01

Dienstag, 17. April 2018 22:21

Algebraische Zahlentheorie II.

Übungsblätter: Vorlesungshomepage.

01. Proendliche Gruppen

Wdh. · X Menge, Topologie auf X: $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit
(0) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ (1) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$ (2) $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I \Rightarrow \bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$

· $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt **Basis** $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T}\ \exists (B_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}^I : U = \bigcup_i B_i$

· $W \subseteq X$ heißt **Umgebung** (von $x \in X$) $:\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subseteq W$.

Für $x \in X$ sei $\mathcal{U}(x)$ die Menge aller Umgebungen von x.

z.B.: (X, d) metrischer Raum $\Rightarrow \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ ist Basis für X.

· $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt **stetig** $:\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$.

· Produkttopologie: Seien $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ topologische Räume.

Basis der **Produkttopologie** auf $\prod_i X_i$: $\{\prod_i U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i, U_i = X_i \text{ f.f.a. } i \in I\}$

Satz von Tychonoff: Sind alle X_i kompakt, so auch $\prod_i X_i$

· Sei $X \xrightarrow{\pi} Y$ surjektiv, $(X, \mathcal{T})$ top. Raum.

$\{V \subseteq Y \mid \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ heißt **Quotiententopologie**.

Def. 1.1. (a) Eine **topologische Gruppe** $(G, e, \circ, \mathcal{T})$ besteht aus einer Gruppe $(G, e, \circ)$ und einem top. Raum $(G, \mathcal{T})$ so dass
$G \times G \xrightarrow{\mu} G$, $(g, h) \mapsto g \circ h$, $G \xrightarrow{i} G$, $g \mapsto g^{-1}$ stetig sind, wobei $G \times G$ die Produkttopologie trägt.

(b) Ein **Morphismus topologischer Gruppen** ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

$\rightsquigarrow$ Man erhält die Kategorie topologischer Gruppen $\underline{\text{Top Grp}}$.

Bsp. (ü) K normierter Körper $\Rightarrow (K, +)$, $(K^\times, \cdot)$ sind topologische Gruppen.

Facts 1.2. Seien G, G' top. Grp., $G \xrightarrow{\phi} G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

(i) $l_g : G \to G, h \mapsto g \circ h$, $r_g : G \to G, h \mapsto h \circ g$ sind Automorphismen (insb. Homöomorphismen)

(ii) ϕ ist stetig $\iff \forall W' \in \mathcal{U}(e') : \exists W \in \mathcal{U}(e) : \phi(W) \subseteq W'$

(iii) Eine offene Untergruppe $H \underset{\text{offen}}{\leq} G$ ist abgeschlossen.

(iv) Eine abgeschlossene Untergruppe $H \underset{\text{abg.}}{\leq} G$ mit $[G : H] < \infty$ ist offen.

(v) Ist G kompakt, $H \leq G$ offen, so gilt $[G : H] < \infty$.

(vi) Ist $H \leq G$ Untergruppe, so ist $(H, \tau_{G|H})$ eine topologische Untergruppe (Unterraumtop.)

(vii) Ist $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} G$, so ist $U^{-1} \underset{\text{offen}}{\subseteq} G$ und $cl(U) = \overline{U} \subseteq UU^{-1}$

(viii) G ist regulär, d.h. $\forall g \in G : \exists U, V \in \mathcal{U}(g)$ offen s.d. $V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

(ix) G ist hausdorffsch $\iff \{e\} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$

(x) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler, so ist G/N topologische Gruppe mit Quotiententopologie.
Dabei ist G/N hausdorffsch, falls $N \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G$.

(xi) Sind $(G_i)_{i \in I}$ top. Grp., so ist $\prod_i G_i$ top. Grp.

Beweis.

(i) $l_g = G \to \{g\} \times G \xrightarrow{\text{inkl.}} G \times G \xrightarrow{\mu} G$ ist stetig, $l_g \circ l_{g^{-1}} = id_G$

r_g analog.

(ii) "$\Rightarrow$": klar; "$\Leftarrow$": Sei $g \in G$, $g' := \phi(g)$, $W \in \mathcal{U}(g')$. Wähle $V \in \mathcal{U}(e)$ mit $\phi(V) \subseteq \underbrace{(g')^{-1} W}_{= l_{g'^{-1}}(W)}$

$\Rightarrow \phi(l_g(V)) \subseteq W$, also ist ϕ stetig.

(iii) $G = H \,\dot\cup\, \underbrace{\bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} gH}_{\text{offen, da } gH = l_g(H)}$

(iv) wie (iii): $G = H \,\dot\cup\, \underbrace{\bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} \underbrace{gH}_{\text{abg}}}_{\text{abg., da endliche Vereinigung wg. } [G:H] < \infty}$

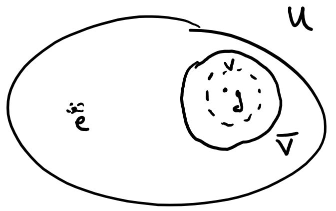
(v) $G = \bigcup_{\substack{g \in G/H \\ g \neq 0}} \underbrace{gH}_{\text{offen}}$ $\quad G$ kompakt $\Rightarrow [G : H] < \infty$

(vi), (vii): Übung.

(viii) oE $g = e$ wegen (i). Sei U offene Umgebung von e.

Beh. (ii) $\exists$ offene Umgb. V von e mit $V \cdot V \subseteq U$, $V = V^{-1}$. Nun verwende (vii).

(ix) z.z.: können e und $g \neq e$ trennen (wg. (i))



$$G \setminus \bar V \cap V = \emptyset$$

(x), (xi) Übung. ∎

Wdh. I sei teilgeordnete, filtrierte Menge, d.h. $\forall i,j \in I: \exists k \in I: \; i,j \leq k$.

Ein **inverses System** (von Gruppen) besteht aus einer Familie von Gruppen $(G_i)_{i \in I}$ zusammen mit Gruppenhomomorphismen $\phi_{ji}: G_j \to G_i$ $\forall i,j \in I$ mit $i \leq j$.

so dass: (i) $\phi_{ii} = \mathrm{id}_{G_i}$ (ii) $\phi_{ki} = \phi_{ji} \circ \phi_{kj}$ $\forall i \leq j \leq k$

Dann heißt $\varprojlim_{i \in I} G_i$ **Limes** des inversen Systems .... hat übliche universelle Eigenschaft.

- $\varprojlim_{i \in I} G_i$ existiert und ist gegeben durch $G := \{ (g_i)_{i \in I} \in \prod_i G_i \mid \phi_{ji}(g_j) = g_i \; \forall i \leq j \}$

Lemma 1.3. Sind alle G_i topologische Gruppen, so auch $\varprojlim G_i$ mit der Unterraumtop. von $\prod_i G_i$.
Sind alle G_i hausdorffsch (kompakt + hausdorffsch), so ist auch $\varprojlim G_i$ hausdorffsch (kpt. + hd.).

Beweis.

① $\prod_i G_i$ ist selbst $\varprojlim G_i$ für geeignet gewähltes inverses System I.
Alle G_i hausdorffsch $\Rightarrow$ $\prod_i G_i$ hausdorffsch (Produkte von Hausdorffräumen sind hausdorffsch)
Kompakt folgt mit dem Satz von Tychonoff.

② Allgemeiner Fall: Hausdorffsch überträgt sich auf Unterräume $\Rightarrow$ $\varprojlim G_i$ hd.

$$\varprojlim G_i = \bigcap_{i \leq j} \underbrace{\{ (g_k)_k \in \prod_k G_k \mid \phi_{ji}(g_j) = g_i \}}_{\text{"="} \; \Gamma_{\phi_{ji}} \times \prod_{k \neq i,j} G_k \; \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \; \prod_k G_k} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} \prod_k G_k$$

$\left(\Gamma_{\phi_{ji}} \underset{\text{abg.}}{\subseteq} G_i \times G_j \text{ da } G_i \text{ hd.} \right)$

$\Rightarrow$ $\varprojlim G_i$ kpt. da abg. Teilraum eines kpt. Raumes. ∎

Def. 1.4. Eine proendliche Gruppe ist ein inverser Limes $\varprojlim G_i$ endlicher, diskreter topologischer Grp. $(G_i)_{i\in I}$ mit der Topologie aus 1.3.

(insb.: alle G_i hausdorffsch und kompakt)

Def. 1.5. Ein topologischer Raum heißt total unzusammenhängend :<=> Jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abgeschlossenen Mengen

$\underset{ü}{\Longleftrightarrow}$ Die Zusammenhangskomponente von x ist $\{x\}$

Proposition 1.6. (ü) Eine kpt., hd. top. Grp. ist total unzusammenhängend <=> e besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abgeschlossenen Normalteilern von G. $\boxtimes$

05

Freitag, 20. April 2018 09:17

Korrektur: X top. Raum.

X heißt **zusammenhängend** $:\Longleftrightarrow$ $\emptyset, X$ sind die einzigen offen + abg. Teilmengen.

$x \sim_{zh} y \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, Y \subseteq X$ zshgd.: $x, y \in Y$. ist Äquivalenzrelation

Äquivalenzklassen unter $\sim_{zh}$ heißen **Zusammenhangskomponenten.**

Lemma. (Ribes-Zaleski, Lemma 1.1.11)
X kpt., hd. und $x \in X$. Dann ist die Zusammenhangskomp. die x enthält die Menge

$$[x]_{zh} = \bigcap \{ U \subseteq X \mid x \in U,\ U \text{ offen abg.} \}$$

Def. 1.5. Ein topologischer Raum X heißt **total-unzusammenhängend** $\Longleftrightarrow$ alle Zshgskomp. von X sind 1-elementig.

Korollar. (aus Lemma) Sei X kompakt, hd. Dann gilt:
X total unzshgd $\Longleftrightarrow$ Jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus offen-abg. Mengen.

Satz 1.7. Sei G eine topologische Gruppe. Dann sind äquivalent:
(i) G ist proendlich (ii) G ist kompakt, hausdorffsch und total unzusammenhängend.

Beweis.
(i) $\Rightarrow$ (ii): kompakt, hausdorffsch: letztes Mal.
g.z.z.: $e \in \prod G_i$ besitzt Umgebungsbasis aus offen abgeschlossenen Teilmengen.
Eine solche ist gegeben durch $\left\{ \prod_{i \in I_0} \{e_i\} \times \prod_{I \setminus I_0} G_i \;\middle|\; I_0 \subseteq I \text{ endlich} \right\} =: \mathcal{U}_e$
offen, abg. Normalteiler
letztes Mal: G kpt., hd., $H \leq G$ offene Untergrp. $\Rightarrow$ H abg.

Allgemeiner Fall: Schneide $\mathcal{U}_e$ mit $\varprojlim G_i$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Konsequenz aus dem folgenden Lemma. ◻

Lemma 1.8. Sei G kompakt, hausdorffsch, total unzshgd. und $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis der Eins bestehend aus offen-abg. Normalteilern.
Dann ist
$$G \xrightarrow{\varphi} \varprojlim_{N \in \mathcal{U}} G/N, \quad g \longmapsto (gN)_{N \in \mathcal{U}}$$
ein Isomorphismus topologischer Gruppen. (G/N endl. diskret)

Beweis. φ stetig: "obvious".
betrachte $G \longrightarrow \prod_{N \in \mathcal{U}} G/N$ $\leftarrow$ hat Umgebungsbasis $\mathcal{U}_e$ (s. 1.7).

Für $I_0 \subseteq \mathcal{U}_e$ endl. $\rightsquigarrow$ Umgebung $\prod_{N \in I_0} N/N \times \prod_{N \in \mathcal{U}_e \setminus I_0} G/N$

Urbild ist $\bigcap_{N \in I_0} N$ ist offen abg. Normalteiler in G $\Rightarrow$ stetig bei e $\Rightarrow$ stetig.

φ injektiv: $\varphi(g) = (e_N)_{N \in \mathcal{U}}$ $\Rightarrow$ $g \in N \;\; \forall N \in \mathcal{U}$.
Umgebungsbasis, G hausdorffsch.

$\Rightarrow$ $\bigcap_{\mathcal{U}_0} N = \{e\}$, d.h. $g = e$.

- φ surjektiv. Sei $(g_N \cdot N)_{N \in \mathfrak{U}} \in \varprojlim G/N$ $(N' \subseteq N \Rightarrow g_{N'} N = g_N N)$

gesucht:
$$g \in \underbrace{\bigcap_{N \in \mathfrak{U}} (g_N N)}_{\text{abg.}} \subseteq G \text{ kompakt}$$

Anm.: rechte Seite leer $\Rightarrow \exists\, I_0 \subseteq \mathfrak{U}$ endlich: $\bigcap_{N \in I_0} g N = \emptyset$. $\mathfrak{U}$ Umgebungsbasis

$\Rightarrow \exists\, N' \subseteq \bigcap_{N \in I_0} N$

φ Homöomorphismus: φ bijektiv, stetig, G kompakt, $\varprojlim G/N$ hausdorffsch. $\square$

Bem. 1.9. (i) 1.8 ist anwendbar, wenn G proendlich
(ii) analog zu 1.8 lassen sich auch beweisen: G proendlich, $\mathfrak{U}$ wie 1.8

(a) $\forall\, H \leq G$ abg. gilt: $H \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{N \in \mathfrak{U}} H/N \cap H$

(b) $\forall\, H \trianglelefteq G$ abg. gilt $G/H \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{N \in \mathfrak{U}} G/N \cdot H$

Lemma 1.10. Sei G proendlich, $H \leq G$ Untergruppe. Dann sind äquivalent:
(i) H ist abgeschlossen
(ii) $H = \bigcap \{ U \mid U \leq G \text{ offene Untergruppe mit } H \leq U \}$

Beweis. "$\Leftarrow$": $U \leq G$ offen $\underset{G \text{ kpt.}}{\Rightarrow}$ U abg. Untergruppe $\Rightarrow \bigcap \{U \dots\}$ ist abgeschlossen.

"$\Rightarrow$": Sei $V \in \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}$ wie oben) $\Rightarrow \underbrace{H \cdot V}_{= \bigcup_{h \in H} hV}$ ist offene Untergruppe von G.

In Ü: $\underset{\text{Teilmenge}}{H \subseteq G}$ kompakt $\Rightarrow \bigcap_{V \in \mathfrak{U}} H \cdot V = H$. $\square$

Def. 1.11. Eine pro-p Gruppe ist ein inverser Limes von endlichen p-Gruppen.
(Insb. proendlich)

Def. 1.12. Sei G eine diskrete (i.a. unendliche) Gruppe.
Die pro-p Komplettierung von G ist
proendliche

$$\hat{G}^p := \varprojlim \{ G/N \mid N \trianglelefteq G \text{ und } G/N \text{ ist endliche p-Grp.} \}$$

(endliche)

Bsp. $\hat{\mathbb{Z}}^p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$

(man kann auch Ringe pro-p oder pro-endl. komplettieren)

Def. 1.13. Der Prüferring ist die proendliche Komplettierung von $\mathbb{Z}$, $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

($\{ n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \}$ bzgl. Inklusion, d.h. Teilbarkeit geordnet)

Lemma. $\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}_p$

Beweis. $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{\text{CRS}}{\cong} \varprojlim_n \left(\prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}/p^{v_p(n)}\mathbb{Z} \right)$; $\prod_p \mathbb{Z}_p \overset{\text{pro endl.}}{=} \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} \prod \mathbb{Z}_p/U = \varprojlim_n \prod \mathbb{Z}_p/U_n$

$$\mathcal{U} = \{ \underbrace{\prod_p (p^{v_p(n)} \mathbb{Z}_p)}_{=:U_n} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

∎

Def. 1.14 Eine Teilmenge $S \subseteq G$ heißt *topologisches Erzeugendensystem* (ES) :<=> G ist der topologische Abschluss der von S erzeugten Untergrp.

Bsp. $\{1\}$ ist topologisches EZS von $\mathbb{Z}_p$ und $\hat{\mathbb{Z}}$

Def. 1.15 Eine topologische Gruppe G heißt *topologisch endlich erzeugt* :<=> $\exists\, S \subseteq G$ endlich s.d. S ist top. EZS von G

Bsp. Die proendl. bzw. pro-p Komplettierung der freien nicht-abelschen Gruppen mit endlich vielen Erzeugern

Satz 1.16. (*Burnside Basissatz*)
Sei G eine pro-p-Gruppe. Sei $\phi(G)$ der topologische Abschluss der von $[G,G]$ und $G^p = \{g^p \mid g \in G\}$ erzeugten Untergruppe. ($\phi(G)$ heißt *Frattini-Untergruppe* von G)

Dann: G ist topologisch endl. erz. <=> $G/\phi(G)$ ist endlicher $\mathbb{F}_p$-VR.

Bilden $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ eine Basis von $G/\phi(G)$, dann ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ ein <u>minimales</u> EZS.

Beweis. (ü).

∎

Bem. 1) $G/\overline{[G,G]}$ ist abelsche, hausdorff. topol. Grp.

$\rightarrow$ $G/\overline{[G,G]G^p}$ ist abelsche p-Torsionsgruppe (d.h. $\mathbb{F}_p$-VR)

(— " — heißt *p-elementar abelsch*)

2) Sei G eine abelsche pro-p-Gruppe.

(a) Dann ist G ein $\mathbb{Z}_p$-Modul!, d.h. haben stetige $\mathbb{Z}_p$-Operation $\mathbb{Z}_p \times G \to G$

$$\underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{g}_{= (g_i)_i \in \varprojlim G_i} := \underbrace{\big(\alpha \bmod \underbrace{\# G_i}_{p\text{-Potenz}} \cdot g_i \big)_{i \in I}}_{= \alpha \bmod \operatorname{ord}(g_i) \cdot g_i} \in \varprojlim_I G_i = G$$

G_i: endl. abelsche p-Grp.

(wohldef? $\pi_{ji} : \begin{cases} G_j \to G_i \\ g_j \mapsto g_i \end{cases}$ $\pi_{ji}(\alpha \bmod \operatorname{ord}(g_j) \cdot g_j) = (\alpha \bmod \operatorname{ord}(g_i) \cdot g_i)$)

$\operatorname{ord}(g_i) \mid \operatorname{ord}(g_j)$

∎

z.B. $(1+p\mathbb{Z}_p, \cdot) = \varprojlim_n \underbrace{\left(1+p\mathbb{Z}_p \,/\, 1+p^n\mathbb{Z}_p \right)}_{= \{ \beta \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \mid \beta \equiv 1 \ (p) \}} = \langle 1+p \rangle \cong \mathbb{Z}/p^{n-1}$

$\beta \in 1+p\mathbb{Z}_p$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ $\rightsquigarrow$ $\beta^\alpha \in 1+p\mathbb{Z}_p$

(b) G topol. endlich erzeugt $\underset{\text{ü}}{\iff}$ G ist endl. erz. als $\mathbb{Z}_p$-Modul

In diesem Fall kann man den Struktursatz für endl. erz. Moduln über HI-Ringen anwenden

$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_p^r \times \prod_{i=1}^{t} \mathbb{Z}/p^{n_i}$ ...

02. Galoistheorie und unendliche Galoiserweiterungen

Whg. $L|K$ algebraische Erweiterung von Körpern

$L|K$ normal $\iff \forall \alpha \in L$: $\operatorname{mipo}_K(\alpha) \in K[X]$ zerfällt über L in Linearfaktoren

$L|K$ separabel $\iff \forall \alpha \in L$: $\operatorname{mipo}_K(\alpha)$ besitzt nur einfache Nullstellen in K^{alg}.

$L|K$ galoissch $:\iff$ $L|K$ normal + separabel

Definiere dann: $\operatorname{Gal}(L|K) := G_{L|K} := \{\sigma \in \operatorname{Aut}(L) \mid \sigma|_K = \operatorname{id}_K\}$

Fakt: Ist $L|F|K$ ein Zwischenkp., so ist $L|F$ galoissch.

Hauptsatz der endlichen Galoistheorie: $L|K$ endlich $\Rightarrow$ Die Abbildungen

$$\{H \leq \operatorname{Gal}(L|K) \text{ UG}\} \underset{\operatorname{Gal}(L|F) \leftarrow\!\shortmid F}{\overset{H \mapsto L^H}{\longleftrightarrow}} \{L|F|K \text{ Zwischenkp.}\}$$

definiert eine Bijektion.

$$\{H \trianglelefteq G \text{ NT}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{F \text{ Zwkp.} \mid F|K \text{ galoissch}\}$$

Was geht schief, wenn $L|K$ unendlich?
Man hat zu viele Untergruppen!

Proposition 2.1. Sei $L|K$ galoissch. Sei $\Sigma := \{ E \mid L \text{ Unterkörper} \mid E|K \text{ endlich galoissch} \}$, geordnet mit $\subseteq$, $\rightsquigarrow (\Sigma, \subseteq) \longrightarrow \mathrm{Grp}$, $E \longmapsto \mathrm{Gal}(E|K)$ ist ein inverses System.

Dann ist $\mathrm{Gal}(L|K) \xrightarrow{\rho} \varprojlim_{E \in \Sigma} \mathrm{Gal}(E/K)$, $\sigma \mapsto (\sigma|_E)_{E\in\Sigma}$ ein Gruppenisomorphismus.

