II. Algebraische Gruppen: Grundlagen

1. Affine algebraische Gruppen. $k = \bar{k}$

Def. + Satz 1.

(i) Eine affine (lineare) algebraische Gruppe $/_k$ ist eine affine Varietät G über k zusammen mit Morphismen

$$\mu : G \times G \longrightarrow G \quad (\text{Multiplikation})$$

$$\iota : G \longrightarrow G \quad (\text{Inversion})$$

$$\varepsilon : \mathbb{A}^0_k \longrightarrow G \quad (\text{neutrales Element})$$

so dass die Gruppenaxiome gelten:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd} \qquad (\text{Assoziativität})$$

$$\begin{tikzcd}
G \times \mathbb{A}^0 \arrow[r, "\mathrm{id} \times \varepsilon"] \arrow[dr, "pr_1"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{A}^0 \times G \arrow[l, "\varepsilon \times \mathrm{id}"'] \arrow[dl, "pr_2"] \\
& G &
\end{tikzcd} \qquad (\text{neutrales Element})$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, \iota)"] \arrow[d, "\text{konst.}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, phantom, "///"] & G \arrow[l, "(\iota, \mathrm{id})"'] \arrow[d, "\text{konst.}"] \\
\mathbb{A}^0 \arrow[r, "\varepsilon"] & G & \mathbb{A}^0 \arrow[l, "\varepsilon"']
\end{tikzcd} \qquad (\text{Inverses})$$

Morphismen in der Kategorie (affiner) alg. Gruppen: Morphismen von Varietäten, die obige Strukturen respektieren.

(ii) Die Kategorie affiner algebraischer Gruppen ist (anti-)äquivalent zu folgenden Kategorien:

a) Objekte: kommutative Hopf-k-Algebren, d.h. reduzierte, kommutative, endl. erz. k-Algebren A

zusammen mit Morphismen

- $\Delta : A \to A \otimes_k A$ (Komultiplikation)
- $\iota : A \to A$ (Koinversion)
- $\varepsilon : A \to k$ (Ko-Einheit) so dass:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_k A \otimes_k A & A \otimes A \arrow[l, "\Delta \otimes id"'] \\
A \otimes A \arrow[u, "id \otimes \Delta"] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

(Komultiplikation)

$$\begin{tikzcd}
A \otimes k & A \otimes A \arrow[l, "id \otimes \varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon \otimes id"] & k \otimes A \\
& A \arrow[ul] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong \text{ Inklusion zweite Komp.}"']
\end{tikzcd}$$

(Koeinheit)

$$\begin{tikzcd}
A & A \otimes A \arrow[l, "(\iota, id)"'] \arrow[r, "(id, \iota)"] & A \\
k \arrow[u, "\text{Strukturmorph.}"] & A \arrow[l, "\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[u, "\Delta"] & k \arrow[u, "\text{Strukturmorphismus}"']
\end{tikzcd}$$

(Koinversion)

Morphismen: k-Algebren, kompatibel mit Zusatzstrukturen.

b) Objekte: Darstellbare Funktoren

$$\mathcal{C} := \begin{array}{c}\text{Kategorie red. endl. erz.} \\ k\text{-Algebren}\end{array} \longrightarrow \underline{Grp}$$

Morphismen: Natürliche Transformationen.

Beweis.
(i) <=> (a): Thm. I.1.15 $\Rightarrow G \mapsto A(G)$ definiert (anti-)-Kategorienäquivalenz,

beachte $A(V \times W) = A(V) \otimes_k A(W)$, so dass die Diagramme aus (a) denen aus (i) entsprechen.

(a) <=> (b): $A \longmapsto \mathrm{Hom}_k(A, -)$ induziert Kategorienäquivalenz nach Yoneda-Lemma:
Die Diagramme in (a) implizieren, dass die h_A Werte in Gruppen annehmen! ▨

Die Beschreibung (ii)(b) führt zu dem allgemeineren Begriff des (affinen) Gruppenschemas als Funktor

$$\begin{tikzcd}
k\text{-}\underline{Alg} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \underline{Grp} \arrow[d, "\text{Vergissfkt.}"] \\
& \underline{Set}
\end{tikzcd}$$

so dass der induzierte Funktor durch eine (endl. erz.) k-Algebra darstellbar ist.

(jetzt kann k ein beliebiger Körper / Ring / Schema sein)

Beispiele 2.

1) $\mathbb{G}_a := \mathbb{A}^1$ ("additive Gruppe")

(i) $\mu(x,y) := x+y$, $\iota(x) = -x$, $\varepsilon(*) = 0$.

