

ALGEBRAISCHE GRUPPEN

- Literatur:
- T.A. Springer, Linear Algebraic Groups
 - J.F. Humphreys, — " —
 - W.C. Waterhouse, Introduction to Affine Group Schemes
 - [Borel, Linear Algebraic Groups (setzt Geometric vorans)]

O. EINLEITUNG

Algebraische Gruppen = Gruppenobjekte in der Kategorie algebraischer Varietäten.

Varietäten: Nullstellenmengen von Polynomen in $A_k^n = k^n$ (oder P_k^n)

Morphismen: komponentenweise durch Polynome gegeben.

Vergleiche:

- topologische Gruppen = Abb. sind stetig (Grp.obj in Top)
- Lie - Gruppen = Abb. sind glatt (Grp.obj. in Mfd)

Beispiel:

$$G = GL_n(k), \quad k = \overline{k} \text{ alg. abgeschlossen}$$

Trick von Rabinowitch: $GL_n(k) = \left\{ (a_{ij}, d) \in k^{n^2+1} \mid \det(a_{ij}) \cdot d = 1 \right\}$

$\Rightarrow A = (a_{ij})$ hat $\det A \neq 0$, d.h. $A \in GL_n(k)$

$$d = \det A^{-1}, \quad A^{-1} = d \cdot \underbrace{A^{\text{adj}}}_{\text{hängt polynomell von } (a_{ij}) \text{ ab.}}$$

$\Rightarrow A \mapsto A^{-1}$ ist durch Polynome gegeben

$(A, B) \mapsto A \cdot B$ ist auch durch Polynome gegeben.

Beschränkt man sich auf affine Varietäten, erhält man affine algebraische Gruppen, für die gilt: $G \hookrightarrow GL_n(k)$ Zariski-abg. Untermannigf.

für geeignetes n (Einbettungssatz), daher auch der Name lineare algebraische Gruppe.

Ziel: Struktur reduzierter / halbeinfacher affiner alg. Gruppen über alg. abg. Körper k (mit $\text{char } k = 0$ oder $\text{char } k = p > 0$) untersuchen.

Strategie: G reduktiv $GL_n(k)$
 $U \cap T$

$U \rtimes T = \exists$ "Borel - Untergruppe" $(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix})$
 U

$T \cong G_m^n$ U unipotent $T = (\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix})$ $(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) = U$

(kommutative)

Torus Gruppe

$$G_m = GL_1(k)$$

$T \subseteq G$ operiert auf $\mathfrak{g} = \text{Lie } G = T_e G$ (Tangentialraum)

(z.B. $GL_n(k)$ operiert via Konjugation auf $M_n(k) = \mathfrak{g}$)

Nicht-triviale Eigenräume liefern "Charaktere" $T \rightarrow k^\times$ (die die Eigenwerte "parametrisieren"), die ein sogenanntes Wurzelsystem bilden, welche man mittels sog. Dynkin-Diagrammen klassifizieren kann.

(z.B. $(\begin{smallmatrix} x_i & 0 \\ 0 & x_j \end{smallmatrix}) \mapsto \frac{x_i}{x_j}$ sind Wurzeln für $1 \leq i \neq j \leq n$ $GL_n(k)$)

Hierarchie algebraischer Gruppen



01. ALGEBRAISCHE GEOMETRIE UND FUNKTOREN

I. AFFINE VARIETÄTEN

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper; $A_k^n := A_k^n := k^n$ heißt **affiner n-Raum**.

Def. 1. $X \subseteq A_k^n$ heißt **affine Varietät**, falls ein Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n] = k[\underline{X}]$ existiert, so dass $X = V(I) = \{P \in A_k^n \mid \forall f \in I: f(P) = 0\}$

Nach dem Hilbert'schen Basissatz existieren endlich viele $f_1, \dots, f_n \in I$ mit $I = (f_1, \dots, f_n)$.

Lemma 2. Für Ideale $I_1, I_2, (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

- (i) $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow V(I_2) \subseteq V(I_1)$
- (ii) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2)$
- (iii) $V(\sum_\lambda I_\lambda) = \bigcup_\lambda V(I_\lambda)$

Die Mengen $\{V(I) \mid I \trianglelefteq k[\underline{X}]\}$ bilden genau die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf A_k^n , der **Zariski-Topologie**. ($V(\emptyset) = A_k^n, V(1) = \emptyset$)

Affine Varietäten tragen die Unterraumtopologie.

Lemma 3. Die offenen Mengen der Form $D(f) := V((f))^\complement = \{P \in A_k^n \mid f(P) \neq 0\}$ mit $f \in k[\underline{X}]$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf A_k^n .

Für eine affine Varietät $X \subseteq A_k^n$ setze $I(X) := \{f \in k[\underline{X}] \mid \forall P \in X: f(P) = 0\} \trianglelefteq k[\underline{X}]$.
Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ setze $\text{rad } I := \sqrt{I} := \{f \in k[\underline{X}] \mid \exists n \in \mathbb{N}: f^n \in I\}$, das **Radikal** von I .

Gilt $I = \sqrt{I}$, so heißt I **Radikalideal**.

Theorem 4. (Hilbert'scher Nullstellensatz)

$I(\cdot), V(\cdot)$ induzieren Bijektionen

$$\{\text{Radikalideale in } k[\underline{X}]\} \xleftrightarrow[V(\cdot)]{I(\cdot)} \{\text{affine Varietäten im } A_k^n\}$$

Korollar 5. Maximale Ideale von $k[\underline{X}]$ entsprechen abgeschlossenen Punkten.

$$m_a := I(\{a\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n); \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in A_k^n$$

Lemma 6. Für $I \trianglelefteq k[\underline{X}]$ gilt:

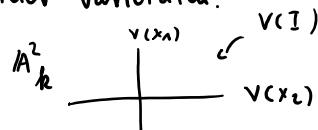
$I \in \text{Spec } k[\underline{X}] \iff Z = V(I)$ ist irreduzibel als topologischer Raum.

Irreduzible Räume sind zusammenhängend.

$Y \subseteq X$ irreduzibel $\iff \overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

Korollar 9. Jede affine Varietät ist eine endliche Vereinigung irreduzibler Varietäten.

Bsp. 10. $I = (x_1 x_2) \trianglelefteq k[x_1, x_2]$, $V(I) = V(x_1) \cup V(x_2)$



$$\text{Bsp. 10. } \mathcal{I} = (x_1 x_2) \subseteq k[x_1, x_2], \quad V(\mathcal{I}) = V(x_1) \cup V(x_2)$$

$$A^2_k$$

Koordinatenachsen, zerlege in irred.
Komponenten.

Def. 11. Für eine affine Varietät X heißt $A(X) := A_X := \frac{k[\underline{x}]}{I(X)}$ der **Koordinatenring** von X .
 ("Morphismen $X \rightarrow \mathbb{A}^n$ ")

$A(X)$ ist eine reduzierte (so = 0) endl. erz. k -Algebra.

$A(X)$ ist Integritätsring $\Leftrightarrow X$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow I(X) \in \text{Spec } k[\underline{x}]$.

Def. 12. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Ein **Morphismus** $X \xrightarrow{\phi} Y$ von Varietäten besteht aus einem m -Tupel $\phi = (f_1, \dots, f_m) \in A(X)^m$ mit $\phi(P) := (f_1(P), \dots, f_m(P)) \in Y \quad \forall P \in X$.

Lemma 13. Morphismen von Varietäten sind stetig bzgl. der Zariski-Topologie.

Beweis.

$$\phi^{-1}(D(f)) = D(\underbrace{f \circ \phi}_{\in A(Y)}) \subseteq A(X)$$

Def. 14 $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$. Dann ist das kartesische Produkt $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ wieder eine affine Varietät, das **Produkt** von X, Y .