Beweis.
- Homomorphismus nach Konstruktion.
- Injektiv: $\rho(\sigma) = \mathrm{id} \iff \sigma|_E = \mathrm{id}_E \ \forall E \in \Sigma \implies \sigma = \mathrm{id}_L$
- Surjektiv: Sei $(\sigma_E)_{E\in\Sigma} \in \varprojlim_{E\in\Sigma} \mathrm{Gal}(E/K) \subseteq \prod_{E\in\Sigma} \mathrm{Gal}(E/K)$

$$\underline{\text{d.h.:}} \quad E'|E \in \Sigma \implies \sigma_{E'}|_E = \sigma_E$$

Wegen $L = \bigcup_{E\in\Sigma} E$, definiere $\sigma : L \longrightarrow L$, $\alpha \longmapsto \sigma_E(\alpha)$ falls $\alpha \in E \in \Sigma$

(wohldefiniert, da $(\sigma_E)_E$ kompatibel)

$\implies \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\rho(\sigma) = (\sigma_E)_E$

(Automorphismus da $\sigma|_E$ Automorphismus) $\blacksquare$

Def. 2.2. Die **Krulltopologie** auf $\mathrm{Gal}(L|K)$ ist die Topologie für welche ρ ein Isomorphismus topologischer Gruppen wird. (mit der proendl. Topologie auf $\varprojlim_{\Sigma} \mathrm{Gal}(E/K)$)

<u>Konkret</u>: Umgebungsbasis der Eins in $\mathrm{Gal}(L|K)$ ist $\{\underbrace{\mathrm{Gal}(L/E)}_{= \ker(\mathrm{Gal}(L|K) \to \mathrm{Gal}(E|K))} \mid E \in \Sigma\}$ $\leftarrow$ Umgebungsbasis offen-abg. Normalteiler von $\mathrm{Gal}(L|K)$

Lemma 2.3. Sei $L|K$ galoissch. Dann sind die offenen Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L|K)$ gerade die Untergruppen $\mathrm{Gal}(L|F)$ mit $F|K$ endlich.

Beweis. Sei $H \leq \mathrm{Gal}(L|K)$ offene Untergruppe. Wähle $E \in \Sigma$ mit $\mathrm{Gal}(L|E) \subseteq H$.

$\implies \overline{H} = \text{Bild von } H \text{ in } \mathrm{Gal}(E/K) = \{\sigma|_E \mid \sigma \in H\} \quad \left(= \mathrm{Gal}(L|K)/\mathrm{Gal}(L/E) \right)$

$$\text{endlich}\left[\begin{array}{c} L \\ | \\ E \\ | \\ F \\ | \\ K \end{array}\right. \quad \overline{H}$$

Sei $F = E^{\overline{H}}$ ... Prüfe: $H = \mathrm{Gal}(L/F)$.

Umgekehrt: $F|K$ endl. Erweiterung in $L \rightsquigarrow$ Sei E der Galoisabschluss von $F|K$

$\implies [E:K] < \infty \implies \underbrace{\mathrm{Gal}(L|E)}_{\text{offen}} \subseteq \mathrm{Gal}(L|F)$.

$$\implies \underbrace{\mathrm{Gal}(L|F) = \bigcup_{g \in \mathrm{Gal}(L|F)/\mathrm{Gal}(L|E)} g\,\mathrm{Gal}(L|E)}_{} \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathrm{Gal}(L|K)$$

$\blacksquare$

Korollar 2.4. Sei L wie in 2.3. Dann gilt:

$$\{ H \leq Gal(L|K) \mid H \text{ abg.} \} = \{ Gal(L|F) \mid L|F|K \}$$

Beweis.
"$\supseteq$": Schreibe $F = \bigcup_{i \in I} F_i$, I Menge, $F_i | K$ endl. Erw.

Dann:
$$Gal(L|F) = \bigcap_{i \in I} \underbrace{Gal(L|F_i)}_{\text{offen-abgeschlossen}}$$

$$\sigma|_F = id_F \qquad \sigma|_{F_i} = id_{F_i}$$

"$\subseteq$": Jede abg. Untergruppe einer proendlichen Gruppe ist der Durchschnitt offener Untergruppen (1.10)

$$H = \bigcap_{i \in I} U_i \qquad U_i: \text{ offene Untergruppe in } G, \quad U_i = Gal(L|F_i) \text{ nach 2.3}$$

$$\underset{F = K[F_i | i \in I]}{\longrightarrow} \quad = \bigcap_{i \in I} Gal(L|F_i) = Gal(L|F)$$

□

Satz 2.5. Sei $L|K$ galoisch. Dann sind die Abbildungen

$$\{ H \leq Gal(L|K) \mid H \text{ abg.} \} \begin{array}{c} \xrightarrow{H \longmapsto L^H} \\ \xleftarrow[Gal(L|F) \longleftarrow\!\shortmid F]{} \end{array} \{ F \subseteq L \mid F|K \text{ Körpererweiterung} \}$$

zueinander inverse Bijektionen (ordnungsumkehrend). Die Restriktionen der Abbildungen definieren Bijektion:

$$\{ H \trianglelefteq Gal(L|K) \mid H \text{ abg. Normalteiler} \} \rightleftarrows \{ E \subseteq L \mid E|K \text{ Galoiserweiterung} \}$$

Dabei gilt (topologisch):
$$Gal(L/K)/N \xrightarrow{\sim} Gal(L^N/K)$$

Beweis. Reduktion auf den endlichen Fall. – Sharifi 8.3.6.

□

Bezeichnung: K ein beliebiger Körper.

K^{alg} bezeichne einen algebraischen Abschluss

$K^{sep} \subseteq K^{alg}$ bezeichne einen separablen Abschluss $\left(K^{sep} = \{ \alpha \in K^{alg} \mid K(\alpha)|K \text{ separabel} \} \right)$

ist galoisch über K

$$\rightsquigarrow \quad G_K := Gal(K^{sep}/K) \text{ die absolute Galoisgruppe von } K$$

$$\left(\begin{array}{ccc} Aut_K(K^{alg}) & \longrightarrow & G_K \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_{K^{sep}} \end{array} \text{ ist ein Isomorphismus} \right)$$

Bsp. • $G_{\mathbb{F}_q} \simeq \hat{\mathbb{Z}}$ $\quad$ ($\mathbb{F}_q$ perfekt $\Rightarrow \mathbb{F}_q^{alg} = \mathbb{F}_q^{sep}$)

$\mathbb{F}_{q^n} = \{\alpha \in \mathbb{F}_q^{alg} \mid \alpha^{q^n} = \alpha\} \mid \mathbb{F}_q$ galoissch mit $Gal(\mathbb{F}_{q^n} / \mathbb{F}_q) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$(\sigma_q : \alpha \mapsto \alpha^q) \longmapsfrom 1$

und $\mathbb{F}_q^{alg} = \bigcup_n \mathbb{F}_{q^n} \Rightarrow G_{\mathbb{F}_q} \cong \varprojlim_{(\mathbb{N}, |)} Gal(\mathbb{F}_{q^n} | \mathbb{F}_q) \cong \hat{\mathbb{Z}}$

• $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$

$\Rightarrow Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) / \mathbb{Q}_p) = \varprojlim Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) / \mathbb{Q}_p) = \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n)^\times$

$= \mathbb{Z}_p^\times$

($\zeta_n \in K^{alg}$ primitive n-te EW sofern $\mathrm{char}\, K \nmid n$ und falls $n \mid n'$ ($\mathrm{char}\, K \nmid n'$) wollen $\zeta_n = (\zeta_{n'})$)

Bezeichnung: $\quad G_{\mathbb{Q}_p} \underset{\substack{\text{kanonische} \\ \text{Projektion}}}{\longrightarrow} Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) / \mathbb{Q}_p) \underset{\substack{\text{obiger} \\ \text{isom.}}}{\longrightarrow} \mathbb{Z}_p^\times$

heißt p-adischer Kreisteilungscharakter.

Analog: $\tilde{\mathbb{Q}} = \bigcup_n \mathbb{Q}(\zeta_n)$ (alle n) wissen $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \simeq \prod_{p\ PZ} Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{p^{v_p(n)}})/\mathbb{Q})$

$Gal(\tilde{\mathbb{Q}} / \mathbb{Q}) \cong \varprojlim Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong \prod_{p\ PZ} Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}) = \prod_p \mathbb{Z}_p^\times = (\hat{\mathbb{Z}})^\times$

Satz (Kronecker-Weber)

$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{ab}$ wobei $K^{ab} = \bigcup \{E|K$ galoissch $\mid Gal(E|K)$ abelsch$\}$

ũ: $Gal(K^{ab}/K) \simeq G_K^{ab} = G_K / \overline{[G_K, G_K]}$ ∎

Bemerkung. $G_{\mathbb{Q}_p}$ für $p>2$ ist beschrieben durch Koch-Jansen-Wingberg. (~1985)

($\hat{G}_K^p$, K lokal: ~1967)

03. Weitere Eigenschaften lokaler Körper

Sei K ein nicht-archimedischer lokaler Körper. Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ Bewertungsring,

$v = v_K : K^\times \to \mathbb{Z}$ normalisierte Bewertung.

$k := k_K$ (endl.!) Restklassenkörper, $\pi \in \mathcal{O}$ Primelement (Uniformisierer von K)

$p = \operatorname{char} k$, $q = \# k$, $f = [k : \mathbb{F}_p]$, $e := \begin{cases} e(K/\mathbb{Q}_p), & K \mid \mathbb{Q}_p \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

A. Die multiplikative Gruppe von K

Def. 3.1. Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{U}_i := \mathcal{U}_i(K)$ definiert als $\mathcal{U}_0 := \mathcal{O}^\times$, $\mathcal{U}_i = 1 + \pi^i \mathcal{O}$ für $i \geq 1$.
Sei $\mu^{(p)}(K) = \{ \zeta \in K^\times \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : \zeta^n = 1 \text{ und } p \nmid n \} \subseteq \mathcal{O}^\times$ endliche Untergruppe

Lemma 3.2. $\mu^{(p)}(K) \to k^\times$, $\zeta \mapsto \zeta \bmod \pi$ ist Gruppeniso. (Ü)

Proposition 3.3. Die kanonische Abbildung $\pi^{\mathbb{Z}} \times \mu^{(p)}(K) \times \mathcal{U}_1 \longrightarrow K^\times$ ist ein topologischer Isomorphism.
(ANT I, topologisch: Ü)

Lemma 3.4. $\forall i \in \mathbb{N}_0$: $\mathcal{U}_i / \mathcal{U}_{i+1} \xrightarrow{\sim} (k, +)$, $1 + a\pi^i \longmapsto a \bmod \pi$ ist Gruppenisomorphismus.

Beweis.
$$(1 + a\pi^i)(1 + b\pi^i) = 1 + (a + b(1 + \pi^i a))\pi^i \qquad (i \geq 1)$$
$$\in (1 + (a+b)\pi^i)\,\mathcal{U}_{i+1}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{U}_i \to (k, +)$, $1 + a\pi^i \mapsto a \bmod \pi$ ist Gruppenhomomorphismus

mit Kern $\mathcal{U}_{i+1}$.

$\boxtimes$

Korollar 3.5. $\forall i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: $\mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{j \geq i} \mathcal{U}_i / \mathcal{U}_j$ ($\leadsto \mathcal{U}_i$ ist pro-p Gruppe)

Beweis.
<u>injektiv</u>: ✓
<u>surjektiv</u>: Sei $\overline{\alpha}_j \in \mathcal{U}_i / \mathcal{U}_j$ kompatible Familie. Wähle $\alpha_j \in \mathcal{U}_i$ mit Reduktion $\overline{\alpha}_j$.

$\Longrightarrow$ $(\alpha_j)_j$ bilden CF in $\mathcal{O}^\times \subseteq \mathcal{O}$ $\underset{\substack{\mathcal{U}_i \text{ kpt.} \\ (\mathcal{O} \text{ kpt.!})}}{\Longrightarrow}$ $\alpha := \lim_j \alpha_j$ existiert in $\mathcal{U}_i$.

$\leadsto$ $\alpha \longmapsto (\overline{\alpha}_j)_j$.

$\boxtimes$

Lemma 3.6. Sei K p-adisch, $i \geq 1$. Dann:

(0) $(1+\pi^i a)^p \equiv 1 + p\pi^i a + \pi^{pi} a^p \mod \pi^{e+2i}\mathcal{O}$ $\qquad e = e(K/\mathbb{Q}_p) = v_K(p)$ $\quad (p \mathrel{\hat{=}} \pi^e)$

(1) $(1+\pi^i a)^p \equiv 1 + a^p \pi^{ip} \mod \pi^{ip+1}$, falls $i < \frac{e}{p-1}$

(2) $(1+\pi^i a)^p \equiv 1 + p\pi^i a \mod \pi^{i+e+1}$, falls $i > \frac{e}{p-1}$

(3) $(1+\pi^i a)^p \equiv 1 \mod \pi^{i+e}$, falls $i = \frac{e}{p-1}$

Beweis. (0): Binomischer Lehrsatz und $p \mid \binom{p}{j}$ für $j = 1 - p-1$

und $v(\pi^{2i}p) = 2i + e$

(1) – (3): $v(p\pi^i) > v(\pi^{pi}) \iff e + i > pi \iff \frac{e}{p-1} > i$, etc. $\blacksquare$

Korollar 3.7. Sei K p-adisch. $\mathcal{O}^\times \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^\times$, $\alpha \mapsto \alpha^p$. Dann gilt:

(1) $\forall i > \frac{e}{p-1}$: $\forall k \geq 1$: φ induziert Isomorphismus $U_i/U_{i+k} \xrightarrow{\sim} U_{i+e}/U_{i+e+k}$

(2) $\forall i > \frac{e}{p-1}$: φ induziert Isomorphismus $U_i \xrightarrow{\sim} U_{i+e}$

Beweis.
(1) $\underline{k=1}$:

$$U_i/U_{i+1} \longrightarrow U_{i+e}/U_{i+e+1}, \qquad (1+a\pi^i)U_{i+1} \overset{3.6}{\longmapsto} (1+pa\pi^i)U_{i+e+1}$$

$$U_i/U_{i+1} \cong (k,+), \qquad U_{i+e}/U_{i+e+1} \cong (k,+)$$

$$(1+a\pi^i)U_{i+1} \mapsto a \mod \pi, \qquad (1+pa\pi^i)U_{i+e+1} \mapsto a \cdot \underbrace{\frac{p}{\pi^e}}_{\text{Einheit}} \mod \pi$$

(aus 3.6. Isomorphismus!)

<u>Induktion:</u>

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & U_{i+1}/U_{i+k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\mathrm{IV}"] & U_i/U_{i+k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & U_{i+k}/U_{i+k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq", "\mathrm{IV}"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & U_{i+e+1}/U_{i+e+k+1} \arrow[r] & U_{i+e}/U_{i+e+k+1} \arrow[r] & U_{i+e+k}/U_{i+e+k+1} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

$\simeq$: Schlangenlemma.

(2) verwendet

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\simeq"] & \varprojlim_{j \geq i} U_i/U_j \arrow[d, "\simeq\ \varphi \bmod \ldots"] \\
U_{i+e} \arrow[r] & \varprojlim_{j \geq i} U_{i+e}/U_{j+e}
\end{tikzcd}$$

rechts Isomorphismus wegen (1). $\blacksquare$

14

(2) alternativ:

$$\begin{array}{ccc}
(\underbrace{1+\pi^i\mathcal{O},\cdot)}_{=\,\mathcal{U}_i} & \underset{\exp}{\overset{\log}{\rightleftarrows}} & (\pi^i\mathcal{O},+) \\
\Big\downarrow \varphi & = & \Big\downarrow p\cdot - \quad \text{ist Isomorphismus} \\
(\mathcal{U}_{i+e},\cdot) & \underset{\exp}{\overset{\log}{\rightleftarrows}} & (\pi^{i+e}\mathcal{O},+)
\end{array}$$

$\boxtimes$

27.04.18

Satz 3.8. K sei p-adischer Körper. Dann:

(1) $\mathcal{U}_1(K) \cong \mu_{p^\infty}(K) \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ als topologische Gruppen.

(2) $K^\times \cong \pi^{\mathbb{Z}} \times \mu^{(p)}(K) \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ als topologische Gruppen.

Dabei:

- $\mu_{p^\infty}(K) = \{\zeta \in K^\times \mid \exists n>0: \ \zeta^{p^n} = 1\}$
- $\#\mu_{p^\infty}(K) < \infty$: $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$ und $[\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}):\mathbb{Q}_p] = \phi(p^n)$

$$p^{n-1}(p-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Bemerkung: · $\mathcal{U}_1(K)$ ist abelsche pro-p-Gruppe (letztes mal), d.h. $\mathbb{Z}_p$-Modul.

· $\mathcal{U}_1(K)_{tors} \cong \mu_{p^\infty}(K)$ und $\mathcal{U}_1(K) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Q}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$

Beweis. (2) folgt aus (1) und 3.3.

(1) $\mathcal{U}_1(K)$ ist abelsche pro-p-Gruppe.

$$\mathcal{U}_1(K)_{tors} = \{x \in \mathcal{U}_1(K) \mid \exists n \in \mathbb{N}: \ x^{p^n} = 1\} = \mu_{p^\infty}(K) \quad (<\infty)$$

__Beh.__ $\mathcal{U}_1(K)$ topol. endl. erz. $\left[\begin{array}{l} \Rightarrow \mathcal{U}_1(K) \text{ endl. erz. } \mathbb{Z}_p\text{-Modul} \\ \Rightarrow \mathcal{U}_1(K) \cong \mathcal{U}_1(K)_{tors} \times \mathbb{Z}_p^r \text{ für ein } r \in \mathbb{N}_0 \end{array}\right.$

Dazu: (Burnside Basissatz) z.z. $\mathcal{U}_1(K) / \mathcal{U}_1(K)^n$ endlich

__dazu__: $\mathcal{U}_1(K)^p \supseteq \mathcal{U}_{i_0}(K)^p \overset{3.7.}{=} \mathcal{U}_{i_0+e}(K)$ für $i_0 = \left\lceil \frac{e}{p-1} \right\rceil$

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}_1(K)/\mathcal{U}_1(K)^p$ ist Quotient von $\mathcal{U}_1(K)/\mathcal{U}_{i_0+e}(K)$ $\leftarrow$ endliche p-Gruppe

($\mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i+1} \cong (k,+)$ endl.)

$\Rightarrow$ Behauptung gezeigt.

Behauptung: $\underline{r = [K:\mathbb{Q}_p]}$ $\mathcal{U}_1/\mathcal{U}_i$ endl. $\forall i \geq 1$

$\Rightarrow \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_1 = \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_{i_0}$

wegen log, exp: $U_{i_0} \underset{\log}{\cong} \pi^{i_0} \mathcal{O}_K$ als $\mathbb{Z}_p$-Modul (als pro-p-Gruppe)

$$\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K = \operatorname{rang}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \dim_{\mathbb{Q}_p} K = [K:\mathbb{Q}_p]$$

Alternativ: U_{i_0} ist p-torsionsfrei, denn $x \mapsto x^p$ ist Isomorphismus $U_{i_0} \to U_{i_0+e}$

$\Rightarrow U_{i_0}$ ist freier $\mathbb{Z}_p$-Modul (von endl. Rang)

$$\underset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow} \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}_p} U_{i_0} = \operatorname{rang}_{\mathbb{F}_p} U_{i_0}/U_{i_0}^p = \operatorname{rang}_{\mathbb{F}_p} U_{i_0}/U_{i_0+e} = \log_p(\# U_{i_0}/U_{i_0+e})$$

$$= \log_p((\underbrace{\# k}_{=p^f})^e) = ef = [K:\mathbb{Q}_p]$$

$\square$

Satz 3.9. (ohne Beweis, s. Ü)

Für $K \cong \mathbb{F}_q((\pi))$ gilt $U_1(K) \cong \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$

<u>Abb. $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}} \to U_1$:</u> Sei $b_1, -, b_f$ Basis von k über $\mathbb{F}_p$.

<u>Behauptung:</u> $\prod_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p\nmid n}} \prod_{j=1}^{f} \mathbb{Z}_p \to U_1(K)$, $(a_{nj})_{n,j} \mapsto \prod_{n,j} (1+b_j\pi^n)^{a_{nj}}$

$\square$

B. Zahm verzweigte Erweiterungen (ζ_n primitive n-te EW)

Proposition 3.10. $L|K$ lokale Körper, $n\in\mathbb{N}$ mit $p\nmid n$.

(a) $K(\zeta_n)$ ist unverzweigt über K

(b) Für $m := \# k_L^\times$ gilt $K(\zeta_m) \subseteq L$ und $K(\zeta_m)$ ist größte unverzweigte Erweiterung von K in L. ($\Rightarrow L|K(\zeta_m)$ ist total verzweigt)

(c) Zu $\ell \in\mathbb{N}$ $\exists!$ unverzweigte Erweiterung K_ℓ von K mit $[K_\ell : K] =$, nämlich $K = K(\zeta_{q^\ell - 1})$, $K_\ell | K$ ist galoissch und

$$\operatorname{Gal}(K_\ell|K) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gal}(k(\zeta_{q^\ell-1})/k) \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

Beweis. (vgl. ANT I)

(a) Man betrachtet $X^m - 1$ ($p\nmid m$ und wendet Hensels Lemma an. $\Rightarrow [K(\zeta_n):K] = [k(\zeta_n):k]$

$\Rightarrow f(K(\zeta_n)|K) = [K(\zeta_n):K]$

(<u>Hensel</u>: $\deg \operatorname{mipo}_K \zeta_m = \deg \operatorname{mipo}_k \zeta_m$). Hensel zeigt auch $K(\zeta_m) \subseteq L$ und $k_L = k_K(\zeta_m)$

($\Rightarrow L|K(\zeta_m)$ voll verzweigt) $\Rightarrow$ (a), (b), (c).

Hatten in ANT I gezeigt. $\exists$ kanonische Surjektion $\rho_{L|K}: \operatorname{Gal}(L|K) \to \operatorname{Gal}(k_L|k)$ falls $L|K$ galoissch.

