

Fluxo de potência em corrente contínua e o método QR para resolução de sistemas lineares

Exercício Programa MAP3121 - Para Engenharia Elétrica

Entrega: 14 de Maio de 2017

1 Fluxo de potência em corrente contínua

Apesar do nome, no estudo de fluxo de potência em corrente contínua são analisadas redes que operam em corrente alternada. Este nome resulta de algumas simplificações habituais em sistemas de potência, que transformam as equações com variáveis complexas em equações com variáveis reais, conduzindo assim a uma formulação análoga à de redes que operam em corrente contínua.

O fluxo de potência em corrente contínua explora a elevada sensibilidade dos fluxos de potência ativa a variação nos ângulos das tensões, maior que a sensibilidade a variação nos módulos das mesmas. Assim, as variáveis do problema neste caso são somente as potências ativas injetadas nas barras e os ângulos das tensões. Esta formulação é muito útil em estudos de planeamento de longo prazo, onde o principal dado disponível é a evolução futura do consumo global de energia. Este dado é facilmente distribuído nas barras do sistema elétrico, fornecendo assim uma boa estimativa da potência ativa injetada em cada barra. Outra aplicação interessante do fluxo de potência em corrente contínua ocorre quando há necessidade de calcular um elevado número de cenários, como é o caso da simulação probabilística (método de Monte Carlo) e da otimização por Algoritmos Genéticos. Nesses casos a precisão do cálculo em cada simulação individual não é um fator preponderante, pois o objetivo é determinar valores médios globais que podem ser alcançados com uma representação menos precisa do sistema.

Hipóteses simplificativas

A Eq. (1) fornece a corrente complexa injetada (isto é, entrando) na barra j em função do estado da rede (tensão complexa na própria barra e nas barras vizinhas).

$$\dot{I}_j = \sum_k \bar{Y}_{jk} \dot{V}_k = \sum_k (G_{jk} + jB_{jk}) \cdot \dot{V}_k, \quad (1)$$

em que:

- j é a unidade imaginária;
- \dot{I}_j é a corrente complexa injetada na barra j (pu);
- $\bar{Y}_{jk} = G_{jk} + jB_{jk} = -(g_{jk} + jb_{jk})$ é o elemento (j, k) da matriz de admitâncias nodais da rede (pu);
- B_{jk} é o negativo da susceptância série (b_{jk}) da ligação $j - k$;
- $\dot{V}_k = V_k \angle \theta_k$ tensão complexa na barra k (pu),

e a somatória é estendida a todas as barras k que se ligam com a barra j (a admitância \bar{Y}_{jk} é igual a zero se a barra k não se liga com a j). O índice k inclui o valor j (elemento da diagonal da matriz de admitâncias nodais).

A admitância série da ligação entre os dois nós (ou barras) (j e k) é um número complexo dado por $(g_{jk} + jb_{jk})$, e indica a facilidade com que a corrente elétrica pode percorrer a ligação. A parte real (g) é a condutância série e a parte imaginária (b) é a susceptância série.

A formulação nodal, $[I] = [Y][V]$, onde $[Y]$ está definido pela matriz de admitâncias nodais, permite obter algumas correntes no vetor $[I]$ e algumas tensões no vetor $[V]$ quando se conhecem as demais correntes e as demais tensões, e ela resulta da aplicação ordenada das Leis de Kirchhoff e da Lei de Ohm à rede elétrica. O algoritmo de montagem da matriz de admitâncias nodais $[Y]$ é simples na maioria das situações, e ele diz

que cada elemento fora da diagonal é o negativo da admitância série da ligação entre os nós correspondentes. Assim, para o elemento fora da diagonal da matriz $[Y]$ tem-se:

$$\bar{Y}_{jk} = (G_{jk} + jB_{jk}) = -(g_{jk} + jb_{jk}).$$

A potência complexa injetada na barra j é dada por:

$$\bar{S}_j = \dot{V}_j \dot{I}_j^* = V_j \angle \theta_j \cdot \left[\sum_k (G_{jk} + jB_{jk}) \cdot \dot{V}_k \right]^* \quad (2)$$

e sua parte real é a potência ativa injetada na barra:

$$P_j = \Re [\bar{S}_j] = V_j^2 G_{jj} + V_j \sum_{k \neq j} V_k (G_{jk} \cos \theta_{kj} - B_{jk} \sin \theta_{kj}) , \quad (3)$$

em que $\theta_{kj} = \theta_k - \theta_j$ (radiano).

