X projektive Varietät $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{X,P} := \left\{ \frac{f}{g} \bmod m_X \in k(X) \mid g(P) \neq 0 \right\}$
und es gilt für $P \in X^{(i)} := X \cap D_+(X_i)$: $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X,P}$ und daher $\mathcal{O}_{X^{(i)},P} \cong \mathcal{O}_{X^{(j)},P}$ für $P \in X^{(i)} \cap X^{(j)}$.

(iii) X quasi-projektiv ($\Rightarrow \bar{X}$ projektiv)

$$k(X) := k(\bar{X}), \quad \mathcal{O}_{X,P} := \mathcal{O}_{\bar{X},P}$$

Für projektive und affine Varietäten stimmt dies mit den vorherigen Definitionen überein.

(iv) $\mathcal{U} \subseteq X$ offen in quasi-proj. Varietät $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(\mathcal{U}) := \bigcap_{P \in \mathcal{U}} \mathcal{O}_{X,P}$ ($\subseteq k(X)$) heißt Ring der regulären Funktionen auf $\mathcal{U}$.

<u>ü:</u> $\mathcal{O}(\mathcal{U}) = \bigcap_i \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$ für alle offenen Überdeckungen $\{\mathcal{U}_i\}_i$ von $\mathcal{U}$.

(v) Ein Morphismus $\varphi: X \longrightarrow Y$ quasi-projektiver Varietäten ist eine stetige Abbildung, so dass

(1) $\forall\, U \subseteq Y$ offen: $f \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))$.

Dies ist eine lokale Bedingung, d.h. erfüllt $\varphi|_{\mathcal{U}_i}$ die Bedingung (1) für eine offene Überdeckung $\{\mathcal{U}_i\}_i$ von $\mathcal{U}$, so erfüllt φ (1). (ü).

Bsp 5. (i) Für X, Y affin erhält man denselben Begriff wie vorher: o.E. $Y = \mathbb{A}^n$. Für $f_1, \dots, f_n \in A(X)$ hat $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ die Eigenschaft (1).

$$\begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ Q \longmapsto P \end{array} \quad \text{induziert} \quad \begin{tikzcd} A(Y) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & A(X) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{Y,P} \arrow[r, "\varphi_Q^*"] & \mathcal{O}_{X,Q} \\ f \arrow[r, mapsto] & f \circ \varphi \end{tikzcd}$$

(ii) X quasi-projektiv, $\mathcal{U} \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U} \hookrightarrow X$ ist Morphismus.

Lemma 6. $P \in X$ quasi-projektiv. Dann existiert ein $P \in \mathcal{U} \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ mit $\mathcal{U}$ isomorph (als quasi-proj. Varietät) zu einer affinen Varietät.

Insbesondere: X hat offene, affine Überdeckung.

Beweis. $P \in X^{(i)} \subseteq X$. o.E. $Y = \mathbb{A}^n$

$$\begin{array}{c} X^{(i)} \\ \text{offen } \cap \\ Y \\ \text{abg. } \cap \\ \mathbb{A}^n \end{array} \qquad X^{(i)} \cong D(f) \xleftarrow{\ \cong\ } \begin{array}{c} \mathbb{A}^{n+1} \\ \cup \text{ abg.} \\ V(xf - 1) \end{array}$$

Iso quasi-projektiver Varietäten.

Def. 7. Sei X irreduzible, quasi-proj. Varietät.

$$\dim X := \operatorname{trdeg}_k k(X)$$ (Transzendenzgrad), d.h. die maximale Zahl algebraisch unabhängiger Elemente in $k(X)$, heißt Dimension von X.

Für X beliebige quasi-proj. Varietät wird die Dimension von X als das Maximum der Dimensionen seiner irreduziblen Komponenten definiert.

Bsp. 8.
- $\dim \mathbb{A}^n = n$
- $\dim \mathbb{P}^n = n$, da $k(\mathbb{P}^n) \cong k(D_+(X_0)) \cong k(\mathbb{A}^n)$

Theorem 9. Ist X affin, so gilt $\dim X = \dim A(X)$ (Krulldimension)

(max. Länge von Ketten $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subseteq \mathfrak{p}_n$ von Primidealen in $A(X)$, bzw. irred. abg. Teilmengen in X) ☒

Proposition 10. Seien X, Y quasi-projektive Varietäten.

(i) $X \longrightarrow Y$ surjektiver Morphismus $\Rightarrow \dim Y \leq \dim X$.

(ii) X irreduzibel, $Y \subsetneq X$ abgeschlossen $\Rightarrow \dim Y < \dim X$.

(iii) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$

(iv) (Krull's Hauptidealsatz) $X \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \mathbb{A}^n$ irreduzibel, $f \in k[X_1, \ldots, X_n] = A(\mathbb{A}^n)$ mit $f(P) = 0$ für ein $P \in X$. $Z \subseteq X \cap V(f)$ irreduzible Komponente.

$$\Rightarrow \dim Z \geq \dim X - 1.$$

IV: Jordan-Zerlegung, diagonalisierbare und unipotente Gruppen

1. Jordan-Zerlegung

Durch Einbettung $G \overset{\varphi}{\hookrightarrow} GL_n$, $k = \bar{k}$ besitzen die Elemente $\varphi(g), g \in G$ eine Jordannormalform und wir können Begriffe wie "halbeinfach", "unipotent" etc. auf Elemente von G übertragen, sodass diese unabhängig von der Wahl von φ sind.