$\square$

Für $L|K$ algebraisch ($L \subseteq K^{alg}$, $K \subseteq L$) sei

$$\mathcal{F}_{L|K} := \{ F \subseteq L \mid F|K \text{ endl. Körpererweiterung} \}$$

Def. 3.11.

(1) $L|K$ heißt unverzweigt $:\Leftrightarrow$ alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind unverzweigt über K.

(2) $L|K$ heißt total verzweigt $:\Leftrightarrow$ alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind total verzweigt über K.

(3) $K^{ur} := \bigcup \{ F \in \mathcal{F}_{K^{sep}|K} \mid F/K \text{ unverzweigt} \}$ $(= \varinjlim \ldots)$

(die max. unverzweigte Erweiterung von K (in K^{alg}))

(4) Für $F \subseteq F'$ in $\mathcal{F}_{L|K}$ haben kanonische Inklusion $k_F \hookrightarrow k_{F'}$

Sei $k_L = \bigcup \{ k_F \mid F \in \mathcal{F}_{L|K} \}$ $(= \varinjlim \ldots)$

(Bem.: $k_L \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L$; Bewertung auf K setzt sich eind. auf L fort)

Bem. (a) $K^{ur} = \bigcup_m K(\zeta_{q^m-1})$ $(= \varinjlim \ldots)$

(b) $K^{ur} \cap L$ für bel. L ist die maximale unverzweigte Erweiterung von K in L.

Def. 3.12. $L|K$ galoissch.

(i) Erhalten kanonischen Homomorphismus $\rho_{L|K} : Gal(L|K) \longrightarrow Gal(k_L|k)$

$$\left(\text{als } \varprojlim \rho_{E|K} : \varprojlim_{\substack{E \in \mathcal{F}_{L|K} \\ E|K \text{ galoissch}}} \left(Gal(E|K) \longrightarrow Gal(k_E/k) \right) \right)$$

(ii) $I_{L|K} := \ker(\rho_{L|K})$, $\quad I_K := I_{K^{sep}/K}$

(iii) Haben $\sigma : k_L \to k_L$, $\alpha \mapsto \alpha^q$ in $Gal(k_L/k)$ (topol. Erz.) $\quad q = \# k$

Nenne $Fr \in Gal(L|K)$ einen Frobeniusautomorphismus $:\Leftrightarrow \rho_{L|K}(Fr) = \sigma$

Bem. (1) Haben "wieder" kurze exakte Sequenzen $1 \to I_{K/L} \to Gal(L|K) \xrightarrow{\rho_{L|K}} Gal(k_L/k) \to 1$

als inverser Limes analoger Sequenzen für $E \in \mathcal{F}_{L|K}$ mit $E|K$ galoissch.

(2) Fr ist eindeutig $\Leftrightarrow$ $\rho_{L|K}$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $L|K$ ist unverzweigt (d.h. $I_{L|K} = \{1\}$)

Für $\underline{L = K^{ur}}$: $Gal(K^{ur}/K) \xrightarrow{\sim} Gal(k^{alg}/k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$.

Def. 3.13. (a) Gilt $[L:K] < \infty$, so heißt $L|K$ zahm verzweigt $:\Leftrightarrow p \nmid e(L|K)$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \stackrel{\uparrow}{\text{char } k}$

(b) $L|K$ heißt zahm verzweigt $:\Leftrightarrow$ alle $F \in \mathcal{F}_{L|K}$ sind zahm verzweigt über K

(c) $L|K$ heißt wild verzweigt $:\Leftrightarrow$ $L|K$ ist <u>nicht</u> zahm verzweigt.
$(p \mid e(F|K)$ für ein $F \in \mathcal{F}_{L|K})$

Bsp. (a) $e \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ mit $p \nmid e \Rightarrow L = K(\sqrt[e]{\pi})$ zahm verzweigt (und total unverzweigt)

(b) $p = \operatorname{char} k$, $L|K$ inseparabel $\rightarrow$ $L|K$ wild verzweigt

(c) $\mathbb{Q}_p(\zeta_p) / \mathbb{Q}_p$ zahm, total verzweigt. $(e = \phi(p) = p-1)$
$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) / \mathbb{Q}_p$ wild verzweigt für $n \geq 2$ $(e = \phi(p^n))$

Proposition 3.14. Sei $L|K$ zahm verzweigt, $[L:K] < \infty$, $E = L \cap K^{ur}$, $e = e(L|K)$. Dann:

(a) $L = E(\sqrt[e]{\pi_E})$ für π_E geeignetes Primelement von E.

(b) $E' := E(\zeta_{e \cdot \# k_E^\times})$, $L' := LE'$ $\Rightarrow L' = E'(\sqrt[e]{\underbrace{\pi}_{=\pi_K}})$

und $E'|K$ unverzweigt, $L'|L$ unverzweigt --- $(L'|K$ galoissch$)$

Beweis.

(a) Sei π_L Primelement von $\mathcal{O}_L$ $\Rightarrow$ $\pi \mathcal{O}_L = \pi_L^e \mathcal{O}_L$, d.h. $\alpha \in \mathcal{O}_L^\times$: $\pi = \pi_L^e \alpha$

wissen $\mathcal{O}_L^\times = \mu^{(p')}(L) \times U_1(L)$
$\Rightarrow \underset{\uparrow}{\alpha} = \zeta \cdot u$ ($\zeta \in \mu^{(p')}(L)$, $u \in U_1(L)$)
$\quad\quad\; n$

$U_1(L)$ ist (endl. erz.) $\mathbb{Z}_p$-Modul, $e \in \mathbb{Z}_p^\times$
$\Rightarrow \exists\, u' \in U_1(L)$: $(u')^e = u$.

$\Rightarrow \zeta^{-1}\pi = (\pi_L \cdot u')^e$

<u>beachte</u>: $\mu^{(p')}(L) = \mu^{(p')}(E)$ da $k_L = k_E$

$\Rightarrow \pi_E := \zeta^{-1}\pi$ Primelement von $\mathcal{O}_E$ <u>und</u> $L = E(\sqrt[e]{\pi_E})$

(<u>denn</u>: $L = E(\pi_L)$, da $[L:E] = e(L|E) = e(L|K) = e$)

(b) wähle $\xi \in \mu^{(p')}(E)$ mit $\xi^e = \zeta$ $\quad (\zeta^{\# k_E^\times} = 1)$

Dann: $\pi = (\pi_L \cdot u' \xi)^e \Rightarrow L' = E'(\sqrt[e]{\pi})$. ▨

Bsp. (ii) $\mathbb{Q}_p(\zeta_p) = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p-1]{\pi'})$ für geeigneten Uniformisierer in $\mathbb{Q}_p$.

<u>Bch.</u>: $\pi = -p$ tut's!

Def. G pro-endlich abelsch. $\Rightarrow$ G ist $\hat{\mathbb{Z}}$-Modul.

Modulstruktur: $\hat{\mathbb{Z}} \times G \longrightarrow G, \ (\alpha, g) \longmapsto \underbrace{\alpha \cdot g}_{?}$

$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \cdot g := g^n$

Für $\hat{a} \in \hat{\mathbb{Z}}$ beliebig: schreibe $\hat{a} = (a_n)_n \in \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ $(a_n \in \mathbb{Z})$

prüfe: (g^{a_n}) "konvergieren" $((g^{a_n})$ hat eind. Häufungspunkt!$)$

Proposition 3.15.

(a) Sind L, L' zahm verzweigt über K, so auch LL' ($\Rightarrow \exists$ größte zahm verzw. Erw. K^{tr} von L in K^{sep})

(b) Die maximal zahm verzweigte Erweiterung von K in K^{alg} ist

$$K^{tr} = \bigcup_{p \nmid n} K^{ur}(\sqrt[n]{\pi})$$

(c) K^{tr}/K^{ur} ist galoissch und $\mathrm{Gal}(K^{tr}/K^{ur}) \underset{\text{kan.}}{\cong} \underbrace{\prod_{\substack{\ell \neq p \\ \ell \text{ prim}}} \mathbb{Z}_\ell}_{= \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}_p} =: \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$

(d) $K^{tr} | K$ ist galoissch mit $\mathrm{Gal}(K^{tr}/K) \cong \hat{\mathbb{Z}}^{(p)} \rtimes \hat{\mathbb{Z}}$ so dass für geeignete topologische Erzeuger $t \in \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ und $s \in \hat{\mathbb{Z}}$ gilt:

$$sts^{-1} = t^q \quad (q = \# k)$$

Beweis.

(a) Für $L, L' | K$ endl: $e(LL'/K) \mid e(L|K)\, e(L'|K)$ (aus ANT 1) oder 3.14

(b) Folgt aus 3.14 (b)

(c) $\mathrm{Gal}(K^{ur}(\sqrt[n]{\pi}) \mid K^{ur}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (nach Kummertheorie)

$(p \nmid n)$ Galoiskonjugierten von $\sqrt[n]{\pi}$ sind $(\zeta_n^i \sqrt[n]{\pi})_{i=1}^n$ (Algebra I)

$\varprojlim(\ldots) = \varprojlim_{p \nmid n}(\quad) \cong \hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$

(d) (ii) Sei $K(n) := K(\zeta_{q^n-1}, \sqrt[q^n-1]{\pi})$; Beh.: $K(n) | K$ galoissch mit $\mathrm{Gal}(K(n)|K) \cong \underset{\substack{| \\ \text{zahm total verzweigt}}}{\overset{t=1}{\mathbb{Z}/q^n-1\mathbb{Z}}} \rtimes \underset{\substack{| \\ \text{unverzweigt} \\ \mathrm{Gal}(K(\zeta_{q^n-1})|K)}}{\overset{s=1}{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}}$

$\underset{=}{\text{und}}$: $sts^{-1} = t^q$

04. Höhere Verzweigungsgruppen.

Sei K ein lokaler Körper. Seien $\mathcal{O}, \pi, k = k_K, v = v_K, q$ wie in 03.

Sei $L|K$ endlich galoisch mit $G = Gal(L|K)$. Seien $\mathcal{O}_L, \pi_L, k_L, v_L$ wie für K.

(v_L normalisiert, keine Fortsetzung von v_K)

Whg. ANT 1: $\exists x \in \mathcal{O}_L$ mit $\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L$ ($L|K$ total verzweigt $\Rightarrow \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$)

Lemma 4.1. Für $\sigma \in G$ und $i \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ sind äquivalent:

a) σ operiert trivial auf $\mathcal{O}_L / \pi_L^{i+1} \mathcal{O}_L$

b) $v_L(\sigma(a) - a) \geq i+1 \quad \forall a \in \mathcal{O}_L$

c) $v_L(\sigma(x) - x) \geq 1$ für x wie oben.

Beweis.

a) $\Leftrightarrow$ b) $\Rightarrow$ c): klar.

c) $\Rightarrow$ b): $\sigma(\sum_i a_i x^i) - \sum_i a_i x^i = (\sigma x - x) \sum_i a_i \underbrace{\frac{(\sigma x)^i - x^i}{\sigma x - x}}_{\in \mathcal{O}_L}$, $a_i \in \mathcal{O}_K$

$$v_L(\ldots) = v_L(\sigma x - x) + \underbrace{?}_{\geq 0} \geq i+1$$

Def. 4.2.

(i) $i_{L|K}(\sigma) := v_L(\sigma x - x) \quad \forall \sigma \in G$

(ii) Für $i \geq -1$ sei $G_i := \{\sigma \in G \mid i_{L|K}(\sigma) \geq i+1\}$ die i-te höhere Verzweigungsgruppe.

Bemerkung 4.3.

(0) $G_i = \bigcap_{\bar{x} \in \mathcal{O}_L / \pi^{i+1} \mathcal{O}_L} Stab_G(\bar{x}) \Rightarrow G_i$ Untergruppe.

(1) $G_{-1} = G$, $G_i = \{id\}$ für $i \gg 1$ ($\sigma \neq id \Rightarrow \sigma x - x \neq 0 \ldots$)

$G_0 \underset{4.1}{=} \{\sigma \in G \mid \sigma x \equiv x \mod \pi\} = I_{L|K} = \ker(G \longrightarrow Gal(k_L | k_K))$

(2) $H \leq G$ Untergruppe zum Zwischenkörper $E = L^H$ (beachte $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_E[x]$)

Dann: $H_i = H \cap G_i$ ($i_{L|E}(\sigma) = i_{L|K}(\sigma)$ für $\sigma \in H$)

z.B. $H = G_0 \Rightarrow L^H = L \cap K^{ur}$ und $G_i = (G_0)_i = H_i \quad \forall i \geq 0$

(3) $i_{L|K}$ ist unabhängig von der Wahl von x (wegen 4.1)

(4) $i_{L|K} : G \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$

Lemma 4.4. Es gilt $G_i \trianglelefteq G \quad \forall i \geq -1$

Beweis.

$$G_i = \ker\left(G \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\mathcal{O}_L / \pi^{i+1}\mathcal{O}_L\right)\right).$$

$\blacksquare$

Korollar 4.5. Seien $\sigma, \tau \in G_0$. Dann gelten:

(i) $i_{L|K}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = i_{L|K}(\tau)$

(ii) $i_{L|K}(\sigma\tau) \geq \min\left(i_{L|K}(\sigma), i_{L|K}(\tau)\right)$ mit Gleichheit falls $i_{L|K}(\sigma) \neq i_{L|K}(\tau)$.

Beweis. (i) wegen 4.4.

(ii)
$$\underbrace{v_{L|K}(\sigma\tau x - x)}_{i_{L|K}(\sigma\tau)} \geq \min\Big(\underbrace{v_{L|K}(\sigma(\tau x) - \tau x)}_{\substack{= i_{L|K}(\sigma), \text{ da} \\ \text{auch } \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\tau x] \\ \text{nun } 4.3\ (3)}}, \underbrace{v_{L|K}(\tau x - x)}_{i_{L|K}(\tau)}\Big)$$

Gleichheitsaussage wegen "analoger" Eigenschaft von v_L.

$\blacksquare$

Lemma 4.6. Für $\sigma \in G_0$ und $i \geq 0$ gelten:

$$\sigma \in G_i \underset{(i)}{\iff} v_L(\sigma\pi_L - \pi_L) \geq i+1 \underset{(ii)}{\iff} \frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} \in U_i(L)$$

Beweis. (i) o.E.: $L|K$ voll verzweigt (ersetze K durch $K^{ur} \cap L$)

dann: klar wegen Wiederholung ANT 1 + 4.3. (3).

(ii) $v_L(\pi_L) = 1 \implies \left(v_L(\sigma\pi_L - \pi_L) \geq i+1 \iff v_L\left(\frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} - 1\right) \geq i \right.$

$$\iff \frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} \in U_i(L).$$

$\blacksquare$

1. Anwendung: $v_L(\mathcal{D}_{L|K})$?

$$\mathcal{D}_{L|K}^{-1} = \left\{\alpha \in L \mid \mathrm{Tr}_{L|K}(\alpha\beta) \in \mathcal{O}_K \ \forall \beta \in \mathcal{O}_L\right\}$$

und (Da $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$) ist $\mu_x \in \mathcal{O}_K[X]$ das Mipo von x, so gilt $\mathcal{D}_{L|K} = \mu_x'(x)\,\mathcal{O}_L$.

Satz 4.7. $v_L(\underbrace{\mathcal{D}_{L|K}}_{=v_L(\mu_x'(x))}) = \sum_{\sigma \in G \setminus \{id\}} i_{L|K}(\sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} (\# G_i - 1)$

(Bem.: weiter unten: $L|K$ zahm verzweigt $\Longleftrightarrow G_1 = \{1\}$
$\Downarrow$ $v_L(\mathcal{D}_{L|K}) = \# G_0 - 1 = e(L|K) - 1$)

Beweis.

$$\mu_x(X) = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma x) \implies \mu_x'(x) = \prod_{\sigma \in G \setminus \{1\}} (x - \sigma x)$$

$$\implies v_L(\mathcal{D}_{L|K}) = \sum_{\sigma \in G \setminus \{1\}} v_L(x - \sigma x) = \sum_{\sigma \in G\setminus\{1\}} \underbrace{i_{L|K}(\sigma)}_{\in \mathbb{Z}_{\geq 0}}.$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \Big(\sum_{\substack{\sigma \in G \setminus \{1\} \\ i_{L|K}(\sigma) = i}} 1 \Big) = \sum_{i=1}^{\infty} i\,(\# G_{i-1} - \underbrace{\# G_i}_{=:g_i})$$

$$\underset{\text{Abel-summation}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (\# G_i - 1)$$

$$0 \cdot (g_{-1} - g_0) + 1(g_0 - g_1) + 2(g_1 - g_2) + 3(g_2 - g_3) + \ldots + n(g_{n-1} - \underbrace{g_n}_{=1}) + 0$$

$$= g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1} - n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (g_0 - 1)$$

$\blacksquare$

Korollar 4.8. (Ü) Sei $E|K$ endl. separable Erweiterung mit Galoishülle L und $H = Gal(L/E)$. Dann: $v_{E|K}(\mathcal{D}_{E|K}) = \frac{1}{e(L/E)} \sum_{\sigma \in G \setminus H} i_{L|K}(\sigma)$

Die Gruppen G_i / G_{i+1}:

Lemma 4.9. $\forall i \geq 0$ ist die Abbildung $\theta_i : G_i/G_{i+1} \longrightarrow \mathcal{U}_i(L)/\mathcal{U}_{i+1}(L)$, $\sigma G_{i+1} \longmapsto \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} \mathcal{U}_{i+1}(L)$ wohldefiniert, unabhängig von π_L und ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

(Erinnerung: $\mathcal{U}_0(L)/\mathcal{U}_1(L) \cong (k_L^\times, \cdot)$, $\quad \mathcal{U}_i(L)/\mathcal{U}_{i+1}(L) \cong (k_L, +) \cong \mathbb{F}_p^{[k_L : \mathbb{F}_p]}$

$\cong \mathbb{Z}/(q_L - 1)$)

Beweis. unabhängig von π_L: Gelte $\pi' = u\pi_L$ für ein $u \in \mathcal{O}_L^\times$.

$$4.1 \underset{\sigma \in G_i}{\Longrightarrow} \sigma u \equiv u \mod \pi_L^{i+1}, \text{ d.h. } \frac{\sigma u}{u} \equiv 1 \mod \pi_L^{i+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma \pi'}{\pi'} = \frac{\sigma u}{u} \frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \equiv \frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \mod \mathcal{U}_{i+1}(L)$$

- $\tilde{\theta}_i : G_i \longrightarrow \mathcal{U}_i(L)/\mathcal{U}_{i+1}(L)$, $\sigma \longmapsto \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} \mod \mathcal{U}_{i+1}(L)$ ist wohldef. Gruppenhomomorphismus:

$\frac{\sigma \pi_L}{\pi_L} \underset{4.6}{\in} \mathcal{U}_i(L) \Rightarrow$ wohldefiniert.

Homomorphismus: $$\tilde{\theta}_i(\sigma\tau) = \frac{\sigma\tau(\pi_L)}{\pi_L} = \frac{\sigma(\tau\pi_L)}{\tau\pi_L} \cdot \frac{\tau(\pi_L)}{\pi_L} \overset{\text{unabh. von } \pi_L}{\underset{v_L(\tau\pi_L)=1}{\equiv}} \frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} \cdot \frac{\tau\pi_L}{\pi_L}$$

inj., wohldefiniert:

$$\ker \tilde{\theta}_i = G_{i+1} \text{ nach Lemma } 4.6.$$

▨

Korollar 4.10. (i) G_0/G_1 ist endl. zykl. Grp. von Ordnung teilerfremd zu p.

(ii) G_1 ist eine p-Gruppe

(iii) L^{G_1} ist der max. zahm verzweigte Unterkörper von L über K

(iv) G ist auflösbar. (sogar "überauflösbar")

Beweis. (i), (ii): klar nach 4.9.

(iv): benötigt zusätzlich: $\mathrm{Gal}(k_L/k)$ auflösbar ist.

(iii)

L
| – total verzweigt
L^{G_1} — zahm verzweigt, da $p \nmid \# G_0/G_1$
K^{G_0}
| unverzweigt
K

$\Rightarrow L^{G_1}$ größte zahm verzweigte Untererweiterung von K in L

▨

Ü: $G_0 \simeq G_1 \rtimes G_0/G_1$ (Schur – Zassenhaus, ... lieber elementar)

Def. 4.11. $G_1 \trianglelefteq G$ heißt wilde Verzweigungsgruppe von G.

Bsp. 4.12. (ü)
Sei $L_i = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^i})$ $i \geq 0$

$$\mathrm{Gal}(L_n \mid \mathbb{Q}_p)_i = \begin{cases} G, & -1 \leq i \leq 0 \\ \mathrm{Gal}(L_n / L_k), & p^{k-1} \leq i \leq p^k - 1 \quad k \in \{1, -, n-1\} \\ \{1\}, & i \geq p^{n-1} \end{cases}$$

Bemerkung 4.13 (siehe Serre) $\sigma \in G_i$, $\tau \in G_j$, $i, j \geq 1$
$\Rightarrow \sigma \tau \sigma^{-1} \tau^{-1} \in G_{i+j+1}$

Der Satz von Herbrand.

Für $u \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ setze $G_u := G_{\lceil u \rceil}$
$(\sigma \in G_u \Leftrightarrow i_{L|K}(\sigma) \geq u+1)$

Def. 4.14. (Herbrand Funktion)

$$\phi = \phi_{L|K} : [-1, \infty) \longrightarrow [-1, \infty), \quad t \longmapsto \int_{s=0}^{t} \frac{1}{[G_0 : G_s]} \, ds$$

beachte: $s \longmapsto [G_0 : G_s]^{-1}$ ist monoton ~~wachsend~~ fallend in s und $\frac{1}{[G_0 : G_s]} \geq \frac{1}{\# G_0}$

Prop. 4.15. (ü)

(i) ϕ ist stetig, stückweise linear (auf $(i, i+1)$) streng monoton wachsend und konkav.