Considere-se agora as seguintes hipóteses:

- (i) $V_j = 1$ pu, $j = 1, 2, \dots, n$ (n é o número total de barras da rede);
- (ii) $G_{jk} \ll B_{jk}$, para todo par (i, j) ; (4)
- (iii) $\sin \theta_{kj} \simeq \theta_{kj}$ (rad) .

A primeira hipótese é consequência da observação de que os fluxos de potência ativa estão mais ligados às diferenças angulares do que às diferenças entre os módulos das tensões das barras terminais. Isto resulta dos valores usuais de resistência e reatância das linhas de transmissão e da natureza normalmente indutiva da carga. A segunda hipótese é particularmente válida em sistemas de transmissão, onde a relação $\frac{G}{B} = -\frac{R}{X}$ frequentemente possui módulo inferior a 0,1. Por fim, a terceira hipótese explora o fato de que a diferença angular entre as tensões de duas barras adjacentes raramente ultrapassa o valor 20° (nesse caso tem-se $20^\circ = 0,3491$ rad e $\sin 20^\circ = 0,3420$, produzindo um erro relativo de 2%; para ângulos menores o erro relativo é menor ainda).

Determinação do ângulo das tensões

Substituindo as hipóteses simplificativas na Eq. (3) obtém-se:

$$\begin{aligned} P_j &= - \sum_{k \neq j} B_{jk} (\theta_k - \theta_j) \\ &= - \sum_{k \neq j} B_{jk} \theta_k + \theta_j \sum_{k \neq j} B_{jk} \\ &= - \sum_{k \neq j} B_{jk} \theta_k - \theta_j B_{jj} , \end{aligned} \quad (5)$$

em que, por definição,

$$B_{jj} = - \sum_{k \neq j} B_{jk}. \quad (6)$$

Reescrevendo a Eq. (5) face a esta definição, resulta em

$$P_j = - \sum_k B_{jk} \theta_k \quad (7)$$

em que o índice k agora inclui o caso particular $k = j$.

Quando aplicada a todas as barras da rede, a Eq. (7) fornece finalmente a formulação do fluxo de potência em corrente contínua:

$$[P] = - [B] [\theta] \quad (8)$$

em que, sendo n o número total de barras da rede:

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix}, \quad [\theta] = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

e

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix} \quad (9)$$

É importante destacar que, da forma como foi definida a matriz $[B]$, ela resulta singular pois o elemento da diagonal em cada linha é igual ao negativo da soma de todos os elementos fora da diagonal nessa linha, e portanto a soma das colunas resulta no vetor nulo. Isto impede a resolução do sistema (8) quando se conhecem as potências injetadas. A solução neste caso é eliminar uma das equações e uma das incógnitas, reduzindo a dimensão do sistema de equações de n a $(n-1)$. Isto equivale a considerar uma das barras como referência, com ângulo da tensão fixado a priori (por exemplo, igual a zero). Esta particularidade pode ser entendida também do ponto de vista físico: em uma rede na qual se conhece uma solução, a mesma não se altera se a todos os ângulos for adicionado um mesmo valor arbitrário. Ou seja, existem infinitas soluções que do ponto de vista da distribuição de fluxos de potência são todas idênticas. Para eliminar esta indeterminação, basta descartar uma das incógnitas e atribuir-lhe antecipadamente um valor qualquer. Uma vez feito isto, os $(n-1)$ ângulos restantes podem ser calculados através de:

$$[\theta] = -[B]^{-1}[P] \quad (10)$$

Determinação do fluxo de potência nas ligações

A definição dos elementos da diagonal da matriz $[B]$ (Eq. (6)) implica que os elementos em derivação (capacitores e reatores) eventualmente existentes nas barras resultam automaticamente desprezados. Sendo assim, o fluxo de potência em uma ligação genérica $j-k$ é dado por:

$$P_{jk} = g_{jj}V_j^2 - g_{jk}V_jV_k\cos(\theta_j - \theta_k) - b_{jk}V_jV_k\sin(\theta_j - \theta_k) \quad (11)$$

em que:

P_{jk} é a potência ativa que flui entre as barras j e k , nesse sentido (pu);

$g_{jk} + jb_{jk} = -(G_{jk} + jB_{jk})$ é admitância série da ligação $j-k$ (pu).