Achtung: $X \times Y$ trägt nicht die Produkttopologie

$$X = V(f_{n+1}, f_n), \quad Y = V(g_{n+1}, g_m) \Rightarrow X \times Y = V(f_{n+1}, f_n, g_{n+1}, g_m)$$

Theorem 15. Der Funktor $X \mapsto A(X)$ induziert eine Kategorienäquivalenz von

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{affine Varietäten } / k \}^{\text{op}} & \xleftrightarrow{\sim} & \{ \text{reduzierte endl. erz. } k\text{-Algebren} \} \\ (X \xrightarrow{\phi} Y) & \longmapsto & A(Y) \xrightarrow{\phi^*} A(X) \\ & & f + I(Y) \mapsto f \circ \phi + I(X) \end{array}$$

Der quasiinverse Funktor ordnet R die Menge $\text{Specm}(R)$ zu, $k[\underline{x}] \rightarrow R$ induziert $\text{Specm}(R) \rightarrow \text{Specm } k[\underline{x}] = \mathbb{A}_k^n$

Alternativ können wir den Funktor $\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(-, k)$ benutzen, da $\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(R, k) \cong \text{Specm } R$
 $f \mapsto \ker f$
 $(k \subseteq R/\mathfrak{m} \text{ ist endlich, d.h. } R/\mathfrak{m} = k, \text{ da } k = \bar{k})$

II. FUNKTOREN

Yoneda-Lemma. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Dann ist der kontravariante Funktor

$$h: \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \underline{\text{Sets}}) = \underline{\text{Sets}}^{\mathcal{C}},$$

$$\begin{array}{ccc} A & \mapsto & h_A: \mathcal{C} \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{C}) \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi^* \\ B & \mapsto & h_B: \mathcal{C} \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, \mathcal{C}) \end{array}$$

volltreu, d.h.

$$\begin{aligned} h_A(B) &= \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\cong} \text{Mor}_{\text{Func}}(h_B, h_A) \\ \phi &\mapsto (\phi^*: h_B(C) \rightarrow h_A(C))_{C \in \mathcal{C}} \quad (\text{nat. Trafos}) \end{aligned}$$

$$\eta_B(id_B) \leftarrow (\eta_C: h_B(C) \rightarrow h_A(C))_{C \in \mathcal{C}}$$

Mit anderen Worten: $A \in \mathcal{C}$ ist genauso gut wie der Funktor h_A .

Funktoren der Form h_A heißen **darstellbar**.

Bsp. 1. \mathcal{C} : Kategorie endl. ekt. reduzierter k -Algebren.

$$\begin{aligned} (i) \quad A^n(): \mathcal{C} &\rightarrow \underline{\text{Sets}} & \text{wird dargestellt von } k[x_1, \dots, x_n] \\ R &\mapsto R^n & \text{da } R^n = \text{Hom}_{k\text{-Alg}}([k[x]], R) \end{aligned}$$

(ii) $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$ seien darstellbar. Dann ist der Produktfunktör

$$F \times G: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}, R \mapsto F(R) \times G(R) \text{ darstellbar.}$$

$$\begin{aligned} F = h_A, G = h_B, A, B \in \mathcal{C} &\Rightarrow F(R) \times G(R) = \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, R) \times \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, R) \\ \text{d.h. } F \times G &= h_{A \otimes_k B} = \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A \otimes_k B, R) \end{aligned}$$

II. ALGEBRAISCHE GRUPPEN: GRUNDLAGEN

1. AFFINE ALGEBRAISCHE GRUPPEN. $k = \bar{k}$

Def. + Satz 1.

(i) Eine affine (lineare) algebraische Gruppe $/k$ ist eine affine Varietät G über k zusammen mit Morphismen

$$\mu: G \times G \longrightarrow G \quad (\text{Multiplikation})$$

$$\iota: G \longrightarrow G \quad (\text{Inversion})$$

$$\varepsilon: \mathbb{A}_k^0 \longrightarrow G \quad (\text{neutrales Element})$$

so dass die Gruppenaxiome gelten:

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times \text{id}} & G \times G \\ \downarrow \text{id} \times \mu & \parallel & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array} \quad (\text{Assoziativität})$$

$$\begin{array}{ccccc} G \times \mathbb{A}^0 & \xrightarrow{\text{id} \times \varepsilon} & G \times G & \xleftarrow{\varepsilon \times \text{id}} & \mathbb{A}^0 \times G \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \mu & \swarrow \text{id} & \\ & \text{pr}_1 & G & \text{pr}_2 & \end{array} \quad (\text{neutrales Element})$$

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{(\text{id}, \varepsilon)} & G \times G & \xleftarrow{(\iota, \text{id})} & G \\ \downarrow \text{konst.} & \parallel & \downarrow \mu & \parallel & \downarrow \text{konst.} \\ A^0 & \xrightarrow{\varepsilon} & G & \xleftarrow{\varepsilon} & A^0 \end{array} \quad (\text{Inverses})$$

Morphismen in der Kategorie (affiner) alg. Gruppen: Morphismen von Varietäten, die obige Strukturen respektieren.

(ii) Die Kategorie affiner algebraischer Gruppen ist (anti-)äquivalent zu folgenden Kategorien:

a) Objekte: kommutative Hopf- \mathbb{k} -Algebren, d.h. reduzierte, kommutative, endl. erz. \mathbb{k} -Algebren + zusammen mit Morphismen

- $\Delta: A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{k}} A$ (Komultiplication)
- $\iota: A \rightarrow A$ (Koinversion)
- $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{k}$ (\mathbb{k} -Einheit) so dass:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\mathbb{k}} A \otimes_{\mathbb{k}} A & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ \uparrow \text{id} \otimes \Delta & \text{III} & \uparrow \Delta \\ A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \end{array}$$

(Komultiplication)

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes \mathbb{k} & \xleftarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & A \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & \mathbb{k} \otimes A \\ & \nwarrow \text{III} & \uparrow \varepsilon & \nearrow \text{III} & \\ & A & & & \mathbb{k} \end{array}$$

(Koeinheit)

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{(\iota, \text{id})} & A \otimes A & \xrightarrow{(\text{id}, \varepsilon)} & A \\ \uparrow \text{Strukturmorph.} & \text{II} & \uparrow \Delta & \text{II} & \uparrow \text{Strukturmorph.} \\ \mathbb{k} & \xleftarrow{\varepsilon} & A & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{k} \end{array}$$

(Koinversion)

Morphismen: \mathbb{k} -Algebren, kompatibel mit Zusatzstrukturen.

b) Objekte: Darstellbare Funktoren

$$\mathcal{C} := \text{Kategorie red. endl. erz. } \mathbb{k}\text{-Algebren} \longrightarrow \mathbf{Grp}$$

Morphismen: Natürliche Transformationen.

Beweis.

(i) \Leftrightarrow (a): Thm. I.1.15 $\Rightarrow G \mapsto A(G)$ definiert (anti-)Äquivalenz,
beachte $A(V \times W) = A(V) \otimes_{\mathbb{k}} A(W)$, so dass die Diagramme
aus (a) denen aus (i) entsprechen.

(a) \Leftrightarrow (b): $A \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{k}}(A, -)$ induziert Äquivalenz nach Yoneda-Zeitma;
Die Diagramme in (a) implizieren, dass die \mathbb{k}_A Werte in Gruppen annehmen!

Die Beschreibung (ii)(b) führt zu dem allgemeineren Begriff des (affinen) Gruppenschemas als Funktor

$$\mathbb{k}\text{-Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp} \quad \text{so dass der induzierte Funktor durch eine Vergissfkt. (endl. erz.) } \mathbb{k}\text{-Algebra darstellbar ist.}$$

\downarrow $\xrightarrow{\text{set}}$ (jetzt kann \mathbb{k} ein beliebiger Körper / Ring / Schema sein)

Beispiele 2.

1) $\mathbb{G}_a := \mathbb{A}^1$ ("additive Gruppe")

$$(i) \quad \mu(x,y) := x+y, \quad \iota(x) = -x, \quad \varepsilon(*) = 0.$$

$$(a) \quad A = k[X], \quad \Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \iota(X) = -X, \quad \varepsilon(X) = 0$$

$$(b) \quad \mathbb{G}_a(R) = (R, +) = \text{Hom}_{k[R]}(k[X], R)$$

2) $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = V(XY-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ ("multiplikative Gruppe")

$$(i) \quad \mu(x,y) = xy, \quad \iota(x) = x^{-1}, \quad \varepsilon(*) = 1$$

$$(a) \quad A = k[x, x^{-1}], \quad \Delta(X) = X \otimes X, \quad \iota(X) = X^{-1}, \quad \varepsilon(X) = 1$$

$$(b) \quad \mathbb{G}_m(R) = (R^\times, \cdot) = \text{Hom}_{k[x, x^{-1}]}(k[x, x^{-1}], R)$$

3) $\mathbb{P}_n (\subseteq \mathbb{G}_m) = V(x^n - 1) \subseteq \mathbb{A}^1$ (i.A. nicht irreduzibel / zsmlyd.)

