal{U}_{i_0}(K)^p \overset{3.7}{=} \mathcal{U}_{i_0+e}(K)$ für $i_0 = \left\lceil \frac{e}{p-1}\right\rceil$

$\Rightarrow \mathcal{U}_1(K)/\mathcal{U}_1(K)^p$ ist Quotient von $\mathcal{U}_1(K)/\mathcal{U}_{i_0+e}(K)$ ← endliche p-Gruppe
($\mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i+1} \cong (k,+)$ endl.)

$\Rightarrow$ Behauptung gezeigt.

Behauptung: $r = [K:\mathbb{Q}_p]$ $\quad \mathcal{U}_1/\mathcal{U}_i$ endl. $\forall i\geq 1$

$\Rightarrow \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{U}_1 = \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{U}_{i_0}$

wegen log, exp: $U_{i_0} \underset{\log}{\cong} \pi^{i_0} \mathcal{O}_K$ als $\mathbb{Z}_p$-Modul (als pro-p-Gruppe)

$$\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K = \operatorname{rang}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \dim_{\mathbb{Q}_p} K = [K:\mathbb{Q}_p]$$

Alternativ: U_{i_0} ist p-torsionsfrei, denn $x \mapsto x^p$ ist Isomorphismus $U_{i_0} \to U_{i_0+e}$

$\Rightarrow U_{i_0}$ ist freier $\mathbb{Z}_p$-Modul (von endl. Rang)

$$\underset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow} \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_p} U_{i_0} = \operatorname{rang}_{\mathbb{F}_p} U_{i_0}/U_{i_0}^p = \operatorname{rang}_{\mathbb{F}_p} U_{i_0}/U_{i_0+e} = \log_p(\# U_{i_0}/U_{i_0+e})$$

$$= \log_p((\underbrace{\# k}_{=p^f})^e) = ef = [K:\mathbb{Q}_p]$$

$\square$

Satz 3.9. (ohne Beweis, s. Ü)

Für $K \cong \mathbb{F}_q((\pi))$ gilt $U_1(K) \cong \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$

Abb. $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}} \to U_1$: Sei $b_1, \dots, b_f$ Basis von k über $\mathbb{F}_p$.

Behauptung: $$\prod_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p\nmid n}} \prod_{j=1}^{f} \mathbb{Z}_p \longrightarrow U_1(K), \quad (a_{nj})_{n,j} \longmapsto \prod_{n,j} (1+b_j\pi^n)^{a_{nj}}$$

$\square$

B. Zahm verzweigte Erweiterungen (ζ_n primitive n-te EW)

Proposition 3.10. $L|K$ lokale Körper, $n\in\mathbb{N}$ mit $p\nmid n$.

(a) $K(\zeta_n)$ ist unverzweigt über K

(b) Für $m := \# k_L^\times$ gilt $K(\zeta_m) \subseteq L$ und $K(\zeta_m)$ ist größte unverzweigte Erweiterung von K in L. ($\Rightarrow L|K(\zeta_m)$ ist total verzweigt)

(c) Zu $\ \in\mathbb{N}$ $\exists!$ unverzweigte Erweiterung K_ℓ von K mit $[K_\ell:K] = \ $, nämlich $K = K(\zeta_{q^\ell-1})$, $K_\ell|K$ ist galoissch und

$$\operatorname{Gal}(K_\ell|K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gal}(k(\zeta_{q^\ell-1})/k) \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

Beweis. (vgl. ANT I)

(a) Man betrachtet $X^m - 1$ ($p\nmid m$ und wendet Hensels Lemma an $\Rightarrow [K(\zeta_n):K] = [k(\zeta_n):k]$

$\Rightarrow f(K(\zeta_n)|K) = [K(\zeta_n):K]$

(Hensel: $\deg \operatorname{mipo}_K \zeta_m = \deg \operatorname{mipo}_k \zeta_m$). Hensel zeigt auch $K(\zeta_m) \subseteq L$ und $k_L = k_K(\zeta_m)$

($\Rightarrow L|K(\zeta_m)$ voll verzweigt) $\Rightarrow$ (a), (b), (c).

Hatten in ANT I gezeigt. $\exists$ kanonische Surjektion $\rho_{L|K}: \operatorname{Gal}(L|K) \to \operatorname{Gal}(k_L|k)$ falls $L|K$ galoissch.

$\square$

Für $L|K$ algebraisch $(L \subseteq K^{alg}, K \subseteq L)$ sei

$$\mathcal{F}_{L|K} := \{ F \subseteq L \mid F|K \text{ endl. Körpererweiterung} \}$$

Def. 3.11.

(1) $L|K$ heißt unverzweigt $:\Longleftrightarrow$ alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind unverzweigt über K.

(2) $L|K$ heißt total verzweigt $:\Longleftrightarrow$ alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind total verzweigt über K.

(3) $K^{ur} := \bigcup \{ F \in \mathcal{F}_{K^{sep}|K} \mid F/K \text{ unverzweigt} \}$ $(= \varinjlim \ldots)$

(die max. unverzweigte Erweiterung von K (in K^{alg}))

(4) Für $F \subseteq F'$ in $\mathcal{F}_{L|K}$ haben kanonische Inklusion $k_F \hookrightarrow k_{F'}$

Sei $k_L = \bigcup \{ k_F \mid F \in \mathcal{F}_{L|K} \}$ $(= \varinjlim \ldots)$

(Bem.: $k_L \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_L / m_L$; Bewertung auf K setzt sich eind. auf L fort)

Bem. (a) $K^{ur} = \bigcup_m K(\zeta_{q^m - 1})$ $(= \varinjlim \ldots)$

(b) $K^{ur} \cap L$ für bel. L ist die maximale unverzweigte Erweiterung von K in L.

Def. 3.12. $L|K$ galoissch.

(i) Erhalten kanonischen Homomorphismus $\rho_{L|K} : Gal(L|K) \longrightarrow Gal(k_L | k)$

(als $\varprojlim \rho_{E|K} : \varprojlim_{\substack{E \in \mathcal{F}_{L|K} \\ E|K \text{ galoissch}}} (Gal(E|K) \longrightarrow Gal(k_E / k))$)

(ii) $I_{L|K} := \ker(\rho_{L|K})$, $I_K := I_{K^{sep}/K}$

(iii) Haben $\sigma : k_L \to k_L$, $\alpha \mapsto \alpha^q$ in $Gal(k_L / k)$ (topol. Erz.) $q = \# k$

Nenne $Fr \in Gal(L|K)$ einen Frobeniusautomorphismus $:\Longleftrightarrow \rho_{L|K}(Fr) = \sigma$

Bem. (1) Haben "wieder" kurze exakte Sequenzen $1 \to I_{K/L} \to Gal(L|K) \xrightarrow{\rho_{L|K}} Gal(k_L / k) \to 1$

als inverser Limes analoger Sequenzen für $E \in \mathcal{F}_{L|K}$ mit $E|K$ galoissch.

(2) Fr ist eindeutig $\Longleftrightarrow$ $\rho_{L|K}$ ist Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ $L|K$ ist unverzweigt (d.h. $I_{L|K} = \{1\}$)

Für $L = K^{ur}$: $Gal(K^{ur}/K) \xrightarrow{\sim} Gal(k^{alg}/k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$.

Def. 3.13. (a) Gilt $[L:K] < \infty$, so heißt $L|K$ zahm verzweigt $:\Leftrightarrow p \nmid e(L|K)$
$\quad p = \operatorname{char} k$

(b) $L|K$ heißt zahm verzweigt $:\Leftrightarrow$ alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind zahm verzweigt über K

(c) $L|K$ heißt wild verzweigt $:\Leftrightarrow$ $L|K$ ist <u>nicht</u> zahm verzweigt.
$(p \mid e(F|K)$ für ein $F \in \mathcal{F}_{L|K})$

Bsp. (a) $e \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ mit $p \nmid e \Rightarrow L = K(\sqrt[e]{\pi})$ zahm verzweigt (und total unverzweigt)

(b) $p = \operatorname{char} k$, $L|K$ inseparabel $\rightarrow$ $L|K$ wild verzweigt

(c) $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p$ zahm, total verzweigt. $(e = \phi(p) = p-1)$

$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p$ wild verzweigt für $n \geq 2$ $(e = \phi(p^n))$

Proposition 3.14. Sei $L|K$ zahm verzweigt, $[L:K] < \infty$, $E = L \cap K^{ur}$, $e = e(L|K)$. Dann:

(a) $L = E(\sqrt[e]{\pi_E})$ für π_E geeignetes Primelement von E.

(b) $E' := E(\zeta_{e \cdot \# k_E^\times})$, $L' := LE'$ $\Rightarrow L' = E'(\sqrt[e]{\underset{=\pi_K}{\pi}})$

und $E'|K$ unverzweigt, $L'|L$ unverzweigt --- ($L'|K$ galoissch)

Beweis.

(a) Sei π_L Primelement von $\mathcal{O}_L$ $\Rightarrow$ $\pi \mathcal{O}_L = \pi_L^e \mathcal{O}_L$, d.h. $\alpha \in \mathcal{O}_L^\times$: $\pi = \pi_L^e \alpha$

wissen $\mathcal{O}_L^\times = \mu^{(p')}(L) \times U_1(L)$
$\Rightarrow \alpha = \zeta \cdot u$

$U_1(L)$ ist (endl. erz.) $\mathbb{Z}_p$-Modul, $e \in \mathbb{Z}_p^\times$
$\Rightarrow \exists\, u' \in U_1(L): (u')^e = u$.

$\Rightarrow \zeta^{-1}\pi = (\pi_L \cdot u')^e$

<u>beachte</u>: $\mu^{(p')}(L) = \mu^{(p')}(E)$ da $k_L = k_E$

$\Rightarrow \pi_E := \zeta^{-1}\pi$ Primelement von $\mathcal{O}_E$ <u>und</u> $L = E(\sqrt[e]{\pi_E})$

(<u>denn</u>: $L = E(\pi_L)$, da $[L:E] = e(L|E) = e(L|K) = e$)

(b) wähle $\xi \in \mu^{(p')}(E)$ mit $\xi^e = \zeta$ $\quad (\zeta^{\# k_E^\times} = 1)$

Dann: $\pi = (\pi_L \cdot u' \xi)^e \Rightarrow L' = E'(\sqrt[e]{\pi})$. ▨

Bsp. (ii) $\mathbb{Q}_p(\zeta_p) = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p-1]{\pi'})$ für geeigneten Uniformisierer in $\mathbb{Q}_p$.

<u>Bch.</u>: $\pi = -p$ tut's!

Def. G pro-endlich abelsch. $\Rightarrow$ G ist $\hat{\mathbb{Z}}$-Modul.

Modulstruktur: $\hat{\mathbb{Z}} \times G \longrightarrow G, \ (\alpha, g) \longmapsto \underbrace{\alpha \cdot g}_{?}$

$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \cdot g := g^n$

Für $\hat{a} \in \hat{\mathbb{Z}}$ beliebig: schreibe $\hat{a} = (a_n)_n \in \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ $(a_n \in \mathbb{Z})$

prüfe: (g^{a_n}) "konvergieren" ((g^{a_n}) hat eind. Häufungspunkt!)

Proposition 3.15.

(a) Sind L, L' zahm verzweigt über K, so auch LL' ($\Rightarrow \exists$ größte zahm verzw. Erw. K^{tr} von L in K^{sep})

(b) Die maximal zahm verzweigte Erweiterung von K in K^{alg} ist

$$K^{tr} = \bigcup_{p \nmid n} K^{ur}(\sqrt[n]{\pi})$$

(c) K^{tr} / K^{ur} ist galoissch und $\mathrm{Gal}(K^{tr}/K^{ur}) \underset{\text{kan.}}{\cong} \underbrace{\prod_{\substack{\ell \neq p \\ \ell \text{ prim}}} \mathbb{Z}_\ell}_{= \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}_p} =: \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$

(d) $K^{tr} | K$ ist galoissch mit $\mathrm{Gal}(K^{tr}/K) \cong \hat{\mathbb{Z}}^{(p)} \rtimes \hat{\mathbb{Z}}$ so dass für geeignete topologische Erzeuger $t \in \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ und $s \in \hat{\mathbb{Z}}$ gilt:

$$s t s^{-1} = t^q \quad (q = \# k)$$

Beweis.

(a) Für $L, L' | K$ endl: $e(LL'/K) \mid e(L|K)\, e(L'|K)$ (aus ANT 1) oder 3.14

(b) Folgt aus 3.14 (b)

(c) $\mathrm{Gal}(K^{ur}(\sqrt[n]{\pi}) \mid K^{ur}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (nach Kummertheorie)

$(p \nmid n)$ Galoiskonjugierten von $\sqrt[n]{\pi}$ sind $(\zeta_n^i \sqrt[n]{\pi})_{i=1}^n$ (Algebra I)

$\varprojlim(\ldots) = \varprojlim_{p \nmid n} (\quad) \cong \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$

(d) (ii) Sei $K(n) := K(\zeta_{q^n-1}, \sqrt[q^n-1]{\pi})$; Beh.: $K(n) | K$ galoissch mit $\mathrm{Gal}(K(n)|K) \cong \underbrace{\mathbb{Z}/_{q^n-1}\mathbb{Z}}_{\substack{t=1 \\ \text{zahm total verzweigt}}} \rtimes \underbrace{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_{\substack{s=1 \\ \text{unverzweigt} \\ \mathrm{Gal}(K(\zeta_{q^n-1})|K)}}$

$\underset{=}{\text{und}}$: $s t s^{-1} = t^q$

04. Höhere Verzweigungsgruppen.

Sei K ein lokaler Körper. Seien $\mathcal{O}, \pi, k = k_K, v = v_K, q$ wie in 03.

Sei $L|K$ endlich galoisch mit $G = Gal(L|K)$. Seien $\mathcal{O}_L, \pi_L, k_L, v_L$ wie für K.

(v_L normalisiert, keine Fortsetzung von v_K)

Whg. ANT 1: $\exists x \in \mathcal{O}_L$ mit $\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L$ ($L|K$ total verzweigt $\Rightarrow \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$)

Lemma 4.1. Für $\sigma \in G$ und $i \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ sind äquivalent:

a) σ operiert trivial auf $\mathcal{O}_L / \pi_L^{i+1} \mathcal{O}_L$

b) $v_L(\sigma(a) - a) \geq i+1 \quad \forall a \in \mathcal{O}_L$

c) $v_L(\sigma(x) - x) \geq 1$ für x wie oben.

Beweis.

a) $\Leftrightarrow$ b) $\Rightarrow$ c): klar.

c) $\Rightarrow$ b):
$$\sigma\Big(\sum_i a_i x^i\Big) - \sum_i a_i x^i = (\sigma x - x) \sum_i a_i \underbrace{\frac{(\sigma x)^i - x^i}{\sigma x - x}}_{\in \mathcal{O}_L}$$
$a_i \in \mathcal{O}_K$

$$v_L(\dots) = v_L(\sigma x - x) + \underbrace{?}_{\geq 0} \geq i+1$$

$\blacksquare$

Def. 4.2.

(i) $i_{L|K}(\sigma) := v_L(\sigma x - x) \quad \forall \sigma \in G$

(ii) Für $i \geq -1$ sei $G_i := \{\sigma \in G \mid i_{L|K}(\sigma) \geq i+1\}$ die i-te höhere Verzweigungsgruppe.

Bemerkung 4.3.

(0) $G_i = \bigcap_{\bar{x} \in \mathcal{O}_L / \pi^{i+1} \mathcal{O}_L} Stab_G(\bar{x}) \Rightarrow G_i$ Untergruppe.

(1) $G_{-1} = G$, $G_i = \{id\}$ für $i \gg 1$ ($\sigma \neq id \Rightarrow \sigma x - x \neq 0 \dots$)

$G_0 \underset{4.1}{=} \{\sigma \in G \mid \sigma x \equiv x \mod \pi\} = I_{L|K} = \ker(G \longrightarrow Gal(k_L | k_K))$

(2) $H \leq G$ Untergruppe zum Zwischenkörper $E = L^H$ (beachte $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_E[x]$)

Dann: $H_i = H \cap G_i$ ($i_{L|E}(\sigma) = i_{L|K}(\sigma)$ für $\sigma \in H$)

z.B. $H = G_0 \Rightarrow L^H = L \cap K^{ur}$ und $G_i = (G_0)_i = H_i \quad \forall i \geq 0$.

(3) $i_{L|K}$ ist unabhängig von der Wahl von x (wegen 4.1)

(4) $i_{L|K} : G \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$

Lemma 4.4. Es gilt $G_i \trianglelefteq G \quad \forall i \geq -1$

Beweis.
$$G_i = \ker\left(G \longrightarrow \operatorname{Aut}\left(\mathcal{O}_L / \pi^{i+1}\mathcal{O}_L\right)\right).$$

$\blacksquare$

Korollar 4.5. Seien $\sigma, \tau \in G_0$. Dann gelten:

(i) $i_{L|K}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = i_{L|K}(\tau)$

(ii) $i_{L|K}(\sigma\tau) \geq \min(i_{L|K}(\sigma), i_{L|K}(\tau))$ mit Gleichheit falls $i_{L|K}(\sigma) \neq i_{L|K}(\tau)$.

Beweis. (i) wegen 4.4.

(ii) $$\underbrace{v_{L|K}(\sigma\tau x - x)}_{i_{L|K}(\sigma\tau)} \geq \min\Big(\underbrace{v_{L|K}(\sigma(\tau x) - \tau x)}_{\substack{= i_{L|K}(\sigma), \text{ da} \\ \text{auch } \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\tau x] \\ \text{nu } 4.3\,(3)}}, \underbrace{v_{L|K}(\tau x - x)}_{i_{L|K}(\tau)}\Big)$$

Gleichheitsaussage wegen "analoger" Eigenschaft von v_L.

$\blacksquare$

Lemma 4.6. Für $\sigma \in G_0$ und $i \geq 0$ gelten:
$$\sigma \in G_i \underset{(i)}{\Longleftrightarrow} v_L(\sigma\pi_L - \pi_L) \geq i+1 \underset{(ii)}{\Longleftrightarrow} \frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} \in \mathcal{U}_i(L)$$

Beweis. (i) o.E.: $L|K$ voll verzweigt (ersetze K durch $K^{ur} \cap L$)

dann: klar wegen Wiederholung ANT 1 + 4.3. (3).

(ii) $$v_L(\pi_L) = 1 \Longrightarrow \left(v_L(\sigma\pi_L - \pi_L) \geq i+1 \Longleftrightarrow v_L\left(\frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} - 1\right) \geq i \right.$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} \in \mathcal{U}_i(L).$$

$\blacksquare$

1. Anwendung: $v_L(\mathcal{D}_{L|K})$?

$$\mathcal{D}_{L|K}^{-1} = \{\alpha \in L \mid \operatorname{Tr}_{L|K}(\alpha\beta) \in \mathcal{O}_K \ \forall \beta \in \mathcal{O}_L\}$$

und (Da $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$) ist $\mu_x \in \mathcal{O}_K[X]$ das Mipo von x, so gilt $\mathcal{D}_{L|K} = \mu_x'(x)\,\mathcal{O}_L$.