Aplicando as hipóteses simplificativas à Eq. (11), resulta:

$$P_{jk} = -b_{jk}(\theta_j - \theta_k) \quad (12)$$

Exemplo. Seja a rede representada na Figura, a qual será usada para ilustrar o cálculo de fluxo de potência em corrente contínua.

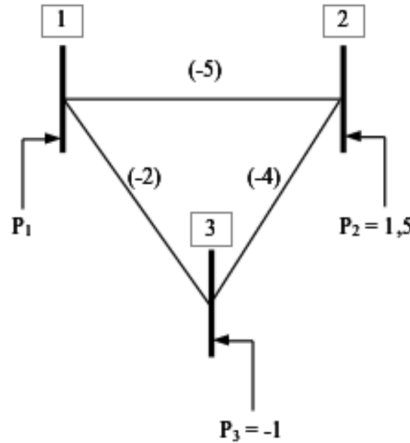


Figura 1: Rede exemplo

Nesta figura, os números entre parênteses indicam a susceptância série das ligações (b_{jk}) e as potências injetadas (P_j), ambas em (pu). Observe que as susceptâncias que precisamos para a matriz $[B]$ são obtidas por $B_{jk} = -b_{jk}$. A barra 1 será adotada como referência de ângulos, de forma que $\theta_1 = 0$.

Sendo assim, tem-se:

$$[P] = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Note que, da equação (6), obtemos $B_{2,2}$ como o negativo da soma dos elementos fora da diagonal da matriz $[B]$ completa, tal que $B_{2,2} = -(B_{2,1} + B_{2,3}) = -(-b_{2,1} - b_{2,3}) = (b_{2,1} + b_{2,3}) = (-5 - 4) = -9$, e analogamente para o $B_{3,3} = (b_{3,1} + b_{3,2}) = -6$. Por outro lado, $B_{2,3} = -b_{2,3} = 4$ e $B_{3,2} = -b_{3,2} = 4$.

Os ângulos são calculados através da Eq. (10):

$$[\theta] = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = -[B]^{-1} [P] = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/38 \\ -3/38 \end{bmatrix} \text{ rad} = \begin{bmatrix} 7,54^\circ \\ -4,52^\circ \end{bmatrix} .$$

Os fluxos de potência são calculados através da Eq. (12):

$$\begin{aligned} P_{12} &= -(-5) \cdot (0 - 5/38) = -0,658 \text{ pu} \\ P_{13} &= -(-2) \cdot (0 - (-3/38)) = 0,158 \text{ pu} \\ P_1 &= P_{12} + P_{13} = -0,5 \text{ pu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{21} &= -P_{12} = 0,658 \text{ pu} \\ P_{23} &= -(-4) \cdot (5/38 - (-3/38)) = 0,842 \text{ pu} \\ P_2 &= P_{21} + P_{23} = 1,5 \text{ pu} \end{aligned}$$

$$P_3 = P_{31} + P_{32} = -P_{13} - P_{23} = -1 \text{ pu} .$$

2 Tarefa

O objetivo deste exercício computacional é resolver diversos problemas de fluxo de potência em corrente contínua usando o método QR para resolução de sistemas lineares, conforme descrito no texto a respeito mais adiante. As análises e resultados obtidos devem ser organizados em um relatório que deve minimamente discutir os problemas estudados e os resultados obtidos.

- O exercício deve ser feito em linguagem C.
- O exercício pode ser feito em duplas, mas sempre com alguém da mesma área - Elétrica (não necessariamente da mesma turma).
- Apenas um aluno deve entregar o exercício, definido por ordem alfabética, destacando no relatório e código o nome de ambos os alunos.
- A entrega deve conter o relatório (em .pdf), contendo a análise do problema estudado, e o código usado para as simulações computacionais (arquivos .c). A entrega pode ser feita em um arquivo compactado único.

