

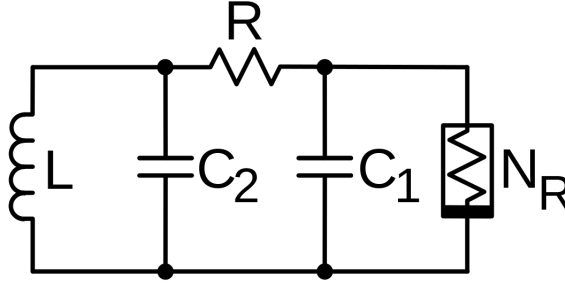
O Circuito de Chua

Segundo Exercício Programa MAP3121
Para Engenharia Elétrica

Entrega: até 22 de Junho de 2017

1 O circuito de Chua

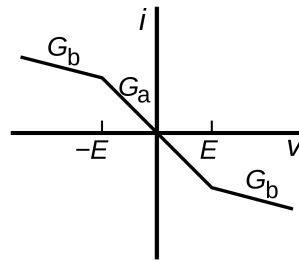
O circuito de Chua é um circuito elétrico simples formado por 2 capacitores lineares (C_1 e C_2), um resistor linear (R), um indutor linear (L) e um resistor não linear controlado pela tensão (N_R), conforme a figura abaixo.



O resistor não linear N_R , conhecido como diodo de Chua, é definido de forma linear por pedaços, isto é, dependendo da tensão ele fornece uma resistência diferente. A corrente de N_R é definida por

$$g(V) = \begin{cases} G_b V + (G_b - G_a)E, & \text{se } V \leq -E \\ G_a V, & \text{se } -E < V < E \\ G_b V + (G_a - G_b)E, & \text{se } V \geq E \end{cases}$$

onde $G_a < 0$ e $G_b > 0$ são inclinações das curvas da relação tensão (V) versus corrente (i) e $E > 0$ é um valor de tensão de corte para mudança de regime, conforme o gráfico abaixo.



Usando as leis de Kirchhoff para esse circuito é possível deduzirmos o seguinte sistema de equações diferenciais para as tensões nos capacitores (V_{C_1} e V_{C_2}) e a corrente no indutor (I_L),

$$\begin{aligned} \dot{V}_{C_1} &= \frac{1}{RC_1}(V_{C_2} - V_{C_1}) - \frac{1}{C_1}g(V_{C_1}), \\ \dot{V}_{C_2} &= \frac{1}{RC_2}(V_{C_1} - V_{C_2}) + \frac{1}{C_2}I_L, \\ \dot{I}_L &= -\frac{1}{L}V_{C_2}. \end{aligned}$$

O interessante desse circuito é que ele é simples de ser montado (veja a referência [1] para um exemplo dos componentes necessários) e define um sistema dinâmico caótico, para o qual pequenas variações nos parâmetros e condições iniciais podem levar a soluções bastante distintas!

2 Tarefa

O objetivo deste exercício computacional é resolver numericamente o sistema dinâmica do circuito de Chua para diversos cenários usando o método Runge-Kutta Fehlberg descrito a seguir. As análises e resultados obtidos devem ser organizados em um relatório que deve minimamente discutir os problemas estudados e os resultados obtidos.

- O exercício deve ser feito em linguagem C.
- O exercício pode ser feito em duplas, mas sempre com alguém da mesma área - Elétrica (não necessariamente da mesma turma).
- Apenas um aluno deve entregar o exercício, definido por ordem alfabética, destacando no relatório e código o nome de ambos os alunos.
- A entrega deve conter o relatório (em .pdf), contendo a análise do problema estudado, e o código usado para as simulações computacionais (arquivos .c). A entrega deve ser feita em um arquivo compactado único.

Para o relatório é importante incluir gráficos com a evolução das variáveis resolvidas ao longo do tempo e os respectivos retratos de fases (trajetórias do sistema). Os retratos de fase podem ser bidimensionais (considerando um corte contemplando variáveis duas a duas) ou tridimensional (com visualização sob perspectiva 3D).

