

## Arithmétique 2

### Polynômes

Il est possible de définir les polynômes comme des expressions symboliques.



#### Exercice 1.

Si on définit un polynôme  $P$  en la variable  $x$ , son degré est donné par la commande `P.degree(x)`, l'écriture sous forme factorisée est donnée par `factor(P)`, et l'écriture développée par `expand(P)`.  
Tester ces commandes sur le polynôme  $P(X) = X(X - 2) + 1$ .



#### Exercice 2.

Soient  $P(X) = X^4 - 3X^2 - 1$  et  $Q(X) = (X + 1)^4$ .

- Est-ce que  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$  ?
- Est-ce que  $\deg(P - Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$  ?  
(On notera  $D$  le polynôme  $P - Q$  et on le développera avant de chercher son degré.)
- Développer  $Q$ . Avec une commande assez intuitive, donner le coefficient devant  $X^3$ .
- Quelles sont les racines de  $Q$  ? et celles de  $P$  ?

Cependant, pour réaliser des opérations plus complexes comme la division de polynômes, il est nécessaire de préciser qu'il s'agit de polynômes, et de spécifier l'espace des coefficients ( $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \dots$ ). On utilise pour cela les commandes suivantes :

```
R=PolynomialRing(QQ, 'x')
x=R.gen()
P2=x^4 -3*x^2 -1
```

La première ligne construit l'anneau de polynômes :  $\mathbb{Q}\mathbb{Q}$  désigne  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}\mathbb{R}$  désigne  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$  désigne  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{G}\mathbb{F}(n)$  désigne  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

La deuxième ligne construit le générateur, le polynôme  $X$  (comme élément de l'anneau de polynômes).



#### Exercice 3.

Soit maintenant  $P2(X) = X^4 - 3X^2 - 1$  vu comme un élément de  $\mathbb{Q}[X]$  (c'est-à-dire défini avec les 3 lignes de commandes ci-dessus).

Quelles sont les racines de  $P2$  ? comment expliquer cette réponse ?

Il est alors possible de réaliser des opérations arithmétiques sur de tels polynômes.



#### Exercice 4.

On reprend  $P2(X) = X^4 - 3X^2 - 1$  vu comme un élément de  $\mathbb{Q}[X]$ .

Quel est le quotient de la division euclidienne de  $P2$  par  $(X+1)^2$  ? et le reste ? (vérifier le résultat.)



#### Exercice 5.

Définir  $P3(X) = X + 1$  comme un élément de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$  (polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ).

- Calculer  $P3(X) + X^2 + 1$ .
- Calculer  $(P3(X))^2$ .