(ii) $\phi(0) = 0$, Steigung 1 auf $-1 \leq t \leq 0$

(iii) Für $u \in \mathbb{R}_{\geq 1} \setminus \mathbb{Z}$: $\phi'(u) = \frac{1}{[G_0 : G_u]} \geq \frac{1}{\# G_0}$

(iv) $\phi : [-1, \infty) \longrightarrow [-1, \infty)$ ist bijektiv.

Sei $\psi = \psi_{L|K} = \phi^{-1} : [-1, \infty) \longrightarrow [-1, \infty)$

Korollar. 4.16. (ü) (i) ψ ist stetig, stückweise linear, streng monoton wachsend, konvex
(ii), (iv) wie für ϕ
(iii) Sei $v = \phi(u)$, $u \notin \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \psi'(v) = [G_0 : G_u]$ $(\in \mathbb{N})$ | (v) $u \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \Rightarrow u = \psi(v) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Beweis.

(v) OE $v \geq 1$. ($v=0$, $v=-1$ klar wegen ii)

$\exists i: \quad i \leq v \leq i+1$ $\qquad\qquad [G_0 : G_u] = \dfrac{\# G_0}{\# G_u}$

$$\underset{v=\phi(u)}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\# G_0 \; v}_{\substack{\text{teile durch} \\ \# G_{i+1}}} = \underset{[0,1]}{\# G_1} + \underset{[1,2]}{\# G_2} + \ldots + \underset{[i-1,i)}{\# G_i}$$

$$\underset{v \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \quad u - i \in \mathbb{Z} \Longrightarrow u = i.$$

$\blacksquare$

Def. 4.17. $\quad G^v := G_{\psi(v)}$ (Verzweigungsgruppen in oberer Nummerierung!)

Satz 4.18. (Herbrand) Für $N \trianglelefteq G$ Normalteiler gilt:

$$\left(G/N\right)^v = G^v N / N \qquad \forall v \in \mathbb{R}_{\geq -1}$$

08.05.18

Bem. zu 4.17.

i) $G^v = \{1\}$ für $v \gg 0$

ii) $G^0 = G_0$ $(\psi(0) = 0)$; $G^{-1} = G$

iii) Ü: $\psi(v) = \int_{w=0}^{v} [G^0 : G^w] \, dw$

Übung: Die Abbildung $\phi = \phi_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p}$ (mit Inverser ψ) erfüllt:

$$\phi'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ \dfrac{1}{p^k - p^{k-1}}, & p^{k-1} - 1 < t < p^k - 1 \qquad 1 \leq k \leq n-1 \\ \dfrac{1}{p^n - p^{n-1}}, & p^{n-1} - 1 < t \end{cases}$$

$$\psi'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ p^k - p^{k-1}, & k-1 < t < k \qquad 1 \leq k \leq n-1 \\ p^n - p^{n-1}, & n-1 < t \end{cases}$$

(Sprünge der Steigung von ψ an $\{0, \ldots, n-1\}$)

Proposition 4.19. Gelte $N \trianglelefteq G$ und sei $E = L^N$. Dann:

$$\varphi_{L|K} = \varphi_{E|K} \circ \varphi_{L|E} \quad \text{und} \quad \psi_{L|K} = \psi_{E|K} \circ \psi_{L|E}$$

Lemma 4.20. Für $N \trianglelefteq G$ und $E = L^N$ gilt:

$$\forall \delta \in \mathrm{Gal}(E|K): \quad i_{E|K}(\delta) = \frac{1}{e(L|E)} \sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma|_E = \delta}} i_{L|K}(\sigma)$$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "N"] \\ E \arrow[d, dash, "G/N"] \\ K \end{tikzcd} \quad G$$

Beweis. (Tate)

- Falls $\delta = \mathrm{id}$: $\infty = \infty$.
- Falls $\delta \neq \mathrm{id}$: Wähle $x \in \mathcal{O}_L$, $y \in \mathcal{O}_E$ mit $\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_K[y] = \mathcal{O}_E$.

Wähle $\tau \in G$ mit $\tau|_E = \delta \Rightarrow \{\sigma \in G \mid \sigma|_E = \delta\} = \tau \cdot N = N \cdot \tau$

Beobachte:

$$e(L|E) \cdot i_{E|K}(\delta) = v_L(\tau y - y)$$

$$i_{L|K}(\sigma) = v_L(\sigma x - x)$$

Behauptung: $a = \tau y - y$ und $b = \prod_{\sigma \in N} (\tau\sigma x - x)$ sind assoziiert in $\mathcal{O}_L$.

$a \mid b$: Sei $f \in E[X]$ das Minimalpolynom von x über E.

$$f(X) = \prod_{\sigma \in N} (X - \sigma x) = X^{\#N} + \sum_{i=0}^{\#N-1} b_i X^i \quad \text{mit } b_i \in \mathcal{O}_E \text{ da } x \text{ ganz über } \mathcal{O}_E.$$

$$\tau f - f = \sum_{i=0}^{\#N-1} \underbrace{(\tau b_i - b_i)}_{v_E(\cdot) \geq i_{E|K}(\delta)} X^i \qquad (\tau b_i = \delta b_i)$$

$$\xrightarrow[\text{Koeffizienten von } f]{a \text{ teilt}} \quad a \mid (\tau f - f)(x) = (\tau f)(x) = \prod_{\sigma \in N} (x - \tau\sigma x) = \pm b$$

$b \mid a$: Schreibe $y = g(x)$ für ein $g \in \mathcal{O}_K[X]$.

$\Rightarrow$ $g(X) - y \in \mathcal{O}_E(X)$ und das Polynom hat x als Nullstelle.

$\Rightarrow g(X) - y = \underbrace{f(X)}_{\text{normiert}} \cdot h(X)$ für ein $h \in \mathcal{O}_E[X]$.

Wende τ an; anschließend x einsetzen. (beachte $\tau g = g$)

$$\Rightarrow a = y - \tau y = (\tau f)(x) \; (\tau h)(x)$$
$$= \pm b \cdot (\tau h)(x)$$

also gilt $b \mid a$.

$\square$

Korollar 4.21. (s. Serre, Local Fields) Sei $N = G_j$ für ein $j \geq 0$. Dann:

(a) $(G/N)_i = G_i/N$ für $i < j$ (b) $(G/N)_i = \{1\}$ für $i \geq j$

Beweis. Übung.

$\square$

Lemma 4.22. Für $t \geq -1$ gilt:

$$\phi_{L|K}(t) + 1 = \frac{1}{\# G_0} \sum_{\sigma \in G} \min(i_{L|K}(\sigma), t+1)$$

Beweis. Beide Seiten sind 1 an $t = 0$, $(i_{L|K}(\sigma) = 0$ für $\sigma \in G \setminus G_0$, ≥ 1 für $\sigma \in G_0)$ stückweise linear für $t \in [i, i+1]$ und stetig. Sei $t \in \mathbb{R}_{\geq -1} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\phi'_{L|K}(t) = \frac{1}{[G_0 : G_{i+1}]} = \frac{\# G_{i+1}}{\# G_0}$$

$$\left(\text{Rechte Seite}\right)'(t) = \frac{1}{\# G_0} \sum_{\sigma \in G} \frac{d}{dt} \underbrace{\min\{i_{L|K}(\sigma), t+1\}}_{\text{Fkt. konstant nahe } t \iff i_{L|K}(\sigma) < t+1 \iff i_{L|K}(\sigma) \leq i+1}$$

$$= \frac{1}{\# G_0} \left(\sum_{\sigma \in G \setminus G_{i+1}} 0 + \sum_{\sigma \in G_{i+1}} 1 \right)$$

$\square$

Lemma 4.23. Für $N \trianglelefteq G$, $E = L^N$, $\delta \in \mathrm{Gal}(E|K)$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ gilt:

$$i_{E|K}(\delta) - 1 = \max\{\phi_{L|E}(i_{L|K}(\sigma) - 1) \mid \sigma \in G, \sigma|_E = \delta\}$$

Beweis. Wähle $\sigma \in \{\sigma' \in G \mid \sigma'|_E = \delta\}$ für welches $i_{L|K}(\sigma)$ maximal ist. Sei

$$m = i_{L|K}(\sigma) - 1. \quad \underline{\text{Behauptung:}}\ \forall \tau \in N: \ i_{L|K}(\sigma\tau) = \min\{i_{L|K}(\tau), m+1\}$$

Fall $\tau \in N_m$: d.h. $i_{L|K}(\tau) - 1 \geq m. \Rightarrow i_{L|K}(\sigma\tau) \geq \min\{i_{L|K}(\sigma), i_{L|K}(\tau)\}$

$= m+1$ und $=$ nach Wahl von σ.

$= i_{L|K}(\sigma)$

Fall $\tau \in N \setminus N_m$: $\quad i_{L|K}(\tau) \leq m \underset{4.5\,(ii)}{\Rightarrow} i_{L|K}(\sigma\tau) \underset{\text{wie oben}}{=} i_{L|K}(\tau) \Rightarrow$ ▨ Behauptung.

$$4.20 \Rightarrow i_{E|K}(\delta) \underset{\text{Beh.}}{=} \frac{1}{e(L|E)} \sum_{\tau \in N} \min\{i_{L|K}(\tau), m+1\}$$

$\{\sigma' \in G \mid \sigma'|_E = \delta\} = \sigma N$

$$= \frac{1}{\# N_0} \sum_{\tau \in N} \min\{\underline{i_{L|E}(\tau)}, m+1\} \underset{\substack{4.22\\ \text{für } N}}{=} \phi_{L|E}(m) + 1$$

$(\mathcal{O}_K[x] = \mathcal{O}_L \Rightarrow \mathcal{O}_E[x] = \mathcal{O}_L)$

$$= \max\{\phi_{L|E}(i_{L|K}(\sigma) - 1) \mid \sigma \in G, \sigma|_E = \delta\} + 1$$

ϕ konvex $\Rightarrow$ "$\max(\phi) = \phi(\max)$"

▨

Korollar 4.24. (Herbrand's Theorem)

Sei $v = \phi_{L|E}(u)$. Dann:
$$G_u N/N = \underbrace{(G/N)}_{\cong \mathrm{Gal}(E|K)}{}_v$$

Beweis. (Notation wie in 4.23)

$$\delta \in G_u N/N \Leftrightarrow \max\{i_{L|K}(\sigma) - 1 \mid \sigma \in G, \sigma|_E = \delta\} \geq u$$

$$\underset{\substack{4.23,\\ \phi_{L|E} \text{ mon. wachs.}}}{\Leftrightarrow} i_{E|K}(\delta) - 1 \geq \phi_{L|E}(u) = v$$

$$\Leftrightarrow \delta \in (G/N)_v$$

▨

Beweis von 4.19. (Transitivität

(nur für ϕ, da $\psi = \phi^{-1}$..) Sei $u \in \mathbb{R}_{\geq -1} \setminus \mathbb{Z}$.

$$\frac{d}{dt}(\phi_{E|K} \circ \phi_{L|E})(u) = \phi'_{E|K}(v) \cdot \phi'_{L|E}(u) \qquad \begin{array}{l} v := \phi_{L|E}(u) \\ \not\in \\ \mathbb{Z} \quad (4.16\ v) \end{array}$$

$$= \frac{\#(\mathrm{Gal}(E|K)_v)}{e(E|K)} \cdot \frac{\#(\mathrm{Gal}(L|E)_u)}{e(L|E)} \underset{4.24}{=} \frac{\# G_u N/N \cdot \# \mathrm{Gal}(L/E)_u}{e(L|K)}$$

$$\left(G_u N/N \cong G_u/N \cap G_u \cong G_u/N_u \right) \Rightarrow \quad = \frac{\# G_u/\# N_u \cdot \# N_u}{e(L|K)}$$

$$= \phi'_{L|K}(u)$$

$\blacksquare$

Beweis von 4.18. Sei $v \in \mathbb{R}_{\geq -1}$, $x = \psi_{E|K}(v)$, $w = \psi_{L|E}(x) = \psi_{L|K}(v)$

$$(G/N)^v \underset{\text{Def.}}{=} (G/N)_{\psi_{E|K}(v)} = (G/N)_x \underset{\substack{4.24 \\ \phi_{L|E}(w) = x}}{=\!=} G_w N/N = G_{\psi_{L|K}(v)} N/N$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} G^v N/N.$$

$\blacksquare$

Satz. (Hasse-Arf, o. Beweis, s. Serre)

Ist $\underset{\mathrm{Gal}(L|K)}{\overset{\shortparallel}{G}}$ abelsch, $v \in \mathbb{Q}$ ein Sprung der oberen Verzweigungs-Filtrierung, so gilt: $v \in \mathbb{Z}$.

05. Abgeleitete Funktoren (von Modulkategorien)

Sei R ein (nicht-notw. kommutativer) Ring mit 1.

${}_R\underline{\mathrm{Mod}} := R\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$: Kategorie der (Links-) R-Moduln.

Def. 5.1. $Ch^\circ(R)$: Kategorie der (kohomologischen) Komplexe über ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$.

Objekte: $C^\circ = (C^k, d^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ so dass $\forall k\in\mathbb{Z}$: $d^k : C^k \to C^{k+1}$ ein Morphismus in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ ist und $\forall k\in\mathbb{Z}$: $d^{k+1}\circ d^k = 0$.

Morphismen: $f^\circ = (f^k)_{k\in\mathbb{Z}} : C^\circ = (C^k, d^k)_{k\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \overline{C}^\circ = (\overline{C}^k, \overline{d}^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sind $\forall k\in\mathbb{Z}$: Morphismen $f^k : C^k \to \overline{C}^k$ so dass $\overline{d}^i \circ f^i = f^{i+1}\circ d^i$.

Notation: Komplexe

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \overline{C}^{i-1} \arrow[r, "\overline{d}^{i-1}"] & \overline{C}^i \arrow[r, "\overline{d}^i"] & \overline{C}^{i+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Proposition 5.2. $Ch^\circ(R)$ ist eine abelsche Kategorie.

Struktur geg. durch:

Addition auf $\mathrm{Hom}_{Ch^\circ(R)}(-,-)$: $(f^\circ + g^\circ)^i := f^i + g^i$

Null: Nullkomplex $\ldots \to 0 \to 0 \to \ldots \to 0 \to 0 \to \ldots$

Kern: zu $f^\circ : C^\circ \to \overline{C}^\circ$ definiere Komplex $\ker f^\circ := (\ker f^i, d^i|_{\ker f^i})_{i\in\mathbb{Z}}$ als Kern zu f° mit Inklusion nach C.

Cokern: dual.

Bemerkung: Wg. Prop. 5.2. können von Exaktheit von Diagrammen $\overline{C}^\circ \to C^\circ \to \overline{\overline{C}}^\circ$ von Komplexen reden, und von kurzen exakten Sequenzen $0 \to \overline{C}^\circ \to C^\circ \to \overline{\overline{C}}^\circ \to 0$ in $Ch^\circ(R)$.

Def. 5.3. Sei $C^\circ = (C^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Ch^*(R)$. Definiere

$Z^i := Z^i(C^\circ) := \ker d^i$ (i-Kozykeln) $\quad (B^i \subseteq Z^i$ wg. $d^i\circ d^{i-1} = 0)$

$B^i := B^i(C^\circ) := \operatorname{im} d^{i-1}$ (i-Koränder)

$H^i := H^i(C^\circ) := Z^i(C^\circ)/B^i(C^\circ)$ (i-te Kohomologie)

C° heißt exakt oder azyklisch $:\Longleftrightarrow \forall i \in \mathbb{Z}: H^i(C^\circ) = 0$.

Für $f^\circ: C^\circ \to \bar{C}^\circ$ ein Morphismus in $Ch^\circ(R)$ gelten:

$$f^i(Z^i(C^\circ)) \subseteq Z^i(\bar{C}^\circ), \quad f^i(B^i(C^\circ)) \subseteq B^i(\bar{C}^\circ)$$

$\rightsquigarrow$ induzierte Abbildungen $\quad H^i(f^\circ): H^i(C^\circ) \to H^i(\bar{C}^\circ)$

Proposition 5.4. $\forall i \in \mathbb{Z}: \; H^i(-): Ch^\circ(R) \to {}_R\underline{Mod}$ ist ein Funktor.

Bemerkung: Homologische Komplexe: $Ch_\bullet(R)$

Objekte: $\quad \dots \; C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \to \dots$

Z_i, B_i, H_i analog wie oben (z.B. $Z_i = \ker d_i$)

$$\underset{\text{Homologie}}{\underline{\underline{\;}}}\quad Ch^\circ(R) \xrightarrow{\sim} Ch_\bullet(R): \; (C^i, d^i) \mapsto \underset{Ch_{\le 0}(R)}{(C_i, d_i)} \text{ mit } C_i := C^{-i},\; d_i := d^{-i}$$

Kohomologie verwendet üblicherweise $Ch^{\ge 0}(R) \subseteq Ch^\circ(R)$, die Unterkategorie der Komplexe mit $(C^\circ)^i = 0 \quad \forall i < 0$.
$(C_\bullet)_i = 0 \quad \forall i > 0$

<u>Lange exakte Sequenzen.</u> Sei $\varepsilon: 0 \to \bar{C}^\circ \to C^\circ \to \bar{\bar{C}}^\circ \to 0$ exakt in $Ch^\circ(R)$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \bar{C}^i \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}^i"] & C^i \arrow[r] \arrow[d, "d^i"] & \bar{\bar{C}}^i \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\bar{d}}^i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \bar{C}^{i+1} \arrow[r] & C^{i+1} \arrow[r] & \bar{\bar{C}}^{i+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \xrightarrow[\text{Schlangenlemma}]{} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \bar{Z}^i \arrow[r] & Z^i \arrow[r] & \bar{\bar{Z}}^i \\ & \bar{C}^{i+1}/\bar{B}^{i+1} \arrow[r] & C^{i+1}/B^{i+1} \arrow[r] & \bar{\bar{C}}^{i+1}/\bar{\bar{B}}^{i+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} & \bar{C}^i/\bar{B}^i \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}^i"] & C^i/B^i \arrow[r] \arrow[d, "d^i"] & \bar{\bar{C}}^i/\bar{\bar{B}}^i \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\bar{d}}^i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \bar{Z}^{i+1} \arrow[r] & Z^{i+1} \arrow[r] & \bar{\bar{Z}}^{i+1} \end{tikzcd} \quad \xrightarrow[\text{Schlangenlemma}]{} \quad \begin{tikzcd} H^i(\bar{C}^\circ) \arrow[r] & H^i(C^\circ) \arrow[r] & H^i(\bar{\bar{C}}^\circ) \arrow[dll, "\delta^i"'] \\ H^{i+1}(\bar{C}^\circ) \arrow[r] & H^{i+1}(C^\circ) \arrow[r] & H^{i+1}(\bar{\bar{C}}^\circ) \end{tikzcd}$$

Satz 5.5. (a) Erhalten Randabbildungen $\delta^i = \delta^i_\varepsilon$ zu ε und lange exakte Kohomologiesequenz hierbei sind $H^i(\bar{C}^\circ) \to H^i(C^\circ)$ bzw. $H^i(C^\circ) \to H^i(\bar{\bar{C}}^\circ)$ die Abb.'en die durch die Funktoren aus 5.4. gegeben sind.

(b) Morphismen von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[d] & 0 \arrow[r] & \bar{C}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\bar{h}^\bullet"] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h^\bullet"] & \bar{\bar{C}}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\bar{h}}^\bullet"] & 0 \\ \mathcal{E}' & 0 \arrow[r] & \bar{D}^\bullet \arrow[r] & D^\bullet \arrow[r] & \bar{\bar{D}}^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(in $Ch^\bullet(R)$) induzieren Morphismen zwischen den sich ergebenden langen ex. Sequenzen.

(genauer:
$$\begin{tikzcd} H^i(\bar{\bar{C}}^\bullet) \arrow[r, "\delta^i_{\mathcal{E}}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & H^{i+1}(\bar{C}^\bullet) \arrow[d] \\ H^i(\bar{\bar{D}}^\bullet) \arrow[r, "\delta^i_{\mathcal{E}'}"] & H^{i+1}(\bar{D}^\bullet) \end{tikzcd}$$
)

Homotopie:

Def. 5.6. (a) $f^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ in $Ch^\bullet(R)$ heißt 0-homotop $\iff$

$\exists$ (0-Homotopie) $(s^i : C^i \to D^{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$ mit s^i Morphismus in ${}_R\underline{Mod}$.

so dass $\forall i \in \mathbb{Z}$: $f^i - 0 = s^{i+1} \circ d^i_{C^\bullet} + d^{i-1}_{D^\bullet} \circ s^i$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C^i \arrow[r, "d^i_C"] \arrow[dl, "s^i"'] \arrow[d, "f^i"] & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, "s^{i+1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] D^{i-1} \arrow[r] & D^i \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

(b) $f^\bullet, g^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ in $Ch^\bullet(R)$ heißen homotop $\underset{(f\sim g)}{:\iff}$ $f - g$ ist 0-homotop

Satz 5.7. (a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}_{Ch^\bullet(R)}(-,-)$

(b) $f^\bullet \sim g^\bullet \Rightarrow H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$

(c) $id_{C^\bullet} \sim 0 \Rightarrow C^\bullet$ ist azyklisch.