4) GL_n

$$(i) \quad GL_n(k) \subseteq M_n(k) = \mathbb{A}^{n^2}$$

$$(a) \quad A = k[X_{ij}, \underbrace{\det(x_{ij})^{-1}}_{=: d}], \quad \Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}, \quad \Delta(d) = d \otimes d$$

$$\iota(d) = \det(x_{ij}), \quad \iota(X_{ij}) = d \cdot \text{Adj}(X_{ij})$$

$$\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \varepsilon(d) = 1.$$

$$(b) \quad R \mapsto GL_n(R)$$

$$5) \quad SL_n = V(\det - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$$

$$6) \quad V \text{ endl.-dim. } k\text{-VR}$$

$$(b) \quad R \mapsto (V \otimes_k R, +)$$

$$7) \quad GL(V) \quad (V \text{ wie in 6}) \quad (b): \quad R \mapsto GL(V \otimes_k R)$$

$$8) \quad \text{Morphismen: } \lambda \in k^\times, n \in \mathbb{Z}: \quad \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a, x \mapsto \lambda x$$

$$\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m, x \mapsto x^n$$

$$GL_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m$$

2. UNTERGRUPPEN

Def. 1. Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ ist eine abgeschlossene Untervektorräume, die zugleich eine Untergruppe ist. H besitzt (via Einschränkung der Multiplikation-/Inversen-/„Neutraler Element“-Abbildung) eine eindeutige Struktur als algebraische Gruppe, so dass die Inklusion $H \hookrightarrow G$ ein Morphismus alg. Grp. ist.

Bsp. 2. Abgeschlossene UG von GL_n

- SL_n ($\det = 1$)
- D_n Diagonalmatrizen ($X_{ij} = 0 \vee i=j$)
- B_n obere Dreiecksmatrizen ($X_{ij} = 0, i > j$)
- U_n : unitäre Matrizen
- O_n / Sp_{2n} : Matrizen A mit $A^T J A$ für $J = \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & -E_n \end{pmatrix}$ Sp_{2n}
- $SO_n = O_n \cap SL_n$

Proposition 3. Sei G eine algebraische Gruppe.

- Es gibt genau eine irreduzible Komponente $G^\circ \subseteq G$, die das neutrale Elt. e enthält.
- G° ist eine normale abg. Untergruppe von endlichem Index.
- G° ist die einzige Zusammenhangskomponente, die e enthält.
- Jede abg. Untergruppe von G von endlichem Index umfasst G° .
(Eine alg. Grp. ist genau dann zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist.)

Beweis.

- Seien X, Y irred. Komponenten (insb. abg.), die e enthalten.

$$\xrightarrow{\text{AlgGeo}} X \times Y \text{ irreduzible Variedadät} \quad (\text{Springer Thm. 1.5.4})$$

$$\Leftrightarrow A, B \text{ integre } k\text{-Alg.} \Rightarrow A \otimes_k B \text{ integre}$$

$$\xrightarrow[p \text{ stetig}]{} X \cdot Y = p(X \times Y) \text{ irreduzibel.}$$

$$\xrightarrow{\text{UI}} \overline{X \cdot Y} \text{ irreduzibel} \quad \Rightarrow (i) \quad X = \overline{XY} = Y \quad \text{und} \quad X \text{ ist abg. unter Multiplikation.}$$

$$X, Y \text{ irreduzible Komponenten}$$

Da ι Homöomorphismus, ist $\iota e \iota^{-1} = X^{-1}$ ebenfalls eine irreduzible Komponente, d.h. $X = X^{-1}$
 $\Rightarrow X$ abg. Untergruppe.

Analog folgt: $g X g^{-1} = X \quad \forall g \in G$, d.h. $X = G^\circ$ ist normal

Die Nebenklassen $g X$ sind die Komponenten von G ($g \in Y$ dgl. Komp.: $e \in g^{-1}Y \Rightarrow Y = g X$)

Da es in Varietäten nur endlich viele irreduzible Komponenten gibt folgt (ii).

Darüberhinaus sind alle irreduziblen Komponenten disjunkt.

Da Zusammenhangskomponenten Vereinigungen irreduz. Komponenten sind, müssen irreduz. und zsmh. Komponenten übereinstimmen. \Rightarrow (iii).

(iv) Sei $H \subseteq G$ abg. von endlichem Index. $\Rightarrow H^\circ \subseteq G^\circ$ abg. von endlichem Index.

$\Rightarrow H^\circ \subseteq G^\circ$ ist offen abgeschlossen $\xrightarrow{G^\circ \text{ zsmh.}} H^\circ = G^\circ \Rightarrow$ (iv).
gilt \rightarrow
in top. Grp.

□

G° heißt die Zusammenhangskomponente der 1.

27.04.18

Theorem 4. (Chevalley)

Sei $X \xrightarrow{\phi} Y$ ein Morphismus von (quasi-)projektiven oder affinen Varietäten. Dann existiert $\emptyset \neq U \subseteq \overline{\phi(X)}$ mit $U \subseteq \overline{\phi(X)}$ offen.

Beweis. T.A. Springer, Theorem 1.9.5.

□

Lemma 5. (i) Ist $H \subseteq G$ eine (abstrakte) Untergruppe, so ist $\bar{H} \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und damit selbst eine algebraische Gruppe.

(ii) Ist $G \xrightarrow{\phi} H$ ein Morphismus algebraischer Gruppen, so sind $\ker \phi$, $\text{im } \phi$ abgeschlossene Untergruppen.

Beweis.

(i) Die Multiplikation mit $g \in G$ (von links oder rechts) induziert einen Isomorphismus (von Varietäten) $G \rightarrow G$. $\Rightarrow g\bar{H}$ abgeschlossen und $g\bar{H} \supseteq \bar{gH} \Rightarrow g\bar{H} \supseteq \overline{gH}$.
und $g\bar{H} = \overline{gH}$ (überlegen!).

Analog: $\bar{H}g = \overline{Hg}$. $\forall g \in G$.

1.) Beh.: $H\bar{H} \subseteq \bar{H}$. Sei $h \in H$. $\Rightarrow \bar{H}h = \overline{\bar{H}h} \subseteq \bar{H}$ ✓

2.) Beh.: $\bar{H}\bar{H} \subseteq \bar{H}$. Sei $h \in \bar{H}$. $\Rightarrow Hh \subseteq \bar{H} \Rightarrow \bar{H}h = \overline{Hh} \subseteq \bar{H}$ ✓

3.) $\bar{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \bar{H}$, da die Inversion $\iota: G \rightarrow G$ ein Isomorphismus von Varietäten ist.

2.), 3.) $\rightarrow \bar{H}$ ist Untergruppe, abgeschlossen klar.

(ii) $\ker \phi$ ist offensichtlich abgeschlossene Untergruppe (denn $\ker \phi = \phi^{-1}(\{e\})$ und $\{e\} \subseteq H$ abgeschlossen. Punkte sind immer abgeschlossen in algebraischen Gruppen!)

↑
Sojar in allgemeinen (affinen) Varietäten gemäß Hilberts Nullstellensatz

Nach Chevalley existiert $\emptyset \neq U \subseteq \overline{\phi(G)}$ mit $U \subseteq \overline{\phi(G)}$

$\Rightarrow \phi(G) = \bigcup_{h \in \phi(G)} hU \subseteq \overline{\phi(G)}$. Die Behauptung folgt mit "G = $\phi(G)$ ", " $UV = U = V = \phi(G)$ " aus dem Folgenden Lemma.

□

Lemma 6. $U, V \subseteq G$ dicht und offen $\Rightarrow UV = G$.