O seu programa deve resolver, além dos 2 testes iniciais propostos na seção do método QR, os exemplos de sistemas de potências fornecidos abaixo (os dados serão fornecidos no site da disciplina). Os dados fornecidos seguirão o padrão:

- Matriz.txt : Contém os dados da matriz $-[B]$ (atente-se para o sinal de menos). Para o exemplo o visto acima o arquivo conteria:

```
2 2 4
0 0 9.000000000000e+00
0 1 -4.000000000000e+00
1 0 -4.000000000000e+00
1 1 6.000000000000e+00
```

onde na primeira linha temos o número de linhas (2) e colunas (2) e em seguida o número de elementos não nulos da matriz (4). Em seguida, cada linha apresenta um elemento da matriz, sendo primeiro indicado o índice da linha (i), depois da coluna (j), depois o valor da matriz B_{ij} .

- VetorB.txt: Vetor com as potências injetadas. Este arquivo apresenta diretamente o valor das potências injetadas para cada barra, na mesma ordem da adotada para a matriz susceptâncias. Para o exemplo acima teríamos um arquivo contendo:

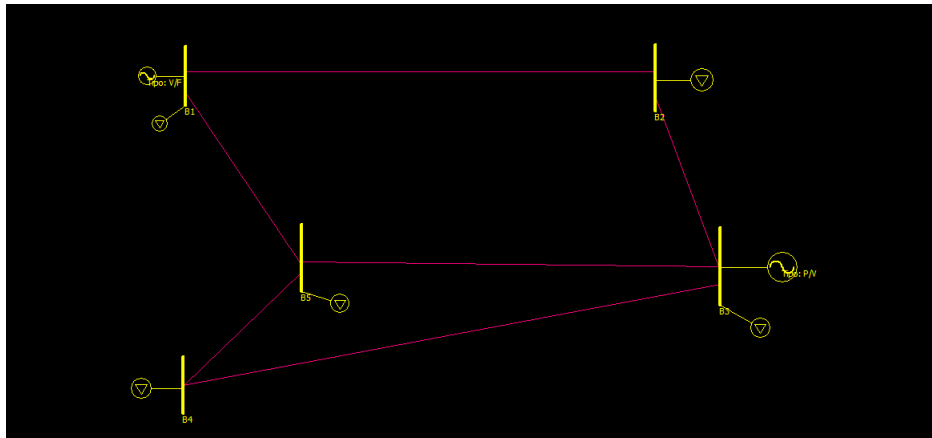
```
1.500000000000e+00
-1.000000000000e+00
```

O seu programa deve ser capaz de ler esse tipo de matriz para ser usado no método QR de resolução de sistemas lineares e deve devolver a solução do sistema (ângulos).

3 Exemplos

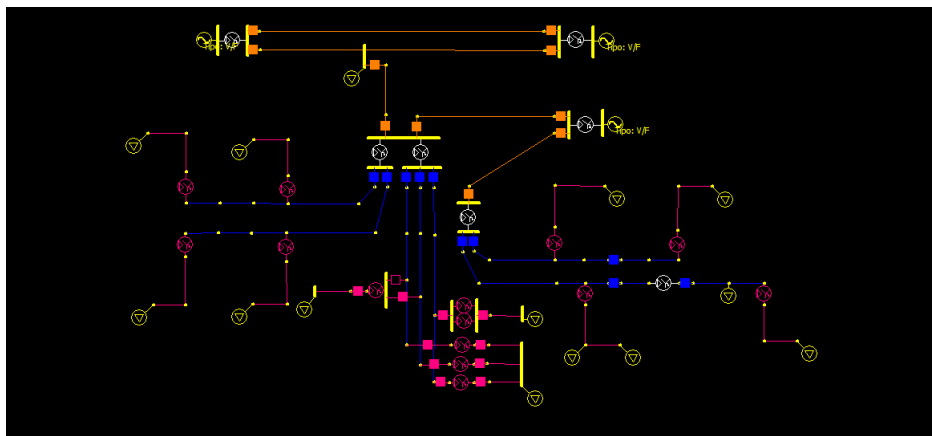
3.1 Exemplo reduzido com 5 barras

Este exemplo possui 5 barras dispostas como a figura abaixo (exemplo obtido de [?]). A matriz de susceptâncias e o vetor de potências injetadas estão descritos sob o nome “4_Completa” nos dados fornecidos no site.