Bemerkung. "Man" definiert $K^\bullet(R)$ als $Ch^\bullet(R)/_\sim$ (Objekte dieselben, auf den Morphismen bildet man Äquivalenzklassen)

$K^\bullet(R)$ ist selten eine abelsche Kategorie (aber immer eine triangulierte Kategorie)

(abelsche Kategorie $\underset{??}{\iff}$ alle Objekte in ${}_R\underline{Mod}$ sind injektiv)

Auflösungen: Wdh. I injektiv $:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_R(-, I)$ exakter Funktor

P projektiv $:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ exakter Funktor

Sei R eine A-Algebra (A kommutativ!)

$F \in {}_R\mathrm{Mod}$ ist A-flach $:\Longleftrightarrow$ $F \otimes_A -$ ist exakter Funktor

Proposition. (a) ${}_R\mathrm{Mod}$ besitzt genügend injektive und genügend projektive

(b) Ist R A-flach, so besitzt ${}_R\mathrm{Mod}$ genügend viele A-flache (alle proj. R-Moduln sind A-flach)

Bemerkung: Grothendieck-Kategorien besitzen genügend viele Injektive.

Def. 5.8. (a) Ein Komplex $I^\bullet \in Ch^{\geq 0}(R)$ zusammen mit einer Abbildung $\varepsilon : M \longrightarrow I^0$ ($M \in {}_R\mathrm{Mod}$) heißt injektive Auflösung von M $:\Longleftrightarrow$ alle I^i sind injektiv und $0 \to \underset{-1}{M} \xrightarrow{\varepsilon} \underset{0}{I^0} \xrightarrow{d^0} \underset{1}{I^1} \to \dots$ ist exakt.

(b) Sei $M \in {}_R\mathrm{Mod}$. Ein Komplex $P^\bullet \in Ch^{\leq 0}(R)$ zusammen mit einer Abbildung $\varepsilon : P^0 \longrightarrow M$ heißt projektive Auflösung $:\Longleftrightarrow$ alle P^i sind projektiv und

$$\dots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad \text{ist exakt.}$$

Notation: $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$, $\quad M \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$

Satz 5.9. (a) Jedes Objekt in ${}_R\mathrm{Mod}$ besitzt eine injektive Auflösung.

(b) zu $M \xrightarrow{\varphi} M'$ ein Morphismus in ${}_R\mathrm{Mod}$ $\exists$ inj. Auflösungen $M \to I^\bullet$, $M' \to I'^\bullet$ und eine Abbildung von Komplexen $\psi : I^\bullet \to I'^\bullet$ so dass

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & I^0 \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\psi^0} \\ M' & \longrightarrow & I'^0 \end{array}$$

(c) Die Abbildung $\psi : I^\bullet \to I'^\bullet$ (zu jeg. $\varphi: M \to M'$, zu jeg. $I^\bullet, I'^\bullet$) ist eindeutig bis auf Homotopie.

(d) Es gelten analoge (duale) Aussagen für projektive Auflösungen

Derivierte Funktoren.

Sei $F : {}_R\underline{Mod} \to \underline{Ab}$ ein additiver Funktor, (d.h. die Abbildungen

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(FM, FN) \quad \text{sind } \mathbb{Z}\text{-linear} \quad \forall M,N \in {}_R\underline{Mod})$$
$$\varphi \longmapsto F\varphi$$

- F induziert additiver Funktor $Ch^\cdot(R) \to Ch^\cdot(\mathbb{Z})$
$$(C^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}} \longmapsto (FC^i, Fd^i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

Def. 5.10. (a) Sei $P^\cdot \xrightarrow{\varepsilon} M$ eine projektive Auflösung und für $\varphi : M \to M'$ in ${}_R\underline{Mod}$ sei $\psi : P^\cdot \to P^{\cdot\prime}$ Abbildung projektiver Auflösungen wie in 5.9.

Dann definiere $(L_iF)(M) := H^{-i}(FP^\cdot) \quad \forall i \geq 0$

$$(L_iF)(\varphi) : (L_iF)(M) \longrightarrow (L_iF)(N) = H^{-i}(FP^\cdot \xrightarrow{F\psi^\cdot} FP^{\cdot\prime})$$

(b) Sei $M \xrightarrow{\varepsilon} I^\cdot$ eine injektive Auflösung, und zu $M \xrightarrow{\varphi} M'$ sei $I^\cdot \xrightarrow{\psi} I^{\cdot\prime}$ Abb. von Auflösungen. Definiere

$$(R^iF)(M) := H^i(FI^\cdot) \quad \text{und} \quad (R^iF)(\varphi) := H^i(FI^\cdot \xrightarrow{F\psi^\cdot} FI^{\cdot\prime})$$

Proposition 5.11. $\forall i \geq 0$ erhält man Funktoren $R^iF, L_iF : {}_R\underline{Mod} \to \underline{Ab}$

Idee: (a) wähle $\forall M \in {}_R\underline{Mod}$ projektive Auflösung $P_M^\cdot \xrightarrow{\varepsilon_M} M$

und $\forall \varphi$ Morphismen von Moduln

$$\begin{tikzcd} P_M^\cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & M \arrow[d] \\ P_{M'}^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[d] \\ P_{M''}^\cdot \arrow[r] & M'' \end{tikzcd}$$

Wissen: $\downarrow\downarrow$ und (sind homotop

$\underset{5.9.}{\Longrightarrow}$ induz. Abb'en $(L_iF)(M) \longrightarrow (L_iF)(M')$ sind dieselben.

Horseshoe Lemma. Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakte Sequenz in ${}_R\underline{Mod}$, so existiert eine kurze exakte Sequenz von proj. Auflösungen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^{\cdot\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & P^\cdot \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & P^{\cdot\prime\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und von injektiven Auflösungen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I^{\cdot\prime} \arrow[r] & I^\cdot \arrow[r] & I^{\cdot\prime\prime} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Beweis ist ein Induktionsargument. In jedem Schritt (z.B. projektiv)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & P^{\circ\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'", "\text{surj.}"'] & P^{\circ} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha'\oplus\hat{\alpha}"'] & P^{\circ\prime\prime} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"', "\text{surj.}"] \arrow[dl, dashed, "\exists\hat{\alpha}"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Hufeisen

Bemerkung. $\forall i$: $0 \to P^{-i\prime} \to P^{-i} \to P^{-i\prime\prime} \to 0$ spaltet

$\Rightarrow F(\quad -\text{"}- \quad)$ spaltet, ist also exakt!

$\Rightarrow \quad 0 \to FP^{-i\prime} \to FP^{-i} \to FP^{-i\prime\prime} \to 0$ exakt!!

Satz 5.12. Erhalten lange exakte Kohomologiesequenzen

z.B. $0 \to R^0FM' \to R^0FM \to R^0FM'' \to R^1FM' \to R^1FM \to \ldots$

(lange exakte Kohomologiesequenz zu $0 \to FI^{\circ\prime} \to FI^{\circ} \to FI^{\circ\prime\prime} \to 0$)

F heißt rechtsexakt (kovariant) $:\Leftrightarrow$ $\forall$ rechts ex. Sequenzen $M' \to M \to M'' \to 0$ ist $FM' \to FM \to FM'' \to 0$ rechtsexakt.

(analog linksexakt)

Lemma 5.13. (a) F rechtsexakt $\Rightarrow$ $L_0F(M) = M$ (kanonisch)

und $(L_iF)(P) = 0 \quad \forall i > 0$ falls P projektiv

(b) die duale Aussage für F linksexakt; $R^0F(M)$ und für Injektive.

Beweis. (a) Proj. Auflösung $\quad \ldots \to P^{-1} \to P^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ (rechtsexakt)

$\xrightarrow[\text{F rechtsexakt}]{} \quad \ldots \to FP^{-1} \to FP^0 \to FM \to 0$

$\Rightarrow H^0(FP) = \dfrac{FP^0}{Fd^{-1}(FP^{-1})} \underset{\text{via } \varepsilon}{\overset{\text{kanonisch}}{=}} FM.$

(i) Ist P projektiv, so ist $\underset{-3}{0} \to \underset{-2}{0} \to \underset{-1}{0} \to \underset{0}{P} \xrightarrow{id} \underset{1}{P}$ projektive Auflösung.

$\square$

Bemerkung. Sei F kontravariant, $F: {}_R\mathrm{Mod}^{op} \to \underline{Ab}$

1) $I \in {}_R\mathrm{Mod}$ injektiv $\iff$ $I \in {}_R\mathrm{Mod}^{op}$ projektiv

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\mathrm{Hom}_{{}_R\mathrm{Mod}}(\cdot, I)$ exakt $\quad$ $\mathrm{Hom}_{{}_R\mathrm{Mod}^{op}}(I, \cdot)$ exakt

2) F linksexakt: $0 \to M' \to M \to M''$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}^{op}$ exakt

$\Rightarrow 0 \to FM' \to FM \to FM''$ in $\underline{Ab}$ exakt, d.h.:

$M'' \to M \to M' \to 0$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ exakt $\Rightarrow$ $0 \to FM' \to FM \to FM''$ in $\underline{Ab}$ exakt

d.h. Für F linksexakt, kontravariant, definiere $(R^iF)(M) := H^i(FP^\bullet)$

mit $M \to P^\circ$ inj. Auflösung in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}^{op}$

$\leftrightarrow$ $P^\circ \to M$ proj. Auflösung in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$.

Ext.

$\forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $\quad \mathrm{Hom}_R(\cdot, N): {}_R\underline{\mathrm{Mod}}^{op} \to \underline{Ab}$ ist linksexakt.

$\forall M \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $\quad \mathrm{Hom}_R(M, \cdot): {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{Ab}$ ist linksexakt.

Def. 5.14.

- $\mathrm{Ext}^i_R(\cdot, N) := R^i(\mathrm{Hom}_R(\cdot, N))$ (Auflösung mit projektiven)

- $\overline{\mathrm{Ext}}^i_R(M, \cdot) := R^i(\mathrm{Hom}_R(M, \cdot))$ (Auflösung mit injektiven)

Satz 5.15. (aus 5.12, 5.13)

Ist $0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ exakt, so

$\exists$ lange exakte Sequenz $\quad 0 \to \mathrm{Hom}_R(M, Q') \to \mathrm{Hom}_R(M, Q) \to \mathrm{Hom}_R(M, Q'') \to \overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M, Q') \to$

$\exists$ lange exakte Sequenz $\quad 0 \to \mathrm{Hom}_R(Q'', N) \to \mathrm{Hom}_R(Q, N) \to \mathrm{Hom}_R(Q', N) \to \mathrm{Ext}^1_R(Q'', N) \to \ldots$

Weiter gelten: $\overline{\mathrm{Ext}}^i(M, Q) = 0$ falls Q injektiv und $i \geq 1$.

$\mathrm{Ext}^i(Q, N) = 0$ falls Q projektiv und $i \geq 1$.

Bem. $\mathrm{Ext}^1_R(Q, N) = 0 \ \forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \Rightarrow Q$ projektiv (analog $\overline{\mathrm{Ext}}^1_R \ldots$)

Interpretation von Ext^1_R und $\overline{\mathrm{Ext}}^1_R$:

Definiere $\quad \mathrm{Ext}^1_R(M,N) := \{ \text{kurze ex. Seq. } \varepsilon : 0 \to N \to E \to M \text{ in } {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \} / \sim$

wobei $\varepsilon \sim \varepsilon' :\Longleftrightarrow \exists$ komm. Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u] \arrow[d] & & M \arrow[r] & 0 \quad \text{in } {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \\ & E' \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

5-Lemma $\Rightarrow$ φ Isomorphismus

Ü: $\sim$ ist Äquivalenzrelation.

Addition auf $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$: (Baer, Summe)

Definiere $\varepsilon +_B \varepsilon'$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \oplus N \arrow[r] \arrow[d, "+"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & E \oplus E' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & M \oplus M \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & P.O. \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & M \oplus M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[u, "="] & P.B. \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u, "\Delta = \mathrm{Diag.}"] & 0 \end{tikzcd}$$

P.O.: Pushout

P.B.: Pullback.

Satz 5.16. (Jacobson BA II, 6.9)

$\exists$ nat. Isomorphismus: $\quad (\mathrm{Ext}^1_R(M,N), +_B) \cong (\mathrm{Ext}^1_R(M,N), +) \cong (\overline{\mathrm{Ext}}^1_R(M,N), +)$. $\blacksquare$

Ausblick: Doppelkomplexe.

Def. Ein Doppelkomplex (in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$) ist ein Tupel

$$C^{\bullet\bullet} = \left(C^{i,j}, d_h^{i,j}, d_v^{i,j} \right)_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \qquad \text{(s. Weibel A.A)}$$

so dass $\forall (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $\quad d_h^{i,j} : C^{i,j} \to C^{i+1,j}, \quad d_v^{i,j} : C^{i,j} \to C^{i,j+1}$ in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$

erfüllen: $\quad d_h^{i+1,j} \circ d_h^{i,j} = 0$ und $d_v^{i,j+1} \circ d_v^{i,j} = 0$ und $d_v^{i+1,j} \circ d_h^{i,j} + d_h^{i,j+1} \circ d_v^{i,j} = 0$.

Darstellung als "Gitter":

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & C^{i,j+1} & \xrightarrow[d_h^{i,j+1}]{} & C^{i+1,j+1} & \longrightarrow \cdots \\
& \uparrow d_v^{i,j} & & \uparrow d_v^{i+1,j} & \\
\cdots \longrightarrow & C^{i,j} & \xrightarrow[d_h^{i,j}]{} & C^{i+1,j} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

(1) $\Rightarrow$ alle Zeilen sind Komplexe

(2) $\Rightarrow$ alle Spalten sind Komplexe

(3) $\Rightarrow$ $(d_h^{i,j} (-1)^j)_{j\in\mathbb{Z}}$ und $(d_v^{i,j} \circ (-1)^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sind Abbildungen von Komplexen in benachbarten Spalten (i und $i+1$) bzw. Zeilen (j und $j+1$)

Def. Der Totalkomplex eines Doppelkomplexes $C^{i,j}$ ist $\operatorname{Tot} C^{\cdot\cdot} := TC^{\cdot}$ definiert durch

$$TC^i := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} C^{i-j,j} \quad \text{und} \quad d^i_{TC^\cdot} : TC^i \to TC^{i+1} \quad \text{dabei ist}$$

$d^i_{TC^\cdot}$ ist die Summe (über alle j) der Abbildungen

$$C^{i-j,j} \xrightarrow[d_h^{i-j,j} \oplus d_v^{i-j,j}]{} C^{i-j+1,j} \oplus C^{i-j,j+1} \hookrightarrow TC^{i+1}$$

—

Wir betrachten hier nur Doppelkomplexe für welche (F) gilt.

(F) $\forall n\in\mathbb{Z}: \#\{(i,j) \mid C^{i,j} \neq 0 \text{ und } i+j=n\} < \infty$ ($\Rightarrow$ irrelevant ob $\bigoplus$ oder $\prod$)

Def. Ein Morphismus $D^\cdot \xrightarrow{f^\cdot} D'^\cdot$ in $Ch^\cdot(R)$ heißt Quasi-Isomorphismus $:\Leftrightarrow$

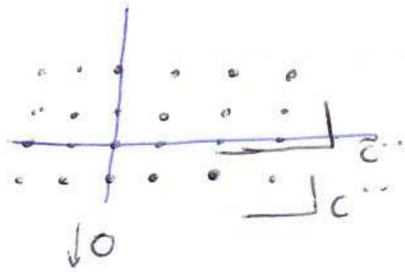
$\forall i\in\mathbb{Z}: \; H^i(f^\cdot) : H^i(D^\cdot) \longrightarrow H^i(D'^\cdot)$ ist Isomorphismus.

Ü: (a) $\operatorname{Tot} : \underbrace{Ch^{\cdot,\cdot}(R)}_{\text{abelsche Kategorie}} \to Ch^\cdot(R)$ ist ein additiver Funktor abelscher Kategorien.

(b) Gilt (F), so ist Tot exakt und es gilt weiter: Sind alle Zeilen oder alle Spalten in $C^{\cdot\cdot}$ exakt, so ist $\operatorname{Tot} C^{\cdot,\cdot}$ exakt.

(c) Gilt in (b) zusätzlich: alle Spalten von $C^{\cdot\cdot}$ exakt und $C^{i,j}=0$ $\forall j \leq -2$ und ist $\tilde{C}^{\cdot,\cdot}$ der Doppelkomplex mit $\tilde{C}^{i,j} := C^{i,j}$ $\forall j\geq 0$ und $\tilde{C}^{i,j} = 0$ $\forall j<0$, Dann ex. ein "natürlicher" Quasi-Isomorphismus

$$\mathrm{Tot}\,\tilde{C} \longleftarrow (C^{j,-1})_{j\in\mathbb{Z}} \quad \text{in } Ch^{\cdot}(R)$$



Beispiel: $M, N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$.

$P^\cdot \to M$ proj. Auflösung $(\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to 0 \to \cdots)$

$N \to I^\cdot$ inj. Auflösung $(\cdots 0 \to 0 \to \_ \to I^0 \to I^1 \to \cdots)$

$C^{\cdot,\cdot} := \mathrm{Hom}(P^\cdot, I^\cdot)$ ist ein Doppelkomplex!

$$\begin{tikzcd}
C^{i,j} = \mathrm{Hom}_R(P^{-i}, I^j) \arrow[r] \arrow[d] & C^{i+1,j} = \mathrm{Hom}_R(P^{-i-1}, I^j) \\
C^{i,j+1} = \mathrm{Hom}_R(P^{-i}, I^{j+1}) &
\end{tikzcd}$$

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ d_{P^\cdot}^{-i-1} \circ (-1)^j \qquad \varphi \longmapsto d_{I^\cdot}^{j} \circ \varphi$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(M, I^\cdot) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P^\cdot, I^\cdot) \\
\arrow[u] & \mathrm{Hom}(P^\cdot, N) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ hat exakte Zeilen

2 Doppelkomplexe $\rightarrow$

$\leftarrow$ hat exakte Spalten.

Ü(c) $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}(M, I^\cdot) \to \mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}(P^\cdot, I^\cdot)) \leftarrow \mathrm{Hom}(P^\cdot, N)$ sind Quasi-Isomorphismen

$\mathrm{Hom}(M, I^\cdot) \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^i(M,N)$

$\mathrm{Hom}(P^\cdot, N) \rightsquigarrow \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N)$

$$\Rightarrow \mathrm{Ext}^i(M,N) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N).$$

Erweiterung: $0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0$ exakt in ${}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ und

$0 \to I'^\cdot \to I^\cdot \to I''^\cdot \to 0$ exakte Seq. von injektiven Auflösungen (horse shoe lemma)

erhalten Morphismen von kurzen exakten Sequenzen von Komplexen!

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, I'^{\bullet}) \to \mathrm{Hom}(M, I^{\bullet}) \to \mathrm{Hom}(M, I''^{\bullet}) \to 0$$

$$\downarrow \text{q-iso}$$

$$\uparrow \text{q-iso}$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q') \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q) \to \mathrm{Hom}(P^{\bullet}, Q'') \to 0$$

$\rightsquigarrow$ Isomorphismus langer ex. Kohomologiesequenzen

<u>Satz</u> 5.17. $\forall i \geq 0 : \forall M, N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $\exists$ in (M,N) funktorielle Iso's

$\mathrm{Ext}^i(M,N) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N)$ und die langen ex. Kohomologiesequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots \to & \mathrm{Ext}^i(M,N') & \to & \mathrm{Ext}^i(M,N) & \to & \mathrm{Ext}^i(M,N'') & \to & \mathrm{Ext}^{i+1}(M,N') & \to \dots \\
& \downarrow\wr & /\!/\!/ & \downarrow\wr & /\!/\!/ & \downarrow\wr & /\!/\!/ & \downarrow\wr & \\
\dots \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N') & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N) & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^i(M,N'') & \to & \overline{\mathrm{Ext}}^{i+1}(M,N') & \to \dots
\end{array}$$

<u>Tor.</u> A kommutativer Ring, $A \to R$ eine A-Algebra <u>und</u> R sei A-flach.

<u>Wissen:</u> Die Funktoren ${}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$: $M \otimes_A -$, $- \otimes_A N$ sind rechtsexakt.

Def. 5.18. $\mathrm{Tor}_i^A(M, \cdot) := L_i(M \otimes_A \cdot)$

$\overline{\mathrm{Tor}}_i^A(\cdot, N) := L_i(\cdot \otimes_A N)$

Satz. 5.19. (i) Erhalten lange ex. Sequenz in beiden Argumenten

(ii) $Q \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ ist A-flach $\iff \forall i \geq 1 : \mathrm{Tor}_i^A(Q, N) = 0 \ \forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$

$\iff \forall N \in {}_R\underline{\mathrm{Mod}} : \mathrm{Tor}_1^A(Q,N) = 0$

(iii) $\mathrm{Tor}_i^A \cong \overline{\mathrm{Tor}}_i^A$. (nat. isomorph)

06. Gruppenkohomologie

· G Gruppe, $\mathbb{Z}[G]$ Gruppenring zu G, d.h.

$$\mathbb{Z}[G] := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}[g] \quad (\text{freier } \mathbb{Z}\text{-Modul mit Basis } G)$$

als additive Gruppe.

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) := \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} a_h b_{h^{-1}g}\right) g$$

$\mathbb{Z}[G]$ ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra, 0 klar, $1 = 1 \cdot e$.

Def. 6.1. Ein G-Modul ist ein (links) $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

schreibe $\mathrm{Hom}_G(\cdot,\cdot)$ für $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\cdot,\cdot)$, ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ für ${}_{\mathbb{Z}[G]}\underline{\mathrm{Mod}}$ (manchmal auch $\underline{\mathrm{Mod}}_G$, $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{Z}[G]}$)

Alternativ: M trägt $\mathbb{Z}$-lineare Links-Operation von G:

$\cdot : G \times M \to M$, diese erfüllt $g(m_1 + m_2) = gm_1 + gm_2$

Def. 6.2. Ein G-Modul M heißt trivial $:\Longleftrightarrow \forall g \in G : \forall m \in M : g \cdot m = m$.

