Lemma. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)\times M)$, $f(0,\cdot) = \mathrm{id}_M$.

Dann: $\exists g \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)\times M)$: $f(t,\cdot) = t\cdot g(t,\cdot)$, $\frac{\partial f}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$.

Beweis.

$$g(t,p) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(st,p)\, ds$$

$\blacksquare$

Beweis der Proposition. Sei $f \in C^\infty(M)$. Hilfsfunktion $h(t,p) := f(\phi_t(p)) - f(p)$

$$\Rightarrow h(0,\cdot) \equiv 0$$

Lemma $\Rightarrow \exists g: h(t,p) = t\,g(t,p)$ und $\frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$

$$\Rightarrow f\circ\phi_t = f + t\cdot g_t.$$

23.04.18

Es gilt: $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t(p) = X(\phi_0(p)) = X_p$

$$X_p f = \left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi_t(p)\right] f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f\circ\phi_t(p))$$

$$\underset{\substack{f(p)\\ \text{unabh. von}\\ t}}{=} \frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = g(0,p) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f\circ\phi_t = f + t g_t & (1)\\ Xf = g_0 & (2)\end{cases}$$

$$d\phi_h(Y_{\phi_{-h}(p)})\, f = Y_{\phi_{-h}(p)}(f\circ\phi_h) \underset{(1)}{=} Y_{\phi_{-h}(p)}(f + t g_t)$$

$$(L_X Y) f = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(Y_p - d\phi_h(Y_{\phi_{-h}(p)})\right)(f)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(Y_p - Y_{\phi_{-h}(p)}\right)(f) - \lim_{h\to 0} \cancel{\tfrac{1}{h}}\cancel{h}\, \underbrace{Y_{\phi_{-h}(p)}(g_h)}_{\to Y_{\phi_0(p)}(g_0) = Y_p(Xf)}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left((Yf)_p - (Yf)_{\phi_{-h}(p)}\right)}_{} - Y_p(Xf)$$

$$= X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

$$= [X,Y] f.$$

$\blacksquare$

Folgerungen: $L_X Y = -L_Y X, \quad L_X X = 0.$

Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Man kann zeigen: $\exists$ lokale Koordinaten $(x^1, -, x^n)$, sodass

$X = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Wenn $Y = \frac{\partial}{\partial x^2}$, dann $[X, Y] = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^1} = 0.$

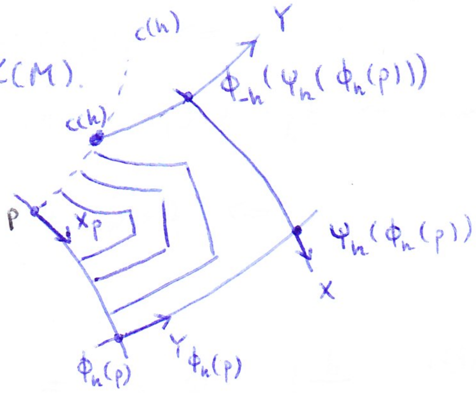
Also ist $[X, Y] = 0$ eine notwendige Bedingung für die Existenz von lok. Koordinaten so dass

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^2} \quad \text{(auch hinreichend!)}$$

- Geometrische Interpretation der Lie-Klammer: $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Sei ϕ der Fluss von X, ψ der Fluss von Y, $p \in M$.

$$c(h) := (\psi_{-h} \circ \phi_{-h} \circ \psi_h \circ \phi_h)(p)$$



$h \mapsto c(h)$ definiert eine glatte Kurve

Es gilt: $c'(0) = 0$. Für Kurven $\gamma(t)$ mit $\gamma'(0) = 0$ lässt sich die zweite Ableitung definieren durch $\gamma''(0) f := \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} (f \circ \gamma)(t)$. Dann ist $\gamma''(0)$ eine Derivation.

$\Rightarrow c''(0)$ ist definiert.

Es gilt: $\quad c''(0) = 2 [X, Y]_p$

RIEMANNSCHE MANNIGFALTIGKEITEN

Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit.

Def. Eine Riemannsche Metrik auf M ist eine Zuordnung $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p \; \forall p \in M$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ein inneres Produkt (symmetrisch, positiv definit, bilinear) auf T_pM ist. Diese Zuordnung soll glatt sein, d.h. für lokale Koordinaten (U, x) ist $p \mapsto \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p \rangle_p$ eine glatte Funktion auf U.

$$g_{ij}(p) := \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \rangle_p, \quad g_{ij} : U \to \mathbb{R} \text{ glatt} \quad (g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

Das Paar $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Def. Ein Diffeomorphismus $\phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M) \to (N, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$ heißt Isometrie $:\Leftrightarrow$

$$\forall p \in M : \forall u, v \in T_pM : \quad \langle u, v \rangle_{M,p} = \langle d\phi_p(u), d\phi_p(v) \rangle_{N, \phi(p)}$$

Bsp. ① $M = \mathbb{R}^n$ x = Standardkoordinaten

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p = \delta_{ij}$$ heißt Euklidsche Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

② Sei $M \overset{f}{\hookrightarrow} N$ glatte Immersion, $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$ sei Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann induziert f eine Riemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ auf M durch

$$\langle u, v \rangle_{M,p} := \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{N, f(p)}$$

ist positiv-definit, da df injektiv!

Bsp. $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induziert eine Metrik auf S^n: "Standardsphäre"

③ Produktmetrik: Seien $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$, $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Projektionen; Seien $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$

$$\begin{tikzcd} & T_{(p,q)}(M\times N) \arrow[dl, "d\pi_1"'] \arrow[dr, "d\pi_2"] & \\ T_pM & & T_qM \end{tikzcd}$$

$$\langle u, v \rangle_{M\times N, (p,q)} := \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_{M,p} + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v) \rangle_{N,q}$$

ist Riemannsche Metrik, die sogenannte Produktmetrik.

Bsp. $T^n = S^1 \times \_ \times S^1$ erhält die Produktmetrik (der "flache" Torus)

(flacher Torus lässt sich nicht zeichnen, nicht einbetten)

Proposition. Jede glatte Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik.

Beweis. Sei $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M durch Karten und $\{f_\alpha\}_\alpha$ eine glatte Partition der 1 bzgl. $\{U_\alpha\}_\alpha$, $\operatorname{supp} f_\alpha \subseteq U_\alpha$.

Über U_α betrachte die eindeutige Riemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle^\alpha$ sodass

$$(U_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle^\alpha) \xrightarrow{x_\alpha} (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Eukl.}})$$ eine Isometrie ist.

Nun: $$\langle u, v \rangle_p := \sum_\alpha f_\alpha(p) \langle u, v \rangle_p^\alpha$$ für $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

$\blacksquare$

Längenmessung: Sei $c: \mathbb{R} \to M$ eine Kurve in M.

Def. Ein Vektorfeld entlang c ist eine glatte Zuordnung $t \mapsto v(t) \in T_{c(t)}M$

Bem. Ein VF entlang c lässt sich nicht unbedingt auf ein VF auf einer offenen Umgebung der Kurve fortsetzen.

Wir schreiben auch für $v \in T_pM$: $\|v\|^2 := \langle v, v \rangle_p$.

$c: \mathbb{R} \to M$ Kurve $\Rightarrow$ $$l_a^b(c) := \int_a^b \|c'(t)\| \, dt$$ heißt Länge der Kurve (von a bis b).