Def. $T(\xi,\eta) := \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - \underbrace{[\xi,\eta]}_{\text{"Lie-Klammer"}}$

ist ein "Tensor",
d.h. $C^\infty(M)$-bilinear.

∇ heißt symmetrisch (od. torsionsfrei), wenn $T(\xi,\eta) = 0 \; \forall \xi,\eta$.

Ist ∇ symmetrisch, dann $|q q'| = O(\varepsilon^3)$

$u_1 :=$ Paralleltransport von u entlang $\lambda, \bar{\mu}$
$u_2 :=$ Paralleltransport von u entlang $\mu, \bar{\lambda}$

$$\|u_1 - u_2\| \sim \varepsilon^2 \cdot R(v,w)u$$

$\sim$ "asymptotisch gleich"

$R(v,w)u$ heißt Riemannscher Krümmungstensor.

Die Lie-Klammer.

Sei M^n eine glatte Mfgkt. $X, Y \in \mathfrak{X}(M) := \{V : M \to TM \mid V \text{ glattes VF}\}$

Lemma. $\exists!\; Z \in \mathfrak{X}(M) : \forall f \in C^\infty(M) : \quad Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

Beweis.
Eindeutigkeit: $p \in M$, lokale Koordinaten $\{x_i\}$ bei p.

$\rightsquigarrow \quad X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ für $a_i, b_j \in C^\infty(U)$, $U \in \mathcal{U}(p)$ offen.

$$\Rightarrow X(Y(f)) = \sum_i a_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Analog: $$Y(X(f)) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\Rightarrow XY(f) - YX(f) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{i,j}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

• Existenz: Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von M durch Karten.
Definiere Z_α auf U_α durch (*). Wegen der Eindeutigkeit gilt
$Z_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = Z_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Folglich definieren die VF Z_α ein
globales $Z \in \mathfrak{X}(M)$ durch $Z|_{U_\alpha} := Z_\alpha$.

$\boxtimes$

Def. $[X,Y] := Z$ heißt **Lie-Klammer** von X,Y.

Eigenschaften:
- $[X,Y] = -[Y,X]$
- $a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow [aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1,Y] + b[X_2,Y]$

Iteration:
$$[[X,Y],Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

$$\rightsquigarrow \quad [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0 \quad \text{"Jacobi-Identität"}$$

- $f,g \in C^\infty(M)$.
$$\begin{aligned}[fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fX(g)Y + fgXY - gY(f)X - gfYX \\ &= fg[X,Y] - fX(g)Y - gY(f)\cdot X\end{aligned}$$

Da eine Mannigfaltigkeit lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, lassen sich die bekannten Sätze zu Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Anfangsproblemen von gewöhnlichen DGL von $\mathbb{R}^n$ auf Mfgkt. verallgemeinern.

Satz. Sei $M \in \underline{\text{Mfd}}$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$.
Dann existiert ein $U \in \mathcal{U}(p)$ offen, $\exists \delta > 0$, $\exists\, \phi : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow M$, sodass gilt:
$t \mapsto \phi(t,p)$ ist die eindeutige Lösung von
$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,p) = X(\phi(t,p)) \quad \forall p \in U$$
$$\text{mit } \phi(0,t) = p$$

Schreibweise: $\phi_t(p) := \phi(t,p)$

Die glatte Abbildung $\phi_t : U \to M$ heißt **Fluss** von X.

$|s|, |t|, |s+t| < \delta$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1(t) := \phi(t, \phi(s,p)) \implies \begin{cases} \gamma_1' = X(\gamma_1) \\ \gamma_1(0) = \phi(s,p) \end{cases} \\[2ex] \gamma_2(t) := \phi(t+s, p) \implies \begin{cases} \gamma_2' = X(\gamma_2) \\ \gamma_2(0) = \phi(s,p) \end{cases} \end{array}\right\} \underset{\text{Eind.}}{\implies} \gamma_1 = \gamma_2$$

d.h. $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$

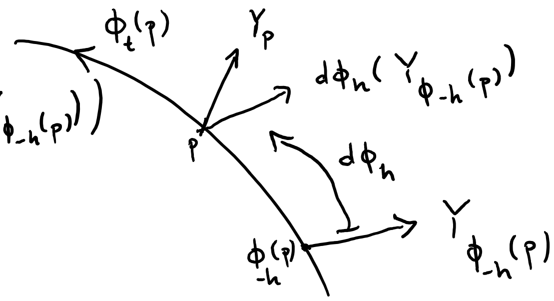
$\implies \mathrm{id} = \phi_0 = \phi_{t-t} = \phi_t \circ \phi_{-t} \implies$ Jedes ϕ_t ist Diffeomorphismus (auf $\mathrm{im}\,\phi_t$)

Lie-Ableitung.

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$.

Sei ϕ_t der Fluss von X: $\begin{cases} \partial_t \phi(t,p) = X(\phi_t(p)) \\ \phi_0(p) = p \end{cases}$

$$(L_X Y)(p) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(Y_p - d\phi_h(Y_{\phi_{-h}(p)}) \right) \in T_pM$$



Proposition. $L_X Y = [X, Y]$

Für den Beweis dieser Prop. benötigen wir ein Lemma:

Idee: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ glatt, $f(0) = 0$.

$$f(t) = t f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + \dots = t\underbrace{\left(f'(0) + \frac{t}{2} f''(0) + \dots \right)}_{=: g}$$

$\implies f(t) = t \cdot g(t)$

$f'(0) = g(0)$

Lemma. Sei $M \in \underline{\text{Mfd}}$, $f \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon) \times M)$, $f(0,\cdot) = id_M$.

Dann: $\exists\, g \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon) \times M)$: $f(t,\cdot) = t \cdot g(t,\cdot)$, $\frac{\partial f}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$.

Beweis. $g(t,p) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(st,p)\, ds$

$\blacksquare$

Beweis der Proposition. Sei $f \in C^\infty(M)$.

Hilfsfunktion $h(t,p) := f(\phi_t(p)) - f(p)$

$\Rightarrow h(0,\cdot) \equiv 0$.

Lemma $\Rightarrow \exists\, g$: $h(t,p) = t \cdot g(t,p)$ und $\frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$.

$$\Rightarrow \quad \underline{f \circ \phi_t = f + t \cdot g_t}.$$