Bemerkung. Sei F kontravariant, $F : {}_R\underline{\mathrm{Mod}}^{op} \to \underline{Ab}$

1) $I \in {}_R\mathrm{Mod}$ injektiv $\iff$ $I \in {}_R\mathrm{Mod}^{op}$ projektiv

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

$\mathrm{Hom}_{{}_R\mathrm{Mod}}(\cdot, I)$ exakt $\qquad \mathrm{Hom}_{{}_R\mathrm{Mod}^{op}}(I, \cdot)$ exakt

2) F <u>linksexakt</u>: $\quad 0 \to M' \to M \to M''$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}^{op}$ exakt

$\Rightarrow 0 \to FM' \to FM \to FM''$ in $\underline{Ab}$ exakt, <u>d.h.</u>:

$M'' \to M \to M' \to 0$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ exakt $\Rightarrow 0 \to FM' \to FM \to FM''$ in $\underline{Ab}$ exakt

d.h. Für F linksexakt, kontravariant, definiere $(R^iF)(M) := H^i(FP^\bullet)$

mit $M \to P^\bullet$ inj. Auflösung in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}^{op}$

$\leftrightarrow P^\bullet \to M$ proj. Auflösung in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$.

<u>Ext</u>.

$\forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $\quad \mathrm{Hom}_R(\cdot, N) : {}_R\underline{\mathrm{Mod}}^{op} \to \underline{Ab}$ ist linksexakt.

$\forall M \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $\quad \mathrm{Hom}_R(M, \cdot) : {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{Ab}$ ist linksexakt.

Def. 5.14.

- $\mathrm{Ext}^i_R(\cdot, N) := R^i(\mathrm{Hom}_R(\cdot, N))$ (Auflösung mit projektiven)

- $\overline{\mathrm{Ext}}^i_R(M, \cdot) := R^i(\mathrm{Hom}_R(M, \cdot))$ (Auflösung mit injektiven)

Satz 5.15. (aus 5.12, 5.13)

Ist $0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ exakt, so

$\exists$ lange exakte Sequenz $\quad 0 \to \mathrm{Hom}_R(M, Q') \to \mathrm{Hom}_R(M, Q) \to \mathrm{Hom}_R(M, Q'') \to \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M, Q') \to \dots$

$\exists$ lange exakte Sequenz $\quad 0 \to \mathrm{Hom}_R(Q'', N) \to \mathrm{Hom}_R(Q, N) \to \mathrm{Hom}_R(Q', N) \to \mathrm{Ext}^1_R(Q'', N) \to \dots$

Weiter gelten: $\overline{\mathrm{Ext}}^i(M, Q) = 0$ falls Q injektiv und $i \geq 1$.

$\mathrm{Ext}^i(Q, N) = 0$ falls Q projektiv und $i \geq 1$.

<u>Bem.</u> $\mathrm{Ext}^1_R(Q, N) = 0 \ \forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \Rightarrow Q$ projektiv (analog $\overline{\mathrm{Ext}}^1_R \dots$)

Interpretation von Ext^1_R und $\overline{\mathrm{Ext}}^1_R$:

Definiere $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) := \{ \text{kurze ex. Seq. } \mathcal{E}: 0 \to N \to E \to M \text{ in } {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \} / \sim$

wobei $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}' :\Longleftrightarrow \exists$ komm. Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & M \arrow[r] & 0 & \text{in } {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \\ & & E' \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

5-Lemma $\Rightarrow$ φ Isomorphismus

Ü: $\sim$ ist Äquivalenzrelation.

Addition auf $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$: (Baer, Summe)

Definiere $\mathcal{E} +_B \mathcal{E}'$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N\oplus N \arrow[r] \arrow[d, "+"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E\oplus E' \arrow[r] \arrow[d] & M\oplus M \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \text{P.O.} \arrow[r] & M\oplus M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[u, "="] & \text{P.B.} \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u, "\Delta = \text{Diag.}"] & 0 \end{tikzcd}$$

P.O.: Pushout

P.B.: Pullback.