Beweis.

$U \subseteq G$ dicht, offen.

$$\begin{array}{c} \implies \\ G = \prod_{\text{endl.}} g G^{\circ} \\ \text{Prop. 3'} \quad \text{offen, abg.} \end{array} \quad U \cap G^{\circ} \subseteq G^{\circ} \text{ dicht und } \emptyset \neq U \cap G^{\circ} \text{ (da } G^{\circ} \subseteq G \text{ mit } G^{\circ} \neq \emptyset)$$

Also d.h. $G = G^{\circ}$ irreduzibel.

$$g \in G \text{ beliebig} \Rightarrow g U^{-1}, U \subseteq G \text{ offen + dicht} \implies \begin{aligned} &G \text{ irreduzibel} \quad g U^{-1} \cap U \neq \emptyset, \text{ d.h. } g \in UV. \\ &\Rightarrow UV = G. \end{aligned}$$

Bemerkung. Algebraische Gruppen sind i.A. keine topologischen Gruppen!

$G \times G \xrightarrow{\mu} G$ ist zwar stetig, aber bezüglich der Zariski-Topologie auf $G \times G$
(+ Produkttopologie)

3. EINBETTUNGEN IN GL_n

Sei G eine endliche Gruppe und $k[G]$ die zugehörige Gruppenalgebra. Die reguläre Darstellung (d.h. G operiert durch Multiplikation auf $k[G]$) induziert eine Abbildung

$$G \hookrightarrow GL(k[G]), \text{ die injektiv ist.}$$

Da das Bild endlich ist, ist es Zariski-abgeschlossen. Insbesondere ist jede endliche Gruppe eine algebraische Gruppe nach Lemma 2.5 und Def. 2.1.

Idee: Für affine algebraische Gruppe $G \neq 1$ ersetze $k[G]$ durch den Koordinatenring $A(G)$.

Problem: Im Allgemeinen ist $\dim_k A(G) = \infty$.

Lösung: Finde endlich-dimensionalen G -invarianten Teilraum V von $A(G)$, der hinreichend groß ist, dass $G \hookrightarrow GL(V)$ injektiv ist.

Für $g \in G$, betrachte den Automorphismus $r_g: G \rightarrow G, x \mapsto x \cdot g$, $p(g) = (r_g)^*: A(G) \rightarrow A(G)$ ist k -Algebra-Automorphismus.

Wir erhalten $\rho: G \rightarrow GL(A(G)), g \mapsto \rho(g)$ (Gruppenhomomorphismus bzw. Darstellung) indem wir $A(G)$ als k -VR auffassen.

Lemma 1. Sei $V \subseteq A(G)$ ein \mathbb{k} -Untervektorraum.

(i) V ist G -invariant (d.h. $g(y)V = (\tau_g)^*(V) \subseteq V, \forall g \in G$)

$$\Leftrightarrow \Delta(V) = V \otimes_{\mathbb{k}} A(G) \quad (\Delta: A(G) \rightarrow A(G) \otimes_{\mathbb{k}} A(G) \text{ Konkavfunktion})$$

(ii) Gelte zusätzlich $\dim_{\mathbb{k}} V < \infty$.

Dann existiert ein endlich-dimensionaler G -invarianter \mathbb{k} -UVR $W \subseteq A(G)$ mit $V \subseteq W$. Insbesondere gilt:

$$A(G) = \bigcup_{\substack{W \subseteq A(G) \text{ UVR}, \\ \dim_{\mathbb{k}} W < \infty \\ W \text{ } G\text{-invariant}}} W$$

Beweis.

(i) " \Leftarrow ": Zu $f \in V$ wähle $f_i \in V, g_i \in A(G)$ so dass

$$\mu^*(f) = \Delta(f) = \sum_{i=1}^r f_i \otimes g_i$$

Ferner

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \Delta(f) = f \circ \mu & \searrow & \downarrow f \\ (\mu^*(f) = f \circ \mu) & & \mathbb{A}^1 \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} ((\tau_g)^*(f))(h) &= f(hg) \\ &= f \circ \mu(h, g) = \Delta(f)(h, g) \\ &= \sum_{i=1}^r f_i(h) \cdot g_i(g) \quad \forall h \in G \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \underbrace{\rho(g)(f)(\cdot)}_{\in \mathbb{k}} = \sum_{i=1}^r \underbrace{g_i(g)}_{\in \mathbb{k}} \cdot \underbrace{f_i(\cdot)}_{\in V} \in V.$$

" \Rightarrow ": Sei $(f_i, i \in I)$ eine Basis von V und $(g_j, j \in J)$ s.d. $(f_i, g_j, i \in I, j \in J)$ eine \mathbb{k} -Basis von $A(G)$ ist. Für $f \in V$ beliebig existieren $u_i, v_j \in A(G)$

$$\text{mit } \Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i + \sum_{j \in J} g_j \otimes v_j$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{\text{s. oben}} \underbrace{\rho(g)(f)(\cdot)}_{\text{d.h. } \rho(g)(f) \text{ als Funktion } G \rightarrow \mathbb{A}^1} = \sum_{i \in I} f_i(\cdot) \cdot u_i(g) + \sum_{j \in J} g_j(\cdot) \cdot v_j(g) \underset{\mu}{\in} V \quad \begin{aligned} &\text{Nach Voraussetzung, da} \\ &V \text{ } G\text{-invariant} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_j(g) = 0 \quad \forall g \in G \quad \Rightarrow v_j = 0 \quad \Rightarrow \Delta(f) = \sum_{i \in I} f_i \otimes u_i \in V \otimes_{\mathbb{k}} A(G).$$

(ii) o.E. $\dim_{\mathbb{k}} V = 1$, d.h. $V = \langle f \rangle_{\mathbb{k}}$ $\Rightarrow \exists f_1, f_r \in A(G): \Delta(f) = \sum_{i=1}^r f_i \otimes g_i$
Setze $W' := \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathbb{k}}$ $\Rightarrow \rho(g)(f) \in W'$

Setze nun $W := \langle \rho(g)(f) \mid g \in G \rangle \subseteq W' \Rightarrow W$ ist endlich-dimensional.

$f \in W$, da $f = \rho(1_g)(f) \Rightarrow V \subseteq W$; $\rho(g)(\rho(h)(f)) = \rho(gh)(f) \in W \Rightarrow W$ ist G -invariant. □

Bemerkung 2. Ersetzt man $G \times G \xrightarrow{\mu} G$ durch eine Gruppenaktion (Morphismus von Varietäten) $G \times X \xrightarrow{\theta} X$ von G auf einer Varietät X , so erhält man $G \rightarrow GL(A(X))$ für die man analoge Aussagen wie in Lemma 1 für $V \subseteq A(X)$ zeigen kann ($\Delta \leftrightarrow \theta^*$)

Theorem 3. Jede affine algebraische Gruppe G lässt sich abgeschlossen in GL_n , für $n \in \mathbb{N}$ geeignet, einbetten.

Beweis. Sei $A(G) = k[g_1, \dots, g_r]$ als k -Algebra, und $V = \langle g_1, \dots, g_r \rangle_k$ als k -VR.

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f_1, \dots, f_n$ k -Lin. unabhängige k -Algebra-Erzeuger von $A(G)$, s.d. (ii) $W = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_k$ G -invariant ist. (und $V \subseteq W$).

\Rightarrow Lemma 1 (i) $\exists a_{ij} \in A(G)$ mit $\Delta(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \otimes a_{ij}, 1 \leq i \leq n$ (1)

\Rightarrow wie oben $p(g)(f_i) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j \cdot a_{ij}(g), 1 \leq i \leq n, g \in G$; d.h. $(a_{ij}(g))$ ist Darstellungsmatrix von $p(g)$ bzgl. f_1, \dots, f_n .