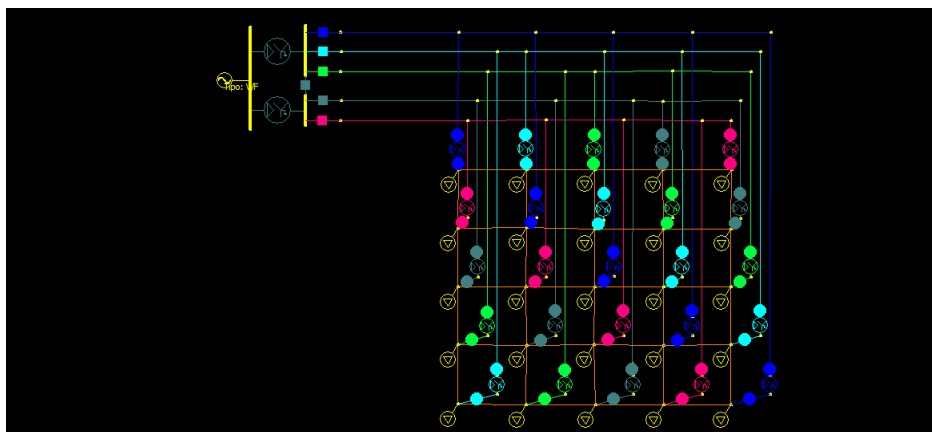
3.2 Rede completa com 77 barras

Exemplo ilustrativo de rede com 77 barras e 80 ligações que contém todos os segmentos de um sistema elétrico (geração, transmissão, distribuição primária e distribuição secundária). A matriz de susceptâncias e o vetor de potências injetadas estão descritos sob o nome “76A_Completa” nos dados fornecidos no site.



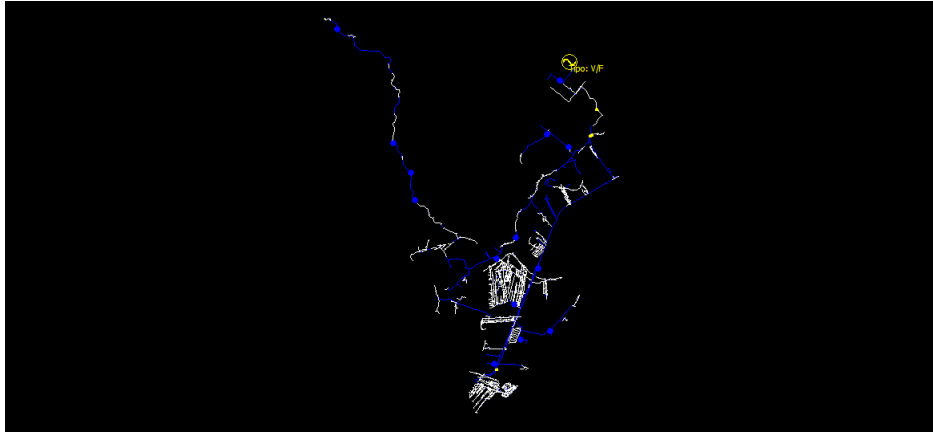
3.3 Rede reticulada

Exemplo rede reticulada com 77 barras e 117 ligações, inspirada no sistema reticulado usado pela Eletropaulo na região central de SP (rede em malha com confiabilidade superior). A matriz de susceptâncias e o vetor de potências injetadas estão descritos sob o nome “76B_Completa” nos dados fornecidos no site.



3.4 Rede real

Circuito primário real de uma concessionária elétrica contendo 6260 barras. A matriz de susceptâncias e o vetor de potências injetadas estão descritos sob o nome “6259_Completa” nos dados fornecidos no site.



3.5 Outros

Caso encontre na literatura outros exemplos que tenha interesse em resolver, inclua estes casos no relatório. Casos adicionais terão acrescidos um bônus na nota do exercício programa.

4 Fatoração QR de matrizes e seu uso na solução de sistemas lineares

Desenvolveremos aqui o método de fatoração QR de matrizes $n \times m$, com $n \geq m$, através de transformações de Householder, descritas a seguir:

Transformações de Householder:

Dado $w \in R^n$ definimos a transformação de Householder $H_w : R^n \rightarrow R^n$ dada por $H_w = I - \frac{2ww^t}{w \cdot w}$ (onde I é a identidade), que a cada $x \in R^n$ associa $H_w x = x - 2 \frac{w \cdot x}{w \cdot w} w$. Esta transformação determina a reflexão do vetor x em relação ao espaço w^\perp .