Satz 5.16. (Jacobson BA II, 6.9)

$\exists$ nat. Isomorphismus: $\left(\mathrm{Ext}^1_R(M,N), +_B\right) \cong \left(\mathrm{Ext}^1_R(M,N), +\right) \cong \left(\overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,N), +\right)$ ▨

Ausblick: Doppelkomplexe.

Def. Ein Doppelkomplex (in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$) ist ein Tupel

$$C^{\bullet\bullet} = \left(C^{i,j}, d_h^{i,j}, d_v^{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \qquad \text{(s. Weibel A.A)}$$

so dass $\forall (i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $d_h^{i,j}: C^{i,j} \to C^{i+1,j}$, $d_v^{i,j}: C^{i,j} \to C^{i,j+1}$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$

erfüllen: $d_h^{i+1,j} \circ d_h^{i,j} = 0$ und $d_v^{i,j+1} \circ d_v^{i,j} = 0$ und $d_v^{i+1,j} \circ d_h^{i,j} + d_h^{i,j+1} \circ d_v^{i,j} = 0.$

Darstellung als "Gitter":

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C^{i,j+1} \arrow[r, "d_h^{i,j+1}"'] & C^{i+1,j+1} \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C^{i,j} \arrow[u, "d_v^{i,j}"'] \arrow[r, "d_h^{i,j}"'] & C^{i+1,j} \arrow[u, "d_v^{i+1,j}"'] \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

(1) $\Rightarrow$ alle Zeilen sind Komplexe

(2) $\Rightarrow$ alle Spalten sind Komplexe

(3) $\Rightarrow$ $(d_h^{i,j}(-1)^j)_{j\in\mathbb{Z}}$ und $(d_v^{i,j}\circ(-1)^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sind Abbildungen von Komplexen in benachbarten Spalten (i und $i+1$) bzw. Zeilen (j und $j+1$)

Def. Der Totalkomplex eines Doppelkomplexes $C^{i,j}$ ist $\mathrm{Tot}\, C^{\bullet\bullet} := TC^\bullet$ definiert durch

$$TC^i := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} C^{i-j,j} \quad \text{und} \quad d^i_{TC^\bullet}: TC^i \longrightarrow TC^{i+1} \quad \text{dabei ist}$$

$d^i_{TC^\bullet}$ ist die Summe (über alle j) der Abbildungen

$$C^{i-j,j} \xrightarrow[d_h^{i-j,j}\oplus d_v^{i-j,j}]{} C^{i-j+1,j} \oplus C^{i-j,j+1} \hookrightarrow TC^{i+1}$$

Wir betrachten hier nur Doppelkomplexe für welche (F) gilt.

(F) $\forall n\in\mathbb{Z}: \#\{(i,j) \mid C^{i,j}\neq 0 \text{ und } i+j=n\} < \infty$ ($\Rightarrow$ Irrelevant ob $\bigoplus$ oder $\prod$)

Def. Ein Morphismus $D^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} D'^\bullet$ in $Ch^\bullet(R)$ heißt Quasi-Isomorphismus $:\Leftrightarrow$

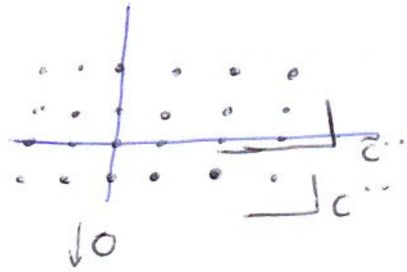
$\forall i\in\mathbb{Z}: \quad H^i(f^\bullet): H^i(D^\bullet) \longrightarrow H^i(D'^\bullet)$ ist Isomorphismus.

<u>Ü</u>: (a) $\mathrm{Tot}: \underbrace{Ch^{\bullet,\bullet}(R)}_{\text{abelsche Kategorie}} \longrightarrow Ch^\bullet(R)$ ist ein additiver Funktor abelscher Kategorien.

