(2) alternativ:

$$\begin{array}{ccc} (\underbrace{1+\pi^i\mathcal{O},\cdot}_{=U_i}) & \underset{\exp}{\overset{\log}{\rightleftarrows}} & (\pi^i\mathcal{O},+) \\ \downarrow \varphi & = & \downarrow p\cdot - \text{ ist Isomorphismus} \\ (U_{i+e},\cdot) & \underset{\exp}{\overset{\log}{\rightleftarrows}} & (\pi^{i+e}\mathcal{O},+) \end{array}$$

☒

Satz 3.8. K sei p-adischer Körper. Dann: 27.04.18

(1) $U_1(K) \cong \mu_{p^\infty}(K) \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ als topologische Gruppen.

(2) $K^\times \cong \pi^{\mathbb{Z}} \times \mu^{(p)}(K) \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ als topologische Gruppen.

Dabei

- $\mu_{p^\infty}(K) = \{\zeta \in K^\times \mid \exists n>0: \zeta^{p^n}=1\}$
- $\#\mu_{p^\infty}(K) < \infty$: $[K:\mathbb{Q}_p]<\infty$ und $[\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}):\mathbb{Q}_p] = \phi(p^n)$

$$p^{n-1}(p-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Bemerkung: · $U_1(K)$ ist abelsche pro-p-Gruppe (letztes mal), d.h. $\mathbb{Z}_p$-Modul.

· $U_1(K)_{tors} \cong \mu_{p^\infty}(K)$ und $U_1(K) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Q}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$

Beweis. (2) folgt aus (1) und 3.3.

(1) $U_1(K)$ ist abelsche pro-p-Gruppe.

$$U_1(K)_{tors} = \{x \in U_1(K) \mid \exists n \in \mathbb{N}: x^{p^n}=1\} = \mu_{p^\infty}(K) \quad (<\infty)$$

Beh. $U_1(K)$ topol. endl. erz. $\Rightarrow U_1(K)$ endl. erz. $\mathbb{Z}_p$-Modul

$\Rightarrow U_1(K) \cong U_1(K)_{tors} \times \mathbb{Z}_p^r$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$

Dazu: (Burnside Basissatz) z.z. $U_1(K)/U_1(K)^n$ endlich

dazu: $U_1(K)^p \supseteq U_{i_0}(K)^p \underset{3.7.}{=} U_{i_0+e}(K)$ für $i_0 = \left\lceil \frac{e}{p-1} \right\rceil$

$\Rightarrow U_1(K)/U_1(K)^p$ ist Quotient von $U_1(K)/U_{i_0+e}(K)$ ← endliche p-Gruppe

($U_i/U_{i+1} \cong (k,+)$ endl.)

$\Rightarrow$ Behauptung gezeigt.

Behauptung: $r = [K:\mathbb{Q}_p]$ $\quad U_1/U_i$ endl. $\forall i \geq 1$

$\Rightarrow \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_p} U_1 = \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_p} U_{i_0}$

wegen log, exp: $U_{i_0} \underset{\log}{\cong} \pi^{i_0} \mathcal{O}_K$ als $\mathbb{Z}_p$-Modul (als pro-p-Gruppe)

$$\mathrm{rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K = \mathrm{rang}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \dim_{\mathbb{Q}_p} K = [K : \mathbb{Q}_p]$$

Alternativ: U_{i_0} ist p-torsionsfrei, denn $x \mapsto x^p$ ist Isomorphismus $U_{i_0} \to U_{i_0+e}$

$\Rightarrow U_{i_0}$ ist freier $\mathbb{Z}_p$-Modul (von endl. Rang)

$$\underset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}_p} U_{i_0} = \mathrm{rang}_{\mathbb{F}_p} U_{i_0}/U_{i_0}^p = \mathrm{rang}_{\mathbb{F}_p} U_{i_0}/U_{i_0+e} = \log_p(\# U_{i_0}/U_{i_0+e})$$

$$= \log_p((\underbrace{\# k}_{=p^f})^e) = ef = [K : \mathbb{Q}_p]$$

$\blacksquare$

Satz 3.9. (ohne Beweis, s. Ü)

Für $K \cong \mathbb{F}_q((\pi))$ gilt $U_1(K) \cong \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$

Abb. $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}} \to U_1$: Sei $b_1, \dots, b_f$ Basis von k über $\mathbb{F}_p$.