O seu código deve estar bem comentado e estruturado. A entrada e saída devem ser feitas de forma a evitar que usuário tenha que digitar muitos parâmetros de entrada (você pode usar um menu de escolha de testes ou entrada de parâmetros por arquivo de texto) e facilitando a análise dos resultados. Inclua qualquer arquivo adicional necessário para o seu programa no arquivo compactado a ser entregue.

Você deve resolver tanto os exercícios relativos à aplicação, sobre o circuito de Chua, quanto os testes descritos mais adiante na parte do método RKF45.

3 Experimentos

Para os experimentos vamos considerar os seguintes parâmetros fixados:

- $C_1 = 10 \text{ nF}$
- $C_2 = 100 \text{ nF}$
- $L = 18 \text{ mH}$

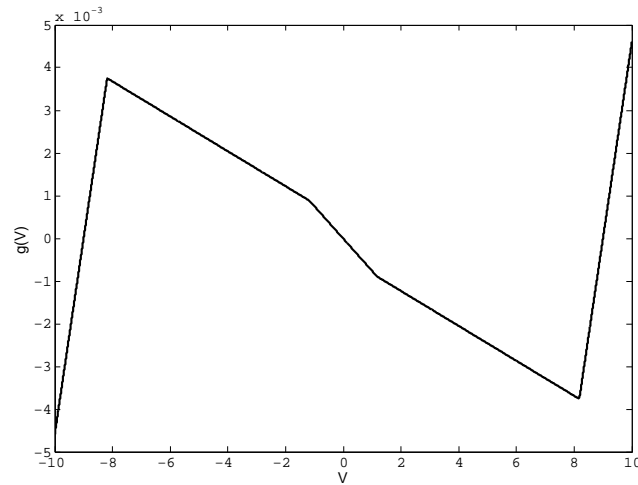
Para o resistor não linear considerar

- $E = 1.17391304 \text{ V}$,
- $G_a = -50/66 \text{ mS}$,
- $G_b = -9/22 \text{ mS}$.

Para simular um comportamento passível de ser implementado fisicamente, o resistor não linear precisa de parâmetros adicionais para manter o sistema dentro de tensões realizáveis. Considere que a equação definida anteriormente para o resistor não linear é válida para tensões em módulo menores que E_{\max} . Para tensões maiores do que isso, considerar

$$g(V) = \begin{cases} G_c V + E_{\max}(G_c - G_b) + E(G_b - G_a) & \text{se } V \leq -E_{\max} \\ G_b V + (G_b - G_a)E, & \text{se } -E_{\max} < V \leq -E \\ G_a V, & \text{se } -E < V < E \\ G_b V + (G_a - G_b)E, & \text{se } E \leq V < E_{\max} \\ G_c V + E_{\max}(G_b - G_c) + E(G_a - G_b) & \text{se } E_{\max} \geq V \end{cases}$$

Adote $E_{\max} = 8.1818 \text{ V}$ e $G_c = 4.591 \text{ mS}$, de forma a obtermos a curva apresentada na figura abaixo.



Assuma como condições iniciais $V_1 = -0.5V$, $V_2 = -0.2$ e $I_L = 0$. Vamos variar o valor do resistor (R) nos experimentos a seguir.

Exercícios obrigatórios

1. Verifique o comportamento do sistema quando $R < 1500$ Ohms e descreva o seu comportamento em relação ao retrato de fases.
2. Descreva agora o comportamento quando $R = 1600$ e compare com o obtido no item anterior.
3. Encontre o valor de R entre 1500 e 1600 para qual o sistema passa de um comportamento para o outro (bifurcação do sistema).
4. Verifique o comportamento do sistema quando $R > 2000$ Ohms e descreva o seu comportamento em relação ao retrato de fases.
5. Discuta o tempo de execução do seu código (influenciado pelo tamanho dos passos de tempo escolhidos no método de integração) para diferentes valores de R , considerando valores bem pequenos ($R < 1$), médios ($R \approx 1000$) e grandes $R > 10000$.