Wir erhalten einen Morphismus

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi} & A^{k^2}, \quad g \mapsto (a_{ij}(g)) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \text{U1} \\ & \text{Gruppenhomomorphismus} & GL_n \\ & \text{nach Konstruktion} & \end{array} \quad (\text{landet in } GL_n, \text{ da } p(g) \text{ Automorphismen sind})$$

$$\Rightarrow \varphi^*: A(GL_n) \rightarrow A(G) \text{ schickt } X_{ij} \mapsto a_{ij}$$

$$\stackrel{s.(1)}{\Rightarrow} f_i(g) = p(g)(f_i)(1_G) = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G) a_{ij}(g) \quad \forall g \in G$$

$$\text{d.h. } f_i = \sum_{j=1}^{r_i} f_j(1_G) \cdot a_{ij} \quad \stackrel{\substack{\text{f_i erzeugt} \\ A(G)}}{\Rightarrow} \quad \varphi^* \text{ ist surjektiv}$$

$$\Rightarrow G \rightarrow GL_n \text{ ist abgeschlossene Einbettung} \quad (\text{denn } I := \ker \varphi^*, X^1 = V(I) \subseteq GL_n \\ \Rightarrow A(X^1) \cong A(G) \stackrel{\substack{\text{kat.-} \\ \text{äquiv.}}}{\Rightarrow} X^1 \cong G$$

■

Korollar 4. G affine, algebraische Gruppe, $H \leq G$ abgeschlossene Untergruppe. Dann existiert ein endlich-dimensionaler k -Vektorraum W mit UVR W_H sowie eine abgeschlossene Einbettung $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ mit $H = \mathrm{Stab}_G(W_H)$.

Beweis.

$I_H := \{f \in A(G) \mid f|_H = 0\}$ ist ein Ideal.

Im obigen Beweis von Theorem 3 o.E. f_{r+1}, \dots, f_r ($r \geq n$) erzeugendes Ideal I_H .

$W_H := W \cap I_H$. Dann gilt:

$$g \in H \Leftrightarrow hg \in H \quad \forall h \in H \Leftrightarrow \tau_g^*(I_H) \subseteq I_H$$

$$\Leftrightarrow \tau_g^*(W_H) \subseteq W_H$$

da $W_H = W \cap I_H$ und W charakt. G -invariant ist. ■

02.05.18

Lemma 5. (Chevalley) Man kann erreichen, dass $\dim_k W_H = 1$ ist.

Beweis.

Starte mit Einbettung $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ aus Korollar 4. $d := \dim_k W_H$.

$$L := \Lambda^d W_H \subseteq \Lambda^d W ; \quad \dim_k L = \binom{d}{d} = 1. \quad p: G \rightarrow \mathrm{GL}(\Lambda^d W)$$

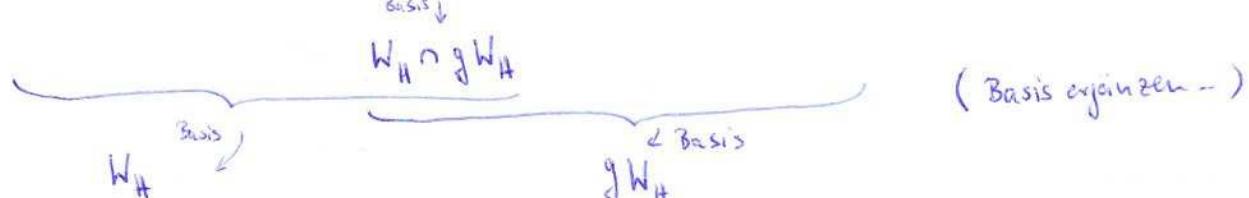
$$G \curvearrowright \Lambda^d W \quad \text{via} \quad g(w_1 \wedge \dots \wedge w_d) = g(w_1) \wedge \dots \wedge g(w_d).$$

Behauptung: $H = \mathrm{Stab}_G^s(L)$

" \subseteq ": klar, da H W_H invariant lässt bzgl. der ursprünglichen Wirkung $G \curvearrowright W$.

" \supseteq ": Nun gelte $g(L) = L$ bzgl. p .

$e_1, \dots, e_m, \underbrace{e_{m+1} \dots e_d}_{\text{Basis}}, e_{d+1}, \dots, e_{d+m}, \dots, e_n$ sei Basis von W .



$$2.2.: m = \text{codim}_{W_H} W_H \cap gW_H \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{d.h. } gW_H = W_H \text{ bzw. } g \in \text{Stab}_G(W_H) = H)$$

IA: $m \neq 0 \Rightarrow$ L.A. $\underbrace{e_1, \dots, e_d}_{\in L}$, $\underbrace{e_{m+1}, \dots, e_m}_{\in L}$ sind l.u. in $\Lambda^d W$.
 $g(e_1, \dots, e_d) \in L$ nach Voraus.
 bis auf Skalarm. \downarrow da $\dim_k L = 1$.

$G \rightarrow GL(\Lambda^d W)$ Einbettung: Übung.

Proposition 6. Sei $H \trianglelefteq G$ ein abg. Normalteiler. Dann existiert ein endl. dim. VR W und ein Morphismus $g: G \rightarrow GL(W)$ algebraischer Gruppen mit $\ker g = H$.

Beweis. Starte mit Darstellung $\phi: G \rightarrow GL(V)$, bei der $H = \text{Stab}_G^+(\langle v \rangle)$ für ein $v \in V$ wie aus Lemma 5.

$\Rightarrow v$ ist gemeinsamer Eigenvektor von H . $V_H := \langle w \mid w \text{ ist EV von } H \rangle \subseteq V$

$h(v) = \chi(h)v$ für $\chi(h) \in k^\times$ (h invertierbar) ($\chi: H \rightarrow \mathbb{G}_m$ ist Charakter)

Da $H \trianglelefteq G$, gilt für alle $g \in G$:

$$hgv = \underbrace{g(g^{-1}hg)}_{\in H} v = \chi(g^{-1}hg) gv \quad \forall h \in H$$

$\Rightarrow gv \in V_H$, d.h. V_H ist G -Invariant.

OE: $V = V_H$ (sonst ersetzen) d.h.

$$V = \bigoplus_{i=1}^r V_i, \quad V_i \text{ gemeinsame Eigenraum für } H.$$

$W := \prod_{i=1}^r \text{End}(V_i) \subseteq \text{End}(V)$ Unterraum derjenigen Endomorphismen, die jeden V_i invariant/stabil lassen.

$G \curvearrowright \text{End}(V)$ via: $g(\lambda) := \phi(g) \circ \lambda \circ \phi(g)^{-1}$ und W ist diesbezüglich

G -invariant:
 $V_i \xrightarrow{\phi(g)^{-1}} \phi(g)^{-1}V_i \xrightarrow{\lambda} \phi(g)^{-1}V_i \xrightarrow{\phi(g)} V_i$, d.h. $g(\lambda) \in W$
 da mit V_i auch $\phi(g)^{-1}V_i$ ein gemeinsamer Eigenraum
 für H ist

17

Wir erhalten $\varphi: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ Morphismus alg. Grp.

Beh.: $H = \ker \varphi$

$$\text{"\leq": } \varphi(h)(\lambda) = \phi(h) \circ \lambda \circ \phi(h)^{-1} = \lambda, \text{ da } \lambda = \sum \lambda_i, \lambda_i \in \mathrm{End}(W_i)$$

$$\phi(h) \circ \lambda \circ \phi(h)^{-1} v_i = \chi(h) \chi(h)^{-1} \lambda_i(v_i) = \lambda_i(v_i)$$

$$\text{"\geq": } g \in \ker \varphi \stackrel{\text{def. } \varphi}{\Rightarrow} \phi(g) \in \text{Zentrum}(W) = \prod_i^{\text{Zentrum}} \text{End}(W_i) \\ \text{zu } \text{id}_{W_i}$$

$$\Rightarrow \phi(g) \cdot v \in h^\times v \rightarrow g \in \mathrm{Stab}_G(\langle v \rangle) = H.$$

□

III EINSCHUB: QUASIPROJEKTIVE VARIETÄTEN UND DIMENSION

$$\mathbb{P}_k^n := \mathbb{P}_k^n := \frac{k^{n+1} \setminus \{0\}}{k^n} = \{[a_0 : \dots : a_n] \mid a_i \in k, \text{ nicht alle } 0\}$$

$$[a_0 : \dots : a_n] = [b_0 : \dots : b_n] \Leftrightarrow a_i = \lambda b_i \text{ für ein } \lambda \in k^\times.$$

Def. 1. Teilmengen von \mathbb{P}_k^n der Form $V(f_1, \dots, f_n) = \{P \in \mathbb{P}_k^n \mid f_i(P) = 0, i=1 \dots n\}$ für homogene Polynome $f_1, \dots, f_n \in k[X_0, \dots, X_n]$ heißen projektive Varietäten. Sie bilden die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie auf \mathbb{P}_k^n .