Behauptung: $\prod_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ p \nmid n}} \prod_{j=1}^{f} \mathbb{Z}_p \longrightarrow U_1(K), \quad (a_{nj})_{n,j} \longmapsto \prod_{n,j} (1 + b_j \pi^n)^{a_{nj}}$

$\blacksquare$

B. Zahm verzweigte Erweiterungen (ζ_n primitive n-te EW)

Proposition 3.10. $L|K$ lokale Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid n$.

(a) $K(\zeta_n)$ ist unverzweigt über K

(b) Für $m := \# k_L^\times$ gilt $K(\zeta_m) \subseteq L$ und $K(\zeta_m)$ ist größte unverzweigte Erweiterung von K in L. ($\Rightarrow L | K(\zeta_m)$ ist total verzweigt)

(c) Zu $\in \mathbb{N}$ $\exists!$ unverzweigte Erweiterung K_ℓ von K mit $[K_\ell : K] =$, nämlich $K = K(\zeta_{q^\ell - 1})$, $K_\ell | K$ ist galoissch und

$$\mathrm{Gal}(K_\ell | K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(k(\zeta_{q^\ell - 1}) / k) \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

Beweis. (vgl. ANT I)

(a) Man betrachtet $X^m - 1$ ($p \nmid m$ und wendet Hensels Lemma an. $\Rightarrow [K(\zeta_n) : K] = [k(\zeta_n) : k]$

$\Rightarrow f(K(\zeta_n) | K) = [K(\zeta_n) : K]$

(Hensel: $\deg \mathrm{mipo}_K \zeta_m = \deg \mathrm{mipo}_k \zeta_m$). Hensel zeigt auch $K(\zeta_m) \subseteq L$ und $k_L = k_K(\zeta_m)$

($\Rightarrow L | K(\zeta_m)$ voll verzweigt) $\Rightarrow$ (a), (b), (c).

Hatten in ANT I gezeigt. $\exists$ kanonische Surjektion $\rho_{L|K} : \mathrm{Gal}(L|K) \to \mathrm{Gal}(k_L | k)$ falls $L|K$ galoissch.

$\blacksquare$

Für $L|K$ algebraisch ($L \subseteq K^{alg}$, $K \subseteq L$) sei

$$\mathcal{F}_{L|K} := \{ F \subseteq L \mid F|K \text{ endl. Körpererweiterung} \}$$

Def. 3.11.

(1) $L|K$ heißt unverzweigt $:\Leftrightarrow$ alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind unverzweigt über K.

(2) $L|K$ heißt total verzweigt $:\Leftrightarrow$ alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind total verzweigt über K.

(3) $K^{ur} := \bigcup \{ F \in \mathcal{F}_{K^{sep}|K} \mid F/K \text{ unverzweigt} \}$ $(= \varinjlim \ldots)$

(die max. unverzweigte Erweiterung von K (in K^{alg}))

(4) Für $F \subseteq F'$ in $\mathcal{F}_{L|K}$ haben kanonische Inklusion $k_F \hookrightarrow k_{F'}$

Sei $k_L = \bigcup \{ k_F \mid F \in \mathcal{F}_{L|K} \}$ $(= \varinjlim \ldots)$

(Bem.: $k_L \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_L / \mathfrak{m}_L$; Bewertung auf K setzt sich eind. auf L fort)

Bem. (a) $K^{ur} = \bigcup_m K(\zeta_{q^m - 1})$ $(= \varinjlim \ldots)$

(b) $K^{ur} \cap L$ für bel. L ist die maximale unverzweigte Erweiterung von K in L.

Def. 3.12. $L|K$ galoissch.