Exercícios Extras

1. Experimente modificar as condições iniciais e relate a sua influência na solução do sistema.
2. Experimente modificar outros parâmetros e relate a sua influência na solução do sistema.

Desafio Extra

Os parâmetros propostos neste exercício são todos realizáveis do ponto vista físico e podem ser construído em uma “protoboard”. O aluno interessado pode seguir o roteiro descrito em [1] e [2] para a construção do circuito. O circuito pode ser construído a um baixo custo e de forma simples e rápida. Sugerimos que os alunos que montarem o circuito comparem os resultados obtidos fisicamente com os modelados numericamente.

4 O Método de Runge-Kutta Fehlberg

Introdução

Vamos aqui apresentar o método de Runge-Kutta Fehlberg, para solução de (sistemas de) equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, a partir dos valores iniciais das soluções. Em uma equação diferencial (ou sistema de equações) procura-se determinar uma função $X(t)$ satisfazendo uma relação do tipo:

$$X'(t) = F(t, X(t)) \text{ com } X(t_0) = X_0 \quad (1)$$

No caso geral $X(t)$ é uma função definida em algum intervalo real, tomando valores em R^m (ou seja, $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t))$, onde cada $X_i(t)$ é uma função real). A função $F(t, X(t))$ é definida em R^{m+1} e assume valores em R^m . Caso F seja só uma função de $X \in R^m$ (ou seja, não dependendo explicitamente de t) temos um sistema autônomo.

O método que apresentaremos a seguir é uma variação do método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem, de forma a incorporar uma técnica de controle do passo temporal visando atingir uma dada precisão. Assim, em regiões onde a solução apresenta variações rápidas (com fortes gradientes), faz-se necessário o uso de um espaçamento temporal menor, de forma a conseguir uma boa aproximação para a solução, enquanto que em regiões em que a solução varia suavemente, podem ser usados espaçamentos maiores, levando a um método computacionalmente mais eficiente.

Preliminares

Apresentamos aqui brevemente o **Método de Euler**, que em breve será apresentado em sala de aula no curso. O descrevemos aqui, apenas para facilitar sua compreensão de outros métodos.

Considerando o polinômio de Taylor da função $x(t)$ obtemos:

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)h + x''(\tilde{t})h^2/2$$

onde \tilde{t} se encontra entre t e $t+h$. Desta expressão temos:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = x'(t) + x''(\tilde{t})h/2$$

Se agora impusermos que $x(t)$ é solução da equação diferencial (1) obtemos que:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x(t)) + x''(\tilde{t})h/2$$

O método de Euler irá empregar a aproximação

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x(t))$$

sendo o erro cometido proporcional a h . Partindo do instante inicial t_0 , onde conhecemos o valor inicial x_0 da solução, calcularemos sucessivamente as aproximações

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$$

onde $t_i = t_0 + ih$, e x_i é a aproximação de $x(t_i)$. Calculamos a solução até um instante final t_f em n passos, onde $nh = t_f - t_0$. Por exemplo, na equação $x'(t) = x(t)$ com $x(0) = 1$, temos a sequência $x_{i+1} = x_i + hx_i = (1+h)x_i$. Se tomamos $t_f = 1$ e $h = 1/n$ obtemos a aproximação para o valor de $x(1)$:

$$x_n = (1+h)x_{n-1} = (1+h)^n x_0 = (1+1/n)^n.$$

Sabemos que a solução da equação é $x(t) = e^t$ e portanto $x(1) = e$. Vocês já viram em cálculo que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n = e$. Assim, a aproximação obtida pelo método de Euler para o valor da solução no instante 1 converge para o valor exato se fizermos o espaçamento $h = 1/n$ entre dois instantes consecutivos tender a zero. Resumindo, se desejamos aproximar a solução da equação diferencial (1) no intervalo de tempo $[t_0, t_f]$, subdividimos este intervalo em n partes de comprimento $h = (t_f - t_0)/n$ e aproximamos a solução em cada instante $t_i = t_0 + ih, i = 0, \dots, n$, a partir de seu valor inicial x_0 , computando:

