Analyse 3
Résolution d'équations

Exercice 1.
Rechercher dans l'aide la commande qui permet de *résoudre* des équations.

Exercice 2.
Résoudre les systèmes linéaires suivants :

- $$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -x+2y+2z=-2 \\ 3x+4y+z=6 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y-z=1 \\ 3x+4y+z=13 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 2x+y-z=2 \\ -4x-5y+7z=2 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ -2x+4y-2z=2 \\ 3x-6y+3z=-3 \end{cases}$$

Exercice 3.
Utiliser la commande de l'exercice 1 pour :

- trouver les solutions de $y^6=y$,
- résoudre l'équation d'inconnue z et de paramètres a,b,c suivante : $az^2+bz+c=0$.

On souhaite maintenant exploiter les résultats obtenus :

- sauvegarder la solution de l'équation $y^3=1$ dans une variable s et faire afficher s.
- On remarque que s est une liste. En extraire le premier élément. Que constate-t-on ?
- Il est possible d'extraire le membre de droite (respectivement gauche) de l'équation `eq` qui s'écrit `a==b` avec les commandes `eq.rhs()` (resp. `eq.lhs()`).
  Utiliser ces commandes pour obtenir les trois solutions dans trois variables distinctes, $y1$, $y2$ et $y3$.

Parfois, les résultats obtenus directement ne sont pas utilisables. Essayer de résoudre l'équation suivante : $\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)=0$.
On peut alors chercher une approximation numérique d'une solution avec la commande `find_root`.
Donner alors quelques solutions de cette équation.

Exercice 4.
Albert et Barbara ont passé deux contrôles du module de Calcul Formel au premier semestre et obtiennent la même moyenne de 11.4. Sachant qu'aux deux contrôles, Albert a obtenu les notes 10.5 puis 12, et Barbara a eu 14.25 puis 9.5, déterminer les coefficients appliqués aux deux contrôles.
Exprimer les solutions en nombres décimaux.

Exercice 5.
A l'aide d'un graphique, trouver l'ensemble des points (x, y) tels que :

$$\begin{cases} x + 2y \geq 4, \\ 5x - 7y \leq 10, \\ \frac{1}{4}x - y \geq -5, \\ x \leq 8, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 6 (*).
Trouver les coordonnées du point d'intersection des deux droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, pour a, b, c, α, β, γ quelconques.

Exercice 7 (*).
Résoudre l'équation de paramètres a, b suivante : $3\cos(a)z + \dfrac{\sin(b)}{z} = 5$.
En sauvegardant dans une variable les solutions obtenues, tracer, dans le même graphique :

- le graphe des solutions en fonction de b, pour $a = \dfrac{\pi}{4}$ en bleu,
- le graphe des solutions, toujours en fonction de b, pour $a = \dfrac{9\pi}{10}$ en rouge.

Exercice 8 (*).
Pour n valant successivement $3, 4, 5, \ldots, 10$, calculer les racines n^{e} de l'unité $\omega_1, \ldots, \omega_n$ dans $\mathbb{C}$.
Montrer que, sur ces exemples, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0$ (on ajoutera à chaque fois la valeur numérique approchée de ω_i).

Exercice 9 (*).
La méthode de Cardan permet de résoudre l'équation $x^3 + mx - n = 0$, m et n réels. Pour cela, on pose $t^3 + u^3 = n$ et $tu = -m/3$. La solution réelle est alors donnée par $x = t + u$.

1. Ecrire une fonction qui :
   — trouve t et u en fonction de n et m.
   — retourne x (attention, on ne prendra que les solutions t - et donc u - réelles).
2. Tester la fonction pour $n = 35$ et $m = -18$. Vérifier la réponse.
3. Même question pour $n = 2$, $m = 1$.