A transformação linear H_w é ortogonal e simétrica, ou seja, $H_w^{-1} = H_w^t = H_w$. Verifiquemos:

$$H_w^t = (I - \frac{2ww^t}{w \cdot w})^t = I - \frac{2(ww^t)^t}{w \cdot w} = H_w \quad \text{e}$$

$$H_w H_w = (I - \frac{2ww^t}{w \cdot w})(I - \frac{2ww^t}{w \cdot w}) = I - \frac{4ww^t}{w \cdot w} + \frac{4w(w^t w)w^t}{(w \cdot w)^2} = I$$

Observemos ainda que uma transformação ortogonal preserva a norma de um vetor, ou seja

$$\|H_w u\|^2 = H_w u \cdot H_w u = (H_w u)^t H_w u = u^t H_w^t H_w u = u^t I u = u^t u = \|u\|^2$$

Dados dois vetores x e y não nulos em R^n podemos definir uma transformação de Householder tal que $H_w x = \lambda y$, com $\lambda \in R$. Para tanto basta tomarmos $w = x + \alpha y$, onde $\alpha = \pm \frac{\|x\|}{\|y\|}$ (verifique!).

Como exemplo, consideremos x e y em R^3 , com $x^t = (1, 1, 0)$ e $y^t = (0, -1, 1)$. Definindo $w = x + y$ temos $w^t = (1, 0, 1)$ e

$$H_w x = x - 2 \frac{w \cdot x}{w \cdot w} w = x - w = -y \quad .$$

Note que para o cálculo de $H_w x$ não necessitamos da representação matricial da transformação H_w , bastando calcular os produtos escalares de w por x e de w por w e depois adicionar dois vetores. Poderíamos escrever a matriz que representa $H_w : R^3 \rightarrow R^3$ como

$$H_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e então multiplicar pelo vetor x . Isto não só é desnecessário, como seria computacionalmente bem mais ineficiente (teríamos $O(n^2)$ multiplicações na montagem de H_w e também no cálculo de $H_w x$ ao multiplicar a matriz pelo vetor, enquanto que o cálculo dos produtos internos e a soma dos vetores envolve apenas $O(n)$ operações).

Fatoração QR:

Agora iremos mostrar como transformar uma matriz $A_{n \times m}$, com $n \geq m$, em uma matriz $R_{n \times m}$, com $R_{i,j} = 0$ se $i > j$, através de sucessivas transformações de Householder. Ou seja, vamos definir transformações $H_{w_1}, H_{w_2}, \dots, H_{w_m}$, tais que $H_{w_m} \dots H_{w_2} H_{w_1} A = R$ e portanto, como as transformações de Householder são ortogonais e simétricas, teremos que $A = QR$, com Q ortogonal dada por $Q = H_{w_1} H_{w_2} \dots H_{w_m}$. Definiremos w_1 tal que a transformação H_{w_1} leve o vetor a_1 , correspondendo à primeira coluna de A em um múltiplo de e_1 , o primeiro vetor da base canônica do R^n . Isto é feito definindo $w_1 = a_1 + \delta \frac{\|a_1\|}{\|e_1\|} e_1 = a_1 + \delta \|a_1\| e_1$. Escolheremos o δ nesta expressão igual ao sinal do primeiro elemento de a_1 . Temos então $a_1^t = (A_{1,1}, A_{2,1}, \dots, A_{n,1})$, $e_1^t = (1, 0, \dots, 0)$ e $\delta = \text{sgn}(A_{1,1}) = 1$, se $A_{1,1} \geq 0$ e -1 caso contrário.

Após a aplicação de H_{w_1} à matriz A , esta irá adquirir o seguinte formato

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 0 & x & x & \dots & x \\ 0 & x & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & x & x & \dots & x \end{bmatrix},$$

