4. Diagonalisierbare Gruppen und Tori.

Def. 1. Sei G eine algebraische Gruppe.

(i) G heißt diagonalisierbar, falls G isomorph ist zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $D_n \cong \mathbb{G}_m^n$ $(n \geq 0)$

(ii) G heißt Torus, falls $G \cong D_n$, $n \geq 0$

(iii) Die Charaktergruppe von G ist $X^*(G) := \mathrm{Hom}_{AlgGrp}(G, \mathbb{G}_m) \overset{1:1}{=} \mathrm{Hom}_{k\text{-Hopf}}(k[T^{\pm 1}], A(G))$

$$\begin{array}{c} g \\ \downarrow \\ g(T) \end{array} \quad \Big\downarrow \wr \quad \{\chi \in A(G)^\times \mid \Delta(\chi) = \chi \otimes \chi,\ \varepsilon(\chi) = 1\}$$

Proposition 2. (Dedekind). $X^*(G) \subseteq A(G)$ ist linear unabhängig.

Beweis. $\underline{A:}$ $\exists n \geq 2$ (oE minimal) mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i = 0$. $\lambda_i \neq 0$, $\chi_i \neq \chi_j$ für $i \neq j$

$$\Rightarrow \forall g, h \in G \quad \begin{cases} \sum_i \lambda_i \chi_i(gh) = 0 \\ \sum_i \lambda_i \chi_i(g) \chi_n(h) = 0 \end{cases} \overset{\text{Diff.}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\chi_i(h) - \chi_n(h)) \chi_i = 0. \ \forall h \in G$$

$$\underset{n \text{ minimal}}{\longrightarrow} \lambda_i(\chi_i(h) - \chi_n(h)) = 0 \quad \forall i \,\forall h \in G \longrightarrow \chi_i = \chi_n$$

$\lightning$ $\blacksquare$

Proposition 3. Für G algebraische Grp. sind äquivalent:

(i) G diagonalisierbar (ii) $X^*(G) \hookrightarrow A(G)$ Basis + $X^*(G)$ ist e.e. abelsche Grp.

(iii) G ist abelsch und $G = G_s$ (iv) Jedes $G \xrightarrow{\rho} GL_n$ ist direkte Summe 1-Dim.-Darstellungen von G.

Beweis.

$\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$: Wähle Einbettung $G \hookrightarrow D_n$; $k[D_n] = A(D_n) = k[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}] \xleftarrow{\sim} A(X^*(D_n))$

$$\begin{array}{ccc} \cup\!\!\mid & & \Uparrow \\ \text{Monome} & & = X^*(D_n) \end{array}$$

ist Isomorphismus von Hopf-Algebren, wenn man definiert $\Delta(\chi) := \chi \otimes \chi$, $\varepsilon(\chi) := 1$, $i(\chi) := \chi^{-1}$.

$$\leadsto \quad \begin{tikzcd} k[X^*(G)] \arrow[d, "\text{kan}"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & k[X^*(D_n)] \arrow[l] \arrow[d, "\text{kanonisch}", "\wr"'] \\ A(G) & A(D_n) \arrow[l, two heads] \end{tikzcd}$$

Prop. 2 $\rightarrow$ kan. ist Iso $\Rightarrow$ $X^*(G) \twoheadleftarrow X^*(D_n) \quad T^a = T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n}$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \mathbb{Z}^n & a \end{array}$$

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iii):</u> Seien $\chi_1, \ldots, \chi_n \in X^*(G)$ Erzeuger.

$\Rightarrow$ können explizit Hom. von Hopfalgebren konstruieren

Gruppenring

$$\phi^* : A(D_n) \cong k[\mathbb{Z}^n] \longrightarrow A(X^*(G)) = A(G)$$

$$\mathbb{Z}^n \ni a \longmapsto \chi_1^{a_1} \cdots \chi_n^{a_n}$$

$\leadsto$ erhalte abg. Immersion $G \overset{\phi}{\hookrightarrow} D_n \Rightarrow G \leq D_n$ abelsch, $G = G_s$ (Thm. III.1.10)

<u>(iii) $\Rightarrow$ (iv):</u> $\rho(G) = \rho(G_s) = \rho(G)_s \leq (GL_n)_s$ abelsche Untergruppe Kor. III.1.12

$\underset{LA}{\Rightarrow}$ $\rho(G)$ simultan diagonalisierbar.