(a) $A = k[X]$, $\Delta(X) = X\otimes 1 + 1\otimes X$, $\iota(X) = -X$, $\varepsilon(X) = 0$

(b) $\mathbb{G}_a(R) = (R,+) = \mathrm{Hom}_k(k[X], R)$

2) $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = V(XY-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ ("multiplikative Gruppe")

(i) $\mu(x,y) = xy$, $\iota(x) = x^{-1}$, $\varepsilon(*) = 1$

(a) $A = k[x,x^{-1}]$, $\Delta(X) = X\otimes X$, $\iota(X) = X^{-1}$, $\varepsilon(X) = 1$

(b) $\mathbb{G}_m(R) = (R^\times, \cdot) = \mathrm{Hom}_k(k[x,x^{-1}], R)$

3) $\mu_n \ (\subseteq \mathbb{G}_m) = V(x^n-1) \subseteq \mathbb{A}^1$ (i.A. <u>nicht</u> irreduzibel / zsmhgd.)

4) GL_n

(i) $GL_n(k) \subseteq M_n(k) = \mathbb{A}^{n^2}$

(a) $A = k[X_{ij}, \underbrace{\det(x_{ij})^{-1}}_{=:d}]$, $\Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}$, $\Delta(d) = d\otimes d$

$\iota(d) = \det(x_{ij})$, $\iota(X_{ij}) = d \cdot \mathrm{Adj}(X_{ij})$

$\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$, $\varepsilon(d) = 1$.

(b) $R \longmapsto GL_n(R)$

5) $SL_n = V(\det - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$

6) V endl.-dim. k-VR

(b) $R \longmapsto (V \otimes_k R, +)$

7) $GL(V)$ (V wie in 6) (b): $R \longmapsto GL(V\otimes_k R)$

8) Morphismen: $\lambda \in k^\times$, $n \in \mathbb{Z}$: $\mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a$, $x \longmapsto \lambda x$

$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$, $x \longmapsto x^n$

$GL_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m$

2. Untergruppen

Def. 1. Eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ ist eine abgeschlossene Untervarietät, die zugleich eine Untergruppe ist. H besitzt (via Einschränkung der Multiplikation-/ Inversen- / "Neutrales Element" - Abbildung) eine eindeutige Struktur als algebraische Gruppe, so dass die Inklusion $H \hookrightarrow G$ ein Morphismus alg. Grp. ist.

Bsp. 2. Abgeschlossene UG von GL_n

- SL_n ($\det = 1$)
- D_n Diagonalmatrizen ($X_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$)
- B_n obere Dreiecksmatrizen ($X_{ij} = 0$, $i > j$)
- U_n: unipotente Matrizen
- $O_n \,/\, Sp_{2n}$: Matrizen A mit $A^T J A$ für $J = \left(\begin{matrix} E_n & O_n \\ \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} & Sp_{2n} \end{matrix} \right)$
- $SO_n = O_n \cap SL_n$

Proposition 3. Sei G eine algebraische Gruppe.

(i) Es gibt genau eine irreduzible Komponente $G^\circ \subseteq G$, die das neutrale Elt. e enthält.

(ii) G° ist eine normale abg. Untergruppe von endlichem Index.

(iii) G° ist die einzige Zusammenhangskomponente, die e enthält.

(iv) Jede abg. Untergruppe von G von endlichem Index umfasst G°.

(Eine alg. Grp. ist genau dann zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist.)

Beweis.

(i) Seien X, Y irred. Komponenten (insb. abg.), die e enthalten.

$\underset{\text{AlgGeo}}{\Longrightarrow}$ $X \times Y$ irreduzible Varietät (Springer Thm. 1.5.4 $\leftrightarrow$ A, B integre k-Alg. $\Rightarrow$ $A \otimes_k B$ integer)

$\underset{\mu \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $X \cdot Y = \mu(X \times Y)$ irreduzibel.

$\Longrightarrow$ $\overline{X \cdot Y}$ irreduzibel $\quad \overset{(i)}{\Longrightarrow} X = \overline{XY} = Y$ und X ist abg. unter Multiplikation.

$\overline{X \cdot Y} \supseteq X, Y$ irreduzible Komponenten

Da ι Homöomorphismus, ist $e \in X^{-1}$ ebenfalls eine irreduzible Komponente, d.h. $X = X^{-1}$

$\Longrightarrow$ X abg. Untergruppe.

Analog folgt: $gXg^{-1} = X \quad \forall g \in G$, d.h. $X = G^\circ$ ist normal

Die Nebenklassen gX sind die Komponenten von G ($g \in Y$ bel. Komp.: $e \in g^{-1}Y \Rightarrow Y = gX$)

Da es in Varietäten nur endlich viele irreduzible Komponenten gibt folgt (ii).
Darüberhinaus sind alle irreduziblen Komponenten disjunkt.
Da Zusammenhangskomponenten Vereinigungen irred. Komponenten sind, müssen irred. und zsmh. Komponenten übereinstimmen. $\Rightarrow$ (iii).

(iv) Sei $H \subseteq G$ abg. von endlichem Index. $\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ abg. von endlichem Index.
$\Rightarrow$ $H^\circ \subseteq G^\circ$ ist offen abgeschlossen $\xrightarrow[G^\circ \text{ zsmhgd.}]{}$ $H^\circ = G^\circ$ $\Rightarrow$ (iv).
gilt in top. Grp.

$\blacksquare$

G° heißt die Zusammenhangskomponente der 1.