onde os x representam valores quaisquer e zera-se a primeira coluna abaixo da diagonal principal. Suponha agora que foram executadas $i - 1$ etapas do processo e que a nova matriz $A = H_{w_{i-1}} \dots H_{w_2} H_{w_1} A$ possua zeros abaixo da diagonal principal em suas primeiras $i - 1$ colunas. Vamos agora definir a transformação de Householder H_{w_i} a ser aplicada a seguir. Escolhemos $w_i = a_i + \delta \frac{\|a_i\|}{\|e_i\|} e_i = a_i + \delta \|a_i\| e_i$, onde $a_i^t = (0, \dots, 0, A_{i,i}, A_{i+1,i}, \dots, A_{n,i})$, e_i é o i -ésimo elemento da base canônica do R^n e $\delta = \text{sgn}(A_{i,i})$. Como as primeiras $i - 1$ posições do vetor w_i serão nulas a aplicação da transformação H_{w_i} não irá alterar as primeiras $i - 1$ linhas da corrente matriz A e nem as suas primeiras $i - 1$ colunas. Como exemplo, vamos supor que após duas etapas do processo tenhamos chegado à matriz seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teríamos então $w_3 = a_3 + \|a_3\| e_3$, com $a_3^t = (0, 0, 2, -1, 2)$ e $e_3^t = (0, 0, 1, 0, 0)$. Assim, $w_3^t = (0, 0, 5, -1, 2)$ e após a aplicação de H_{w_3} à matriz A obteríamos nova matriz (após 3 etapas):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -11/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/15 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 11/15 & 5/3 \end{bmatrix}.$$

Note neste exemplo que nesta etapa só alteramos a submatriz onde tanto $i \geq 3$, como $j \geq 3$ e que o resultado corresponde à aplicação de uma transformação de Householder $H_{\tilde{w}_3}$ de R^3 em R^3 às 3 colunas desta submatriz, com $\tilde{w}_3^t = (5, -1, 2)$. (Faça as contas!). Este é um fato geral. A aplicação da matriz $H_{\tilde{w}_k}$ à matriz A na k -ésima etapa apenas altera a submatriz onde tanto $i \geq k$, como $j \geq k$. Tal fato deve ser usado na implementação do algoritmo, evitando-se operações desnecessárias. Após as m etapas do processo, a matriz A abaixo da diagonal principal estará zerada.

Resolvendo sistemas lineares através da Fatoração QR:

Sistemas determinados

Seja A uma matriz $n \times n$ não singular e $b \in R^n$. Podemos resolver o sistema linear $Ax = b$, com $x \in R^n$, com o auxílio da construção apresentada na seção anterior. Vimos que $H_{w_m} \dots H_{w_2} H_{w_1} A = R$, com R triangular superior. Como as transformações de Householder são ortogonais, a matriz R também será não singular. Para resolver o sistema, observemos que:

$$H_{w_m} \dots H_{w_2} H_{w_1} Ax = Rx = H_{w_m} \dots H_{w_2} H_{w_1} b = \tilde{b}.$$

Assim, se durante o processo de transformação da matriz A na matriz triangular superior R , também aplicarmos as transformações de Householder ao vetor b , terminaremos com um sistema linear equivalente $Rx = \tilde{b}$, de simples resolução.

Observação: Neste caso, como $n = m$, bastam $m - 1$ etapas do processo para obtermos R triangular superior. No caso geral o número de etapas deve ser igual ao mínimo entre m e $n - 1$.

Sistemas sobredeterminados

Seja A uma matriz $n \times m$ com colunas linearmente independentes e $b \in R^n$. Para solução do sistema $Ax = b$ no sentido de mínimos quadrados, ou seja, para a determinação de $x \in R^m$ que minimiza o valor de $E = \|Ax - b\|$, com a norma Euclidiana do R^n , também podemos fazer uso da fatoração $A = QR$. Primeiramente observemos que como Q é ortogonal (ou seja, $Q^t Q = I$) temos que $\|Q^t x\|^2 = (Q^t x)^t (Q^t x) = x^t Q Q^t x = x^t x = \|x\|^2$. Assim temos que minimizar o valor de $E = \|Ax - b\|$ é equivalente a minimizar $\|Q^t Ax - Q^t b\| = \|Rx - \tilde{b}\|$. Como as primeiras m linhas de R formam uma matriz $m \times m$ triangular superior e não singular, está definido unicamente $x \in R^m$ que satisfaz às m primeiras equações de $Rx = \tilde{b}$. Em virtude do fato de que as últimas $n - m$ linhas de R são nulas, estas equações não serão satisfeitas se o correspondente lado direito não for nulo, independentemente do valor de x . Assim, é evidente que a solução $x \in R^m$ das m primeiras equações de $Rx = \tilde{b}$ minimiza o valor de $\|Rx - \tilde{b}\|$ (e consequentemente de $E = \|Ax - b\|$). Mais ainda, obtemos que

$$E = \|Ax - b\| = \sqrt{\tilde{b}_{m+1}^2 + \tilde{b}_{m+2}^2 + \dots + \tilde{b}_n^2}.$$