(b) Gilt (F), so ist Tot exakt und es gilt weiter: Sind alle Zeilen oder alle Spalten in $C^{\bullet,\bullet}$ exakt, so ist $\mathrm{Tot}\, C^{\bullet,\bullet}$ exakt.

(c) Gilt in (b) zusätzlich: alle Spalten von $C^{\bullet,\bullet}$ exakt und $C^{i,j}=0$ $\forall j\leq -2$ und ist $\tilde{C}^{\bullet,\bullet}$ der Doppelkomplex mit $\tilde{C}^{i,j} := C^{i,j}$ $\forall j\geq 0$ und $\tilde{C}^{i,j}=0$ $\forall j<0$, Dann ex. ein "natürlicher" Quasi-Isomorphismus

$$\operatorname{Tot} \tilde{C} \longleftarrow (C^{j,-1})_{j \in \mathbb{Z}} \quad \text{in } Ch^{\cdot}(R)$$



Beispiel: $M, N \in {}_R\underline{Mod}$.

$P^{\cdot} \to M$ proj. Auflösung $(\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^{0} \to 0 \to \cdots)$

$N \to I^{\cdot}$ inj. Auflösung $(\cdots 0 \to 0 \to \ldots \to I^{0} \to I^{1} \to \ldots)$

$C^{\cdot,\cdot} := \operatorname{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot})$ ist ein Doppelkomplex!

$$\begin{tikzcd}
C^{i,j} = \operatorname{Hom}_R(P^{-i}, I^{j}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi \mapsto d_{I^{\cdot}}^{j} \circ \varphi"] & C^{i+1,j} = \operatorname{Hom}_R(P^{-i-1}, I^{j}) \\
C^{i,j+1} = \operatorname{Hom}_R(P^{-i}, I^{j+1}) &
\end{tikzcd}$$

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ d_{P^{\cdot}}^{-i-1} \circ (-1)^{j}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\operatorname{Hom}(M, I^{\cdot})} \arrow[r] & \operatorname{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot}) \\
 & \operatorname{Hom}(P^{\cdot}, N) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Hom}(M, I^{\cdot}) \to \operatorname{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot})$ ← hat exakte Zeilen

$\operatorname{Hom}(P^{\cdot}, N) \to \operatorname{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot})$ ← hat exakte Spalten.

2 Doppelkomplexe →

Ü (c) $\Rightarrow$ $\operatorname{Hom}(M, I^{\cdot}) \to \operatorname{Tot}(\operatorname{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot}))$

$\operatorname{Hom}(P^{\cdot}, N) \to \operatorname{Tot}(\operatorname{Hom}(P^{\cdot}, I^{\cdot}))$ sind Quasi-Isomorphismen

$\operatorname{Hom}(M, I^{\cdot}) \rightsquigarrow \operatorname{Ext}^{i}(M, N)$

$\operatorname{Hom}(P^{\cdot}, N) \rightsquigarrow \overline{\operatorname{Ext}}^{i}(M, N)$

$$\Rightarrow \operatorname{Ext}^{i}(M, N) \cong \overline{\operatorname{Ext}}^{i}(M, N).$$

Erweiterung: $0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0$ exakt in ${}_R\underline{Mod}$ und

$0 \to I'^{\cdot} \to I^{\cdot} \to I''^{\cdot} \to 0$ exakte Seq. von injektiven Auflösungen (horse shoe lemma)

erhalten Morphismen von kurzen exakten Sequenzen von Komplexen!

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, I'^{\bullet}) \to \mathrm{Hom}(M, I^{\bullet}) \to \mathrm{Hom}(M, I''^{\bullet}) \to 0$$

$$\downarrow q\text{-iso}$$

$$\uparrow q\text{-iso}$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q') \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q) \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q'') \to 0$$

$\rightsquigarrow$ Isomorphismus langer ex. Kohomologiesequenzen

Satz 5.17. $\forall i \geq 0: \forall M, N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $\exists$ in (M,N) funktorielle Iso's

$\mathrm{Ext}^i(M,N) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N)$ und die langen ex. Kohomologiesequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots \to & \mathrm{Ext}^i(M,N') & \to & \mathrm{Ext}^i(M,N) & \to & \mathrm{Ext}^i(M,N'') & \to & \mathrm{Ext}^{i+1}(M,N') & \to \dots \\
& \downarrow \wr & /// & \downarrow \wr & /// & \downarrow \wr & /// & \downarrow \wr & \\
\dots \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N') & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N) & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N'') & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^{i+1}(M,N') & \to \dots
\end{array}$$

Tor. A kommutativer Ring, $A \to R$ eine A-Algebra und R sei A-flach.

