Analyse 1
Calculs de limites, de sommes et d'intégrales

Exercice 1 (Limites).
Nous allons étudier la limite des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 + 4x + 2 + \frac{3}{x} \text{ quand } x \to +\infty \text{ puis } x \to -\infty, \quad g(x) = \frac{1}{x+5} + x^2 \text{ quand } x \to 0,$$

$$h(x) = x^5 + \frac{1}{x} \text{ quand } x \to 0, \quad k(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+19} - 3} \text{ quand } x \to 8.$$

- Rechercher dans l'aide la syntaxe de la fonction `limit`.
- Définir les fonctions f, g, h et k en utilisant la syntaxe : `f(x) = ...`.
- Calculer les limites demandées. .

Exercice 2.
Calculer la limite de q^n quand $n \to \infty$. Quel problème rencontrez-vous ?
Sage vous propose lui-même la solution, dans les commentaires qu'il renvoie.
Finir le calcul de la limite pour les cas où q est positif.

Exercice 3 (Sommes).

- Que vaut $2 + 3 + 4 + \cdots + 10$? Comment peut-on calculer cette valeur ?
- A l'aide de la fonction `sum` et en définissant les variables nécessaires auparavant, calculer :

$$\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

  Vérifier le résultat du premier calcul par un petit programme.
- Calculer les sommes des séries de Riemann suivantes :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}.$$

- Calculer également la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique : $\sum_{k=0}^{n} aq^k$.

Exercice 4 (Dérivation).
La commande pour dériver une fonction est la commande `derivative`.
Après avoir lu l'aide, calculer la dérivée des fonctions : $x \mapsto \sin x^2$ et $x \mapsto \ln(3x+1)$.

Exercice 5 (Dérivation).
Soit g la fonction définie par $g(x) = x\sin(x + x^2 + 0.2)$. Tracer la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $[-5, 3]$.
À l'aide de la fonction `sign` et d'un graphique, préciser les domaines où la fonction g est croissante et les domaines où la fonction g est décroissante (toujours sur l'intervalle $[-5, 3]$).

Exercice 6 (Dérivée et tangente).

- Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $x \mapsto \cos(x) + 2$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

On s'intéresse aux *tangentes* de cette courbe. La tangente au point z notée t_z est une droite d'équation $y = ax + b$. Son coefficient directeur (la pente de la tangente) est $a = f'(z)$. De plus, au point z, la tangente et la courbe se touchent, la tangente passe par le point $(z, f(z))$. Ainsi, on a : $f(z) = az + b = f'(z)z + b$, soit $b = f(z) - f'(z)z$, d'où l'équation de la tangente t_z : $y = f'(z)(x - z) + f(z)$.

- Définir la fonction h donnée par $h(x) = f'(x)$.
- Sur le graphique précédent, tracer la tangente au point 0 et la tangente au point $3\pi/4$.

Exercice 7 (Intégration).

Pour l'intégration, on utilisera la commande `integral`.
Après avoir lu l'aide, calculer :

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x)\,dx.$$

Exercice 8 (Intégration).

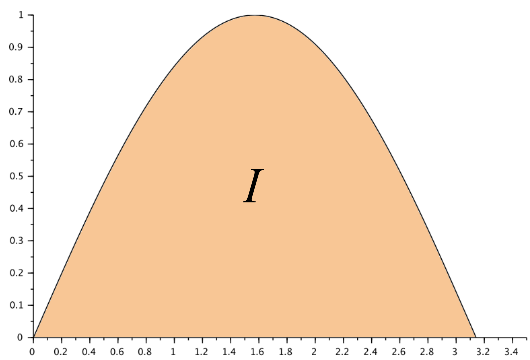
Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\cos u}{u^2 + x^2}\,du$.

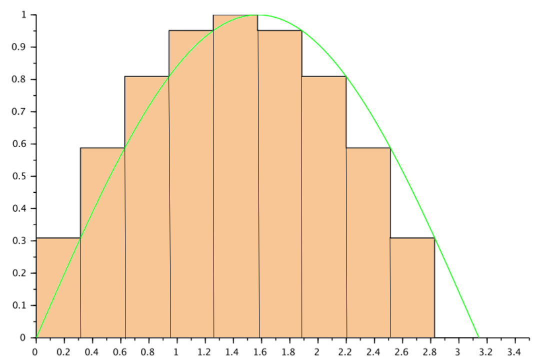
Exercice 9 (Intégration *).

On cherche à calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$.

- Quelle est la valeur exacte de cette intégrale ?
  Cette valeur est exactement l'aire située entre la courbe $x \mapsto \sin(x)$ et l'axe des abscisses.

On souhaite comparer ce résultat avec celui obtenu par une méthode approchée qui consiste à faire la somme d'aires de rectangles :





Ici, on a divisé l'intervalle $[0, \pi]$ en 10 segments de même longueur. La hauteur du rectangle correspond à la valeur de la fonction sinus au bord droit de chaque segment. (Cette méthode d'approximation s'appelle la *méthode des rectangles à droite*.)

- Quelle est l'aire de chaque rectangle ?
- Quelle est la valeur approchée de I obtenue en faisant la somme de ces 10 aires ?
- Et si on divise en 100 segments ?