Satz 4.7. $v_L(\underbrace{\mathcal{D}_{L|K}}_{=v_L(\mu_x'(x))}) = \sum_{\sigma \in G \setminus \{id\}} i_{L|K}(\sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} (\# G_i - 1)$

(Bem.: weiter unten: $L|K$ zahm verzweigt $\Longleftrightarrow G_1 = \{1\}$
$\Downarrow$ $v_L(\mathcal{D}_{L|K}) = \# G_0 - 1 = e(L|K) - 1$)

Beweis.

$$\mu_x(X) = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma x) \implies \mu_x'(x) = \prod_{\sigma \in G \setminus \{1\}} (x - \sigma x)$$

$$\implies v_L(\mathcal{D}_{L|K}) = \sum_{\sigma \in G \setminus \{1\}} v_L(x - \sigma x) = \sum_{\sigma \in G \setminus \{1\}} \underbrace{i_{L|K}(\sigma)}_{\in \mathbb{Z}_{\geq 0}}.$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \Big(\sum_{\substack{\sigma \in G \setminus \{1\} \\ i_{L|K}(\sigma) = i}} 1 \Big) = \sum_{i=1}^{\infty} i \big(\# G_{i-1} - \underbrace{\# G_i}_{=: g_i} \big)$$

$$\underset{\substack{\text{Abel-} \\ \text{summation}}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (\# G_i - 1)$$

$$0 \cdot (g_{-1} - g_0) + 1(g_0 - g_1) + 2(g_1 - g_2) + 3(g_2 - g_3) + \ldots + n(g_{n-1} - \underbrace{g_n}_{=1}) + 0$$

$$= g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1} - n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (g_0 - 1)$$

$\square$

Korollar 4.8. (Ü) Sei $E|K$ endl. separable Erweiterung mit Galoishülle L und $H = Gal(L/E)$. Dann: $v_{E|K}(\mathcal{D}_{E|K}) = \frac{1}{e(L/E)} \sum_{\sigma \in G \setminus H} i_{L|K}(\sigma)$

<u>Die Gruppen G_i / G_{i+1}:</u>

Lemma 4.9. $\forall i \geq 0$ ist die Abbildung $\theta_i : G_i / G_{i+1} \longrightarrow \mathcal{U}_i(L) / \mathcal{U}_{i+1}(L)$, $\sigma G_{i+1} \longmapsto \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} \mathcal{U}_{i+1}(L)$ wohldefiniert, unabhängig von π_L und ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

(Erinnerung: $\mathcal{U}_0(L)/\mathcal{U}_1(L) \cong (k_L^\times, \cdot) \cong \mathbb{Z}/(q_L - 1)$, $\quad \mathcal{U}_i(L)/\mathcal{U}_{i+1}(L) \cong (k_L, +) \cong \mathbb{F}_p^{[k_L : \mathbb{F}_p]}$)

Beweis. • unabhängig von π_L: Gelte $\pi' = u\pi_L$ für ein $u \in \mathcal{O}_L^\times$.

$$4.1 \underset{\sigma \in G_i}{\Longrightarrow} \quad \sigma u \equiv u \mod \pi_L^{i+1}, \text{ d.h. } \frac{\sigma u}{u} \equiv 1 \mod \pi_L^{i+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma \pi'}{\pi'} = \frac{\sigma u}{u} \; \frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \equiv \frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \mod \mathcal{U}_{i+1}(L)$$

• $\tilde{\theta}_i : G_i \longrightarrow \mathcal{U}_i(L)/\mathcal{U}_{i+1}(L)$, $\sigma \longmapsto \dfrac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} \mod \mathcal{U}_{i+1}(L)$ ist wohldef. Gruppenhomomorph.:

$$\frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \underset{4.6}{\in} \mathcal{U}_i(L) \Rightarrow \text{wohldefiniert.}$$

Homomorphismus: $$\tilde{\theta}_i(\sigma\tau) = \frac{\sigma\tau(\pi_L)}{\pi_L} = \frac{\sigma(\tau\pi_L)}{\tau\pi_L} \cdot \frac{\tau(\pi_L)}{\pi_L} \underset{v_L(\tau\pi_L)=1}{\overset{\text{unabh. von } \pi_L}{\equiv}} \frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} \cdot \frac{\tau\pi_L}{\pi_L}$$

inj., wohldefiniert:

$$\ker \tilde{\theta}_i = G_{i+1} \quad \text{nach Lemma 4.6.}$$

$\square$

Korollar 4.10. (i) G_0/G_1 ist endl. zykl. Grp. von Ordnung teilerfremd zu p.

(ii) G_1 ist eine p-Gruppe

(iii) L^{G_1} ist der max. zahm verzweigte Unterkörper von L über K

(iv) G ist auflösbar. (sogar "überauflösbar")

Beweis. (i), (ii): klar nach 4.9.

(iv): benötigt zusätzlich: $Gal(k_L/k)$ auflösbar ist.

(iii)

$$\begin{array}{l} L \\ | \text{ — total verzweigt} \\ L^{G_1} \quad \text{zahm verzweigt, da } p \nmid \#G_0/G_1 \\ \quad \diagdown \; K^{G_0} \\ | \quad \diagup \; \text{unverzweigt} \\ K \end{array}$$

$\Rightarrow L^{G_1}$ größte zahm verzweigte Untererweiterung von K in L

$\square$

Ü: $G_0 \simeq G_1 \rtimes G_0/G_1$ (Schur – Zassenhaus, ... lieber elementar)

Def. 4.11. $G_1 \trianglelefteq G$ heißt wilde Verzweigungsgruppe von G.

Bsp 4.12. (Ü)
Sei $L_i = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^i})$ $i \geq 0$

$$\mathrm{Gal}(L_n \mid \mathbb{Q}_p)_i = \begin{cases} G, & -1 \leq i \leq 0 \\ \mathrm{Gal}(L_n/L_k), & p^{k-1} \leq i \leq p^k - 1 \quad k \in \{1, \dots, n-1\} \\ \{1\}, & i \geq p^{n-1} \end{cases}$$

Bemerkung 4.13 (siehe Serre) $\sigma \in G_i$, $\tau \in G_j$, $i,j \geq 1$

$\Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \in G_{i+j+1}$

Der Satz von Herbrand

Für $u \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ setze $G_u := G_{\lceil u \rceil}$

$\left(\sigma \in G_u \Leftrightarrow i_{L|K}(\sigma) \geq u+1\right)$

Def. 4.14. (Herbrand Funktion)

$$\phi = \phi_{L|K} : [-1, \infty) \longrightarrow [-1, \infty), \quad t \longmapsto \int_{s=0}^{t} \frac{1}{[G_0 : G_s]}\, ds$$

beachte: $s \longmapsto [G_0 : G_s]^{-1}$ ist monoton ~~wachsend~~ fallend in s und $\frac{1}{[G_0 : G_s]} \geq \frac{1}{\# G_0}$

Prop. 4.15. (Ü)

(i) ϕ ist stetig, stückweise linear (auf $(i, i+1)$) streng monoton wachsend und konkav.

(ii) $\phi(0) = 0$, Steigung 1 auf $-1 \leq t \leq 0$

(iii) Für $u \in \mathbb{R}_{\geq 1} \setminus \mathbb{Z}$: $\phi'(u) = \frac{1}{[G_0 : G_u]} \geq \frac{1}{\# G_0}$

(iv) $\phi : [-1, \infty) \longrightarrow [-1, \infty)$ ist bijektiv.

Sei $\psi = \psi_{L|K} = \phi^{-1} : [-1, \infty) \longrightarrow [-1, \infty)$

Korollar 4.16. (Ü) (i) ψ ist stetig, stückweise linear, streng monoton wachsend, konvex

(ii), (iv) wie für ϕ

(iii) Sei $v = \phi(u)$, $u \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \psi'(v) = [G_0 : G_u]$ $(\in \mathbb{N})$ | (v) $u \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \Rightarrow u = \psi(v) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Beweis.

(v) OE $v \geq 1$. ($v=0$, $v=-1$ klar wegen ii)

$\exists i: \; i \leq v \leq i+1$ $\qquad [G_0 : G_u] = \dfrac{\# G_0}{\# G_u}$

$$\underset{v=\phi(u)}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\# G_0 \; v}_{\text{teile durch } \# G_{i+1}} = \underset{[0,1]}{\# G_1} + \underset{[1,2]}{\# G_2} + \dots + \underset{[i-1,i)}{\# G_i}$$

$$\underset{v \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \quad u - i \in \mathbb{Z} \implies u = i.$$

▨

Def. 4.17. $\quad G^v := G_{\psi(v)}$ $\quad$ (Verzweigungsgruppen in oberer Nummerierung!)

Satz 4.18. (Herbrand) Für $N \trianglelefteq G$ Normalteiler gilt:

$$\left(G/N\right)^v = G^v N / N \qquad \forall v \in \mathbb{R}_{\geq -1}$$

08.05.18

Bem. zu 4.17.

i) $G^v = \{1\}$ für $v \gg 0$

ii) $G^0 = G_0$ $\quad (\psi(0) = 0)$; $G^{-1} = G$

iii) Ü: $\psi(v) = \displaystyle\int_{w=0}^{v} [G^0 : G^w] \, dw$

Übung: Die Abbildung $\phi = \phi_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p}$ (mit Inverser ψ) erfüllt:

$$\phi'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ \dfrac{1}{p^k - p^{k-1}}, & p^{k-1} - 1 < t < p^k - 1 \qquad 1 \leq k \leq n-1 \\ \dfrac{1}{p^n - p^{n-1}}, & p^{n-1} - 1 < t \end{cases}$$

$$\psi'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ p^k - p^{k-1}, & k-1 < t < k \qquad 1 \leq k \leq n-1 \\ p^n - p^{n-1}, & n-1 < t \end{cases}$$

(Sprünge der Steigung von ψ an $\{0, \dots, n-1\}$)

Proposition 4.19. Gelte $N \trianglelefteq G$ und sei $E = L^N$. Dann:

$$\varphi_{L|K} = \varphi_{E|K} \circ \varphi_{L|E} \quad \text{und} \quad \psi_{L|K} = \psi_{E|K} \circ \psi_{L|E}$$

Lemma 4.20. Für $N \trianglelefteq G$ und $E = L^N$ gilt:

$$\forall \delta \in Gal(E|K): \quad i_{E|K}(\delta) = \frac{1}{e(L|E)} \sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma|_E = \delta}} i_{L|K}(\sigma)$$

$$G\left(\begin{array}{c} L \\ |\, N \\ E \\ |\, G/N \\ K \end{array}\right.$$

Beweis. (Tate)

- Falls $\delta = id$: $\infty = \infty$.
- Falls $\delta \neq id$: Wähle $x \in \mathcal{O}_L$, $y \in \mathcal{O}_E$ mit $\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_K[y] = \mathcal{O}_E$.

Wähle $\tau \in G$ mit $\tau|_E = \delta \Rightarrow \{\sigma \in G \mid \sigma|_E = \delta\} = \tau \cdot N = N \cdot \tau$

Beobachte:

$$e(L|E) \cdot i_{E|K}(\delta) = v_L(\tau y - y)$$

$$i_{L|K}(\sigma) = v_L(\sigma x - x)$$

Behauptung: $a = \tau y - y$ und $b = \prod_{\sigma \in N} (\tau\sigma x - x)$ sind assoziiert in $\mathcal{O}_L$.

$a \mid b$: Sei $f \in E[X]$ das Minimalpolynom von x über E.

$$f(X) = \prod_{\sigma \in N} (X - \sigma x) = X^{\#N} + \sum_{i=0}^{\#N-1} b_i X^i$$ mit $b_i \in \mathcal{O}_E$ da x ganz über $\mathcal{O}_E$.

$$\tau f - f = \sum_{i=0}^{\#N-1} \underbrace{(\tau b_i - b_i)}_{v_E(\cdot) \geq i_{E|K}(\delta)} X^i \qquad (\tau b_i = \delta b_i)$$

$$\xrightarrow[\text{Koeffizienten von } f]{a \text{ teilt}} \quad a \mid (\tau f - f)(x) = (\tau f)(x) = \prod_{\sigma \in N} (x - \tau\sigma x) = \pm b$$

$b \mid a$: Schreibe $y = g(x)$ für ein $g \in \mathcal{O}_K[X]$.

$\Rightarrow$ $g(X) - y \in \mathcal{O}_E(X)$ und das Polynom hat x als Nullstelle.

$\Rightarrow g(X) - y = \underbrace{f(X)}_{\text{normiert}} \cdot h(X)$ für ein $h \in \mathcal{O}_E[X]$.

Wende τ an; anschließend x einsetzen. (beachte $\tau g = g$)

$$\Rightarrow a = y - \tau y = (\tau f)(x) \ (\tau h)(x)$$
$$= \pm b \cdot (\tau h)(x)$$

also gilt $b \mid a$.

$\square$

Korollar 4.21. (s. Serre, Local Fields) Sei $N = G_j$ für ein $j \geq 0$. Dann:

(a) $(G/N)_i = G_i/N$ für $i < j$ (b) $(G/N)_i = \{1\}$ für $i \geq j$

Beweis. Übung.

$\square$

Lemma 4.22. Für $t \geq -1$ gilt:

$$\phi_{L|K}(t) + 1 = \frac{1}{\# G_0} \sum_{\sigma \in G} \min(i_{L|K}(\sigma), t+1)$$

Beweis. Beide Seiten sind 1 an $t = 0$, $(i_{L|K}(\sigma) = 0$ für $\sigma \in G \setminus G_0$, ≥ 1 für $\sigma \in G_0)$

stückweise linear für $t \in [i, i+1]$ und stetig. Sei $t \in \mathbb{R}_{\geq -1} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\phi'_{L|K}(t) = \frac{1}{[G_0 : G_{i+1}]} = \frac{\# G_{i+1}}{\# G_0}$$

$$\left(\text{Rechte Seite}\right)'(t) = \frac{1}{\# G_0} \sum_{\sigma \in G} \frac{d}{dt} \underbrace{\min\{i_{L|K}(\sigma), t+1\}}_{\text{Fkt. konstant nahe } t \iff i_{L|K}(\sigma) < t+1 \iff i_{L|K}(\sigma) \leq i+1}$$

$$= \frac{1}{\# G_0} \left(\sum_{\sigma \in G \setminus G_{i+1}} 0 + \sum_{\sigma \in G_{i+1}} 1 \right)$$

$\square$

Lemma 4.23. Für $N \trianglelefteq G$, $E = L^N$, $\delta \in \mathrm{Gal}(E|K)$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ gilt:

$$i_{E|K}(\delta) - 1 = \max\{\phi_{L|E}(i_{L|K}(\sigma) - 1) \mid \sigma \in G, \sigma|_E = \delta\}$$

Beweis. Wähle $\sigma \in \{\sigma' \in G \mid \sigma'|_E = \delta\}$ für welches $i_{L|K}(\sigma)$ maximal ist. Sei

$m = i_{L|K}(\sigma) - 1$. <u>Behauptung:</u> $\forall \tau \in N: i_{L|K}(\sigma\tau) = \min\{i_{L|K}(\tau), m+1\}$

<u>Fall $\tau \in N_m$:</u> d.h. $i_{L|K}(\tau) - 1 \geq m$. $\Rightarrow i_{L|K}(\sigma\tau) \geq \min\{i_{L|K}(\sigma), i_{L|K}(\tau)\}$

$= m+1$ und $=$ nach Wahl von σ.

$= i_{L|K}(\sigma)$

<u>Fall $\tau \in N \setminus N_m$:</u> $i_{L|K}(\tau) \leq m \underset{4.5\,(ii)}{\Rightarrow} \underset{\text{wie oben}}{i_{L|K}(\sigma\tau) = i_{L|K}(\tau)} \Rightarrow$ ▨ Behauptung.

$$4.20 \Rightarrow i_{E|K}(\delta) \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{e(L|E)} \sum_{\tau \in N} \min\{i_{L|K}(\tau), m+1\}$$

$\{\sigma' \in G \mid \sigma'|_E = \delta\} = \sigma N$

$$= \frac{1}{\# N_0} \sum_{\tau \in N} \min\{\underline{i_{L|E}(\tau)}, m+1\} \underset{\substack{4.22 \\ \text{für } N}}{=} \phi_{L|E}(m) + 1$$

$(\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L \Rightarrow \mathcal{O}_E[x] = \mathcal{O}_L)$

$$= \max\{\phi_{L|E}(i_{L|K}(\sigma) - 1) \mid \sigma \in G, \sigma|_E = \delta\} + 1$$ ▨

ϕ konvex $\Rightarrow$ "$\max(\phi) = \phi(\max)$"

Korollar 4.24. (Herbrand's Theorem)

Sei $v = \phi_{L|E}(u)$. Dann: $$G_u N/N = \underbrace{(G/N)}_{= Gal(E|K)}{}_v$$

Beweis. (Notation wie in 4.23)

$$\delta \in G_u N/N \Leftrightarrow \max\{i_{L|K}(\sigma) - 1 \mid \sigma \in G, \sigma|_E = \delta\} \geq u$$

$$\underset{\substack{4.23, \\ \phi_{L|E} \text{ mon. wachs.}}}{\Leftrightarrow} i_{E|K}(\delta) - 1 \geq \phi_{L|E}(u) = v$$

$$\Leftrightarrow \delta \in (G/N)_v$$ ▨

Beweis von 4.19. (Transitivität

(nur für ϕ, da $\varphi = \phi^{-1}$..) Sei $u \in \mathbb{R}_{\geq -1} \setminus \mathbb{Z}$.

$$\frac{d}{dt}(\phi_{E|K} \circ \phi_{L|E})(u) = \phi'_{E|K}(v) \cdot \phi'_{L|E}(u) \qquad v := \phi_{L|E}(u) \underset{(4.16\, v)}{\notin} \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\#(Gal(E|K)_v)}{e(E|K)} \cdot \frac{\#(Gal(L|E)_u)}{e(L|E)} \underset{4.24}{=} \frac{\# G_uN/N \cdot \# Gal(L|E)_u}{e(L|K)}$$

$$\left(G_uN/N \cong G_u/N \cap G_u \cong G_u/N_u \right) \Rightarrow \quad = \frac{\# G_u/\# N_u \cdot \# N_u}{e(L|K)}$$

$$= \phi'_{L|K}(u)$$

Beweis von 4.18. Sei $v \in \mathbb{R}_{\geq -1}$, $x = \varphi_{E|K}(v)$, $w = \varphi_{L|E}(x) = \varphi_{L|K}(v)$

$$(G/N)^v \underset{\text{Def.}}{=} (G/N)_{\varphi_{E|K}(v)} = (G/N)_x \underset{\substack{4.24 \\ \phi_{L|E}(w) = x}}{=\!=} G_wN/N = G_{\varphi_{L|K}(v)}N/N$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} G^vN/N.$$

Satz. (Hasse-Arf, o. Beweis, s. Serre)

Ist $\underset{Gal(L|K)}{\overset{\shortparallel}{G}}$ abelsch, $v \in \mathbb{Q}$ ein Sprung der oberen Verzweigungs Filtrierung, so gilt: $v \in \mathbb{Z}$.

05. Abgeleitete Funktoren (von Modulkategorien)

Sei R ein (nicht-notw. kommutativer) Ring mit 1.

$_R\underline{\mathrm{Mod}} := R\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$: Kategorie der (Links-) R-Moduln.

Def. 5.1. $Ch^\bullet(R)$: Kategorie der (kohomologischen) Komplexe über $_R\underline{\mathrm{Mod}}$.

Objekte: $C^\bullet = (C^k, d^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ so dass $\forall k\in\mathbb{Z}$: $d^k: C^k \to C^{k+1}$ ein Morphismus in $_R\underline{\mathrm{Mod}}$ ist und $\forall k\in\mathbb{Z}$: $d^{k+1}\circ d^k = 0$.

Morphismen: $f^\bullet = (f^k)_{k\in\mathbb{Z}} : C^\bullet = (C^k, d^k)_{k\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \bar{C}^\bullet = (\bar{C}^k, \bar{d}^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sind $\forall k\in\mathbb{Z}$: Morphismen $f^k: C^k \to \bar{C}^k$ so dass $\bar{d}^i\circ f^i = f^{i+1}\circ d^i$.

Notation: Komplexe

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \bar{C}^{i-1} \arrow[r, "\bar{d}^{i-1}"] & \bar{C}^i \arrow[r, "\bar{d}^i"] & \bar{C}^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposition 5.2. $Ch^\bullet(R)$ ist eine abelsche Kategorie.

Struktur geg. durch:

Addition auf $\mathrm{Hom}_{Ch^\bullet(R)}(-,-)$: $(f^\bullet + g^\bullet)^i := f^i + g^i$

Null: Nullkomplex $\ldots \to 0 \to 0 \to \ldots \to 0 \to 0 \to \ldots$

Kern: zu $f^\bullet: C^\bullet \to \bar{C}^\bullet$ definiere Komplex $\ker f^\bullet := (\ker f^i, d^i|_{\ker f^i})_{i\in\mathbb{Z}}$ als Kern zu $f^\bullet$ mit Inklusion nach C.

Cokern: dual.

Bemerkung: Wg. Prop. 5.2. können von Exaktheit von Diagrammen $\bar{C}^\bullet \to C^\bullet \to \bar{\bar{C}}^\bullet$ von Komplexen reden. und von kurzen exakten Sequenzen $0 \to \bar{C}^\bullet \to C^\bullet \to \bar{\bar{C}}^\bullet \to 0$ in $Ch^\bullet(R)$.

Def. 5.3. Sei $C^\bullet = (C^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Ch^\bullet(R)$. Definiere

$Z^i := Z^i(C^\bullet) := \ker d^i$ (i-Kozykeln) $\quad (B^i \subseteq Z^i$ wg. $d^i\circ d^{i-1} = 0)$

$B^i := B^i(C^\bullet) := \mathrm{im}\, d^{i-1}$ (i-Koränder)

$H^i := H^i(C^\bullet) := Z^i(C^\bullet)/B^i(C^\bullet)$ (i-te Kohomologie)

C° heißt exakt oder azyklisch $:\Longleftrightarrow \forall i \in \mathbb{Z}: \; H^i(C^\circ) = 0.$

Für $f^\circ: C^\circ \to \bar{C}^\circ$ ein Morphismus in $Ch^\circ(R)$ gelten:

$$f^i(Z^i(C^\circ)) \subseteq Z^i(\bar{C}^\circ), \quad f^i(B^i(C^\circ)) \subseteq B^i(\bar{C}^\circ)$$

$\rightsquigarrow$ induzierte Abbildungen $\quad H^i(f^\circ): H^i(C^\circ) \longrightarrow H^i(\bar{C}^\circ)$

Proposition 5.4. $\forall i \in \mathbb{Z}: \; H^i(-): Ch^\circ(R) \to {}_R\underline{Mod}$ ist ein Funktor.

