Algèbre linéaire 2

Matrices

Une **matrice** de m lignes et n colonnes est elle aussi définie en donnant la liste des éléments, soit ligne par ligne, comme par exemple `matrix([[1,2,3],[4,5,6]])`, soit en précisant ses dimensions, ce qui s'écrit : `matrix(2,3,[1,2,3,4,5,6])`.

Exercice 1.

Définir la matrice M donnée par $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & 9 \\ -7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ avec les deux syntaxes.

Exercice 2.

- Définir deux matrices A et B de taille 3×3. Calculer : `A+B`, `B+A`, `A-B`, `A*B`, `B*A`. Quelle remarque peut-on faire sur les deux derniers résultats ?
- Définir une matrice C de taille 2×3 et une matrice D de taille 3×2. Quelles opérations de base peut-on effectuer avec ces matrices ? Quels sont les résultats ?
- Définir un vecteur v à 3 éléments. Que valent les produits Av et Cv ?
- On définit les vecteurs suivants : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que valent les produits : Be_1, Be_2 et Be_3 ?

Exercice 3 (*).

Soit M le point de coordonnées (2,3) et O l'origine du repère. On peut représenter le vecteur $\overrightarrow{OM}$ par la commande `arrow((0,0), (2,3))` (une flèche relie les points O et M).

Soient E et F les matrices suivantes : $E = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$, et $F = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix}$.

Quel est l'effet des matrices E et F sur le vecteur $\overrightarrow{OM}$? On pourra choisir d'autres points M pour confirmer l'intuition.

Les éléments d'une matrice sont récupérés en précisant leurs indices de ligne et de colonne (à partir de 0) entre crochets.

Exercice 4.

- En reprenant la matrice A précédente, afficher les éléments $A(2,1)$ et $A(3,2)$.
- Que fait la commande `identity_matrix` ? La tester.
- Que fait la commande `zero_matrix` ? La tester.

Certaines opérations sont spécifiques aux matrices. Ainsi, par exemple :

- la calcul de la transposée d'une matrice M : `M.transpose()` ou `transpose(M)`,
- le calcul de son déterminant (s'il s'agit d'une matrice carrée) : `M.det()` ou `det(M)`,
- le calcul de son rang : `M.rank()` ou `rank(M)`,
- le calcul de son inverse (s'il s'agit d'une matrice carrée inversible) : `~M` ou `M^-1`.

Exercice 5.

Tester les commandes précédentes sur plusieurs exemples.

De nombreux problèmes se ramènent à la résolution d'un système linéaire. Ce système peut être réécrit sous une forme matricielle $Ax = b$, où A est une matrice de taille $m \times n$, b un vecteur de longueur m, et x, le vecteur des inconnues, a n composantes.
La solution d'un tel système, si elle existe, est donnée par : `x=A\b`, ou encore `x=A.solve_right(b)`.

Exercice 6.
Réécrire chacun des trois systèmes suivants sous forme matricielle et trouver la solution.

- $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 10, \\ -x_1 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ Que dire du résultat ?
- $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10, \\ -x_1 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ Que dire du résultat ?

Exercice 7.
Supposons que nous jouions à un jeu de tir du type *Doom*. Le joueur tire sur un personnage. Le tir peut être assimilé à une droite, et le personnage se situe sur un plan. Nous supposerons, pour simplifier, que le personnage est représenté par un disque de rayon 3 et de centre le point O, de coordonnées (0,0,0). La droite qui correspond au tir est vue comme l'intersection de deux plans dans $\mathbb{R}^3$.
Dans les exemples suivants, indiquer si la cible est atteinte ou non :

1. le tir est donné par $\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ 3x + 3y + 15z = 9 \end{cases}$ et le plan du personnage est $x + 2y + 4z = 0$,
2. le tir est donné par $\begin{cases} x - y + 3z = 6 \\ 3x + 3y + 15z = 7 \end{cases}$ et le plan du personnage est $x + 2y + 4z = 0$.

Lorque l'on étudie une matrice carrée M, on est souvent intéressé par rechercher ses valeurs propres et ses vecteurs propres : il s'agit des nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et des vecteurs $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ tels que $Mv = \lambda v$. Ainsi, par exemple en *data mining*, les plus grandes valeurs propres permettront de savoir quelles sont les variables qui jouent un rôle important.
Les commandes correspondantes sont : `M.eigenvalues()` et `M.eigenvectors_right()`.
Les valeurs propres sont les racines (les zéros) du polynôme caractéristique de M, défini par $\det(XI_n - M)$ où I_n est la matrice unité, et calculé par `M.characteristic_polynomial()`.

Exercice 8.

- Définir la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer les valeurs propres de A.
- Calculer le polynôme caractéristique de A. Vérifier que ses racines sont bien les valeurs propres de A.
- Calculer les vecteurs propres de A. Vérifier la relation $Av = \lambda v$ pour chacun des trois vecteurs v_1, v_2, v_3.
- On définit une matrice carrée V composée des trois vecteurs v_1, v_2, v_3 écrits en colonne. Que vaut le produit $V^{-1}AV$?