(i) Erhalten kanonischen Homomorphismus $\rho_{L|K} : Gal(L|K) \longrightarrow Gal(k_L|k)$

(als $\varprojlim \rho_{E|K} : \varprojlim_{\substack{E \in \mathcal{F}_{L|K} \\ E|K \text{ galoissch}}} (Gal(E|K) \longrightarrow Gal(k_E/k))$)

(ii) $I_{L|K} := \ker(\rho_{L|K})$, $I_K := I_{K^{sep}/K}$

(iii) Haben $\sigma : k_L \to k_L$, $\alpha \mapsto \alpha^q$ in $Gal(k_L/k)$ (topol. Erz.) $q = \# k$

Nenne $Fr \in Gal(L|K)$ einen Frobeniusautomorphismus $:\Leftrightarrow \rho_{L|K}(Fr) = \sigma$

Bem. (1) Haben "wieder" kurze exakte Sequenzen $1 \to I_{K/L} \to Gal(L|K) \xrightarrow{\rho_{L|K}} Gal(k_L/k) \to 1$

als inverser Limes analoger Sequenzen für $E \in \mathcal{F}_{L|K}$ mit $E|K$ galoissch.

(2) Fr ist eindeutig $\Leftrightarrow$ $\rho_{L|K}$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $L|K$ ist unverzweigt (d.h. $I_{L|K} = \{1\}$)

Für $\underline{L = K^{ur}}$: $Gal(K^{ur}/K) \xrightarrow{\sim} Gal(k^{alg}/k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$.

Def. 3.13. (a) Gilt $[L:K]<\infty$, so heißt $L|K$ zahm verzweigt $:\Leftrightarrow p \nmid e(L|K)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ ≙ char k

(b) $L|K$ heißt zahm verzweigt $:\Leftrightarrow$ alle $F\in \mathcal{F}_{L|K}$ sind zahm verzweigt über K

(c) $L|K$ heißt wild verzweigt $:\Leftrightarrow$ $L|K$ ist <u>nicht</u> zahm verzweigt.
$(p \mid e(F|K)$ für ein $F\in\mathcal{F}_{L|K})$

Bsp. (a) $e\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ mit $p\nmid e \Rightarrow L = K(\sqrt[e]{\pi})$ zahm verzweigt (und total unverzweigt)

(b) $p=$ char k, $L|K$ inseparabel $\rightarrow$ $L|K$ wild verzweigt

(c) $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p$ zahm, total verzweigt. $(e=\phi(p)=p-1)$
$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p$ wild verzweigt für $n\geq 2$ $(e=\phi(p^n))$

Proposition 3.14. Sei $L|K$ zahm verzweigt, $[L:K]<\infty$, $E=L\cap K^{ur}$, $e=e(L|K)$. Dann:

(a) $L = E(\sqrt[e]{\pi_E})$ für π_E geeignetes Primelement von E.

(b) $E' := E(\zeta_{e\cdot\# k_E^\times})$, $L' := LE'$ $\Rightarrow L' = E'(\sqrt[e]{\underset{=\pi_K}{\pi}})$

und $E'|K$ unverzweigt, $L'|L$ unverzweigt --- ($L'|K$ galoissch)

Beweis.

(a) Sei π_L Primelement von $\mathcal{O}_L$ $\Rightarrow$ $\pi\mathcal{O}_L = \pi_L^e\mathcal{O}_L$, d.h. $\alpha\in\mathcal{O}_L^\times$: $\pi=\pi_L^e\alpha$

wissen $\mathcal{O}_L^\times = \mu^{(p')}(L)\times U_1(L)$ $\Rightarrow \alpha = \zeta\cdot u$ (mit $\zeta\in\mu^{(p')}(L)$, $u\in U_1(L)$) $\Big\}$ $U_1(L)$ ist (endl. erz.) $\mathbb{Z}_p$-Modul, $e\in\mathbb{Z}_p^\times$
$\Rightarrow \exists\, u'\in U_1(L): (u')^e = u$.