<u>(iv) $\Rightarrow$ (i):</u> Wähle Darstellung $G \overset{\rho}{\hookrightarrow} GL_n$ (Einbettungssatz von Cayley)

$\underset{\substack{\text{L.A.} \\ \text{Basiswechsel}}}{\Rightarrow}$ oE. $\rho(G) \leq D_n$.

$\blacksquare$

Korollar 4. Für G diagonalisierbar gilt:

(i) $U \leq G \Rightarrow U$ diagonalisierbar.

(ii) $G \xrightarrow{\phi} H \Rightarrow \phi(G)$ diagonalisierbar.

Beweis. Prop. 3 (iii) + Korollar III.1.12. $\blacksquare$

Theorem 5. Sei $p = \operatorname{char} k$. Dann gilt:

$$X^* : \{\text{diag'bare alg. Grp.}\} \longrightarrow \{\text{e.e. ab. Grp. ohne } p\text{-Torsion (für } p>0)\}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. X^* ist (Hom-)Funktor in die Kategorie abelscher Gruppen.

IA: $\exists\, 1 \neq \chi \in X^*(G) : \chi^{p^r} = 1$, $p, r > 0$

$$\Rightarrow \text{ in } A(G): \quad (\underbrace{\chi - 1}_{\neq 0})^{p^r} = \chi^{p^r} - 1 = 0 \quad \text{↯ zu } A(G) \text{ reduziert.}$$

Def. "inversen" Funktor $\quad F: A \longmapsto k[A] := \bigoplus_{a \in A} k\,\underline{a}$ Gruppenring mit

$$\Delta(\underline{a}) := \underline{a} \otimes \underline{a}$$
$$\varepsilon(\underline{a}) := 1$$
$$\iota(\underline{a}) := \underline{-a}.$$

F wohldefiniert, da für $A = \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{1 \le i \le s} \mathbb{Z}/n_i$ $\Rightarrow F(A) \cong k[\mathbb{Z}]^{\otimes r} \otimes \bigoplus_{1\le i \le s} k[\mathbb{Z}/n_i]$

$$= k[\mathbb{G}_m] \qquad k[\mu_{n_i}]$$

$$\cong \overbrace{k[T^{\pm 1}]} \otimes_{1 \le i \le s} \overbrace{\underbrace{k[T]/(T^{n_i} - 1)}_{\text{separabel in allen Fällen}}}$$

Prop. 3 $\Rightarrow F X^*(G) = k[X^*(G)] \xrightarrow[\sim]{\text{kan}} A(G)$

$\rightsquigarrow$ bleibt z.z.: für A aus rechter Kategorie gilt:

$$A \hookrightarrow X^* F(A) \subseteq k[A]$$
$$a \longmapsto \underline{a}$$

Sei $\lambda = \sum_{a \in A} \lambda_a \underline{a} \in X^* F(A)$

1) $\sum_a \lambda_a \underline{a} \otimes \underline{a} = \Delta(\lambda) = \lambda \otimes \lambda = \sum_{a,b} \lambda_a \lambda_b\, \underline{a} \otimes \underline{b}$

$$\Leftrightarrow \lambda_a \lambda_b = \begin{cases} \lambda_a, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

2) $1 = \varepsilon(\lambda) = \sum_a \lambda_a \Rightarrow \exists\, a \in A: \lambda_a \neq 0.$

$\underset{1)}{\Rightarrow} \lambda_a^2 = \lambda_a \neq 0 \Rightarrow \lambda_a = 1. \quad \underset{1)}{\Rightarrow} \forall\, b \neq a \in A: \lambda_b = 1 \cdot \lambda_b = \lambda_a \lambda_b = 0.$

$\rightarrow \lambda = 1 \cdot \underline{a}$ kommt von A.

Korollar 6. (i) G diagonalisierbar $\iff G \cong \mathbb{G}_m^r \times H$, $p \nmid \# H < \infty$

(ii) Für G diagonalisierbar:

G Torus $\iff$ G zshgd. $\iff$ $X^*(G)$ frei abelsch.

Beweis.

(i) G diag.bar $\underset{\text{Thm 5}}{\Longrightarrow}$ $X^*(G) = \mathbb{Z}^r \oplus H$ und $p \nmid \# H < \infty$

$$\overset{\text{Prop. 3}}{\Longrightarrow} A(G) = k[X^*(G)] = \underbrace{k[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]}_{= k[\mathbb{G}_m^r]} \otimes k[H]$$

$\iff G \cong \mathbb{G}_m^r \times H.$

Umgekehrt ist jede solche Gruppe nach Thm. 5 diag.bar.

