Satz. 6.33. (Inflations-Restriktions-Sequenz) (ii) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$,

so ist

(a) $0 \to H^1(G/N, A^N) \xrightarrow{\inf} H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(N, A)^{G/N}$ exakt.

(b) gilt zusätzlich: $H^i(N, A) = 0$ für $i = 1, \dots, k-1$, so ist

$$0 \to H^k(G/N, A^N) \xrightarrow{\inf} H^k(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^k(N, A)^{G/N} \text{ exakt.}$$

Def. 6.34. (Koreskriktion)

Gelte $[G:H] < \infty$, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ (Res kann über ι definiert werden!)

$$\text{Cor}: \; H^i(H, A) \underset{\text{Shapiro}}{\simeq} H^i(G, \underbrace{\mathrm{CoInd}_H^G A}_{\substack{\wr\mid \\ \mathrm{Ind}_H^G A, \text{ da } [G:H] < \infty}}) \simeq H^i(G, \mathrm{Ind}_H^G A) \xrightarrow[H^i(G,\pi)]{} H^i(G, A)$$

heißt "Koreskriktion"

Explizit: $i = 0$:

$$\begin{array}{ccccc} a & \longmapsto & \mathrm{const}_a & \longmapsto & \sum_{g \in H\backslash G} g a . \\ H^0(H, A) & \xrightarrow{\text{Shapiro}} & H^0(G, \mathrm{CoInd}_H^G A) & \longrightarrow & H^0(G, A) \\ \| & & \| & & \\ A^H & \longrightarrow & (\mathrm{CoInd}_H^G A)^G & & \\ a & \longmapsto & (g \mapsto a)_{\text{konstant}} & & \end{array}$$

Nun

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CoInd}_H^G A & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_H^G A & \xrightarrow{\pi} & A \\ f & \longmapsto & \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} \otimes f(g) & \longmapsto & \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} f(g) = \sum_{g \in H\backslash G} g f(g^{-1}) \end{array}$$

01.06.18

Lemma 6.35. Gelte $[G:H] < \infty$.

Dann: $\mathrm{Cor}_H^G \circ \mathrm{Res}_G^H = (\cdot [G:H])$ Multiplikation.

Beweis. Sei $\varphi: \mathrm{CoInd}_H^G A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_H^G A$, $f \mapsto \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} \otimes f(g)$ der Isomorphismus

z.z.: $H^i(\pi) \circ H^i(\varphi) \circ H^i(\iota) = (\cdot [G:H])$

g.z.z.: $\pi \circ \varphi \circ \iota = (\cdot [G:H])$

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{CoInd}_H^G A & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \mathrm{Ind}_H^G A & \xrightarrow{\pi} & A \\ a & \longmapsto & (f_a : g \mapsto ga) & \underset{\text{s.o.}}{\longmapsto} & \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} \otimes f_a(g) & \longmapsto & \sum_{g \in H\backslash G} \underbrace{g^{-1} f_a(g)}_{= g^{-1} g a} = \sum_{g \in H/G} a = [G:H] \cdot a . \end{array}$$

$\blacksquare$

Lemma 6.36. G endlich $\Rightarrow$ ι bzw. π induzieren (via Shapiro) (δ-) Funktoren

$$\mathrm{Res}: \hat{H}^i(G,A) \longrightarrow \hat{H}^i(H,A), \quad \mathrm{Inf}: \hat{H}^i(H,A) \longrightarrow \hat{H}^i(G,A)$$

welche für $i \geq 0$ mit Res und Cor aus der üblichen Gruppenkohomologie übereinstimmt, und für $i=0$ von Res bzw. Cor induziert sind.

($\underline{\mathrm{Res}}: (i=0)$ $A^G \xrightarrow{\text{inkl}} A^H$, $\underline{\mathrm{Cor}}$ $(i=0)$ $A^H \longrightarrow A^G$, $a \longmapsto \sum_{g \in G/H} ga$

induziert $A^G/N_G A \longrightarrow A^H/N_H A$ $\quad A^H/N_H A \longrightarrow A^G/N_G A$)

und 6.35 gilt für Res, Cor auf $\hat{H}^*$.