Wissen: Die Funktoren ${}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $M \otimes_A -$, $- \otimes_A N$ sind rechtsexakt.

Def. 5.18.
$$\mathrm{Tor}_i^A(M, \cdot) := L_i(M \otimes_A \cdot)$$

$$\overline{\mathrm{Tor}}_i^A(\cdot, N) := L_i(\cdot \otimes_A N)$$

Satz. 5.19. (i) Erhalten lange ex. Sequenz in beiden Argumenten

(ii) $Q \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ ist A-flach $\iff \forall i \geq 1: \mathrm{Tor}_i^A(Q,N) = 0 \ \forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$

$\iff \forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}: \mathrm{Tor}_1^A(Q,N) = 0$

(iii) $\mathrm{Tor}_i^A \cong \overline{\mathrm{Tor}}_i^A$. (nat. isomorph)

06. Gruppenkohomologie

· G Gruppe, $\mathbb{Z}[G]$ Gruppenring zu G, d.h.

$$\mathbb{Z}[G] := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}[g] \quad (\text{freier } \mathbb{Z}\text{-Modul mit Basis } G)$$

als additive Gruppe.

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) := \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} a_h b_{h^{-1}g}\right) g$$

$\mathbb{Z}[G]$ ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra, 0 klar, $1 = 1 \cdot e$.

Def. 6.1. Ein G-Modul ist ein (links) $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

schreibe $\mathrm{Hom}_G(\cdot,\cdot)$ für $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\cdot,\cdot)$, ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ für ${}_{\mathbb{Z}[G]}\underline{\mathrm{Mod}}$ (manchmal auch $\underline{\mathrm{Mod}}_G$, $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{Z}[G]}$)

Alternativ: M trägt $\mathbb{Z}$-lineare Links-Operation von G:

$\cdot : G \times M \to M$, diese erfüllt $g(m_1 + m_2) = gm_1 + gm_2$

Def. 6.2. Ein G-Modul M heißt trivial $:\Leftrightarrow \forall g \in G : \forall m \in M : g \cdot m = m$.

Bsp: Schreibe $\mathbb{Z}$ (auch) für den trivialen G-Modul.

Lemma 6.3. Sei $\varepsilon := \varepsilon_G : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$, $\sum_g a_g g \mapsto \sum_g a_g$ die Augmentationsabbildung.

Dann ist $I_G := \ker \varepsilon_G$ das Augmentationsideal. Es ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis

$B = \{ g - 1 \mid g \in G \setminus \{e\} \}$

Beweis. B $\mathbb{Z}$ l.u.: ✓ $\quad$ $\underline{B \text{ ES von } I_G}$: $\quad x = \sum_g a_g g \in I_G \Leftrightarrow \sum_g a_g = 0 \Rightarrow x = x - 0 \cdot 1 = \sum_g a_g (g - 1)$ ☒

Def. 6.4. Sei M ein G-Modul.

(i) $M^G := \{ m \in M \mid \forall g \in G : gm = m \}$ der Untermodul der G-Invarianten von M.

(ii) $M_G := M / I_G M$ der Faktormodul der G-Koinvarianten von M.

Bemerkung: (i) (*) $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \cong M^G \quad (\varphi \mapsto \varphi(1))$

(ii) (**) $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \cong M / I_G M = M_G$.