<u>Bsp</u>: Schreibe $\mathbb{Z}$ (auch) für den trivialen G-Modul.

Lemma 6.3. Sei $\varepsilon := \varepsilon_G : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$, $\sum_g a_g g \mapsto \sum_g a_g$ die Augmentationsabbildung.

Dann ist $I_G := \ker \varepsilon_G$ das Augmentationsideal. Es ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis

$B = \{ g - 1 \mid g \in G \setminus \{e\} \}$

Beweis. B $\mathbb{Z}$ l.u.: ✓ <u>B ES von I_G</u>: $x = \sum_g a_g g \in I_G \Longleftrightarrow \sum_g a_g = 0 \Rightarrow x = x - 0 \cdot 1$
$= \sum_g a_g (g-1)$ ☒

Def. 6.4. Sei M ein G-Modul.

(i) $M^G := \{ m \in M \mid \forall g \in G : gm = m \}$ der Untermodul der G-Invarianten von M.

(ii) $M_G := M / I_G M$ der Faktormodul der G-Koinvarianten von M.

Bemerkung: (i) (*) $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \cong M^G$ $(\varphi \mapsto \varphi(1))$

(ii) (**) $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \cong M / I_G M = M_G$.

Funktoren ${}_G\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$

Nachtrag zu $\otimes$: $A \to R$, $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$ $(\otimes_A)$ behandelt

2. Möglichkeit für Tor_i zu $\otimes$: verwende $\otimes_R$

$${}_{R^{op}}\underline{\mathrm{Mod}} \times {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}} \quad \text{(bifunktor)}$$

Bem: ${}_{R^{op}}\underline{\mathrm{Mod}} \cong \underbrace{\underline{\mathrm{Mod}}_R}_{\text{Rechtsmoduln}}$.

Erhalten: $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = L_i(\_ \otimes_R N)(M) \overset{\text{Thm.}}{=} (L_i(M \otimes_R -))(N)$.

Es gelten analoge Aussagen zu 5.19.

Proposition. ${}_{\mathbb{Z}[G]}\underline{\mathrm{Mod}} \xrightarrow{\sim} {}_{\mathbb{Z}[G^{op}]}\underline{\mathrm{Mod}} = {}_{\mathbb{Z}[G]^{op}}\underline{\mathrm{Mod}}$ ist ein Isomorphismus von Kategorien unter folgendem Funktor.

$$(M, \cdot : G\times M \to M) \longmapsto (M, \cdot' : M\times G \to M, (m,g) \mapsto g^{-1}m)$$

Bsp. Sei $N_G := \sum_{g\in G} g$, falls G endlich, $N_G = 0$ sonst. Dann:

(a) $\mathbb{Z}[G]^G = \mathbb{Z}\cdot N_G$ (b) $\mathbb{Z}[G]_G \cong \mathbb{Z}$ via Augmentationsabb.

Gruppen (Ko-) Homologie.

Sei M ein G-Modul.

Def. 6.5.

$$H^i(G,M) := \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \overset{(*)}{=} (R^i(-)^G)(M)$$

$$H_i(G,M) := \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \overset{(**)}{=} (L_i(-)_G)(M)$$

Können kohomologischen Formalismus von Ext und Tor auf $H^i(G,\cdot)$ und $H_i(G,\cdot)$ anwenden ...

Explizite Beschreibung: (nur für Kohomologie)

Für $i\geq 0$ sei $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$ ein G-Modul durch $g\cdot(g_0,\dots,g_i) := (gg_0,\dots,gg_i)$

Lemma 6.6. $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$ ist ein freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul mit Basis $\{(1,g_1,\dots,g_i) \mid (g_1,\dots,g_i)\in G^i\}$

Lemma 6.7. Der Komplex Std_G in $\mathrm{Ch}^\bullet({}_G\underline{\mathrm{Mod}})$

$$\underset{-i}{\mathbb{Z}[G^{i+1}]} \xrightarrow{d^{-i}} \mathbb{Z}[G^i] \longrightarrow \dots \longrightarrow \underset{-1}{\mathbb{Z}[G^2]} \longrightarrow \underset{0}{\mathbb{Z}[G]} \longrightarrow 0 \qquad \text{mit}$$

$d^{-i}((g_0,\dots,g_i)) := \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (g_0,\dots,g_{j-1},g_{j+1},\dots,g_i)$

Zusammen mit $\varepsilon: \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ ist eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ (als trivialer G-Modul!)

Beweis.

$$d^{i+1} \circ d^i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \qquad \text{(}i\text{ in Vorzeichen ...)}$$

Auflösung: Zeige dazu $\mathrm{Std}_G \to \mathbb{Z} \to 0 \to \dots$ ist nullhomotop.

Zeige dazu dass die Abb'en $s^{-i}: \mathbb{Z}[G^{i+1}] \to \mathbb{Z}[G^{i+2}]$, $(g_0,\dots,g_i) \mapsto (1,g_0,\dots,g_i)$ (i "$\in \mathbb{Z}$") eine Nullhomotopie ist.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathbb{Z}[G^{i+1}] \arrow[r, "d^{-i}"] \arrow[dl, "s^{-i}"'] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z}[G^i] \arrow[r] \arrow[dl, "s^{-i+1}"] & \dots \\
\mathbb{Z}[G^{i+2}] \arrow[r, "d^{-i-1}"'] & \mathbb{Z}[G^{i+1}] \arrow[r] & \dots &
\end{tikzcd}$$

$$id_{\mathbb{Z}[G^{i+1}]} = d^{-i-1} \circ s^{-i} + s^{-i+1} \circ d^{-i}.$$

▨

Bar-Auflösung: Es gilt: $\mathrm{Bar}_G = \mathrm{Std}_G$.

Lemma 6.7.b. (ii) (a) Die Elemente $[g_1|\dots|g_i] := (1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2g_3\cdots g_i)$ für $(g_1,\dots,g_i) \in G^i$ bilden eine $\mathbb{Z}[G]$-Basis von $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$.

(b) Es gilt:

$$d^{-i}[g_1|\dots|g_i] = g_1[g_2|\dots|g_i] + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j [g_1|\dots|\hat{g}_j|g_jg_{j+1}|g_{j+2}|\dots g_i]$$
$$+ (-1)^i [g_1|\dots|g_{i-1}].$$

▨

Für $M \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ gilt: $H^i(G,M) = H^i(\underbrace{\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Bar}_G, M)}_{\text{in } Ch^\cdot(\mathbb{Z})})$ $\overset{?}{=}$

Beh.:

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Bar}_G^{-i}, M) \xleftarrow[\sim]{\phi} \mathrm{Abb}(G^i, M) =: C^i(G,M) \quad \text{ist } \mathbb{Z}\text{-linearer Isomorphismus.}$$

$F = \phi(f) \longleftarrow f$

Dabei: $G^0 := \{e\}$.

mit $F(g_0[g_1|\dots|g_i]) := g_0 f(g_1,\dots,g_i)$.

Erhalten: induzierte Differentiale $\bar{d}^i : C^i(G,M) \longrightarrow C^{i+1}(G,M)$

$$f \longmapsto (\phi^{-1} \circ d^{-i} \circ \phi)(f)$$

explizit: $(\bar{d}^i f)(g_0, \dots, g_i) = g_0 f(g_1, \dots, g_i) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(g_0, \dots, \hat{g}_j, g_j g_{j+1}, g_{j+2}, \dots, g_i)$

(ü). $+ (-1)^{i+1} f(g_0, \dots, g_{i-1})$.

Def. $Z^i(G,M) := \ker \bar{d}^i$, $B^i(G,M) := \operatorname{im} \bar{d}^{i-1}$

$\bar{H}^i(G,M) := Z^i(G,M) / B^i(G,M)$

Für $M \to M'$ G-Modul-Homomorphismus erhalten $C^i(G,M) \to C^i(G,M') \rightsquigarrow \bar{H}^i(G,M) \to \bar{H}^i(G,M')$

Proposition 6.8. • Erhalten Kettenkomplexe $(C^i(G,M), \bar{d}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$

• Haben natürliche Isom'en (nach Wahl von Bar_G)

$$H^i(G,M) \xrightarrow{\sim} \bar{H}^i(G,M) \quad + \text{ Funktorialität für } M \to M'.$$

Proposition 6.9. + Kompatibilität für lange exakte Sequenzen

Beweis. obige Überlegungen + 5.17. ∎

Übung 6.10.
• $\bar{H}^0(G,M) = Z^0(G,M) = M^G$ (Randabb.: $m \mapsto gm - m$)

• $Z^1(G,M) = \{ f: G \to M \mid f(gh) = g f(h) + f(g) \ \forall g,h \in G \}$

• Ist M trivial als G-Modul, so gilt $B^1(G,M) = 0$. und folglich

$$\bar{H}^1(G,M) = \mathrm{Hom}_{\underline{Grp}}(G,M) = \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(G^{ab}, M)$$

Gruppenextensionen.

$$1 \to \underset{\text{abelscher Normalteiler}}{\underline{A}} \to E \to G \to 1 \quad : \text{Erweiterung von } G \text{ um } A$$

$\rightsquigarrow$ A ist G-Modul via Konjugation.

$\{\text{Erweiterung von } G \text{ um } A\} /_{\cong} \ \underset{\text{Satz}}{=} \ H^2(G,A)$. triviale Erw.: sind die semidirekten Produkte.

"triviale Erw." $\quad ? \longleftarrow \quad \longleftarrow\!\!| \ 0$

Induzierte Moduln & Shapiro's Lemma.

Def. 6.11. $H \leq G$ Untergruppe, B ein H-Modul.

$$\mathrm{Ind}_H^G(B) := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} B \quad ; \qquad \mathrm{CoInd}_H^G(B) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], B) \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$$

mit $g(\alpha \otimes b) := g\alpha \otimes b$ sowie $(gf)(\alpha) := f(\alpha g)$

heißen induzierte bzw. koinduzierte Darstellungen zu B von H auf G.

Lemma 6.12. Sei $(-)|_H := \mathrm{Res}_G^H : {}_G\underline{\mathrm{Mod}} \longrightarrow {}_H\underline{\mathrm{Mod}}$ der Restriktionsfunktor. Dann gilt:

(a) $\mathrm{Ind}_H^G \dashv \mathrm{Res}_G^H$ (b) $\mathrm{Res}_G^H \dashv \mathrm{CoInd}_H^G$

Beweis.

Adjunktion von $\otimes$ und Hom:

$$\mathrm{Hom}_R({}_RL_S \otimes_S {}_SM, {}_RN) \simeq \mathrm{Hom}_S({}_SM, \mathrm{Hom}_R({}_RL_S, {}_RN))$$

sowie $R \otimes_R M \cong M \cong \mathrm{Hom}_R(R, M)$ für:

(a) ${}_RL_S = {}_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G]_{\mathbb{Z}[H]}$, ${}_{\mathbb{Z}[H]}M = B$, ${}_{\mathbb{Z}[G]}N = A$.

(b) andere Wahlen...

Bemerkung 6.13. $H \leq G$ Untergruppe $\Rightarrow$ Std_G ist proj. Auflösung von $\mathbb{Z}$ als H-Modul. Denn:

$$\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{g \in {}_H\backslash G} g\,\mathbb{Z}[H] \quad \text{ist freier } \mathbb{Z}[H]\text{-Modul.}$$

Satz 6.14. (Shapiro's Lemma) $H \leq G$ Untergruppe

$\forall i \geq 0$ $\exists$ Isom'en $H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G(B)) \cong H_i(H, B)$ und $H^i(G, \mathrm{CoInd}_H^G(B)) \cong H^i(H, B)$

(funktoriell im Argument B).

Beweis.

$$H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G(B)) \simeq H^{-i}(\mathrm{Std}_G \otimes_G \mathrm{Ind}_H^G B) \cong H^{-i}(\mathrm{Std}_G \otimes_G (\mathbb{Z}[G] \otimes_H B))$$

$$\cong H^{-i}(\underbrace{\mathrm{Std}_G|_H}_{\substack{\text{proj. Auflösung} \\ \text{von } \mathbb{Z} \text{ als } H\text{-Modul}}} \otimes_H B) \underset{6.13.}{=} H_i(H, B).$$

H^i analog; verwendet 6.12 und 6.13! $\left(\ldots = H^i(\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Std}_G, \mathrm{CoInd}_H^G B)) \underset{6.12}{=} H^i(\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Std}_G|_H, B)) = \ldots\right)$

Lemma 6.15. Ist $H \leq G$ von endlichem Index, so ist

$$\chi : \mathrm{CoInd}_H^G B \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G B,\ \varphi \longmapsto \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} \otimes \varphi(g)$$

ein wohl-definierter G-Modulisomorphismus.

Beweis.

- prüfe: χ ist wohldefiniert.
- G-Modul homomorphismus: ✓ $(\varphi(\underbrace{gg'}_{=\tilde{g}})$ $\rightsquigarrow g = \tilde{g}(g'^{-1}))$
- Für Iso: Inverse Abbildung:

$$\beta = \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} \otimes b_g \longmapsto f_\beta : \begin{cases} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow B \\ g \longmapsto b_g \end{cases} \text{ und } H\text{-äquivariant.}$$

*aus Repräsentantensystem

$\boxtimes$

Def. 6.16. Ein G-Modul M heißt (co-)induziert $:\Longleftrightarrow \exists X \in \underline{Ab}$ (als $\mathbb{Z}[\{e\}]$-Modul):

$$M \cong \mathrm{CoInd}_{\{e\}}^G X = (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X)$$

25.05.18

Nachtrag:

$$(\underbrace{\mathbb{Z}[G]}_{=:M},\ \bullet : \begin{matrix} M \times G \longrightarrow M \\ (m,g) \longmapsto g^{-1}m \end{matrix}) \cong (\underbrace{\mathbb{Z}[G]}_{=:M},\ \bullet : \begin{matrix} M \times G \longrightarrow M \\ (m,g) \longmapsto m \cdot g \end{matrix}) \quad \text{als rechts-Moduln}$$

$$\sum_g a_g g \longmapsto \sum_g a_g g^{-1}$$

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)$ $\quad (gf)(\alpha) = f(\alpha g)$ $\quad$ (f erfüllt $f(h\alpha) = hf(\alpha)$)

alternativ $\quad (gf)(\alpha) = f(g^{-1}\alpha)$ $\quad$ (f erfüllt $f(\alpha h^{-1}) = hf(\alpha)$)

Bemerkung. $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X \cong \mathrm{Ind}^G X$ als G-Modul

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} X \cong \mathrm{CoInd}^G X$

Def. 6.17. Ein G-Modul A heißt G-(Ko-)azyklisch $:\Longleftrightarrow H_i^i(G, A) = 0 \ \forall i > 0$

Bemerkung. $H^i(\{e\}, M) = H_i(\{e\}, M) = \begin{cases} M, & i = 0 \\ 0, & i > 0 \end{cases}$, denn:

$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(\underset{\text{projektiv}}{\mathbb{Z}}, M) = 0 \ \forall i > 0$, $\quad \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\underset{\text{projektiv}}{\mathbb{Z}}, M) = 0 \ \forall i > 0$

Korollar 6.18. (zu Shapiro + Bem.)

(Ko-) induzierte Moduln sind (Ko-)azyklisch.

Beweis. (z.B. Ko-)

$$H^i(G, \operatorname{CoInd}^G M) \underset{\text{Shap.}}{\cong} H^i(\{e\}, M) \ldots$$

Bemerkung. Mit (Ko)azyklischen Auflösungen kann man (Ko-) Homologie berechnen!

Skizze:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{azykl. Aufl.} \longrightarrow & A & \longrightarrow M \\ & \uparrow & \\ & P^{\bullet\bullet} & \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{quasiiso.}} \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{Aufl.}} & M \\ \uparrow & \nearrow_{\text{Aufl.}} & \\ \operatorname{Tot} P & & \end{array}$$

Doppelkomplex, Spaltenweise Auflösung von A.

$(F = \mathbb{Z} \otimes_G -)$

$FP \longrightarrow FA$ - Spaltenweise exakt, da die A^{-i} azyklisch!

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c} FA \\ \uparrow \scriptstyle\text{quasi-iso} \\ \operatorname{Tot} FP = F(\operatorname{Tot} P) \end{array} \quad \begin{array}{l} FA \text{ berechnet Homologie} \\ \Uparrow \\ \leftarrow \text{Berechnet Homologie} \end{array}$$

Tate Kohomologie

Sei G eine <u>endliche</u> Gruppe.

Sei $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung, mit P^{-i} endl. erz. über $\mathbb{Z}[G]$ ($\Rightarrow$ über $\mathbb{Z}$, da G endlich)

M ein endl. erz., projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul, $N \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$. Dann:

Lemma 6.19. Sei M ein endl. erz., projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

(a) $M^* := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ mit $(g\varphi)(m) := \varphi(g^{-1}m)$ ist endl.-erz., projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

(b) $\psi : M \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M^*, N)$, $m \otimes n \longmapsto (f_{m\otimes n} : \varphi \longmapsto \varphi(m) \cdot n)$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln.

(c) Man hat Isomorphismen $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \xrightarrow[(*)]{} (M \otimes_{\mathbb{Z}} N)^G \xrightarrow[\text{(aus b)}]{\sim} \operatorname{Hom}_G(M^*, N)$ (von ab. Gruppen!)

wobei $(*)$ $m \otimes n \longmapsto \sum_{g \in G} g^{-1}m \otimes gn$ und M in $M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ ist ein rechts-G-Modul durch $m \cdot g := g^{-1}m$

<u>Bem.</u> G-op. in (b) ist gg. durch $(gf)(\varphi) = g f(g^{-1}\varphi)$

Beweis. (0) M^* ist ein G-Modul.

(a) Falls $M = \mathbb{Z}[G]$: $\quad \mathbb{Z}[G]^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) \underset{\substack{\text{verwende} \\ \text{Nachtrag}}}{=} \operatorname{CoInd}^G \mathbb{Z} \cong \operatorname{Ind}^G \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[G]$

M beliebig: $M \oplus M' \cong \mathbb{Z}[G]^r \quad (r \in \mathbb{N}) \overset{1.\text{ Fall}}{\Longrightarrow} M^* \oplus (M')^* \cong \mathbb{Z}[G]^r$

$\Rightarrow M^*$ projektiv.

(b) G-Operation: $g(m \otimes n) = gm \otimes gn, \quad (gf)(\varphi) = g \cdot f(g^{-1}\varphi)$

G-Äquivarianz: $\Psi(g(m\otimes n))(\varphi) = \Psi(gm \otimes gn)(\varphi) = \varphi(gm) \cdot gn$ $\quad \| -(h\varphi)(m) = \varphi(h^{-1}m)$

$$(g \cdot \Psi(m\otimes n))(\varphi) = g(\Psi(m\otimes n))(g^{-1}\varphi) = g\underbrace{(g^{-1}\varphi)(m)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot n$$

$$= \varphi(gm) \cdot (gn)$$

Isomorphismus: genügt als $\mathbb{Z}$-Modul. Beobachtung: M endl.-erz. projektiv $/ \mathbb{Z}[G]$

$\underset{G \text{ endl.}}{\Longrightarrow} M$ proj. endl. erz. $/\mathbb{Z} \underset{\text{OE}}{\Rightarrow} M = \mathbb{Z}$ ... klar.

(c) Zeige nur Isom. links, rechts folgt aus (b) und $(-)^G$.

$M = \mathbb{Z}[G]$: (Ü)

Verwende $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \xrightarrow{\sim} N \longrightarrow (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} N)^G$

$n \longmapsto \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes gn$ ∎

Korollar 6.20. (a) Dualisieren von $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ liefert einen exakten Komplex

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^*} P^{*\bullet}$ (alle $(P^i)^*$ sind proj., endl. erz. nach 6.19)

(b) $H_i(G, M) = H^{-i}(\mathrm{Hom}_G(P^*, M)) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (a) $P^\bullet \to \mathbb{Z}$ ist ein exakter Komplex freier $\mathbb{Z}$-Moduln $\underset{\text{exakt}}{\overset{\text{dualisieren}}{\Longrightarrow}} 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^*} P^{*\bullet}$

(b) $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P^{-i}, \mathbb{Z}), M) \underset{\text{Lemma (c)}}{\cong} P^{-i} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$ (Abbildungen wie erwartet Ü) ∎

Tate:

Definiere $Q \in Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G])$ als

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & P^* \\ & \mathbb{Z} \arrow[ur, "\varepsilon^*"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \overset{-2}{\downarrow} & \overset{-1}{\downarrow} & \overset{0}{\downarrow} & \overset{1}{\downarrow} & \overset{2}{\downarrow} & \overset{3}{\downarrow} & \\ \rightsquigarrow \dots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] & P^0 \arrow[r] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & (P^0)^* \arrow[r] & (P^1)^* \arrow[r] & (P^{-2})^* \arrow[r] & \dots \\ & & 0 \arrow[r] & & \mathbb{Z} \arrow[u, "\varepsilon^*"'] \arrow[r] & 0 & & \end{tikzcd}$$

} exakter Komplex proj. endl. erz. $\mathbb{Z}[G]$-Moduln.

← wegfallen.

Definition 6.21. $\hat{H}^i(G,M) := H^i(\mathrm{Hom}_G(Q,M))$ ist die i-te Tate Kohomologie

Proposition 6.22.