Lokal abgeschlossene Teilmengen (Durchschnitte einiger offener und abgeschlossener Mengen) heißen quasi-projektive Varietäten.

Bemerkung 2. Die Zariski-offenen Teilmengen $D_+(X_i) = \mathbb{P}_k^n \setminus V(X_i) = \{P = [x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ bilden eine offene Überdeckung von \mathbb{P}_k^n .

$\mathbb{A}^n \longrightarrow D_+(X_i), (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_{i-1} : x_{i-2} : \dots : x_{i+1} : x_i : x_n]$
ist ein Homöomorphismus.

Proposition 3.

(i) Die Segre-Einbettung, $N = nm + n + m$

$$S^{n,m}: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^N, ([a_0 : \dots : a_n], [b_0 : \dots : b_m]) \mapsto [a_0 b_0 : a_0 b_1 : \dots : a_0 b_m : \dots : a_n b_0 : \dots : a_n b_m]$$

ist injektiv mit abg. Bild.

(lexikografisch geordnet)

(ii) Für quasiprojektive Varietät $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ ist das Produkt $X \times Y$ definiert als $S^{n,m}(X, Y) \subseteq \mathbb{P}^N$.

$X \times Y$ ist quasiprojektiv, und, falls X, Y projektiv ebenfalls projektiv.

Beweis. Hartshorne.

□

Ab jetzt sind alle Varietäten irreduzibel!

Def. 4. (i) Für X affin, heißt $\mathcal{A}(X) := \text{Quot}(\mathcal{A}(x))$ der Funktionenkörper von X .
nf. da X irreduzibel

Für $P \in X$ heißt $\mathcal{O}_{X,P} := \mathcal{A}(x)_{m_p}$ (Lokalisierung bei m_p)
der lokale Ring in P .

Es gilt: $\mathcal{A}(X) = \bigcap_P \mathcal{O}_{X,P} (\subseteq \mathcal{A}(x))$

(ii) Für X projektiv betrachte den Ring $\mathcal{R}_X := \left\{ \frac{f}{g} \mid \begin{array}{l} f, g \in k[x_0, \dots, x_n] \text{ homogen} \\ g \notin \mathcal{I}(X), \text{ d.h. } f \neq g \end{array} \right\}$
 $\mathcal{R}(X) \cup \{0\}$
 $\mathcal{M}_X := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{R}(X) \mid f \in \mathcal{I}(X) \right\}$
 ist maximales Ideal

$\Rightarrow \mathcal{A}(X) := \frac{\mathcal{R}(X)}{\mathcal{M}_X}$ heißt der Funktionenkörper von X , seine Elemente heißen auch rationale Funktionen auf X .

Faktum: Für jedes i gibt es einen Isomorphismus $x^{(i)} := X \cap D_+(x_i)$

$$\mathcal{A}(X) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(X^{(i)})$$

$$\frac{f(x_0, \dots, x_n)}{g(x_0, \dots, x_n)} \mapsto \frac{f(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n)}{g(\quad - \quad \cdot \quad \cdot \quad)}$$

19

$$X \text{ projektive Varietät} \Rightarrow \mathcal{O}_{X,P} := \left\{ \frac{f}{g} \bmod m_X \in k(X) \mid g(P) \neq 0 \right\}$$

und es gilt für $P \in X^{(i)} := X \cap D_f(X_i)$: $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X,P}$ und daher $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X^{(j)},P}$
für $P \in X^{(i)} \cap X^{(j)}$.

(iii) X quasi-projektiv ($\Rightarrow \bar{X}$ projektiv)

$$k(X) := k(\bar{X}), \quad \mathcal{O}_{X,P} := \mathcal{O}_{\bar{X},P}.$$

Für projektive und affine Varietäten stimmt dies mit den vorherigen Definitionen überein.

(iv) $U \subseteq X$ offen in quasi-proj. Varietät $\Rightarrow \mathcal{O}(U) := \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}$ ($\subseteq k(X)$) heißt Ring der regulären Funktionen auf U .

i: $\mathcal{O}(U) = \bigcap_i \mathcal{O}(U_i)$ für alle offenen Überdeckungen $\{U_i\}_i$ von U .

(v) Ein Morphismus $\varphi: X \rightarrow Y$ quasi-projektiver Varietäten ist eine stetige Abbildung, so dass

(1) $\forall U \subseteq Y$ offen: $f \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))$.

Dies ist eine lokale Bedingung, d.h. erfüllt $\varphi|_{U_i}$ die Bedingung (1) für eine offene Überdeckung $\{U_i\}_i$ von U , so erfüllt φ (1). (ii).

Bsp 5. (i) Für X, Y affin erhält man denselben Begriff wie vorher: o.E. $Y = \mathbb{A}^n$. Für $f_1, \dots, f_n \in A(X)$ hat $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ die Eigenschaft (1).

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{\varphi} Y & \text{induziert} & A(Y) \xrightarrow{\varphi^*} A(X) \\ Q \mapsto P & & \downarrow \cong \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,P} & \xrightarrow{\varphi_Q^*} & \mathcal{O}_{X,Q} \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

(ii) X quasi-projektiv, $U \subseteq X$ offen $\rightarrow U \hookrightarrow X$ ist Morphismus.

Lemma 6. $P \in X$ quasi-projektiv: Dann existiert ein $P \in U \subseteq X$ mit U isomorph (als quasi-proj. Varietät) zu einer affinen Varietät.

Insbesondere: X hat offene, affine Überdeckung.

Beweis. $P \in X^{(i)} \subseteq X$, o.E. $Y = \mathbb{A}^n$

$\begin{matrix} Y \\ \text{offen} \\ \text{abg. } \mathbb{A}^n \end{matrix}$	$\xrightarrow{\cong} X^{(i)} \cong \mathcal{D}(f) \xleftarrow{\cong} V(x_f - 1)$	$\begin{matrix} \mathbb{A}^{n+1} \\ \text{abg.} \end{matrix}$
--	--	---

Iso quasi-projektiver Varietäten.

Def. 7. Sei X irreduzible, quasi-proj. Varietät.

$\dim X := \operatorname{trdeg}_k k(X)$ (Transzendenzgrad), d.h. die maximale

Zahl algebraisch unabhängiger Elemente in $k(X)$, heißt Dimension von X .

Für X beliebige quasi-proj. Varietät wird die Dimension von X als das Maximum der Dimensionen seiner irreduziblen Komponenten definiert.

Bsp. 8. • $\dim A^n = n$

• $\dim P^n = n$, da $k(P^n) \cong k(D_+(x_0)) \cong k(A^n)$

Theorem 9. Ist X affin, so gilt $\dim X = \dim A(X)$ (Krulldimension)

(max. Länge von Ketten $y_0 \subsetneq \dots \subsetneq y_n$ von Primidealen in $A(X)$, bzw. irred. abg. Teilmengen in X)

■

Proposition 10. Seien X, Y quasi-projektive Varietäten.

(i) $X \rightarrow Y$ surjektiver Morphismus $\Rightarrow \dim Y \leq \dim X$.

(ii) X irreduzibel, $Y \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow \dim Y < \dim X$.

(iii) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$

(iv) (Krull's Hauptidealssatz) $X \stackrel{\text{irred.}}{\subseteq} A^n$ irreduzibel, $f \in k[X_1, \dots, X_n] = A(A^n)$ mit $f(P) = 0$

für ein $P \in X$, $Z \subseteq X \cap V(f)$ irreduzible Komponente.

$\Rightarrow \dim Z \geq \dim X - 1$.