Bemerkung: Homologische Komplexe: $Ch_\bullet(R)$

Objekte: $\quad \dots \; C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \to \dots$

Z_i, B_i, H_i analog wie oben (z.B. $Z_i = \ker d_i$)

$$\underset{\text{Homologie}}{=} \quad Ch^\circ(R) \xrightarrow{\sim} Ch_\bullet(R): \; (C^i, d^i) \longmapsto \underset{Ch_{\leq 0}(R)}{(C_i, d_i)} \text{ mit } C_i := C^{-i}, \; d_i := d^{-i}$$

Kohomologie verwendet üblicherweise $Ch^{\geq 0}(R) \subseteq Ch^\circ(R)$, die Unterkategorie der Komplexe mit $(C^\circ)^i = 0 \quad \forall i < 0.$
$(C_\bullet)_i = 0 \quad \forall i > 0$

<u>Lange exakte Sequenzen.</u> Sei $\varepsilon: 0 \to \tilde{C}^\circ \to C^\circ \to \bar{C}^\circ \to 0$ exakt in $Ch^\circ(R)$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{C}^i \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{d}^i"] & C^i \arrow[r] \arrow[d, "d^i"] & \bar{C}^i \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}^i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{C}^{i+1} \arrow[r] & C^{i+1} \arrow[r] & \bar{C}^{i+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\quad \xrightarrow{\text{Schlangenlemma}} \quad
\begin{array}{l}
0 \to \tilde{Z}^i \to Z^i \to \bar{Z}^i \\
\tilde{C}^{i+1}/\tilde{B}^{i+1} \to C^{i+1}/B^{i+1} \to \bar{C}^{i+1}/\bar{B}^{i+1} \to 0
\end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{C}^i/\tilde{B}^i \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{d}^i"] & C^i/B^i \arrow[r] \arrow[d, "d^i"] & \bar{C}^i/\bar{B}^i \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}^i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{Z}^{i+1} \arrow[r] & Z^{i+1} \arrow[r] & \bar{Z}^{i+1} &
\end{tikzcd}
\quad \xrightarrow{\text{Schlangenlemma}} \quad
\begin{tikzcd}
H^i(\tilde{C}^\circ) \arrow[r] & H^i(C^\circ) \arrow[r] & H^i(\bar{C}^\circ) \arrow[dll, "\delta^i"'] \\
H^{i+1}(\tilde{C}^\circ) \arrow[r] & H^{i+1}(C^\circ) \arrow[r] & H^{i+1}(\bar{C}^\circ)
\end{tikzcd}$$

Satz 5.5. (a) Erhalten Randabbildungen $\delta^i = \delta^i_\varepsilon$ zu ε und lange exakte Kohomologiesequenz, hierbei sind $H^i(\tilde{C}^\circ) \to H^i(C^\circ)$ bzw. $H^i(C^\circ) \to H^i(\bar{C}^\circ)$ die Abb.'en die durch die Funktoren aus 5.4. gegeben sind.

(b) Morphismen von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[d] & 0 \arrow[r] & \bar{C}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\bar{h}^\bullet"] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h^\bullet"] & \bar{\bar{C}}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\bar{h}}^\bullet"] & 0 \\ \mathcal{E}' & 0 \arrow[r] & \bar{D}^\bullet \arrow[r] & D^\bullet \arrow[r] & \bar{\bar{D}}^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(in $Ch^\bullet(R)$) induzieren Morphismen zwischen den sich ergebenden langen ex. Sequenzen.

(genauer:
$$\begin{tikzcd} H^i(\bar{\bar{C}}^\bullet) \arrow[r, "\delta^i_{\mathcal{E}}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & H^{i+1}(\bar{C}^\bullet) \arrow[d] \\ H^i(\bar{\bar{D}}^\bullet) \arrow[r, "\delta^i_{\mathcal{E}'}"] & H^{i+1}(\bar{D}^\bullet) \end{tikzcd}$$
)

<u>Homotopie</u>:

Def. 5.6. (a) $f^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ in $Ch^\bullet(R)$ heißt 0-homotop $\iff$

$\exists$ (0-Homotopie) $(s^i : C^i \to D^{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$ mit s^i Morphismus in ${}_R\underline{Mod}$.

so dass $\forall i \in \mathbb{Z}$: $f^i - 0 = s^{i+1} \circ d^i_{C^\bullet} + d^{i-1}_{D^\bullet} \circ s^i$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C^i \arrow[r, "d^i_C"] \arrow[dl, "s^i"'] \arrow[d, "f^i"] & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, "s^{i+1}"] & \cdots \\ D^{i-1} \arrow[r] & D^i \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

(b) $f^\bullet, g^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ in $Ch^\bullet(R)$ heißen homotop $\underset{(f \sim g)}{:\iff}$ $f - g$ ist 0-homotop

Satz 5.7. (a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}_{Ch^\bullet(R)}(-,-)$

(b) $f^\bullet \sim g^\bullet \Rightarrow H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

(c) $id_{C^\bullet} \sim 0 \Rightarrow C^\bullet$ ist azyklisch.

<u>Bemerkung</u>. "Man" definiert $K^\bullet(R)$ als $Ch^\bullet(R)/\sim$ (Objekte dieselben, auf den Morphismen bildet man Äquivalenzklassen)

$K^\bullet(R)$ ist <u>selten</u> eine abelsche Kategorie (aber immer eine triangulierte Kategorie)

(abelsche Kategorie $\underset{??}{\iff}$ alle Objekte in ${}_R\underline{Mod}$ sind injektiv)

Auflösungen: Wdh. I injektiv $:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_R(-, I)$ exakter Funktor

P projektiv $:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ exakter Funktor

Sei R eine A-Algebra (A kommutativ!)

$F \in {}_R\mathrm{Mod}$ ist A-flach $:\Longleftrightarrow$ $F \otimes_A -$ ist exakter Funktor

Proposition. (a) ${}_R\mathrm{Mod}$ besitzt genügend injektive und genügend projektive

(b) Ist R A-flach, so besitzt ${}_R\mathrm{Mod}$ genügend viele A-flache

(alle proj. R-Moduln sind A-flach)

Bemerkung: Grothendieck-Kategorien besitzen genügend viele Injektive.

Def. 5.8. (a) Ein Komplex $I^\bullet \in Ch^{\geq 0}(R)$ zusammen mit einer Abbildung

$\varepsilon : M \longrightarrow I^0$ ($M \in {}_R\mathrm{Mod}$) heißt injektive Auflösung von M $:\Longleftrightarrow$

alle I^i sind injektiv und $0 \to \underset{-1}{M} \xrightarrow{\varepsilon} \underset{0}{I^0} \xrightarrow{d^0} \underset{1}{I^1} \to \cdots$ ist exakt.

(b) Sei $M \in {}_R\mathrm{Mod}$. Ein Komplex $P^\bullet \in Ch^{\leq 0}(R)$ zusammen mit einer Abbildung

$\varepsilon : P^0 \longrightarrow M$ heißt projektive Auflösung $:\Longleftrightarrow$ alle P^i sind projektiv und

$$\cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad \text{ist exakt.}$$

Notation: $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$, $\quad M \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$

Satz 5.9. (a) Jedes Objekt in ${}_R\mathrm{Mod}$ besitzt eine injektive Auflösung.

(b) zu $M \xrightarrow{\varphi} M'$ ein Morphismus in ${}_R\mathrm{Mod}$ $\exists$ inj. Auflösungen $M \to I^\bullet$, $M' \to I'^\bullet$

und eine Abbildung von Komplexen $\psi : I^\bullet \to I'^\bullet$ so dass

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & I^0 \arrow[d, "\psi^0"] \\ M' \arrow[r] & I'^0 \end{tikzcd}$$

(c) Die Abbildung $\psi : I^\bullet \to I'^\bullet$ (zu jeg. $\varphi : M \to M'$, zu jeg. $I^\bullet, I'^\bullet$) ist eindeutig

bis auf Homotopie.

(d) Es gelten analoge (duale) Aussagen für projektive Auflösungen

Derivierte Funktoren.

Sei $F : {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ ein additiver Funktor, (d.h. die Abbildungen

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(FM, FN) \quad \text{sind } \mathbb{Z}\text{-linear} \quad \forall M,N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}})$$
$$\varphi \longmapsto F\varphi$$

- F induziert additiver Funktor $Ch^\bullet(R) \to Ch^\bullet(\mathbb{Z})$

$$(C^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}} \longmapsto (FC^i, Fd^i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

Def. 5.10. (a) Sei $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ eine projektive Auflösung und für $\varphi : M \to M'$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ sei $\varphi : P^\bullet \to P^{\bullet\prime}$ Abbildung projektiver Auflösungen wie in 5.9.

Dann definiere $\quad (L_i F)(M) := H^{-i}(FP^\bullet) \quad \forall i \geq 0$

$$(L_iF)(\varphi) : (L_iF)(M) \longrightarrow (L_iF)(N) = H^{-i}(FP^\bullet \xrightarrow{F\varphi^\bullet} FP^{\bullet\prime})$$

(b) Sei $M \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ eine injektive Auflösung, und zu $M \xrightarrow{\varphi} M'$ sei $I^\bullet \xrightarrow{\varphi} I^{\bullet\prime}$ Abb. von Auflösungen. Definiere

$$(R^iF)(M) := H^i(FI^\bullet) \quad \text{und} \quad (R^iF)(\varphi) := H^i(FI^\bullet \xrightarrow{F\varphi^\bullet} FI^{\bullet\prime})$$

Proposition 5.11. $\forall i \geq 0$ erhält man Funktoren $R^iF, L_iF : {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$

<u>Idee</u>: (a) wähle $\forall M \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ projektive Auflösung $P_M^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_M} M$

und $\forall \varphi$ Morphismen von Moduln

$$\begin{tikzcd} P_M^\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & M \arrow[d] \\ P_{M'}^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[d] \\ P_{M''}^\bullet \arrow[r] & M'' \end{tikzcd}$$

Wissen: $\downarrow\downarrow$ und $($ sind homotop

$\underset{5.9}{\Longrightarrow}$ induz. Abb'en $(L_iF)(M) \longrightarrow (L_iF)(M')$ sind dieselben.

Horseshoe Lemma. Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakte Sequenz in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$, so existiert eine kurze exakte Sequenz von proj. Auflösungen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^{\bullet\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & P^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & P^{\bullet\prime\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und von injektiven Auflösungen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I^{\bullet\prime} \arrow[r] & I^\bullet \arrow[r] & I^{\bullet\prime\prime} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Beweis ist ein Induktionsargument. In jedem Schritt (z.B. projektiv)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^{\circ\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\text{surj.}\ \alpha'"] & P^{\circ} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha'\oplus\hat{\alpha}"] & P^{\circ\prime\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''\ \text{surj.}"] \arrow[dl, dashed, "\exists\hat{\alpha}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Hufeisen

Bemerkung. $\forall i$: $\quad 0 \to P^{-i\prime} \to P^{-i} \to P^{-i\prime\prime} \to 0$ spaltet

$\Rightarrow F(\quad \text{—} \;''\; \text{—} \quad)$ spaltet, ist also exakt!

$\Rightarrow \quad 0 \to FP^{-i\prime} \to FP^{-i} \to FP^{-i\prime\prime} \to 0$ exakt!!

Satz 5.12. Erhalten lange exakte Kohomologiesequenzen

z.B. $\quad 0 \to R^0FM' \to R^0FM \to R^0FM'' \to R^1FM' \to R^1FM \to \ldots$

(lange exakte Kohomologiesequenz zu $\quad 0 \to FI^{\circ\prime} \to FI^{\circ} \to FI^{\circ\prime\prime} \to 0$)

F heißt rechtsexakt (kovariant) $:\Leftrightarrow$ $\forall$ rechts ex. Sequenzen $M' \to M \to M'' \to 0$ ist $FM' \to FM \to FM'' \to 0$ rechtsexakt.

(analog linksexakt)

Lemma 5.13. (a) F rechtsexakt $\Rightarrow$ $L_0F(M) = M$ (kanonisch)

und $(L_iF)(P) = 0 \quad \forall i > 0$ falls P projektiv

(b) die duale Aussage für F linksexakt; $R^0F(M)$ und für Injektive.

Beweis. (a) Proj. Auflösung $\quad \ldots \to P^{-1} \to P^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ (rechtsexakt)

$\xrightarrow{F \text{ rechtsexakt}} \quad \ldots \to FP^{-1} \to FP^0 \to FM \to 0$

$\Rightarrow H^0(FP) = \dfrac{FP^0}{Fd^{-1}(FP^{-1})} \underset{\text{via } \varepsilon}{\overset{\text{kanonisch}}{=}} FM.$

(i) Ist P projektiv, so ist $\underset{-3}{0} \to \underset{-2}{0} \to \underset{-1}{0} \to \underset{0}{P} \xrightarrow{\text{id}} \underset{1}{P}$ projektive Auflösung.

$\blacksquare$

Bemerkung. Sei F kontravariant, $F: {}_R\text{Mod}^{op} \to \underline{Ab}$

1) $I \in {}_R\text{Mod}$ injektiv $\iff$ $I \in {}_R\text{Mod}^{op}$ projektiv

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$\text{Hom}_{{}_R\text{Mod}}(\cdot, I)$ exakt $\qquad$ $\text{Hom}_{{}_R\text{Mod}^{op}}(I, \cdot)$ exakt

2) F linksexakt: $\quad 0 \to M' \to M \to M''$ in ${}_R\underline{\text{Mod}}^{op}$ exakt

$\Rightarrow 0 \to FM' \to FM \to FM''$ in $\underline{Ab}$ exakt, d.h.:

$M'' \to M \to M' \to 0$ in ${}_R\underline{\text{Mod}}$ exakt $\Rightarrow$ $0 \to FM' \to FM \to FM''$ in $\underline{Ab}$ exakt

d.h. Für F linksexakt, kontravariant, definiere $(R^iF)(M) := H^i(FP^\bullet)$

mit $M \to P^\bullet$ inj. Auflösung in ${}_R\underline{\text{Mod}}^{op}$

$\leftrightarrow$ $P^\bullet \to M$ proj. Auflösung in ${}_R\underline{\text{Mod}}$.

Ext.

$\forall N \in {}_R\underline{\text{Mod}}$: $\quad \text{Hom}_R(\cdot, N): {}_R\underline{\text{Mod}}^{op} \to \underline{Ab}$ ist linksexakt.

$\forall M \in {}_R\underline{\text{Mod}}$: $\quad \text{Hom}_R(M, \cdot): {}_R\underline{\text{Mod}} \to \underline{Ab}$ ist linksexakt.

Def. 5.14.

- $\text{Ext}^i_R(\cdot, N) := R^i(\text{Hom}_R(\cdot, N))$ (Auflösung mit projektiven)

- $\overline{\text{Ext}}^i_R(M, \cdot) := R^i(\text{Hom}_R(M, \cdot))$ (Auflösung mit injektiven)

Satz 5.15. (aus 5.12, 5.13)

Ist $0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0$ in ${}_R\underline{\text{Mod}}$ exakt, so

$\exists$ lange exakte Sequenz $\quad 0 \to \text{Hom}_R(M, Q') \to \text{Hom}_R(M, Q) \to \text{Hom}_R(M, Q'') \to \overline{\text{Ext}}^1_R(M, Q') \to$

$\exists$ lange exakte Sequenz $\quad 0 \to \text{Hom}_R(Q'', N) \to \text{Hom}_R(Q, N) \to \text{Hom}_R(Q', N) \to \text{Ext}^1_R(Q'', N) \to \dots$

Weiter gelten: $\overline{\text{Ext}}^i(M, Q) = 0$ falls Q injektiv und $i \geq 1$.

$\text{Ext}^i(Q, N) = 0$ falls Q projektiv und $i \geq 1$.

Bem. $\text{Ext}^1_R(Q, N) = 0$ $\forall N \in {}_R\underline{\text{Mod}}$ $\Rightarrow$ Q projektiv (analog $\overline{\text{Ext}}^1_R \dots$)

Interpretation von Ext^1_R und $\overline{\mathrm{Ext}}^1_R$:

Definiere $\quad \mathrm{Ext}^1_R(M,N) := \{ \text{kurze ex. Seq. } \varepsilon : 0 \to N \to E \to M \text{ in } {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \} /\sim$

wobei $\varepsilon \sim \varepsilon' :\Leftrightarrow \exists$ komm. Diagramm:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & E \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & M \arrow[r] & 0 & \text{in } {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \\ & & E' \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

5-Lemma $\Rightarrow$ φ Isomorphismus

Ü: $\sim$ ist Äquivalenzrelation.

Addition auf $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$: (Baer, Summe)

Definiere $\quad \varepsilon +_B \varepsilon'$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N\oplus N \arrow[r] \arrow[d, "+"] & E\oplus E' \arrow[r] \arrow[d] & M\oplus M \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \mathrm{P.O.} \arrow[r] & M\oplus M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[u, "="] & \mathrm{P.B.} \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u, "\Delta = \mathrm{Diag.}"'] & 0 \end{tikzcd}$$

P.O.: Pushout

P.B.: Pullback.

Satz 5.16. (Jacobson BA II, 6.9)

$\exists$ nat. Isomorphismus: $\quad \left(\mathrm{Ext}^1_R(M,N), +_B\right) \cong \left(\mathrm{Ext}^1_R(M,N), +\right) \cong \left(\overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,N), +\right)$.

$\blacksquare$

Ausblick: Doppelkomplexe.

Def. Ein Doppelkomplex (in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$) ist ein Tupel

$$C^{\bullet\bullet} = \left(C^{i,j},\ d_h^{i,j},\ d_v^{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \qquad \text{(s. Weibel A.A)}$$

so dass $\quad \forall (i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: \quad d_h^{i,j} : C^{i,j} \to C^{i+1,j}, \quad d_v^{i,j} : C^{i,j} \to C^{i,j+1}$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$

erfüllen: $\quad d_h^{i+1,j}\circ d_h^{i,j} = 0$ und $d_v^{i,j+1}\circ d_v^{i,j} = 0$ und $d_v^{i+1,j}\circ d_h^{i,j} + d_h^{i,j+1}\circ d_v^{i,j} = 0.$

Darstellung als "Gitter":

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C^{i,j+1} \arrow[r, "d_h^{i,j+1}"'] & C^{i+1,j+1} \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C^{i,j} \arrow[u, "d_v^{i,j}"] \arrow[r, "d_h^{i,j}"'] & C^{i+1,j} \arrow[u, "d_v^{i+1,j}"] \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

(1) $\Rightarrow$ alle Zeilen sind Komplexe

(2) $\Rightarrow$ alle Spalten sind Komplexe

(3) $\Rightarrow$ $(d_h^{i,j}(-1)^j)_{j\in\mathbb{Z}}$ und $(d_v^{i,j}\circ(-1)^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sind Abbildungen von Komplexen in benachbarten Spalten (i und $i+1$) bzw. Zeilen (j und $j+1$)

Def. Der Totalkomplex eines Doppelkomplexes $C^{i,j}$ ist $\operatorname{Tot} C^{\cdot\cdot} := TC^{\cdot}$ definiert durch

$$TC^i := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} C^{i-j,j} \quad \text{und} \quad d_{TC^{\cdot}}^i : TC^i \to TC^{i+1} \quad \text{dabei ist}$$

$d_{TC^{\cdot}}^i$ ist die Summe (über alle j) der Abbildungen

$$C^{i-j,j} \xrightarrow[d_h^{i-j,j}\oplus d_v^{i-j,j}]{} C^{i-j+1,j} \oplus C^{i-j,j+1} \hookrightarrow TC^{i+1}$$

—

Wir betrachten hier nur Doppelkomplexe für welche (F) gilt.

(F) $\forall n\in\mathbb{Z}: \#\{(i,j) \mid C^{i,j}\neq 0 \text{ und } i+j=n\} < \infty$ ($\Rightarrow$ irrelevant ob $\bigoplus$ oder $\prod$)

Def. Ein Morphismus $D^{\cdot} \xrightarrow{f^{\cdot}} D'^{\cdot}$ in $Ch^{\cdot}(R)$ heißt Quasi-Isomorphismus $:\Leftrightarrow$

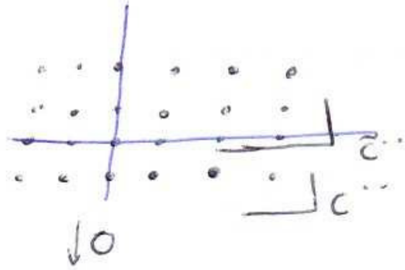
$\forall i\in\mathbb{Z}$: $H^i(f^{\cdot}) : H^i(D^{\cdot}) \to H^i(D'^{\cdot})$ ist Isomorphismus.

<u>Ü</u>: (a) $\operatorname{Tot} : \underbrace{Ch^{\cdot,\cdot}(R)}_{\text{abelsche Kategorie}} \to Ch^{\cdot}(R)$ ist ein additiver Funktor abelscher Kategorien.

(b) Gilt (F), so ist Tot exakt und es gilt weiter: Sind alle Zeilen oder alle Spalten in $C^{\cdot,\cdot}$ exakt, so ist $\operatorname{Tot} C^{\cdot,\cdot}$ exakt.

(c) Gilt in (b) zusätzlich: alle Spalten von $C^{\cdot,\cdot}$ exakt und $C^{i,j}=0\ \forall j\leq -2$ und ist $\tilde{C}^{\cdot,\cdot}$ der Doppelkomplex mit $\tilde{C}^{i,j} := C^{i,j}\ \forall j\geq 0$ und $\tilde{C}^{i,j}=0\ \forall j<0$, Dann ex. ein "natürlicher" Quasi-Isomorphismus

$$\mathrm{Tot}\,\tilde{C} \longleftarrow (C^{j,-1})_{j\in\mathbb{Z}} \quad \text{in } Ch^{\cdot}(R)$$



Beispiel: $M, N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$.