(a) $\hat{H}^i(G,M) = H^i(G,M), \quad i \geq 1$

(b) $\hat{H}^{-i-1}(G,M) = H_i(G,M), \quad i \geq 1$

(c) ${}_N M := \ker(N_G : M \to M,\ m \mapsto \sum_{g \in G} gm)$. Dann ex. 4-Term exakte Sequenz

$$0 \to \hat{H}^{-1}(G,M) \to H_0(G,M) \to H^0(G,M) \to \hat{H}^0(G,M) \to 0$$

$$0 \to {}_N M / I_G M \to M_G = M/I_G M \xrightarrow{N_G \cdot -} M^G \to M^G / N_G M \to 0$$

$$\bar{m} \mapsto \sum_g g\bar{m}$$

Beweis.

(a) ✓, nach Def.

(b) ✓, Korollar 6.20

(c) Sei $C = \mathrm{Hom}_G(Q,M)$ $(\in Ch^\cdot(\mathbb{Z}))$

$$\begin{tikzcd}
C^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] & C^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, equal] & C^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, equal] & C^1 \\
& \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]^*, M) \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]^*, M) \arrow[d, "\cong"] & \\
& M \arrow[d] & M & \\
& M_G \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & M^G \arrow[u, hook] \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & H^{-1}(C^\cdot) \arrow[r] & C^{-1}/B^{-1} \arrow[r, dashed, "\bar{d}^{-1}"] & Z^0 \arrow[r] & H^0(C^\cdot) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{coker}\, d^{-2} = M_G$ = C^{-1}/B^{-1}

Kor!

$\mathrm{im}\, d^{-2} = I_G M$

$\ker d^0 = M^G$ = $Z^0(C^\cdot)$

$$\bar{d}^{-1} : M \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M)^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]^*, M) \xrightarrow{\circledast} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], M)$$

$$m \mapsto 1 \otimes m \mapsto \sum_g g^{-1} \otimes gm \longmapsto (\varphi \mapsto \sum_g \varphi(g^{-1})gm) \mapsto (h \mapsto \sum_g \underbrace{\varphi_h(g^{-1})}_{=1} gm) \quad \Big\downarrow \wr \ M$$

$= N_G m$

$\circledast$: $\mathrm{Hom}_G(\varepsilon^* \circ \varepsilon, M)$

$$\varepsilon^* \circ \varepsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G]^*,\ g \mapsto (\varphi_g : h \mapsto 1)$$

$$\Rightarrow \bar{d}^{-1} = (N_G \cdot -)$$

Korollar 6.23.
(a) Die Tate-Kohomologie assoziiert zu jeder kurzen exakten Sequenz eine lange ex. Kohomologiesequenz + Morphismen zw. Abb.'en kurzer ex. Seq.

(b) $M = \mathrm{CoInd}_H^G N \Rightarrow \hat{H}^i(G,M) \cong \hat{H}^i(H,N)$ (Shapiro) Funktoriell in M

(c) $G = \{e\} \Rightarrow \hat{H}^i(G,M) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

(d) M induzierter G-Modul (oder CoInd) $\Rightarrow \hat{H}^i(G,M) = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Beweis.
(a) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \quad \rightsquigarrow \quad 0 \to \mathrm{Hom}_G(Q, M') \to \mathrm{Hom}_G(Q,M) \to \mathrm{Hom}_G(Q^i, M'') \to 0$ exakt, da Q^i $\mathbb{Z}[G]$-projektiv

etc.

(b) $\mathrm{Hom}_G(Q^i, \mathrm{CoInd}_H^G N) \underset{\text{Adj.}}{\cong} \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_G^H Q, N)$

(rein formal an Def.) $\to$ ein proj. Kplx. für Tate Kohomologie von H

und $\mathrm{Res}_G^H \mathbb{Z}[G]$ ist ein freier endl. erz. $\mathbb{Z}[H]$-Modul

(c) Nur $i = 0, 1$ interessant:

$$\begin{array}{ccc} M_G & \xrightarrow{N_G} & M^G \\ \| & & \| \\ M & \xrightarrow{1\cdot} & M \end{array} \quad G = \{e\} \quad \Big\} \ H^{-1} = H^0 = 0$$

(d) folgt aus (b) ∧ (c). ▨

<u>Dimensionsverschiebung</u> $H \leq G$ Untergruppe.

Lemma 6.24. Sei $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $B \in {}_H\underline{\mathrm{Mod}}$. Dann existieren funktorielle Isomorphismen
(a) $\mathrm{CoInd}_H^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq \mathrm{CoInd}_H^G(B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A)$

(b) $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}_H^G B \simeq \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_G^H A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$.

Beweis. 29.05.18
(a) $\mathrm{CoInd}_H^G(B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A) = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_G^H A) = Y$ $\quad \phi: X \to Y$

Für $f \in Y \rightsquigarrow (gf)(g') = f(g'g)$ $\quad h \cdot (b \otimes a) = hb \otimes ha$

$\mathrm{CoInd}_H^G B \otimes_{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B) \otimes_{\mathbb{Z}} A = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B \otimes_A \mathrm{Res}_G^H A) = X$

$h \circ_1 (b \otimes a) = hb \otimes a$

$h \circ_2 (b \otimes a) = b \otimes ha$

Für $f \in X \rightsquigarrow (g \cdot f)(g') = g \circ_2 f(g'g)$

wobei ϕ def. durch $\phi(f) := (g \mapsto g \cdot_2 f(g))$ (auf $\mathbb{Z}$-Basis von G!)

$\phi(f) \in Y$:

$$\phi(f)(hg) = (hg) \cdot_2 f(hg) \underset{f \in X}{=} h \cdot_2 g \cdot_2 h \cdot_1 f(g) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def.} \\ \cdot_1 \cdot_2}}{=} h \cdot_2 h \cdot_1 g \cdot_2 f(g)$$

$$= h \cdot (g \cdot_2 f(g)) = h \cdot \phi(f)(g).$$

G-äquivariant: $(g\,\phi(f))(g') = \phi(f)(g'g) \underset{\text{Def.}}{=} g' \cdot_2 g \cdot_2 f(g'g)$

$$\phi(g \cdot f)(g') = g' \cdot_2 (g \cdot f)(g') = g' \cdot_2 g \cdot_2 f(g'g)$$

Isomorphismus: $\phi^{-1}(f) := (g \mapsto g^{-1} \cdot_2 f(g))$ für $f \in Y$ . . .

(b) analog...

Korollar 6.25. Bezeichnung wie in 6.24 mit $H = \{e\}$, $A^\circ := \operatorname{Res}^{\{1\}}_G A$.

(a) $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A) \cong \operatorname{CoInd}^G_{\{1\}} A^\circ$

(b) $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \underset{{}_G\mathrm{Mod}}{\cong} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A^\circ$

Aus Übung: $A \xhookrightarrow{\iota} \operatorname{CoInd}^G_{\{1\}} A$, $a \mapsto (f_a : g \mapsto ga)$

$\operatorname{Ind}^G_{\{1\}} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$, $g \otimes a \mapsto ga$

Definiere Kokern bzw. Kern $\rightsquigarrow$ erhalten kurze ex. Sequenzen

$$0 \to A \to \operatorname{CoInd}^G_{\{1\}} A \to A^* \to 0, \quad 0 \to A_* \to \operatorname{Ind}^G_{\{1\}} A \to A \to 0$$

Bemerkung: $A_* \cong I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$, $A^* \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G, A)$ (da $0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$ spaltet (in ${}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$))

Proposition 6.26. Es existieren funktorielle Isomorphismen (in A):

(a) $H^{i+1}(G, A) \cong H^i(G, A^*)$ für $i \geq 1$

(b) $H_{i+1}(G, A) \cong H_i(G, A_*)$ für $i \geq 1$

(c) G endlich $\rightsquigarrow$ $\forall i \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^{i-1}(G, A^*) \cong \hat{H}^i(G, A) \cong \hat{H}^{i+1}(G, A_*)$

Bemerkung: In (a) und (b) erhalten wir noch 4-Term exakte Sequenzen, z.B.

$$0 \to H^0(G,A) \to H^0(G, \mathrm{CoInd}_{\{e\}}^G A) \to H^0(G, A^*) \to H^1(G,A) \to 0.$$

(analog für (b))

Beweis. folgt aus Shapiro's Lemma und $H^i(1,-)=0$, $H_i(1,-)=0$ $\forall i \geq 1$

denn hieraus folgt:

$$H^i(G, \mathrm{CoInd}_1^G A) = H^i(1, A^\circ) = 0, \text{ analog } H_i(G, \mathrm{Ind}_1^G A) = 0 \quad \forall i > 0$$

$$\hat{H}^i(G, \mathrm{CoInd}_1^G A) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

+ lange exakte Kohomologiesequenzen zu (+).

$\square$

Korollar 6.27. Sei G endlich, A ein G-Modul.

(a) Multiplikation mit $\#G$ annulliert $\hat{H}^i(G,A)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$

(b) A endl. erz. $\mathbb{Z}$-Modul $\Rightarrow$ $\hat{H}^i(G,A)$ endlich $\forall i \in \mathbb{Z}$

(c) Ist $A \xrightarrow{\#G \cdot} A$ ein Isomorphismus, so gilt $\hat{H}^i(G,A)=0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$

Beweis.

(a) Nach 6.26.: o.E. $i=0$.

$$\hat{H}^0(G,A) = A^G / N_G A, \text{ aber für } a \in A^G \text{ gilt } \#G \cdot a = N_G a \Rightarrow \#G\, \bar{a} = 0 \text{ in } \hat{H}^0(G,A)$$

(b) A endl. erz., G endlich $\Rightarrow$ A_*, A^* endl. erz. $/\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ o.E.: $i=0$.

Dann ist die Aussage klar nach (a), da A^G endl. erz$/\mathbb{Z}$ und $\#G$-Torsion.

(c) Ist $A \xrightarrow{\#G \cdot} A$ Isomorphismus $\Rightarrow$ $\hat{H}^i(G,A) \xrightarrow{\#G \cdot} \hat{H}^i(G,A)$ Isomorphismus

$$\underset{(a)}{\Longrightarrow} \hat{H}^i(G,A) = 0.$$

$\square$

Funktorialität in Paaren (G,A): (zunächst für Kohomologie)

$\rho: G' \to G$ Grp.homomorphismus, $\lambda: A \to A'$ $\mathbb{Z}$-Modulhom., s.d. ($A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $A' \in {}_{G'}\underline{\mathrm{Mod}}$)

$$\lambda(\rho(g') \cdot a) = g' \cdot \lambda(a) \quad \forall a \in A \ \forall g' \in G'$$

Bemerkung: ⓪ Man kann eine Kategorie (kohomologischer) Gruppe-Modul Paare definieren.

Objekte: (G,A), Morphismen: $(\rho, \lambda): (G,A) \to (G',A')$ wie oben.

① Jeder Morphismus dieser Kategorie ist Verkettung $(G,A) \xrightarrow{(\rho, \mathrm{id}_A)} (G',A) \xrightarrow{(\mathrm{id}_{G'}, \lambda)} (G',A')$

A G'-Modul durch $g'a = \rho(g')a$, schreibe ggf. $\rho^* A$

Bsp. (i) $H \le G$ UG, ρ Inklusion. $\lambda = \mathrm{id}_A : \underset{= \mathrm{Res}^H_G A}{A} \longrightarrow A$ $\quad (A \in {}_G\mathrm{Mod})$

(ii) $H \trianglelefteq G$, $\rho : G \to G/H$ Projektion, $\lambda = \text{Inkl.} : \underbrace{A^H}_{G/H\text{-Modul}} \hookrightarrow A$

Definiere zu Morphismus (ρ, λ) in der obigen Kategorie eine Abbildung

$$H^i(G,A) \longrightarrow H^i(G',A') \quad \forall i \ge 0 \quad \text{wie folgt.}$$

$G' \xrightarrow{\rho} G$ induziert $\mathbb{Z}[(G')^i] \longrightarrow \mathbb{Z}[G^i]$ trägt auch G'-Operation

induziert $\mathrm{Std}_{G'} \longrightarrow \mathrm{Std}_G$ in $\mathrm{Ch}^\cdot(\mathbb{Z}[G'])$

Damit: (1) $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Std}_G, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'}(\mathrm{Std}_G, \rho^*A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'}(\mathrm{Std}_{G'}, \rho^*A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G'}(\mathrm{Std}_{G'}, A')$ in $\mathrm{Ch}^\cdot(\mathbb{Z})$

Proposition 6.28. (1) induziert Abbildungen $H^i(G,A) \longrightarrow H^i(G',A')$

(mit gewissen Funktorialitäten in
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$
etc.)

(Die induzierte Abbildung ist eine natürliche Transformation von δ-Funktoren, siehe Brown, Cohomology of Groups)

Insbesondere sind die $H^i(G,A) \longrightarrow H^i(G',A')$ durch $H^0(G,A) = A^G \longrightarrow A'^{G'} = H^0(G',A')$ $\forall A \to A'$ eindeutig bestimmt. ∎

Bemerkung. Die Abbildungen in 6.28 sind induziert von Abbildungen

(ii) $$C(G^i, A) \longrightarrow C((G')^i, A'), \quad f \longmapsto f'$$

wobei $$f'(g_1', \dots, g_i') := \lambda(f(\rho(g_1'), \dots, \rho(g_i'))) \quad \forall (g_1', \dots, g_i') \in (G')^i.$$

Bemerkung. Zu
$$\begin{tikzcd} (G,A) \arrow[r] \arrow[d] & (G',A') \arrow[dl] \\ (G'',A'') & \end{tikzcd}$$
erhalten wir
$$\begin{tikzcd} H^i(G,A) \arrow[r] \arrow[dr] & H^i(G',A') \arrow[d] \\ & H^i(G'',A'') \end{tikzcd}$$

Def. 6.29. $H \leq G$ Untergruppe (obiges Beispiel (a))

erhalten $\mathrm{Res}: H^i(G,A) \longrightarrow H^i(H,A)$ $\quad (\rho = H \hookrightarrow G,\ \lambda = id_A)$

(Ü auf Koketten: $C^i(G,A) \to C^i(H,A),\ f \mapsto f|_{H^i}$) "Restriktion"

Def. 6.30. $N \trianglelefteq G$ Normalteiler (obiges Bsp. (b))

erhalten
$$\mathrm{Inf}: H^i(G/N, A^N) \longrightarrow H^i(G,A) \quad (\rho = G \twoheadrightarrow G/N,\ \lambda = A^N \hookrightarrow A)$$
"Inflation"

Bemerkung: Res induziert Abb'en auf langen exakten Kohomologiesequenzen.

Ü: $\mathrm{Res} = \Big(H^i(G,A) \xrightarrow[\substack{H^i(G,\iota) \\ \text{aus Übung}}]{} H^i(G, \mathrm{CoInd}_H^G A) \xrightarrow[\substack{\cong \\ \text{Shapiro}}]{} H^i(H,A)\Big)$

Def. 6.31. $H \leq G$ Untergruppe, $g \in G$, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$.

$$\rho_{g,H}: gHg^{-1} \xrightarrow{\sim} H,\ \tilde{h} \mapsto g^{-1}\tilde{h}g, \quad \lambda_g: A \to A,\ a \mapsto ga$$
$$\big(\lambda_g(\rho_{g,H}(\tilde{h})a) = \lambda_g(g^{-1}\tilde{h}ga) = \tilde{h}ga = \tilde{h}\lambda_g(a)\big)$$

induziert Abb'en
$$g^*: H^i(H,A) \longrightarrow H^i(gHg^{-1},A)$$

Proposition 6.32.

(a) $\forall g_1,g_2 \in G: \quad (g_1 \cdot g_2)^* = g_1^* \circ g_2^*$

(b) $\underline{N \trianglelefteq G} \Rightarrow \quad G \to \mathrm{Aut}(H^i(N,A)),\ g \mapsto g^*$ ist Gruppenwirkung mit N im Kern.

Insbesondere gilt $g^* = id$ falls $G = N$

Außerdem erhalten wir einen kohomol. Funktor ${}_G\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_{G/N}\underline{\mathrm{Mod}},\ A \mapsto H^i(N,A)$

(c) Für $K \leq H \leq G$ Untergruppen, komm. Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^i(H,A) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^i(K,A) \\ \downarrow g^* & & \downarrow g^* \\ H^i(gHg^{-1},A) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^i(gKg^{-1},A) \end{array}$$

so dass in (b) gilt:
$\mathrm{Res}: H^i(G,A) \to H^i(N,A)$ hat Bild
$H^i(N,A)^G = H^i(N,A)^{G/N}$.

Ü

Satz. 6.33. (Inflations-Restriktions-Sequenz) (ii) Ist $N \trianglelefteq G$ Normalteiler, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$,

so ist

(a) $0 \to H^1(G/N, A^N) \xrightarrow{\inf} H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(N, A)^{G/N}$ exakt.

(b) gilt zusätzlich: $H^i(N, A) = 0$ für $i = 1, \dots, k-1$, so ist

$$0 \to H^k(G/N, A^N) \xrightarrow{\inf} H^k(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^k(N, A)^{G/N} \text{ exakt.}$$

Def. 6.34. (Koreskiktion)

Gelte $[G:H] < \infty$, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ (Res kann über ι definiert werden!)

Cor: $H^i(H, A) \underset{\text{Shapiro}}{\simeq} H^i(G, \underbrace{\mathrm{CoInd}_H^G A}_{\substack{\mathrel{\rotatebox{90}{$\simeq$}} \\ \mathrm{Ind}_H^G A, \text{ da } [G:H] < \infty}}) \simeq H^i(G, \mathrm{Ind}_H^G A) \xrightarrow[H^i(G, \pi)]{} H^i(G, A)$

heißt "Koreskiktion"

Explizit: $i = 0$:

$$\begin{array}{ccccc} a & \longmapsto & \mathrm{const}_a & \longmapsto & \sum_{g \in H\backslash G} g a. \\ H^0(H, A) & \xrightarrow{\text{Shapiro}} & H^0(G, \mathrm{CoInd}_H^G A) & \longrightarrow & H^0(G, A) \\ \| & & \| & & \\ A^H & \longrightarrow & (\mathrm{CoInd}_H^G A)^G & & \\ a & \longmapsto & (g \mapsto a)_{\text{konstant}} & & \end{array}$$

Nun

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CoInd}_H^G A & \to & \mathrm{Ind}_H^G A & \xrightarrow{\pi} & A \\ f & \longmapsto & \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} \otimes f(g) & \longmapsto & \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} f(g) = \sum_{g \in H\backslash G} g f(g^{-1}) \end{array}$$

01.06.18

Lemma 6.35. Gelte $[G:H] < \infty$.

Dann: $\mathrm{Cor}_H^G \circ \mathrm{Res}_G^H = (\cdot [G:H])$ Multiplikation.

Beweis. Sei $\varphi : \mathrm{CoInd}_H^G A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_H^G A$, $f \mapsto \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} \otimes f(g)$ der Isomorphismus

z.z.: $H^i(\pi) \circ H^i(\varphi) \circ H^i(\iota) = (\cdot [G:H])$

g.z.z.: $\pi \circ \varphi \circ \iota = (\cdot [G:H])$

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{CoInd}_H^G A & \underset{\sim}{\xrightarrow{\varphi}} & \mathrm{Ind}_H^G A & \xrightarrow{\pi} & A \\ a & \longmapsto & (f_a : g \mapsto g a) & \underset{\text{s.o.}}{\longmapsto} & \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} \otimes f_a(g) & \longmapsto & \sum_{g \in H\backslash G} \underbrace{g^{-1} f_a(g)}_{= g^{-1} g a} = \sum_{g \in H\backslash G} a = [G:H] \cdot a. \end{array}$$

$\blacksquare$

Lemma 6.36. G endlich $\Rightarrow$ ι bzw. π induzieren (via Shapiro) (δ-) Funktoren

$$Res: \hat{H}^i(G,A) \longrightarrow \hat{H}^i(H,A), \quad Inf: \hat{H}^i(H,A) \longrightarrow \hat{H}^i(G,A)$$

welche für $i \geq 0$ mit Res und Cor aus der üblichen Gruppenkohomologie übereinstimmt, und für $i=0$ von Res bzw. Cor induziert sind.

(Res : $(i=0)$ $A^G \xrightarrow{\text{inkl}} A^H$, Cor $(i=0)$ $A^H \longrightarrow A^G$, $a \longmapsto \sum_{g \in G/H} ga$

induziert $A^G/N_G A \longrightarrow A^H/N_H A$ $\quad$ $A^H/N_H A \longrightarrow A^G/N_G A$)

und 6.35 gilt für Res, Cor auf $\hat{H}^*$.

Korollar 6.39. G endl. Gruppe, $G_p \leq G$ p-Sylowuntergruppe, $A \in {}_G\underline{Mod}$

(a) $\ker(Res: \hat{H}^i(G,A) \longrightarrow \hat{H}^i(G_p,A))$ enthält keine p-Torsion.

(b) Ist $Res: \hat{H}^i(G,A) \longrightarrow \hat{H}^i(G_p,A)$ die Nullabbildung $\forall$ Primzahlen p und eine Wahl von p-Sylow's $\{G_p \leq G\}_{p \in \mathbb{P}}$, so gilt $\hat{H}^i(G,A) = 0$.

Beweis.
(a) $Cor \circ Res = (\cdot [G:G_p])$ $\Rightarrow$ $[G:G_p] \cdot \alpha = 0$, falls $\alpha \in \hat{H}^i(G,H)$ mit $p \cdot \alpha = 0$ und $Res(\alpha) = 0$.

$\nwarrow$ teilerfremd zu p. $\qquad \Rightarrow \alpha = 0$.

(b) folgt aus (a) und $\#G \cdot \hat{H}^i(G,A) = 0$.