IV: JORDAN-ZERLEGUNG, DIAGONALISIERBARE UND UNIPOENTE GRUPPEN

1. JORDAN-ZERLEGUNG

Durch Einbettung $G \hookrightarrow GL_n$, $k = \bar{k}$ besitzen die Elemente $\varphi(g), g \in G$ eine Jordannormalform und wir können Begriffe wie "halbeinfach", "unipotent" etc. auf Elemente von G übertragen, sodass diese unabhängig von der Wahl von φ sind.

Def. 1. $\dim_k V < \infty$, $g \in \operatorname{End}(V)$ heißt halbeinfach (oder diagonalisierbar), falls V Basis aus Eigenvektoren für g hat. g heißt nilpotent, falls $g^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Bemerkung 2. (LA)

(i) g halbeinfach $\Leftrightarrow \operatorname{mipo}(g)$ hat paarweise verschiedene Nullstellen

(ii) $W \leq V$ g -invariantes UVR + g halbeinfach $\Rightarrow g|_W$ ist halbeinfach, da $\operatorname{mipo}(g|_W) \mid \operatorname{mipo}(g)$

Proposition 3. (Additive Jordanzerlegung) (k alg. abg.)

Sei $g \in \text{End}_k(V)$, $\dim_k V < \infty$. Dann: $\exists! g_s, g_n \in \text{End}(V)$ mit g_s halbeinfach, g_n nilpotent.

$$\text{sodass } g = g_s + g_n \text{ und } g_s \circ g_n = g_n \circ g_s.$$

Beweis.

$g_s \hat{=} \text{Diagonalmatrix aus JNF}$, $g_n := g - g_s$.

■

Bemerkung 4. (i) In obiger Situation existieren $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$ und $g_s = P(g)$, $g_n = Q(g)$

(ii) Ist $W \subseteq V$ ein g -invarianter UVR, so ist W auch g_s und g_n -invariant und $(g|_W)_s = g_s|_W$ sowie $(g|_W)_n = g_n|_W$.

Beweis.

$$(i) \Phi(T) = \det(T \cdot \text{id}_V - g) = \prod (T - \lambda_i)^{n_i} \quad (\text{char. Polynom})$$

$$(V \cong) \frac{k[T]}{\langle \phi(T) \rangle} \cong \bigoplus \frac{k[T]}{(T - \lambda_i)^{n_i}}$$

$$\exists P \in k[T]: P \equiv \lambda_i \pmod{(T - \lambda_i)^{n_i}} \quad \forall i$$

Ist $\phi(0) = 0$, so ist 0 ein Eigenwert von $g \Rightarrow P \equiv 0 \pmod{T}$.

Sei $\phi(0) \neq 0$. \Rightarrow Ändere P durch Konstantes Vielfaches von ϕ ab

$$\Rightarrow P(0) = 0, \text{ setze } Q = T - P.$$

$$\Rightarrow P(g) = g_s, Q(g) = g_n.$$

(ii) Wegen (i) ist W auch g_s, g_n -invariant. Da $\text{charpol}(g|_W) \mid \Phi$, ist P auch für W eine geeignete Wahl und $(g|_W)_s = P(g|_W) = P(g)|_W = g_s|_W$.

■

Def. 5. $h \in \text{End}_k(V)$ heißt unipotent, falls $h - \text{id}_V$ nilpotent ist. ($\Leftrightarrow \text{alle } \lambda_i = 1$)

Korollar 6. (Multiplikative Jordanzerlegung)

$g \in GL(V)$, $\dim_k V < \infty$.

(i) $\exists! g_s, g_u \in GL(V)$ mit g_s halbeinfach und g_u unipotent s.d. $g = g_s \circ g_u = g_u \circ g_s$

(ii) $\exists P, R \in k[T]$ mit $P(0) = R(0) = 0$ und $g_s = P(g)$, $g_u = R(g)$.

(iii) Ist $W \subseteq V$ g -invarianter UVR, so ist W auch g_s, g_u -invarianter UVR und $(g_s)|_W = (g|_W)_s$ sowie $(g_u)|_W = (g|_W)_u$.

Beweis. (i) EW von $g \neq 0 \Rightarrow$ EW von $g_s \neq 0 \Rightarrow g_s \in GL(V)$, $g_u := id_V - g_s^{-1} \circ g_u$

(ii) z.B.: \tilde{g}_s^{-1} ist Polynom in g_s (damit auch Polynom in g)

$$\text{mipo } g_s = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + \underbrace{a_0}_{\neq 0} \Rightarrow g_s^{-1} = -a_0^{-1} [g_s^{n-1} - \dots - a_1]$$

(iii) wie oben aus (ii). □

Def. 7. Sei nun V ein möglicherweise ∞ -dim. k -VR, $g \in GL(V)$, und gelte

$$(*) \quad V = \bigcup_{\substack{W \subseteq V \\ \text{endl.-dim. } k\text{-VR} \\ g(W) \subseteq W}} W$$

Dann heißt g halbeinfach (lokal unipotent), wenn $g|_W$ halbeinfach (unipotent) $\forall W$ wie oben.

Bsp. 8.

Nach Lemma II.3.1 (ii) erfüllt $V = A(G)$ die Bedingung $(*)$ [$\forall g \in G: r_g^* \in GL(A(G))$]

Korollar 9. Unter der Bedingung $(*)$ für $g \in GL(V)$ gilt:

- (i) $\exists! g_s, g_u \in GL(V)$ mit g_s halbeinfach, g_u lokal unipotent mit $g = g_s \cdot g_u = g_u \cdot g_s$
- (ii) Analogon zu Korollar 6 (iii)

Beweis.

(i) $(g|_W)_s, (g|_W)_u$ verkleben zu g_s, g_u nach Korollar 6 (i), (ii).

(ii) W erfüllt ebenfalls $(*)$. Daher folgt die Behauptung ebenso aus Korollar 6 (ii). □

Bezeichne $p_G: G \hookrightarrow GL(A(G))$ die durch Rechtsmultiplikation induzierte Darstellung.

09.05.18

Theorem 10. Sei G eine affine algebraische Gruppe und $g \in G$.

(i) $\exists! g_s, g_u \in G$ mit $g = g_s \cdot g_u = g_u \cdot g_s$ und $p_G(g_s) = p_G(g)_s, p(g)_u = p(g)_u$

(ii) Ist $G = GL_n$, so stimmen g_s, g_u mit denen aus Korollar 6 überein.

(iii) Für jede Einbettung $\phi: G \hookrightarrow GL_n$ gilt: $\phi(g_s) = \phi(g)_s$ und $\phi(g)_u = \phi(g)_u$.

Allgemeiner kann man zeigen (Korollar 12), dass (iii) für beliebige Darstellungen $G \xrightarrow{\phi} GL(V)$, $\dim_k V < \infty$ gilt. g heißt halbeinfach (unipotent), falls $g = g_s$ ($g = g_u$). später

Teil (ii) folgt aus dem folgenden

Lemma 11. Sei $\dim_k V < \infty$

$g \in GL(V)$ ist genau dann halbregulär (unpotent), wenn $P_{GL}(g) \in GL(A(GL(V)))$ das ist.

denn :

$g = g_s g_u$, $P_{GL}(g) = P_{GL}(g)_s P_{GL}(g)_u$ sind eindeutig, d.h. $P_{GL}(g)_s = P_{GL}(g)_s$

und $P_{GL}(g)_u = P_{GL}(gu)$, falls Lemma 11 gilt.

Beweis von Lemma 11.

$\text{End}_k(V) \cong \mathcal{D}(d) = \text{GL}(V)$ mit $d: \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{A}^1$ als Varietäten.
 $f \mapsto \det f$

$$\left(\begin{smallmatrix} M_{\dim_k V}^{\oplus n} \\ M_{\dim_k V}(k) \end{smallmatrix} \right)$$

1

$$A(\text{End}_R V) \hookrightarrow A(\text{End}_R V)[\frac{1}{d}] \cong A(GLV)$$

\downarrow

三

$$r_g^* = P(g)$$

$$A(\text{End}_k V)$$

A(GLV)

$$\Gamma_j : GL(V) \rightarrow GL(V)$$

$$f \mapsto fg$$

$\Rightarrow A(\text{End}_k V) \subseteq A(GL(V))$ ist ein $GL(V)$ -invarianter
Unterraum bezüglich der Rechtsmultiplikation,

und es gilt: (1) $(r_j^*)^*(d) = d(g)d$, d.h. d ist Eigenvektor für r_j^* .