$P^{\cdot} \to M$ proj. Auflösung $(\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^{0} \to 0 \to \cdots)$

$N \to I^{\cdot}$ inj. Auflösung $(\cdots 0 \to 0 \to \_ \to I^{0} \to I^{1} \to \cdots)$

$C^{\cdot,\cdot} := \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot})$ ist ein Doppelkomplex!

$$\begin{array}{ccc} C^{i,j} = \mathrm{Hom}_R(P^{-i}, I^{j}) & \longrightarrow & C^{i+1,j} = \mathrm{Hom}_R(P^{-i-1}, I^{j}) \\ \varphi & & \varphi \mapsto \varphi \circ d_{P^{\cdot}}^{-i-1} \circ (-1)^{j} \\ \downarrow & & \\ d_{I^{\cdot}}^{j} \circ \varphi & & \\ C^{i,j+1} = \mathrm{Hom}_R(P^{-i}, I^{j+1}) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\mathrm{Hom}(M, I^{\cdot}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot})} & \leftarrow & \text{hat exakte Zeilen} \\ \uparrow \qquad\qquad \uparrow & & \\ \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, N) & \leftarrow & \text{hat exakte Spalten.} \end{array}$$

2 Doppelkomplexe $\rightarrow$

Ü (c) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(M, I^{\cdot}) & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot})) \\ \swarrow & & \uparrow \\ \mathrm{Ext}^{i}(M,N) & & \mathrm{Hom}(P^{\cdot}, N) \\ & & \rightsquigarrow \overline{\mathrm{Ext}}^{i}(M,N) \end{array}$$

sind Quasi-Isomorphismen

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Ext}^{i}(M,N) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^{i}(M,N).$$

Erweiterung: $0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0$ exakt in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ und

$0 \to I'^{\cdot} \to I^{\cdot} \to I''^{\cdot} \to 0$ exakte Seq. von injektiven Auflösungen (horse shoe lemma)

erhalten Morphismen von kurzen exakten Sequenzen von Komplexen!

$$\begin{array}{c} 0 \to \mathrm{Hom}(M, I'^{\bullet}) \to \mathrm{Hom}(M, I^{\bullet}) \to \mathrm{Hom}(M, I''^{\bullet}) \to 0 \\ \downarrow q\text{-iso} \\ \uparrow q\text{-iso} \\ 0 \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q') \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q) \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q'') \to 0 \end{array}$$

$\leadsto$ Isomorphismus langer ex. Kohomologiesequenzen

<u>Satz</u> 5.17. $\forall i \geq 0 : \forall M, N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $\exists$ in (M,N) funktorielle Iso's

$\mathrm{Ext}^i(M,N) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N)$ und die langen ex. Kohomologiesequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots \to & \mathrm{Ext}^i(M,N') & \to & \mathrm{Ext}^i(M,N) & \to & \mathrm{Ext}^i(M,N'') & \to & \mathrm{Ext}^{i+1}(M,N') & \to \dots \\ & \downarrow\wr & /\!/\!/ & \downarrow\wr & /\!/\!/ & \downarrow\wr & /\!/\!/ & \downarrow\wr & \\ \dots \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N') & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N) & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N'') & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^{i+1}(M,N') & \to \dots \end{array}$$

<u>Tor.</u> A kommutativer Ring, $A \to R$ eine A-Algebra <u>und</u> R sei A-flach.

<u>Wissen:</u> Die Funktoren ${}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $M \otimes_A -$, $- \otimes_A N$ sind rechtsexakt.

Def. 5.18. $\mathrm{Tor}_i^A(M, \cdot) := L_i(M \otimes_A \cdot)$

$\overline{\mathrm{Tor}}_i^A(\cdot, N) := L_i(\cdot \otimes_A N)$

Satz. 5.19. (i) Erhalten lange ex. Sequenz in beiden Argumenten

(ii) $Q \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ ist A-flach $\iff \forall i \geq 1: \mathrm{Tor}_i^A(Q, N) = 0 \;\forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$

$\iff \forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}: \mathrm{Tor}_1^A(Q, N) = 0$

(iii) $\mathrm{Tor}_i^A \cong \overline{\mathrm{Tor}}_i^A$. (nat. isomorph)

06. Gruppenkohomologie

· G Gruppe, $\mathbb{Z}[G]$ Gruppenring zu G, d.h.

$$\mathbb{Z}[G] := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}[g] \quad (\text{freier } \mathbb{Z}\text{-Modul mit Basis } G)$$

als additive Gruppe.

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right) := \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}\right) g$$

$\mathbb{Z}[G]$ ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra, 0 klar, $1 = 1\cdot e$.

Def. 6.1. Ein G-Modul ist ein (links) $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

schreibe $\mathrm{Hom}_G(\cdot,\cdot)$ für $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\cdot,\cdot)$, ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ für ${}_{\mathbb{Z}[G]}\underline{\mathrm{Mod}}$ (manchmal auch $\underline{\mathrm{Mod}}_G$, $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{Z}[G]}$)

Alternativ: M trägt $\mathbb{Z}$-lineare Links-Operation von G:

$\cdot : G\times M \to M$, diese erfüllt $g(m_1+m_2) = gm_1 + gm_2$

Def. 6.2. Ein G-Modul M heißt trivial $:\Leftrightarrow \forall g\in G: \forall m\in M: g\cdot m = m$.

Bsp: Schreibe $\mathbb{Z}$ (auch) für den trivialen G-Modul.

Lemma 6.3. Sei $\varepsilon := \varepsilon_G : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$, $\sum_g a_g g \mapsto \sum_g a_g$ die Augmentationsabbildung.

Dann ist $I_G := \ker \varepsilon_G$ das Augmentationsideal. Es ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis

$B = \{ g-1 \mid g \in G \setminus \{e\} \}$

Beweis. B $\mathbb{Z}$ l.u.: ✓ $\underline{B \text{ ES von } I_G}$: $x = \sum_g a_g g \in I_G \Leftrightarrow \sum_g a_g = 0 \Rightarrow x = x - 0\cdot 1$
$= \sum_g a_g(g-1)$ ☒

Def. 6.4. Sei M ein G-Modul.

(i) $M^G := \{ m\in M \mid \forall g\in G: gm = m\}$ der Untermodul der G-Invarianten von M.

(ii) $M_G := M/I_G M$ der Faktormodul der G-Koinvarianten von M.

Bemerkung: (i) (*) $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \cong M^G$ $(\varphi \mapsto \varphi(1))$

(ii) (**) $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \cong M/I_G M = M_G$.

Funktoren ${}_G\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$

Nachtrag zu $\otimes$: $A \to R$, $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$ ($\otimes_A$) behandelt

2. Möglichkeit für Tor_i zu $\otimes$: verwende $\otimes_R$

$${}_{R^{op}}\underline{\mathrm{Mod}} \times {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}} \quad \text{(bifunktor)}$$

Bem: ${}_{R^{op}}\underline{\mathrm{Mod}} \cong \underline{\mathrm{Mod}}_R$ Rechtsmoduln

Erhalten: $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = L_i(- \otimes_R N)(M) \overset{\text{Thm.}}{=} (L_i(M \otimes_R -))(N)$.

Es gelten analoge Aussagen zu 5.19.

Proposition. ${}_{\mathbb{Z}[G]}\underline{\mathrm{Mod}} \xrightarrow{\sim} {}_{\mathbb{Z}[G^{op}]}\underline{\mathrm{Mod}} = {}_{\mathbb{Z}[G]^{op}}\underline{\mathrm{Mod}}$ ist ein Isomorphismus von Kategorien unter folgendem Funktor.

$$(M, \cdot : G \times M \to M) \longmapsto (M, \cdot' : M \times G \to M, (m,g) \mapsto g^{-1}m)$$

Bsp. Sei $N_G := \sum_{g \in G} g$, falls G endlich, $N_G = 0$ sonst. Dann:

(a) $\mathbb{Z}[G]^G = \mathbb{Z} \cdot N_G$ (b) $\mathbb{Z}[G]_G \cong \mathbb{Z}$ via Augmentationsabb.

Gruppen (Ko-)Homologie.

Sei M ein G-Modul.

Def. 6.5.

$$H^i(G,M) := \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \overset{(*)}{=} (R^i(-)^G)(M)$$

$$H_i(G,M) := \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \overset{(**)}{=} (L_i(-)_G)(M)$$

Können kohomologischen Formalismus von Ext und Tor auf $H^i(G,\cdot)$ und $H_i(G,\cdot)$ anwenden ...

Explizite Beschreibung: (nur für Kohomologie)

Für $i \geq 0$ sei $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$ ein G-Modul durch $g \cdot (g_0, \dots, g_i) := (gg_0, \dots, gg_i)$

Lemma 6.6. $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$ ist ein freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul mit Basis $\{(1, g_1, \dots, g_i) \mid (g_1, \dots, g_i) \in G^i\}$

Lemma 6.7. Der Komplex Std_G in $\mathrm{Ch}^\bullet({}_G\underline{\mathrm{Mod}})$

$$\mathbb{Z}[G^{i+1}] \xrightarrow{d^{-i}} \mathbb{Z}[G^i] \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}[G^2] \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow 0 \qquad \text{mit}$$

$-i \qquad\qquad -1 \qquad 0$

$$d^{-i}((g_0, \ldots, g_i)) := \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (g_0, \ldots, g_{j-1}, g_{j+1}, \ldots, g_i)$$

Zusammen mit $\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ ist eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ (als triviales G-Modul!)

Beweis.

$$d^{i+1} \circ d^{i} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \qquad (\text{i in Vorzeichen} \ldots)$$

Auflösung: Zeige dazu $Std_G \to \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$ ist nullhomotop.

Zeige dazu dass die Abb'en $s^{-i} : \mathbb{Z}[G^{i+1}] \to \mathbb{Z}[G^{i+2}]$, $(g_0, \ldots, g_i) \mapsto (1, g_0, \ldots, g_i)$ (i "$\in \mathbb{Z}$") eine Nullhomotopie ist.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathbb{Z}[G^{i+1}] \arrow[r, "d^{-i}"] \arrow[dl, "s^{-i}"'] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z}[G^{i}] \arrow[r] \arrow[dl, "s^{-i+1}"] & \ldots \\
\mathbb{Z}[G^{i+2}] \arrow[r, "d^{-i-1}"'] & \mathbb{Z}[G^{i+1}] \arrow[r] & \ldots &
\end{tikzcd}$$

$$id_{\mathbb{Z}[G^{i+1}]} = d^{-i-1} \circ s^{-i} + s^{-i+1} \circ d^{-i}.$$

$\blacksquare$

Bar-Auflösung: Es gilt: $Bar_G = Std_G$.

Lemma 6.7.b. (ii) (a) Die Elemente $[g_1 | \ldots | g_i] := (1, g_1, g_1 g_2, \ldots, g_1 g_2 g_3 \cdots g_i)$ für $(g_1, \ldots, g_i) \in G^i$ bilden eine $\mathbb{Z}[G]$-Basis von $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$.

(b) Es gilt:

$$d^{-i}[g_1 | \ldots | g_i] = g_1 [g_2 | \ldots | g_i] + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j [g_1 | \ldots | \hat{g}_j | g_j g_{j+1} | g_{j+2} | \ldots g_i] + (-1)^i [g_1 | \ldots | g_{i-1}].$$

$\blacksquare$

Für $M \in {}_G\underline{Mod}$ gilt: $H^i(G, M) = H^i(\underbrace{Hom_G(Bar_G, M)}_{\text{in } Ch^\bullet(\mathbb{Z})})$

$\| ?$

Beh.:

$$Hom_G(Bar_G^{-i}, M) \xleftarrow[\sim]{\phi} Abb(G^i, M) =: C^i(G, M) \quad \text{ist } \mathbb{Z}\text{-linearer Isomorphismus.}$$

$$F = \phi(f) \longleftarrow f$$

Dabei: $G^0 := \{e\}$.

mit $F(g_0[g_1 | \ldots | g_i]) := g_0 f(g_1, \ldots, g_i)$.

Erhalten: induzierte Differentiale $\bar{d}^i : C^i(G,M) \longrightarrow C^{i+1}(G,M)$
$$f \longmapsto (\phi^{-1} \circ d^{-i} \circ \phi)(f)$$

$$\text{explizit: } (\bar{d}^i f)(g_0,\dots,g_i) = g_0 f(g_1,\dots,g_i) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(g_0,\dots,\hat{g}_j, g_j g_{j+1}, g_{j+2},\dots,g_i)$$

(ü).
$$+ (-1)^{i+1} f(g_0,\dots,g_{i-1}).$$

Def. $Z^i(G,M) := \ker \bar{d}^i$, $B^i(G,M) := \operatorname{im} \bar{d}^{i-1}$

$\bar{H}^i(G,M) := Z^i(G,M) / B^i(G,M)$

Für $M \to M'$ G-Modul-Homomorphismus erhalten $C^i(G,M) \to C^i(G,M') \rightsquigarrow \bar{H}^i(G,M) \to \bar{H}^i(G,M')$

Proposition 6.8. • Erhalten Kettenkomplexe $(C^i(G,M), \bar{d}^i)_{i\in\mathbb{Z}}$

• Haben natürliche Isom'en (nach Wahl von Bar_G)
$$H^i(G,M) \xrightarrow{\sim} \bar{H}^i(G,M) \quad + \text{ Funktorialität für } M \to M'.$$

Proposition 6.9. + Kompatibilität für lange exakte Sequenzen

Beweis. obige Überlegungen + 5.17. ∎

Übung 6.10.
• $\bar{H}^0(G,M) = Z^0(G,M) = M^G$ (Randabb.: $m \mapsto gm - m$)

• $Z^1(G,M) = \{ f : G \to M \mid f(gh) = gf(h) + f(g) \ \forall g,h \in G \}$

• Ist M trivial als G-Modul, so gilt $B^1(G,M) = 0$. und folglich
$$\bar{H}^1(G,M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G,M) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ab}}}(G^{ab}, M)$$

Gruppenextensionen.

$$1 \to \underbrace{A}_{\substack{\text{abelscher} \\ \text{Normalteiler}}} \to E \to G \to 1 \quad : \text{Erweiterung von } G \text{ um } A$$
$\rightsquigarrow$ A ist G-Modul via Konjugation.

$$\{\text{Erweiterung von } G \text{ um } A\} /_{\cong} \ \overset{=}{\underset{\text{Satz}}{}} \ H^2(G,A).$$

"triviale Erw." $\ ? \longleftarrow\!\!\longleftarrow \ 0$

triviale Erw.: sind die semidirekten Produkte.

Induzierte Moduln & Shapiro's Lemma.

Def. 6.11. $H \leq G$ Untergruppe, B ein H-Modul.

$$\mathrm{Ind}_H^G(B) := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} B \quad ; \quad \mathrm{CoInd}_H^G(B) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], B) \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$$

mit $g(\alpha \otimes b) := g\alpha \otimes b$ sowie $(gf)(\alpha) := f(\alpha g)$

heißen induzierte bzw. koinduzierte Darstellungen zu B von H auf G.

Lemma 6.12. Sei $(-)|_H := \mathrm{Res}_G^H : {}_G\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_H\underline{\mathrm{Mod}}$ der Restriktionsfunktor. Dann gilt:

(a) $\mathrm{Ind}_H^G \dashv \mathrm{Res}_G^H$ (b) $\mathrm{Res}_G^H \dashv \mathrm{CoInd}_H^G$

Beweis.

Adjunktion von $\otimes$ und Hom:

$$\mathrm{Hom}_R({}_RL_S \otimes_S {}_SM, {}_RN) \simeq \mathrm{Hom}_S({}_SM, \mathrm{Hom}_R({}_RL_S, {}_RN))$$

sowie $R \otimes_R M \cong M \cong \mathrm{Hom}_R(R, M)$ für:

(a) ${}_RL_S = {}_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G]_{\mathbb{Z}[H]}$, ${}_{\mathbb{Z}[H]}M = B$, ${}_{\mathbb{Z}[G]}N = A$.

(b) andere Wahlen...

Bemerkung 6.13. $H \leq G$ Untergruppe $\Rightarrow$ Std_G ist proj. Auflösung von $\mathbb{Z}$ als H-Modul. Denn: $\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{g \in {}_H\backslash G} g\mathbb{Z}[H]$ ist freier $\mathbb{Z}[H]$-Modul. $\square$

Satz 6.14. (Shapiro's Lemma) $H \leq G$ Untergruppe

$\forall i \geq 0$ $\exists$ Isom'en $H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G(B)) \cong H_i(H, B)$ und $H^i(G, \mathrm{CoInd}_H^G(B)) \cong H^i(H, B)$

(funktoriell im Argument B).

Beweis.

$$H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G(B)) \simeq H^{-i}(\mathrm{Std}_G \otimes_G \mathrm{Ind}_H^G B) \cong H^{-i}(\mathrm{Std}_G \otimes_G (\mathbb{Z}[G] \otimes_H B))$$

$$\cong H^{-i}(\underbrace{\mathrm{Std}_G|_H}_{\substack{\text{proj. Auflösung} \\ \text{von } \mathbb{Z} \text{ als } H\text{-Modul}}} \otimes_H B) \underset{6.13.}{=} H_i(H, B).$$

H^i analog; verwendet 6.12 und 6.13! $\left(\ldots = H^i(\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Std}_G, \mathrm{CoInd}_H^G B)) \underset{6.12}{=} H^i(\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Std}_G|_H, B)) = \ldots\right)$ $\square$

Lemma 6.15. Ist $H \leq G$ von endlichem Index, so ist

$$\chi : \mathrm{CoInd}_H^G B \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G B, \quad \varphi \longmapsto \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} \otimes \varphi(g)$$

ein wohl-definierter G-Modulisomorphismus.

Beweis.
- prüfe: χ ist wohldefiniert.
- G-Modul homomorphismus: ✓ $(\varphi(\underbrace{gg'}_{=\tilde{g}}) \quad \rightsquigarrow g = \tilde{g}(g'^{-1})$
- Für Iso: Inverse Abbildung:

$$\beta = \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} \otimes b_g \longmapsto f_\beta : \begin{cases} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow B \\ g \longmapsto b_g \end{cases} \quad \text{und } H\text{-äquivariant.}$$

*aus Repräsentantensystem

$\boxtimes$

Def. 6.16. Ein G-Modul M heißt (co-)induziert :⟺ $\exists X \in \underline{Ab}$ (als $\mathbb{Z}[\{e\}]$-Modul):

$$M \cong \mathrm{CoInd}_{\{e\}}^G X = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X$$

25.05.18

<u>Nachtrag:</u>

$$(\underbrace{\mathbb{Z}[G]}_{=:M}, \cdot : \underset{(m,g) \longmapsto g^{-1}m}{M \times G \longrightarrow M}) \cong (\underbrace{\mathbb{Z}[G]}_{=:M}, \cdot : \underset{(m,g) \longmapsto m \cdot g}{M \times G \longrightarrow M}) \quad \text{als rechts-Moduln}$$

$$\sum_g a_g g \longmapsto \sum_g a_g g^{-1}$$

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)$ $\quad (gf)(\alpha) = f(\alpha g)$ $\quad$ (f erfüllt $f(h\alpha) = hf(\alpha)$)

alternativ $\quad (gf)(\alpha) = f(g^{-1}\alpha)$ $\quad$ (f erfüllt $f(\alpha h^{-1}) = hf(\alpha)$)

Bemerkung. $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X \cong \mathrm{Ind}^G X$ als G-Modul

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} X \cong \mathrm{CoInd}^G X$

Def. 6.17. Ein G-Modul A heißt G-(Ko-)azyklisch :⟺ $H_i^{i}(G, A) = 0 \ \forall i > 0$

Bemerkung. $H^i(\{e\}, M) = H_i(\{e\}, M) = \begin{cases} M, & i=0 \\ 0, & i>0 \end{cases}$, denn:

$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(\underset{\text{projektiv}}{\mathbb{Z}}, M) = 0 \ \forall i > 0$, $\quad \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\underset{\text{projektiv}}{\mathbb{Z}}, M) = 0 \ \forall i > 0$

Korollar 6.18. (zu Shapiro + Bem.)

(Ko-)induzierte Moduln sind (Ko-)azyklisch.

Beweis. (z.B. Ko-)

$$H^i(G, \mathrm{CoInd}^G M) \underset{\text{Shap.}}{\cong} H^i(\{e\}, M) \ldots$$

Bemerkung. Mit (Ko)azyklischen Auflösungen kann man (Ko-)Homologie berechnen!

<u>Skizze</u>.

$$\left.\begin{array}{c} \text{azykl. Aufl.} \longrightarrow A \longrightarrow M \\ \uparrow \\ P^{\bullet\bullet} \end{array}\right\} \text{quasiiso.} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{Aufl.}"] & M \\ \mathrm{Tot}\,P \arrow[u] \arrow[ur, "\text{Aufl.}"'] & \end{tikzcd}$$

Doppelkomplex, spaltenweise Auflösung von A.

$(F = \mathbb{Z} \otimes_G -)$

$FP \longrightarrow FA$ - spaltenweise exakt, da die A^{-i} azyklisch!