Korollar 6.39. G endl. Gruppe, $G_p \leq G$ p-Sylowuntergruppe, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$

(a) $\ker(\mathrm{Res}: \hat{H}^i(G,A) \longrightarrow \hat{H}^i(G_p,A))$ enthält keine p-Torsion.

(b) Ist $\mathrm{Res}: \hat{H}^i(G,A) \longrightarrow \hat{H}^i(G_p,A)$ die Nullabbildung $\forall$ Primzahlen p und eine Wahl von p-Sylow's $\{G_p \leq G\}_{p\ \mathrm{PZ}}$, so gilt $\hat{H}^i(G,A)=0$.

Beweis.
(a) $\mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res} = (\cdot [G:G_p])$ $\quad \Rightarrow [G:G_p]\cdot\alpha = 0$, falls $\alpha \in \hat{H}^i(G,H)$

$\nwarrow$ teilerfremd zu p. $\qquad \underbrace{\text{mit } p\cdot\alpha = 0 \text{ und } \mathrm{Res}(\alpha)=0.}$

$\Rightarrow \alpha = 0.$

(b) folgt aus (a) und $\#G \cdot \hat{H}^i(G,A) = 0$. ▨

Es gibt natürlich auch homologische Gruppe-Modul-Paare und induz. homologische Funktoren.

$\underline{\text{Hier:}}$ $\rho: G \to G'$ Gruppenhom, $\lambda: A \longrightarrow A'$ $\mathbb{Z}$-linear, $\lambda(ga) = \rho(g)\lambda(a)$, $A' \in {}_{G'}\underline{\mathrm{Mod}}$, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$:

Def. 6.37. 1) Jedes (homologische) G_p-Modul-Paar induziert (δ-) Funktor $H_i(G,A) \longrightarrow H_i(G',A')$ $\forall i \geq 0$.

2) $\underline{\mathrm{CoInf}}$: zu $G \longrightarrow G/N$ ($N \trianglelefteq G$ Normalteiler), $\lambda: A \longrightarrow A_N$ erhalten

$$\mathrm{CoInf}: H_i(G,A) \longrightarrow H_i(G/N, A_N)$$

3) $\underline{\mathrm{Cor}}$: zu $H \overset{}{\underset{\text{inkl.}}{\hookrightarrow}} G$, $\lambda = \mathrm{id}_A$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Cor}: H_i(H,A) \longrightarrow H_i(G,A)$ (keine Voraus. $[G:H]<\infty$!)

4) zusätzlich erhalten: $\mathrm{Res}: H_i(G,A) \longrightarrow H_i(H,A)$ falls $[G:H]<\infty$.

Proposition 6.38. Es gelten zu 6.32, 6.33, 6.35 analoge Aussagen.

Res, Cor aus 6.37 stimmen auf der Tate-Kohomologie (für G endlich!) mit Res, Cor aus 6.36 überein unter der Identifikation $H_i(G,A) \simeq \hat{H}^{-i-1}(G,A)$ für $i \geq 1$.

▨

Cup-Produkte. G, G' Gruppen.

$P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ projektive Auflösung in $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G])$ bzw. $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G'])$.

$\rightsquigarrow$ Doppelkomplex $P \otimes P'$ (s. Übungen) $\rightsquigarrow$ $P \boxtimes P' = \mathrm{Tot}(P \otimes P') \to \mathbb{Z}$ (s. Übungen)

ist projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G \times G'])$

$$\left((P^\bullet \otimes P'^\bullet)^{i,j} = P^i \otimes_{\mathbb{Z}} P'^j, \quad d_h^{i,j} = d_P^i \otimes \mathrm{id}, \quad d_v^{i,j} = (-1)^i \, \mathrm{id} \otimes d_{P'}^j \right)$$

Für $G = G'$: via $G \hookrightarrow G \times G$, $g \mapsto (g, g)$ ist $P \boxtimes P' \to \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G])$.

erhalten: (für $P' = P$)

$$\begin{tikzcd} P \boxtimes P \arrow[dr, "\varepsilon \boxtimes \varepsilon"] \arrow[d, dashed, shift left, "m"] & \\ P^\bullet \arrow[u, dashed, shift left, "\Delta"] \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Diagonalapproximation