▨

Es gibt natürlich auch homologische Gruppe-Modul-Paare und induz. homologische Funktoren.

Hier: $\rho: G \to G'$ Gruppenhom, $\lambda: A \longrightarrow A'$ $\mathbb{Z}$-linear, $\lambda(ga) = \rho(g)\lambda(a)$, $A' \in {}_{G'}\underline{Mod}$, $A \in {}_G\underline{Mod}$:

Def. 6.37. 1) Jedes (homologische) G_p-Modul-Paar induziert (δ-) Funktor $H_i(G,A) \longrightarrow H_i(G',A')$ $\forall i \geq 0$.

erhalten

2) CoInf: zu $G \longrightarrow G/N$ ($N \trianglelefteq G$ Normalteiler), $\lambda: A \longrightarrow A_N$

$$CoInf: H_i(G,A) \longrightarrow H_i(G/N, A_N)$$

3) Cor: zu $H \underset{\text{inkl.}}{\hookrightarrow} G$, $\lambda = id_A$ $\rightsquigarrow$ $Cor: H_i(H,A) \longrightarrow H_i(G,A)$ (keine Voraus. $[G:H] < \infty$!)

4) zusätzlich erhalten: $Res: H_i(G,A) \longrightarrow H_i(H,A)$ falls $[G:H] < \infty$.

Proposition 6.38. Es gelten zu 6.32, 6.33, 6.35 analoge Aussagen.

Res, Cor aus 6.37 stimmen auf der Tate-Kohomologie (für G endlich!) mit Res, Cor aus 6.36 überein unter der Identifikation $H_i(G,A) \simeq \hat{H}^{-i-1}(G,A)$ für $i \geq 1$.

▨

Cup-Produkte. G, G' Gruppen.

$P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ projektive Auflösung in $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G])$ bzw. $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G'])$.

$\rightsquigarrow$ Doppelkomplex $P \otimes P'$ (s. Übungen) $\rightsquigarrow$ $P \boxtimes P' = \mathrm{Tot}(P \otimes P') \to \mathbb{Z}$
(s. Übungen)

ist projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G \times G'])$

$$\left((P^\bullet \otimes P'^\bullet)^{i,j} = P^i \otimes_{\mathbb{Z}} P'^j, \quad d_h^{i,j} = d_P^i \otimes \mathrm{id}, \quad d_v^{i,j} = (-1)^i \, \mathrm{id} \otimes d_{P'}^j \right)$$

Für $G = G'$: via $G \hookrightarrow G \times G$, $g \mapsto (g, g)$ ist $P \boxtimes P' \to \mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z}[G])$.

erhalten: (für $P' = P$)

$$\begin{tikzcd} P \boxtimes P \arrow[dr, "\varepsilon \boxtimes \varepsilon"] \arrow[d, dashed, shift left, "m"] & \\ P^\bullet \arrow[u, dashed, shift left, "\Delta"] \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Diagonalapproximation

Satz 5.9
$\exists$ Δ und m eindeutig bis auf Homotopie.

deswegen gilt auch:
$m \circ \Delta \simeq \mathrm{id}_{P^\bullet}$, $\Delta \circ m \simeq \mathrm{id}_{P^\bullet \boxtimes P^\bullet}$

Def. 6.40. Die Alexander-Whitney Diagonalapprox. für $Std_G^\bullet$ ist die Abbildung

$$\Delta_{Std} : Std_G^\bullet \to Std_G^\bullet \text{ gegeben durch}$$

$$\Delta_{Std}\underbrace{(g_0, \dots, g_n)}_{\in \mathbb{Z}[G^{n+1}] = Std_G^n} = \sum_{j=0}^{n} (g_0, \dots, g_j) \otimes (g_j, \dots, g_n)$$

Lemma 6.41. (Ü)

(a) Δ_{Std} ist Abbildung von Komplexen

(b) $\Delta_{Std}[g_1 | \dots | g_n] = \sum_{j=0}^{n} [g_1 | \dots | g_j] \otimes g_1 \cdots g_j [g_{j+1} | \dots | g_n]$ ($j = 0$: leeres Symbol) ∎

Seien G, G', $P^\bullet, P'^\bullet$ wie oben, $A \in {}_G\underline{Mod}$, $A' \in {}_{G'}\underline{Mod}$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_G(P^\bullet, A)$, $\mathrm{Hom}_{G'}(P'^\bullet, A')$, $\mathrm{Hom}_{G \times G'}(P^\bullet \boxtimes P'^\bullet, A \otimes_{\mathbb{Z}} A')$ sind in $Ch^\bullet(\mathbb{Z})$

(wollen ab nun alle P^i, P'^j endl. erz. sind)

$\rightsquigarrow$ erhalten Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_G(P^\bullet, A) \boxtimes \mathrm{Hom}_{G'}(P'^\bullet, A') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G\times G'}(P^\bullet \boxtimes P'^\bullet, A \otimes_{\mathbb{Z}} A')$$

(prüfe im Fall alle P^i, P'^j frei + endl. erz. über $\mathbb{Z}[G] / \mathbb{Z}[G']$)

$$(u : P^i \to A,\ u' : P'^j \to A') \longmapsto (-1)^{ij}\, u \otimes u' : P^i \otimes P'^j \to A \otimes A'$$

Falls $u \in Z^i(\mathrm{Hom}_G^\bullet(P^\bullet, A))$, $u' \in Z^j(\mathrm{Hom}_{G'}^\bullet(P'^\bullet, A'))$

$$\Rightarrow u \otimes u' \in Z^{i+j}(\mathrm{Hom}_{G\times G'}^\bullet(P^\bullet \otimes P'^\bullet, A \otimes A')), \text{ denn}$$

$$\partial(u \otimes u') = \partial u \otimes u' \pm u \otimes \partial u' = 0 \pm 0 = 0.$$

$\rightsquigarrow$ erhalten

$$\begin{array}{ccc} H^i(G,A) \otimes H^j(G',A') & \longrightarrow & H^{i+j}(G\times G', A\otimes A') \\ [u] \otimes [u'] & \longmapsto & \\ & & \downarrow \\ & & H^{i+j}(G, A \otimes A') \quad [u] \cup [u'] \end{array}$$

Falls $G = G'$: $P = P'$ haben $\Delta : P \to P \otimes P$

In Termen von Koketten: wir erhalten mit Alexander-Whitney (A-W) Diag. approx.

$$C^i(G,A) \times C^j(G,A') \longrightarrow C^{i+j}(G, A\otimes A')$$

$$(u, u') \longmapsto u \cup u'$$

$$(u \cup u')(g_1, \ldots, g_{i+j}) = (-1)^{ij}\, u(g_1, \ldots, g_i) \otimes g_1 \cdots g_i\, u'(g_{i+1}, \ldots, g_{i+j})$$

induziert das Cup-Produkt $H^i(G,A) \otimes H^j(G,A') \to H^{i+j}(G, A\otimes A')$ (ii)

Facts 6.42.

(a) $H^0(G,A) \otimes H^0(G,A') \longrightarrow H^0(G, A\otimes A')$

$A^G \otimes A'^G \longrightarrow (A \otimes A')^G$

ist induziert von der Identität.

(b) $f : A \to B$, $f' : A' \to B'$ Morphismen in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, $\alpha \in H^i(G,A)$, $\alpha' \in H^j(G,A')$

$$\Rightarrow H^{i+j}(f \otimes f')(\alpha \cup \alpha') = H^i(f)(\alpha) \cup H^j(f')(\alpha')$$

(c) Ist $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ exakt in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, sodass $0 \to A' \otimes B \to A \otimes B \to A'' \otimes B \to 0$ ebenfalls exakt ist, so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^i(G,A'') & \xrightarrow{\delta} & H^i(G,A') \\ {\scriptstyle -\cup v}\downarrow & \wr\wr & \downarrow{\scriptstyle -\cup v} \\ H^{i+j}(G, A''\otimes B) & \xrightarrow{\delta} & H^{i+j}(G, A'\otimes B) \end{array}$$

für $v \in H^j(G,B)$.

(Dimensionsverschiebung anwendbar auf $\cup$)

"Grund":

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^\bullet(G,A') \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & C^\bullet(G,A) \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & C^\bullet(G,A'') \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C^{\bullet+j}(G,A'\otimes B) \arrow[r] & C^{\bullet+j}(G,A\otimes B) \arrow[r] & C^{\bullet+j}(G,A''\otimes B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ in $Ch^\bullet(\mathbb{Z})$

(d) Analogon zu (c) in der zweiten Variablen.

(e) $1 \in H^0(G,\mathbb{Z})$ erfüllt $1 \cup - = id$, $- \cup 1 = id$. (A-W-Formel)

(f) $\cup$ ist assoziativ. ✓

(g) $\cup$ ist graduiert kommutativ, d.h. $u \in Z^i(G,A)$, $u' \in Z^j(G,A')$; $sw: A\otimes A' \to A'\otimes A$, $a\otimes a' \mapsto a'\otimes a$

Dann: $H^{i+j}(sw)([u] \cup [u']) = (-1)^{ij}([u'] \cup [u])$

"Grund": im Grad (i,j)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A) \otimes \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_G(P^\bullet\otimes P^\bullet, A\otimes A') \arrow[d, "\mathrm{Hom}_G(sw,\tau)"] \\ \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A') \otimes \mathrm{Hom}_G(P^\bullet,A) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_G(P^\bullet\otimes P^\bullet, A'\otimes A) \end{tikzcd}$$

$u\otimes u' \mapsto$ "$u\cup u'$"

$(-1)^{ij}\, u'\otimes u \mapsto$ "$(-1)^{ij}\, u \cup u'$"

$\tau: (P\otimes P)^{ij} \to (P\otimes P)^{ij}$, $x\otimes y \mapsto (-1)^{ij}\, y\otimes x$

kommutiert nach $\cup$ bilden

$$\begin{tikzcd} u\cup u' \arrow[d, mapsto] \arrow[r, mapsto] & sw(u\cup u') \\ (-1)^{ij} u'\cup u & \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{tikzcd} P\boxtimes P \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr] & & P\boxtimes P \arrow[dl] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}\right\}$$ τ induziert die Identität nach Kohomologie bilden!

(h) Für $H \leq G$: Res^H_G (auf Kohomologie) vertauscht mit $\cup$-Produkt: $Res(u\cup v) = Res(v) \cup Res(u)$ (A-W-Formel)

(i) Für $N \trianglelefteq G$ $Inf^G_{G/N}$ vertauscht mit $\cup$.

05.06.18

(j) $H \leq G$ Untergruppe, $[G:H] < \infty$.

$$\begin{tikzcd} H^i(G,A) \otimes H^j(G,A') \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, shift right, "Res"'] & H^{i+j}(G, A\otimes_{\mathbb{Z}} A') \arrow[d, shift right, "Res"'] \\ H^i(H,A) \otimes H^j(H,A') \arrow[r, "\cup"] \arrow[u, shift right, "Cor"'] & H^{i+j}(H, A\otimes_{\mathbb{Z}} A') \arrow[u, shift right, "Cor"'] \end{tikzcd}$$: $Cor(Res(u) \cup v) = u \cup Cor(v)$

Beweis (?) $u \in \mathrm{Hom}(P^{-i}, A)$, $v \in \mathrm{Hom}(P^{-j}, A)$

$$\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(u) \cup v) = \mathrm{Cor}(u|_{P|_H} \cup v) = \mathrm{Cor}((-1)^{ij}\, u \otimes v)$$

$$= (\underset{P^i \otimes P^j}{\overset{\in}{\alpha}} \mapsto (-1)^{ij} \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1}(u \otimes v)(g\alpha)) = \sum_{g \in {}_H\backslash G} (-1)^{ij}\, u(\alpha) \otimes g^{-1} v(g\alpha)$$

$$= (\alpha \mapsto (-1)^{ij}\, u(\alpha) \otimes \mathrm{Cor}(v)(\alpha))$$

$$= u \cup \mathrm{Cor}(v).$$

($\underline{\mathrm{Cor}}$: $\mathrm{Hom}_H(P_H^\bullet, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, \mathrm{CoInd}_H^G A) \xrightarrow{\pi \circ \varphi} \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, A)$ $\qquad \varphi: \mathrm{CoInd}_H^G A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_H^G A$

$w \longmapsto ((\alpha, g) \mapsto w(g\alpha))$, $\qquad (\alpha \mapsto \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} w(g\alpha))$

$$\Big\downarrow \varphi$$

$(\alpha \mapsto \sum_{g \in {}_H\backslash G} g^{-1} \otimes w(g\alpha))$ $\xrightarrow{\pi}$)

∎

Für eine kurze exakte Sequenz $\varepsilon: 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ sei

$$\partial_\varepsilon^i : H^i(G, A'') \longrightarrow H^{i+1}(G, A') \quad \text{die } i\text{-te Randabbildung.}$$

Theorem 6.43. Die Familie aller Cup-Produkte $\cup_{i,j} : H^i(G,A) \otimes H^j(G,B) \to H^{i+j}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$ für alle $A, B \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ ist eindeutig charakterisiert durch: $(i, j \in \mathbb{N}_0\,!)$

(i) Die $\cup_{i,j}$ sind funktoriell in $A \to A'$, $B \to B'$

(ii) $\cup_{0,0} : A^G \otimes_{\mathbb{Z}} B^G \to (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^G$ ist induziert von $\mathrm{id}_{A \otimes_{\mathbb{Z}} B}$

(iii) $\forall$ ex. Sequenzen $\varepsilon: 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in ${}_G\underline{\mathrm{Mod}}$, so dass $\varepsilon \otimes_{\mathbb{Z}} B$ exakt ist, gilt $\forall \alpha'' \in H^i(G, A''), \beta \in H^j(G,B)$: $\delta_{\varepsilon \otimes B}^{i+j}(\alpha'' \cup_{i,j} \beta) = \delta_\varepsilon^i(\alpha'') \cup_{i+1,j} \beta$

(iv) Es gilt das Analogon zu (iii) im 2. Argument.

Beweis. (Sharifi 7.8.4) Dimensionsverschiebung.

∎

Dimensionsverschiebung gilt für G endlich auch für die Tate-Kohomologie

$$\hat{H}^i(G,A) = \hat{H}^{i-1}(G, A^*) = \hat{H}^{i+1}(G, A_*)$$

$\Rightarrow$ 6.44.

Theorem 6.44. $\exists!$ Familie von Cup-Produkten $\cup_{i,j}: \hat{H}^i(G,A) \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{H}^j(G,B) \to \hat{H}^{i+j}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$ $\forall i,j \in \mathbb{Z}$, so dass (i)–(iv) aus Thm. 6.43 auch für $\hat{H}^\bullet$ gelten.

(mit (ii) entsprechend angepasst...)

∎

Kohomologische Trivialität: Sei G endl. Gruppe.

Def. 6.45. $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ heißt kohomologisch trivial $:\Leftrightarrow$ $\forall H \leq G$ UG $\forall i \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^i(H, A) = 0$.

Bsp. · A freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul
· A proj. $\mathbb{Z}[G]$-Modul
· A induzierter Modul $\Big(\underbrace{\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_G^H \mathrm{Ind}_0^G X)}_{=Y} \Big) = \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{Z} \otimes \mathrm{Ind}_e^G X = \mathrm{Ind}_e^G(\mathrm{Res}_H^e \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{Z} \otimes X))$
nach 6.24(a), $B = \mathbb{Z}$.

$$\hat{H}^i(H, \mathrm{Ind}_0^G X) \overset{\text{sh.}}{=} \hat{H}^i(G, Y) = \ldots = 0.$$

Lemma 6.46. Sei G eine p-Gruppe, $A \in {}_G\underline{\mathrm{Mod}}$ p-Torsion. $(\Leftrightarrow A \in {}_{\mathbb{F}_p[G]}\underline{\mathrm{Mod}})$
Dann sind äquivalent:
(i) A kohomologisch trivial (ii) A ist freier $\mathbb{F}_p[G]$-Modul (iii) $\exists i \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^i(G, A) = 0$.

Vorüberlegung: (i) $0 \neq C \in {}_{\mathbb{F}_p[G]}\underline{\mathrm{Mod}} \Rightarrow C^G \neq 0 \neq C_G$
G p-Gruppe! (ii) $C \to C'$ in ${}_{\mathbb{F}_p[G]}\underline{\mathrm{Mod}}$ und $\bar{\varphi}: C_G \to C'_G$ surj. $\Rightarrow \varphi$ surj.

Beweis von 6.46.
(i) $\Rightarrow$ (iii): klar.
(ii) $\Rightarrow$ (i): klar
(iii) $\Rightarrow$ (ii): z.z. A induziert (von einem $\mathbb{F}_p$-VR V!)

$$\Big(A = \mathrm{Ind}_0^G V = \bigoplus_{\substack{\text{Basis} \\ b \in B}} \mathrm{Ind}_e^G \mathbb{F}_p = \bigoplus_{b \in B} \mathbb{F}_p[G] \Big)$$

OE $i = -2$ in (c) (A induziert, p-Torsion $\Leftrightarrow A_*$ induziert, p-Torsion $\Leftrightarrow A^*$ induziert, p-Torsion)

d.h. $H_1(G, A) = 0$. Sei $X = A_G$ $(A = \mathrm{Ind}_0^G \tilde{X} \Rightarrow \tilde{X} \cong A_G)$

$\mathrm{Ind}_e^G X$ ist freier $\mathbb{F}_p[G]$-Modul, da X $\mathbb{F}_p$-VR.

Betrachte:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}_0^G X \arrow[r, dashed, "\exists \varphi"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"'] & A \arrow[d, "\mathrm{can.}"] \\ X \arrow[r, "\bar{\varphi}", "="'] & A_G \end{tikzcd}$$

$\dashrightarrow \exists$ da $\mathrm{Ind}_e^G X$ projektiv

Es gilt: $\bar{\varphi} = \varphi \otimes_{\mathbb{F}_p[G]} I_G$

$\underset{\text{Vorüberlegung}}{\Longrightarrow}$ φ surjektiv.

Nun: (l.e. Sequenz!) $\underbrace{H_1(G, A)}_{=0,\ \text{n.V.}} \to (\ker \varphi)_G \to X \xrightarrow[\mathrm{id}]{\bar{\varphi}} A_G \to 0 \Rightarrow (\ker\varphi)_G = 0 \overset{\text{Vorüberl.}}{\Longrightarrow} \ker \varphi = 0.$

Lemma 6.47. G p-Gruppe, $A \in {}_G\underline{\text{Mod}}$, $\ker(A \xrightarrow{\cdot p} A) = 0$.
Dann sind äquivalent:

(i) A kohomologisch trivial

(ii) $A/_{pA}$ freier $\mathbb{F}_p[G]$-Modul

(iii) $\exists i \in \mathbb{Z}$: $\hat{H}^i(G,A) = 0 = \hat{H}^{i+1}(G,A)$

Beweis.
$\underline{(i) \Rightarrow (iii), (iii) \Rightarrow (ii)}$: Betrachte $0 \to A \xrightarrow{\cdot p} A \to A/_p \to 0$ (exakt n. Voraussetzung)

l. ex. Kohomologiesequenz $\to$ $0 = \hat{H}^i(G,A) \to \hat{H}^i(G, A/_p) \to \hat{H}^{i+1}(G,A) = 0 \to \dots$

$\Downarrow$

$\hat{H}^i(G, A/_{pA}) = 0$, nun nutze 6.46! $\Rightarrow$ (ii).

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$: 6.46 $\to$ $\hat{H}^i(H, A/_{pA}) = 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, $H \leq G$ UG.

$\xrightarrow{\text{l. ex. Sequenz}}$ $\hat{H}^i(H,A) \xrightarrow{\cdot p} \hat{H}^i(H,A)$ ist Isomorphismus $\forall i \in \mathbb{Z}$

wissen aber: $\underbrace{\# H}_{p\text{-Potenz}} \cdot \hat{H}^i(H,A) = 0$ $\Rightarrow$ $\hat{H}^i(H,A) = 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ $\forall H \leq G$.

$\blacksquare$

Lemma 6.48. Für G endlich, $A \in {}_G\underline{\text{Mod}}$ sind äquivalent:

(i) A kohomologisch trivial.

(ii) $\forall$ p-Sylowug. $G_p \leq G$: $\text{Res}^{G_p}_G A$ ist kohomologisch trivial

((i) $\Rightarrow$ (ii): klar, (ii) $\Rightarrow$ (i): verwende 6.39; Sharifi 7.11.8)

Lemma 6.49. Sei G endlich, $A \in {}_G\underline{\text{Mod}}$ frei als $\mathbb{Z}$-Modul.
Dann: A kohomologisch trivial $\Leftrightarrow$ A ist projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

Beweisidee: · Zeige $\text{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(A,B) = 0$ $\forall B \in {}_G\underline{\text{Mod}}$

$\underline{\text{dazu}}$: $\text{Hom}_G(A,B) = \text{Hom}_G(\mathbb{Z}, \underbrace{\text{Hom}_G(A,B)}_{G\text{-Modul durch } (gf)(a) = gf(g^{-1}a)})$

A freier $\mathbb{Z}$-Modul $\Rightarrow$ $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,-)$ exakt! und ist I injektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul, so ist $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,I)$ injektiver $\mathbb{Z}[G]$-Modul (ist also $B \to I^\bullet$ inj. Auflösung, so auch $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B) \to \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,I^\bullet)$

$\Rightarrow$ $\text{Hom}_G(A, I^\bullet) \simeq \text{Hom}_G(\mathbb{Z}, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I^\bullet))$ liefert $\text{Ext}^i_G(A,B) = H^i(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B))$

Sharifi 7.11.9: A wie angenommen $\to$ $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)$ koh. trivial.

$\blacksquare$