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c} FA \\ \Big\uparrow \text{quasi-iso} \\ \mathrm{Tot}\,FP = F(\mathrm{Tot}\,P) \end{array} \qquad \begin{array}{c} FA \text{ berechnet Homologie} \\ \Uparrow \\ \leftarrow \text{Berechnet Homologie} \end{array}$$

<u>Tate Kohomologie</u> Sei G eine <u>endliche</u> Gruppe.

Sei $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung, mit P^{-i} endl. erz. über $\mathbb{Z}[G]$ ($\Rightarrow$ über $\mathbb{Z}$, da G endlich)

Lemma 6.19. Sei M ein endl. erz., projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul, $N \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$. Dann:

(a) $M^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ mit $(g\varphi)(m) := \varphi(g^{-1}m)$ ist endl.-erz., projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

(b) $\psi : M \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M^*, N)$, $m \otimes n \longmapsto (f_{m\otimes n} : \varphi \longmapsto \varphi(m) \cdot n)$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln.

(c) Man hat Isomorphismen $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \underset{(*)}{\longrightarrow} (M \otimes_{\mathbb{Z}} N)^G \underset{(\text{aus } b)}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}_G(M^*, N)$ (von ab. Gruppen!)

wobei $(*)$ $m \otimes n \longmapsto \sum_{g \in G} g^{-1}m \otimes gn$ und M in $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ ist ein rechts-G-Modul durch $m \cdot g := g^{-1}m$

<u>Bem.</u> G-op. in (b) ist gg. durch $(gf)(\varphi) = g f(g^{-1}\varphi)$

<u>Beweis.</u> (0) M^* ist ein G-Modul.

(a) Falls $M = \mathbb{Z}[G]$: $\mathbb{Z}[G]^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \underset{\substack{\text{verwende} \\ \text{Nachtrag}}}{=} \mathrm{CoInd}^G \mathbb{Z} \cong \mathrm{Ind}^G \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[G]$

M beliebig: $M \oplus M' \cong \mathbb{Z}[G]^r \quad (r \in \mathbb{N}) \overset{1.\ \text{Fall}}{\Longrightarrow} M^* \oplus (M')^* \cong \mathbb{Z}[G]^r$

$\Rightarrow M^*$ projektiv.

(b) G-Operation: $g(m \otimes n) = gm \otimes gn, \quad (gf)(\varphi) = g \cdot f(g^{-1}\varphi)$

G-Äquivarianz: $\Psi(g(m\otimes n))(\varphi) = \Psi(gm \otimes gn)(\varphi) = \varphi(gm) \cdot gn$ $\quad \| \quad (h\varphi)(m) = \varphi(h^{-1}m)$

$$(g \cdot \Psi(m\otimes n))(\varphi) = g(\Psi(m\otimes n))(g^{-1}\varphi) = g\underbrace{(g^{-1}\varphi)(m)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot n$$

$$= \varphi(gm) \cdot (gn)$$

Isomorphismus: genügt als $\mathbb{Z}$-Modul. Beobachtung: M endl.-erz. projektiv $/ \mathbb{Z}[G]$

$\underset{G\ \text{endl.}}{\Longrightarrow} M$ proj. endl. erz. $/\mathbb{Z} \underset{\text{OE}}{\Rightarrow} M = \mathbb{Z}$ ... klar.

(c) Zeige nur Isom. links, rechts folgt aus (b) und $(-)^G$.

$M = \mathbb{Z}[G]$: (Ü)

Verwende $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \xrightarrow{\sim} N \to (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} N)^G$

$n \mapsto \sum_{g\in G} g^{-1} \otimes gn$ ▨

Korollar 6.20. (a) Dualisieren von $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ liefert einen exakten Komplex

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^*} P^{*\bullet}$ (alle $(P^i)^*$ sind proj., endl. erz. nach 6.19)

(b) $H_i(G, M) = H^{-i}(\mathrm{Hom}_G(P^*, M)) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis.
(a) $P^\bullet \to \mathbb{Z}$ ist ein exakter Komplex freier $\mathbb{Z}$-Moduln $\underset{\text{dualisieren exakt}}{\Longrightarrow} 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^*} P^{*\bullet}$.

(b) $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P^{-i}, \mathbb{Z}), M) \underset{\text{Lemma (c)}}{\cong} P^{-i} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$ (Abbildungen wie erwartet Ü) ▨

Tate:

Definiere $Q \in Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G])$ als
$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & P^* \\ & \mathbb{Z} \arrow[ur, "\varepsilon^*"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \cdots \to P^{-2} \to & P^{-1} \to & P^0 \longrightarrow & (P^0)^* \to & (P^1)^* \to & (P^{-2})^* \to & \cdots \end{array}$$

} exakter Komplex proj. endl. erz. $\mathbb{Z}[G]$-Moduln.

$P^0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^*}$, $0 \to \mathbb{Z} \to 0$ ← verkleben.

Definition 6.21. $\hat{H}^i(G,M) := H^i(\mathrm{Hom}_G(Q,M))$ ist die i-te Tate Kohomologie

Proposition 6.22.

(a) $\hat{H}^i(G,M) = H^i(G,M), \quad i \geq 1$

(b) $\hat{H}^{-i-1}(G,M) = H_i(G,M), \quad i \geq 1$

(c) ${}_NM := \ker\left(N_G : M \to M,\ m \mapsto \sum_{g\in G} gm\right)$. Dann ex. 4-Term exakte Sequenz

$$0 \to \hat{H}^{-1}(G,M) \to H_0(G,M) \to H^0(G,M) \to \hat{H}^0(G,M) \to 0$$

$$0 \to {}_NM/I_GM \to M_G = M/I_GM \xrightarrow{N_G\cdot -} M^G \to M^G/N_GM \to 0$$

$$\bar m \mapsto \sum_g g\bar m$$

Beweis.

(a) ✓, nach Def.

(b) ✓, Korollar 6.20

(c) Sei $C = \mathrm{Hom}_G(Q,M) \quad (\in Ch^\cdot(\mathbb{Z}))$

$$\begin{tikzcd}
C^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] & C^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, equal] & C^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, equal] & C^1 \\
& \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]^*, M) \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]^*, M) \arrow[d, "\cong"] & \\
& M \arrow[d] & M & \\
& M_G \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & M^G \arrow[u, hook] \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & H^{-1}(C^\cdot) \arrow[r] & C^{-1}/B^{-1} \arrow[r, dashed, "\bar d^{-1}"] & Z^0 \arrow[r] & H^0(C^\cdot) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{coker} d^{-2} = M_G = C^{-1}/B^{-1}$ Kor!

$\operatorname{im} d^{-2} = I_GM$

$\ker d^0 = M^G = Z^0(C^\cdot)$

$$\bar d^{-1} : M \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}} M)^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]^*, M) \xrightarrow{(*)} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], M) \xrightarrow{\wr} M$$

$$m \mapsto 1\otimes m \mapsto \sum_g g^{-1}\otimes gm \mapsto \left(\varphi \mapsto \sum_g \varphi(g^{-1})gm\right) \mapsto \left(h \mapsto \sum_g \underbrace{\varphi_h(g^{-1})}_{=1} gm\right) = N_Gm$$

$(*)$: $\mathrm{Hom}_G(\varepsilon^*\circ\varepsilon, M)$

$\varepsilon^*\circ\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G]^*, \quad g \mapsto (\varphi_g : h \mapsto 1)$

$$\Rightarrow \bar d^{-1} = (N_G\cdot -)$$

Korollar 6.23.

(a) Die Tate-Kohomologie assoziiert zu jeder kurzen exakten Sequenz eine lange ex. Kohomologiesequenz + Morphismen zw. Abb.'en kurzer ex. Seq.

(b) $M = \mathrm{CoInd}_H^G N \Rightarrow \hat{H}^i(G,M) \cong \hat{H}^i(H,N)$ (Shapiro) Funktoriell in M

(c) $G = \{e\} \Rightarrow \hat{H}^i(G,M) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

(d) M induzierter G-Modul (oder CoInd) $\Rightarrow \hat{H}^i(G,M) = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis.
(a) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \quad \rightsquigarrow \quad 0 \to \mathrm{Hom}_G(Q, M') \to \mathrm{Hom}_G(Q,M) \to \mathrm{Hom}_G(Q^i, M'') \to 0$ exakt, da Q^i $\mathbb{Z}[G]$-projektiv

etc.

(b) $\mathrm{Hom}_G(Q^i, \mathrm{CoInd}_H^G N) \underset{\text{Adj.}}{\cong} \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_G^H Q, N)$

(rein formal an Def.) $\to$ ein proj. Kplx. für Tate Kohomologie von H

und $\mathrm{Res}_G^H \mathbb{Z}[G]$ ist ein freier endl. erz. $\mathbb{Z}[H]$-Modul

(c) Nur $i = 0,1$ interessant: $\left.\begin{array}{ccc} M_G & \xrightarrow{N_G} & M^G \\ \| & & \| \\ M & \xrightarrow{1\cdot} & M \end{array}\right\} \hat{H}^{-1} = \hat{H}^0 = 0$, $G = \{e\}$

(d) folgt aus (b) $\wedge$ (c). $\boxtimes$

<u>Dimensionsverschiebung</u> $H \leq G$ Untergruppe.

Lemma 6.24. Sei $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $B \in {}_H\underline{\mathrm{Mod}}$. Dann existieren funktorielle Isomorphismen

(a) $\mathrm{CoInd}_H^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq \mathrm{CoInd}_H^G (B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A)$

(b) $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}_H^G B \simeq \mathrm{Ind}_H^G (\mathrm{Res}_G^H A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$.

Beweis.
(a) $\mathrm{CoInd}_H^G(B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A) = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A) = Y$ $\quad \phi: X \to Y$ 29.05.18

Für $f \in Y \to (gf)(g') = f(g'g)$ $\quad h\cdot(b \otimes a) = hb \otimes ha$

$\mathrm{CoInd}_H^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B) \otimes_{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B \otimes_A \mathrm{Res}_G^H A) = X$

$h \circ_1 (b \otimes a) = hb \otimes a$

$h \circ_2 (b \otimes a) = b \otimes ha$

Für $f \in X \to (g\cdot f)(g') = g \circ_2 f(g'g)$

wobei ϕ def. durch $\phi(f) := (g \longmapsto g \cdot_2 f(g))$ (auf $\mathbb{Z}$-Basis von G!)

$\underline{\phi(f) \in Y}$:

$$\phi(f)(hg) = (hg) \cdot_2 f(hg) \underset{f \in X}{=} h \cdot_2 g \cdot_2 h \cdot_1 f(g) \underset{\substack{\text{s. Def.} \\ \cdot_1, \cdot_2}}{=} h \cdot_2 h \cdot_1 g \cdot_2 f(g)$$

$$= h \cdot (g \cdot_2 f(g)) = h \cdot \phi(f)(g).$$

$\underline{G\text{-äquivariant}}$: $(g\,\phi(f))(g') = \phi(f)(g'g) \underset{\text{Def.}}{=} g' \cdot_2 g \cdot_2 f(g'g)$

$$\phi(g \cdot f)(g') = g' \cdot_2 (g \cdot f)(g') = g' \cdot_2 g \cdot_2 f(g'g)$$

$\underline{\text{Isomorphismus}}$: $\phi^{-1}(f) := (g \longmapsto g^{-1} \cdot_2 f(g))$ für $f \in Y \ldots$

(b) analog...

Korollar 6.25. Bezeichnung wie in 6.24 mit $H = \{e\}$, $A^0 := \mathrm{Res}^{\{1\}}_G A$.

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A) \cong \mathrm{CoInd}^G_{\{1\}} A^0$

(b) $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \underset{{}_G\mathrm{Mod}}{\cong} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A^0$

$\underline{\text{Aus Übung}}$: $A \xhookrightarrow{\iota} \mathrm{CoInd}^G_{\{1\}} A$, $a \longmapsto (f_a : g \mapsto ga)$

$\mathrm{Ind}^G_{\{1\}} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$, $g \otimes a \longmapsto ga$

Definiere Kokern bzw. Kern $\rightsquigarrow$ erhalten kurze ex. Sequenzen

$$0 \to A \to \mathrm{CoInd}^G_{\{1\}} A \longrightarrow A^* \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow A_* \to \mathrm{Ind}^G_{\{1\}} A \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$\underline{\text{Bemerkung}}$: $A_* \cong I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$, $A^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G, A)$ (da $0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$ spaltet (in ${}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$))

Proposition 6.26. Es existieren funktorielle Isomorphismen (in A):

(a) $H^{i+1}(G, A) \cong H^i(G, A^*)$ für $i \geq 1$

(b) $H_{i+1}(G, A) \cong H_i(G, A_*)$ für $i \geq 1$

(c) G endlich $\rightsquigarrow$ $\forall i \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^{i-1}(G, A^*) \cong \hat{H}^i(G, A) \cong \hat{H}^{i+1}(G, A_*)$

<u>Bemerkung</u>: In (a) und (b) erhalten wir noch 4-Term exakte Sequenzen, z.B.

$$0 \to H^0(G,A) \to H^0(G, \mathrm{CoInd}_{\{1\}}^G A) \to H^0(G, A^*) \to H^1(G,A) \to 0.$$

(analog für (b))

Beweis. folgt aus Shapiro's Lemma und $H^i(1,-)=0$, $H_i(1,-)=0$ $\forall i \geq 1$

denn hieraus folgt:

$$H^i(G, \mathrm{CoInd}_1^G A) = H^i(1, A^\circ) = 0, \text{ analog } H_i(G, \mathrm{Ind}_1^G A) = 0 \quad \forall i > 0$$

$$\hat{H}^i(G, \mathrm{CoInd}_1^G A) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

+ lange exakte Kohomologiesequenzen zu (+). ☐

Korollar 6.27. Sei G endlich, A ein G-Modul.

(a) Multiplikation mit $\#G$ annulliert $\hat{H}^i(G,A)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$

(b) A endl. erz. $\mathbb{Z}$-Modul $\Rightarrow$ $\hat{H}^i(G,A)$ <u>endlich</u> $\forall i \in \mathbb{Z}$

(c) Ist $A \xrightarrow{\#G \cdot} A$ ein Isomorphismus, so gilt $\hat{H}^i(G,A) = 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$

Beweis.

(a) Nach 6.26.: o.E. $i=0$.

$$\hat{H}^0(G,A) = A^G / N_G A, \text{ aber für } a \in A^G \text{ gilt } \#G \cdot a = N_G a \Rightarrow \#G\,\bar{a} = 0 \text{ in } \hat{H}^0(G,A)$$

(b) A endl. erz., G endlich $\Rightarrow$ A_*, A^* endl. erz. $/\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ o.E.: $i=0$.

Dann ist die Aussage klar nach (a), da A^G endl. erz $/\mathbb{Z}$ und $\#G$-Torsion.

(c) Ist $A \xrightarrow{\#G \cdot} A$ Isomorphismus $\Rightarrow$ $\hat{H}^i(G,A) \xrightarrow{\#G \cdot} \hat{H}^i(G,A)$ Isomorphismus

$$\underset{(a)}{\Rightarrow} \hat{H}^i(G,A) = 0.$$

☐

<u>Funktorialität in Paaren (G,A):</u> (zunächst für Kohomologie)

$\rho: G' \to G$ Grp.homomorphismus, $\lambda: A \to A'$ $\mathbb{Z}$-Modulhom., s.d. $(A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}},\ A' \in {}_{G'}\underline{\mathrm{Mod}})$

$$\lambda(\rho(g')\cdot a) = g' \cdot \lambda(a) \quad \forall a \in A\ \forall g' \in G'$$

<u>Bemerkung</u>: ⓪ Man kann eine Kategorie (kohomologischer) Gruppe-Modul Paare definieren.

Objekte: (G,A), Morphismen: $(\rho,\lambda): (G,A) \to (G',A')$ wie oben.

① Jeder Morphismus dieser Kategorie ist Verkettung $(G,A) \xrightarrow{(\rho, \mathrm{id}_A)} (G', A) \xrightarrow{(\mathrm{id}_{G'}, \lambda)} (G', A')$

A G'-Modul durch $g'a = \rho(g')a$, schreibe ggf. $\rho^* A$

Bsp. (i) $H \leq G$ UG, p Inklusion. $\lambda = id_A : \underset{= \mathrm{Res}^H_G A}{\overset{?}{A}} \longrightarrow A$ $(A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}})$

(ii) $H \trianglelefteq G$, $p : G \to G/H$ Projektion, $\lambda = \text{Inkl.} : \underbrace{A^H}_{G/H\text{-Modul}} \hookrightarrow A$

Definiere zu Morphismus (p, λ) in der obigen Kategorie eine Abbildung

$$H^i(G, A) \longrightarrow H^i(G', A') \quad \forall i \geq 0 \quad \text{wie folgt.}$$

$G' \xrightarrow{p} G$ induziert $\mathbb{Z}[(G')^i] \longrightarrow \mathbb{Z}[G^i]$ trägt auch G'-Operation

induziert $\mathrm{Std}_{G'} \longrightarrow \mathrm{Std}_G$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G'])$

Damit: (1) $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Std}_G, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'}(\mathrm{Std}_G, p^*A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'}(\mathrm{Std}_{G'}, p^*A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'}(\mathrm{Std}_{G'}, A')$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z})$

Proposition 6.28. (1) induziert Abbildungen $H^i(G, A) \longrightarrow H^i(G', A')$

(mit gewissen Funktorialitäten in
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B' \end{array} \text{ etc.}$$
)

(Die induzierte Abbildung ist eine natürliche Transformation von δ-Funktoren, siehe Brown, Cohomology of Groups)

Insbesondere sind die $H^i(G, A) \longrightarrow H^i(G', A')$ durch $H^0(G, A) = A^G \to A'^{G'} = H^0(G', A')$ $\forall A \to A'$ eindeutig bestimmt. ▨

Bemerkung. Die Abbildungen in 6.28 sind induziert von Abbildungen

(ii) $$C(G^i, A) \longrightarrow C((G')^i, A'), \quad f \longmapsto f'$$

wobei $$f'(g_1', \ldots, g_i') := \lambda(f(p(g_1'), \ldots, p(g_i'))) \quad \forall (g_1', \ldots, g_i') \in (G')^i.$$

Bemerkung. Zu
$$\begin{array}{ccc} (G, A) & \longrightarrow & (G', A') \\ & \searrow \ \circlearrowleft \ \swarrow & \\ & (G'', A'') & \end{array}$$
erhalten wir
$$\begin{array}{ccc} H^i(G, A) & \longrightarrow & H^i(G', A') \\ & \searrow \ \circlearrowleft \ \swarrow & \\ & H^i(G'', A'') & \end{array}$$

Def. 6.29. $H \leq G$ Untergruppe (obiges Beispiel (a))

erhalten $\mathrm{Res}: H^i(G,A) \longrightarrow H^i(H,A)$ $\quad (\rho = H \hookrightarrow G,\ \lambda = id_A)$

(Ü auf Koketten: $C^i(G,A) \to C^i(H,A)$, $f \mapsto f|_{H^i}$) "Restriktion"

Def. 6.30. $N \trianglelefteq G$ Normalteiler (obiges Bsp. (b))

erhalten $\mathrm{Inf}: H^i(G/N, A^N) \longrightarrow H^i(G,A)$ $\quad (\rho = G \twoheadrightarrow G/N,\ \lambda = A^N \hookrightarrow A)$

"Inflation"

Bemerkung: Res induziert Abb'en auf langen exakten Kohomologiesequenzen.

Ü: $\mathrm{Res} = \left(H^i(G,A) \xrightarrow[\text{aus Übung}]{H^i(G,\iota)} H^i(G, \mathrm{CoInd}_H^G A) \xrightarrow[\text{Shapiro}]{\cong} H^i(H,A) \right)$

Def. 6.31. $H \leq G$ Untergruppe, $g \in G$, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$.

$$\rho_{g,H}: gHg^{-1} \xrightarrow{\sim} H,\ \tilde{h} \mapsto g^{-1}\tilde{h}g, \quad \lambda_g: A \to A,\ a \mapsto ga$$

$$\left(\lambda_g(\rho_{g,H}(\tilde{h})a) = \lambda_g(g^{-1}\tilde{h}ga) = \tilde{h}ga = \tilde{h}\lambda_g(a) \right)$$

induziert Abb'en

$$g^*: H^i(H,A) \longrightarrow H^i(gHg^{-1},A)$$

Proposition 6.32.

(a) $\forall g_1, g_2 \in G$: $(g_1 \cdot g_2)^* = g_1^* \circ g_2^*$

(b) $\underline{N \trianglelefteq G} \Rightarrow G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^i(N,A)),\ g \mapsto g^*$ ist Gruppenwirkung mit N im Kern.

Insbesondere gilt $g^* = id$ falls $G = N$

Außerdem erhalten wir einen kohomol. Funktor ${}_G\underline{\mathrm{Mod}} \longrightarrow {}_{G/N}\underline{\mathrm{Mod}}$, $A \mapsto H^i(N,A)$

(c) Für $K \leq H \leq G$ Untergruppen komm. Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^i(H,A) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "g^*"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & H^i(K,A) \arrow[d, "g^*"] \\ H^i(gHg^{-1},A) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^i(gKg^{-1},A) \end{tikzcd}$$

so dann in (b) gilt: $\mathrm{Res}: H^i(G,A) \to H^i(N,A)$ hat Bild $H^i(N,A)^G = H^i(N,A)^{G/N}$.