Satz 5.9: $\exists$ Δ und m eindeutig bis auf Homotopie.

deswegen gilt auch:

$m \circ \Delta \simeq \mathrm{id}_{P^\bullet}$, $\Delta \circ m \simeq \mathrm{id}_{P^\bullet \boxtimes P^\bullet}$

Def. 6.40. Die Alexander-Whitney Diagonalapprox. für $\mathrm{Std}_G^\bullet$ ist die Abbildung

$\Delta_{\mathrm{Std}} : \mathrm{Std}_G^\bullet \to \mathrm{Std}_G^\bullet$ gegeben durch

$$\Delta_{\mathrm{Std}} \underbrace{(g_0, \dots, g_n)}_{\in \mathbb{Z}[G^{n+1}] = \mathrm{Std}_G^n} = \sum_{j=0}^{n} (g_0, \dots, g_j) \otimes (g_j, \dots, g_n)$$

Lemma 6.41. (Ü)

(a) Δ_{Std} ist Abbildung von Komplexen

(b) $\Delta_{\mathrm{Std}} [g_1 | \dots | g_n] = \sum_{j=0}^{n} [g_1 | \dots | g_j] \otimes g_1 \cdots g_j [g_{j+1} | \dots | g_n]$ ($j = 0$: leeres Symbol)

∎

Seien G, G', $P^\bullet$, $P'^\bullet$ wie oben, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $A' \in {}_{G'}\underline{\mathrm{Mod}}$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_G(P^\bullet, A)$, $\mathrm{Hom}_{G'}(P'^\bullet, A')$, $\mathrm{Hom}_{G \times G'}(P^\bullet \boxtimes P'^\bullet, A \otimes_{\mathbb{Z}} A')$ sind in $Ch^\bullet(\mathbb{Z})$

(wollen ab nun alle P^i, P'^j endl. erz. sind)

⇝ erhalten Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_G(P^\cdot, A) \boxtimes \mathrm{Hom}_{G'}(P'^\cdot, A') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G\times G'}(P^\cdot \boxtimes P'^\cdot, A \otimes_{\mathbb{Z}} A')$$

(prüfe im Fall alle P^i, P'^j frei + endl. erz. über $\mathbb{Z}[G] / \mathbb{Z}[G']$)

$$(u: P^i \to A,\ u': P'^j \to A') \longmapsto (-1)^{ij}\, u \otimes u' : P^i \otimes P'^j \to A \otimes A'$$

Falls $u \in Z^i(\mathrm{Hom}^\cdot_G(P^\cdot, A))$, $u' \in Z^j(\mathrm{Hom}^\cdot_{G'}(P'^\cdot, A'))$

$$\Rightarrow u \otimes u' \in Z^{i+j}(\mathrm{Hom}^\cdot_{G\times G'}(P^\cdot \otimes P'^\cdot, A \otimes A')), \text{ denn}$$

$$\partial(u \otimes u') = \partial u \otimes u' \pm u \otimes \partial u' = 0 \pm 0 = 0.$$

⇝ erhalten

$$\begin{array}{ccc} H^i(G, A) \otimes H^j(G', A') & \longrightarrow & H^{i+j}(G \times G', A \otimes A') \\ [u] \otimes [u'] & \longmapsto & \\ & & \downarrow \\ & & H^{i+j}(G, A \otimes A') \quad [u] \cup [u'] \end{array}$$

Falls $G = G'$:
$P = P'$ haben
$\Delta : P \to P \otimes P$

In Termen von Koketten: wir erhalten mit Alexander-Whitney (A-W) Diag. approx.

$$C^i(G, A) \times C^j(G, A') \longrightarrow C^{i+j}(G, A \otimes A')$$
$$(u, u') \longmapsto u \cup u'$$

$$(u \cup u')(g_1, \dots, g_{i+j}) = (-1)^{ij} u(g_1, \dots, g_i) \otimes g_1 \cdots g_i\, u'(g_{i+1}, \dots, g_{i+j})$$

induziert das Cup-Produkt $H^i(G, A) \otimes H^j(G, A') \to H^{i+j}(G, A \otimes A')$ (ii)

Facts 6.42.