Funktoren ${}_G\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$

Nachtrag zu $\otimes$: $A \to R$, $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$ ($\otimes_A$) behandelt

2. Möglichkeit für Tor_i zu $\otimes$: verwende $\otimes_R$

$${}_{R^{op}}\underline{\mathrm{Mod}} \times {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}} \quad \text{(bifunktor)}$$

Bem: ${}_{R^{op}}\underline{\mathrm{Mod}} \cong \underline{\mathrm{Mod}}_R$. ← Rechtsmoduln

Erhalten: $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = L_i(\_ \otimes_R N)(M) \overset{\text{Thm.}}{=} (L_i(M \otimes_R -))(N)$.

Es gelten analoge Aussagen zu 5.19.

Proposition. ${}_{\mathbb{Z}[G]}\underline{\mathrm{Mod}} \xrightarrow{\sim} {}_{\mathbb{Z}[G^{op}]}\underline{\mathrm{Mod}} = {}_{\mathbb{Z}[G]^{op}}\underline{\mathrm{Mod}}$ ist ein Isomorphismus von Kategorien unter folgendem Funktor.

$$(M, \cdot : G \times M \to M) \longmapsto (M, \cdot^{op} : M \times G \to M, (m,g) \mapsto g^{-1} m)$$

Bsp. Sei $N_G := \sum_{g \in G} g$, falls G endlich, $N_G = 0$ sonst. Dann:

(a) $\mathbb{Z}[G]^G = \mathbb{Z} \cdot N_G$ (b) $\mathbb{Z}[G]_G \cong \mathbb{Z}$ ← via Augmentationsabb.

Gruppen (Ko-) Homologie.

Sei M ein G-Modul.

Def. 6.5.
$$H^i(G,M) := \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \overset{(*)}{=} (R^i(-)^G)(M)$$

$$H_i(G,M) := \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \overset{(**)}{=} (L_i(-)_G)(M)$$

Können kohomologischen Formalismus von Ext und Tor auf $H^i(G,\cdot)$ und $H_i(G,\cdot)$ anwenden ...

Explizite Beschreibung: (nur für Kohomologie)

Für $i \geq 0$ sei $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$ ein G-Modul durch $g \cdot (g_0, \dots, g_i) := (gg_0, \dots, gg_i)$

Lemma 6.6. $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$ ist ein freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul mit Basis $\{(1, g_1, \dots, g_i) \mid (g_1, \dots, g_i) \in G^i\}$ ∎

Lemma 6.7. Der Komplex Std_G in $\mathrm{Ch}^\bullet({}_G\underline{\mathrm{Mod}})$

$$\mathbb{Z}[G^{i+1}] \xrightarrow{d^{-i}} \mathbb{Z}[G^i] \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}[G^2] \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow 0 \quad \text{mit}$$

$-i$ $\qquad -1 \qquad 0$

$$d^{-i}((g_0,\dots,g_i)) := \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (g_0,\dots,g_{j-1},g_{j+1},\dots,g_i)$$

zusammen mit $\varepsilon: \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ ist eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ (als trivialer G-Modul!)

Beweis.

$d^{i+1} \circ d^{i} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$ (i in Vorzeichen...)

Auflösung: Zeige dazu $Std_G \to \mathbb{Z} \to 0 \to \dots$ ist nullhomotop.

Zeige dazu dass die Abb'en $s^{-i}: \mathbb{Z}[G^{i+1}] \to \mathbb{Z}[G^{i+2}]$, $(g_0,\dots,g_i) \mapsto (1,g_0,\dots,g_i)$ (i "$\in \mathbb{Z}$") eine Nullhomotopie ist.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}[G^{i+1}] \arrow[r, "d^{-i}"] \arrow[dl, "s^{-i}"'] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z}[G^{i}] \arrow[r] \arrow[dl, "s^{-i+1}"] & \cdots \\
\mathbb{Z}[G^{i+2}] \arrow[r, "d^{-i-1}"'] & \mathbb{Z}[G^{i+1}] \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

$$id_{\mathbb{Z}[G^{i+1}]} = d^{-i-1} \circ s^{-i} + s^{-i+1} \circ d^{-i}.$$

∎

Bar-Auflösung: Es gilt: $Bar_G = Std_G$.