(ii) direkt aus (i) $\blacksquare$

Bem. / Def. 7. $\mu_n := \ker(\mathbb{G}_m \xrightarrow{(-)^n} \mathbb{G}_m)$, $n \geq 1$.

$$\leadsto A(\mu_n) = k[T] / \underbrace{(T^n - 1)}_{\text{sep. falls } p \nmid n}.$$

Korollar 8. $X^* : \mathrm{Aut}_{\text{alg grp}}(D_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\underline{Ab}}(\mathbb{Z}^n) = GL_n(\mathbb{Z})$.

<u>Fakt:</u> Für G diag-bar erhalte

1) $G \times X^*(G) \longrightarrow \mathbb{G}_m$ perfekte Paarung, d.h. bilineare Abb., die Isomorphismen erzeugt.
$(g, \chi) \longmapsto \chi(g)$

$X^*(G) \underset{id}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}_{\text{AlgGrp}}(G, \mathbb{G}_m)$, $\quad G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(X^*(G), \mathbb{G}_m)$

2) Galois-Korrespondenz: (inklusionsumkehrend)

$$\{U \leq G \text{ abg.}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{Y \leq X^*(G) \mid p \nmid [X^*(G) : Y]\}$$

$$H \longmapsto H^\perp$$
$$Y^\perp \longmapsfrom Y$$

Def. 9. Sei G eine alg. Grp.

$X_*(G) := \mathrm{Hom}_{\text{Alg Grp}}(\mathbb{G}_m, G)$ heißen Kocharaktere von G.

G abelsch $\Rightarrow$ $X_*(G)$ abelsche Gruppe.

Proposition 10. Ist T Torus, so sind $X_*(T)$, $X^*(T)$ frei abelsch und

$$X^*(T) \times X_*(T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{Alg Grp}}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$$
$$(\chi, \lambda) \longmapsto \chi \circ \lambda$$

ist perfekte Paarung.

Beweis.

$$X_*(T) = \mathrm{Hom}_{\text{Alg Grp}}(\mathbb{G}_m, T) \xrightarrow[\text{Thm. 5}]{X^* \;\sim} \mathrm{Hom}_{Ab}(X^*(T), \underbrace{X^*(\mathbb{G}_m)}_{\cong \mathbb{Z}})$$

$$X^*(T) \cong \mathbb{Z}^r \Rightarrow X^*(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(\underbrace{\mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(X^*(T), \mathbb{Z})}_{\cong X_*(T)}, \mathbb{Z})$$

$\blacksquare$

Proposition 11. (Rigidität diagonalisierbarer Gruppen)
Seien G, H diag. alg. Grp., V eine zshgd. affine Varietät, $G \times V \xrightarrow{\phi} H$ Hom. von Varietäten.

der Art, dass $\phi_v : G \to H,\ g \mapsto \phi(g,v) \in \mathrm{Hom}_{\text{Alg Grp}}(G, H)\ \forall v \in V$.

$\Rightarrow$ ϕ_v ist unabhängig von $v \in V$.

Beweis. ϕ ist gegeben durch $\phi^* : A(H) \to A(G) \otimes A(V)$

$$\begin{matrix}\text{Basis da} \\ \text{dig-bar}\end{matrix} \rightarrow X^*(H) \ni \chi \longmapsto \sum_{\chi' \in X(G)} \chi' \otimes \underbrace{f_{\chi,\chi'}}_{\in A(V)} \text{ geeignet}$$

$$\Rightarrow \sum_{\chi'} f_{\chi,\chi'}(v) \cdot \chi' = \phi_v^*(\chi) \in X^*(G) \quad \forall \chi \in X^*(H)$$

$$\Rightarrow f_{\chi,\chi'}^{(v)} \in \{0,1\} \ \forall v \in V\ \forall \chi, \chi' \rightarrow (f_{\chi,\chi'})^2 = f_{\chi,\chi'} \quad \forall \chi, \chi'$$

$$\Rightarrow V = V(f_{\chi,\chi'}) \sqcup V(1 - f_{\chi,\chi'}) \quad \forall \chi, \chi'$$

$$\xrightarrow{V \text{ zshgd.}} f_{\chi,\chi'} \text{ konstant } \forall \chi, \chi' \rightarrow \phi_v \text{ unabhängig von } v.$$

$\blacksquare$