Beh. 1: Für $f \in A(\text{End}_k V)$ gilt:

f ist EV für r_g^* auf $A(\text{End}_k V)$ $\leftrightarrow f d^{-m}$ ist EV für r_g^* auf $A(GLV)$ $\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

$$\underline{\text{defn}}: \overset{\text{defn}}{\Rightarrow} f\bar{d}^{-m}: GL(V) \rightarrow A^* ; \quad r_g^*(f\bar{d}^{-m})(x) = f(xg) \bar{d}^{-m}(xg) = f(xg) \bar{d}^{-m}(x) \bar{d}^{-m}(g)$$

$$= d^{-m}(g) \left(r_j^*(f)(x) \right) \overline{d^{-m}(x)} \quad (2)$$

$$= c_g f(x) \tilde{d}^m(x)$$

$$= c_g d^{-m}(g) \quad (fd^{-m})(x)$$

\Leftarrow : $m=0$.

Bew. 2 a) r_g^* h.e. auf $A(GLV)$ $\Leftrightarrow r_g^*$ h.e. auf $A(\text{End}_k(V))$

b) r_g^* lokal unipotent auf $A(GLV)$ $\Leftrightarrow r_g^*$ lokal unipotent auf $A(\text{End}_k(V))$

denn: " \Rightarrow " Korollar 9. (ii): etwa $r_g^* = (r_g^*)_s$ auf $A(GLV)$

$$\Rightarrow \left((r_g^*)|_{A(\text{End}_k(V))} \right) = (r_g^*)_s|_{A(\text{End}_k(V))} = r_g^*|_{A(\text{End}_k(V))}$$

für u analog.

" \Leftarrow ": Sei $W \subseteq A(GLV)$. r_g^* -inv., endl.-dim. UVR

$$\hookrightarrow W' := W \cap A(\text{End}(V)) \subseteq A(\text{End}(V))$$

$$\text{und } W \subseteq W'\left[\frac{1}{d}\right] = \bigcup_{m \geq 0} \frac{1}{d^m} W' \subseteq A(GLV)$$

$$\Rightarrow A(GLV) = \bigcup_{\substack{m \geq 0 \\ W \subseteq A(\text{End}(V)) \\ r_g^*\text{-inv.,} \\ \text{endl.-dim.}}} \frac{1}{d^m} W \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} r_g^*|_W \text{ h.e.} \\ \xrightarrow{\text{beh. 1}} r_g^*|_W \text{ unipotent} \\ (\text{EW}=1) \end{array} \quad \begin{array}{c} r_g^*|_{d^{-m}W} \text{ h.e.} \\ \Downarrow (1) \\ d(g)=1. \quad \xrightarrow{(2)} r_g^*|_{d^{-m}W} \text{ unipotent} \end{array}$$

Bew. 3. $g \in GL(V)$ h.e. (unipotent) $\Leftrightarrow r_g^*$ ist h.e. (unipotent) auf $\text{End}(V)^*$
 bzgl. $(r_g^*)(f)(x) := f(xg)$ Dualraum

$\Leftrightarrow r_g$ ist h.e. (unipotent) auf $\text{End}(V)$
 (klar,
 LA)

(Matrix \rightarrow Matrix T)

Bew. 4. r_g^* h.e. (unipotent) auf $\text{End}(V)^*$ $\Leftrightarrow r_g^*$ h.e. (unipotent) auf $A(\text{End}(V))$

Beweis Behauptung 3: reduziert sich formal auf folgende Übung:

$$\begin{array}{ccc} \text{End}(V) & \xrightarrow{\Gamma} & \text{End}(\text{End}(V)) \\ \text{GL}(V) & \xrightarrow{\Psi} & \text{GL}(\text{End}(V)) \end{array} \quad \begin{array}{c} g \text{ h.e. (unipotent)} \\ \Leftrightarrow \\ r_g \text{ h.e. (unipotent)} \end{array}$$

$$\text{Beweis zu Beh. 4.: } A(\text{End}_k V) \cong \text{Sym}(\text{End}(V)^*) \quad | \quad A(\text{End}_k V) = \{ \text{End}_k V \rightarrow A_k^1 \}$$

Morphismen

II

$$\bigoplus_{m \geq 0} \text{Sym}^m(\text{End}(V)^*) \quad \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\text{End}(V)^*)^{\otimes m}$$

U1

$\langle x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in \text{End}(V)^* \rangle$
zweistufiges Ideal

U1

$\text{End}(V^*)$ ist "Grad $m=1$ "

Dabei stimmen die Operationen von r_g^* auf beiden Seiten übereinstimmen.

(Fortsetzung auf die symmetrische Algebra \otimes -Faktorweise)

Also folgt " $=$ " aus Korollar 6/9 (ii/iii)

Für " \Rightarrow " nutze: $A \in \text{End}(W)$ h.e. (unipotent) $\Rightarrow A^{\otimes m} \in \text{End}(W^{\otimes m})$ h.e. (unipotent)
für $W = \text{End}(V)^*$



Beweis von Theorem 10.

Betrachte Einbettung $G \xhookrightarrow{\phi} GL(V)$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow r_g & \text{"} & \uparrow r_{\phi(g)} \\ G & \xhookrightarrow{\phi} & GL(V) \end{array} \quad g \in G \text{ beliebige.}$$

\Rightarrow Kategorien-äquivalenz

$$\begin{array}{ccc} A(GLV) & \xrightarrow{\phi^*} & A(G) \\ \downarrow p_{GLV}(\phi(g)) & \equiv & \downarrow p(g) \\ A(GLV) & \xrightarrow{\phi^*} & A(G) \end{array} \quad (3)$$

$$\phi(g) = \phi(g)_s \phi(g)_u \quad \text{eindeutige Jordan-Zerlegung (Kor. 6)}$$

Beh.: $\phi(g)_s, \phi(g)_u \in \phi(G)$, dazu: $I := \ker(\phi^*)$.

Für $x \in GL(V)$ gilt:

$$x \in \phi(G) \Leftrightarrow \forall x \in \phi(G) \quad \forall h \in \phi(G) \quad \Leftrightarrow r_x^*(I) \subseteq I \quad (4)$$

Funktionen, die
auf G verschwinden

$$\text{Insbesondere: } \Gamma_{\phi(g)}^*(I) \subseteq I \xrightarrow{\text{Kor. 9 (ii)}} \underbrace{(\Gamma_{\phi(g)}^*)_{S_{\mathcal{U}}}}_{\parallel \text{ Lemma 11}}(I) \subseteq I$$

$$((\Gamma_{\phi(g)})_{S_{\mathcal{U}}})^*$$

$$\xrightarrow{(4)} \phi(g)_{S_{\mathcal{U}}} \in \phi(G) \quad \checkmark$$

(i) $g_{S_{\mathcal{U}}} \kappa g_{S_{\mathcal{U}}}$ sei das eindeutige Element, so dass $\phi(g_{S_{\mathcal{U}}}) = \phi(g)_{S_{\mathcal{U}}}$ gilt.

Für $G = GL(V)$ (und $\phi = \text{id}$) folgt (i) aus Lemma 11.

Aus (3), auch für $g_{S_{\mathcal{U}}}$ statt g , folgt:

$p_G(g_{S_{\mathcal{U}}})$ ist induziert von $p_{GL}(\phi(g_{S_{\mathcal{U}}})) = p_{GL}(\phi(g)_{S_{\mathcal{U}}})$

$$p_G(g)_{S_{\mathcal{U}}} = p_{GL}(\phi(g))_{S_{\mathcal{U}}}$$

wegen der Eindeutigkeit im Korollar 9.

Die Eindeutigkeit folgt, da p_G injektiv ist, da $p_G : G \rightarrow GL(A(G)) \hookrightarrow GL(W)$ injektiv ist nach Beweis von Theorem 3.

(ii) folgt nach Konstruktion, da wegen der Eindeutigkeit in (i) unabhängig von ϕ ist. □