Ü

Satz. 6.33. (Inflations-Restriktions-Sequenz) (ii) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler, $A \in {}_G\underline{Mod}$,

so ist

(a) $0 \to H^1(G/N, A^N) \xrightarrow{\inf} H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(N, A)^{G/N}$ exakt.

(b) gilt zusätzlich: $H^i(N, A) = 0$ für $i = 1, \dots, k-1$, so ist

$$0 \to H^k(G/N, A^N) \xrightarrow{\inf} H^k(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^k(N, A)^{G/N} \text{ exakt.}$$

Def. 6.34. (Koreskiktion)

Gelte $[G:H] < \infty$, $A \in {}_G\underline{Mod}$ (Res kann über ι definiert werden!)

Cor: $H^i(H, A) \underset{\text{Shapiro}}{\simeq} H^i(G, \underbrace{\mathrm{CoInd}_H^G A}_{\substack{\cong \\ \mathrm{Ind}_H^G A, \text{ da } [G:H] < \infty}}) \simeq H^i(G, \mathrm{Ind}_H^G A) \xrightarrow[H^i(G,\pi)]{} H^i(G, A)$

! heißt "Koreskiktion"

Explizit: $i = 0$:

$$\begin{array}{ccccc} a & \longmapsto & \mathrm{const}_a & \longmapsto & \sum_{g \in {}_H\backslash G} g a. \\ H^0(H, A) & \xrightarrow{\text{Shapiro}} & H^0(G, \mathrm{CoInd}_H^G A) & \longrightarrow & H^0(G, A) \\ \| & & \| & & \\ A^H & \longrightarrow & (\mathrm{CoInd}_H^G A)^G & & \\ a & \longmapsto & (g \mapsto a)_{\text{konstant}} & & \end{array}$$

Nun

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CoInd}_H^G A & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_H^G A & \xrightarrow{\pi} & A \\ f & \longmapsto & \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} \otimes f(g) & \longmapsto & \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} f(g) = \sum_{g \in {}_H\backslash G} g f(g^{-1}) \end{array}$$

01.06.18

Lemma 6.35. Gelte $[G:H] < \infty$.

Dann: $\mathrm{Cor}_H^G \circ \mathrm{Res}_G^H = (\cdot [G:H])$ Multiplikation.

Beweis. Sei $\varphi : \mathrm{CoInd}_H^G A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_H^G A$, $f \mapsto \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} \otimes f(g)$ der Isomorphismus

z.z.: $H^i(\pi) \circ H^i(\varphi) \circ H^i(\iota) = (\cdot [G:H])$

g.z.z.: $\pi \circ \varphi \circ \iota = (\cdot [G:H])$

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{CoInd}_H^G A & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \mathrm{Ind}_H^G A & \xrightarrow{\pi} & A \\ a & \longmapsto & (f_a : g \mapsto ga) & \underset{\text{s.o.}}{\longmapsto} & \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} \otimes f_a(g) & \longmapsto & \sum_{g \in {}_H\backslash G} \underbrace{g^{-1} f_a(g)}_{= g^{-1} g a} = \sum_{g \in {}^H/G} a = [G:H] \cdot a. \end{array}$$

∎

Lemma 6.36. G endlich $\Rightarrow$ ι bzw. π induzieren (via Shapiro) (δ-) Funktoren

$$\mathrm{Res}: \hat{H}^i(G,A) \longrightarrow \hat{H}^i(H,A), \quad \mathrm{Inf}: \hat{H}^i(H,A) \longrightarrow \hat{H}^i(G,A)$$

welche für $i \geq 0$ mit Res und Cor aus der üblichen Gruppenkohomologie übereinstimmt, und für $i=0$ von Res bzw. Cor induziert sind.

($\underline{\mathrm{Res}}:(i=0)$ $A^G \xrightarrow{\text{inkl.}} A^H$, $\underline{\mathrm{Cor}}$ $(i=0)$ $A^H \longrightarrow A^G$, $a \longmapsto \sum\limits_{g \in G/H} ga$

induziert $A^G/_{N_G A} \longrightarrow A^H/_{N_H A}$ $\qquad A^H/_{N_H A} \longrightarrow A^G/_{N_G A}$)

und 6.35 gilt für Res, Cor auf $\hat{H}^*$.

Korollar 6.39. G endl. Gruppe, $G_p \leq G$ p-Sylowuntergruppe, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$

(a) $\ker(\mathrm{Res}: \hat{H}^i(G,A) \longrightarrow \hat{H}^i(G_p,A))$ enthält keine p-Torsion.

(b) Ist $\mathrm{Res}: \hat{H}^i(G,A) \longrightarrow \hat{H}^i(G_p,A)$ die Nullabbildung $\forall$ Primzahlen p und eine Wahl von p-Sylow's $\{G_p \leq G\}_{p \in P\mathbb{Z}}$, so gilt $\hat{H}^i(G,A) = 0$.

Beweis.
(a) $\mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res} = (\cdot [G:G_p])$ $\Rightarrow$ $[G:G_p] \cdot \alpha = 0$, falls $\alpha \in \hat{H}^i(G,H)$ mit $p \cdot \alpha = 0$ und $\mathrm{Res}(\alpha) = 0$.

$\nwarrow$ teilerfremd zu p.

$\Rightarrow \alpha = 0$.

(b) folgt aus (a) und $\#G \cdot \hat{H}^i(G,A) = 0$. ▨

Es gibt natürlich auch homologische Gruppe-Modul-Paare und induz. homologische Funktoren.

$\underline{\text{Hier:}}$ $\rho: G \to G'$ Gruppenhom, $\lambda: A \longrightarrow A'$ $\mathbb{Z}$-linear, $\lambda(ga) = \rho(g)\lambda(a)$, $A' \in {}_{G'}\underline{\mathrm{Mod}}$. $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$:

Def. 6.37. 1) Jedes (homologische) G_p-Modul-Paar induziert (δ-) Funktor $H_i(G,A) \longrightarrow H_i(G',A')$ $\forall i \geq 0$.

2) $\underline{\mathrm{CoInf}}$: zu $G \longrightarrow G/N$ ($N \trianglelefteq G$ Normalteiler), $\lambda: A \longrightarrow A_N$ erhalten

$$\mathrm{CoInf}: H_i(G,A) \longrightarrow H_i(G/N, A_N)$$

3) $\underline{\mathrm{Cor}}$: zu $H \xrightarrow[\text{inkl.}]{} G$, $\lambda = \mathrm{id}_A$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Cor}: H_i(H,A) \longrightarrow H_i(G,A)$ (keine Vorauss. $[G:H]<\infty$!)

4) zusätzlich erhalten: $\mathrm{Res}: H_i(G,A) \longrightarrow H_i(H,A)$ falls $[G:H]<\infty$.

Proposition 6.38. Es gelten zu 6.32, 6.33, 6.35 analoge Aussagen.

Res, Cor aus 6.37 stimmen auf der Tate-Kohomologie (für G endlich!) mit Res, Cor aus 6.36 überein unter der Identifikation $H_i(G,A) \simeq \hat{H}^{-i-1}(G,A)$ für $i \geq 1$.

▨

Cup - Produkte. G, G' Gruppen.

$P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ projektive Auflösung in $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G])$ bzw. $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G'])$.

$\rightsquigarrow$ Doppelkomplex $P \otimes P'$ (s. Übungen) $\rightsquigarrow$ $P \boxtimes P' = \mathrm{Tot}(P \otimes P') \to \mathbb{Z}$ (s. Übungen)

ist projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G \times G'])$

$$\left((P^\bullet \otimes P'^\bullet)^{i,j} = P^i \otimes_{\mathbb{Z}} P'^j, \quad d_h^{i,j} = d_P^i \otimes id, \quad d_v^{i,j} = (-1)^i\, id \otimes d_{P'}^j \right)$$

Für $G = G'$: via $G \hookrightarrow G \times G,\ g \mapsto (g,g)$ ist $P \boxtimes P' \to \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G])$.

erhalten: (für $P' = P$)

$$\begin{tikzcd} P \boxtimes P \arrow[dr, "\varepsilon \boxtimes \varepsilon"] \arrow[d, dashed, shift left, "m"] & \\ P^\bullet \arrow[u, dashed, shift left, "\Delta"] \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Diagonalapproximation

Satz 5.9
$\exists$ Δ und m eindeutig bis auf Homotopie.

deswegen gilt auch:

$m \circ \Delta \simeq id_{P^\bullet}$, $\Delta \circ m \simeq id_{P^\bullet \boxtimes P^\bullet}$

Def. 6.40. Die Alexander-Whitney Diagonalapprox. für $Std_G^\bullet$ ist die Abbildung

$$\Delta_{Std} : Std_G^\bullet \to Std_G^\bullet \text{ gegeben durch}$$

$$\Delta_{Std}\underbrace{(g_0, \ldots, g_n)}_{\in \mathbb{Z}[G^{n+1}] = Std_G^n} = \sum_{j=0}^{n} (g_0, \ldots, g_j) \otimes (g_j, \ldots, g_n)$$

Lemma 6.41. (Ü)

(a) Δ_{Std} ist Abbildung von Komplexen

(b) $\Delta_{Std}[g_1|\ldots|g_n] = \sum_{j=0}^{n} [g_1|\ldots|g_j] \otimes g_1 \cdots g_j [g_{j+1}|\ldots|g_n]$ ($j=0$: leeres Symbol)

$\blacksquare$

Seien G, G', $P^\bullet, P'^\bullet$ wie oben, $A \in {}_G\underline{Mod}$, $A' \in {}_{G'}\underline{Mod}$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_G(P^\bullet, A)$, $\mathrm{Hom}_{G'}(P'^\bullet, A')$, $\mathrm{Hom}_{G \times G'}(P^\bullet \boxtimes P'^\bullet, A \otimes_{\mathbb{Z}} A')$ sind in $Ch^\bullet(\mathbb{Z})$

(wollen ab nun alle P^i, P'^j endl. erz. sind)

$\rightsquigarrow$ erhalten Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_G(P^\bullet, A) \boxtimes \mathrm{Hom}_{G'}(P'^\bullet, A') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G\times G'}(P^\bullet \boxtimes P'^\bullet, A \otimes_{\mathbb{Z}} A')$$

(prüfe im Fall alle P^i, P'^j frei + endl. erz. über $\mathbb{Z}[G] / \mathbb{Z}[G']$)

$$(u: P^i \to A,\ u': P'^j \to A') \longmapsto (-1)^{ij} \cdot u \otimes u' : P^i \otimes P'^j \to A \otimes A'$$

Falls $u \in Z^i(\mathrm{Hom}_G^\bullet(P^\bullet, A))$, $u' \in Z^j(\mathrm{Hom}_{G'}^\bullet(P'^\bullet, A'))$

$$\Rightarrow u \otimes u' \in Z^{i+j}(\mathrm{Hom}^\bullet_{G\times G'}(P^\bullet \otimes P'^\bullet, A \otimes A')),$$ denn

$$\partial(u \otimes u') = \partial u \otimes u' \pm u \otimes \partial u' = 0 \pm 0 = 0.$$

$\rightsquigarrow$ erhalten

$$\begin{tikzcd} H^i(G,A) \otimes H^j(G',A') \arrow[r] & H^{i+j}(G\times G', A \otimes A') \arrow[d] \\ {[u] \otimes [u']} \arrow[rr, mapsto, bend left] & & {[u] \cup [u']} \\ & H^{i+j}(G, A \otimes A') & \end{tikzcd}$$

Falls $G = G'$: $P = P'$ haben $\Delta: P \to P \otimes P$

In Termen von Koketten: wir erhalten mit Alexander-Whitney (A-W) Diag. approx.

$$C^i(G,A) \times C^j(G,A') \longrightarrow C^{i+j}(G, A \otimes A')$$
$$(u, u') \longmapsto u \cup u'$$

$$(u \cup u')(g_1, \dots, g_{i+j}) = (-1)^{ij} u(g_1, \dots, g_i) \otimes g_1 \cdots g_i\, u'(g_{i+1}, \dots, g_{i+j})$$

induziert das Cup-Produkt $H^i(G,A) \otimes H^j(G,A') \to H^{i+j}(G, A \otimes A')$ (ü)

Facts 6.42.

(a) $H^0(G,A) \otimes H^0(G,A') \longrightarrow H^0(G, A \otimes A')$

$A^G \otimes A'^G \longrightarrow (A \otimes A')^G$

ist induziert von der Identität.

(b) $f: A \to B$, $f': A' \to B'$ Morphismen in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $\alpha \in H^i(G,A)$, $\alpha' \in H^j(G,A')$

$$\Rightarrow H^{i+j}(f \otimes f')(\alpha \cup \alpha') = H^i(f)(\alpha) \cup H^j(f')(\alpha')$$

(c) Ist $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ exakt in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, so dass

$0 \to A' \otimes B \to A \otimes B \to A'' \otimes B \to 0$ ebenfalls exakt ist, so kommutiert

$$\begin{tikzcd} H^i(G, A'') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "-\cup v"'] & H^{i}(G, A') \arrow[d, "-\cup v"] \\ H^{i+j}(G, A'' \otimes B) \arrow[r, "\delta"] & H^{i+j}(G, A' \otimes B) \end{tikzcd}$$

für $v \in H^j(G, B)$.

(Dimensionsverschiebung anwendbar auf $\cup$)

"Grund":

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^\bullet(G,A') \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & C^\bullet(G,A) \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & C^\bullet(G,A'') \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C^{\bullet+j}(G,A'\otimes B) \arrow[r] & C^{\bullet+j}(G,A\otimes B) \arrow[r] & C^{\bullet+j}(G,A''\otimes B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z})$

(d) Analogon zu (c) in der zweiten Variablen. (A-W-Formel)

(e) $1 \in H^0(G,\mathbb{Z})$ erfüllt $1 \cup - = id$, $- \cup 1 = id$.

(f) $\cup$ ist assoziativ. ✓

(g) $\cup$ ist graduiert kommutativ, d.h. $u \in Z^i(G,A)$, $u' \in Z^j(G,A')$; $sw : A \otimes A' \to A' \otimes A$, $a \otimes a' \mapsto a' \otimes a$

Dann: $H^{i+j}(sw)([u] \cup [u']) = (-1)^{ij}([u'] \cup [u])$

"Grund": im Grad (i,j)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A) \otimes \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_G(P^\bullet \otimes P^\bullet, A \otimes A') \arrow[d, "\mathrm{Hom}_G(sw,\tau)"] \\ \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A') \otimes \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_G(P^\bullet \otimes P^\bullet, A' \otimes A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} u \otimes u' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \text{"}u \cup u'\text{"} \\ (-1)^{ij} u' \otimes u \arrow[r, mapsto] & \text{"}(-1)^{ij} u \cup u'\text{"} \end{tikzcd}$$

$$\tau : (P \otimes P)^{ij} \to (P \otimes P)^{ij}, \quad x \otimes y \mapsto (-1)^{ij} y \otimes x$$

kommutiert nach $\cup$ bilden

$$\begin{tikzcd} u \cup u' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & sw(u \cup u') \\ (-1)^{ij} u' \cup u & \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{tikzcd} P \boxtimes P \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr] & & P \boxtimes P \arrow[dl] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}\right\}$$ τ induziert die Identität nach Kohomologie bilden!

(h) Für $H \leq G$: Res^G_H (auf Kohomologie) vertauscht mit $\cup$-Produkt: $\mathrm{Res}(u \cup v) = \mathrm{Res}(u) \cup \mathrm{Res}(v)$ (A-W-Formel)

(i) Für $N \trianglelefteq G$ $\mathrm{Inf}^G_{G/N}$ vertauscht mit $\cup$.

05.06.18

(j) $H \leq G$ Untergruppe, $[G:H] < \infty$.

$$\begin{tikzcd} H^i(G,A) \otimes H^j(G,A') \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & H^{i+j}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} A') \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\ H^i(H,A) \otimes H^j(H,A') \arrow[r, "\cup"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cor}"'] & H^{i+j}(H, A \otimes_{\mathbb{Z}} A') \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cor}"'] \end{tikzcd}$$: $\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(u) \cup v) = u \cup \mathrm{Cor}(v)$

Beweis (?) $u \in \mathrm{Hom}(P^{-i}, A)$, $v \in \mathrm{Hom}(P^{-j}, A)$

$$\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(u) \cup v) = \mathrm{Cor}(u|_{P|_H} \cup v) = \mathrm{Cor}((-1)^{ij}\, u \otimes v)$$

$$= \Big(\underset{P^i \otimes P^j}{\overset{\in}{\alpha}} \longmapsto (-1)^{ij} \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1}(u\otimes v)(g\alpha)\Big) = \sum_{g \in {}_H\backslash G} (-1)^{ij}\, u(\alpha) \otimes g^{-1} v(g\alpha)$$

$$= (\alpha \mapsto (-1)^{ij}\, u(\alpha) \otimes \mathrm{Cor}(v)(\alpha))$$
$$= u \cup \mathrm{Cor}(v).$$

$$\left(\begin{array}{l} \underline{\mathrm{Cor}} : \mathrm{Hom}_H(P_H^\bullet, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, \mathrm{CoInd}_H^G A) \xrightarrow{\pi \circ \varphi} \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, A) \qquad \varphi: \mathrm{CoInd}_H^G A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_H^G A \\ \qquad w \longmapsto ((\alpha, g) \mapsto w(g\alpha)), \qquad (\alpha \mapsto \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} w(g\alpha)) \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd} ((\alpha,g)\mapsto w(g\alpha)) \arrow[d, "\varphi"] & (\alpha \mapsto \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} w(g\alpha)) \\ (\alpha \mapsto \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} \otimes w(g\alpha)) \arrow[ur, "\pi"] & \end{tikzcd} \quad \Bigg)$$

$\blacksquare$

Für eine kurze exakte Sequenz $\varepsilon : 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ sei
$$\partial_\varepsilon^i : H^i(G, A'') \longrightarrow H^{i+1}(G, A')$$ die i-te Randabbildung.

Theorem 6.43. Die Familie aller Cup-Produkte $\cup_{i,j} : H^i(G,A) \otimes H^j(G,B) \longrightarrow H^{i+j}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$ für alle $A, B \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ ist eindeutig charakterisiert durch: $(i,j \in \mathbb{N}_0\,!)$

(i) Die $\cup_{i,j}$ sind funktoriell in $A \to A'$, $B \to B'$

(ii) $\cup_{0,0} : A^G \otimes_{\mathbb{Z}} B^G \longrightarrow (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^G$ ist induziert von $\mathrm{id}_{A \otimes_{\mathbb{Z}} B}$

(iii) $\forall$ ex. Sequenzen $\varepsilon : 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, so dass $\varepsilon \otimes_{\mathbb{Z}} B$ exakt ist, gilt $\forall \alpha'' \in H^i(G, A'')$, $\beta \in H^j(G,B)$: $\delta^{i+j}_{\varepsilon \otimes B}(\alpha'' \cup_{i,j} \beta) = \delta^i_\varepsilon(\alpha'') \cup_{i+1,j} \beta$

(iv) Es gilt das Analogon zu (iii) im 2. Argument.

Beweis. (Sharifi 7.8.4) Dimensionsverschiebung.

$\blacksquare$

Dimensionsverschiebung gilt für G endlich auch für die Tate-Kohomologie
$$\hat{H}^i(G,A) = \hat{H}^{i-1}(G, A^*) = \hat{H}^{i+1}(G, A_*)$$

$\Rightarrow$ 6.44.

Theorem 6.44. $\exists!$ Familie von Cup-Produkten $\cup_{i,j} : \hat{H}^i(G,A) \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{H}^j(G,B) \longrightarrow \hat{H}^{i+j}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$ $\forall i,j \in \mathbb{Z}$, so dass (i)–(iv) aus Thm. 6.43 auch für $\hat{H}^\bullet$ gelten.

(mit (ii) entsprechend angepasst ...)

$\blacksquare$

Kohomologische Trivialität: Sei G endl. Gruppe.

Def. 6.45. $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ heißt kohomologisch trivial $:\Leftrightarrow \forall H \le G$ UG $\forall i \in \mathbb{Z}: \hat{H}^i(H,A) = 0$.

Bsp. · A freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul

· A proj. $\mathbb{Z}[G]$-Modul

· A induzierter Modul $\Big(\underbrace{\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_G^H \mathrm{Ind}_0^G X)}_{=Y} \Big) = \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{Z} \otimes \mathrm{Ind}_e^G X = \mathrm{Ind}_e^G(\mathrm{Res}_H^e \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{Z} \otimes X)\Big)$

nach 6.24(a), $B = \mathbb{Z}$.

$$\hat{H}^i(H, \mathrm{Ind}_0^G X) \overset{\text{sh.}}{=} \hat{H}^i(G, Y) = \ldots = 0.$$

Lemma 6.46. Sei G eine p-Gruppe, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ p-Torsion. $(\Leftrightarrow A \in {}_{\mathbb{F}_p[G]}\underline{\mathrm{Mod}})$

Dann sind äquivalent:

(i) A kohomologisch trivial (ii) A ist freier $\mathbb{F}_p[G]$-Modul (iii) $\exists i \in \mathbb{Z}: \hat{H}^i(G,A) = 0$.