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i), i = 0, \dots, n-1.$$

O método de Euler é bastante simples e fácil de implementar, porém apresenta uma convergência lenta, com o erro da ordem de h . Há métodos para solução de equações diferenciais que convergem muito mais rapidamente. Um método clássico, muito utilizado, é o método de **Runge-Kutta de quarta ordem** (com erro da ordem de h^4). Neste método cada passo no tempo é calculado da seguinte forma (com a mesma notação usada no método de Euler), em 4 estágios:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \text{ onde} \\k_1 &= hf(t_i, x_i) \\k_2 &= hf(t_i + 0.5h, x_i + 0.5k_1) \\k_3 &= hf(t_i + 0.5h, x_i + 0.5k_2) \\k_4 &= hf(t_i + h, x_i + k_3)\end{aligned}$$

Veja que cada passo no tempo requer 4 avaliações da função f , uma em cada estágio. Você encontra no livro texto do curso (e verá também em sala de aula) uma descrição mais detalhada sobre métodos de Runge-Kutta, incluindo uma dedução de um método de ordem 2. A derivação do método acima é obtida de maneira análoga, sendo porém muito mais trabalhosa (e normalmente omitida nos livros didáticos).

Uma técnica de controle do passo h

Tanto o método de Euler como o método clássico de Runge-Kutta fazem uso de um espaçamento h , pelo qual se incrementa o valor de t a cada passo, sendo que a precisão atingida irá depender deste valor de h . Iremos agora descrever como variar o valor de h durante uma integração, de forma a obter-se uma dada precisão de forma eficiente. A técnica que veremos, baseia-se no uso de dois métodos de passo simples com ordens de convergência p e $p+1$.

Consideremos dois métodos de ordem p e $p+1$ que a partir do valor de x_i gerem a aproximação para $x(t_{i+1})$ respectivamente como:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h\Phi(t_i, x_i, h) \quad e \\ \tilde{x}_{i+1} &= x_i + h\tilde{\Phi}(t_i, x_i, h) \quad .\end{aligned}$$

Se $x(t)$ é a solução da equação diferencial, o erro local de truncamento dos métodos é dado por:

$$\begin{aligned}\tau_{i+1}(h) &= \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} - \Phi(t_i, x(t_i), h) = O(h^p) \quad e \\ \tilde{\tau}_{i+1}(h) &= \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} - \tilde{\Phi}(t_i, x(t_i), h) = O(h^{p+1}) \quad .\end{aligned}$$

Assumindo que a aproximação x_i no instante t_i seja praticamente igual à solução $x(t_i)$ obtemos

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{x(t_{i+1}) - x_i - h\Phi(t_i, x_i, h)}{h} = \frac{x(t_{i+1}) - x_{i+1}}{h}$$

e analogamente que

$$\tilde{\tau}_{i+1}(h) = \frac{x(t_{i+1}) - \tilde{x}_{i+1}}{h} \quad .$$

Assim,

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{x(t_{i+1}) - \tilde{x}_{i+1}}{h} + \frac{\tilde{x}_{i+1} - x_{i+1}}{h} = \tilde{\tau}_{i+1}(h) + \frac{\tilde{x}_{i+1} - x_{i+1}}{h} \quad .$$

Desprezando o erro local de truncamento $\tilde{\tau}_{i+1}(h)$ por ser de ordem mais alta, obtemos a aproximação para o erro local de truncamento para o método de ordem p dada por

$$\tau_{i+1}(h) \approx \frac{\tilde{x}_{i+1} - x_{i+1}}{h} \quad .$$

Através desta expressão podemos estimar o erro local de truncamento e verificar se este se encontra dentro da ordem de precisão desejada. Além disso podemos verificar se o espaçamento h pode ser aumentado ou necessita ser reduzido. Para tanto usamos que $\tau_{i+1}(h) \approx Kh^p$ e estimamos o erro local de truncamento que teríamos se usássemos um novo espaçamento $\tilde{h} = \alpha h$:

$$\tau_{i+1}(\alpha h) \approx K(\alpha h)^p \approx \alpha^p \tau_{i+1}(h) \approx \alpha^p \frac{\tilde{x}_{i+1} - x_{i+1}}{h} \quad .$$

