Algèbre linéaire 1

Vecteurs

Un **vecteur** de $\mathbb{R}^n$ est défini en donnant la liste de ses éléments.

Ainsi, le vecteur de $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est donné par la commande `vector([1,2,3])`.

Exercice 1.

- Définir les vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.
- Reprendre les deux derniers vecteurs et les définir sans entrer les éléments un par un.
- Soit $z \in \mathbb{R}$, on définit le vecteur v par $v = \begin{pmatrix} z \\ z+1 \\ 2z \\ z^2 \end{pmatrix}$. Créer ce vecteur v. Que vaut v pour $z = 2$?

Les composantes d'un vecteur sont récupérées en précisant leur indice (à partir de 0) entre crochets.

Exercice 2.

- Créer un vecteur à 5 éléments et afficher le premier élément, le quatrième élément.
- Comment faire afficher le dernier élément d'un vecteur quelconque ?

Pour un vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on peut calculer plusieurs **normes** :

- La norme la plus courante, la norme euclidienne ou norme 2, vaut : $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.
- La norme 1 est donnée par $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.
- La norme ∞ est donnée par $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.

Si le vecteur `x` a été défini préalablement, ces différentes normes sont calculées par les commandes `x.norm(2)`, `x.norm(1)` et `x.norm(infinity)`.

Exercice 3.

- Créer un vecteur à 4 éléments et vérifier le calcul des trois normes précédentes.
- Que renvoie la commande `norm(u)` ?

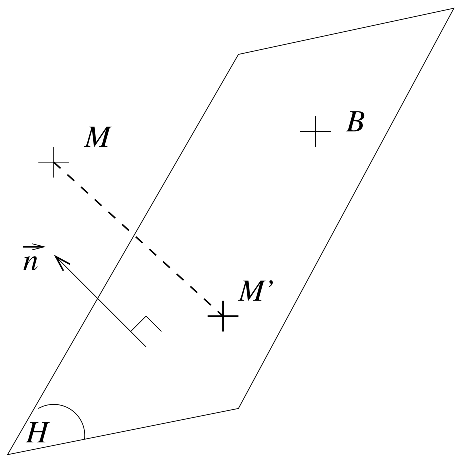
Si x et y sont deux vecteurs de même longueur, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on définit le **produit scalaire** de ces deux vecteurs par : $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$.
La commande correspondante est `x*y` ou `x.dot_product(y)`.

Rappel.
En dimension 2, le produit scalaire a une interprétation géométrique : si $x = \overrightarrow{AB}$ et $y = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs, $x \cdot y = AB \times AC \times \cos\theta$, où θ est l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Ainsi, si $x \cdot y = 0$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$, les vecteurs x et y sont orthogonaux ; si $|x \cdot y| = AB \times AC$, alors x et y sont colinéaires (les points A, B, et C sont alignés).

Exercice 4.

- Créer deux vecteurs à 5 éléments et calculer leur produit scalaire. Obtient-on le même résultat en échangeant les deux vecteurs ?
- Définir trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Que peut-on dire de ces trois vecteurs ?

Remarque.
Dans $\mathbb{R}^n$, si on note H l'hyperplan dont l'équation est $a_1(x_1 - b_1) + a_2(x_2 - b_2) + \cdots + a_n(x_n - b_n) = 0$ (c'est-à-dire l'hyperplan passant par le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et de normale $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$), la distance d'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$ à l'hyperplan H est $\dfrac{|\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|_2} = MM'$ où M' est le projeté orthogonal de M sur H.



Exercice 5.
Quelle est la distance du point M de coordonnées $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.35 \end{pmatrix}$ à la droite passant par le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} 3.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de normale $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$? Vérifier le résultat à l'aide d'un graphique.