—

Vorüberlegung: (i) $0 \neq C \in {}_{\mathbb{F}_p[G]}\underline{\mathrm{Mod}} \Rightarrow C^G \neq 0 \neq C_G$

G p-Gruppe! (ii) $C \to C'$ in ${}_{\mathbb{F}_p[G]}\underline{\mathrm{Mod}}$ und $\bar{\varphi}: C_G \to C'_G$ surj. $\Rightarrow \varphi$ surj.

—

Beweis von 6.46.

(i) $\Rightarrow$ (iii): klar.

(ii) $\Rightarrow$ (i): klar

(iii) $\Rightarrow$ (ii): z.z. A induziert (von einem $\mathbb{F}_p$-VR V!)

$$\Big(A = \mathrm{Ind}_0^G V = \bigoplus_{\substack{\text{Basis}\\ b \in B}} \mathrm{Ind}_e^G \mathbb{F}_p = \bigoplus_{b \in B} \mathbb{F}_p[G]\Big)$$

OE $i = -2$ in (c) (A induziert, p-Torsion $\Leftrightarrow A_*$ induziert, p-Torsion $\Leftrightarrow A^*$ induziert, p-Torsion)

d.h. $H_1(G,A) = 0$. Sei $X = A_G$ $(A = \mathrm{Ind}_0^G \tilde{X} \Rightarrow \tilde{X} \cong A_G)$

$\mathrm{Ind}_e^G X$ ist freier $\mathbb{F}_p[G]$-Modul, da X $\mathbb{F}_p$-VR.

Betrachte:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}_0^G X \arrow[r, dashed, "\exists \varphi"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"'] & A \arrow[d, "\mathrm{can.}"] \\ X \arrow[r, "\bar{\varphi}", "="'] & A_G \end{tikzcd}$$

$\dashrightarrow \exists$ da $\mathrm{Ind}_e^G X$ projektiv

Es gilt: $\bar{\varphi} = \varphi \otimes_{\mathbb{F}_p[G]} I_G$

$\underset{\text{Vorüberlegung}}{\Longrightarrow}$ φ surjektiv.

Nun: (l.e. Sequenz!) $\underbrace{H_1(G,A)}_{=0,\text{ n.V.}} \to (\ker\varphi)_G \to X \xrightarrow[\mathrm{id}]{\bar{\varphi}} A_G \to 0 \Rightarrow (\ker\varphi)_G = 0 \overset{\text{Vorüberl.}}{\Longrightarrow} \ker\varphi = 0.$

☒

Lemma 6.47. G p-Gruppe, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $\ker(A \xrightarrow{p} A) = 0$.
Dann sind äquivalent:

(i) A kohomologisch trivial

(ii) A/pA freier $\mathbb{F}_p[G]$-Modul

(iii) $\exists i \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^i(G, A) = 0 = \hat{H}^{i+1}(G, A)$

Beweis.
$\underline{(i) \Rightarrow (iii)}$, $\underline{(iii) \Rightarrow (ii)}$: Betrachte $0 \to A \xrightarrow{\cdot p} A \to A/p \to 0$ (exakt n. Voraussetzung)

l. ex. Kohomologiesequenz $\to$ $0 = \hat{H}^i(G, A) \to \hat{H}^i(G, A/p) \to \hat{H}^{i+1}(G, A) = 0 \to \cdots$

$\Downarrow$

$\hat{H}^i(G, A/pA) = 0$, nun nutze 6.46! $\Rightarrow$ (ii).

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$: 6.46 $\to$ $\hat{H}^i(H, A/pA) = 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, $H \leq G$ UG.

$\xrightarrow[\text{l. ex. Sequenz}]{}$ $\hat{H}^i(H, A) \xrightarrow{\cdot p} \hat{H}^i(H, A)$ ist Isomorphismus $\forall i \in \mathbb{Z}$

wissen aber: $\underbrace{\# H}_{p\text{-Potenz}} \cdot \hat{H}^i(H, A) = 0$ $\Rightarrow$ $\hat{H}^i(H, A) = 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ $\forall H \leq G$.

$\blacksquare$

Lemma 6.48. Für G endlich, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ sind äquivalent:

(i) A kohomologisch trivial.

(ii) $\forall$ p-Sylowuntergr. $G_p \leq G$: $\mathrm{Res}^{G_p}_G A$ ist kohomologisch trivial

((i) $\Rightarrow$ (ii): klar, (ii) $\Rightarrow$ (i): verwende 6.39; Sharifi 7.11.8)

Lemma 6.49. Sei G endlich, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ frei als $\mathbb{Z}$-Modul.
Dann: A kohomologisch trivial $\Leftrightarrow$ A ist projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

Beweisidee: $\cdot$ Zeige $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(A, B) = 0$ $\forall B \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$

$\underline{\text{dazu}}$: $\mathrm{Hom}_G(A, B) = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, \underline{\mathrm{Hom}_G(A, B)})$

G-Modul durch $(gf)(a) = gf(g^{-1}a)$

A freier $\mathbb{Z}$-Modul $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, -)$ exakt! und ist I injektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul, so ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)$ injektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul (ist also $B \to I^\bullet$ inj. Auflösung, so auch $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I^\bullet)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_G(A, I^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I^\bullet))$ liefert $\mathrm{Ext}^i_G(A, B) = H^i(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B))$

Sharifi 7.11.9: A wie angenommen $\to$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ koh. trivial.

$\blacksquare$

Satz 6.50. G endliche Gruppe. Dann sind für $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ äquivalent:

(a) A kohomologisch trivial

(b) $\forall p \in \mathbb{P}$ PZ. $\exists G_p \leq G$ p-Sylowuntergruppe: $\exists i_p \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^{i_p}(G_p, A) = 0 = \hat{H}^{i_p+1}(G_p, A)$

(c) $\exists$ kurze exakte Sequenz: $0 \to P^{-1} \to P^0 \to A \to 0$ mit P^i projektives $\mathbb{Z}[G]$-Modul. $(i = -1, 0)$

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): klar.

(c) $\Rightarrow$ (a): wegen lange exakte Kohomologiesequenz.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei P^0 projektive Überdeckung von A (d.h. $P^0 \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$) und sei

$$P^{-1} = \ker(P^0 \twoheadrightarrow A).$$

3.3.: P^{-1} ist projektiv.

wissen P^{-1} ist $\mathbb{Z}$-torsionsfrei als Untermodul des freien $\mathbb{Z}$-Moduls P^0.

Nach 6.49 g.z.z.: P^{-1} kohomologisch trivial.

6.48 $\Rightarrow$ g.z.z.: P^{-1} kohomologisch trivial $\forall G_p$ aus (b)

6.47 $\Rightarrow$ impliziert dies aber, da aus der Vorauss (b) folgt:

$$0 \to P^{-1} \to \underbrace{P^0}_{\text{proj.}} \to A \to 0$$

$$0 \to \hat{H}^{i_p}(G_p, A) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{i_p+1}(G_p, P^{-1}) \to 0 \to \hat{H}^{i_p+1}(G_p, A) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{i_p+2}(G_p, P^{-1}) \to 0$$

d.h. Vorauss. für 6.47 ist für P^{-1} erfüllt.

■

Satz von Tate und Tate-Nakayama.

G endliche Gruppe, $G_p \leq G$ Wahl einer p-Sylowgrp. $\forall p \in \mathbb{P}$: $p \mid G$.

Lemma 6.51. Sei $\kappa: A \to B$ ein Homomorphismus in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$. Sei $\kappa_p^i: \hat{H}^i(G_p, A) \to \hat{H}^i(G_p, B)$

Gelte $\forall p\ \exists i_p \in \mathbb{Z}$: κ_p^i surjektiv für $i = i_p - 1$, bijektiv für $i = i_p$, injektiv für $i = i_p + 1$.

Dann gilt: $\kappa^i: \hat{H}^i(H, A) \to \hat{H}^i(H, B)$ ist Isomorphismus $\forall i \in \mathbb{Z}$. $\forall H \leq G$.

Beweis.

$$0 \to A \xrightarrow[\kappa \oplus \iota]{} B \oplus \mathrm{CoInd}^G A \to C := \mathrm{coker}(\kappa \oplus \iota) \to 0.$$

Kohomologiesequenz $\Rightarrow$

$$\cdots \to \hat{H}^{i_p-1}(G_p,A) \xrightarrow{\kappa_p^{i_p-1}} \hat{H}^{i_p-1}(G_p,B) \longrightarrow \hat{H}^{i_p-1}(G_p,C) \longrightarrow \hat{H}^{i_p}(G_p,A) \underset{\kappa_p^{i_p}}{\xrightarrow{\cong}} \hat{H}^{i_p}(G_p,B)$$

$$\hookrightarrow \hat{H}^{i_p}(G_p,C) \longrightarrow \hat{H}^{i_p+1}(G_p,A) \overset{\kappa_p^{i_p+1}}{\hookrightarrow} \hat{H}^{i_p+1}(G_p,B) \longrightarrow \cdots$$

$\underset{6.50}{\Rightarrow}$ C ist kohomologisch trivial $\underset{\text{für } H}{\underset{\text{Z.E.S.}}{\Longrightarrow}}$ Behauptung. ▨

(Tate-Nakayama)

Satz 6.52. $A,B,C \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $\theta: A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to C$ Morphismus in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$.
$\alpha \in \hat{H}^k(G,A)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. $\forall i \in \mathbb{Z}\ \forall H \leq G$ schreibe

$$\theta^i_{H,\alpha}: \hat{H}^i(H,B) \longrightarrow \hat{H}^{i+k}(H,C),\ \beta \longmapsto \hat{H}^i(\theta)(\mathrm{Res}^H_G \alpha \cup \beta)$$

Gelte $\forall p \in \mathbb{P}\ \exists i_p \in \mathbb{Z}$, so dass $\theta^i_{G_p,\alpha}$ surj. für $i = i_p - 1$, bijektiv für $i = i_p$, injektiv für $i = i_p+1$.

Dann ist $\theta^i_{H,\alpha}$ ein Isomorphismus $\forall H \leq G\ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis.
<u>Fall $k=0$:</u> Definiere $B \xrightarrow{\psi} C$, $b \longmapsto \theta(\hat{\alpha} \otimes \beta)$ (wähle $\hat{\alpha} \in H^0(G,A)$ Repräsentant für $\alpha \in \hat{H}^0(G,A)$)

$$\psi^i_H := \hat{H}^i(\mathrm{Res}^H_G \psi): \hat{H}^i(H,B) \longrightarrow \hat{H}^i(H,C)$$

<u>Beh.:</u> $\psi^i_H = \theta^i_{H,\alpha}$ $\Big(\underset{+\psi}{\overset{6.51}{\Longrightarrow}}$ Behauptung, falls $k=0\Big)$

<u>$i \geq 0$:</u> (ψ und θ induzieren Abb. auf Koketten für H mit Koeffizienten in B, C.

$$\tilde{\psi}^i: C^i(H,B) \longrightarrow C^i(H,C),\ (f^i: H^i \to B) \longmapsto ((h_1,\dots,h_i) \mapsto \theta(\hat{\alpha} \otimes f(h_1,\dots,h_i)))$$

$$\tilde{\theta}^i_H: C^i(H,B) \xrightarrow{\hat{\alpha} \cup -} C^i(H, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \xrightarrow{C^i(\theta)} C^i(H,C),\ f \underset{\text{AW-Formel}}{\longmapsto} ((h_1,\dots,h_i) \mapsto \hat{\alpha} \otimes f(h_1,\dots,h_i))$$

$$\mapsto \theta(\hat{\alpha} \otimes f(h_1,\dots,h_i))$$

<u>$i<0$:</u> Dimensionsverschiebung (s. Sharifi Prop. 1.12.1)
Voraussetzung für B, C impliziert Vorauss. für B_*, C_*.
Dann Induktion für $i<0$. $\rightarrow$ $k=0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ ✓

<u>Fall $k \neq 0$:</u> Voraussetzung für $A \rightsquigarrow$ auch für A_*, A^*
$\alpha \in \hat{H}^k(G,A)$ induziert $\delta^*\alpha \in \hat{H}^{k-1}(G,A^*)$ bzw. $\delta_*\alpha \in \hat{H}^{k+1}(G,A_*)$
(etc. ...)

$\Big(0 \to A \to \mathrm{CoInd}\,A \to A^* \to 0 \Rightarrow 0 \to A\otimes B \to \underbrace{\mathrm{CoInd}\,A \otimes B}_{=\mathrm{CoInd}(A\otimes B)} \to \underbrace{A^*\otimes B}_{(A\otimes B)^*} \to 0\Big)$ ▨

Satz 6.53. (Tate; Spezialfall) $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $\alpha \in H^2(G, A)$.

Gelte $\forall_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ (p \mid \# G \ldots)}}$: $H^1(G_p, A) = 0$, $H^2(G_p, A) = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{Res}_G^{G_p} \alpha \cong \mathbb{Z}/_{\# G_p}\mathbb{Z}$

Dann ist $\Theta^i_{H,\alpha} : \hat{H}^i(H, \mathbb{Z}) \longrightarrow \hat{H}^{i+2}(H, A)$, $\beta \mapsto \mathrm{Res}(\alpha) \cup \beta$ ein Isomorphismus $\forall i \in \mathbb{Z}\ \forall H \leq G$.

$(\Theta : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{\sim} A)$

Beweis. $i_p = 0$.

$$\Theta^{-1}_{G_p,\alpha} : \hat{H}^{-1}(G_p, \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{\hat{H}^1(G_p, A)}_{=0} \quad \Rightarrow \text{ ist surjektiv.}$$

$$\Theta^{1}_{G_p,\alpha} : \underbrace{\hat{H}^1(G_p, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\underset{\text{endl.}}{G_p}, \underset{\text{keine Torsion}}{\mathbb{Z}})}_{=0} \longrightarrow \hat{H}^3(G_p, A) \quad \Rightarrow \text{ ist injektiv.}$$

$$\Theta^{0}_{G_p,\alpha} : \underbrace{\hat{H}^0(G_p, \mathbb{Z})}_{= \mathbb{Z}^G/N_{G_p}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\# G_p\mathbb{Z}} \longrightarrow \hat{H}^2(G_p, A) \cong \mathbb{Z}/_{\# G_p}\mathbb{Z} \quad \text{mit Erzeuger } \mathrm{Res}_G^{G_p}(\alpha)$$

$$\bar{1} \longmapsto \mathrm{Res}_G^{G_p} \alpha \cup 1 = \mathrm{Res}_G^{G_p} \alpha \quad \Rightarrow \text{ ist bijektiv.}$$

$\underset{6.52.}{\Longrightarrow}$ Behauptung. $\blacksquare$

07. GALOISKOHOMOLOGIE

KOHOMOLOGIE PRO-ENDL. GRUPPEN. Sei G eine topologische Gruppe.

Def. 7.1. Ein topologischer G-Modul ist ein G-Modul A, welcher eine Topologie trägt, so dass $(A,+)$ eine topologische Gruppe ist und $G \times A \to A$ stetig ist. (bzgl. Produkttopologie)

A heißt diskreter G-Modul $\iff$ A ist G-Modul und mit der diskreten Topologie ein topologischer G-Modul.

Bsp. 7.2.
- A ein trivialer G-Modul $\Rightarrow$ A ist diskreter G-Modul.
- G endlich (diskr. Topologie) $\Rightarrow$ jeder G-Modul ist diskreter G-Modul
- jede endl. top. Hausdorffgruppe ist diskret.

Proposition 7.3. Sei G pro-endlich. Für einen G-Modul A sind äquivalent:

(a) A ist diskret.

(b) $\forall a \in A$: $\operatorname{Stab}_G(a)$ ist offen ist offen in G

(c) Sei $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis der Eins von G bestehend aus offenen Normalteilern.
Dann gilt: $A = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} A^U$.

Beweis. Sei $\pi: G \times A \to A$ die G-Operation auf A.

(a) $\Rightarrow$ (b): $\underbrace{\pi^{-1}(\underbrace{\{a\}}_{\text{offen}})}_{\text{offen}} \cap \underbrace{G \times \{a\}}_{\text{offen}} = \operatorname{Stab}_G(a) \times \{a\} \Rightarrow \operatorname{Stab}_G(a)$ ist offen.

(b) $\Rightarrow$ (c): $\mathfrak{U}$ Umg-basis von e (aus offenen Normalteilern).
$\Rightarrow \forall a \in A \; \exists \, U_a \in \mathfrak{U}: \quad U_a \subseteq \operatorname{Stab}_G(a) \quad \Rightarrow \quad a \in A^{U_a}$.

(c) $\Rightarrow$ (a): z.z.: $\forall a \in A$: $\pi^{-1}(a) \underset{\text{offen}}{\subseteq} G \times A$.

Wähle $U_a \in \mathfrak{U}: a \in A^{U_a}$. Wähle Repräsentantensystem R_a von G/U_a.

$$\Rightarrow \pi^{-1}(a) = \bigcup_{g \in R_a} g^{-1} U_a \times \{g \cdot a\}$$

$\square$

Def. 7.4. A topologischer G-Modul, $i \in \mathbb{Z}$. $C^i_{cts}(G,A) := \{f: G^i \to A \mid f \text{ stetig}\} \subseteq C^i(G,A)$.
ist die Gruppe der stetigen Koketten von G mit Koeffizienten in A.

Lemma 7.5. Sei $d_A^i : C^i(G,A) \longrightarrow C^{i+1}(G,A)$ das übliche Differential.

Dann gilt: $d_A^i(C_{cts}^i(G,A)) \subseteq C_{cts}^{i+1}(G,A)$, d.h. $(C_{cts}^\bullet(G,A), d_A^i)$ ist ein Komplex.

Beweis.
$$(d_A^i f)(g_1, \dots, g_{i+1}) = g_1 f(g_2, \dots, g_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(g_1, \dots, g_{j-1}, g_j g_{j+1}, g_{j+2}, \dots, g_{i+1})$$
$$+ (-1)^{i+2} f(g_1, \dots, g_i)$$

$+$ ist stetig, $g \cdot - : A \longrightarrow A$ stetig, $G \times G \to G$ stetig.

∎

$$\rightsquigarrow \quad H_{cts}^i(G,A) := H^i(C_{cts}^\bullet(G,A))$$

12.06.18
Lec 01

Proposition 7.6. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ kurze exakte Sequenz von diskreten G-Moduln, so ist

$$0 \to C_{cts}^\bullet(G,A) \xrightarrow{C^\bullet(\alpha)} C_{cts}^\bullet(G,B) \xrightarrow{C^\bullet(\beta)} C_{cts}^\bullet(G,C) \to 0$$ eine exakte Sequenz in $Ch^\bullet(\mathbb{Z})$.

Beweis. Nur Surjektivität, Rest Übung. Sei dazu $s : C \to B$ ein mengentheoretischer Schnitt. Dieser ist stetig, da C die diskrete Topologie trägt. Ist nun $f \in C_{cts}^i(G,C)$, so ist $s \circ f \in C_{cts}^i(G,B)$ und

$$C^i(\beta)(s \circ f) = f.$$

∎

Def. 7.7. $H_{cts}^i(G,A) := H^i(C_{cts}^\bullet(G,A))$ heißt i-te stetige Kohomologiegruppe zu G mit Koeffizienten in A.

Satz 7.8. Unter den Voraussetzungen zu 7.6.: erhalten eine lange ex. Kohomologiesequenz

$$0 \to H_{cts}^0(G,A) \to H_{cts}^0(G,B) \to H_{cts}^0(G,C) \xrightarrow{\delta^0} H_{cts}^1(G,A) \to \dots$$

und zu Morphismen kurzer exakter Sequenzen von diskreten G-Moduln erhält man induz. Morphismen der entsprechenden langen exakten Sequenzen.

Beweis. Klar nach 7.6.

∎

Bsp. 7.9. G eine pro-p-Gruppe. $\Phi(G) = \overline{\langle [G,G], G^p \rangle}$

$$H_{cts}^1(G, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}_{cts}(G, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}(G/\Phi(G), \mathbb{F}_p) \underset{\text{Burnside}}{\Longrightarrow} \dim_{\mathbb{F}_p} H_{cts}^1(G,\mathbb{F}_p) = \text{min. Anzahl von Erzeugern von } G.$$

(falls endlich)

A diskreter G-Modul

Proposition 7.10. Sei G pro-endlich. Sei $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis von $e \in G$ bestehend aus offenen Normalteilern. Dann gilt:

$$H^i_{cts}(G, A) = \varinjlim_{U \in \mathfrak{U}} H^i(G/U, A^U) \qquad (\varinjlim \text{ unter Inflationsabb.})$$

$$\left(U' \subseteq U \subseteq G \Rightarrow G/U' \longrightarrow G/U \rightsquigarrow H^i(G/U, A^U) \longrightarrow H^i(G/U', A^{U'}) \right)$$

Beweis.

Inflationsabbildung ist auf Kokettenniveau definiert. Zeige also:

$$C^i_{cts}(G, A) = \varinjlim_{U \in \mathfrak{U}} C^i(G/U, A^U)$$

"$\supseteq$": klar

"$\subseteq$": Sei $f : \underbrace{G^i}_{\substack{\text{kpt.} \\ \text{pro-endlich}}} \longrightarrow \underbrace{A}_{A = \varinjlim A^U}$ stetig. $\quad \operatorname{im}(f)$ ist endlich (kpt. + diskret)

$\Rightarrow \exists U \in \mathfrak{U} : \operatorname{im} f \subseteq A^U$.