(a) $H^0(G, A) \otimes H^0(G, A') \longrightarrow H^0(G, A \otimes A')$

$$A^G \otimes A'^G \longrightarrow (A \otimes A')^G$$

ist induziert von der Identität.

(b) $f: A \to B$, $f': A' \to B'$ Morphismen in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $\alpha \in H^i(G, A)$, $\alpha' \in H^j(G, A')$

$$\Rightarrow H^{i+j}(f \otimes f')(\alpha \cup \alpha') = H^i(f)(\alpha) \cup H^j(f')(\alpha')$$

(c) Ist $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ exakt in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, so dass

$0 \to A' \otimes B \to A \otimes B \to A'' \otimes B \to 0$ ebenfalls exakt ist, so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^i(G, A'') & \xrightarrow{\delta} & H^i(G, A') \\ {\scriptstyle -\cup v} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow {\scriptstyle -\cup v} \\ H^{i+j}(G, A'' \otimes B) & \xrightarrow{\delta} & H^{i+j}(G, A' \otimes B) \end{array}$$

für $v \in H^j(G, B)$.

(Dimensionsverschiebung anwendbar auf $\cup$)

"Grund":

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^\bullet(G,A') \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & C^\bullet(G,A) \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & C^\bullet(G,A'') \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C^{\bullet+j}(G,A'\otimes B) \arrow[r] & C^{\bullet+j}(G,A\otimes B) \arrow[r] & C^\bullet(G,A''\otimes B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z})$

(d) Analogon zu (c) in der zweiten Variablen.

(e) $1 \in H^0(G,\mathbb{Z})$ erfüllt $1 \cup - = id$, $- \cup 1 = id$. (A-W-Formel)

(f) $\cup$ ist assoziativ. ✓

(g) $\cup$ ist graduiert kommutativ, d.h. $u \in Z^i(G,A)$, $u' \in Z^j(G,A')$; $sw: A\otimes A' \to A'\otimes A$, $a\otimes a' \mapsto a'\otimes a$

Denn:

$$H^{i+j}(sw)([u] \cup [u']) = (-1)^{ij}([u'] \cup [u])$$

"Grund": im Grad (i,j)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A) \otimes \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_G(P^\bullet\otimes P^\bullet, A\otimes A') \arrow[d, "\mathrm{Hom}_G(sw, \tau)"] \\ \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A') \otimes \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_G(P^\bullet\otimes P^\bullet, A'\otimes A) \end{tikzcd}$$

$u\otimes u' \mapsto$ "$u\cup u'$"

$u \otimes u' \mapsto (-1)^{ij} u'\otimes u \mapsto$ "$(-1)^{ij} u\cup u'$"

//

$$\tau: (P\otimes P)^{ij} \to (P\otimes P)^{ij}$$
$$x\otimes y \mapsto (-1)^{ij} y\otimes x$$

kommutiert nach $\cup$ bilden

$$u\cup u' \mapsto sw(u\cup u')$$
$$u \cup u' \mapsto (-1)^{ij} u'\cup u$$

$$\left.\begin{tikzcd} P\boxtimes P \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr] & & P\boxtimes P \arrow[dl] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}\right\}$$ τ induziert die Identität nach Kohomologie bilden!

(h) Für $H\leq G$: Res^H_G (auf Kohomologie) vertauscht mit $\cup$-Produkt: $\mathrm{Res}(u\cup v) = \mathrm{Res}(v)\cup\mathrm{Res}(u)$ (A-W-Formel)

(i) Für $N \trianglelefteq G$ $\mathrm{Inf}^G_{G/N}$ vertauscht mit $\cup$.

05.06.18

(j) $H\leq G$ Untergruppe, $[G:H]<\infty$.

$$\begin{tikzcd} H^i(G,A)\otimes H^j(G,A') \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & H^{i+j}(G, A\otimes_{\mathbb{Z}} A') \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\ H^i(H,A)\otimes H^j(H,A') \arrow[r, "\cup"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cor}"'] & H^{i+j}(H, A\otimes_{\mathbb{Z}} A') \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cor}"'] \end{tikzcd}$$: $\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(u)\cup v) = u \cup \mathrm{Cor}(v)$