Lemma 6.7.b. (ii) (a) Die Elemente $[g_1|\dots|g_i] := (1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2g_3\cdots g_i)$ für $(g_1,\dots,g_i) \in G^i$ bilden eine $\mathbb{Z}[G]$-Basis von $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$.

(b) Es gilt:

$$d^{-i}[g_1|\dots|g_i] = g_1[g_2|\dots|g_i] + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j [g_1|\dots|\hat{g}_j|g_jg_{j+1}|g_{j+2}|\dots g_i]$$

$$+ (-1)^i [g_1|\dots|g_{i-1}].$$

∎

Für $M \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ gilt: $H^i(G,M) = H^i(\underbrace{\mathrm{Hom}_G(Bar_G, M)}_{\text{in } Ch^\bullet(\mathbb{Z})})$ $\|$?

Beh.:

$$\mathrm{Hom}_G(Bar_G^{-i}, M) \xleftarrow[\sim]{\phi} \mathrm{Abb}(G^i, M) =: C^i(G,M)$$ ist $\mathbb{Z}$-linearer Isomorphismus.

$$F = \phi(f) \longleftarrow f$$

Dabei: $G^0 := \{e\}$.

mit $F(g_0[g_1|\dots|g_i]) := g_0 f(g_1,\dots,g_i)$.

Erhalten: induzierte Differentiale $\bar{d}^i : C^i(G,M) \to C^{i+1}(G,M)$
$$f \longmapsto (\phi^{-1} \circ d^{-i} \circ \phi)(f)$$

explizit: $(\bar{d}^i f)(g_0, \dots, g_i) = g_0 f(g_1, \dots, g_i) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(g_0, \dots, \widehat{g_j}, g_j g_{j+1}, g_{j+2}, \dots, g_i)$

(ü).
$$+ (-1)^{i+1} f(g_0, \dots, g_{i-1}).$$

Def. $Z^i(G,M) := \ker \bar{d}^i$, $B^i(G,M) := \operatorname{im} \bar{d}^{i-1}$

$\bar{H}^i(G,M) := Z^i(G,M) / B^i(G,M)$

Für $M \to M'$ G-Modul-Homomorphismus erhalten $C^i(G,M) \to C^i(G,M') \leadsto \bar{H}^i(G,M) \to \bar{H}^i(G,M')$

Proposition 6.8. • Erhalten Kettenkomplexe $(C^i(G,M), \bar{d}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$

• Haben natürliche Isom'en (nach Wahl von Bew_G)
$$H^i(G,M) \xrightarrow{\sim} \bar{H}^i(G,M) \quad + \text{ Funktorialität für } M \to M'.$$

Proposition 6.9. + Kompatibilität für lange exakte Sequenzen

Beweis. obige Überlegungen + 5.17. ∎

Übung 6.10.
- $\bar{H}^0(G,M) = Z^0(G,M) = M^G$ (Randabb.: $m \mapsto gm - m$)
- $Z^1(G,M) = \{ f : G \to M \mid f(gh) = gf(h) + f(g) \ \forall g,h \in G \}$
- Ist M trivial als G-Modul, so gilt $B^1(G,M) = 0$. und folglich
$$\bar{H}^1(G,M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G,M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(G^{ab}, M)$$

Gruppenextensionen.

$$1 \to \underline{A} \to E \to G \to 1 \quad : \text{Erweiterung von } G \text{ um } A$$

abelscher Normalteiler $\leadsto$ A ist G-Modul via Konjugation.

$\{\text{Erweiterung von } G \text{ um } A\}/_{\cong} \underset{\text{Satz}}{=} H^2(G,A)$. triviale Erw.: sind die semidirekten Produkte.

"triviale Erw." $\longleftarrow$ 0

Induzierte Moduln & Shapiro's Lemma.