Matrizes de Banda

Definimos para cada linha i de uma matriz dois valores, $inicio(i)$ e $final(i)$ como sendo, respectivamente, as colunas onde se encontram o primeiro e o último elemento não nulo desta linha. Associados a estes dois valores, podemos então definir a largura da banda esquerda da linha i $lbe(i) = i - inicio(i)$ e a largura da banda direita $lbd(i) = final(i) - i$. Definimos então a semilargura de banda da matriz como sendo o máximo dentre todos os valores de $lbe(i)$ e $lbd(i)$. Por exemplo, uma matriz tridiagonal tem semilargura de banda 1 (e largura de banda igual a 3). Matrizes com valores pequenos de semilargura de banda (com zeros quando nos afastamos da diagonal), permitem que de maneira simples se explore este padrão de esparsidade, para reduzir os custos computacionais dos algoritmos. Veremos a seguir, como podemos usar uma estrutura de banda para reduzir os custos computacionais durante o processo de redução de uma matriz A com semilargura de banda lb à forma triangularizada R através das transformações de Householder. Primeiramente observe que o vetor w_i (definindo a transformação de Householder H_{w_i}) tem suas primeiras $i - 1$ posições nulas. Além disso, se lb é a semilargura de banda da matriz, então as posições de $i + 1 + lb$ a n de w_i (caso $i + 1 + lb \leq n$) também serão nulas. Este fato pode ser explorado ao computarmos o produto interno de w_i por outros vetores, pois não temos que computar os termos que de antemão sabemos ser nulos. Além disso, a matriz R terá uma largura de banda direita no máximo igual a $2lb$ e portanto ao aplicar H_{w_i} à matriz modificaremos apenas as colunas de i até no máximo $i + 2lb$ (caso este valor ainda seja menor que m , a coluna final). A estrutura de banda de R também pode ser utilizada para economizar operações na solução do sistema $Rx = \tilde{b}$.

Ordem das linhas e a semilargura de banda

Se quisermos minimizar a semilargura de banda (o que favorece a economia computacional), podemos reordenar as linhas por ordem crescente de seu início (ou seja, a linha i deve anteceder a linha j caso $inicio(i) < inicio(j)$). Além disso, se $inicio(i) = inicio(j)$ e $fim(i) < fim(j)$ a linha i deve anteceder a linha j . Para diminuir ainda mais a semilargura de banda, seria necessário alterar também a ordem das incógnitas, mas a complexidade de como fazer isso ultrapassa o escopo deste projeto. (Os interessados podem por exemplo consultar o livro *Direct Methods for Sparse Matrices*, I. Duff, A. Erisman e J. Reid, Oxford Science Publications.)

Sua tarefa e testes

Dados uma matriz $A n \times m$ e um vetor $b \in R^n$ você deve desenvolver um algoritmo que através de sucessivas transformações de Householder transforma A na matriz triangular superior R e o vetor b no vetor modificado \tilde{b} e a seguir resolve o sistema $Rx = \tilde{b}$. Estes algoritmos devem ser escritos para poderem ser utilizados na solução dos problemas de seu projeto. Como testes iniciais dos algoritmos, considere os casos:

- $n = m = 64$, $A_{i,i} = 2$, $i = 1, n$, $A_{i,j} = -1$, $se |i - j| = 1$ e $A_{i,j} = 0$, $se |i - j| > 1$. Use $b(i) = 1$, $i = 1, n$.
- $n = 20$, $m = 17$, $A_{i,j} = 1/(i + j - 1)$, $se |i - j| \leq 4$ e $A_{i,j} = 0$, $se |i - j| > 4$. Use $b(i) = 1$, $i = 1, n$.

Após desenvolver e testar seu algoritmo, procure torná-lo mais eficiente no caso da matriz ter uma semilargura de banda lb (projetos que explorem bem este fato serão melhor avaliados). Use os exemplos acima para

testar se os mesmos resultados ainda são obtidos. Divirta-se!

Referências

- [1] William D. Stevenson Jr., *Elementos de Análise de Sistemas de Potência*, McGraw-Hill, São Paulo, 1986.