Se desejamos que a norma do erro de truncamento $\|\tau_{i+1}(\alpha h)\|$ seja menor que ϵ devemos ter

$$\alpha \leq \left(\frac{\epsilon h}{c \|\tilde{x}_{i+1} - x_{i+1}\|} \right)^{1/p}$$

onde $c > 1$ é um fator de segurança e empregamos a norma do máximo.

O Método RKF45

Agora estamos em condição de apresentar o método de Runge-Kutta Fehlberg, que combina métodos de quarta e quinta ordem para o controle do passo. Métodos explícitos de Runge-Kutta de quinta ordem requerem no mínimo 6 estágios, enquanto que se consegue métodos de quarta ordem com 4 estágios (como é o caso do método clássico visto em seção anterior). Assim, para aplicarmos os métodos de quarta e quinta ordem para gerarmos as novas aproximações a partir de x_i teremos potencialmente que avaliar até 10 estágios, a menos que os métodos compartilhem alguns destes. Este é exatamente o caso do método de Fehlberg, em que o cálculo dos dois métodos irá requerer apenas 6 estágios, uma vez que o método de quarta ordem a ser utilizado compartilha dos mesmos estágios requeridos no método de sexta ordem. Descrevemos abaixo os seis estágios requeridos pelos métodos:

$$\begin{aligned} k_1 &= hF(t_i, x_i) \\ k_2 &= hF(t_i + h/4, x_i + \frac{1}{4} k_1) \\ k_3 &= hF(t_i + 3h/8, x_i + \frac{3}{32} k_1 + \frac{9}{32} k_2) \\ k_4 &= hF(t_i + 12h/13, x_i + \frac{1932}{2197} k_1 - \frac{7200}{2197} k_2 + \frac{7296}{2197} k_3) \\ k_5 &= hF(t_i + h, x_i + \frac{439}{216} k_1 - 8 k_2 + \frac{3680}{513} k_3 - \frac{845}{4104} k_4) \\ k_6 &= hF(t_i + h/2, x_i - \frac{8}{27} k_1 + 2 k_2 - \frac{3544}{2565} k_3 + \frac{1859}{4104} k_4 - \frac{11}{40} k_5) \end{aligned}$$

O método de quarta ordem é dado por

$$x_{i+1} = x_i + \frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5$$

enquanto que o de ordem 5 é obtido como

$$\tilde{x}_{i+1} = x_i + \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 .$$

O método então funciona da seguinte forma: a partir do valor inicial x_0 e de um h inicial, calcula-se as aproximações x_{i+1} e \tilde{x}_{i+1} dadas respectivamente pelos esquemas de quarta e quinta ordem. Em função destes dois valores e de h estima-se o erro local de truncamento $\tau_{i+1}(h)$ como descrito na seção anterior. Caso este valor seja menor que ϵ o valor de x_{i+1} é aceito como nova aproximação no instante $t_{i+1} = t_i + h$ e atualiza-se o valor de h para αh (ou seja, multiplica-se h por α), onde α é calculado como descrito ao final da seção anterior, empregando um fator de segurança $c = 2$. No caso de $\tau_{i+1}(h)$ ser maior que ϵ o valor de x_{i+1} é rejeitado, com h sendo atualizado da mesma forma, após o que se refaz os cálculos das aproximações x_{i+1} e \tilde{x}_{i+1} . Uma vez que x_{i+1} tenha sido aceito procede-se ao cálculo da solução no próximo passo, usando-se o mesmo procedimento. A integração termina ao atingir-se o instante final desejado. Para garantir que se chegue exatamente no instante final t_f - sem ultrapassá-lo - pode-se limitar o valor de h a cada passo pelo tanto que falta para t_f , fazendo com que h seja no máximo igual a $t_f - t_i$. Além disso, é conveniente que h não seja escolhido nem grande, nem pequeno demais. Ou seja, adicionalmente impomos que $h_{min} \leq h \leq h_{max}$, onde h_{min} e h_{max} são dois parâmetros a ser escolhidos pelo usuário (dependem das escalas temporais que temos). No seu programa utilize $h_{min} = 0.001$ e $h_{max} = 1.0$.