Def. 6.11. $H \leq G$ Untergruppe, B ein H-Modul.

$$\mathrm{Ind}_H^G(B) := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} B \quad ; \qquad \mathrm{CoInd}_H^G(B) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], B) \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$$

mit $g(\alpha \otimes b) := g\alpha \otimes b$ sowie $(gf)(\alpha) := f(\alpha g)$

heißen induzierte bzw. koinduzierte Darstellungen zu B von H auf G.

Lemma 6.12. Sei $(-)|_H := \mathrm{Res}_G^H : {}_G\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_H\underline{\mathrm{Mod}}$ der Restriktionsfunktor. Dann gilt:

(a) $\mathrm{Ind}_H^G \dashv \mathrm{Res}_G^H$ (b) $\mathrm{Res}_G^H \dashv \mathrm{CoInd}_H^G$

Beweis.

Adjunktion von $\otimes$ und Hom:

$$\mathrm{Hom}_R({}_RL_S \otimes_S {}_SM, {}_RN) \simeq \mathrm{Hom}_S({}_SM, \mathrm{Hom}_R({}_RL_S, {}_RN))$$

sowie $R \otimes_R M \cong M \cong \mathrm{Hom}_R(R, M)$ für:

(a) ${}_RL_S = {}_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G]_{\mathbb{Z}[H]}$, ${}_{\mathbb{Z}[H]}M = B$, ${}_{\mathbb{Z}[G]}N = A$.

(b) andere Wahlen...

Bemerkung 6.13. $H \leq G$ Untergruppe $\Rightarrow \mathrm{Std}_G$ ist proj. Auflösung von $\mathbb{Z}$ als H-Modul. Denn:

$$\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{g \in {}_H\backslash G} g\,\mathbb{Z}[H] \quad \text{ist frei } \mathbb{Z}[H]\text{-Modul.}$$

Satz 6.14. (Shapiro's Lemma) $H \leq G$ Untergruppe

$\forall i \geq 0 \ \exists$ Isom'en $H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G(B)) \cong H_i(H, B)$ und $H^i(G, \mathrm{CoInd}_H^G(B)) \cong H^i(H, B)$

(funktoriell im Argument B).

Beweis.

$$H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G(B)) \simeq H^{-i}(\mathrm{Std}_G \otimes_G \mathrm{Ind}_H^G B) \cong H^{-i}(\mathrm{Std}_G \otimes_G (\mathbb{Z}[G] \otimes_H B))$$

$$\cong H^{-i}(\underbrace{\mathrm{Std}_G|_H}_{\substack{\text{proj. Auflösung} \\ \text{von } \mathbb{Z} \text{ als } H\text{-Modul}}} \otimes_H B) \underset{6.13.}{=} H_i(H, B).$$

H^i analog; verwendet 6.12 und 6.13! $\left(\ldots = H^i(\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Std}_G, \mathrm{CoInd}_H^G B)) \underset{6.12}{=} H^i(\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Std}_G|_H, B)) = \ldots\right)$ ∎

Lemma 6.15. Ist $H \leq G$ von endlichem Index, so ist

$$\chi : \mathrm{CoInd}_H^G B \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G B,\ \varphi \longmapsto \sum_{g \in H \backslash G} g^{-1} \otimes \varphi(g)$$

ein wohl-definierter G-Modulisomorphismus.

Beweis.

- prüfe: χ ist wohldefiniert.
- G-Modulhomomorphismus: ✓ $\big(\varphi(\underbrace{gg'}_{=\tilde{g}})\big) \rightarrow g = \tilde{g}(g'^{-1})$
- Für Iso: Inverse Abbildung:

$$\beta = \sum_{g \in H^G} g^{-1} \otimes b_g \longmapsto f_\beta : \begin{cases} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow B \\ g \longmapsto b_g \end{cases} \text{ und } H\text{-äquivariant.}$$

*aus Repräsentantensystem

$\boxtimes$

Def. 6.16. Ein G-Modul M heißt (co-)induziert $:\Longleftrightarrow \exists X \in \underline{Ab}$ (als $\mathbb{Z}[\{e\}]$-Modul):

$$M \cong \mathrm{CoInd}_{\{1\}}^G X = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X$$