$\forall a \in A$: $f^{-1}(\{a\}) \underset{\text{offen}}{\subseteq} G^i$ auch abgeschlossen, also kompakt, d.h. endliche Vereinigung

$V_1 \times \ldots \times V_i$ mit $V_i \underset{\text{offen}}{\subseteq} G$ (keine Untergruppe)

$\Rightarrow \exists\, U_a \in \mathfrak{U}$: alle beteiligten $V_1 \times \ldots \times V_i$ Vereinigung von Translaten $(g_1, \ldots, g_i) \cdot U_a^i$ sind!

Wähle $U' \in \mathfrak{U}$: $U' \subseteq U$, $U' \subseteq U_a$ $\forall a \in \operatorname{im} f$. $\Rightarrow$ f ist konstant auf jedem Translat von $(U')^i$, $\operatorname{im} f \subseteq A^{U'}$.

d.h. $f \in C^i(G/U', A^{U'})$. $\qquad \big(H^0(\varprojlim\ ) = \varprojlim H^0 \;\vdots\; \big)$

filtrierte Colimiten sind exakt

$\blacksquare$

$H^\bullet_{cts}$ als derivierte Funktorkohomologie.

(Referenz: S. Shatz: Profinite Groups, Arithmetic & Geometry, II. 1+2+3)
Sei G eine proendliche Gruppe, $\mathfrak{U}$ wie in 7.10.

Def. (a) Mod_G^d: Kategorie diskreter G-Moduln.

(b) Für $A \in Mod_G$ definiere $A^d = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} A^U$

(c) Für $H \leq G$ abg. UG und $A \in Mod_H^d$ definiere $ct\text{-}CoInd_H^G A := \{ f: G \to A \text{ stetig} \mid \forall h \in H: f(hg) = hf(g) \}$

mit G-Operation $(gf)g' := f(g'g)$

Bemerkung. $H \leq G$ offene Untergruppe $\Rightarrow$ $ct\text{-}CoInd_H^G A = CoInd_H^G A$.

Lemma. (ii)

(a) Mod_G^d ist abelsche Kategorie

(b) $A \mapsto A^d$ definiert Funktor $Mod_G \to Mod_G^d$ (rechtsadjungiert zu $Mod_G^d \hookrightarrow Mod_G$)

(c) $ct\text{-}CoInd_H^G : Mod_H^d \to Mod_G^d$ ist Funktor

(d) $I \in Mod_G$ injektiv $\Rightarrow$ I^d injektiv in Mod_G^d.

(e) $I \in Mod_{\mathbb{Z}}$ injektiv $\Rightarrow$ $ct\text{-}CoInd_e^G I \in Mod_G^d$ injektiv.

Korollar. Mod_G^d hat genügend viele Injektive.

Satz. (Shapiro) $H \leq G$ abgeschlossen, $A \in Mod_H^d$. Dann:

$$H^i_{cts}(H, A) \xrightarrow{\sim} H^i_{cts}(G, ct\text{-}CoInd_H^G A) \quad \text{(funktoriell in } A)$$

Insbesondere: $H^i_{cts}(G, cts\text{-}CoInd_e^G A) = 0 \quad \forall i \geq 1,\ A \in Mod_{\mathbb{Z}}$.

Korollar. $(H^\bullet_{cts}(G, A))$ (als δ-Funktor) ist isomorph zur derivierten Funktorkohomologie zu $F: Mod_G^d \to \underline{Ab}$, $A \mapsto A^G$

Beweis. des Korollars.
Geg. sind 2 δ-Funktoren mit einer gemeinsamen Menge von azyklischen Objekten und einer der δ-Funktoren (der derivierte..) ist universell $\Rightarrow$ δ-Funktoren sind isomorph.

Alternativ:

Sei $\tilde{H}^i(G,A) := (R^iF)(A)$. Dann: $\tilde{H}^0(G,A) = A^G = H^0_{cts}(G,A) = \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \underbrace{H^0(G/U, A^U)}_{= A^G}$

Ist man $0 \to A \to ct\text{-}CoInd_c^G A' \to A'' \to 0$ gegeben, so erhält man wegen

$$H^i_{cts}(G, ct\text{-}CoInd^G A') \underset{Satz}{=} 0 \underset{\substack{Lemma \\ (e)}}{=} \tilde{H}^i(G, ct\text{-}CoInd^G A')$$

$(i = 1!)$

$(A \hookrightarrow A'$ injektiv Einhüllende als $\mathbb{Z}$-Modul$)$

dann:

$$\begin{array}{ccccccc} H^0_{cts}(--) & \to & H^0_{cts}(G,A'') & \to & H^1_{cts}(G,A) & \to & 0 \\ \| & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \\ \tilde{H}^0(--) & \to & \tilde{H}^0(G,A'') & \to & \tilde{H}^1(G,A) & \to & 0 \end{array}$$

$\Leftarrow$ Isomorph. $\|$
extern oder univ.-δ-Fkt.

+ Induktion.

$\boxtimes$

Def. 7.11. G, G' proendlich, $A \in Mod^d_G$, $A' \in Mod^d_{G'}$

$(\rho: G' \to G,\ \lambda: A \to A')$ heißen (kohomologisch) kompatibles Paar $:\Longleftrightarrow$

ρ ist stetiger Gruppenhomomorphismus, $\lambda: A \to A'$ $\mathbb{Z}$-Modulhom., s.d.

$$\forall g' \in G'\ \forall a \in A:\ \lambda(\rho(g')a) = g'\lambda(a)$$

zu einem solchen Paar erhält man $(H^i_{cts}(G,A) \xrightarrow{H^i_{cts}(\rho,\lambda)} H^i_{cts}(G',A'))_{i\in\mathbb{Z}}$

Bemerkung 7.12.

(a) Erhalten Inf, Res, Konjugation in topol. Kontext für diskrete G-Moduln.

(b) Die Abb'en Inf, Res, Konj. ergeben sich auch als direkte Limiten der entspr. Abb. für endliche Gruppen

(c) Ist $H \leq G$ offene UG., so $\exists$ Korestriktion wie üblich.

(d) Infl.-Restr.-Sequenz gilt auch für $N \trianglelefteq G$ abg. Normalteiler.

Proposition 7.13. G proendlich, $N \trianglelefteq G$ abg. Normalteiler, $A \in Mod^d_G$ und $H^j_{cts}(N,A) = 0$ $j = 1..,i-1$

Dann ist:

$$0 \to H^i_{cts}(G/N, A^N) \to H^i_{cts}(G,A) \to H^i_{cts}(N,A)^{G/N} \text{ exakt.}$$

Galoiskohomologie

$L|K$ galoissch (nicht notw. endlich!)

Wähle $K^{alg} \supseteq K^{sep} \supseteq L$; $\quad A \in \mathrm{Mod}^{d}_{Gal(L/K)}$ ← Krull-Topologie.

Def. 7.14.

$$H^i(L/K, A) := H^i_{cts}(Gal(L/K), A)$$

(falls $L = K^{sep}$: $H^i(K, A) := H^i(L/K, A)$)

Bsp. 7.15. • $(L, +)$, $(L^\times, \cdot)$ sind diskrete $Gal(L/K)$-Moduln

Sei $U = Gal(L/E)$ für E/K endl. galoissch $(L \neq E)$ $(\rightsquigarrow \mathcal{U})$

<u>Dann:</u>

$$L^{\times U} = E^\times \qquad (\Rightarrow A = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} A^U)$$

Satz 7.16. (Hilbert 90) $\quad H^1(L/K, L^\times) = 0.$

Beweis.

oE L/K endlich wegen 7.10. $\left(H^1(L/K, L^\times) = \varinjlim_{\substack{L|E|K \\ \text{endlich}}} H^1(E/K, E^\times) \right)$

Für $E|K$ endlich galoissch. Sei $0 \neq f \in Z^1(E/K, E^\times)$

Dedekind unabh. von Charakteren $\Rightarrow$ $\sigma: E^\times \to E^\times$, $\sigma \in Gal(E/K)$ sind E-l.u.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{\sigma \in Gal(E/K)} f(\sigma) \cdot \sigma}_{\text{Abb. } E^\times \to E} \neq 0 \quad (\text{in } E[Gal(E|K)])$$

wähle $\alpha \in E^\times$ s.d. $z = \sum_{\sigma \in Gal(E/K)} f(\sigma) \cdot \sigma(\alpha) \neq 0$.

<u>Nun:</u> Für $\tau \in Gal(E/K)$: $\tau^{-1}(z) = \sum_{\underbrace{\sigma \in Gal(E/K)}_{=:G}} \tau^{-1}(f(\sigma)\sigma(\alpha)) = \sum_{\sigma \in G} \frac{f(\tau^{-1}\sigma)}{f(\tau^{-1})} \tau^{-1}(\sigma(\alpha))$

$$\left(f(\tau^{-1}\sigma) = {}^{\tau^{-1}}f(\sigma) \cdot f(\tau^{-1}) \right) \qquad = \sum_{\sigma \in G} \frac{f(\sigma)}{f(\tau^{-1})} \sigma(\alpha) = \frac{z}{f(\tau^{-1})}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(\tau^{-1}) = \frac{z}{\tau^{-1}(z)}, \quad \text{d.h. } f = \partial z. \Rightarrow f \in B^1(\text{--})$$

$\blacksquare$

12.06.18
Lec 2.

Korollar 7.17. $L|K$ endl., zyklisch galoissch, $\langle \sigma \rangle = G = Gal(L|K)$. Dann:

$$\ker(N_{L|K} : L^\times \to K^\times) = \operatorname{im}\left(L^\times \to L^\times,\ \alpha \mapsto \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}\right)$$

Beweis. verwende zyklische Auflösung $P^\cdot$

$$\dots \to \underset{-2}{\mathbb{Z}[G]} \xrightarrow{\sum \sigma^i} \underset{-1}{\mathbb{Z}[G]} \xrightarrow{\sigma - 1} \underset{0}{\mathbb{Z}[G]} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

$$0 = H^1(L|K, L^\times) = H^1(\mathrm{Hom}_G(P^\cdot, L^\times)) = H^1(\dots \leftarrow L^\times \leftarrow L^\times \leftarrow L^\times \leftarrow \dots)$$

$$\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \longleftarrow\!\shortmid\ \alpha$$

$$N_{L|K}(\beta) \longleftarrow\!\shortmid\ \beta$$

Satz 7.18. $H^i(L/K, L) = 0 \quad \forall i > 0$

Beweis. wie in 7.16 oE $L|K$ endlich. <u>Dann:</u> $L \simeq K[G] = \mathrm{Ind}_e^G K \cong \mathrm{CoInd}_e^G K$ als $K[G]$-Modul (Normalbasissatz)

<u>Nun:</u> $H^i(L/K, \mathrm{CoInd}_e^G K) \underset{\text{Shap.}}{\simeq} H^i(K/K, K) = 0 \quad \forall i \geq 1$.

(Normalbasissatz: L | endl. galoissch K $\Rightarrow \exists\, b \in L : \{gb \mid g \in Gal(L|K)\}$ ist K-Basis von L.)

∎

Def. 7.19. $Br(K) := H^2(K, (K^{sep})^\times)$ heißt Brauergruppe von K.

Proposition 7.20. Folgende Sequenz ist linksexakt.

$$0 \to H^2(L/K, L^\times) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} Br(K) \xrightarrow{\mathrm{Res}} Br(L)$$

Beweis. Inflations-Restriktionssequenz. und $(L^{sep})^\times = (K^{sep})^\times$ und $\left((K^{sep})^\times\right)^{G_L = Gal(L^{sep}/L)} = L^\times$

∎

Bsp. 7.21. K endlicher Körper $\Rightarrow Br(K) = 0$.

Beweis. <u>z.z.:</u> $H^2(L/K, L^\times) = 0$. für L/K endlich.

<u>Ü:</u> $L^\times$ endl., $L|K$ endl. zyklisch $\Rightarrow \# H^2(L/K, L^\times) = \# H^1(L/K, L^\times) \underset{H.90}{\Rightarrow} H^2(L/K, L^\times) = 0$.

∎

Kummertheorie. (vgl. Aufgabe 5) $\mu_n = \{\zeta \in K^{alg} \mid \zeta^n = 1\}$ (implizit: char $K \nmid n$!)

$A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}} \Rightarrow A[n] = n$-Torsionsuntermodul $\in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$
$= \{a \in A \mid n \cdot a = 0\}$

$(K^{sep})^\times[n] = \mu_n$.

Proposition 7.22. Falls $\operatorname{char} K \nmid n$, so existieren kanonische Isomorphismen

$$\alpha : H^1(K, \mu_n) \xleftarrow{\sim} K^\times / K^{\times n}, \quad \beta : H^2(K, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Br}(K)[n].$$

Beweis. Verwende die Kummersequenz: $0 \to \mu_n \to (K^{sep})^\times \xrightarrow[x \mapsto x^n]{} (K^{sep})^\times \to 0$

wende $H^\bullet_{cts}(G_K, -)$ an:

$$\ldots \to K^\times \xrightarrow[x \mapsto x^n]{} K^\times \to H^1(K, \mu_n) \to 0 \xrightarrow{\text{Hilbert 90}} 0 \to H^2(K, \mu_n) \to \operatorname{Br}(K) \xrightarrow{x \mapsto n \cdot x} \operatorname{Br}(K)$$

$$\Rightarrow K^\times / K^{\times n} \cong H^1(K, \mu_n), \quad H^2(K, \mu_n) \cong \operatorname{im}(H^2(K, \mu_n) \to \operatorname{Br}(K)) = \ker(x \mapsto nx) = \operatorname{Br}(K)[n].$$ ▨

Bemerkung 7.23. Explizite Beschreibung von α!

Sei $x \in K^\times$, sei $y \in (K^{sep})^\times$ eine n-te Wurzel. Sei $\chi_x : G_K \to \mu_n$, $\sigma \mapsto \frac{\sigma(y)}{y}$

Dann ist $\chi_x \in Z^1(G_K, \mu_n)$ und $\alpha(x \cdot K^{\times n}) \underset{!}{=} [\chi_x]$.

Anwendung.

Lemma 7.24. $L|K$ galoisch (in K^{sep}), gelte $\mu_n \subseteq L$, $\operatorname{char} K \nmid n$.

Dann: α induziert Isomorphismus: $(K^\times \cap L^{\times n}) / K^{\times n} \xrightarrow{\sim} H^1(L/K, \mu_n)$

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
(K^\times \cap L^{\times n}) / K^{\times n} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dashed, "\ker \to"'] & H^1(L/K, \mu_n) \arrow[d, "\substack{\text{inf.-Rest.} \\ (\text{benötigt } \mu_n = \mu_n^{G_L}) \\ (\Leftrightarrow \mu_n \subseteq L\,!)}"] \\
K^\times / K^{\times n} \arrow[r, "\alpha_K", "\sim"'] \arrow[d, "\text{kommutiert z.B. wg. 7.23.} \to"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & H^1(K, \mu_n) \arrow[d] \\
L^\times / L^{\times n} \arrow[r, "\alpha_L", "\sim"'] & H^1(L, \mu_n)
\end{tikzcd}$$

▨

Kor. 7.25. $\operatorname{char} K \nmid n$, $\mu_n \subseteq K$, L/K zyklisch von Grad n $\Rightarrow \exists x \in K^\times : L = K(\underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\text{beliebige } n\text{-Wurzel}})$.

Beweis. 7.24 anwenden auf L/K, $\mu_n \subseteq K$! $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \operatorname{Gal}(L/K))$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xleftarrow{\sim} (K^\times \cap L^{\times n}) / K^{\times n} \quad \text{wähle } y \in L^\times.$$

$$1 \longleftarrow y^n$$

$\chi_{y^n} : G_K \to \mu_n$, $\sigma \mapsto \frac{\sigma(y)}{y}$ hat Ordnung n.

$\underset{[L:K]=n}{\Longrightarrow}$ $L = K(y)$. y hat n Galois-Konjugierte. ▨

Theorem 7.26. (Kummer-Dualität) $L|K$ abelsche Galoiserw., so dass $Gal(L|K)$ von $n \in \mathbb{N}$ annulliert wird, gelte $\mathrm{char}\, K \nmid n$ und $\mu_n \subseteq K$. Sei $\Delta := L^{\times n} \cap K^{\times}$.

Dann: $L = K(\sqrt[n]{\Delta})$ und

$$(\cdot,\cdot) : \underbrace{Gal(L|K)}_{\text{i.A. kpt. ab. Gruppe}} \times \underbrace{\Delta / K^{\times n}}_{\text{diskreter Modul}} \longrightarrow \mu_n$$
$$(\sigma, \alpha^n) \longmapsto \left(\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}\right) \quad (\alpha \in L^{\times})$$

ist eine perfekte Paarung.

(perfekt: $(\sigma, \alpha) = 0 \ \forall \alpha \Rightarrow \sigma = id$; $(\sigma, \alpha) = 0 \ \forall \sigma \Rightarrow \alpha \in K^{\times n}$)

Beweis. s. Sharifi. ▨

(7.24: $(\sigma, \alpha) = 0 \ \forall \sigma \Rightarrow \alpha \in K^{\times n}$)

Korollar 7.27. $\mathrm{char}\, K \nmid n$, $\mu_n \subseteq K$, $L|K$ die maximale abelsche Erweiterung von K, so dass n $Gal(L|K)$ annulliert, so gilt: $Gal(L|K) \cong \underbrace{Hom(\underbrace{K^{\times}/K^{\times n}}_{\text{diskret}}, \mu_n)}_{\text{kpt.}}$

Korollar 7.28. $\mathrm{char}\, K = 0$, $K \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \Rightarrow G_K^{ab} \cong Hom_{cts}(\widehat{K^{\times}}, \varinjlim \mu_n)$ ▨

$\left(\widehat{K^{\times}} = \varprojlim_n K^{\times}/K^{\times n}\right)$

08. KLASSENFORMATIONEN

K Körper, $K^{sep} \mid K$ separabler Abschluss.

A diskreter G_K-Modul. $\left(A = \bigcup\limits_{\substack{L \mid K \\ \text{endl. galoissch}}} A^{G_L} \right)$

(evtl. trägt A noch weitere gröbere Topologie)

$$\mathcal{F}_K^{sep} = \{ L \subseteq K^{sep} \mid L \text{ endl. Erw. von } K \}, \quad \mathcal{G}_K := \{ L \in \mathcal{F}_K^{sep} \mid L \mid K \text{ galoissch} \}$$

Def. 8.1. Eine Klassenformation für K ist ein Paar (A, inv) bestehend aus einem diskreten G_K-Modul A und einer Familie $\mathrm{inv} = (\mathrm{inv}_L)_{L \in \mathcal{F}_K^{sep}}$ von Homomorphismen

$$\mathrm{inv}_L : H^2(L, A) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{so dass}$$

Axiom I: $\forall L \in \mathcal{F}_K^{sep} : \; H^1(L, A) = 0$

Axiom II: (a) $\forall L \in \mathcal{F}_K^{sep}$: inv_L ist ein Isomorphismus

(b) $\forall M \mid L$ auf $\mathcal{F}_K^{sep}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd}
H^2(L, A) \arrow[r, "\mathrm{inv}_L", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, "{[M:L] \cdot -}"] \\
H^2(M, A) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{inv}_M"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Bsp. (später)

(a) K lokaler Körper, $A = (K^{sep})^\times$, $\mathrm{inv} = ?$

(b) K globaler Körper, $A = \varinjlim\limits_{L \in \mathcal{F}_K^{sep}} \underbrace{\mathbb{A}_L^\times / L^\times}_{\text{„Idelenklassengruppe"}}$, $\mathrm{inv} = ??$

Bemerkung. (A, inv) Klassenformation für $K \Rightarrow$ Einschränkung ist Klassenformation für L $\forall L \in \mathcal{F}_K^{sep}$.

<u>Notation</u>:
- $A_L := A^{G_L}$ für $L \in \mathcal{F}_K^{sep}$.
- $\mathrm{Res}_{L/E}$, $\mathrm{Cor}_{L/E}$ für L/E in $\mathcal{F}_K^{sep}$
- $N_{L/E} = \mathrm{Cor}_{L/E}$ (für H^0): $A_L \longrightarrow A_E$, $a \longmapsto \sum\limits_{g \in G_E/G_L} g \cdot a$

Facts 8.2. (i) $\mathrm{Res}_{L|E} : H^2(E,A) \longrightarrow H^2(L,A)$ ist surjektiv
(ii)

(ii) $\mathrm{Cor}_{L|E} : H^2(L,A) \longrightarrow H^2(E,A)$ ist injektiv

(iii) Für $\sigma \in G_K$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} H^2(L,A) \arrow[d, "\sigma^*"] \arrow[dr, "\mathrm{inv}_L"] & \\ H^2(\sigma L,A) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{\sigma L}"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Facts 8.3. $\forall L \in \mathcal{F}_K^{sep}\ \forall E \in \mathcal{G}_L$:

(i) $H^1(E/L, A_E) \underset{\text{Inf-Res!}}{=} 0$ (ii) inv_L induziert Isomorphismus $H^2(L/E, A_L) \xrightarrow{\sim} \frac{1}{[L:E]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.