Implementação e alguns testes

Você deve implementar o método de Runge-Kutta Fehlberg (RKF45) descrito na seção anterior, empregando a técnica de controle do passo. Sua implementação deve contemplar o fato de que a função $F(t, X)$ descrevendo a equação diferencial possa assumir valores em R^m , onde m será uma variável. Os testes e o problema que você resolverá depois na aplicação do método envolverão diferentes valores da dimensão n . Uma forma de você escrever a função de maneira razoavelmente geral é passar como argumentos o valor de m (que será usado no dimensionamento do vetor X) e uma variável *caso*. Dependendo do valor de *caso*, calcule então a função específica requerida em cada teste e / ou aplicação.

Teste 1 - considere a equação diferencial com $F : R^2 \rightarrow R$ dada por $F(t, x) = 1 + (x - t)^2$. Integre-a a partir do valor inicial $x(1.05) = -18.95$ até o tempo final $t_f = 3$ pelo método RKF45 com $\epsilon = 10^{-5}$. Use para iniciar $h = 0.1$. A cada passo imprima o valor de h empregado e o valor da solução. Imprima também o erro em relação à solução exata desta equação dada por $x(t) = t + 1/(1 - t)$.

Teste 2 - considere a equação diferencial autônoma com $F(t, X) = AX$, com $X \in R^4$, onde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Integre-a a partir de $X(0) = (1, 1, 1, -1)$ até $t_f = 2$, usando $h = 0.1$ inicialmente e $\epsilon = 10^{-5}$. A cada passo imprima o valor de h , t_i e $\|X_i - \bar{X}(t_i)\|$, com a norma do máximo. A solução exata desta equação é

$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \sin t + e^{-3t} \cos 3t \\ e^{-t} \cos t + e^{-3t} \sin 3t \\ -e^{-t} \sin t + e^{-3t} \cos 3t \\ -e^{-t} \cos t + e^{-3t} \sin 3t \end{pmatrix}$$

Teste 3 - Considere o sistema autônomo com $F(t, X) = AX$, com $X \in R^m$, onde A é uma matriz tridiagonal $m \times m$, tal que $A_{i,i} = -2, i = 1, \dots, m$, $A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = 1, i = 1, \dots, m - 1$ e $A_{i,j} = 0$ nas posições restantes. Este exemplo permite que você teste seu código para valores diversos de m . Use como condição inicial o vetor $X(0)$ com componentes $X(0)_i = \sin(\pi y_i) + \sin(m\pi y_i)$, onde $y_i = i/(m + 1)$, para $i = 1, \dots, m$. A solução exata deste sistema é dada pelo vetor $X(t)$ cujas componentes são: $X(t)_i = e^{-\lambda_1 t} \sin(\pi y_i) + e^{-\lambda_2 t} \sin(m\pi y_i), i = 1, \dots, m$, com $\lambda_1 = 2(1 - \cos(\pi/(m + 1)))$ e $\lambda_2 = 2(1 - \cos(m\pi/(m + 1)))$. Você deve executar este teste com $m = 7$, usando $h = 0.1$ inicialmente e $\epsilon = 10^{-5}$. A cada passo imprima o valor de h , t_i e $\|X_i - X(t_i)\|$, comparando sua solução com a solução exata, usando a norma do máximo e integrando até $t_f = 2$.

Referências

- [1] <https://inst.eecs.berkeley.edu/~ee129/sp10/handouts/ChuasCircuitForHighSchoolStudents-PREPRINT.pdf>
- [2] <http://www.chuacircuits.com>