$\Rightarrow \zeta^{-1}\pi = (\pi_L\cdot u')^e$
beachte: $\mu^{(p')}(L) = \mu^{(p')}(E)$ da $k_L = k_E$ $\Big\}$ $\Rightarrow \pi_E := \zeta^{-1}\pi$ Primelement von $\mathcal{O}_E$ <u>und</u> $L=E(\sqrt[e]{\pi_E})$

(denn: $L=E(\pi_L)$, da $[L:E]=e(L|E)=e(L|K)=e$)

(b) wähle $\xi\in\mu^{(p')}(E)$ mit $\xi^e=\zeta$ $\quad(\zeta^{\# k_E^\times}=1)$

Dann: $\pi = (\pi_L\cdot u'\xi)^e \Rightarrow L' = E'(\sqrt[e]{\pi})$.

$\blacksquare$

Bsp. (ü) $\mathbb{Q}_p(\zeta_p) = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p-1]{\pi'})$ für geeigneten Uniformisierer in $\mathbb{Q}_p$.

Bch.: $\pi=-p$ tut's!

Def. G pro-endlich abelsch. $\Rightarrow$ G ist $\hat{\mathbb{Z}}$-Modul.

Modulstruktur: $\hat{\mathbb{Z}} \times G \longrightarrow G, \; (\alpha, g) \longmapsto \underbrace{\alpha \cdot g}_{?}$

$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \cdot g := g^n$

Für $\hat{a} \in \hat{\mathbb{Z}}$ beliebig: schreibe $\hat{a} = (a_n)_n \in \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ $(a_n \in \mathbb{Z})$

prüfe: (g^{a_n}) "konvergieren" ((g^{a_n}) hat eind. Häufungspunkt!)

Proposition 3.15.

(a) Sind L, L' zahm verzweigt über K, so auch LL' ($\Rightarrow \exists$ größte zahm verzw. Erw. K^{tr} von L in K^{sep})

(b) Die maximal zahm verzweigte Erweiterung von K in K^{alg} ist

$$K^{tr} = \bigcup_{p \nmid n} K^{ur}(\sqrt[n]{\pi})$$

(c) K^{tr}/K^{ur} ist galoissch und $Gal(K^{tr}/K^{ur}) \underset{\text{kan.}}{\cong} \underbrace{\prod_{\substack{\ell \neq p \\ \ell \text{ prim}}} \mathbb{Z}_\ell}_{= \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}_p} =: \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$

(d) $K^{tr}|K$ ist galoissch mit $Gal(K^{tr}/K) \cong \hat{\mathbb{Z}}^{(p)} \rtimes \hat{\mathbb{Z}}$ so dass für geeignete topologische Erzeuger $t \in \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ und $s \in \hat{\mathbb{Z}}$ gilt:

$$sts^{-1} = t^q \quad (q = \# k)$$

Beweis.

(a) Für $L, L' | K$ endl: $e(LL'/K) \mid e(L|K)\, e(L'|K)$ (aus ANT 1) oder 3.14

(b) Folgt aus 3.14 (b)

(c) $Gal(K^{ur}(\sqrt[n]{\pi}) | K^{ur}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (nach Kummertheorie)

$(p \nmid n)$ Galoiskonjugierten von $\sqrt[n]{\pi}$ sind $(\zeta_n^i \sqrt[n]{\pi})_{i=1}^{n}$ (Algebra I)

$\varprojlim (\ldots) = \varprojlim_{p \nmid n} (\quad) \cong \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$

(d) (ii) Sei $K(n) := K(\zeta_{q^n-1}, \sqrt[q^n-1]{\pi})$; Beh.: $K(n)|K$ galoissch mit $Gal(K(n)|K) \cong \underbrace{\overset{t=1}{\mathbb{Z}/_{q^n-1}\mathbb{Z}}}_{\text{zahm total verzweigt}} \rtimes \underbrace{\overset{s=1}{\mathbb{Z}/_{n}\mathbb{Z}}}_{\text{unverzweigt } Gal(K(\zeta_{q^n-1})|K)}$

und: $sts^{-1} = t^q$