Def. 1. $\dim_k V < \infty$, $g \in \operatorname{End}(V)$ heißt halbeinfach (oder diagonalisierbar), falls V Basis aus Eigenvektoren für g hat. g heißt nilpotent falls $g^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Bemerkung 2. (LA)

(i) g halbeinfach $\Leftrightarrow$ mipo(g) hat paarweise verschiedene Nullstellen

(ii) $W \leq V$ g-invarianter UVR + g halbeinfach $\Rightarrow g|_W$ ist halbeinfach, da mipo$(g|_W) \mid$ mipo(g)

Proposition 3. (Additive Jordanzerlegung) (k alg. abg.)

Sei $g \in \mathrm{End}_k(V)$, $\dim_k V < \infty$. Dann: $\exists!\ g_h, g_n \in \mathrm{End}(V)$ mit g_h halbeinfach, g_n nilpotent,

sodass $g = g_h + g_n$ und $g_h \circ g_n = g_n \circ g_h$.

Beweis.

$g_h \mathrel{\hat{=}}$ Diagonalmatrix aus JNF, $g_n := g - g_h$. ▨

Bemerkung 4. (i) In obiger Situation existieren $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$ und $g_h = P(g)$, $g_n = Q(g)$

(ii) Ist $W \leq V$ ein g-invarianter UVR, so ist W auch g_h und g-invariant und

$$(g|_W)_h = g_h|_W \quad \text{sowie} \quad (g|_W)_n = g_n|_W.$$

Beweis.

(i) $\phi(T) = \det(T \cdot \mathrm{id}_V - g) = \prod (T - \lambda_i)^{n_i}$ (char. Polynom)

$$(V \cong)\ k[T]/\langle \phi(T) \rangle \underset{CRS}{\cong} \bigoplus k[T]/(T-\lambda_i)^{n_i}$$

$\exists\, P \in k[T]: P \equiv \lambda_i \mod (T-\lambda_i)^{n_i} \ \forall i$

Ist $\phi(0) = 0$, so ist 0 ein Eigenwert von $g \Rightarrow P \equiv 0 \mod T$.

Sei $\phi(0) \neq 0$. $\Rightarrow$ Ändere P durch konstantes Vielfaches von ϕ ab

$\Rightarrow P(0) = 0$. Setze $Q = T - P$

$\Rightarrow P(g) = g_h$, $Q(g) = g_n$.

(ii) Wegen (i) ist W auch g_h, g_n-invariant. Da $\mathrm{charpol}(g|_W) \mid \Phi$, ist P auch für W eine geeignete Wahl und $(g|_W)_h = P(g|_W) = P(g)|_W = g_h|_W$. ▨

Def 5. $h \in \mathrm{End}_k(V)$ heißt unipotent, falls $h - \mathrm{id}_V$ nilpotent ist. ($\Leftrightarrow$ alle EW $= 1$)

Korollar 6. (Multiplikative Jordanzerlegung)

$g \in GL(V)$, $\dim_k V < \infty$.

(i) $\exists!\ g_h, g_u \in GL(V)$ mit g_h halbeinfach und g_u unipotent s.d. $g = g_h \circ g_u = g_u \circ g_h$

(ii) $\exists\ P, R \in k[T]$ mit $P(0) = R(0) = 0$ und $g_h = P(g)$, $g_u = R(g)$.

(iii) Ist $W \leq V$ g-invarianter UVR, so ist W auch g_h, g_u-invarianter UVR und $(g_h)|_W = (g|_W)_h$ sowie $(g_u)|_W = (g|_W)_u$.

Beweis. (i) EW von $g \neq 0 \Rightarrow$ EW von $g_h \neq 0 \Rightarrow g_h \in GL(V)$. $g_u := id_V - g_h^{-1} \circ g_n$

(ii) z.z.: g_h^{-1} ist Polynom in g_h (damit auch Polynom in g)

$$\text{mipo } g_h = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + \underset{\neq 0}{a_0} \Rightarrow g_h^{-1} = -a_0^{-1}[g_h^{n-1} - \dots - a_1]$$

(iii) wie oben aus (ii). $\blacksquare$

Def. 7. Sei nun V ein möglicherweise ∞-dim. k-VR, $g \in GL(V)$. und gelte

$$(*) \qquad V = \bigcup_{\substack{W \subseteq V \\ \text{endl.-dim. UVR} \\ g(W) \subseteq W}} W$$

Dann heißt g *halbeinfach* (*lokal unipotent*), wenn $g|_W$ halbeinfach (unipotent) $\forall W$ wie oben.

Bsp. 8.
Nach Lemma II.3.1 (ii) erfüllt $V = A(G)$ die Bedingung $(*)$ $[\forall g \in G:\ r_g^* \in GL(A(G))]$

Korollar 9. Unter der Bedingung $(*)$ für $g \in GL(V)$ gilt:

(i) $\exists!\ g_h, g_u \in GL(V)$ mit g_h halbeinfach, g_u lokal unipotent mit $g = g_h g_u = g_u g_h$

(ii) Analogon zu Korollar 6 (ii)

Beweis.

(i) $(g|_W)_h, (g|_W)_u$ verkleben zu g_h, g_u nach Korollar 6 (i), (ii).

(ii) W erfüllt ebenfalls $(*)$. Daher folgt die Behauptung ebenso aus Korollar 6 (ii). $\blacksquare$